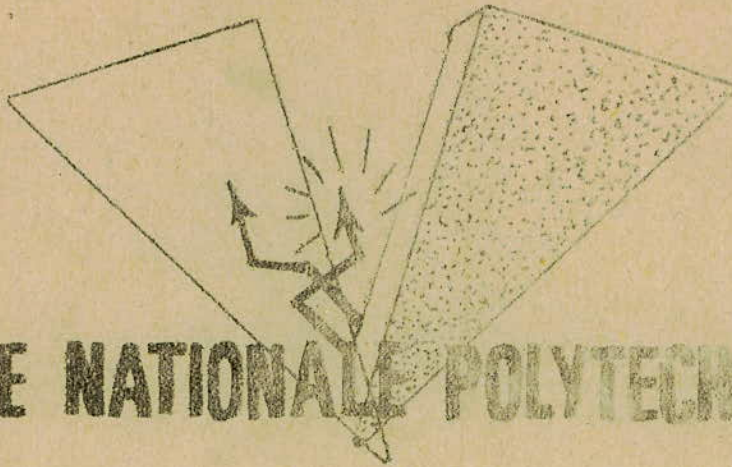


15/85

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUP. ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

lex



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département D'électrotechnique

Projet de Fin d'Etude

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

Sujet

Influence des aspérités terrestres sur la distribution
du champ électrique sous une ligne haute-tension 220 kv

Proposé par :

Franczkowiacc

Etudié par /

N. Harid

A. Mekroud

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
ELECTROTECHNIQUE



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département D'électrotechnique

Projet de Fin d'Etude _____

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

Sujet

Influence des aspérités terrestres sur la distribution
du champ électrique sous une ligne haute-tension 220 kv

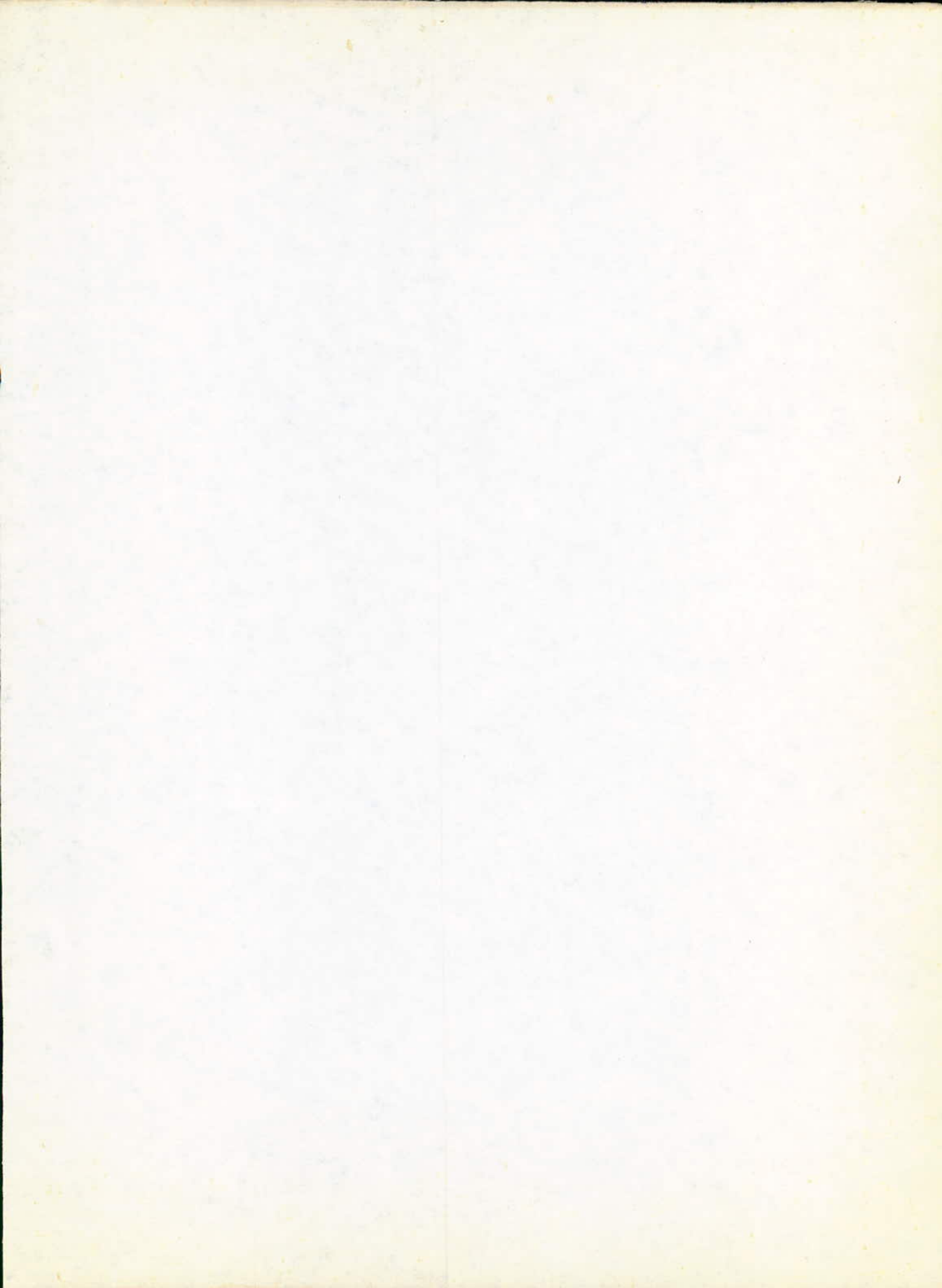
Proposé par y

J. Francskowiaks

Etudié par/

N. Harid _____

A. Mekroud _____



REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier vivement messieurs J. FRACKOWIAK, notre promoteur, et A. BOUBAKEUR, notre co-promoteur, pour avoir dirigé ce mémoire, et pour tous les précieux conseils qu'ils n'ont cessé de nous prodiguer durant tout le semestre d'étude.

Nos remerciements vont également à monsieur SOLIVERES du département de Génie Civil pour nous avoir facilité certaines tâches.

Que tous les professeurs ayant contribué à notre formation trouvent ici notre profonde reconnaissance.

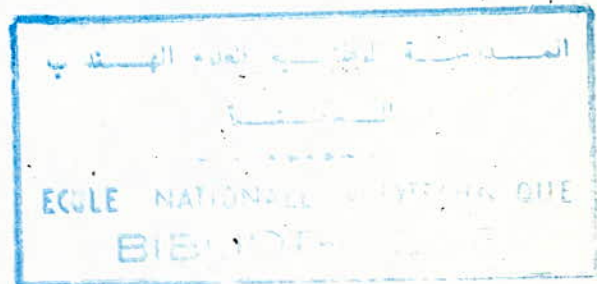


TABLE DES MATIERES.

