

2/83



THESE DE MAGISTER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Electrotechnique

exc

SUJET

ETUDE DU COMPORTEMENT DES BULLES DANS UN
DIELECTRIQUE LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP
ELECTRIQUE : REPARTITION DU CHAMP ELECTRIQUE
ET CRITERE D'INSTABILITE

Soutenue le 27 Juin 1983 par :

Mohamed Séghir BENMANSOUR

devant le jury :

Melle K. ALIA

Président

MM. A. BEROUAL

Rapporteur et Directeur de thèse

S. KWIATKOWSKI

A. DESCHAMPS

J. WOJCIECHOWSKI

} Examineurs

THESE DE MAGISTER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Electrotechnique

SUJET

ETUDE DU COMPORTEMENT DES BULLES DANS UN
DIELECTRIQUE LIQUIDE SOUMIS A UN CHAMP
ELECTRIQUE : REPARTITION DU CHAMP ELECTRIQUE
ET CRITERE D'INSTABILITE

Soutenue le 27 Juin 1983 par :

Mohamed Séghir BENMANSOUR

devant le jury :

Melle K. ALIA : Maître de Conférences

Président

MM. A. BEROUAL : Docteur ès-Sciences Techniques ...

Rapporteur et Directeur de thèse

S. KWIATKOWSKI : Professeur

A. DESCHAMPS : Maître de Conférences

J. WOJCIECHOWSKI : Maître de Conférences

} Examineurs

DEDICACES/

J'aimerais que mes parents trouvent dans ce modeste travail le fruit de toute une vie de sacrifice et de privation.

- A mon père que j'estime beaucoup et à qui je lui dois tout.
- A ma mère qui demeure toujours un trésor de patience, et qui a toujours su me consoler et me rappeler qu'il ya un Dieu en qui puissant et miséricordieux.
- A mon beau frère Djamel et à sa femme.
- A mes frères et sœurs.
- A Tous ceux qui me sont chers.

R E M E R C I E M E N T S

Il m'est impossible de dire en peu de lignes tout ce que je dois à Monsieur BERDUAL Abderrahmane Docteur es sciences techniques et Directeur de cette thèse. Je n'aurais pu sans peine me passer de ses conseils éclairés et de son bienveillant appui pour mener à bien ce travail.

Ma gratitude profonde envers Messieurs A. DESCHAMPS, A. BOUBAKEUR et R. TOBAZEON qui ont bien voulu ajouter quelques remarques intéressantes et aussi pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Mes remerciements vont également à Mademoiselle K. ALIA Maître de conférence et Chef de département du Génie Chimique à l'Ecole Nationale Polytechnique qui a bien voulu accepté de présider ce jury.

Que Messieurs S. KWIATKOWSKI et J. WOJCIECHOWSKI respectivement Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique et Maître de Conférence à USTHB veuillent bien trouver ici l'assurance de ma vive gratitude pour avoir accepté de faire partie du jury.

Tout au long de mon travail, j'ai contracté des dettes de reconnaissances envers un grand nombre de personnes qui, de près ou de loin m'ont apporté leur aide et leurs encouragements, et qu'ils l'on fait de façon si bienveillante et désintéressée que j'en suis encore rempli de confusion.

Notations.

Les indices (1) et (2) correspondent respectivement au milieu liquide et aux particules impures en suspension.

E_1, E_2 champs électriques dans (1) et (2)

E_{1t}, E_{2t} composantes tangentielles

E_{1n}, E_{2n} composantes normales

D_{1n}, D_{2n} composantes normales de \vec{D}_1 et \vec{D}_2

Φ_1, Φ_2 potentiels électriques correspondant à (1) et (2)

U tension entre électrodes.

l intervalle entre électrodes

a semi-axe majeur de l'ellipsoïde

b semi-axe mineur de l'ellipsoïde

c distance du foyer de l'ellipsoïde au centre de la particule.

n nombre de particules sur une ligne de champ électrique.

σ densité de charge électrique superficielle d'une particule.

γ_2 Conductivité d'une particule

γ_1 Conductivité du liquide / considérée comme nulle.

ϵ_1, ϵ_2 permittivités dielectriques du liquide et des particules.

z_1, z_2 position du modèle unitaire par rapport aux électrodes.

(η, θ, ψ) système de coordonnées ellipsoïdales.

R_0 rayon initiale de la particule

$Q_p(x)$ fonction de Legendre de deuxième espèce.

TABLE DES MATIERES.

- 1_ Introduction.
- 2_ Position du problème.
 - 2.1_ Origine des bulles.
Modèle de : — KAO
— GARTON et KRASUCKI.
— TAYLOR et GEOFFREY
— FELICI.
— STIEPANTCHOUK.
— MELCHER et TAYLOR
— BEROUAL
- 3_ Définition du modèle.
 - 3.1_ Définition du modèle.
 - 3.2_ Justification du choix du modèle.
 - 3.3_ Equations régissant le modèle.
- 4_ Calcul du champ
 - 4.2_ Etude de la distribution du champ (répartition courbes, influence des divers facteurs sur le champ)
- 5_ Etude du comportement de la déformation des bulles dans un champ électrique.
 - 5.1_ Equation de la forme de la bulle.
 - 5.2_ Etude de la déformation.
 - 5.3_ Critère d'instabilité.
- 6.1_ Discussions (Application des résultats théoriques pour une vérification d'observations expérimentales)
- 6.2_ Conclusion.

INTRODUCTION

Le problème de la conduction des liquides diélectriques dans les champs forts, jusqu'au claquage inclus est très complexe; un grand nombre de processus nouveaux et mal connus intervient. Il existe de nombreuses interprétations de l'apparition du claquage dans les diélectriques liquides. Certains l'attribuent à des phénomènes macroscopiques, telle que la concentration d'une grande quantité de chaleur en un point particulier (le plus souvent près de la cathode), la présence d'impuretés, de particules en suspension, de bulles de gaz... Par contre, d'autres pensent que ce phénomène est strictement lié à la microstructure du liquide.

D'une manière générale, les théories émises pour expliquer le mécanisme du claquage peuvent être classées en deux groupes :

La première dite électronique, la seconde liée à des processus de collisions et d'ionisation pouvant se produire dans les bulles de gaz et dite théorie des bulles.

La théorie électronique de claquage n'est qu'une extension de la théorie de TOWNSED sur la décharge dans les gaz appliquée à un liquide.

La principale objection qu'on peut faire à cette théorie est qu'elle est incapable de prévoir l'influence d'une pression relativement faible (≤ 20 bars) qui n'altère certainement pas le libre parcours moyen, d'autre part, elle ne s'applique qu'au cas des champs particulièrement élevés (quelques MV/cm) pour lesquels le deuxième coefficient de TOWNSED γ est suffisant

Le mécanisme des bulles a essentiellement pour but d'expliquer l'influence de la pression sur le claquage ; mais là non plus, il n'y a pas unanimité quand à la manière dont se créent les bulles. L'apparition d'une bulle conductrice instable est un évènement catastrophique qui peut conduire au claquage du liquide.

Le but de notre travail est d'apporter une contribution à l'étude du comportement de ces bulles lorsqu'elles sont soumises à un champ électrique. Pour ce faire on définira un modèle de bulle à partir duquel seront déterminées les expressions mathématiques des champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 respectivement dans le milieu liquide et à l'intérieur de la bulle. Par contre on étudiera la distribution des champs en fonction de plusieurs paramètres ce qui nous permettra d'en apprécier les conséquences sur le comportement des bulles.

La deuxième partie sera consacrée à l'étude de la déformation des bulles dans un champ électrique et de se pencher sur sa stabilité. Il s'agira en particulier de vérifier la validité du critère de GYEMANT [1] concernant le claquage des liquides diélectriques par élongation des bulles.

En effet d'après GYEMANT, lorsque la bulle étudiée couvre au moins 60% de l'intervalle entre électrodes, soumise à un champ électrique elle formera un canal qui après ionisation conduit au claquage. Dans le cas où ce paramètre $[\alpha = 2R_0/l]$ (rapport du diamètre initial de la bulle par la distance entre électrodes) est inférieur à 60% la bulle après allongement se désintègre sans pour autant former un canal.

2. Position du problème

1. Origine des bulles.

La théorie des bulles a été principalement développée pour expliquer la dépendance de la rigidité diélectrique des liquides de la pression appliquée et de l'évolution des gaz. En 1968, KRASUCKI [2] a décelé l'apparition des bulles de vapeur dans une huile très visqueuse (purifiée, filtrée et dégazée) telle l'héxachloro diphényle. Soumises à des champs très élevés, selon KRASUCKI, les bulles seraient créées en des points de pression nulle. Le facteur le plus probable parmi ceux pouvant provoquer la formation de tels points serait la présence de particules solides (impuretés) en suspension dans le liquide; ces particules pourraient être des particules métalliques sphériques de rayon variant de 100 à 250 Å dues à la vaporisation du matériau de l'électrode durant la phase de conditionnement des électrodes; elles pourraient également être de petites bailles et subsisteraient après purification du liquide.

À la mise sous tension, ces particules conductrices au sein du liquide se dirigeraient vers les électrodes. Elles les atteignent au bout d'un certain temps t que KRASUCKI suppose être le temps statistique de retard au claquage. En un point de la surface d'une particule, la pression superficielle et la pression hydrostatique seraient renforcées. La vaporisation commencerait par le bombardement par électrons des parois de la cavité ainsi formée, et la bulle se développerait rapidement jusqu'à une taille critique. Les électrons et les ions peuvent être accélérés dans ces bulles ainsi que des avalanches locales conduisant au claquage.

KOCAIN et SOBRA [3], observent que les bulles ne se formeraient pas nécessairement à une des surfaces des électrodes, mais aussi en d'autres points de l'intervalle et qui sont parfois des sites d'impuretés. Ces bulles en mouvement d'oscillation entre les électrodes peuvent s'immobiliser pendant une durée considérable à l'une des électrodes.

KAO [4], admet que les bulles peuvent apparaître dans le liquide à partir du gaz absorbé sur les électrodes ou de la vaporisation locale au voisinage des irrégularités des électrodes provoquées par le champ électrique et la dissociation des molécules sous les chocs d'électrons émis par la cathode.

BASSECHES et MC LEAN [5], ont mis en évidence un phénomène de dégagement de gaz (gassing) lors d'une application d'un champ électrique alternatif de 150 KV/cm. à un diélectrique liquide (huile organique).

La formation des bulles pourraient être ainsi due au gaz dissous dans le liquide dans les régions de champs forts, de l'électrolyse d'impuretés ou de la vaporisation du liquide.

GOSSE [6] propose deux mécanismes de formation de bulles : d'une part la cavitation hydrodynamique que se produit quand la pression en un point du liquide s'abaisse en dessous de la pression de vapeur saturante ; d'autre part l'ébullition locale que peut produire la dissipation d'énergie associée à des fortes densités locales de courant, par exemple en certains points émissifs de la cathode.

Cavitation et ébullition se produisent très difficilement et de façon explosive dans les liquides très "propres".

Cela se comprend assez bien, puisque une concentration considérable d'énergie est nécessaire en principe pour vaincre les forces d'attraction moléculaire et suggère que les bulles apparaissent, dès lors de la cavitation, sur les germes microscopiques où de petits volumes gazeux seraient piégés [8] [9]. Ces germes pourraient être des fissures « hydrophobes » sur les électrodes ou à la surface de particules solides en suspension [10], ou encore des bulles dont la paroi serait tapissée d'une couche dipolaire dont l'action s'opposerait aux forces de tension superficielle qui tendent à la contracter [11]. Les bulles de cavitation peuvent également être produites par des perturbations locales, par exemple dans un liquide en dépression sur les trajectoires de particules de hautes énergies (chambre à bulles) ou au point de contact des deux surfaces métalliques frottées l'une contre l'autre (TRIBUÉLECTRISATION). C'est également un phénomène de cavitation d'origine électrique cette fois-ci, qui est la base du modèle de KRASUCKI [2]. Les forces électrostatiques s'exerçant entre les deux couches interfaciales auraient tendance à "évaser" le liquide qui se soulèverait ainsi des cathodes. L'espace entre le métal et le liquide serait initialement vide, puisque le soulèvement est instantané alors que la vaporisation du liquide est progressive et le métal émettrait des électrons dans le vide de la cavité. Les électrons accélérés par le champ électrique bombarderaient le liquide en dissipant à l'impact une énergie suffisante pour former une bulle de vapeur.

D'après KAO et HIGHAM [7], la valeur du champ disruptif augmente en général quand la pression augmente ce qui favorise le développement des théories prévoyant la formation d'une phase gazeuse lors du déclenchement du claquage. Lors des surtensions, le champ électrique au voisinage du bord des armatures d'un condensateur de puissance est susceptible d'être de plusieurs MV/cm., c'est à dire de l'ordre de grandeur du champ de claquage des liquides diélectriques ; d'où des dégagements de chaleur très importants et qui peuvent donner naissance à des bulles de vapeur. Les traces d'eau et d'humidité dans les diélectriques sous forme de gouttelettes jouent également un rôle identique à celui des bulles de gaz. L'origine de ces gouttelettes d'eau est liée à divers paramètres ; conditions atmosphériques, conditions d'exploitation ; cela peut être due également à une mauvaise étanchéité du transformateur ayant comme isolant l'huile.

2.2. Rôle des bulles dans le claquage.

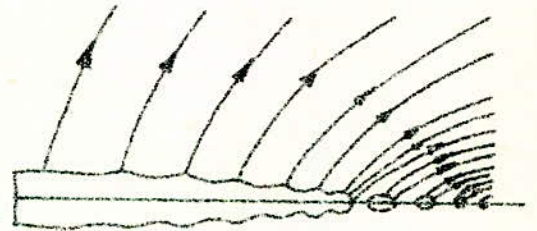
Le rôle des bulles de gaz et de gouttelettes de liquide en particulier l'eau dans le mécanisme de claquage n'est plus à démontrer. Que ce soit par leur déformation ou par leur désintégration ou encore par les phénomènes d'ionisation (décharges partielles) dont elles peuvent être le siège, les bulles jouent un rôle déterminant dans le claquage des liquides

GYEMANT [8], SWAN et LEWIS [9], WATSON et SHARBAUGH [10], ont clairement mis en évidence le rôle joué par les bulles de gaz et de liquide qui apparaissent près de la cathode, juste avant le claquage, à la suite d'une émission électronique très forte. Dans ces conditions, il se dégage dans le liquide des énergies très importantes (de 10^4 à 10^7 J/cm³) pouvant provoquer une ébullition locale.

En essayant de déterminer le rôle des bulles de gaz dans le claquage de l'huile de transformateur pour des champs uniformes, SHÖNE [11], constata que les bulles de gaz initialement sphériques étaient progressivement déformées en une ellipsoïde de révolution dans la direction du champ le plus proche ce qui expliquerait que le champ est plus fort à l'extrémité de la bulle la plus proche de l'électrode qu'à l'extrémité opposée.

SHÖNE déduit de ses observations que c'est la concentration des bulles qui provoque le claquage, contrairement à ce qui a été postulé par plusieurs auteurs, considérant l'élongation des bulles dans la direction du champ comme critère de rupture diélectrique.

Des observations expérimentales de l'élongation des bulles de gaz et de liquide dans la direction du champ appliqué et leur désintégration en un nombre plus petits au fur et à mesure que le champ augmentait ont été rapporté par plusieurs chercheurs. Cependant tous ces derniers n'ont pas été unanimes en ce qui concerne la direction de la déformation. Tout dépend du modèle considéré.



2.2.1. MODÈLE DE KAO.

D'après KAO [12], une bulle isolante dans un champ électrique peut se maintenir allongée : son équilibre est stable. Si la différence de potentiel entre les extrémités de la bulle dépasse la tension d'amorçage dans la bulle, qui peut être évaluée en première approximation par la loi de PASHEN, la bulle devient conductrice. FELICI [13] montre que cette bulle devient alors instable si $\frac{\epsilon_r \epsilon_0 E_1^2 R_0}{A} < 0,206$ (A étant la tension superficielle et R_0 le rayon de la bulle.) ce qui est pratiquement toujours le cas pour des valeurs de R_0 raisonnables ($\sim \mu\text{m}$) dans les liquides polaires.

La condition de claquage est donc telle que la longueur de la bulle ($2a$) dans le champ satisfait la relation :

$$2a E_1 = C U_p$$

où E_1 : champ dans le liquide

U_p : tension de PASCHE.

C : constante fonction du liquide et du gaz contenu dans la bulle.

Le calcul prévoit que pour des pressions hydrostatiques élevées et pour un liquide à grande permittivité ϵ_r , l'intersection de la courbe de PASCHEN avec la tension à travers la bulle $2aE$ peut disparaître. Il en résulterait une disparition du rôle des bulles dans le claquage. Ceci n'a pas encore été vérifié.

2.2.2. MODÈLE DE GARTON-KRASUCKI

Partant d'une bulle immergée dans un liquide isolant (c'est à dire en négligeant complètement les conductivités des milieux liquides et de la bulle). GARTON et KRASUCKI [14] ont montré théoriquement que soumise à un champ uniforme, la bulle prend une forme proche d'un ellipsoïde de révolution, dans la direction du champ appliqué. Ils établirent les équations de l'élongation de ces bulles en fonction de l'intensité du champ, d'où ils déduisèrent que tant que l'intensité du champ appliqué est croissante les bulles compressibles (gaz) et non compressibles (gouttes de liquides) pour lesquelles la permittivité diélectrique ϵ_2 de la bulle excède de 20 fois celle du milieu liquide ϵ_1 , s'allongent dans la direction du champ et prennent la forme d'un ellipsoïde de révolution, et ce jusqu'à atteindre son état critique correspondant à un rapport des demi-axes majeur par le mineur (a/b) de 1.85 cm. au delà duquel elles se désintègrent. Dans le cas où le rapport ϵ_2/ϵ_1 est inférieur à 20, les bulles n'ont pas de formes critiques et le rapport a/b croit indéfiniment avec l'intensité du champ jusqu'à joindre les électrodes par un canal.

Ils énoncèrent ainsi un critère de rupture dans les liquides.

Les résultats ainsi obtenus ont confirmé ceux de TAYLOR [15], KAO [12], VERVERA et HON [16], PANTCHENKOV et OTSABEK [17].

Utilisant l'expression de la pression électrostatique en un point quelconque de la bulle donnée par SMYTHE [18], GARTON et KRASUCKI ont pu établir, en passant par l'équation de l'équilibre des forces, l'expression de la forme de la bulle s'écrit :

$$C_x - C_T = \frac{1}{8\pi\sigma_f\epsilon_1} (E_1 - E_2)^2 E_2^2 \cos^2\alpha$$

avec :

- σ_f : tension superficielle (de surface) de la bulle.
- C_x, C_T : courbures aux points x et T
- α : l'angle que fait \vec{E}_2 avec la normale à la courbe.

2.2.2. MODÈLE DE STIEPANTCHOUK et TINIAKOV

STIEPANTCHOUK et TINIAKOV [19], partant d'un modèle d'une bulle immergée d'un diélectrique liquide de conductivités (γ_2, γ_1) et de permittivités (ϵ_2, ϵ_1) respectivement déduisèrent que les bulles ionisées s'allongent dans la direction perpendiculaire au champ appliqué alors que les bulles non ionisées conservent leur allongement suivent la même direction que celle du champ. D'autre part ils n'ont pas remarqué la possibilité de la bulle de passer dans un état d'instabilité.

2.2.4. MODÈLE DE MELCHER et TAYLOR.

C'est les premiers [20], qui ont pris en considération l'influence des phénomènes de mise en mouvement (phénomène électrohydrodynamiques) sur le comportement de la bulle. Ils montrèrent qu'en présence d'un champ électrique, la bulle s'allonge ou s'applatit en fonction des conductivités et des permittivités de la bulle et du milieu liquide.

2.2.5. MODÈLE DE FELICI

S'inspirant d'un modèle de champ similaire au champ magnétique autour d'une tâche élargie de plasma, il simula son modèle en utilisant un cylindre de rotation (r, b) , r : étant le rayon du cylindre, b : le demi-axe mineur de la bulle gazeuse [fig. 1]

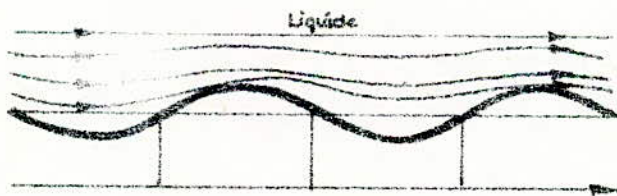


fig. 1 - Cylindre à gaz de rotation déformée avec un champ uniforme appliqué parallèlement à l'axe de rotation.

Le gaz utilisé possède une grande permittivité ϵ_r , les lignes de forces seront alors tangentes à l'interface.

Suivant la forme géométrique, il détermina la fonction potentielle ψ par la théorie de Bessel.

Le développement des fonctions de Bessel est donné par :

$$J_p(q.r) = \frac{(q.r h)^p}{\Gamma(p+1)} \left\{ 1 - \frac{(q.r/2)^2}{1!(p+1)} + \frac{(q.r/2)^4}{2!(p+1)(p+2)} - \dots \right. \\ \left. - \frac{(q.r/2)^6}{3!(p+1)(p+2)(p+3)} + \dots + \frac{(-1)^r (q.r/2)^{2r}}{r!(p+1)(p+2)\dots(p+r)} \right\}$$

où Γ : fonction Gamma.

Et pour $p=0$, la fonction de Bessel J_p devient.

$$J_0(q.r) = 1 - \frac{(q.r/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(q.r/2)^4}{(2!)^2} - \dots - (-1)^r \frac{(q.r/2)^{2r}}{(r!)^2} + \dots$$

$$\psi = \left(\frac{r}{2}\right) + \eta r H_1^{(1)}(i r) \cos x \quad (\eta \ll 1)$$

où $H_1 = J_1 + i N_1$ et qui possède l'allure de e^{-r} . Pour r petit il trouve que :

$$\psi = \left(\frac{r}{2}\right) + \eta \left[2 - r \ln \frac{2}{\gamma r} \right]$$

γ étant la constante d'Euler, $\gamma = 1,781..$

L'amplitude $\Delta r =$ très faible

Connaissant ψ , il déduit le champ E ,

$$E = 1 - 2\eta \cos x \ln \frac{2}{\gamma r} \quad \text{et} \quad \lambda = 2\pi$$

L'équation aux dimensions est :

$$\frac{\Delta P_e}{P_e} = \frac{2 \Delta E}{E} = 8\pi (r \Delta r / \lambda^2) \ln(\lambda / \pi \gamma r)$$

pour $\lambda = 2a$, $r \approx b$.

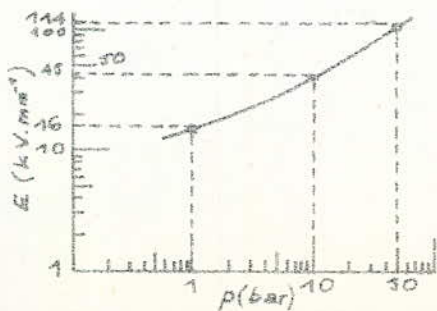
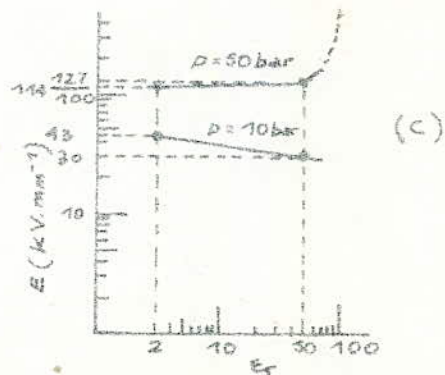
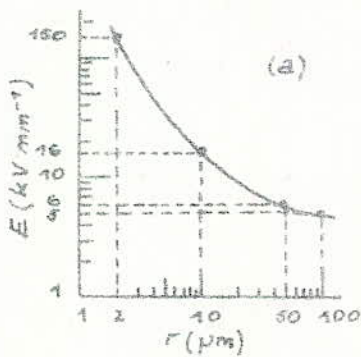
Il admet que la pression électrostatique donne un effet stabilisateur (d'après la loi de conservation d'énergie du système). Son concept repose sur le fait qu'il y a compétition entre le gain d'énergie électrostatique et la dépense d'énergie superficielle pendant l'allongement.

Par conséquent la pression électrostatique sera d'autant plus grande au niveau des ventres qu'au niveau des noeuds. La pression due à la tension superficielle $\gamma_{0q} = \frac{2\sigma_a}{b^2}$ sera par contre plus accentuée aux pôles qu'à l'équateur.