INTRODUCTION	1
— CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES LIGNES A HAUTE TENSION .	
I.1 Haute tension, Définition	3
I.2 Moyens d'étude en haute tension	3
I.3 Lignes électriques à haute tension	4
— CHAPITRE II : METHODES DE CALCUL DU CHAMP ELECTROSTATIQUE	
II.1 Introduction	7
II.2 Méthodes générales	7
II.3 Etude Electrostatique de deux distributions lineïques uniformes	11
II.4 Méthode des images	17
II.5 Application au calcul du champ électrique sous une ligne à haute tension	23
— CHAPITRE III : METHODES NUMERIQUES	
III.1 Introduction	36
III.2 Méthode des charges fictives	37
III.3 Méthode des éléments finis	41
III.4 Méthode des différences finies	48
— CHAPITRE IV : CALCUL ET MESURE DU CHAMP ELECTRIQUE SOUS UNE LIGNE AERIENNE 220 kV	
IV.1 Méthodes de mesure des champs électriques	53

IV.2 Résultats de calculs et de mesures	58
IV.3 Synthèse et discussion des résultats de mesures	78
CONCLUSIONS	80
ANNEXE	83

INTRODUCTION

L'espace qui entoure tout objet soumis à une tension élevée est le siège d'un champ électrique.

Lorsque les objets conducteurs se trouvant à une tension élevée sont aussi parcourus par des courants électriques, ces derniers génèrent aussi des champs magnétiques. Cependant, lors de phénomènes qui entrent en jeu en régime permanent dans le domaine de la haute tension ($U > 1 \text{ kV}$), ce sont les champs électriques qui sont prépondérants.

Les champs électriques élevés constituent une contrainte pour le matériel électrique, et aussi un danger pour le personnel d'exploitation des postes, lignes et laboratoires à haute tension. Il résulte que la mesure ou le calcul du champ électrique les plus précis possible ont une grande importance pratique dans le domaine des hautes tensions.

Dans le cas d'une ligne aérienne, la présence d'une aspérité artificielle au niveau de la terre suscite beaucoup d'intérêt quand à la coordination de l'isolement, en raison de l'effet perturbateur qu'elle provoque sur le champ électrique. C'est pourquoi nous nous proposons ici d'en examiner l'influence sur la distribution du champ électrique. Nous nous pencherons particulièrement sur le cas d'une ligne à 220 kV, avec l'intention d'en tirer les enseignements suivants :

- 2 -

- Détection des zones à champ électrique maximal.
- Vérification des implications sur l'environnement.

Chapitre I. GENERALITES SUR LES LIGNES A HAUTE TENSION

I.1 Haute tension, Définition

La haute tension traite de l'ensemble des systèmes soumis à l'action des champs électriques élevés, dont l'effet pour les phénomènes traités est en général prépondérant par rapport à l'effet des champs magnétiques. [1]

L'étude de la haute tension aboutit à la conception et à la réalisation de produits, appareils et systèmes aptes à générer et à supporter des champs électriques élevés.

I.2 Moyens d'étude en Haute tension

La fixation des contraintes électriques auxquelles sont soumises les installations à haute tension peut se faire en tenant compte des phénomènes électrostatiques, des surtensions de manœuvres, de foudre et des perturbations électromagnétiques.

Les calculs théoriques sont effectués au moyen d'études de champ électrique et de propagation de phénomènes transitoires sur les lignes. Le choix et l'association des matériaux isolants sont basés sur l'étude des diélectriques. Lors de l'étape de calcul et de dimensionnement, il faut assurer une judicieuse coordination des isolements.

L'élévation de la tension provoque parallèlement une élévation des champs électriques appliqués aux isolations. Dans les lignes aériennes, ce phénomène peut se traduire par des effets directs limitatifs tels que :

- Décharges disruptives dans l'air.
 - Décharges incomplètes (effluves, sautelles)
- et par des effets indirects limitatifs :
- Pertes d'énergie active par effet couronne.
 - Risques pour l'homme, les animaux et l'environnement en général liés à l'existence des champs électriques.
 - Charge sur l'environnement nécessitant des distances d'isolement importantes.

I.3 Lignes électriques à Haute tension

Une ligne électrique à Haute tension peut être soit une ligne aérienne, soit un câble sous terrain ou sous marin. Son rôle est de transporter l'énergie électrique. Cette énergie est transportée généralement sous tension alternative.

I.3.1 Ligne aérienne

a. Définition :

Une ligne aérienne se compose de conducteurs de phase (R, S, T) suspendus au moyen de chaînes d'isolateurs à des pylônes mis à la terre. Un ou plusieurs conducteurs supplémentaires appelés câbles de garde connectés à la terre par chaque pylône assurent principalement la protection contre la chute de la foudre sur les conducteurs de phase.

b. Distances d'isolement requises :

Le dimensionnement des lignes aériennes repose essentiellement sur les paramètres suivants : [1]

- La hauteur minimale P_{min} des conducteurs par rapport au sol.

- La distance minimale d_{ϕ} entre conducteurs de phase (fig I.1-a).
- la distance minimale d_p entre conducteur et pylône mis à la terre (fig I.1-b).
- La distance minimale d_b entre le conducteur de la phase la plus extérieure et les bâtiments voisins (fig I.1-b).

Il est à noter que ces distances sont nettement supérieures aux distances disruptives déterminées à l'aide d'études de champs électriques et d'essais en laboratoires à haute tension.

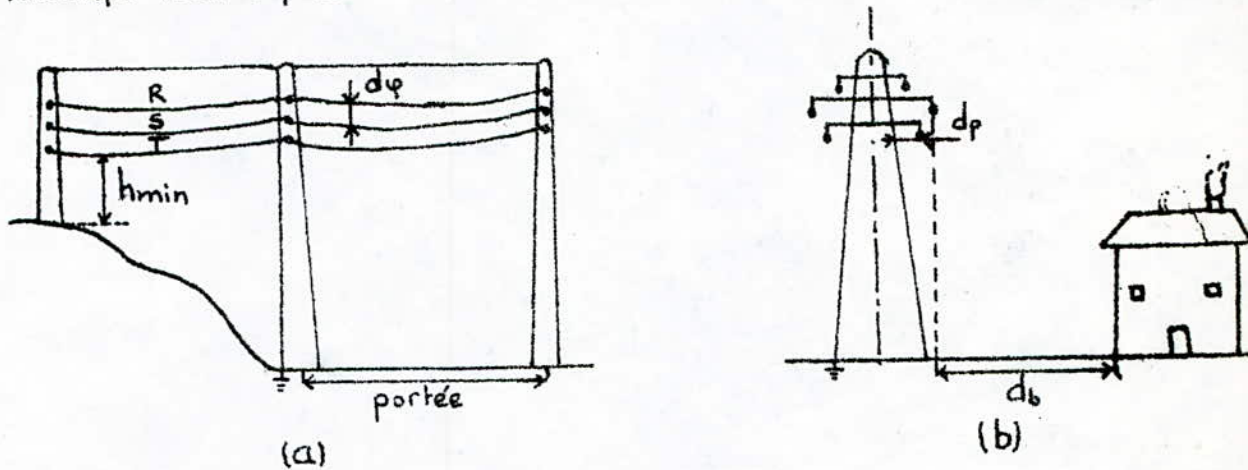


Fig. I - 1

C- Types de supports :

On peut classer les supports de lignes triphasées suivant le profil utilisé. Parmi les supports utilisés en 220 kV, on distingue deux catégories selon que les phases sont disposées au même niveau ou étagées.