Il déduisit un critère de stabilité à partir de son analyse pour une bulle isolante non conductrice. Son critère s'écrit :

$$4\pi^2 \frac{b}{a} \ln \frac{2a}{\pi \gamma b} > 1$$

Pour une bulle conductrice, il aboutit au même résultat que GARTON et KRASUCKI à savoir que pour $a/b > 1.85$, il ya claquage. Enfin sans le prouver expérimentalement il arrive à prédire un fait remarquable à savoir que la tension de claquage d'un liquide polaire ($\epsilon_r = 70$) tel le propylène de carbonate pourrait devenir extrêmement grande à des pressions élevées. Ce qui représente un apport bénéfique pour l'amélioration des diélectriques liquides. Voir fig. 2



(b)

fig. 2 - a, b, c

2.2.6. MODÈLE DE BEROUAL.

Considérant une bulle ou une goutte de liquide de permittivité ϵ_2 et de conductivité γ_2 immergée dans un milieu liquide de permittivité ϵ_1 et de conductivité γ_1 et soumis à un champ électrique uniforme, BEROUAL [21], constata qu'une bulle ne prend pas forcément, lors de sa déformation, la forme d'une ellipsoïde de révolution ; cependant la déformation s'effectue toujours dans la direction du champ. Partant d'une expression assez générale de la pression électrostatique qu'il détermina [22], il a pu établir une expression très intéressante de la forme de la bulle. Il démontra que dans un champ légèrement divergent ou avec une bulle possédant une charge globale non nulle une dissymétrie dans la forme de la bulle est possible. Ceci a été vérifié expérimentalement au moyen d'une caméra rapide.

En considérant une goutte d'eau immergée dans l'huile de silicone et situé à proximité de la cathode, il remarque [] qu'une fois le champ appliqué la goutte s'allonge assymétriquement ; la courbure du côté de la cathode, dû à l'effet de la force image, est la plus importante.

Cependant il est excessivement difficile d'avoir expérimentalement une charge globale différente de zéro du fait que les porteurs de charges venant se coller à la surface de la bulle sous l'influence du champ, tendent à se neutraliser.

3. Définition du modèle

3.1. Description du modèle.

La méthode décrite dans ce rapport constitue un outil fondamental permettant d'apporter une réponse graduée à des problèmes déjà connus et relatifs au comportement d'un diélectrique liquide soumis à des tensions quelconques.

Le modèle proposé est constitué de plusieurs cellules identiques (fig. 3). Chaque cellule comporte une particule déformable, c'est à dire une bulle de gaz ou de liquide. La bulle épouse la forme d'un ellipsoïde de révolution et se situe au milieu de la cellule; ce qui donne au modèle un caractère de symétrie. Le modèle est statique, c'est à dire que les particules ne sont en aucune manière influencées par la mise en mouvement du liquide. Comme le nombre de paramètres pouvant affecter notre système (phase : liquide - bulle de gaz ou phase : liquide - goutte de liquide) est assez important ce que nous ne pouvons étudier simultanément, on est amené alors de poser certains hypothèses au préalable sur notre modèle.

En effet, on supposera que la température demeure sensiblement inchangée de manière à rejeter toute idée associant le phénomène de claquage à une théorie thermique, ce dont on y reviendra dans la suite.

D'autre part, il est aussi connu en vertu de expériences effectuées qu'il existe une interdépendance entre le diélectrique liquide et le comportement des particules chargées en suspension, voir leur concentration, leur nature (impuretés ioniques, addition chimique.)

On admettra qu'il y a électroneutralité donc la charge globale de ces particules est nulle et que la conductivité γ_2 est de plusieurs fois supérieure à celle de l'isolant. Cette considération est bien acceptable si le liquide isolant est très bien purifié. Les électrodes sont idéales et planes et ne comportent pas d'aspérités. C'est d'ailleurs l'hypothèse de MIRZA et SMITH [23], (1970), dont tout le monde de la recherche relatif à ce domaine l'admet comme plausible. Le phénomène de polarisation est considéré négligeable, et, ceci pour deux raisons :

- On travaille à champ uniforme avec des fréquences pratiquement nulle.
- Et d'autre part même s'il existe, il ne peut être pris en compte effectivement.

En effet, pour une gamme de champ fort (quelques MVolts. cm^{-1}) la permittivité ne varie que de quelques pourcents. les valeurs relatives aux permittivités seront par conséquent prises à partir des tables existantes dans la littérature.

L'influence des couches doubles pouvant éventuellement se former à la suite d'absorption d'ions à l'interface est négligeable. Les phénomènes de mouvement sont supposés aussi négligeables. On admettra que la position des particules n'est d'aucune façon perturbée par des facteurs liés aux phénomènes électrohydrodynamiques.

Il est bien clair cependant que durant notre analyse, on remarquera que tous ces facteurs sont inévitables pour un système réel, en particulier la présence d'humidité et surtout l'emploi des matériaux synthétiques.

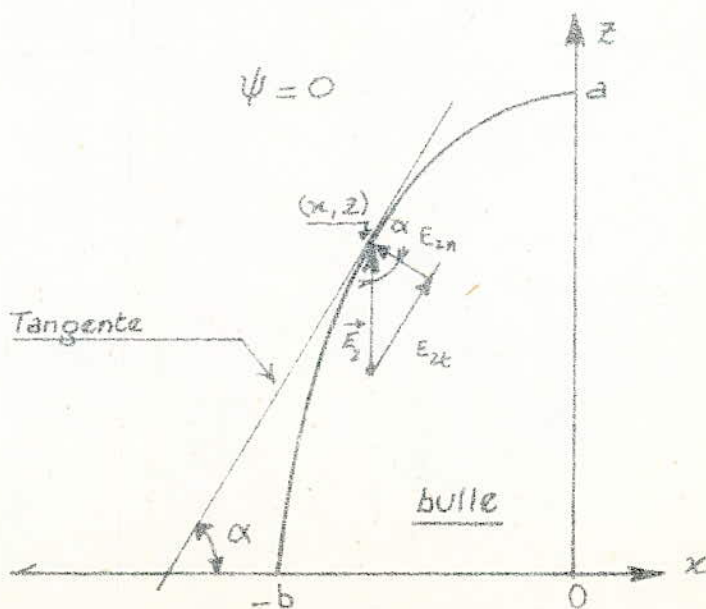
Dans notre cas, on pourra avancer la chose suivante : les conditions expérimentales sont telles que par le biais d'un contrôle adéquat il est possible d'étudier l'influence de certains paramètres tout en fixant les autres.

Le modèle proposé est constitué de plusieurs cellules (fig.1a) identiques. Par conséquent, on considérera une seule cellule (fig.3b) pour laquelle on établira les expressions du champ électrique qu'on appliquera par la suite au cas général.

Toutes les hypothèses étant satisfaites, le modèle considéré obéit à l'équation de Laplace :

$$\Delta \phi = 0 \quad (*)$$

Les propriétés des harmoniques qui satisfont cette équation ont été amplement étudié en détail dans la littérature ; par conséquent, nous ne nous limiterons qu'à certaines solutions suffisantes pour traiter le problème dans les deux milieux caractérisés par leurs permittivités et leurs potentiels respectifs (ϵ_1, ϕ_1) et (ϵ_2, ϕ_2) .



◀ Fig. 4

3-1. Justification du choix du modèle

Il est bien connu qu'une bulle de gaz ou de liquide immergée dans un diélectrique liquide soumis à un champ électrique se déforme dans la direction du champ appliqué.

Dans la plupart des modèles considérés jusqu'à nos jours excepté celui de BEROUAL [21], la forme de la bulle allongée est toujours proche d'un ellipsoïde de révolution. C'est à cette forme ellipsoïdale qu'on s'intéressera dans notre étude. Pour cela on va essayer de justifier ce choix en considérant le cas des bulles compressibles afin de pouvoir en dégager une expression mathématique nous permettant d'estimer l'approximation qui sera faite sur le modèle choisi.

On adoptera dans ce qui va suivre la méthode de RAYLEIGH (1916) qui consiste à établir et à résoudre une équation d'équilibre entre les pressions agissantes sur une bulle en n'importe quel point de sa surface.

Pour ce faire, on considère une bulle de permittivité ϵ_2 dans un liquide diélectrique de permittivité ϵ_1 soumis à un champ électrique E ; la bulle est supposée libre et dépourvue de toute charge. La forme de la bulle déformée est supposée allongée dans la direction du champ est symétrique par rapport à l'axe des z (du système cartésien).

Soient R_1 et R_2 les rayons de courbures principaux aux points (x, z) de l'intersection entre la surface de la bulle avec le plan $y=0$ (voir fig. 4). La courbure totale en ce point sera donnée par :

$$C_x = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ceci peut aussi s'écrire d'après [2]

$$C_x = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} (x \sin \alpha) \quad \text{avec } \alpha = \text{Arctg.} \frac{dz}{dx} \quad (1)$$

La pression due à la tension de surface σ_f en ce point est alors égale à :

$$\sigma_f \cdot C_x \quad (2)$$

Par ailleurs, le champ à l'intérieur de la bulle déformée est uniforme. $\vec{E}_{2,t}$, $\vec{E}_{2,n}$ sont les composantes tangentielle et normale du champ \vec{E}_2 au point (x, z) . D'après SMITH (1950) les composantes de la traction électrostatique au point considéré sont :

$$P_{e,t} = \frac{1}{8\pi} E_{2,t}^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$$P_{e,n} = \frac{1}{8\pi} E_{2,n}^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

Il vient donc que la pression électrostatique totale au point (x, z) s'écrira alors :

$$P_{e,x} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \left[E_{2,t}^2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{2,n}^2 \right] \quad (3)$$

Comme $E_{2,t} = E_2 \sin \alpha \quad (4)$

et $E_{2,n} = E_2 \cos \alpha \quad (5)$

on a

$$P_{e,x} = \frac{1}{8\pi \epsilon_1} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \left\{ \epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin^2 \alpha \right\} E_2^2 \quad (6)$$

En adoptant la méthode de RAYLEIGH à l'équilibre, on aura

$$P + P_{e,x} + \sigma_f C_x = P_b \quad (7)$$

où P_b : pression à l'intérieur de la bulle .

P : pression à l'extérieur de la bulle .

au point $x=b$, on a

$$P + P_{e,b} + \sigma_f G_b = P_b \quad (8)$$

Par soustraction de (8) et (7) et après injection de (6) on aboutit à :

$$G_x - G_b = k_1^2 \cos^2 \alpha = k_1^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha \quad (9)$$

avec

$$k_1^2 = \frac{E_2^2}{8\pi\sigma_f\epsilon_1} (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2$$

Remarquons que pour $\alpha = \pi/2$ c'est à dire à l'équateur les courbures $G_x = G_b$ sont identiques ce qui confirme l'hypothèse sur la symétrie supposée ...

D'autre part d'après (9), contrairement à ce qui a été postulé par certains auteurs, quelque soit le rapport des grandeurs de ϵ_1 et ϵ_2 ($\epsilon_1 > \epsilon_2$ ou $\epsilon_1 < \epsilon_2$) la bulle s'allonge toujours dans la direction du champ. Les résultats de GARTON et KRASUCKI sont confirmés et vérifiés par FELICI en ce qui concerne le degrés de l'approximation. Certains chercheurs jugèrent plus commode d'écrire l'équation [2] sous une autre forme et ceci afin de comparer, les valeurs théoriques et expérimentales, la forme de la bulle lors de sa déformation (voir Tableau 1.)
En utilisant l'équation [] il vient :

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} (x \sin \alpha) = k_1^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha \quad (9.a)$$

On pose $k_2^2 = G_b + k_1^2$

de l'expression $\alpha = \text{Arctg} \frac{dz}{dx}$

on tire :
$$\sin \alpha = \frac{\frac{dz}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (9.b)$$

Mc LACHLAN en (1950) est parvenu à trouver une transformation qui permet de donner à l'équation [] une forme plus simple pouvant être exploitée. Il injecte une solution à cette équation qui a l'allure suivante

$$u = \exp k_1^2 \int^x \sin \alpha dx \quad (9.c)$$

En dérivant deux fois cette expression par rapport à x , il obtient,

$$u' = k_1^2 u \sin \alpha \quad (9.d)$$

$$u'' = \left\{ k_1^2 \frac{d}{dx} \sin \alpha + k_1^4 \sin^2 \alpha \right\} u \quad (9.e)$$

En substituant (9.d) et (9.e) dans (9.a) et après un arrangement, on obtient une équation différentielle du second ordre qui n'est autre que l'équation de Bessel,

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - (k_1 k_2 x)^2 u = 0 \quad (9.f)$$

dont la solution est :

$$u = A I_0(k_1 k_2 x) + B K_0(k_1 k_2 x) \quad (9.g)$$

I_0, K_0 sont les fonctions de Bessel modifiées, et par une simple substitution de (9.g) et (9.b) il en ressort en définitif que :

$$\frac{dz}{dx} = \left\{ \left[\frac{k_1 I_0(k_1 k_2 x)}{k_2 I_1(k_2 k_1 x)} \right]^2 - 1 \right\}^{-1/2} \quad (10)$$

I_0, I_1 sont des fonctions de Bessel modifiées de première espèce.

Par un calcul numérique et en faisant un petit programme de l'équation (10) avec comme domaine d'intégration

obtenu entre les limites b et x , on obtient les valeurs de z calculées à partir des équations (10) et (12). La valeur de b (semi-axe mineur) est déterminé en fonction de K_1 et K_2 et par la condition aux limites,

$$K_2 I_1(K_1 K_2 b) = K_2 I_0(K_1 K_2 b) \quad (11)$$

Remarquons cependant que, dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à la nature mathématique de la forme de la bulle et le fait que l'approximation de notre modèle considéré soit raisonnable.

Pour un essai d'intégration, le choix de valeurs proposées par GARTON et KRASUCKI est déterminé en fonction de K_1 et K_2 par la condition,

$$K_2 I_1(K_1 K_2 b) = K_1 I_0(K_1 K_2 b)$$

Il est évident que le choix de K_1 donc de K_2 doit être judicieux étant donné que ces derniers sont fonction de paramètres physiques décrivant le système, à savoir: $\epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_2,$ et σ_f la tension superficielle du liquide isolant. De ce fait, il nous apparaîtra alors une idée globale, en ce qui concerne le degrés d'élongation de la bulle, et par voie de conséquence la connaissance de l'erreur émise par le choix du modèle proposé. Il est entendu que lorsque nous énoncerons notre critère d'instabilité, la démonstration serait un peu plus générale.

Néanmoins ce qu'on peut remarquer d'après ce qui précède, c'est que la donnée acquise concernant le champ demeure un paramètre assez déterminant sinon fondamental.

Dans le tableau (1) pour des valeurs de $K_1^2 = 43,3$ et $K_2^2 = 93,3$ on donne quand $x=0$, $z = 0.04209$ et lorsque $z=0$, $x = 0.029946$.

L'équation de l'ellipse se déduit simplement en écrivant :

$$\frac{x^2}{(0.029946)^2} + \frac{z^2}{(0.04209)^2} = 1 \quad (12)$$

Les valeurs de z calculées selon l'équation (10) et l'équation (12) sont résumées dans le Tableau (1). On remarque qu'elles sont très proches, et par conséquent on peut conclure que la bulle, avant son état d'instabilité, acquiert avec une bonne approximation une forme ellipsoïdale et donc le choix de notre modèle s'avère raisonnable. Le résultat serait moins parfait au cas où l'on tenait compte des phénomènes électrohydrodynamiques.

TABLEAU (1)

Comparaison des valeurs de Z données par les équations
(10) et (12)

x (cm)	Z (cm) - d'après (10)	Z (cm) - d'après (12)
0	0.04209	0.04209
0.0015733	0.04204	0.04204
0.0031466	0.04186	0.04186
0.0 47199	0. 4157	0. 04157
0.0062932	0.04116	0.04195
0.0078666	0.04062	0.04062
0.0094399	0.03996	0.03995
0.011013	0.03916	0.03914
0.012586	0.03821	0.03820
0.014160	0.03711	0.03709
0.015733	0.03584	0.03582
0.017306	0.03438	0.03435
0.018880	0.03270	0.03267
0.020453	0.03077	0.03075
0.022026	0.02854	0.02852
0.023600	0.02592	0.02591
0.025173	0.02280	0.02280
0.026746	0.01892	0.01893
0.028320	0.01365	0.01368
0.029893	0.00251	0.00249
0.029946	0.0	0.0

3-2. Mise en équations.

Résoudre ce problème revient à faire apparaître une fonction potentiel qui satisfait l'équation [*]

Dans n'importe quel système de coordonnées choisi, le Laplacien en général est donné par l'équation ci-dessous :

$$\Delta\phi = g^{-1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{11}} \frac{\partial\phi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{22}} \frac{\partial\phi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{g^{1/2}}{g_{33}} \frac{\partial\phi}{\partial u^3} \right) \right\}$$

La différentielle totale est donnée par :

$$du = h_1 h_2 h_3 du^1 du^2 du^3$$

avec $g^{1/2} = h_1 h_2 h_3$ h_1, h_2, h_3 : représentent les coefficients métriques

Le Laplacien s'écrit alors,

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u^3} \right) \right]$$

Un choix judicieux du système de coordonnées s'impose. Pour des raisons de commodité de calcul et cela afin d'être conforme avec la forme de la particule, on a opté pour un système de coordonnées ellipsoïdale (η, θ, ψ) dont l'origine est fixée au centre de la particule, et l'axe des z est orienté dans la direction du champ électrique appliqué. Pour des raisons de symétrie par rapport à l'axe Oz , le potentiel ϕ sera indépendant de ψ (voir fig. 5).

Les coordonnées (η, θ, ψ) sont définies par :

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{sh} \eta \sin \theta \cos \psi \\ y &= c \operatorname{sh} \eta \sin \theta \sin \psi \\ z &= c \operatorname{ch} \eta \cos \theta \end{aligned} \quad (14)$$

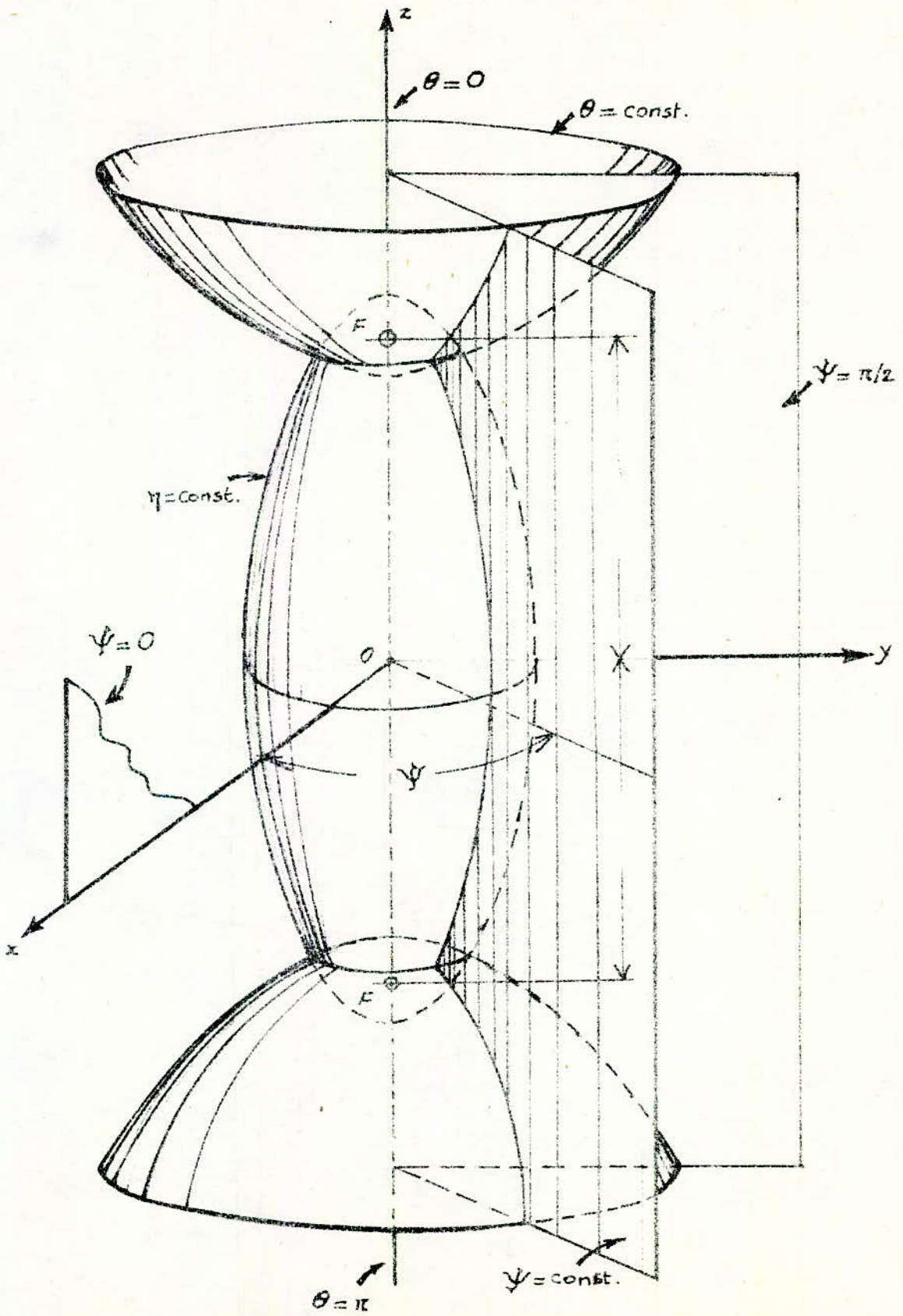


Fig. 5

c : représente la distance de l'origine de la particule au foyer de l'ellipsoïde ($\eta = \eta_0$)

Les surfaces $\eta = \eta_0 = \text{const.}$ sont des ellipsoïdes allongées d'équation,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad \text{avec: } b = c \operatorname{sh} \eta_0 \quad (15)$$
$$a = c \operatorname{ch} \eta_0$$

a et b représentent respectivement les demi-axes majeur et mineur quelques soient θ et ψ .

Nous remarquons que les conditions imposées sur η , θ et ψ sont :

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

Il vient alors que tous les points de l'espace sont décrits une seule fois si on limite les variations des coordonnées aux intervalles ci-dessus.

Le paramètre θ s'identifie à l'asymptote conique de l'hyperbole et l'axe des z , dans le cas où $\theta = 0$ le cône se confond avec une portion de l'axe des z ($+a, +\infty$), et par symétrie pour $\theta = \pi$ on obtient la correspondance sur l'axe des z négatif ($-a, -\infty$).

Remarquons que la forme sphéroïdale s'obtient pour un η suffisamment grand, et par conséquent l'équation (15) devient :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \operatorname{ch}^2 \eta_0 = a^2$$

Les coordonnées étant fixées telle qu'elles sont, on déduit alors le Laplacien Φ . Procédons par un calcul intermédiaire qui correspond au calcul des coefficients métriques

g_{ii} , nous trouvons :

$$g^{1/2} = h_1 h_2 h_3 = c^3 (\text{sh}^3 \eta + \sin^2 \theta) \text{sh} \eta \sin \theta$$

sachant que :

$$h_1 = \sqrt{g_{11}} \quad , \quad h_2 = \sqrt{g_{22}} \quad , \quad h_3 = \sqrt{g_{33}}$$

$$\text{et } g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} = \frac{1}{h_i^2}$$

avec ,

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial u} \right)^2$$

Le troisième terme de $\Delta \Phi$, s'obtient,

$$g^{1/2} \left\{ \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u^3} \right\} = \frac{1}{c^2 \text{sh}^2 \eta \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \quad (16)$$

x^1, x^2 et x^3 représentent dans notre cas les composantes x, y et z liées au système ellipsoïdale. Les deux autres termes se déduisent de la même manière.

ainsi on obtient,

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2 (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \text{coth} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \text{coth} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{c^2 \text{sh}^2 \eta \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \quad (17)$$

Le calcul des g_{ii} , les coefficients métriques a donné

$$\frac{g^{1/2}}{g_{11}} = \frac{g^{1/2}}{g_{22}} = c \text{sh} \eta \sin \theta$$

$$\text{avec } g_{11} = g_{22} = c^2 (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta) \quad (18)$$

$$\text{et } g_{33} = c^2 \text{sh}^2 \eta \sin^2 \theta$$

L'hypothèse stipulant la déformation de la bulle suivant l'axe des z et que cette dernière comme on le verra présente une symétrie de révolution nous conduit à écrire,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \psi} \equiv 0$$

D'où finalement le Laplacien de ϕ devient,

$$\Delta \phi = \frac{1}{c^2(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left[\text{coth} \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \cot \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (19)$$

En supposant que la densité de charge σ est différente de zéro à la frontière des deux milieux et à l'aide de la composante normale du vecteur d'induction électrique $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, on écrit,

$$\sigma = D_{1n} - D_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} \quad (20)$$

En négligeant le phénomène d'électrohydrodynamique et en admettant que le liquide (milieu(1)) est un bon isolant de conductivité γ_1 pratiquement nulle, ceci nous permet d'établir la relation suivante :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \gamma_2 E_2 \cos \alpha \quad (21)$$

où $E_2 \cos \alpha$: projection de \vec{E}_2 sur la normale au point (x, z) considéré.