Dans la première catégorie, les supports généralement utilisés sont du type chat (fig I.2-a).

Dans la deuxième catégorie, on distingue :

- Pylônes triangle (fig I.2-b)

- Pylônes drapeau (fig I-2-c)
- Pylônes double triangle (fig I-2-d)
- Pylônes double drapeau (fig I-2-e)

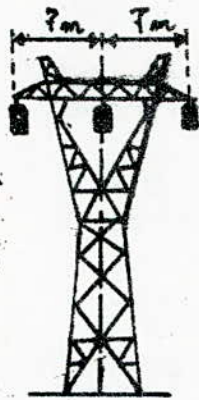


fig. I.2.a



fig. I.2.b

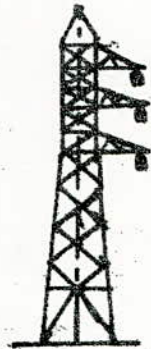


fig. I.2.c



fig. I.2.d



fig. I.2.e

La forme des supports de lignes décide de la position des conducteurs, donc de la répartition du champ électrique aux environs de la ligne.

Chapitre II METHODES DE CALCUL DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

II.1 Introduction

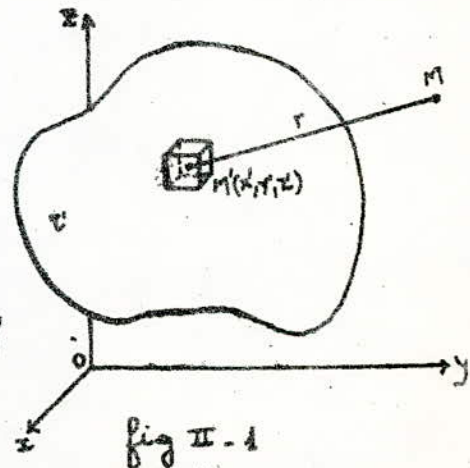
Un problème qui se pose souvent en électrostatique est celui de trouver le champ électrique créé par une distribution de charges donnée. Le champ peut être calculé de plusieurs façons. Dans ce chapitre, nous présenterons succinctement des méthodes générales permettant ce calcul, en faisant particulièrement usage de la méthode des images pour le calcul du champ électrique sous une ligne à haute tension.

II.2 Méthodes générales

Les équations de base à partir desquelles un calcul peut être entrepris sont soit les équations de Maxwell, soit l'équation

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho}{r^2} d\tau' \quad (\text{II-1}) \quad [2]$$

utilisée dans un milieu diélectrique non limité, de permittivité ϵ_0 . Où ρ est la densité de charge électrique au point source $M'(x', y', z')$, r la distance entre le point M où on veut calculer le champ et le point source, et $d\tau'$ l'élément de volume $dx'dy'dz'$ (fig II-1)



Les équations de Maxwell spécifient que toute variation temporelle d'un champ électrique (ou magnétique) en un point de l'espace entraîne (ou est due à) l'existence, ou la variation temporelle et spatiale, d'un autre champ au même point de l'espace [3]. Ces équations formulent complètement les relations liant entre elles les grandeurs électriques et magnétiques. Sous leur forme différentielle, ces équations s'écrivent :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II} - 2)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \gamma \vec{E} \quad (\text{II} - 3)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{II} - 4)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{II} - 5)$$

où ϵ est la constante diélectrique relative du milieu, γ la conductivité électrique du milieu et ρ la densité volumique des charges libres. [4]

A partir des équations de Maxwell, et en tenant compte que, à l'exception des phénomènes transitoires rapides, les phénomènes électromagnétiques de faible variation peuvent être considérés comme étant statiques. Pour ces phénomènes statiques, on peut exprimer le champ électrique par un potentiel scalaire :

$$\vec{E} = - \text{grad } V \quad (\text{II} - 6)$$

qui satisfait à l'équation de Laplace en chaque point où il n'y a pas de charges libres :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{II} - 7)$$

En particulier, on peut calculer le champ électrique d'une

ligne à haute tension de fréquence industrielle 50 Hz, en négligeant les phénomènes magnétiques.

La résolution analytique de l'équation de Laplace n'a pas d'application pratique simple, sauf si la géométrie du système est suffisamment simple et si l'on connaît assez d'éléments pour déterminer les constantes d'intégration.

Dans certains cas particuliers, on peut calculer le potentiel créé par un élément de charge, intégrer sur toute la distribution pour obtenir V , et calculer le champ électrique à partir de l'équation (II-6). Le calcul du potentiel est en général plus simple que celui du champ car le potentiel est une quantité scalaire plus facile à intégrer.

On peut aussi utiliser le théorème de Gauss quand la distribution de charges a une symétrie telle que le champ électrique soit constant sur certaines surfaces. Quand on peut utiliser cette méthode c'est en général la plus simple.

Exemple : Calcul du champ et du potentiel électrostatiques d'une ligne chargée isolée dans l'espace

Soit une distribution linéique uniforme, infinie, de densité λ . Calculons le champ électrique en un point P situé à une distance r de la ligne (fig II-2).

La méthode la plus simple que nous allons utiliser est celle du théorème de Gauss car la distribution linéique présente une symétrie axiale. Les surfaces équipotentiellen

sont dans ce cas des cylindres concentriques avec l'axe de la ligne.

D'après le théorème de Gauss, on a :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} + \frac{\sum q_s}{\epsilon_0} \quad (\text{II-8})$$

où dS est l'élément de surface équipotentielle S de rayon r .

$\sum q_i$: Somme des charges intérieures à S .

$\sum q_s$: Somme des charges superficielles à S . fig II-2

Dans ce cas, nous avons :

$$d\vec{S} = r d\alpha \cdot dl \vec{e}_r$$

$\sum q_s = 0$; $\sum q_i = \lambda L$, L étant la longueur de la portion de la ligne considérée. (fig II.2).

Le champ étant constant sur toute la surface S , il est donc uniquement fonction de r ;

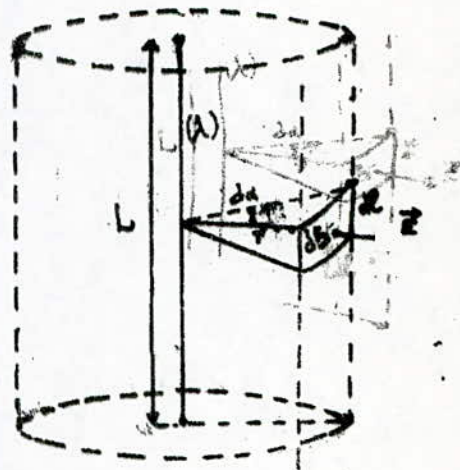
$$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

et est perpendiculaire à l'axe de la ligne.

On obtient alors :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L E(r) \cdot r d\alpha dl = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

soit : $E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$



d'où :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{II-9})$$

Le potentiel sera, en vertu de la relation (II-6) :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + \text{cte} \quad (\text{II-10})$$

La constante cte est déterminée à partir des conditions aux limites.

II.3 Etude électrostatique de deux distributions linéiques uniformes

Les deux lignes, supposées indéfinies et parallèles, à la distance d l'une de l'autre, portent les charges $+\lambda$ et $-\lambda$ (fig II-7)

En appliquant le principe de superposition, et en utilisant la relation (II-10), on aura le potentiel en un point P :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{II-11})$$

r_1 et r_2 étant respectivement les distances du point P aux lignes $+\lambda$ et $-\lambda$ dont les traces sur le plan de la figure sont les points A et A'.

II.3.1 Détermination des lignes de champ et équipotentiellles

Les équipotentiellles sont des surfaces pour lesquelles $V = \text{cte}$ soit :

$$\frac{r_2}{r_1} = k = \text{cte}$$

On vérifie aisément que ces surfaces sont des cylindres dont les traces sur le plan de la figure forment la famille

des cercles définis par la même condition et dont les points limites sont A et A'. Cette famille de cercles constitue deux ensembles symétriques par rapport à la médiatrice de AA'. Soit a le rayon d'un de ces cercles, centré au point C à la distance b de A. Déterminons les paramètres a et b de ce cercle en fonction du rapport $k = \frac{A'P}{AP}$ qui le caractérise. En particulier, pour les points M et N situés sur la droite AA', on a :

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{NA'}{NA} = k$$

soit :

$$\frac{d+b-a}{a-b} = \frac{d+b+a}{a+b} = k$$

ce qui donne, par addition et soustraction des numérateurs et dénominateurs entre eux :

$$k = \frac{d+b}{a} = \frac{a}{b}$$

donc :

$$a^2 = b(d+b) \quad (\text{II} - 12)$$

En portant alors $a = k \cdot b$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$b = \frac{d}{k^2 - 1} \quad (\text{II} - 13)$$

et :

$$a = kb = \frac{kd}{k^2 - 1} \quad (\text{II} - 14)$$

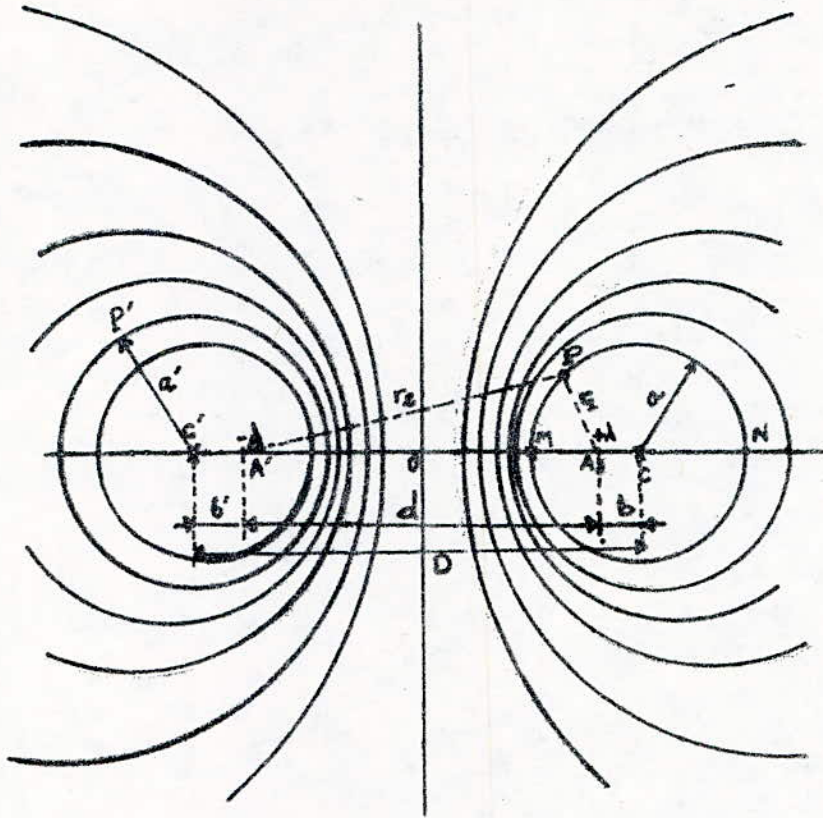


fig. (II-3)

Pour un point P' situé dans l'autre moitié du plan séparé par la médiatrice de AA', une étude analogue à la précédente nous permet de déterminer les paramètres caractérisant le cercle équipotentiel sur lequel il se trouve. Soit C' le centre de ce cercle, à la distance b' de A', et de rayon a', on a alors :

$$a'^2 = b'(d+b') \quad (\text{II} - 15)$$

et :

$$k' = \frac{r_2'}{r_1'} = \frac{b'}{a'} = \frac{a'}{d+b'}$$

d'où :

$$a' = \frac{k'd}{1-k'^2} \quad ; \quad b' = \frac{k'^2 d}{1-k'^2}$$

r_1 et r_2 étant respectivement les distances du point P' aux points A et A'.

Les lignes de champ sont constituées par le faisceau de cercles orthogonaux aux précédents, de points de base A et A' où sont justement les charges où elles aboutissent

II.3-2 Calcul de la capacité entre deux cylindres conducteurs de charges opposées

Les deux cylindres, infinis et parallèles, de rayon a et a' , sont éloignés de D (fig II-4)

Les charges linéiques $+\lambda$ et $-\lambda$, infinies et parallèles, à la distance d l'une de l'autre, produisent comme on l'a vu précédemment, un système d'équipotentiels cylindriques parallèles dont les traces sur le plan de la figure sont des cercles de points limites A et A', traces de $+\lambda$ et $-\lambda$.