Notons que les fonctions rentrant dans le produit du Laplacien et qui sont des solutions générales décrivant sous une forme suffisante notre modèle, nous mènent à passer avec certitude que la régularité du potentiel ϕ dans son domaine d'existence impose des conditions simplificatrices.

Dés lors, l'établissement des conditions aux limites de ϕ entraînent que si $\eta \rightarrow \infty$ on a

$$\phi_1 = -E_0 z + k = -c E_0 \operatorname{ch} \eta \cos \theta + k \quad (22)$$

La direction du champ est prise sur l'axe des $z < 0$.

La continuité du potentiel nous assure que pour une surface donnée $\eta = \eta_0$ les potentiels dans les deux milieux (séparés) sont identiques.

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{et} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

De part la symétrie axiale du problème et le comportement du potentiel dans les deux milieux, on peut prétendre que les solutions générales de l'équation [] se présentent sous la forme d'une combinaison de polynômes de Legendre, avec,

$$\phi = P_n^y(\operatorname{ch} \eta) \cdot P_n^y(\cos \theta) \quad \text{et} \quad \phi = Q_n^y(\operatorname{ch} \eta) \cdot Q_n^y(\cos \theta).$$

Par définition les fonctions $P_n^y(x)$ sont bornées en $x = \pm 1$, tandis que $Q_n^y(\pm 1) \rightarrow \infty$.

On observant la définition de P_n^y et Q_n^y selon leurs arguments et en vertu de la symétrie du problème on avance par conséquent qu'à l'intérieur de l'ellipsoïde des seules valeurs extrêmes de θ et η font que $\cos \theta = 1$ et $\operatorname{ch} \eta = 1$, et de ce fait les $Q_n(\operatorname{ch} \eta)$ et $Q_n(\cos \theta)$ ne figureront pas dans la combinaison du potentiel ϕ_2 . D'où

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\operatorname{ch} \eta) P_n(\cos \theta)$$

A l'extérieur, et pour des considérations analogues, les fonctions $Q_n(\cos \theta)$ ne figureront pas et l'unique combinaison pouvant avoir lieu de manière à satisfaire les exigences du problème est donné par,

$$\Phi_1 = \sum \left[B_n P_n(\cos \eta) + C_n Q_n(\cos \eta) \right] P_n(\cos \theta)$$

où A_n, B_n et C_n sont des constantes, et P_n, Q_n des fonctions de Legendre respectivement de première et deuxième espèce. Elles sont définies comme suit :

$$P_0(\mu) = 1$$

$$P_1(\mu) = \mu$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1)$$

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\mu!} (2\mu-1)(2\mu-3) \dots \left(\mu^n - \frac{n(n-1)\mu^{n-2}}{2n(2n-1)} + \frac{n(n-1)\dots\mu^{n-4}(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \right)$$

De même les polynomes de deuxième espèce sont définis par

$$Q_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} \quad (23-a)$$

$$Q_1 = \mu Q_0(\mu) - 1 \quad (23-b)$$

$$Q_2 = P_2(\mu) Q(\mu) - \frac{35}{8} \mu^3 + \frac{55}{24} \mu$$

$$Q_3 = P_3(\mu) Q(\mu) - \frac{5}{2} \mu^2 + \frac{2}{3}$$

$$Q_4 = P_4(\mu) Q(\mu) - \frac{35}{8} \mu^3 - \frac{55}{24} \mu$$

D'une manière plus condensée, on donne :

$$Q_n(\mu) = P_n(\mu) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \sum_{r=1}^n \frac{b_r}{\mu - b_r} \right]$$

3-2-3. Méthodes de calcul des potentiels électriques $\Phi_1(\eta, \theta), \Phi_2(\eta, \theta)$.

Les potentiels correspondants au modèle unitaire de la bulle choisie ont été calculés directement en injectant des solutions (du paragraphe précédent) au Laplacien. Et en exploitant les conditions aux limites imposées, en sachant que pour η tendant vers l'infini les fonctions $Q_n(\text{ch}\eta)$ disparaissent, ceci se traduit mathématiquement par la relation suivante :

$$-E_0 c \text{ch}\eta \cos\theta + K = B_0 + B_1 \text{ch}\eta \cos\theta + B_2 P_2(\text{ch}\eta) P_2(\cos\theta) + \dots \\ + \dots + B_n P_n(\text{ch}\eta) P_n(\cos\theta).$$

On en déduit que $\forall \eta, \theta$

$$B_0 = K$$

$$B_1 = -cE_0$$

$$B_2 = B_3 = \dots = B_n = 0$$

Et en sachant qu'à l'instant $t=0$ la charge globale est nulle, donc $\Phi=0$, alors :

$$B_0 = K = 0$$

$$B_1 = -cE_0$$

Les potentiels Φ_1 et Φ_2 se réduisent alors aux expressions suivantes,

$$\Phi_1 = -cE_0 \text{ch}\eta \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} C_n Q(\text{ch}\eta) P_n(\cos\theta)$$

$$\Phi_2 = A_0 + A_1 \text{ch}\eta \cos\theta + A_2 P_2(\text{ch}\eta) P_2(\cos\theta) + \dots + A_n P_n(\text{ch}\eta) P_n(\cos\theta)$$

Déterminer les coefficients A_n revient à exploiter le fait que les composantes tangentielle des champs E_{1t} et E_{2t} sont identiques à $\eta = \eta_0$

Et $\forall \theta, \forall \eta = \eta_0$; Les autres coefficients doivent être nuls.

Par suite, à partir des systèmes ci-dessous, nous obtenons :

$$A_2 P_2(\text{ch}\eta_0) P_2'(\cos\theta) = C_2 Q_2(\text{ch}\eta_0) P_2'(\cos\theta)$$

$$A_n P_n(\text{ch}\eta_0) P_n'(\cos\theta) = C_n Q_n(\text{ch}\eta_0) P_n'(\cos\theta)$$

d'où $A_2 = A_3 = \dots = A_n = 0$

et $C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0$.

La continuité du potentiel au niveau de l'interface nous assure que :

$$A_0 Q_0(\text{ch}\eta_0) + k = C_0 Q_0(\text{ch}\eta_0) = 0$$

d'où $k = A_0 = C_0 = 0$

Pour déterminer A_1 on écrira que,

$$E_{2n} = -\epsilon_{22}^{-1/2} \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0} = E_2 \cos\alpha \left|_{\eta=\eta_0}$$

α : représente l'angle formé par \vec{E}_2 et \vec{a}_η la normale à la surface $\eta = \eta_0$ en un point quelconque.

Partant des équations des potentiels Φ_1 et Φ_2 où

$$\Phi_1 = -c E_0 \text{ch}\eta \cos\theta + C_1 Q(\text{ch}\eta) \cos\theta$$

et $\Phi_2 = A_1 \text{ch}\eta \cos\theta$

on tire A_1 à partir de,

$$-\epsilon_{11}^{-1/2} \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0} = -\frac{A_1 \text{sh}\eta_0 \cos\theta}{\epsilon_{11}^{1/2}} = E_2 \cos\alpha$$

Par définition,

$$E_{1t} = -\mathcal{E}_{11}^{-1/2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\eta=\eta_0} = -\mathcal{E}_{22}^{-1/2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{\eta=\eta_0}$$

il vient que,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\eta=\eta_0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{\eta=\eta_0}$$

or $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\eta=\eta_0} = c E_0 \operatorname{ch} \eta_0 \sin \theta - \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_n(\operatorname{ch} \eta_0) P'_n(\cos \theta) \sin \theta$

avec $P'_n(\cos \theta) = -\frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial(\cos \theta)} \sin \theta$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{\eta=\eta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\operatorname{ch} \eta_0) P'_n(\cos \theta) \sin \theta$$

Les fonctions de Legendre forment une base complète de fonctions orthogonales, ce qui nous permet d'écrire pour $\eta = \eta_0$ et quelque soit θ , les relations entre les différents coefficients qui sont donnés par le calcul ci-dessous.

$$\left\{ c E_0 \operatorname{ch} \eta_0 - c_1 Q_1(\operatorname{ch} \eta_0) P'_1(\cos \theta) - c_2 Q_2(\operatorname{ch} \eta_0) P'_2(\cos \theta) + \dots \right\} \sin \theta =$$

$$= \left\{ -A_1 \operatorname{ch} \eta_0 P'_1(\cos \theta) - A_2 P_2(\operatorname{ch} \eta_0) P'_2(\cos \theta) - \dots - A_n P_n(\operatorname{ch} \eta_0) P'_n(\cos \theta) \right\} \sin \theta$$

Par conséquent on tire c_1 à partir de l'équation suivante,

$$c E_0 \operatorname{ch} \eta_0 = -A_1 \operatorname{ch} \eta_0 + c_1 Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)$$

d'où $c_1 = \frac{\operatorname{ch} \eta_0}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} (c E_0 + A_1)$

$$\text{d'où, } C_1 = \frac{CE_0 \operatorname{ch} \eta_0}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \cdot S_{11}^{-1/2} \frac{E_2 \cos \alpha \operatorname{coth} \eta_0}{\cos \theta Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)}$$

Par suite l'expression générale de Φ_1 s'obtient finalement par,

$$\Phi_1 = -CE_0 \operatorname{ch} \eta \cos \theta + \frac{Q_1(\operatorname{ch} \eta) \operatorname{ch} \eta_0 C E_0 \cos \theta}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} - \frac{S_{11}^{-1/2} \operatorname{coth} \eta_0 \cos \alpha Q_1(\operatorname{ch} \eta)}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \cdot E_2 \quad (24)$$

3.2.4. Equation du modèle

a). Détermination de la tension appliquée entre les électrodes.

Dans cette partie on détermine la relation entre le champ E_0 appliqué lors d'une tension quelconque U et le champ électrique E_2 à l'intérieur de la bulle.

Pour ce faire, on exploite l'expression (20) en écrivant,

$$\sigma = D_{1n} - D_{2n} = - \frac{E_1}{S_{11}^{-1/2}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} - E_2 E_2 \cos \alpha \Big|_{\eta=\eta_0}$$

on pose,

$$\beta_0 = \operatorname{ch} \eta_0 \frac{Q_1'(\operatorname{ch} \eta_0)}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \quad (25)$$

D'après (20)

$$D_{1n} = - \frac{E_1}{S_{11}^{-1/2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = S_{11}^{-1/2} E_1 C \operatorname{ch} \eta_0 (1 - \beta_0) \cos \theta E_0 + E_1 \beta_0 E_2 \cos \alpha$$

d'où,

$$\sigma = S_{11}^{-1/2} E_1 C \operatorname{sh} \eta_0 (1 - \beta_0) E_0 \cos \theta + (\beta_0 E_1 - E_2) E_2 \cos \alpha \quad (26)$$

A partir de l'équation (26), que l'on dérive par rapport au temps et sachant que,

$$\beta_0 = \frac{c \eta_0 \omega_1'(\text{ch} \eta_0)}{\omega_1(\text{ch} \eta_0)}$$

Les équations (26) dérivées par rapport au temps, et (21) donnent finalement,

$$\sum_{n_1}^{-1/2} c \text{sh} \eta_0 (1 - \beta_0) \cos \theta \frac{\partial E_0}{\partial t} - \left[(\chi - \beta_0) \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\chi}{E_1} E_2 \right] \cos \alpha = 0 \quad (27)$$

avec $\chi = E_2/E_1$

Pour déterminer la tension entre les électrodes dans le but de tirer une relation entre $E_0 = f(U, E_2)$, on procède d'abord par l'étape suivante;

on pose $U = V_A - V_B$

V_A, V_B étant les potentiels respectivement aux points ayant pour coordonnées $(z_1, \pi), (z_2, 0)$, $z_1 > 0, z_2 > 0$ voir fig [3].

Compte tenu de l'équation (24) et de la définition de U , on a :

$$U = \Phi_A(z_1, \pi) - \Phi_B(z_2, 0)$$

or,

$$\Phi_A(\pi, z_1) = z_1 E_0 - c \frac{Q_1(z_1/c)}{Q_1(\text{ch} \eta_0)} \text{ch} \eta_0 E_0 - \sum_{n_1}^{1/2} \coth \eta_0 \frac{Q_1(z_1/c)}{Q_1(\text{ch} \eta_0)} \cos \alpha E_2$$

$$\Phi_B(0, z_2) = -z_2 E_0 + c \frac{Q_1(z_2/c)}{Q_1(\text{ch} \eta_0)} \text{ch} \eta_0 E_0 - \sum_{n_1}^{1/2} \coth \eta_0 \frac{Q_1(z_2/c)}{Q_1(\text{ch} \eta_0)} \cos \alpha E_2$$

où z_1 et z_2 sont obtenus à partir du système (14)

avec $z_1 = -c \text{ch} \eta_1$ et $z_2 = c \text{ch} \eta_2$

De même pour, $\sum_{n_1}^{1/2} (\theta = \pi)$ et $\sum_{n_1}^{1/2} (\theta = 0)$, selon les équations (15) et (18) on déduit :

$$g_{11}^{1/2} (\theta = \pi) = g_{11}^{1/2} (\theta = 0) = c \operatorname{sh} \eta_0 = b$$

d'où l'expression finale de U :

$$U = \left\{ z_1 + z_2 - \left[\frac{\Omega_1(z_1/c) + \Omega_1(z_2/c)}{\Omega_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \right] c \operatorname{ch} \eta_0 \right\} E_0 + \frac{c \cos \alpha}{\Omega_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \left[\Omega_1(z_1/c) - \Omega_1(z_2/c) \right] E_2 \quad (28)$$

Nous désignons les quantités β_1, β_2

$$\beta_1 = z_1 + z_2 - \left[\Omega_1(z_1/c) - \Omega_1(z_2/c) \right] \frac{c \operatorname{ch} \eta_0}{\Omega_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \quad (29)$$

$$\beta_2 = \frac{c \cos \alpha}{\Omega_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \left[\Omega_1(z_1/c) - \Omega_1(z_2/c) \right] \quad (30)$$

avec $z_1 + z_2 = l$ et $a = c \operatorname{ch} \eta_0$

il vient,

$$U = \beta_1 E_0 + \beta_2 E_2 \quad (31)$$

Elle apparait là comme la résultante d'une composante transitoire $\beta_2 E_2$ et d'une permanente $\beta_1 E_0$
 E_0 se déduit de (31), soit :

$$E_0 = \frac{U}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1} E_2$$

En substituant E_0 dans l'équation (27), on obtient,

$$g_{11}^{1/2} c \varepsilon_1 \operatorname{sh} \eta_0 \frac{1 - \beta_0}{\beta_1} \cos \theta \frac{dU}{dt} - \left[g_{11}^{-1/2} \varepsilon_1 c \operatorname{sh} \eta_0 \frac{1 - \beta_0}{\beta_1} \beta_2 \cos \theta + E_2 - \beta_0 \varepsilon_1 \cos \alpha \right] X \times \frac{\partial E_2}{\partial t} = \gamma_2 E_2 \cos \alpha \quad (32)$$

on pose,
$$K_1 = \frac{\gamma_2 \cos \alpha \cdot \beta_1}{\epsilon_1 (1 - \beta_0) \beta_2 c \operatorname{sh} \eta_0 \mathcal{G}_{11}^{-1/2} \cos \theta + \beta_1 (\chi - \beta_0) \cos \alpha} \quad (33.a)$$

$$K_2 = \frac{c \operatorname{sh} \eta_0 \cos \theta (1 - \beta_0)}{(1 - \beta_0) c \operatorname{sh} \eta_0 \cos \theta \cdot \beta_2 + \beta_1 (\chi - \beta_0) \cos \alpha \cdot \mathcal{G}_{11}^{1/2}} \quad (33.b)$$

Compte tenu de (33.a.b), l'équation (32) s'écrit,

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + K_1 E_2 = K_2 \frac{dU}{dt} \quad (34)$$

C'est l'équation qui régit complètement notre modèle.

Il est évident qu'à travers cette équation nous observons la dépendance du champ à l'intérieur de la particule avec la forme de la tension appliquée entre les deux électrodes.

Aussi, nous avons choisi deux formes de tension afin de comparer avec ce qui existe déjà dans la littérature d'une part et ensuite pour illustrer ce qu'on a avancé précédemment.

4.1. Calcul du champ E_2 pour deux formes de tensions

a/ Tension Continue ($U = U_0 = \text{Const.}$)

Pour une telle forme de tension, le second membre de l'équation (34) est nul. Donc,

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + K_1 E_2 = 0$$

ce qui admet pour solution générale,

$$E_2 = E_{20} e^{-K_1 t} \quad E_{20} = \text{const. d'intégration.}$$

où $E_{20} = E_2(t=0)$, $U(t=0) = U_0$

Comme à l'instant $t=0$, la particule est supposée non chargée, alors :

$$E_1 E_{1n}(t=0) = E_2 E_{2n}(t=0) = E_2 E_2(t=0) \cos \alpha$$

D'où

$$E_{20} = \frac{E_1 c \operatorname{sh} \eta_0 (1 - \beta_0) \cos \theta \cdot U}{\beta_1 \Sigma_{11}^{1/2} \cos \alpha (E_2 - \beta_0 E_1) + \beta_2 E_1 \cos \theta \operatorname{sh} \eta_0 (1 - \beta_0) c}$$

En remplaçant β_1 et β_2 par leurs expressions, on aura :

$$E_2 \frac{c \operatorname{sh} \eta_0 \cdot E_1 (1 - \mu_0 \Omega_1'(\mu_0) / \Omega_1(\mu_0)) \cos \theta \cdot U e^{-k_1 t}}{\Sigma_{11}^{1/2} \left\{ 1 - \left[\Omega_1(z_1/c) + \Omega_1(z_2/c) \right] \frac{c \operatorname{ch} \eta_0}{\Omega_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \right\} \cos \alpha (E_2 - \beta_0 E_1) + E_1 c \operatorname{sh} \eta_0 (1 - \beta_0) \cos \theta \frac{b \operatorname{coth} \eta_0}{\Omega_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \Omega_1(z_2/c) - \Omega_1(z_1/c)} \quad (35)$$

ou encore,

$$E_2 = k_2 U e^{-k_1 t} \quad (36-a)$$

b) Tension impulsionnelle ($U = mt$)

Dans ce cas l'équation (34) devient,

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + k_1 E_2 = m k_2$$

La solution générale se présente sous la forme :

$$E_2 = K_3 e^{-k_1 t} + \frac{K_2}{k_1} m,$$

et sachant qu'à l'instant $t=0$, $E_2=0$, on tire par conséquent :

$$K_3 = -m \frac{K_2}{k_1}$$

L'expression du champ E_2 s'écrit,

$$E_2 = k_2 U \frac{1 - e^{-k_1 t}}{k_1 t} \quad (36-b)$$

Remarquons qu'on peut toujours mettre les équations (36-a) et (36-b) sous une forme plus condensée, soit

$$E_2 = K_2 A(t) \cdot U \quad (37)$$

où $A(t)$ est défini comme suit,

$$A(t) = \begin{cases} e^{-k_1 t} & \text{pour } U = U_0 \\ \frac{1 - e^{-k_1 t}}{k_1 t} & \text{pour } U = mt \end{cases}$$

Nous voyons là un résultat analogue à celui de Monsieur BEROVAL, que nous commenterons plus tard, lors de l'interprétation des courbes déjà établies dans la littérature. On peut néanmoins avancer la chose suivante : c'est pour les deux cas étudiés précédemment nous remarquons que le champ E_2 est fonction de plusieurs paramètres notamment le temps t , la forme de la tension, les dimensions de la particule ainsi que de sa forme, les permittivités du milieu ϵ_1, ϵ_2 et enfin de la conductivité γ_2 et de la distance entre électrodes.

4.2/ Expression générale du champ électrique dans la phase liquide en présence d'une seule particule.

Les composantes du champ électrique se déterminent à partir de (2.4) et (3.1.a) et les composantes de \vec{E}_1 sont définies pour le cas d'un modèle ellipsoïdal par,

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{S_m^{1/2}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \vec{a}_\eta - \frac{1}{S_m^{1/2}} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{a}_\theta = E_{1\eta} \vec{a}_\eta + E_{1\theta} \vec{a}_\theta$$

d'où, après un calcul simple:

$$E_{1\eta} = S_m^{-1/2} c \operatorname{sh} \eta_0 \left[1 - \frac{Q_1'(\operatorname{ch} \eta) \operatorname{ch} \eta_0}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \right] \frac{U}{\beta_1} \cos \theta - \left[\frac{S_m^{-1/2} c \operatorname{sh} \eta}{S_m^{1/2}} \frac{\beta_2}{\beta_1} \left(1 - \frac{Q_1'(\operatorname{ch} \eta) \operatorname{ch} \eta_0}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \right) - \operatorname{coth} \eta_0 \frac{Q_1'(\operatorname{ch} \eta)}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \operatorname{sh} \eta \cos \alpha \right] E_2 \quad (38.a)$$

et,

$$E_{1\theta} = S_m^{-1/2} \left\{ -c \left(\operatorname{ch} \eta - \frac{Q_1(\operatorname{ch} \eta)}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \operatorname{ch} \eta_0 \right) \frac{U}{\beta_1} \sin \theta + \left[\frac{\beta_2}{\beta_1} \left(\operatorname{ch} \eta - \frac{Q_1(\operatorname{ch} \eta)}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \operatorname{ch} \eta_0 \right) - c^2 \operatorname{coth} \eta \cos \alpha \cdot \frac{Q_1(\operatorname{ch} \eta) \cos \theta}{S_m^{1/2} Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \right] E_2 \sin \theta \right\} \quad (38.b.)$$

où,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_m^{1/2} = \frac{\partial}{\partial \theta} c (\operatorname{sh}^2 \eta_0 + \sin^2 \theta) = - \frac{c^2 \cos \theta \sin \theta}{S_m^{1/2}}$$

Le champ électrique E_2 est défini à partir de (37). La valeur du champ max. $\forall \eta = \eta_0$ se déduit aisément en attribuant à θ la valeur zéro (la composante tangentielle sera évidemment nulle). Notons que par le biais de cette hypothèse nous pouvons déduire des formules bien connues dans la littérature et qui ne

reflètent le fait que des cas bien particuliers.

De l'équation (31-a), il vient,

$$E_{1max.} = E_1 (\eta = \eta_0, \theta = \theta_0) = E_1 \eta \Big|_{\eta = \eta_0}$$

$$E_{1max.} = \frac{1 - \beta_0}{\beta_1} \cdot u - \frac{\beta_2 (1 - \beta_0) - \beta_1 \beta_0}{\beta_1} \cdot E_2 \quad (39-a)$$

Remarquons que pour $\eta = \eta_0$ la composante tangentielle du champ électrique E_2 s'écrit,

$$E_{1t} = - \coth \eta_0 \cos \alpha \frac{\cos \theta \sin \theta}{\text{sh}^2 \eta_0 + \sin^2 \theta}$$

4.2.2/ Etude du champ électrique à l'intérieur de la bulle pour une position quelconque.

4.4.2. — On a déjà vu d'après ce qui précède que le champ électrique E_2 dans la bulle immergée dans le liquide s'écrivait :

$$E_2 = k_2 A(t) \cdot u.$$

Nous pouvons en faire ressortir quelques résultats assez intéressants pour toute une série de cas selon le milieu. Pour bien parfaire la comparaison avec les résultats de différents auteurs, on raisonnera de la même manière que pour $E_{1max.}$. Aussi préfère-t-on raisonner sur la valeur maximale de E_2 en imposant $\alpha = 0$, de plus on supposera η_0 suffisamment grand de façon à approcher le cas du modèle sphérique

Moyennant ces hypothèses, il en découle que $\cos \alpha \approx \cos \theta$ et l'expression (37) se réduit alors à :

$$E_{2max} = \frac{E_1 (1 - \beta_0) A(t) \cdot U}{\left\{ l - \left[Q_1(z_1/c) + Q_1(z_2/c) \right] \frac{c \operatorname{ch} \eta_0}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \right\} (E_2 - \beta_0 E_1) + \frac{E_1 (1 - \beta_0) \operatorname{ch} \eta_0}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \left[Q_1(z_1/c) - Q_1(z_2/c) \right]}$$

L'expression (39-b) est alors :

$$E_{2max} = \frac{E_1 (1 - \beta_0) A(t) \cdot U}{\left\{ l - \left[Q_1(z_1/c) + Q_1(z_2/c) \right] \frac{c \operatorname{ch} \eta_0}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \right\} (E_2 - \beta_0 E_1) + \left[\beta_2 (1 - \beta_0) E_1 \right]} \quad (39-c)$$

4.2.3/ Calcul de β_0 , β_1 et β_2 dans l'hypothèse $\operatorname{ch} \eta_0 \gg 1$

On pose, $\operatorname{ch} \eta = \mu$.