Pour tous les points du cylindre équipotentiel de rayon a et de centre C (fig II-43), le potentiel produit par la distribution linéique λ est :

$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln K$$

avec, $K = \frac{a}{b} = \frac{d+b}{a}$

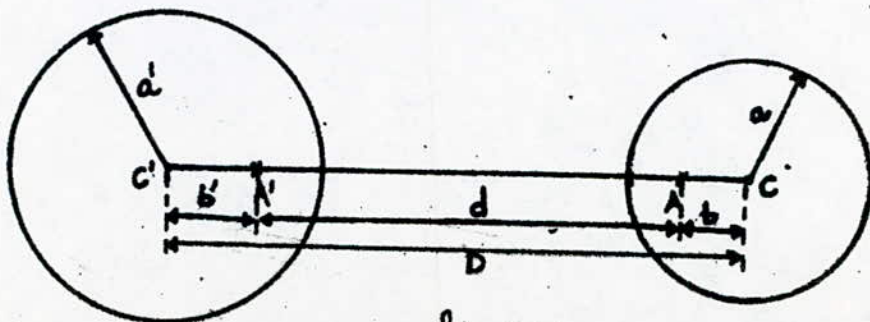


fig. II-4

Pour tous les points du cylindre équipotentiel de rayon a' et de centre c' , le potentiel produit par la charge linéique $-\lambda$ est:

$$V_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{K'}$$

avec $K' = \frac{b'}{a'} = \frac{a'}{d+b'}$

En faisant la différence entre V_2 et V_1 , on obtient:

$$V_2 - V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{K'}{K}$$

La capacité par unité de longueur est alors:

$$C = \frac{\lambda}{V_2 - V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{K'}{K}} \quad (\text{II-16})$$

avec $\frac{K'}{K} = \frac{bb'}{aa'} = y$

La distance $D = d + b + b'$ peut s'écrire:

$$D = (d+b) + b' = (d+b') + b$$

En prenant le carré de D sous la forme:

$$D^2 = (d+b)(d+b') + b(d+b) + b'(d+b') + bb'$$

et en remplaçant les termes $d+b$ et $d+b'$ en fonction des résultats de (II-12) et (II-15), on obtient, avec $y = \frac{bb'}{aa'}$:

$$D^2 = \frac{aa'}{y} + a^2 + a'^2 + aa'y$$

soit :
$$y^2 - \frac{D^2 - (a^2 + a'^2)}{aa'} y + 1 = 0$$

ou :
$$y^2 - 2A y + 1 = 0 \quad (\text{II-17})$$

avec :

$$A = \frac{D^2 - (a^2 + a'^2)}{2aa'} \quad (\text{II-18})$$

qui est positif, les cercles étant extérieurs l'un de l'autre ($D > a + a'$).

Cette équation a des racines réelles en y si :

$$A^2 > 1$$

donc si : $D > a + a' \quad (\text{II-19})$

ou si : $D < a - a' \quad (\text{II-19'})$

seules intervenant les valeurs absolues.

La condition (II-19) correspond aux cercles extérieurs l'un à l'autre, pour lesquels on a les racines :

$$y_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$$

Comme les racines sont inverses puisque leur produit est égal à 1, on en déduit la capacité par unité de longueur :

$$C = \pm \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(A \pm \sqrt{A^2 - 1})} = \pm \frac{2\pi\epsilon_0}{\operatorname{argch} A} \quad (\text{II-20})$$

ou :
$$C = \pm \frac{2\pi\epsilon_0}{\operatorname{argch} \frac{D^2 - (a^2 + a'^2)}{2aa'}} \quad (\text{II-21})$$

II.4 Méthode des images

II.4-1 Principe de la méthode

La méthode des images s'applique aux problèmes aux limites. Elle consiste à remplacer un champ électrique par un autre équivalent, mais plus facile à calculer. Elle est particulièrement utile dans le cas où des charges ponctuelles sont proches de conducteurs ; il est parfois possible de satisfaire les conditions aux limites grâce à une répartition convenable de charges fictives, de façon à ce que les surfaces des conducteurs soient remplacées par des surfaces équipotentiellles ayant le même potentiel que ces conducteurs. Les conditions aux limites étant les mêmes, la distribution du champ électrique que l'on trouve est correcte. [2]

II.4-2 Applications

a. Ligne uniformément chargée au dessus d'un plan conducteur parfait :

La ligne de charge λ , parallèle au plan conducteur mis à la terre, est située à une hauteur h de celui-ci (fig II-5).

Pour remplacer le plan conducteur en ce qui concerne son effet sur la ligne, considérons l'image de la ligne λ , symétrique à celle-ci par rapport au plan, et qui porte la charge $-\lambda$.

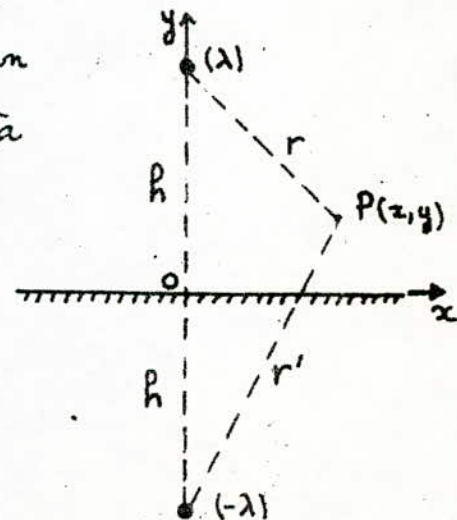


fig (II-5)

On suppose que la ligne est suffisamment longue pour que le champ électrique en tout point de l'espace ne dépende que des coordonnées x et y .

Au point P , le potentiel résulte de l'effet superposé des deux lignes $+\lambda$ et $-\lambda$, soit :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r} + C_1$$

On peut choisir la constante C_1 nulle si on convient de faire le plan conducteur mis à la terre, ainsi :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r} \quad (\text{II-22})$$

En coordonnées cartésiennes, dans le plan (x, y) , on a :

$$r = (x^2 + (y-h)^2)^{1/2}$$

$$r' = (x^2 + (y+h)^2)^{1/2}$$

et le potentiel sera :

$$V = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y-h)^2}{x^2 + (y+h)^2} \quad (\text{II-23})$$

Le champ électrique est lié au potentiel par la relation

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j}\right)$$

\vec{i} et \vec{j} étant respectivement les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy .

Au point P , les deux composantes du champ sont donc :

$$\vec{E}_x = \frac{2\lambda h}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{xy}{(x^2 + (y-h)^2)(x^2 + (y+h)^2)} \vec{i}$$

$$\vec{E}_y = \frac{\lambda h}{\pi \epsilon_0} \frac{y^2 - z^2 - R^2}{(x^2 + (y-h)^2)(x^2 + (y+h)^2)} \vec{j}$$

et : $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$

Pour un point M situé sur la surface du plan conducteur (y=0), le champ devient (fig II-6) :

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \cdot \frac{h}{x^2 + R^2} \vec{j} \quad (\text{II-24})$$

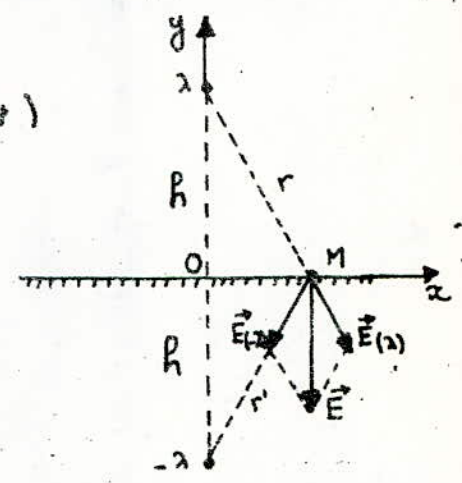


fig. II.6

Les équipotentiels sont des surfaces cylindriques parallèles pour lesquelles $\frac{r}{r'} = k = \text{cte}$, comme le montre la figure II.7

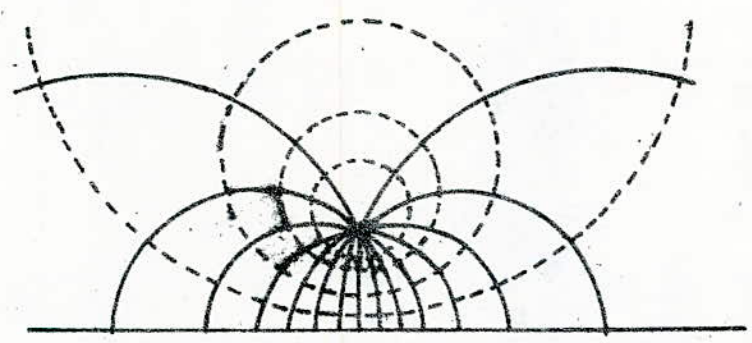


fig. II.7 Lignes de champ et équipotentiels

b. Système de lignes parallèles au dessus d'un plan conducteur parfait mis à la terre :

Considérons un système de n lignes portant des charges $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. En un point P quelconque de l'espace, le potentiel sera dû à l'effet superposé des n lignes et de leurs images symétriques par rapport au plan et portant les charges $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$.

Soit d la distance entre deux lignes voisines, et h la hauteur de chaque ligne par rapport au plan conducteur, (fig. II.8). La ligne i de coordonnées $x_i = id$ et $y_i = h$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, produit au point $P(x, y)$ le potentiel, en prenant n impair :

$$V_{(i)} = \frac{\lambda_i}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x-id)^2 + (y+h)^2}{(x-id)^2 + (y-h)^2} \quad (\text{II-25})$$

et un champ électrique dont les deux composantes sont :

$$\vec{E}_{x(i)} = -\frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{x - id}{(x-id)^2 + (y+h)^2} - \frac{x - id}{(x-id)^2 + (y-h)^2} \right]$$

$$\vec{E}_{y(i)} = -\frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{y+h}{(x-id)^2 + (y+h)^2} - \frac{y-h}{(x-id)^2 + (y-h)^2} \right]$$

Pour un point situé sur le plan conducteur, le champ électrique sera :

$$\vec{E}_{(i)} = -\frac{\lambda_i}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{h}{(x-id)^2 + h^2} \vec{j} \quad (\text{II-26})$$

Le champ résultant sera la somme algébrique de tous les champs produits par l'ensemble des n lignes.

c. Trois lignes parallèles au dessus d'un plan conducteur parfait mis à la terre :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les charges portées par chacune des lignes. On se ramène au cas où $n=3$; en un point situé sur le plan conducteur, les champs électriques engendrés par chaque ligne sont (fig. II-8) :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(1)} &= \frac{-\lambda_1}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{(x+d)^2+R^2} \vec{j} \\ \vec{E}_{(2)} &= \frac{-\lambda_2}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{x^2+R^2} \vec{j} \\ \vec{E}_{(3)} &= \frac{-\lambda_3}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{(x-d)^2+R^2} \vec{j} \end{aligned}$$

Le champ résultant sera la superposition de ces trois champs, soit :

$$\vec{E} = -\frac{R}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda_1}{(x+d)^2+R^2} + \frac{\lambda_2}{x^2+R^2} + \frac{\lambda_3}{(x-d)^2+R^2} \right] \vec{j} \quad (\text{II-27})$$

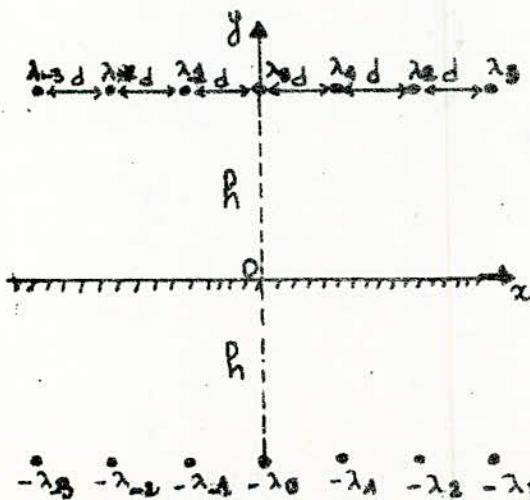


Fig. II.8

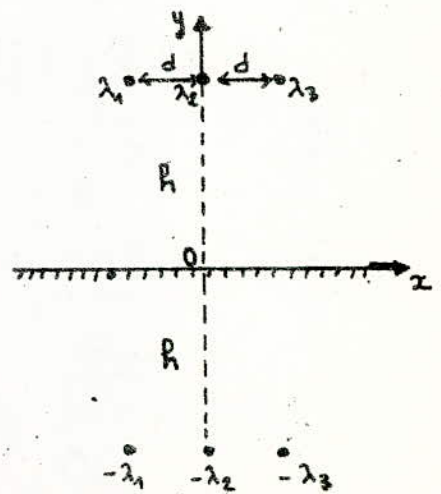


Fig. II.9

d. Trois lignes en triangle au dessus d'un plan conducteur parfait :

Le système est celui de la figure II-10, avec h' la hauteur de la ligne centrale, h la hauteur des deux lignes extrêmes, et d la distance entre les trois lignes.

Les champs électriques produits par chacune des lignes en un point situé sur la surface du plan conducteur sont :

$$\vec{E}_{(1)} = \frac{-\lambda_1}{\pi\epsilon_0} \frac{h}{(x + \frac{d}{2})^2 + h^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}_{(2)} = \frac{-\lambda_2}{\pi\epsilon_0} \frac{h'}{x^2 + h'^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}_{(3)} = \frac{-\lambda_3}{\pi\epsilon_0} \frac{h}{(x - \frac{d}{2})^2 + h^2} \vec{j}$$

Le champ résultant est donc :

$$\vec{E} = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda_1 h}{(x + \frac{d}{2})^2 + h^2} + \frac{\lambda_2 h'}{x^2 + h'^2} + \frac{\lambda_3 h}{(x - \frac{d}{2})^2 + h^2} \right] \vec{j} \quad (\text{II-28})$$

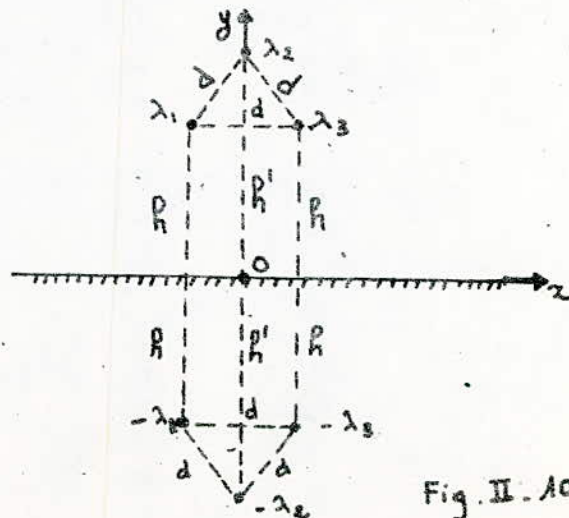


Fig. II-10

II.5 Application au calcul du champ électrique sous une ligne à haute tension.