D'après (25) et (29) on a alors,

$$\beta_1 = l - c \operatorname{ch} \eta_0 \left[Q_1(z_1/c) + Q_1(z_2/c) \right] \frac{1}{Q_1(\operatorname{ch} \eta_0)} \quad (39-d)$$

En opérant par un changement de variable,

$$x = \frac{1}{\mu} \ll 1$$

et en observant la définition de la fonction associée de Legendre, on effectue un développement limité de $Q_1(\mu_0)$ et,

$$Q_1(\mu_0) = \frac{\mu_0}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu_0-1} - 1$$

d'où

$$Q_1(x) = \frac{1}{2x} \ln \frac{x+1}{1-x} - 1$$

On rappelle que les développements de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ sont :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

d'où,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

on obtient alors,

$$Q_1(x) = \frac{x^2}{3} + \left(\frac{x^4}{5}\right) \approx \frac{x^2}{3} \quad (39-e)$$

d'où $Q_1'(x) = \frac{2}{3} x \frac{dx}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_0}$ avec $\frac{dx}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = x' = -\frac{1}{\mu_0^2}$

et, $\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)} = 2 x^{-1} x'$

ce qui donne,

$$\beta_0 = \mu_0 \frac{Q_1'(\mu_0)}{Q_1(\mu_0)} = -2 \quad (39-f)$$

La valeur de β_1 se calcule aisément, en calculant $Q_1(z_2/c)$, $Q_1(z_2/c)$ et $Q_1(ch\eta_0)$ à partir de l'expression (39.e), et, que l'on remplace dans (39.d).

Tout calcul fait, donne,

$$\beta_1 = l - a(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \quad (39-g)$$

De la même manière on calcule β_2 à partir de l'équation (30)

soit, $\beta_2 = a(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \quad (39-h)$

Ainsi le champ $E_{2max.}$ est, dans le cas du sphéroïde, donné par:

$$E_{2max.} = \frac{3\epsilon_1 \cdot A(t) \cdot E \cdot l}{(l - a(\alpha_1^2 + \alpha_2^2))(E_2 + 2\epsilon_1) + 3a(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\epsilon_1} \quad (40-a)$$

D'autre part, la valeur du champ moyen $E_{moy.}$ est,

$$E_{moy.} = U/l$$

Ceci nous permet d'introduire la notion de la fonction,

$$F = \frac{E_{2\max.}}{E_{2\text{moy.}}} = \frac{3 \epsilon_1 l A(t)}{[l - a(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)](E_2 + 2E_1) - 3a(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} \quad (40-b)$$

Comme fonction relative à une seule bulle qui représente, comme on le verra un peu plus loin, un outil important dans l'établissement de notre critère d'instabilité des bulles.

4.2.4 / Discussions des résultats précédents relatifs à $E_{2\max.}$

a) Si on rajoute une hypothèse simplificatrice, à savoir que la bulle se situe bien au milieu de l'intervalle entre électrodes, on trouve alors que certaines formules établies ne sont en fait que des cas bien particuliers (voir fig 6)

Dire que la bulle est au milieu se traduit simplement par,

$$\beta_2 = 0, \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = 2a/l. \\ z_1 = z_2 = l/2. \end{cases}$$

on pose, $\alpha_c = 2a/l$, $\chi = \epsilon_2/\epsilon_1$

L'expression (40.a) serait donnée par,

$$E_{2\max.} = \frac{3 \epsilon_1 A(t) U/l}{1 - \left(\frac{2a}{l}\right)^3 (E_2 + 2E_1)} \quad (40-c)$$

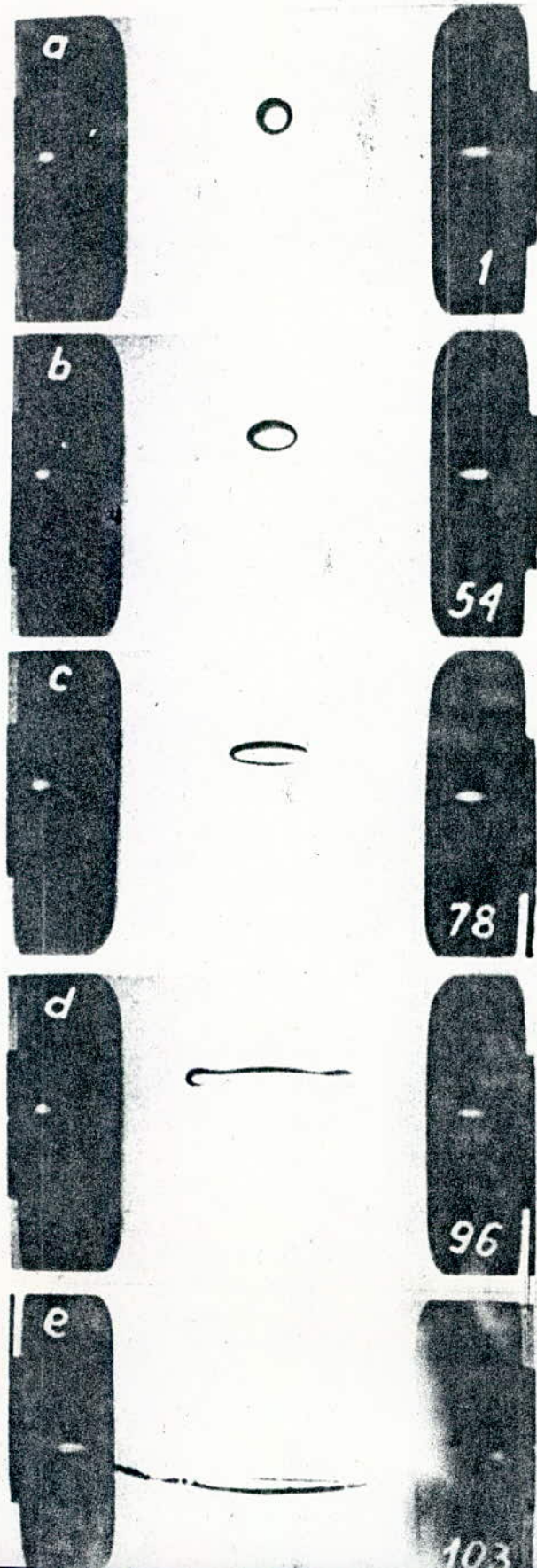
$$\beta_1 = l \left[1 - \left(\frac{2a}{l}\right)^3 \right]$$

De même pour les paramètres K_1 et K_2 qui se réduisent des expressions (33), soient,

$$K_1 = \frac{\gamma_2}{E_2 + 2E_1}, \quad K_2 = \frac{3 \epsilon_1}{(1 - \alpha_c^3)(E_2 + 2E_1)} \quad (40-c')$$

Fig. 6 .

g . . Goutte d'eau dans l'huile de silicone. Intervalle entre electrodes
5 mm. Vitesse d'augmentation de la tension continue 50 KV/ sec.
* Vitesse de la camera 1000 images par seconde.
D'après A. Beroual (Communication privée)



a) Analysons le cas où $t=0$, on a manifestement,

$$A(t) \equiv 1,$$

et au cas où, $\frac{a}{z_1} = \frac{a}{z_2} \ll 1$,

le champ $E_{z \max}$. prend la valeur,

$$E_{z \max.} = \frac{3E_1}{E_2 + 2E_1} E_{\text{moy.}}$$

cette formule concorde avec le cas où certains auteurs traitent le problème d'une particule non conductrice.

Notons cependant qu'on ne voit nullement apparaître les paramètres déterminant la position de la bulle par rapport aux électrodes ou bien encore le paramètre temps. Et ceci revient surtout à l'hypothèse selon laquelle la densité de charge superficielle σ est égale à zéro quelque soit le temps, or cette dernière contribue énormément dans la dissymétrie de la bulle, ainsi a été démontrée [28].

La majorité des auteurs dans le cas du modèle sphérique établissent en omettant le temps et la conductivité de la bulle une expression analogue à la nôtre (40-d)

$$E_2 = \frac{3E_1}{E_2 + 2E_1} E_{\text{moy.}} \quad (41)$$

b) Il existe cependant d'autres chercheurs tels que DZUWARLI [24] et ses collaborateurs qui en faisant introduire un coefficient de polarisation k selon l'axe OZ écrivent tout simplement,

$$E_2 = \frac{E_1}{E_2 k + E_1 (1-k)} E_{\text{moy.}} \quad (41-a)$$

b) Notons que cette dernière expression ne diffère pas trop de (41) et elle demeure identique pour $k=1/3$. KRASUCKI propose un modèle que l'on a déjà présenté [2.2.2]. D'après ses calculs il obtient l'expression suivante de E_2 :

$$E_2 = \frac{E_1}{E_1 - (E_1 - E_2) G_1} \cdot E_{\text{moy.}}$$

avec,

$$G_1 = \frac{1}{(s^2 - 1)} \left(\frac{sc_0 \operatorname{sh}^{-1} s}{(s^2 - 1)^{1/2}} - 1 \right)$$

et $s = p/q$ p, q : demi axes majeure et mineur.

Les paramètres concernant la forme de la bulle apparaissent bien dans l'expression du champ mais on constate qu'il n'a pas pris en considération la variation du champ électrique dans le temps.

c) Considérons le cas où t est relativement grand, $A(t)$ tend vers zéro et par voie de conséquence le champ E_2 s'annule. Ceci suggère que la surface de la bulle devient une équipotentielle.

d) Dans le cas où $E_1 = E_2$ on verra par la suite que ceci signifie physiquement un milieu idéalement pur et homogène. Il sera aisé de trouver par un calcul simple que le champ dans le diélectrique liquide est homogène. La conductivité de la bulle $\gamma_2 = 0$ et $E_{1\text{max.}} = E_{2\text{max.}} = E_{\text{moy.}}$ (41-c)

e) Ce dernier exemple illustre le cas où la permittivité du liquide est nettement supérieur à celle de la particule immergée. On retrouve là aussi un résultat bien connu à savoir que,

$$\text{si } \epsilon_1 \gg \epsilon_2 \quad E_{2\text{max.}} = \frac{3}{2} E_{\text{moy.}} A(t)$$

Dans le cas particulier où le liquide diélectrique est un bon isolant, c'est-à-dire $A(t) \approx 1$, on aura :

$$E_{z\max.} = \frac{3}{2} E_{z\text{moy.}} \quad (41-d)$$

Cette analyse fort simple nous montre le caractère beaucoup plus général du calcul du champ dans la bulle. Notons cependant que l'étude visée dans ce projet est de tenter d'expliquer le claquage des diélectriques liquides du point de vue de la théorie des bulles.

La connaissance du champ et de son comportement dans le diélectrique liquide est un acquis fondamental. Car ce dernier nous permettra de connaître les pressions exercées dans la cavité et de surcroît la forme de la bulle.

On pourra alors prédire l'intensité du champ électrique critique et dire s'il y a déformation critique entraînant soit la formation du canal ou bien la pulvérisation.

4.3./ Etude de la distribution du champ électrique dans le diélectrique en présence de plusieurs particules.

4.3-1/ On a supposé dans notre modèle des cellules identiques dont chacune contient une bulle i définie par un axe majeur et mineur respectivement a et b , elle est soumise à une tension $U_i = U/n$ (n étant le nombre de particules sur une ligne de champ). En appliquant les formules (38-a) et (38-b) et en affectant de l'indice i tous les paramètres, les composantes du champ dans le milieu prendront par suite les valeurs suivantes :

$$E_{1\eta_i} = \sum_{n_i}^{-1/2} C_i \operatorname{sh} \eta_{0i} \frac{1 - \beta_{0i}}{\beta_{1i}} U_i \cos \theta_i - \left[\sum_{n_i}^{-1/2} C_i \operatorname{sh} \eta_{0i} \frac{\beta_{2i}}{\beta_{1i}} (1 - \beta_{0i}) \cos \theta_i - \beta_{0i} \cos \alpha_i \right] E_2 \quad (42-a)$$

$$E_{1\theta_i} = -C_i \operatorname{coth} \eta_0 \cos \alpha_i \cos \theta_i E_{2i} \sin \theta_i \cdot \sum_{n_i}^{1/2} \quad (42-b)$$

avec $S_{mi} = C_i^2 (\operatorname{ch}^2 \eta_{oi} + \sin^2 \theta_i)$

La déduction du champ critique maximum s'effectue en posant,

$$\theta_i = 0, \quad \eta_i = \eta_{oi},$$

on obtient,

$$(E_{1max})_i = (E_{1\eta})_i (\theta_i = 0, \eta_i = \eta_{oi}) \quad (43)$$

remarquons que,

$$E_{1\theta_i} (\theta_i = 0) = 0.$$

$$(E_{1max})_i = \frac{1 - \beta_{oi}}{\beta_{ii}} U_i - \frac{\beta_{ii} (1 - \beta_{oi}) - \beta_{ii} \beta_{oi}}{\beta_{ii}} E_{2i} \quad (44)$$

4-3-1/ Etude des paramètres influençant le champ électrique dans le diélectrique liquide.

En supposant que le temps d'application de la tension est assez long, la fonction Alt tend vers zéro, et E_{2i} s'annule alors.

Par conséquent,

$$(E_{1max})_i = \frac{1 - \beta_{oi}}{\beta_{ii}} U_i \quad (45-a)$$

or d'après (39-g),

$$\beta_{ii} = L_i - a(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)$$

on obtient finalement,

$$(E_{1max})_i = \frac{3}{1 - \frac{a\eta}{L} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} E_{moy.} \quad (45-b)$$

avec, $\alpha_{1i} = a/Z_{1i}$ et $\alpha_{2i} = a/Z_{2i}$

Dans le cas particulier où la bulle (ou goutte) i est située au milieu de la cellule i , on aura :

$$z_{1i} = z_{2i} = \frac{1}{2} l_i = \frac{1}{2n} l$$

d'où,

$$(E_{1max.})_i = \frac{3}{1 - \left(\frac{2an}{l}\right)^3} \cdot E_{moy.} \quad (45-c)$$

Dans le cas général, on définit $(\Gamma_{1max.})_i$ comme étant le rapport du champ $(E_{1max.})_i$ par $E_{moy.}$, soit,

$$(\Gamma_{1max.})_i = \frac{E_{1max.}}{E_{moy.}} \quad (45-d)$$

d'après (45-a), ce rapport est

$$(\Gamma_{1max.})_i = \frac{1 - \beta_{0i}}{\beta_{1i}} \cdot l_i \quad (45-e)$$

Dans le cas particulier d'une bulle au milieu de la cellule i , $(\Gamma_{1max.})_i$ serait alors égal à,

$$\frac{3}{1 - \left(\frac{2an}{l}\right)^3} \quad (45-f)$$

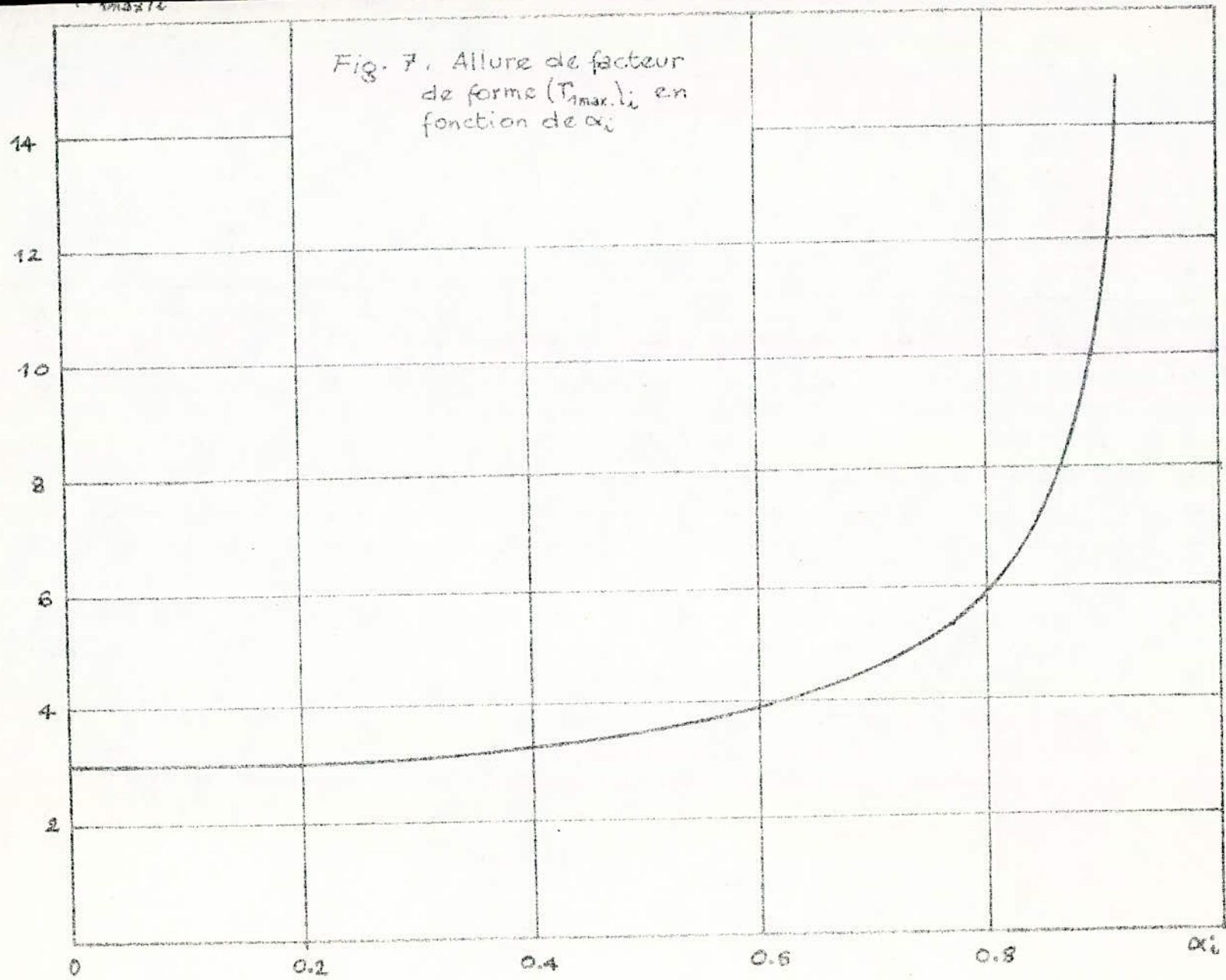
L'emploi de $(\Gamma_1)_i$ nous permet de connaître le comportement du champ $E_{1max.}$. Nous remarquons que les paramètres tel que l'intervalle entre électrodes (l), en plus des dimensions des particules ($2a$) et de leur concentration sur une ligne de champ interviennent simultanément sous la forme de $\alpha = 2an/l$. voir fig-7-

Par conséquent, il est plus évident de déduire le comportement de $(\Gamma_1)_i$ en fonction d'un paramètre quelconque qu'à la condition de se fixer les deux autres.

e) Influence du nombre

Le champ électrique maximum dans un liquide isolant augmente avec la concentration des impuretés [Fig.], le fait était d'ailleurs intuitivement prévisible. Il est d'autant plus faible

Fig. 7. Allure de facteur de forme ($T_{max. l_i}$) en fonction de α_i



J

que le degré de pureté est élevé.

D'après les abâques, pour $l = 0,5 \text{ mm}$, $a = 0,01 \text{ mm}$ et $n = 20$ on trouve, $(\Gamma_{1 \text{ max.}})_i = 7$; alors que pour $l = 100 \text{ mm}$, $a = 0,01 \text{ mm}$. et $n = 10^3$ on aura, $(\Gamma_{1 \text{ max.}}) = 3$. fig-10-

Nous illustrons pour chacun des cas l'abâque correspondante à $(\Gamma_{1 \text{ max.}})$ en fonction de $\alpha_i = 2a.n/l$. voir fig-7-

b) Influence des dimensions des particules et de l'intervalle entre électrodes avec n constant.

On rappelle rapidement des résultats devenus maintenant classique à savoir que les impuretés sont d'autant plus dangereuses quand elles sont situées dans un liquide isolant pour un intervalle (l) entre électrodes assez petit mais le sont moins pour de grands intervalles (Fig.8).

En effet si on considère $(\Gamma_{1 \text{ max.}})_i$ et si on fait l'hypothèse que "a" reste constant, d'après la figure-9- le coefficient $(\Gamma_{1 \text{ max.}})_i$ décroît avec l'augmentation de l puis devient constant quand ce dernier est suffisamment grand par rapport aux dimensions des particules.

$$\Gamma_{1 \text{ max.}} = \frac{3}{1 - \left(\frac{2an}{l}\right)^3}$$

D'après ce résultat nous concluons que $(\Gamma_{1 \text{ max.}})$ tend vers 3 lorsque l tend vers l'infini, fig-9- sous réserve que la tension appliquée reste évidemment constante.

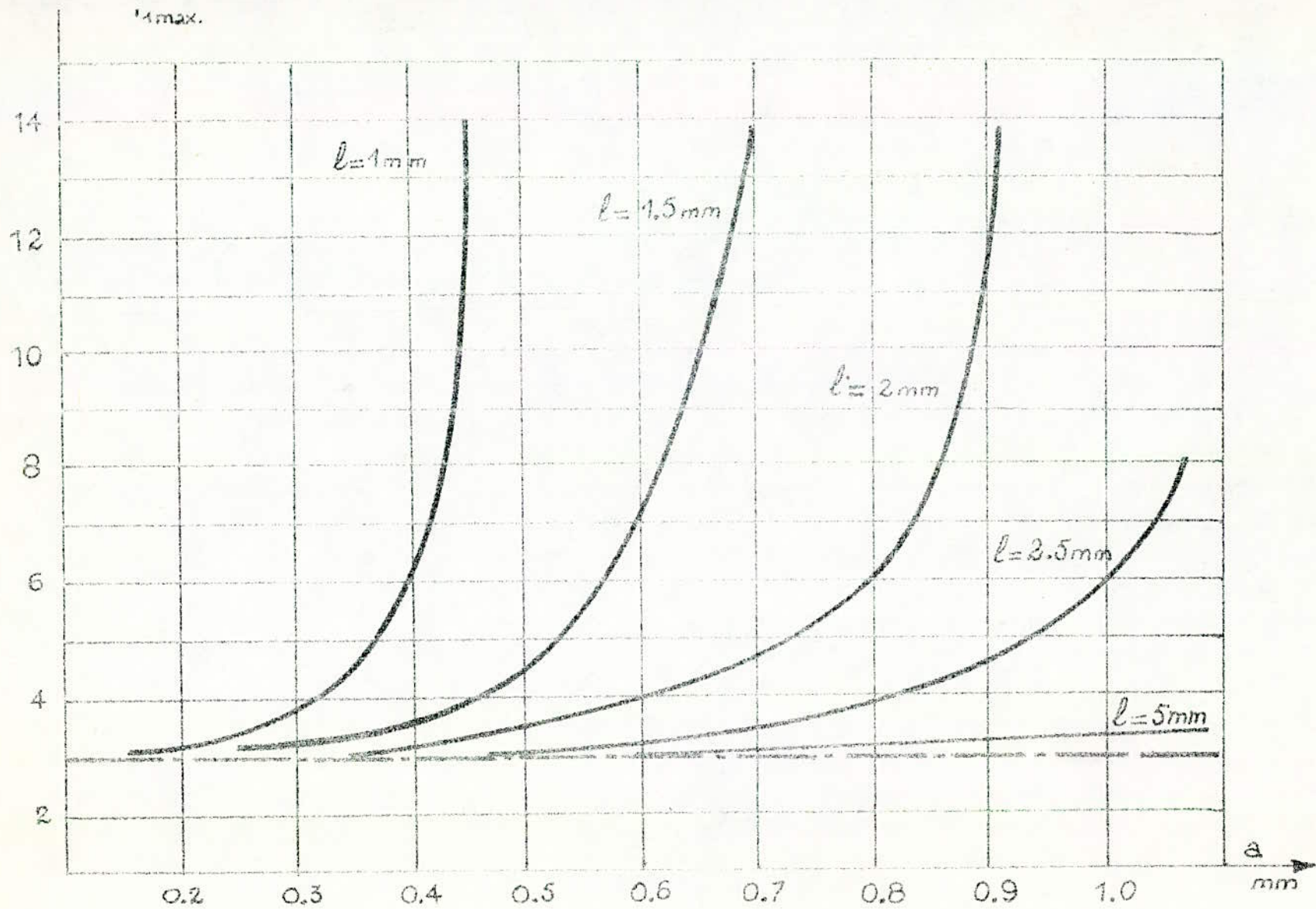


Fig. 8 - Variation de Γ_{1max} en fonction de a pour $n=1$, $Q_c=0$, $t \rightarrow \infty$

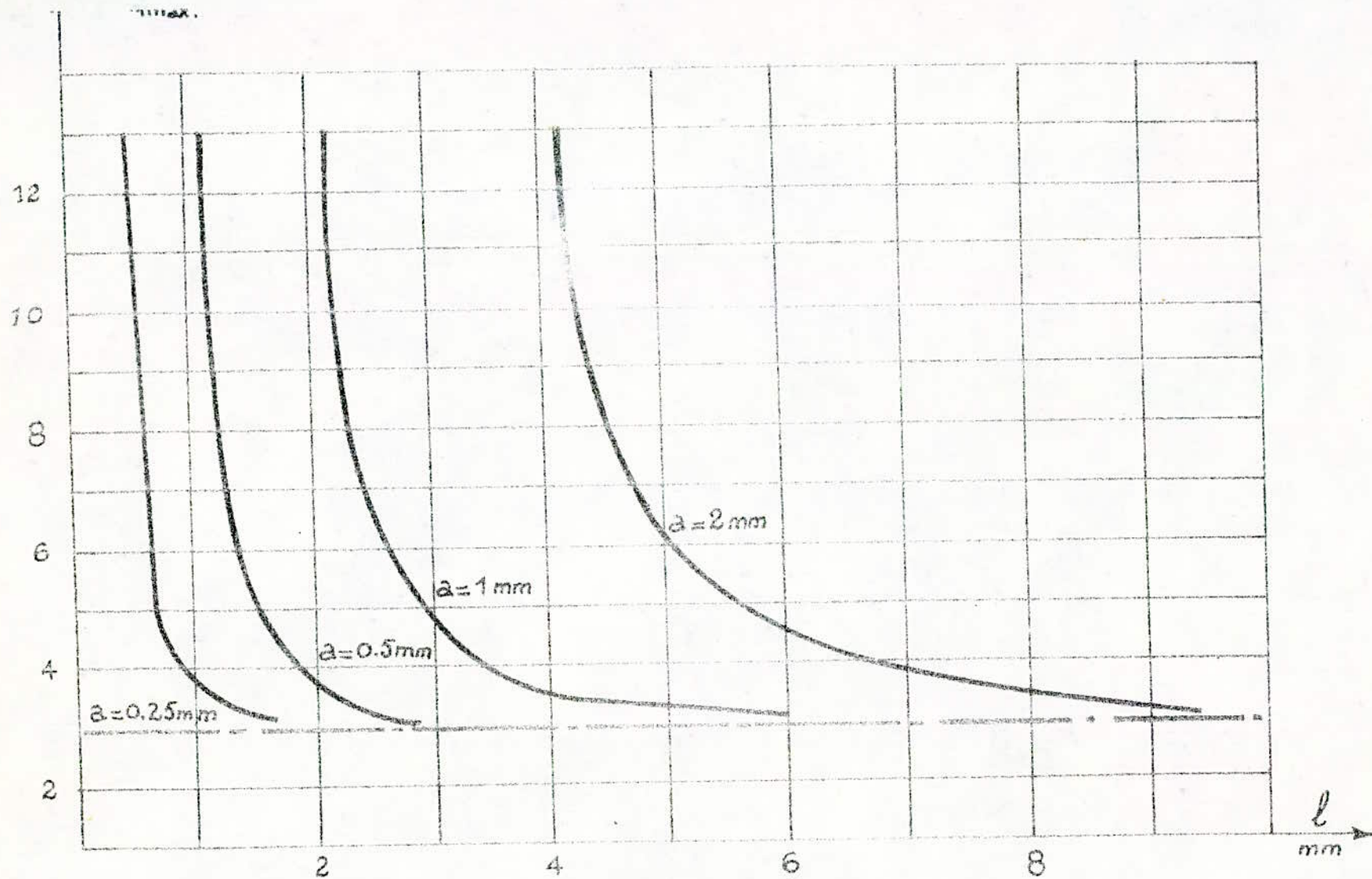


Fig-3 - Variation de T_{max} en fonction de l pour $n=1$, $Q_i=0$, $t \rightarrow \infty$

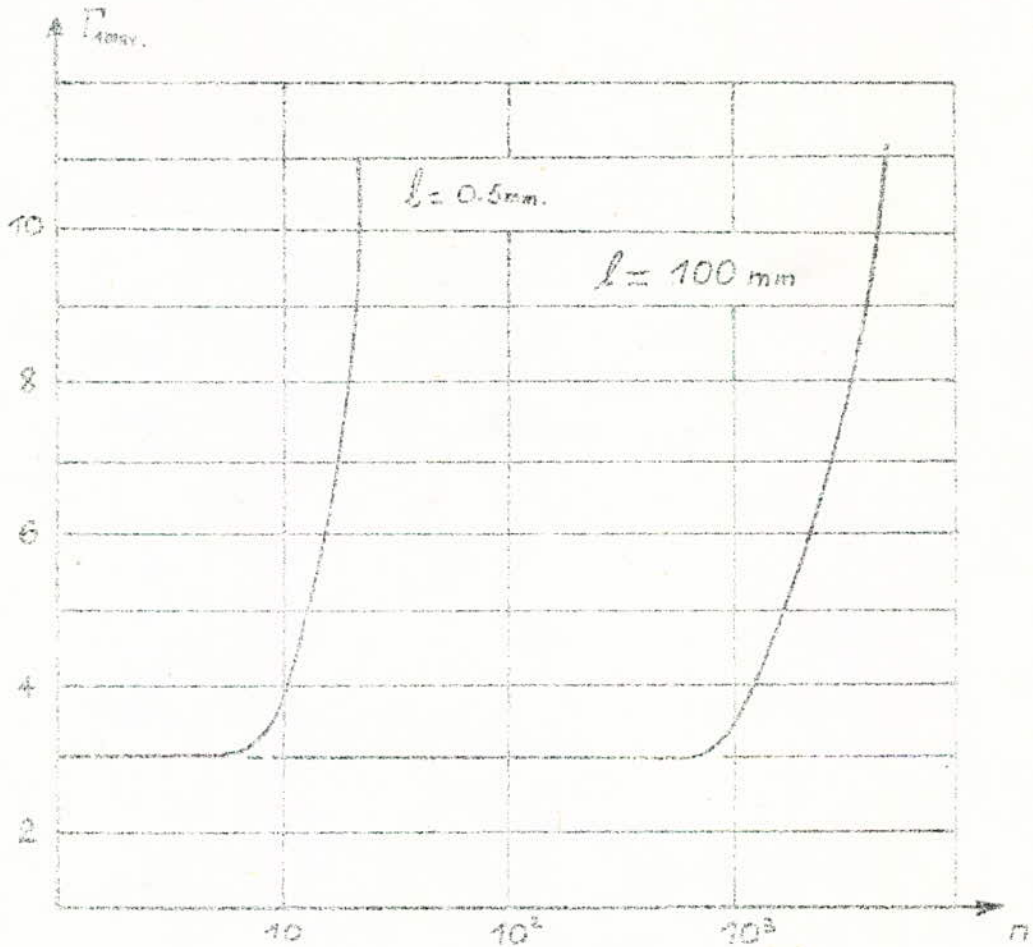


Fig. 10 Influence de n sur la valeur maximum de $(J_n)_i$ pour deux intervalles entre électrodes différents avec $a = 0,01 \text{ mm}$, $Q_i = 0$ et $b \rightarrow \infty$

4-4-1/ Déformation du champ électrique dans des cas pratiques.

Dans ce paragraphe, on a conservé les expressions du champ globales du chapitre 3, ainsi que les hypothèses qui y sont postulées. Ceci nous permet de prendre maintenant en compte trois cas habituellement rencontrés en pratique. Dans ce qui va suivre, on ne fera que compléter ce qui a été déjà énoncé dans l'étude concernant l'influence du champ électrique à l'intérieur d'un diélectrique liquide. Nous avons déjà observé que le champ électrique dans un liquide isolant en présence de particules impures et défini par ses composantes normale et tangentielle données par les équations (42-a) et (42-b). Sur une même ligne de champ, lieu des particules, l'angle θ_i est nul et on a ainsi :

$$\left\{ \begin{aligned} E_{1ni} &= \sum_{ni}^{-1/2} C_i \operatorname{sh} \eta_i \left[1 - \frac{Q_i'(\operatorname{ch} \eta_i)}{Q_i(\operatorname{ch} \eta_{oi})} \operatorname{ch} \eta_{oi} \right] \frac{U_i}{\beta_{1i}} - \left[\sum_{ni}^{-1/2} \epsilon_i \operatorname{sh} \eta_i \frac{\beta_{2i}}{\beta_{1i}} (1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Q_i'(\operatorname{ch} \eta_i) \operatorname{ch} \eta_{oi}}{Q_i(\operatorname{ch} \eta_{oi})} - \operatorname{coth} \eta_{oi} \frac{Q_i'(\operatorname{ch} \eta_i)}{Q_i(\operatorname{ch} \eta_{oi})} \operatorname{sh} \eta_i \cos \alpha_i \right] E_{2i} \\ E_{1ti} &= 0 \end{aligned} \right.$$

a) Liquide idéalement pur.

Il suffit de faire $C_i = 0$, $\beta_{2i} = 0$ et $\eta_i = \eta_{oi}$ et on observant la définition de E_{2i} avec $\alpha_{2i} = 0$ on trouve aisément, dans le cas particulier où toutes les particules ont la forme d'un sphéroïde de révolution (c'est-à-dire $\beta_{oi} = -2$),

$$E_{\max.} = E_{1ni} = E_{\text{moy.}}$$

avec
$$E_{ini} = (1 - \beta_{oi}) \left[1 + \frac{\beta_{oi}}{3} \right] E_{moy.}$$

b) Particules non conductrices : $\gamma_2 = 0$ dans ce cas $A_i(t) = 1$

Dans le but de constater l'influence qu'il y a sur le champ électrique maximum, l'approximation établie dans le paragraphe 4-2-3 du chapitre 4 sera toujours prise en considération. On substitue dans l'expression (39-a) relative au champ $E_{max.}$, les paramètres β_{ii} , β_{oi} , β_{zi} par leurs valeurs respectives et après un calcul simple, on déduit la valeur du champ $E_{max.}$ extraite de l'équation suivante :

$$E_{ini} = \left[1 - \frac{\Omega_1'(ch\eta_{oi})}{\Omega_1(ch\eta_{oi})} \cdot ch\eta_{oi} \right] \frac{E_{moy.}}{1 - \frac{\Omega_2(z_{ii}/c_i) + \Omega_1(z_{zi}/c_i)}{\Omega_1(ch\eta_{oi})} c_i ch\eta_{oi}}$$

$$- \frac{\left(c_i ch\eta_{oi} \left[\Omega_2(z_{ii}/c_i) - \Omega_1(z_{zi}/c_i) \right] \left[1 - \frac{\Omega_1'(ch\eta_{oi})}{\Omega_1(ch\eta_{oi})} ch\eta_{oi} \right] \right)}{\left[\Omega_1(ch\eta_{oi}) \left[1 - \left(\Omega_2(z_{ii}/c_i) + \Omega_1(z_{zi}/c_i) \right) \right] \frac{c_i ch\eta_{oi}}{\Omega_1(ch\eta_{oi})} \right]}$$

$$- \left[1 - \frac{\Omega_1'(ch\eta_{oi})}{\Omega_1(ch\eta_{oi})} \cdot ch\eta_{oi} \right] E_{zi}.$$

on pose, $\alpha_{ii} = a.n/z_{ii}$, $\alpha_{zi} = a.n/z_{zi}$, et pour $\eta = \eta_{oi}$ sur la particule, en partant de l'équation (39-a), on obtient :

$$(E_{max.})_i = \frac{3 U_i}{l_i - a(\alpha_{ii}^2 + \alpha_{zi}^2)} \left[\frac{3a(\alpha_{ii}^2 - \alpha_{zi}^2)}{l_i - a(\alpha_{ii}^2 + \alpha_{zi}^2)} + 2 \right] \frac{3 \epsilon_1 A_i(t) U_i}{\left[l_i - a(\alpha_{ii}^2 + \alpha_{zi}^2) \right] (\epsilon_2 + z\epsilon_1) + 3 \epsilon_1 a (\alpha_{ii}^2 - \alpha_{zi}^2)}$$

ce qui peut s'écrire autrement avec $A_i(t) = 1$ et $u_i = u/n$,
 $l_i = l/n$. On pose $\chi = \epsilon_2/\epsilon_1$, on a,

$$E_{\text{max.}} = \frac{1}{1 - \frac{a \cdot n}{l} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} \left\{ 3 E_{\text{moy.}} - \left[\frac{3 a \cdot n (\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2) l}{1 - \frac{a \cdot n}{l} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} + 2 \right] \frac{3 E_{\text{moy.}}}{(\chi + 2) + \frac{3 \frac{a}{l} n (\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2)}{1 - \frac{a \cdot n}{l} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)}} \right\}$$

On peut constater cette formule illustrée par la fig. 11, la non uniformité du champ E_1 . Sa distorsion est d'autant plus grande quand n est grand. Il est bien évident que cette déformation dépend aussi implicitement de E_2 donc de plusieurs autres paramètres notamment la position de la bulle. Remarquons aussi que indépendamment de E_2 dans le cas où les dimensions de la particule sont telles que,

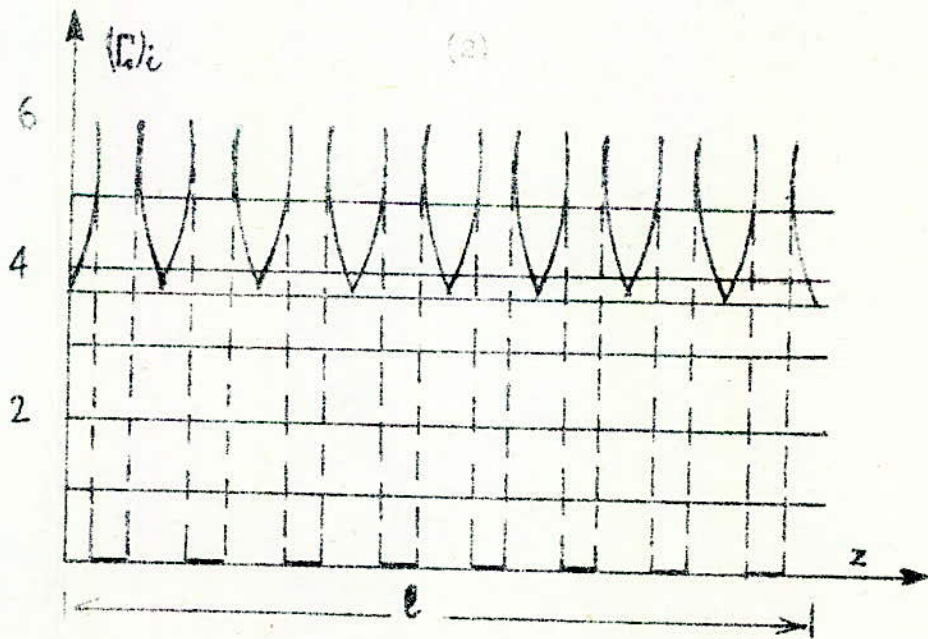
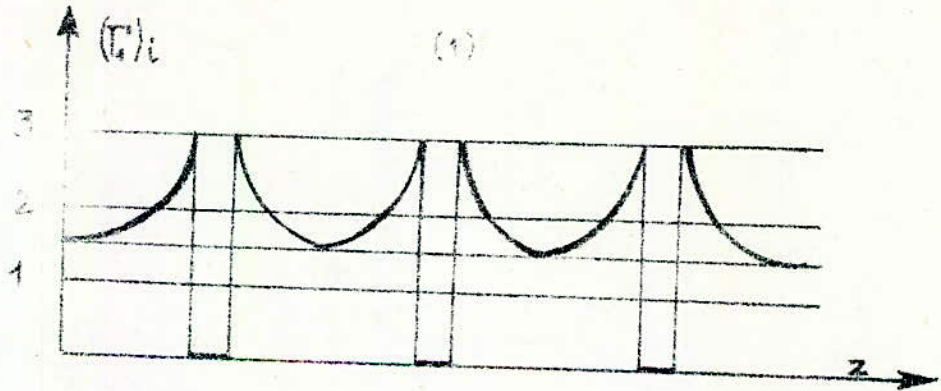
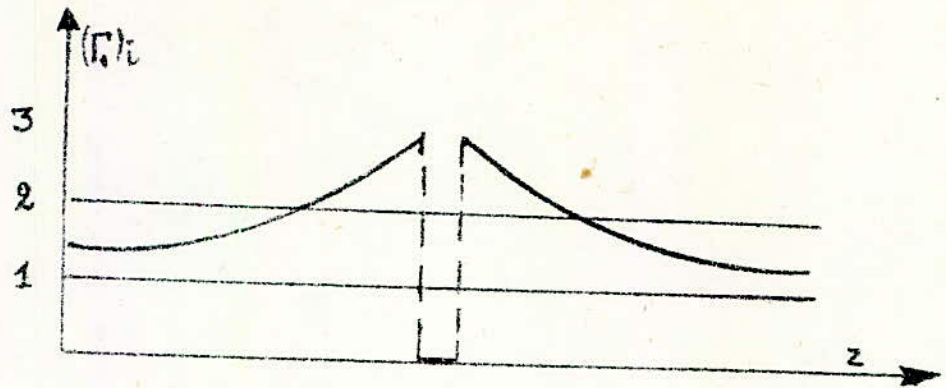
$$\frac{a \cdot n}{l} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2) \sim 1,$$

le champ électrique maximum tend vers l'infini.

Notons cependant que dans le cas où les particules sont non déformables, la décharge électrique se produit à travers le pont d'impuretés une fois que celles-ci se sont métallisées $E_{2c} = 0$

Pour des particules déformables (bulle de gaz ou goutte de liquide) on peut aussi distinguer deux cas éventuels :

- soit qu'il y ait formation d'un canal, après allongement des bulles, et la décharge a lieu à travers celui-ci une fois qu'elle est ionisée.
- soit que les bulles après allongement n'arrivent pas à former un canal, et par conséquent elles se désintègrent en plusieurs micro bulles.



(3)

du nombre n sur la déformation de (Γ/ϵ) pour $L = 10 \text{ cm}$ - $a = 0,5 \text{ cm}$

$$t = \infty - \theta = 0$$

$$1/\lambda = 1 - 2/n = 3 - 3/n = 8.$$

c) Particules chargées et de dimensions très faibles par rapport à la longueur l_i .

Il apparaît clairement de part l'expression du champ électrique (E_{max}) (46-b) qu'il est plus intense du côté le plus proche de l'extrémité de l'électrode qu'à l'extrémité opposée (voir fig. 12). Par abus d'écriture (ou bien grossièrement) on peut dire que pour Z_{1i} très faible et Z_{2i} très grand, $n \frac{\partial \alpha_{1i}^2}{l}$ avoisine l'unité alors que $n \frac{\partial \alpha_{2i}^2}{l}$ est réduit à zéro.

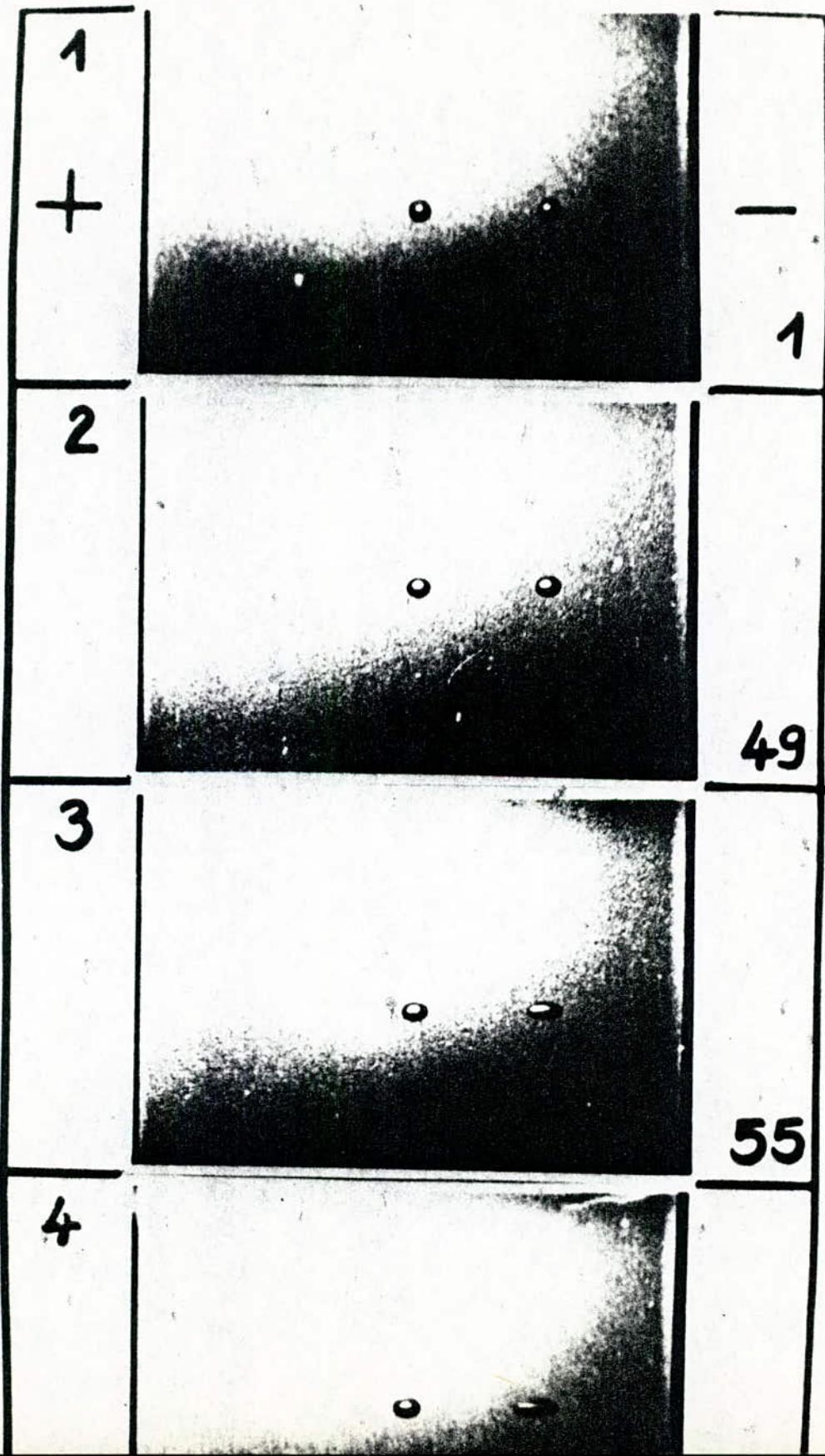
D'après les expériences faites on peut observer le comportement de la déformation de la bulle du côté de la cathode. Ceci a été confirmé par les observations de SKOWRONSKI [28] et BEROUAL [22]. Cette preuve a été réalisée grâce à la méthode de la caméra rapide permettant d'observer dans tous les détails l'évolution et le comportement de la bulle dans le temps.

Pour voir l'influence du temps d'application de la tension et de la position des bulles, BEROUAL étudia le comportement de deux gouttes d'eau de mêmes dimensions immergées dans l'huile de silicone et placées sur la même ligne de champ.

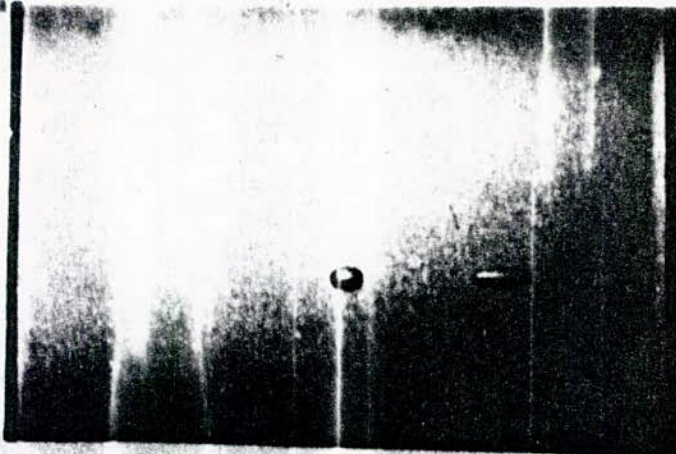
Il observa alors que pour un même temps, leurs comportements différents. En effet la bulle se trouvant au voisinage le plus proche de la cathode s'allonge plus vite que l'autre.

Certains auteurs, tels que FELICI prétendent que la conductivité de la bulle de gaz ionisée est à l'origine de la génération des décharges partielles. Il établit une analogie avec le cas d'une interface solide-gaz. Les porteurs de charges créés par avalanches dans le vide parviennent à atteindre le liquide en se concentrant dans les deux pôles de la particule déformée.

Fig. 12. Huile de silicone et gouttes d'eau. Intervalle entre electrodes 18 mm. Tension continue croissante de 0 à 20 kV. en l'espace de 1,5 sec. Vitesse 300 cadres/sec. A droite de chaque photo le numero du cadre dans le film.