II-5.1 Conducteur cylindrique au dessus d'une terre plane.

a. Calcul de la capacité par unité de longueur :

Soit h la hauteur de la ligne, R le rayon du conducteur (fig. II.11).

Cette disposition est également résolue par la considération des deux distributions linéiques indéfinies $+\lambda$ et $-\lambda$ que nous avons vues au paragraphe II-3. Ces deux charges ont justement pour plan de symétrie l'équipotentielle plane $V=0$, les autres équipotentielles étant cylindriques de révolution. Il suffit, dans l'équation (II-21), de remplacer a par R et D par $h+a'$ et faire tendre a' vers l'infini. Ainsi, la capacité par unité de longueur devient (en valeur absolue):

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\operatorname{argcosh} \frac{h}{R}} \quad (\text{II-29})$$

mais ; $\operatorname{argcosh} \frac{h}{R} = \ln \left(\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1} \right)$

Alors, si on fait $R \ll h$, ce qui est très bien justifié pour une ligne électrique à haute tension, on aura :

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}} \quad (\text{II-30})$$

b. Calcul de la densité linéique de charge :

Le potentiel produit par la ligne en un point P quelconque est, comme on l'a vu précédemment :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r}$$

où r et r' sont respectivement les distances du point P au conducteur de charge λ et à son image de charge $-\lambda$ par rapport au plan (fig II-11).

Pour un point situé sur la surface du conducteur de rayon $R \ll h$, on a : $r' \approx 2h$ et $r = R$, et le potentiel sera :

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R} \quad (\text{II-31})$$

La charge par unité de longueur portée par le conducteur est donc :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln \frac{2h}{R}} \quad (\text{II-32})$$

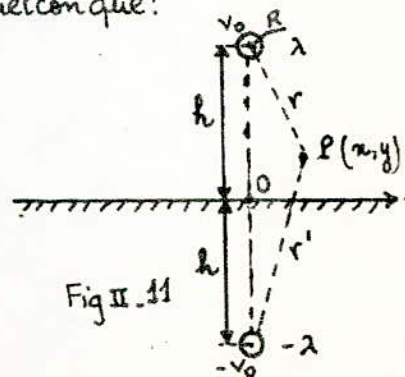
c. Expression du champ électrique :

En remplaçant λ par sa valeur (II-32) dans l'expression du potentiel, on obtient, pour un point P quelconque :

$$V = \frac{V_0}{\ln \frac{2h}{R}} \ln \frac{r'}{r}$$

Soit, en coordonnées cartésiennes :

$$V = \frac{V_0}{2 \ln \frac{2h}{R}} \ln \frac{x^2 + (y+R)^2}{x^2 + (y-R)^2}$$



On en déduit, à partir de la relation $\vec{E} = -\text{grad}V$, le champ électrique en un point se trouvant sur la terre :

$$\vec{E} = -\frac{2V_0}{\ln \frac{2h}{R}} \cdot \frac{h}{x^2 + h^2} \vec{j} \quad (\text{II-33})$$

on voit que \vec{E} est perpendiculaire au plan conducteur (qui est ici la terre).

II-5.2 Ligne triphasée en nappe, terre plane.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les charges linéiques portées par chacun des conducteurs de la ligne, R le rayon de chaque conducteur et d la distance entre deux conducteurs voisins. La ligne est située à une hauteur h par rapport à la terre (fig II-12).

Nous allons déterminer, grâce à la théorie des images les charges portées par chaque conducteur ainsi que les capacités partielles de la ligne. Ces grandeurs nous permettent d'évaluer le champ électrique en n'importe quel point de l'espace, connaissant le potentiel de chaque conducteur par rapport à la terre.

a- Calcul des charges linéiques :

Le système de la figure II-12 produit au point P le potentiel :

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\lambda_1 \ln \frac{r_1'}{r_1} + \lambda_2 \ln \frac{r_2'}{r_2} + \lambda_3 \ln \frac{r_3'}{r_3} \right)$$

Sur la surface des conducteurs de rayon $R \ll d$, à l'altitude $h \gg R$, les potentiels sont ainsi, avec :

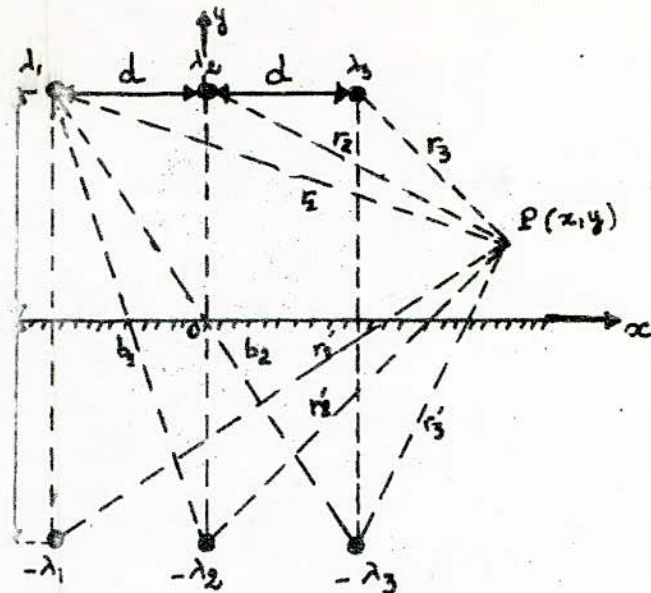


Fig II - 12

$$b_1 = \sqrt{d^2 + 4R^2} \quad ; \quad b_2 = 2\sqrt{d^2 + R^2} \quad :$$

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\lambda_1 \ln \frac{2R}{R} + \lambda_2 \ln \frac{b_1}{d} + \lambda_3 \ln \frac{b_2}{2d} \right)$$

$$V_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\lambda_1 \ln \frac{b_1}{d} + \lambda_2 \ln \frac{2R}{R} + \lambda_3 \ln \frac{b_1}{d} \right) \quad (\text{II-34})$$

$$V_3 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\lambda_1 \ln \frac{b_2}{2d} + \lambda_2 \ln \frac{b_1}{d} + \lambda_3 \ln \frac{2R}{R} \right)$$

soit $[A] [\lambda] = 2\pi\epsilon_0 [V]$

où :