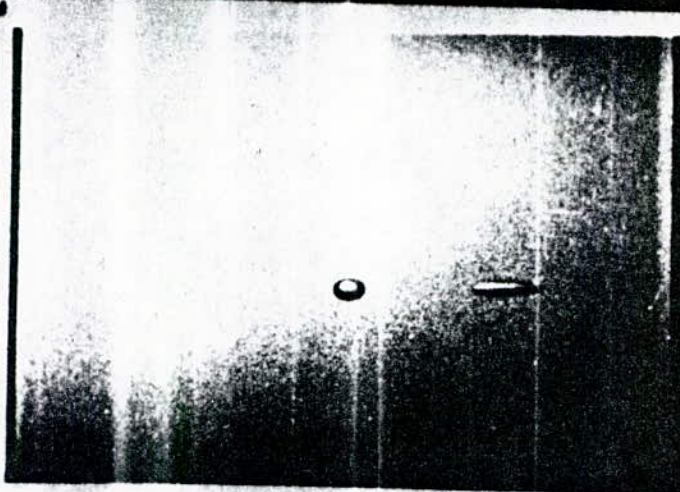


5



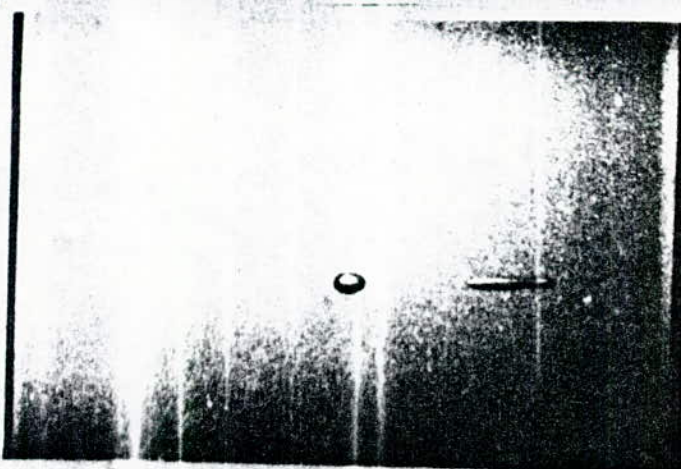
57

6



58

7

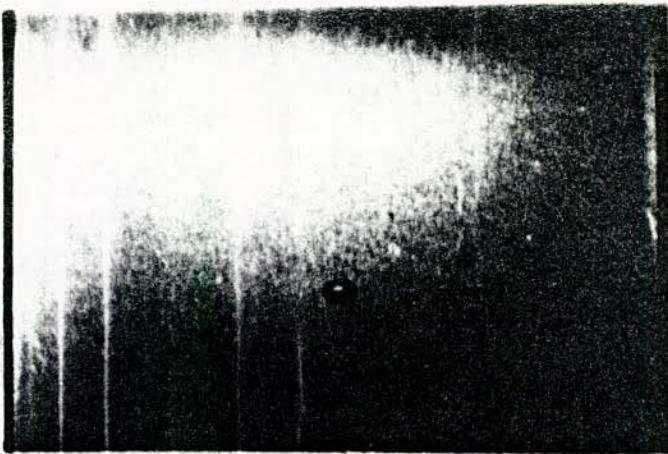


59

8

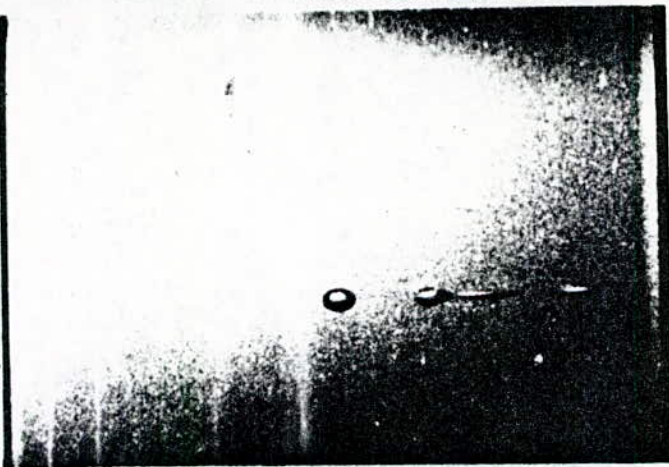


9



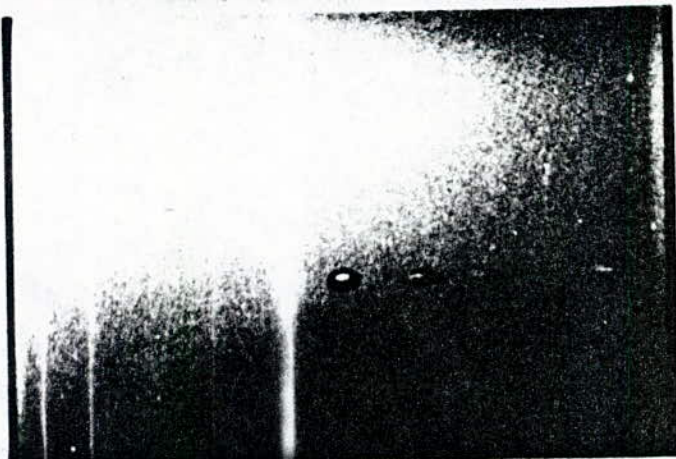
61

10



62

11



63

12



65

Selon les hypothèses du même hauteur, le processus de claquage de PASHEN basé sur le mécanisme de TOWNSEND exige l'existence d'électrons émis par la cathode selon le processus γ , il associe en fait une interface tout à fait différente de la cathode en métal. Il énonça par la suite que la validité de la tension de claquage PASHEN (sous une certaine pression) serait vérifiée dès que la phase de conditionnement de la cathode présentant des décharges successives aurait pris fin.

Cependant l'auteur n'argumente pas son apport par des données expérimentales. Mais d'après les expressions récentes de MURYEIX et TOBAZÉON [26], Il en ressort en effet qu'une importante tension peut se produire (2 fois la tension de PASHEN).

4-4-2 / Distribution du champ électrique uniforme en fonction du temps.

a) Modèle unitaire : $n=2$.

Nous avons jugé intéressant d'étudier par le biais de sa valeur maximale le champ électrique dans le temps et ceci afin de dégager une interprétation du comportement de la décharge pouvant avoir lieu.

Dès lors, nous exploitons le résultat déjà énoncé dans l'équation (46-a) rapportée à un modèle unitaire.

Il vient alors,

$$E_{1\text{max.}} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\ell}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \left[3 E_{\text{moy.}} - \left[3 \alpha (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \ell + 2 \left(1 - \frac{\alpha}{\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right) \right] E_2 \right]$$

E_2 s'obtient de la même manière à partir de l'équation (40-a)

$$E_2 = \frac{3 A(t) \cdot E_{\text{moy.}}}{1 - \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) (\chi + 2) + 3 \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}$$

et,

$$K_1 = \frac{\gamma_2}{E_1} \cdot \frac{1 - \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{1 - \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) (\chi + 2) + 3 \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}$$

d'où l'expression de $E_{1\text{max.}}$:

$$E_{1\text{max.}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \left\{ 3 E_{\text{moy.}} - 3 \left[\frac{3 \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{1 - \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} + 2 \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{A(t) \cdot E_{\text{moy.}}}{(\chi + 2) + \frac{3 \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{1 - \frac{a}{\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}} \quad (47-a)$$

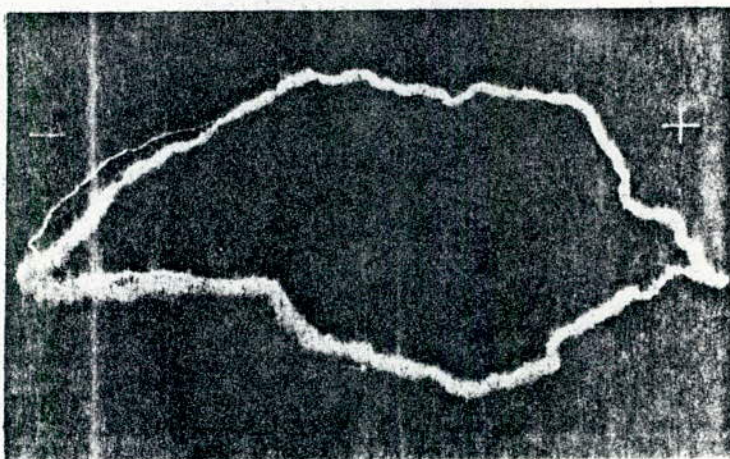
Ces équations confirment la dépendance du degré d'allongement par exemple de la goutte d'eau en fonction de la position, de la tension appliquée et du paramètre temps.

D'après la fig. 13, nous observons que la déformation se traduit par une déviation de la décharge par rapport à la ligne de champ dans le diélectrique liquide. Cette décharge est due en grande partie à la présence des charges spatiales.

b) Modèle Général.

Le comportement de $T_{1\text{max}}$ dans le temps comme nous l'avons déjà observé (47-a) était d'un apport fondamental en ce qui concerne la distorsion du champ. C'est la raison pour laquelle nous allons, par l'intermédiaire de cette notion, énoncer plusieurs cas pratiques pouvant avoir lieu.

Fig13. Huile synthétique / Aroclor /. Influence
des charges spatiales sur la ligne de la
decharge. D'après [28].



D'après la définition de $(\Gamma_{1max})_i$ et d'après l'équation (47-a) on trouve simplement que,

$$(\Gamma_{1max})_i = \frac{1}{1 - \frac{a}{\ell}(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} \left\{ 3 - \left[\frac{3 \frac{an}{\ell}(\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2)}{1 - \frac{a}{\ell}(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} + 2 \right] X \right.$$

$$\left. \times \frac{3 A_i(t)}{(X+2) + \frac{3 \frac{an}{\ell}(\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2)}{1 - \frac{a}{\ell}(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)}} \right\} \quad (47-b)$$

Et généralisant de la même manière que $(\Gamma_{1max})_i$, on trouve,

$$(\Gamma_{2max})_i = \frac{E_{2max.}}{E_{moy.}} = \frac{3 \cdot A_i(t)}{(X+2) + 3 \frac{an}{\ell} \frac{(\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2)}{1 - \frac{a}{\ell}(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)}} \quad (47-c)$$

De plus nous pouvons aisément voir que pour,

$$\alpha_{1i} \ll 1 \text{ et } \alpha_{2i} \ll 1$$

et que $(\Gamma_{1max})_i$ rentre comme un facteur implicite dans $(\Gamma_{2max})_i$. La conséquence de l'hypothèse ci-dessus qui signifie que la particule i possède une dimension très faible relativement à sa position dans la cellule, nous permet d'écrire :

$$(\Gamma_{1max})_i = 3 - 2(\Gamma_{2max})_i \quad (47-d)$$

L'expression de $(\Gamma_{2max})_i$ correspondante à ce cas est,

$$(\Gamma_{2max})_i = \frac{3 A_i(t)}{(X+2)}$$

et
$$K_{1i} = \frac{\gamma_{2i}}{\epsilon_1} \frac{1}{2+X}$$

En substituant la dernière équation (47-c) dans (47-d), en écrivant le résultat obtenu en fonction de $E_{moy.}$. Il s'ensuit

$$(E_{1max.})_i = 3 \left(1 - \frac{2A_i(t)}{\chi+2} \right) E_{moy.}$$

que l'on peut écrire aussi ;

$$(E_{1max.})_i = 3 \frac{\chi+2 (1-A_i(t))}{\chi+2} \quad (48-a)$$

On a déjà spécifié auparavant concernant $A_i(t)$, à savoir sa dépendance intime à la forme de la tension appliquée et moyennant les deux exemples des deux types de tensions proposées nous présentons une analyse à différents instants de l'expression du champ max. et ceci dans le but de déduire des résultats conformes avec les expériences faites par certains auteurs. D'après l'exemple des deux formes de tension $U = \text{const.}$ et $U = m.t$, on a pu remarquer que $A_i(t)$ est décroissante et qu'elle prend comme valeurs extrêmes 1 ou 0 lesquelles correspondent aux instants respectivement $t=0$ et t assez grand ($t \rightarrow \infty$). Il en ressort ainsi à l'instant $t=0$:

$$(E_{1max.})_i (t=0) = \frac{3\chi}{2+\chi} E_{moy.} \quad (48-b)$$

et à $t \rightarrow \infty$ $(E_{1max.})_i = 3 E_{moy.} \quad (48-c)$

L'Analyse de la fonction $A(t)$ pour des cas pratiques pouvant avoir lieu nous permet de tracer $\gamma_{1max.}$ pour les deux cas de tension énoncés.

Dans le cas d'une goutte d'eau dans une huile isolante

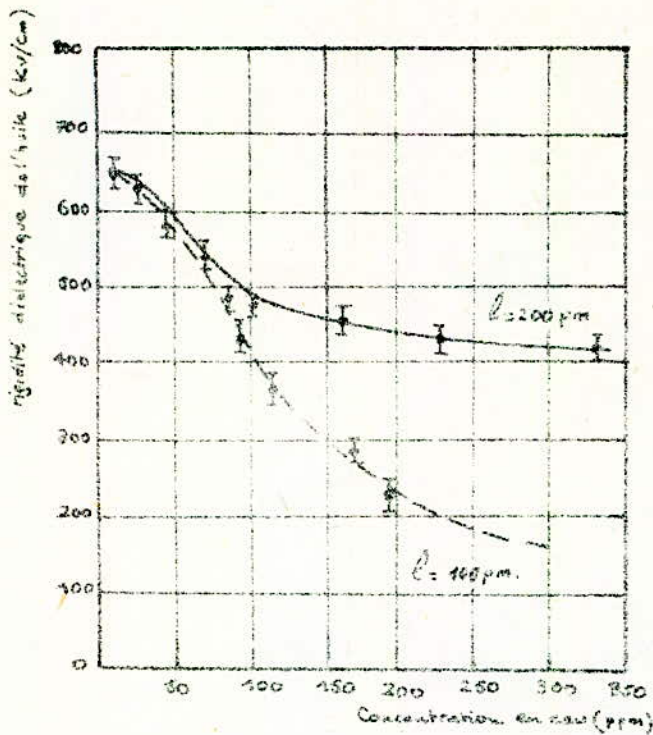


Fig 17.a Rigidité diélectrique de l'huile minérale en fonction de la teneur en eau pour une tension alternative dans un système d'électrodes planes d'après Y. ABED.

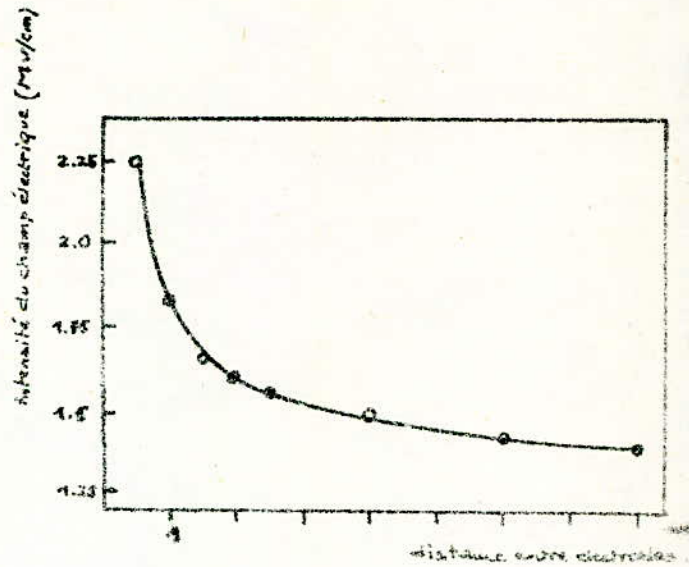


Fig. 17.b Champ électrique dans le n-héxane fonction de l'intervalle entre électrodes d'après SHARBAUGH et Col.

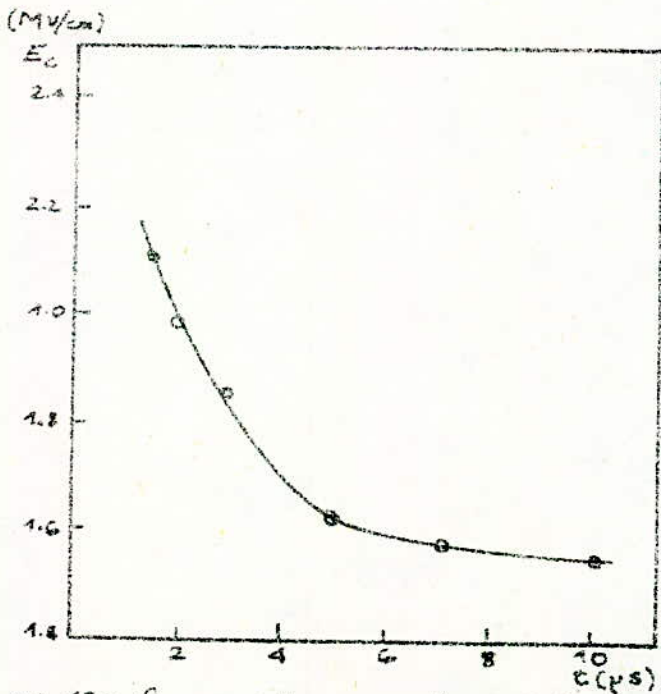


Fig 17.c Caractéristique de l'intensité du champ de claquage en fonction du temps d'application de la tension dans le n-héxane d'après SKOWROMSKI.

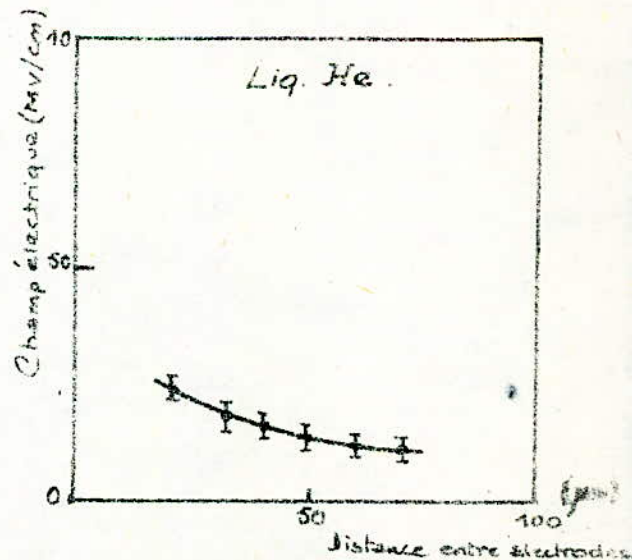


Fig 17.d. Champ électrique dans l'héxane liquide en fonction de la distance entre électrode d'après Katsumi YOSHINO.

— bulle de gaz dans une huile isolante fig. 14-15

avec $\alpha_{2i}, \alpha_{1i} \ll 1$, $\rho_i = 0$, $\epsilon_2/\epsilon_1 = 40$, $\chi_2 = 10^{-5} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$

$$\alpha_{2i} \ll 1$$

On peut aisément constater à travers les caractéristiques et des tableaux () et () que l'intensité du champ électrique maximum E_{max} est plus faible aux courtes impulsions. Ceci découle du fait que A_{ilt} est fonction de χ_2 , ϵ_1 , et ϵ_2 .

Plus grande sera χ_2 et plus vite le champ électrique E_{max} atteindra sa valeur critique.

Pour envisager l'influence des permittivités ϵ_1, ϵ_2 sur le champ E_{max} , nous considérons le rapport $\chi = \epsilon_2/\epsilon_1$. On distingue alors trois cas :

$$\chi > 1 \quad (T_{\text{max}})_i > T_{2i}$$

$$\chi = 1 \quad (T_{\text{max}})_i = T_{2i}$$

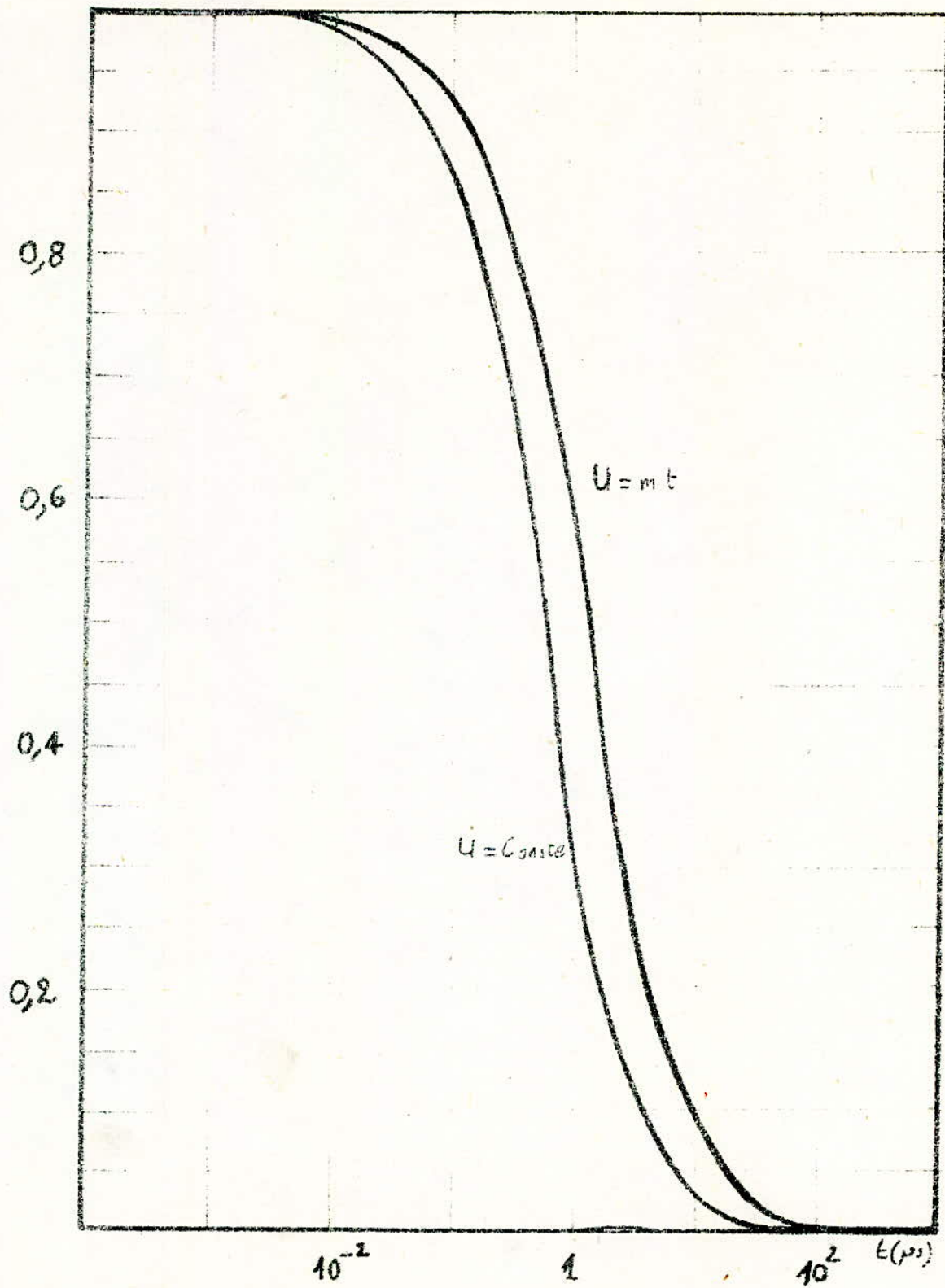
$$\chi < 1 \quad (T_{\text{max}})_i < T_{2i} \quad t < t_0$$

$$(T_{\text{max}})_i \geq T_{2i} \quad t \geq t_0$$

où t_0 est déterminé à partir de $(T_{\text{max}})_i = T_{2i}$.

Le cas où $t = t_0$, et en faisant $(T_{\text{max}})_i = T_{2i}$ correspondra par exemple au cas d'une bulle dans de l'huile de silicone. Ce que l'on peut dire de cette analyse qui ne conforme d'ailleurs qu'un résultat bien connu (haute tension), c'est que la rigidité diélectrique d'un liquide isolant est nettement meilleure aux courtes impulsions qu'aux longues.

$A_e(t)$



15

Handwritten text, possibly a title or description of the graph.

Handwritten text, possibly a parameter or condition.

$$\epsilon_2/\epsilon_1 = 40, \gamma_2 = 10^{-1} \text{ cm}^{-1}, \alpha_2 \ll 1.$$

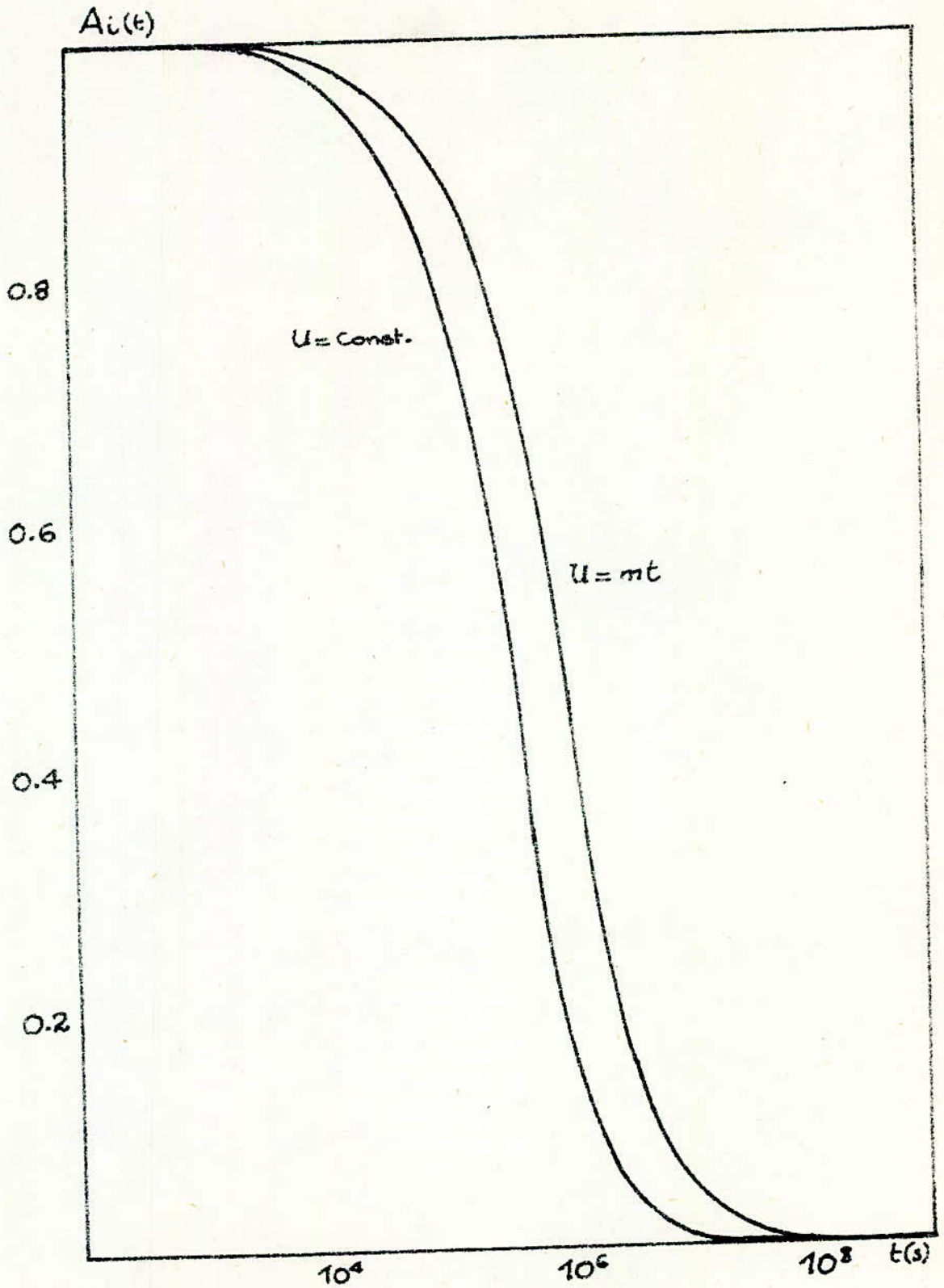


Fig . 14 Caractéristiques $A_i(t)$ pour deux forces de tension différentes avec $\epsilon_2/\epsilon_1 = 1/2$, $\gamma_2 = 10^{-18} \Omega \text{ cm}^{-1}$, $\alpha_i \ll 1$.

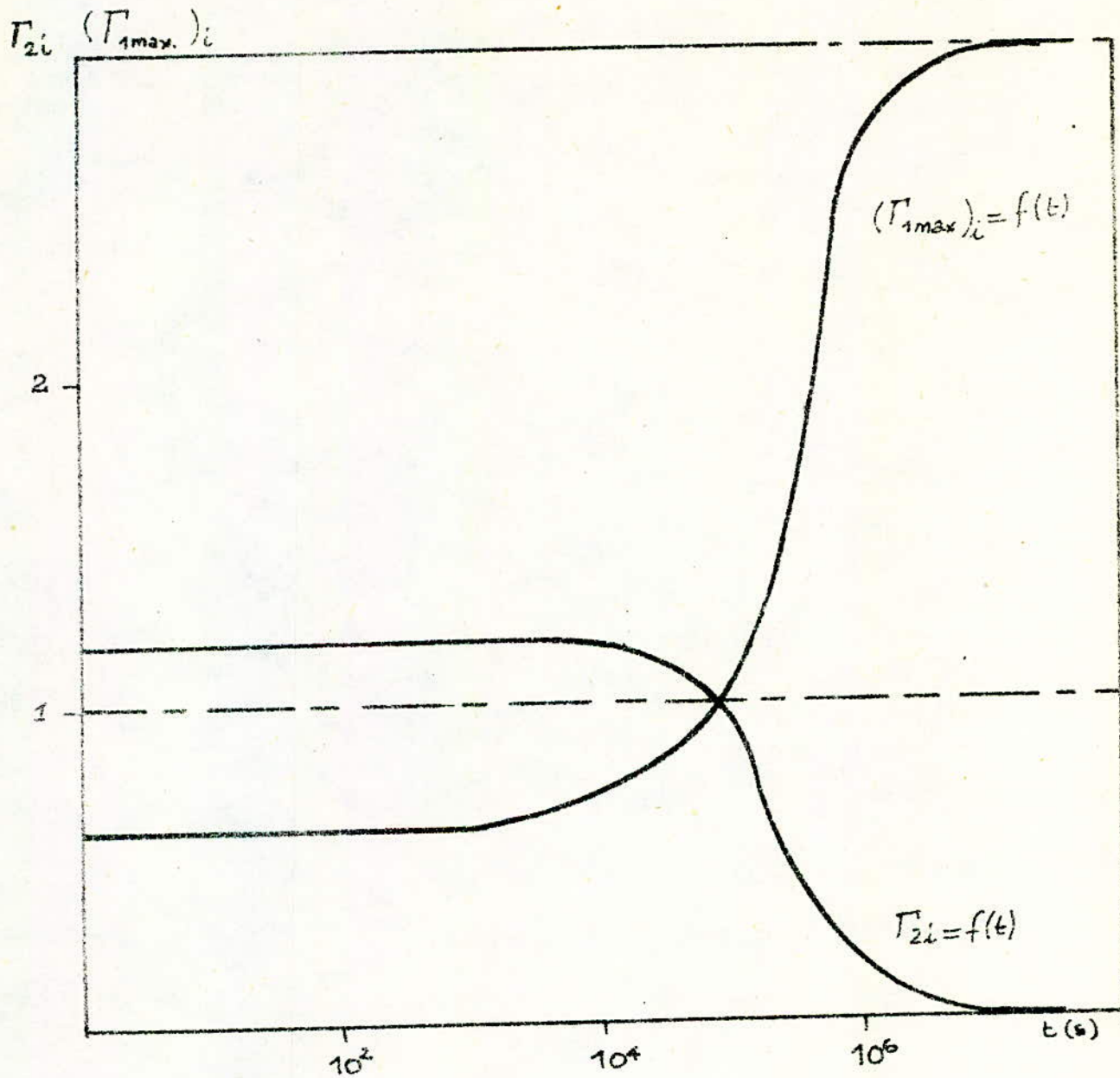


Fig. 15 $\epsilon_2 / \epsilon_1 = 1/2$ $\gamma_2 = \dots \Omega^1 \text{cm}^{-1}, \alpha_i \ll 1$ $\Gamma_{1max.})_i = f(t)$ et $\Gamma_{2i} = f(t)$ $\Gamma_{1max.})_i = \text{conste}$

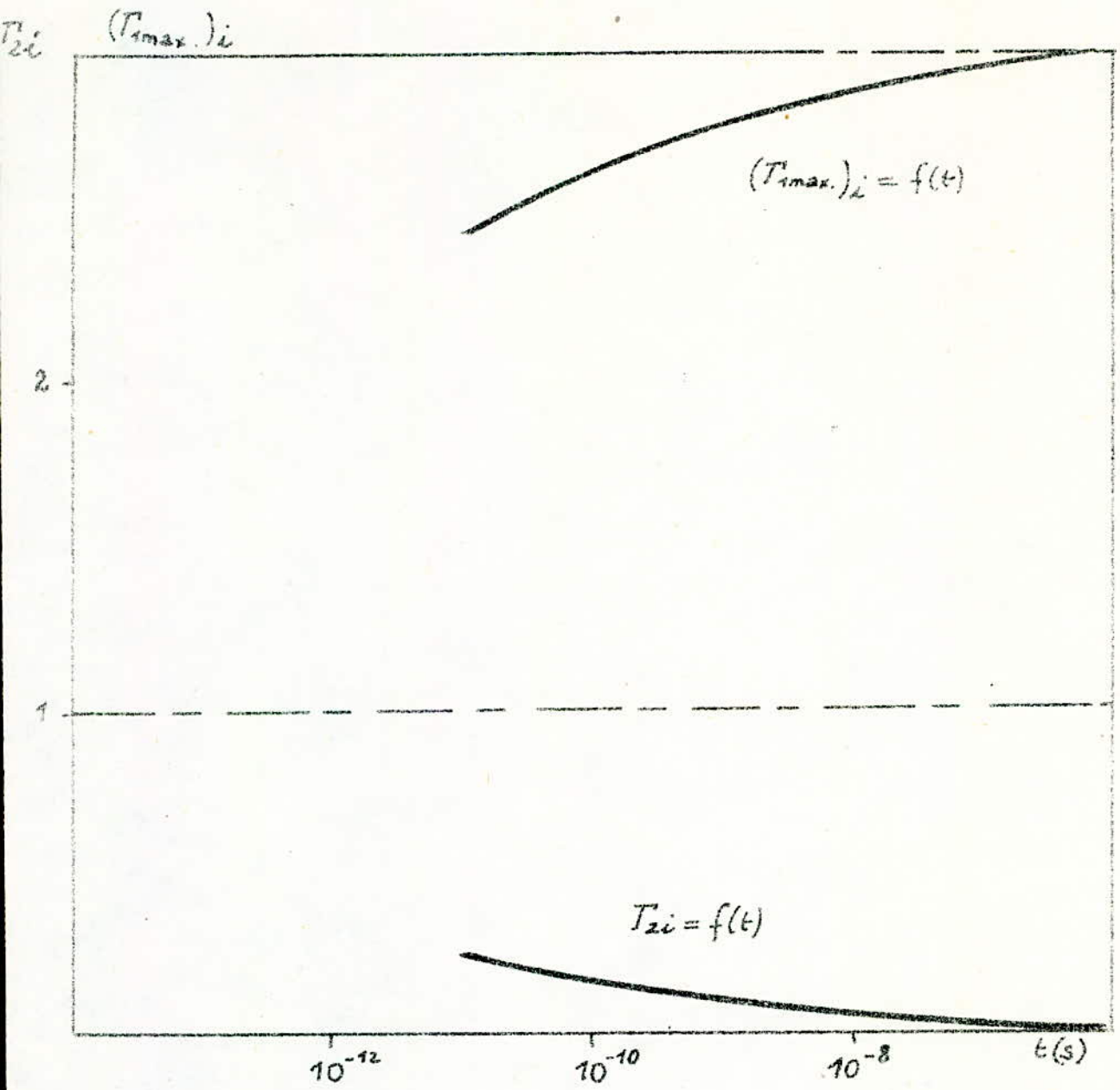


Fig. 16 Characteristics: $(T_{1max})_i = f(t)$ et $T_{2i} = f(t)$ de la couche
 pour $\epsilon_2/\epsilon_1 = 10$, $\gamma_2 = 10^{-5} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, $\alpha_i \ll 1$.

4-4-3 / Considérations générales sur le champs électrique pour des particules non conductrices.

En vertu de ce que a été déjà établi précédemment et en attribuant à χ_2 la valeur zéro, il vient alors

$$A_2(t) = 1$$

d'où l'expression du champ E_{zi} ,

(50-a)

$$E_{zi} = \frac{3 E_{moy}}{\left[(\chi+1) + 3n \frac{a}{\ell} (\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2) \right]} \cdot \frac{1}{\left[1 - n \frac{a}{\ell} (\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2) \right]} \cdot \frac{1}{\left[1 - n \frac{a}{\ell} (\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2) \right]}$$

(50-b)

$$(E_{max})_i = \frac{E_{moy.}}{1 - n \frac{a}{\ell} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} \left\{ 3 - \left[\frac{3n \frac{a}{\ell} (\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2)}{1 - n \frac{a}{\ell} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} + 2 \right] \frac{3}{(\chi+2) + 3n \frac{a}{\ell} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} \right\}$$

Nous constatons à travers cette expression, qu'il ya toujours déformation du champ et cela malgré l'absence de la conductivité χ_2 (pour des particules non chargées.)

En particulier cette déformation indépendamment ^{set} existe par la présence des paramètres tels que la concentration, les dimensions de la particule et l'intervalle entre electrodes. De plus nous retrouvons là un résultat analogue à celui d'un modèle sphéroïdale de KRASUCKI et du modèle sphérique de BEROUAL.

En se donnant une bulle i située au milieu de l'intervalle entre électrodes, $\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = n \frac{a}{\ell} = \alpha_i$,

Il en découle pour $(E_{1max})_i$ que :

$$(E_{1max})_i = \frac{3 \chi}{(\chi+2) \left(1 - \left(2n \frac{a}{l}\right)^3\right)} \cdot E_{moy.} \quad (50-c)$$

De plus si ,

$$\alpha = 2n \frac{a}{l} \ll 1$$

il vient alors ,

$$E_{1max.} = \frac{3 \chi}{(\chi+2)} E_{moy.} \quad (50-d)$$

D'après le Tableau (2) on peut avancer que les expressions du champ électrique maximum existant dans la littérature ne sont en fait que des cas bien particuliers de celles établies lors de cette étude.

$(E_{1max})_i$ $\gamma_2 \neq 0$ $\gamma_2 = 0$

Position quelconque de la bulle :

$$\frac{3E_{moy} - 2 \left(1 - n \frac{\beta}{l} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)\right) E_{2i}}{1 - n \frac{\beta}{l} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)} E_{2i}$$

$$\frac{[3\eta(1 - n\alpha(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)) - 9n\frac{\beta}{l}(\alpha_{2i}^2 - \alpha_{1i}^2)] E}{[1 - n\frac{\beta}{l}(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)] \{ (\eta+2) [1 - n\frac{\beta}{l}(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)] + 3n\frac{\beta}{l}(\alpha_{1i}^2 - \alpha_{2i}^2) \}}$$

Position de la bulle χ au milieu de sa cellule i

$$\frac{1}{1 - (2n\frac{\beta}{l})^3} [3E_{moy} - 2 \left(1 - (2n\frac{\beta}{l})^3\right) E_{2i}] E_{2i}$$

$$\frac{2\chi}{(\chi+2) \left[1 - (2n\frac{\beta}{l})^3\right]} E_{moy} \quad \chi = E_2/E_1$$

 $t \rightarrow \infty$

$$\frac{3E_{moy}}{1 - n\frac{\beta}{l} (\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)}$$

 $\alpha_{1i} \ll 1$ $\alpha_{2i} \ll 1$

$$\frac{3 \left[\chi + 2 \left(1 - A_i(t)\right) \right]}{2 + \chi} E_{moy}$$

$$\frac{3\chi}{2 + \chi} E_{moy} = \frac{3E_2}{2E_1 + E_2} E_{moy}$$

 $E_1/E_2 \ll 1$ $\alpha_{1i} \ll 1$ $\alpha_{2i} \ll 1$

$$3 \left[1 - A_i(t)\right] E_{moy}$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow E_{1max} = 3E_{moy}$$

$$3E_{moy}$$

TABLEAU - 2 -

5. Etude du comportement de la déformation des bulles dans un champ électrique.

5.1. Généralités -

Il a été déjà vu d'après le paragraphe (3) que la distribution du champ électrique marquait une intime dépendance avec la présence des particules en suspension et en particulier celles des bulles de gaz ou de liquide. Il faut remarquer que ceci agit directement sur le comportement des bulles.

Tous les travaux effectués sur le comportement d'une bulle en suspension dans un liquide isolant établissent qu'une bulle sphérique en présence d'un champ électrique uniforme d'intensité inférieure à sa valeur critique s'allonge dans la direction du champ appliqué en prenant une forme proche d'un ellipsoïde de révolution. Le degré de cette élongation dépend de plusieurs paramètres. On se propose d'établir un critère d'instabilité pour une bulle immergée dans un diélectrique liquide soumis à un champ électrique uniforme et de vérifier la validité des critères d'instabilité énoncés par plusieurs auteurs, notamment (GARTON - KRASUCKI), (TAYLOR - WILSON, PANTCHNKOV-TSABEK) et ceci dans les mêmes conditions de travail relatives à ses auteurs.

On essaiera par la suite de vérifier le critère de GYEMANT concernant la formation d'un pont par une bulle de dimension définie par rapport à l'intervalle entre électrodes.

Pour ce faire, on partira de l'expression de la pression électrostatique établie par BEROVAL [27] et on utilisera la méthode de RAYLEIGH basée sur l'équilibre des forces agissantes en chaque point d'une bulle; ce qui nous permettra d'établir l'équation de la forme de cette dernière et d'en dégager un critère d'instabilité.

5.1.2 / Mise en équations.

Soit une bulle de permittivité ϵ_2 immergée dans un milieu liquide de permittivité ϵ_1 et soumise à un champ électrique uniforme.

En tout point de la bulle agit une pression électrostatique P_e égale à :

$$\vec{P}_e = \frac{1}{2\epsilon_1} \left\{ (\epsilon_1 - \epsilon_2) \left[\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin^2 \alpha \right] E_2^2 - (3\epsilon_2 - \epsilon_1) \sigma E_2 \cos \alpha - 2\sigma^2 \right\} \vec{a}_n + 2\sigma E_2 \sin \alpha \vec{a}_t \quad (51)$$

On peut ainsi déduire les composantes normale et tangentielle $P_{e,n}$ et $P_{e,t}$ en tout point de la bulle, soient :

$$P_{e,n} = \frac{1}{2\epsilon_1} \left\{ (\epsilon_1 - \epsilon_2) \left[\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin^2 \alpha \right] E_2^2 - (3\epsilon_2 - \epsilon_1) \sigma E_2 \cos \alpha - 2\sigma^2 \right\} \quad (51-a)$$

et

$$P_{e,t} = \frac{1}{2\epsilon_1} \left[\epsilon_1 (\epsilon_1 - \epsilon_2) E_2^2 - 2\sigma E_2^2 \right]; \quad \sigma_e = \sigma \quad (\alpha = \pi/2)$$

Remarquons que pour $\sigma = 0$, la composante tangentielle est nulle. De même que les forces électrostatiques sont concentrées aux pôles et à l'équateur de la bulle. Le rapport des pressions électrostatiques en ces points est tel que :

$$\frac{P_{en,x} (\alpha=0)}{P_{en} (\alpha=\pi/2)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \chi \quad (51-c)$$

D'autre part comme les composantes tangentielles sont des contraintes de cisaillement alors que les composantes normales (P_{en}) sont des contraintes de traction en tout point de la bulle, l'équation d'équilibre entre les pressions sera,

$$P_h + P_{en,x} + \sigma_f \mathcal{C}_x = P_0$$

où σ_f est la tension superficielle en chaque point de la bulle :

\mathcal{C}_x : La courbure de la bulle au point x

P_h : La pression hydrostatique du liquide

P_0 : La pression à l'intérieur de la bulle

$P_{en,x}$: La composante normale de la pression électrostatique au point x .

$P_{en,t}$: La composante tangentielle de la pression électrostatique au point x .

De même qu'au point de la bulle se trouvant à l'équateur c'est à dire $x=T$ $\alpha=\pi/2$, on a

$$P_h + P_{en,t} + \sigma_f \mathcal{C}_t = P_0 \quad (52-a)$$

Par soustraction des deux équations ci-dessus, on obtient,

$$\sigma_f (\mathcal{C}_x - \mathcal{C}_t) = -(P_{en,x} - P_{en,t})$$

d'où,

$$\mathcal{C}_x - \mathcal{C}_t = \frac{1}{2\sigma_f \epsilon_1} \left[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 \epsilon_2 \cos^2 \alpha + 3(\epsilon_2 + \epsilon_1) \sigma \epsilon_2 \cos \alpha + 2(\sigma^2 - \sigma_e^2) \right]$$

(53-a)

C'est l'équation d'une bulle dont la forme est la plus générale.

Si on exclut toute possibilité de charge globale différente de zéro et l'existence de champ électrique divergent on tendra toujours vers l'électroneutralité et par conséquent, l'équation précédente se réduit à :

$$\mathcal{C}_x - \mathcal{C}_t = \frac{1}{2\sigma_f \epsilon_1} (\epsilon_1 - \epsilon_2) E_2^2 \cos \alpha \quad (53-b)$$

Remarquons que cette dernière expression est identique à celle obtenue par GARTON-KRASUCKI [14].

Le cas où les hypothèses annoncées ci-dessus ne sont pas réalisées ($\sigma \neq 0$), a été étudié par BEROUAL [21] qui a fait ressortir une dissymétrie dans l'allongement de la bulle.

5-2 / Critère d'instabilité.

Il ressort des études faites dans ce domaine ainsi que des observations expérimentales qu'on peut établir un critère de rupture pour des bulles de gaz ou des gouttes de liquide en suspension ^{dans} un diélectrique liquide.

Ainsi dans le cas des bulles non chargées ($\sigma=0$) on aura d'après (53-b).

$$\mathcal{C}_x - \mathcal{C}_t = \frac{1}{2\sigma_f \epsilon_1} (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 E_2^2 \cos^2 \alpha. \quad (53-c)$$

Etant donné que la déformation est symétrique, on peut traiter le cas où le point x est au pôle ($x \equiv N$ ($\alpha=0$)).

Par conséquent se réduit à :

$$\mathcal{C}_x - \mathcal{C}_t = \frac{1}{2\sigma_f \epsilon_1} (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 E_2^2.$$

Compte tenu de la symétrie de la déformation on a alors,

$$\mathcal{C}_N = \mathcal{C}_x(\alpha=0) = \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R'_N} = \frac{2}{R_N} \quad (54-a)$$

En vertu des relations géométriques, les deux rayons de courbure R_N et R'_N sont définis de la manière suivante, en passant par les deux définitions ci-après,

$$R_1 = a^2 b^2 \left(\frac{z^2}{a^4} + \frac{x^2}{b^4} \right)^{3/2} \quad \text{et} \quad R_2 = b^2 \left(\frac{z^2}{a^4} + \frac{x^2}{b^4} \right)^{1/2}$$

On écrit par conséquent qu'aux pôles la courbure est,

$$\mathcal{C}_N = \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R'_N}$$

avec $R_N = R_1(x=0, z=b)$ et $R'_N = R_2(x=0, z=b)$

d'où, $R_N = b^2/a$ et $R'_N = b^2/a$.

En posant s le rapport des demi-axes majeur par le mineur ($s = a/b$) défini par l'intersection du plan $y=0$ avec l'ellipsoïde, on tire alors,

$$\mathcal{C}_N = \frac{2}{R_N} = \frac{2s^2}{a^2} \quad (54-b)$$

Pareillement à l'équateur, les deux rayons de courbure principaux R_t et R'_t sont définis comme suit,

$$R_t = R_1(x=b, z=0) \quad \text{et} \quad R'_t = R_2(x=b, z=0)$$

d'où $R_t = a^2/b$ et $R'_t = b$

La courbure totale à l'équateur \mathcal{C}_t devient:

$$\mathcal{C}_t = \frac{1}{R'_t} + \frac{1}{R_t} = \frac{1}{b} + \frac{1}{bs^2} = \frac{1}{as} \cdot (s^2+1) \quad (54-c)$$

D'autre part on a ,

$$e^2 = 1 - (b/a)^2 = 1 - s^{-2} \quad (55-a)$$

$$a = R_0 (1 - e^2)^{-1/3} = R_0 s^{2/3} \quad (55-b)$$

$$b = R_0 (1 - e^2)^{1/6} = R_0 s^{-1/3} \quad (55-c)$$

où ;

e : excentricité de l'ellipse

R_0 : Rayon initial de la bulle non contractée.

D'où ,

$$E_N - E_t = \frac{1}{R_0 s^{2/3}} \left[2s^3 - s^2 - 1 \right]$$

Cette expression peut se mettre sous la forme suivante ,

$$E_N - E_t = \frac{1}{R_0} \left[\frac{2s^3 - s^2 - 1}{s^3} \right] s^{4/3} \quad (56)$$

En substituant cette équation dans l'expression (53-c) il vient alors ,

$$E_2 = \left[\frac{207}{R_0 E_1} \left(\frac{E_1}{E_1 - E_2} \right)^2 s^{4/3} \frac{2s^3 - s^2 - 1}{s^3} \right]^{1/2} \quad (53-d)$$

Or d'après les résultats concernant l'étude de la distribution du champ E_2 est à :

$$E_2 = k_2 u A(t) = k'_2 A(t) E_{\text{moy.}}$$

$$\text{où } k'_2 = k_2 l \text{ et } E_{\text{moy.}} = u/l$$

Le reste des notations est identiques à ceux utilisés précédemment.

Par conséquent , on peut écrire E_2 sous la forme (40-b) suivante ,

$$E_2 = F E_{\text{moy.}}$$

ce qui donne après arrangement :

$$E_{\text{moy.}} = \frac{1}{F} \left[\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \right)^2 \left(\frac{\sigma_f}{R_0 \epsilon_1} \right) 2S^{4/3} \left(\frac{2S^3 - S^2 - 1}{S^3} \right) \right]^{1/2}$$

$$E_{\text{moy.}} = \left(\frac{\epsilon_2}{|\epsilon_1 - \epsilon_2|} \right) \left(\frac{\sigma_f}{R_0 \epsilon_1} \right)^{1/2} \left(\frac{G}{F} \right) \quad (56-a)$$

$$\text{où } G = \left[2 S^{4/3} \left(\frac{2S^3 - S^2 - 1}{S^3} \right) \right]^{1/2}$$

$$\text{et } F = K'_2 A(t) \quad (56-b.)$$

L'intensité du champ critique E_c pour des bulles non chargées conductrices ou non est alors,

$$E_c = \left(\frac{\epsilon_1}{|\epsilon_1 - \epsilon_2|} \right) \left(\frac{\sigma_f}{R_0 \epsilon_1} \right)^{1/2} \left(\frac{G_c}{F} \right) \quad (57-a)$$

$$\text{et, } G_c = \left[2 S_c^{4/3} \left(\frac{2S_c^3 - S_c^2 - 1}{S_c^3} \right) \right]^{1/2}, \quad E_c = U_c / \ell \quad (57-b)$$

Remarquons que pour une bulle non conductrice, la fonction $A(t)$ est identiquement égale à l'unité, d'où :

$$F_c = K'_{2c} \quad A_c(t) \equiv 1$$

Les quantités utilisées dans tout ce qui précèdent sont exprimées en unités S-I.

On vient donc d'établir le critère d'instabilité pour des bulles des gaz ou des gouttes de liquide non chargées dans un champ électrique uniforme. Remarquons que les fonctions F et G sont différentes de celles trouvées par GARTON et KRASUCKI. Cependant l'expression de E_c qu'on vient d'établir est semblable à celle obtenue par plusieurs auteurs [20], [21] et [24].

Pour une goutte d'eau non chargée dont la conductivité est très importante devant celle du liquide isolant on peut écrire l'expression (57-a) sous la forme condensée suivante en unité c-g-s

$$E_c = K_c \left(\frac{\sigma_f}{R_0 E_1} \right)^{1/2} \quad (58)$$

La différence entre les diverses expressions de E_c réside dans la valeur de K_c .

Elle varie selon les auteurs entre 380 et 488 et ce en fonction des rapports de permittivité (ϵ_2/ϵ_1) et des demi-axes majeur par le mineur (S_c).

En effet, nous avons déjà remarqué d'après ce qui a précédé qu'il existe une compétition entre l'énergie propre à la bulle et le gain d'énergie électrostatique.

Donc dire que la bulle passe dans état d'instabilité implique nécessairement que l'énergie W_0 : potentiel total de la bulle est minimal. Ceci peut se traduire par les deux relations suivantes:

$$\frac{dW_0}{dS} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 W_0}{dS^2} < 0$$

On rappelle que cette initiative n'a été considéré que parce qu'il peut y avoir des phénomènes d'injection dont l'effet peut induire une charge globale non nulle et de ce fait l'hypothèse admise au départ concernant notre modèle serait rejeté. Par conséquent, il n'y aurait plus de symétrie par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de la bulle (direction du champ) et la forme de la bulle ne serait plus celle d'une ellipsoïde de révolution. Cependant dans le cas où la bulle acquerrait une charge symétrique, ce qui est le cas où elle serait au milieu de l'intervalle entre électrodes, la déformation serait symétrique c'est à dire que $\sigma(\alpha=0) = \sigma(\alpha=\pi)$ ce qui correspondrait au modèle général proposé, on rejoint donc le cas déjà étudié.

5-2 / Discussion sur l'allongement critique.

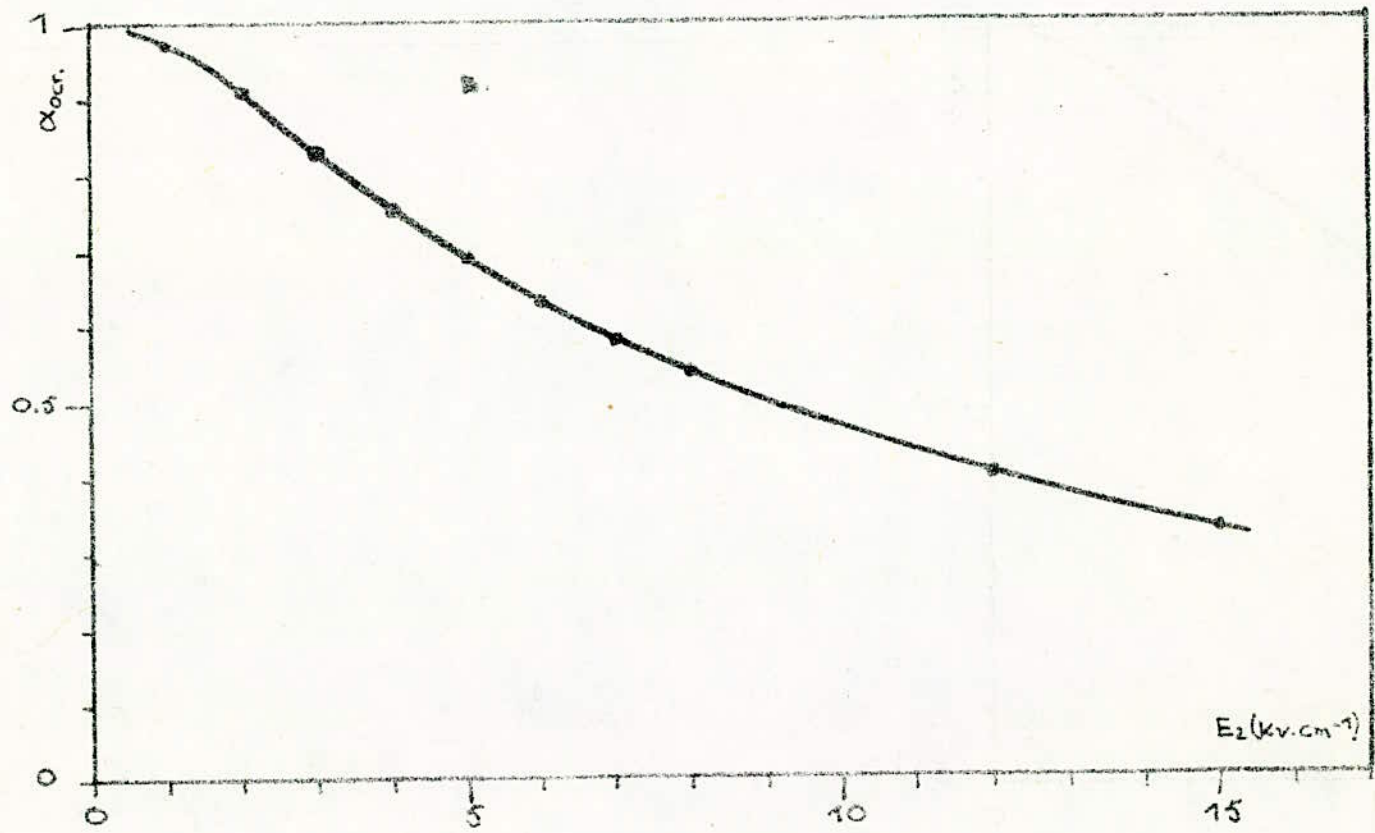
Dans ce qui va suivre, on va discuter le cas de notre modèle ellipsoïdal (d'une bulle se situant au milieu d'une cellule) c'est à dire : $\alpha_{1i} = \alpha_{2i}$. Il faut remarquer le fait quand t augmente (temps suffisamment grand) le champ a tendance à s'annuler pour le cas des bulles conductrices. Ce qui signifie qu'au bout d'un certain temps atteint son état critique et s'allonge sous l'influence des forces extérieures puisque la force due à E_z inévitablement s'annule. Par conséquent, la bulle s'allonge toujours.

On distingue deux cas, une fois que la bulle rentre dans son état d'instabilité, en fonction de ses dimensions initiales et de l'intervalle entre électrodes plus précisément en fonction du rapport : $\alpha_0 = 2R_0/l$

— La bulle en s'allongeant arrive à joindre les électrodes par un canal à travers lequel se produit une décharge (sous réserve que cette dernière devienne ionisée.)

— La bulle n'arrive pas à former un canal et se désintègre en plusieurs microbulles.

Il apparaît un autre paramètre très important qui intervient dans l'allongement critique c'est la tension superficielle de la bulle (σ_f). C'est donc de la dépendance de ce σ_f vis-à-vis de la bulle qu'il y a cisaillement au niveau des extrémités de cette dernière.



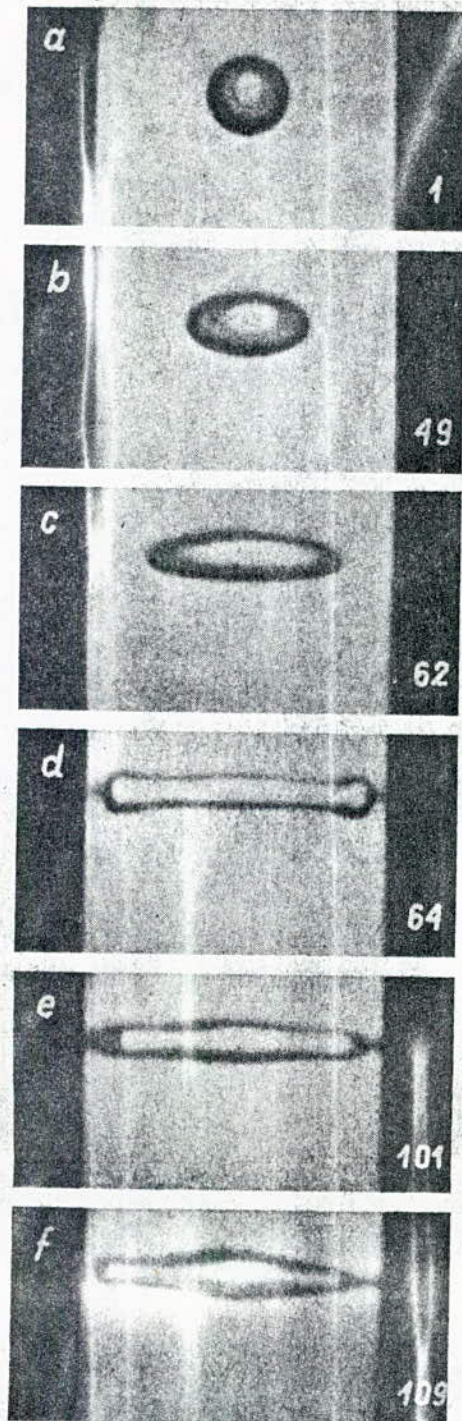
18

α_{ou}

$\epsilon_2 = \epsilon_1 / \epsilon_1 = 40, \sigma_f = 43 \text{ dyn/cm}$

$\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-11} \text{ F/cm}$

Fig. 19. Goutte d'eau dans l'huile de ricin. Intervalle entre electrodes de 5 mm. Tension continue croissante de 0 à 50 KV en 2secondes environ vitesse de la caméra 1000 images/ Sec. (à droite le numéro d'ordre de l'image dans le film) D'après J.I Skowronski.



L'étude sur les conditions critiques de α_0 est de ce fait possible. Considérons dans un premier temps le cas d'une bulle incompressible.

En vertu de la conservation du volume on peut écrire,

$$ab^2 = R_0^3$$

d'où

$$S = \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{R_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{m_1}{\alpha_0}\right)^{3/2}$$

avec,

$$m_1 = \frac{2A}{l}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_H - \mathcal{E}_E &= \frac{1}{\frac{m_1}{2} l} \frac{1}{\left(\frac{m_1}{\alpha_0}\right)^{3/2}} \left[2 \left(\frac{m_1}{\alpha_0}\right)^{3/2} - \left(\frac{m_1}{\alpha_0}\right)^{6/2} - 1 \right] \\ &= \frac{2}{l} \frac{\alpha_0^{3/2}}{m_1^{3/2}} \left[\frac{2 m_1^{3/2}}{\alpha_0^{3/2}} - \frac{m_1^{6/2}}{\alpha_0^{6/2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\mathcal{E}_H - \mathcal{E}_E = \frac{2}{l} \frac{\alpha_0^{3/2}}{m_1^{3/2}} \frac{1}{\alpha_0^{3/2}} \left[2 m_1^{3/2} - m_1^{6/2} \alpha_0^{3/2} - \alpha_0^{3/2} \right]$$

Il vient finalement

$$\mathcal{E}_H - \mathcal{E}_E = \frac{2}{l} \frac{1}{m_1^{3/2}} \frac{1}{\alpha_0^{3/2}} \left[2 m_1^{3/2} - m_1^{6/2} \alpha_0^{3/2} - \alpha_0^{3/2} \right] \quad (59)$$

De cette équation il en découle la détermination α_{0cr} tel que pour $m_1 \geq 1$, les bulles s'allongent jusqu'à former un pont. Il s'agit donc de résoudre l'équation ci-dessus pour $m_1 = 1$.

Notons que $m_1 = 1$ correspond en fait à l'instabilité.

En égalisant les équations (53-c) et (59) on obtient :

$$\frac{2}{l} \frac{1}{m_1^{3/2}} \frac{1}{\alpha_0^{6/2}} \left[2 m_1^{9/2} - m_1^{6/2} \alpha_0^{3/2} - \alpha_0^{9/2} \right] = K^2 E_2^2$$

où
$$K^2 = \frac{1}{2 \sigma_f \epsilon_1} (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2$$

d'où
$$\frac{2}{l} \frac{1}{\alpha_0^{6/2}} \left[2 - \alpha_0^{3/2} - \alpha_0^{9/2} \right] = K^2 E_2^2$$

ou encore ,
$$2 - \alpha_0^{3/2} - \alpha_0^{9/2} = K^2 E_2^2 \frac{l}{2} \alpha_0^{6/2}$$

ce qui donne finalement

$$\alpha_0^{3/2} + \alpha_0^{9/2} + K^2 E_2^2 \frac{l}{2} \alpha_0^{6/2} - 2 = 0$$

En posant $\mu = \alpha_0^{3/2}$,

l'équation précédente devient ,

$$\mu^3 + \left(K E_2 \sqrt{\frac{l}{2}} \right)^2 \mu^2 + \mu - 2 = 0$$

Il s'agit donc de résoudre cette équation afin de déterminer le paramètre α_{ocr} pour différents cas pratiques.

Considérons un cas très fréquent en pratique qui est celui d'une goutte d'eau immergée dans l'huile de transformateur où :

$$\epsilon_2 = 80 , \sigma_f = 43 \text{ dyn.cm}^{-1} , \epsilon_0 = 8.8 \cdot 10^{-14} \text{ F.cm}^{-1} \text{ et } \epsilon_1 = 2 .$$

Apartir de ces données on peut déterminer l'allure de α_{ocr} en fonction du champ électrique à l'intérieur de la particule (voir tableau ci-dessous et fig 18-)

$E_2 \text{ (kV/cm)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	---	12	15
α_{ocr}	0.977	0.91	0.83	0.75	0.69	0.63	0.58	0.54	0.5	0.48	---	0.4	0.33

Il ressort de ce qui précède que $\alpha_{0,cr}$ est fonction de l'intensité du champ électrique E_2 , des permittivités diélectriques des deux milieux et de la tension superficielle de la bulle.

Par conséquent le critère énoncé par GYEMANT est non justifié vu que même pour $\alpha_{0,cr} < 60\%$ une goutte d'eau a la possibilité de former un canal si l'intensité du champ électrique est suffisamment élevée.

Les observations expérimentales faites par SKOWRONSKI [32] avec une goutte d'eau dans de l'huile de ricin (voir fig 19) montre une bulle occupant 27,5% de l'intervalle entre électrodes forme un canal sous une tension croissante allant de 0 à 50 kV en 2 sec.

CONCLUSION

Rappelons que l'objectif principal de ce travail était d'étudier l'influence des particules déformables en suspension dans les diélectriques liquides sur la distribution du champ électrique ainsi que leur comportement.

Pour cela on a établi dans une première partie les expressions des champs électriques dans le liquide et à l'intérieur des particules en fonction des divers paramètres les caractérisant et du temps moyennant certaines hypothèses énoncées.

Il a été démontré en particulier que.

-1- Le champ électrique E_1 dans les diélectriques liquides dépend du temps.

Pour une tension donnée le champ électrique E_1 croit avec le temps jusqu'à atteindre sa valeur maximum.

La rigidité diélectrique d'une huile isolante est fonction du temps d'application de la tension et le temps mis par E_1 pour atteindre son maximum est d'autant plus court que la conductivité γ_2 est grande.

-2- Le champ électrique E_1 subit une distorsion en présence des particules en suspension.

L'intensité maximum du champ E_1 dans le cas du modèle proposé est égale à :

$$E_{1max.} = \frac{1-\beta_0}{\beta_1} U - \frac{\beta_2(1-\beta_0) - \beta_1\beta_0}{\beta_1} E_2$$

-3- On ne peut séparer l'étude de l'influence des dimensions des particules en suspension de celle

- de leur concentration ou de l'intervalle entre électrodes
- 4 — L'intensité du champ électrique E dépend de l'amplitude et de la tension aux bornes des électrodes.
 - 5 — Le champ électrique est fonction des positions des particules par rapport aux électrodes. Il est d'autant plus important que la cellule est petite (de tendant vers 1).

En d'autres termes le champ électrique sur la surface d'une particule est maximum au point le plus proche de l'électrode. C'est la raison pour laquelle le mouvement d'une particule non chargée s'effectue toujours dans la direction de l'électrode voisine, ce qui confirme le comportement différent de plusieurs bulles dispersées sur une même ligne de champ et d'une façon quelconque.

- 6 — Le champ électrique à l'intérieur des particules s'exprime d'une manière générale par l'équation :

$$E = K'_2 A(t) E_{\text{moy.}}$$

La fonction $A(t)$ dépend de la forme de la tension appliquée aux électrodes. Elle est identique à celle déjà calculée pour d'autre modèle (sphérique, plan).

Pour établir le critère d'instabilité il faut prendre en considération tous les paramètres caractéristiques du modèle (y compris la concentration des particules et les phénomènes électrohydrodynamiques.)

Cependant la valeur critique du champ appliqué pour des bulles non chargées conductrices ou non est donné en système S.I par :

$$E_c = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \left(\frac{0,7}{D_0 \epsilon_1} \right)^{1/2} \left(\frac{G_c}{F_c} \right)$$

$$G_c = \left[2 S_c^{4/3} \left(\frac{2 S_c^3 - S_c^2 - 1}{S_c^3} \right) \right]^{1/2}, \quad E_c = U_c / l$$

$$F_c = k'_{2c} A_c(t)$$

Cette expression est semblable à celle obtenue par d'autres chercheurs.

- 7 - Il est démontré que le critère de GYEMANT concernant la formation d'un canal par des bulles de gaz ou des gouttes de liquide occupant 60% de l'intervalle entre électrodes n'est pas vérifié.

La formation d'un canal ou la désintégration doit être étudiée de très près et ne peut être énoncée d'une manière grossière.

En pratique au delà d'une certaine tension des phénomènes électrohydrodynamiques apparaissent. D'où résulte la variation de plusieurs paramètres en particulier la concentration et les dimensions des particules, ce qui influe énormément sur la distribution du champ électrique et donc sur la rigidité diélectrique du liquide isolant.

Le fait d'avoir considéré la densité de charge superficielle comme fonction du temps a permis de mettre en évidence, sur la base d'un modèle mathématique, la dépendance du champ électrique en fonction des paramètres suivants.

- Le temps t
- La tension U
- La concentration, les dimensions, la position, la conductivité et la permittivité des particules en suspension.
- La permittivité du liquide.
- L'intervalle entre électrodes.

On a pu ainsi apprécier l'influence des divers paramètres sur la répartition du champ électrique et par voie de conséquence sur la rigidité diélectrique des liquides isolants.

Le comportement des particules déformables est intimement lié à cette répartition.

- (1) A. GYEMANT (1930) : Electro-physic der isolierstoffe
Springer Verlag (Berlin).
- (2) Z. KRASUCKI (1968) : Breakdown of Commercial Liquid and Liquid
Solid diélectrics, Alston High voltage
Technology, Oxford University Press,
pp - 129-143.
- (3) P. KOCCAIN, K. SOBRA
(1967) : Expermentalni Wyskum Elektrikeyko Prorazu
Nektreych Kapalnych Dielektrik, Eleck-
trotech. Obzor, 56, pp - 362-365.
- (4) K.C. KAO (1965) : Deformation of gas bubbles and liquid
drops in an electrically stressed insu-
lating liquid, Natur, 208, pp - 279-280.
- (5) H. BASSECHES, D.A. Mc LEAN (1955): Industrial and Eng.
Chemistry, Volume 47, 9, 1962.
- (6) J.P GOSSE (1969) : Etude critique de l'interpretation par Z.
Krasucki du claquage des diélectriques
liquides, Thèse de Doctorat, Grenoble
(FRANCE).
- (7) K.C. KAO, J.B. HIGHAM (1961) : J. Electrochem. Soc., 522.
- (8) A. GYEMANT (1925) : Durchschlagmechanismus feuchter Isolier-
flüssigkeiten, Ztschr. F. Physik. 33,p 789.
- (9) D.W. SWAN, T.J. LEWIS (1961): The influence of cathode and anode
Surfaces on the électric strength of liquid
Argon, Proc. Phys. Soc, 78, Pt.3, pp.448-459.
- (10) P.K. WATSUN, A.H. SHARBAUGH (1962): Conduction and Breakdown in
liquid diélectrics, in Birks.J. (Ed), Progress
in dielectrics, 4, Heywood, pp. 199-248.
- (11) G. SCHONE (1933) : Zum Verhalten von Gasblasen in Isolierd in
Elektrischem Feld, Elektrich, 10, pp. 335-339.

- (12) K.C. KAO (1960): Amer I.E.E.E. Winter Meeting, conf. Pap.
pp. 60 - 94.
- (13) N.J. FELICI (1979): Bubbles, partial discharges and liquid
Breakdown, Inst, Phys. Conf. Ser, N° 48,
p. 181.
- (14) C.G. GARTON, Z.KRASUCKI (1964): Bubbles in insulating liquides:
Stability in an électric field, Proc, Roy.Soc.
A, 280, pp. 211 - 226.
- (15) G. TAYLOR (1964) : Desintegration of water drops in electric
Field, Proc. Roy. Soc. t.A. 280, P. 983.
- (16) A. VERVEKA, A. HON (1966): Discharge in bubbles in Oil, Elektro-
tech. Obzor, 55, pp. 475 - 477.
- (17) G.M. PANTCHENKOV, L.K. TSABEK (1968): Critical Strength of quasi-
stationary uniform field desintegrating water
drops of emulsion, Zurnal fiz. Che. t. 42, nr
5, p 1249.
- (18) W.R. SMYTHE (1950): Static and dynamic electricity, New York,
Mc Graw. Hill, Co, P. 19.
- (19) K.F. STIEPANTCHOUK, I.A. TINIAKOV, (1965): Déformation des bulles
de gaz dans les liquides soumis à un champ
électrique, Energetika, nr 4, p. 11.
- (20) J.R. MELCHER, G.I TAYLOR (1969): Annual Review of fluid
Mechanics 1. pp.11 - 146.
- (21) A. BEROUAL (1983): C.R. Acad. Sc. Paris, t. 296.
- (22) A. BEROUAL (1979): " Etude de l'influence des particules en
suspension dans les diélectriques liquides sur
la distribution du champ électrique dans
l'espace et le champs".
Thèse de Doctorat, Pologne.
- (23) S. MIRZA, GN. SMITH, J.H. CALDERWOOD (1970): The élongation of small
small bubbles in électrically stressed
dielectric liquids and the brekdown
criterion I.E.E. Conf. Publ. 67, pp. 229-232.

- (24) C.M. DZUWARLI, G.W. WIECZCCHAJZER, W.Y. SZTEJNZRAJBIER (1969):
SLLY rozciągające dla trójosiowej élepsydy
obrotowej in w polu elektrycznym. Arch.
Elektrotech. t. 18, pp. 9 - 17.
- (25) J.I. SKOWRONSKI (1962): O mechanizmie tworzenia się mostków w
procesie przebicia dielektryków ciekłych, Arch.
Elektrotech., t.11, nr 3, p. 565.
- (26) R. MEYRUEIX (1980): " Etude de la génération et du comportement
d'une phase gazeuse dans un liquide diélectrique
soumis à un champ électrique, "
Thèse de Doctorat, Grenoble (FRANCE).
- (27) A. BEROUAL (1982): " Calcul des pressions électrostatiques pour de
des bulles chargées dans un champ électrique ".
Arch. Electrotech., 1/2, Varsovie (Pologne).
- (28) J.I. SKOWRONSKI. (1968): "Badania wyładowań w diélektryku ciekłym",
Materialy Seminarium, Academie des Sciences de
Pologne, p.91.