$[A]$ est la matrice des coefficients de potentiel

$[\lambda]$ la matrice unicolonne des charges

$[V]$ la matrice unicolonne des potentiels

et;

$$[A] = \begin{bmatrix} \ln \frac{2h}{R} & \ln \frac{b_1}{d} & \ln \frac{b_2}{2d} \\ \ln \frac{b_1}{d} & \ln \frac{2h}{R} & \ln \frac{b_2}{d} \\ \ln \frac{b_2}{2d} & \ln \frac{b_1}{d} & \ln \frac{2h}{R} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de A est :

$$\Delta = \ln \frac{2h}{R} \cdot \ln \frac{2hb_1}{Rd} \cdot \ln \frac{2hd}{Rb_1} - \left(\ln \frac{b_1}{d} \right)^2 \ln \frac{4hd}{Rb_2} + \\ + \ln \frac{b_2}{2d} \cdot \left[\left(\ln \frac{b_1}{d} \right)^2 - \ln \frac{2h}{R} \cdot \ln \frac{b_2}{2d} \right] \quad (\text{II} - 35)$$

La matrice unicolonne des charges est :

$$[\lambda] = 2\pi\epsilon_0 [A]^{-1} [V] \quad (\text{II} - 36)$$

avec :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \ln \frac{2hb_1}{Rd} \cdot \ln \frac{2hd}{Rb_1} & \ln \frac{b_1}{d} \cdot \ln \frac{Rb_2}{4hd} & \left(\ln \frac{b_1}{d} \right)^2 \cdot \ln \frac{2h}{R} \cdot \ln \frac{b_2}{2d} \\ \ln \frac{b_1}{d} \cdot \ln \frac{Rb_2}{4hd} & \ln \frac{4hd}{Rb_2} \cdot \ln \frac{Rb_2}{Rd} & \ln \frac{b_1}{d} \cdot \ln \frac{Rb_2}{4hd} \\ \left(\ln \frac{b_1}{d} \right)^2 \cdot \ln \frac{2h}{R} \cdot \ln \frac{b_2}{2d} & \ln \frac{b_1}{d} \cdot \ln \frac{Rb_2}{4hd} & \ln \frac{2hb_1}{Rd} \cdot \ln \frac{2hd}{Rb_1} \end{bmatrix}$$

Les charges λ ont donc des expressions de la forme :

$$\lambda_1 = C'_{11} V_1 + C'_{12} V_2 + C'_{13} V_3$$

$$\lambda_2 = C'_{21} V_1 + C'_{22} V_2 + C'_{23} V_3 \quad (\text{II} - 37)$$

$$\lambda_3 = C'_{31} V_1 + C'_{32} V_2 + C'_{33} V_3$$

dans lesquelles les C'_{ij} sont les coefficients d'influence linéiques :

$$C'_{11} = C'_{33} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\Delta} \left(\ln \frac{2hb_1}{Rd} \cdot \ln \frac{2hd}{Rb_1} \right)$$

$$C'_{12} = C'_{21} = C'_{23} = C'_{32} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\Delta} \left(\ln \frac{b_1}{d} \cdot \ln \frac{Rb_2}{4hd} \right)$$

$$C'_{22} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\Delta} \left(\ln \frac{4hd}{Rb_2} \cdot \ln \frac{hb_2}{Rd} \right)$$

$$C'_{13} = C'_{31} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\Delta} \left[\left(\ln \frac{b_1}{d} \right)^2 - \ln \frac{2h}{R} \cdot \ln \frac{b_2}{2d} \right]$$

b. Calcul des capacités partielles :

Ces capacités partielles K'_{ij} sont telles que les charges s'explicitent sous la forme :

$$\lambda_i = K'_{i0} V_i + \sum_j K'_{ij} (V_i - V_j) \quad (\text{II-38})$$

d'où, après identification avec le système (II-37), on tire :

$$K'_{i0} = \sum_j C'_{ij} \quad (\text{II-39})$$

$$\text{et, } K'_{ij} = -C'_{ij} \quad (\text{II-40})$$

ainsi, par exemple :

$$K'_{10} = C'_{11} + C'_{12} + C'_{13} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\Delta} \left[\ln \frac{2hb_1}{Rd} \cdot \ln \frac{2hd}{Rb_1} + \ln \frac{b_1}{d} \cdot \ln \frac{Rb_2}{4hd} + \left(\ln \frac{b_1}{d} \right)^2 - \ln \frac{2h}{R} \cdot \ln \frac{b_2}{2d} \right]$$

Connaisant tous ces paramètres, on peut calculer le champ électrique en utilisant la formule (II-27).

II-5-3 Ligne triphasée en triangle, terre plane :

Soit d la distance entre les trois conducteurs de la ligne, h' la hauteur du conducteur central et h la hauteur des deux conducteurs extrêmes par rapport au sol (fig II-13).

Sur la surface des conducteurs de rayon $R \ll h$, les potentiels sont ainsi, avec $R \ll d$; et

$$b'_1 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (h+h')^2}$$

$$b'_2 = \sqrt{d^2 + 4R^2}$$

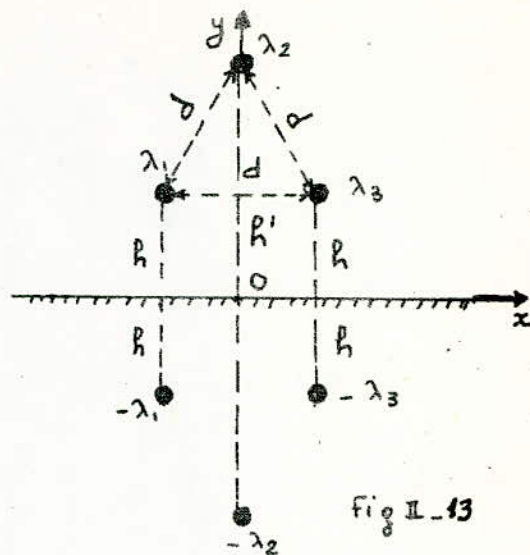


Fig II-13

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\lambda_1 \ln \frac{2h}{R} + \lambda_2 \ln \frac{b'_1}{d} + \lambda_3 \ln \frac{b'_2}{d} \right]$$

$$V_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\lambda_1 \ln \frac{b'_1}{d} + \lambda_2 \ln \frac{2h'}{R} + \lambda_3 \ln \frac{b'_1}{d} \right] \quad (\text{II-41})$$

$$V_3 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\lambda_1 \ln \frac{b'_2}{d} + \lambda_2 \ln \frac{b'_1}{d} + \lambda_3 \ln \frac{2h}{R} \right]$$

soit : $2\pi\epsilon_0 [V] = [A'] [\lambda]$

où $[V]$ est la matrice unicolonne des potentiels

$[A']$ la matrice des coefficients de potentiel

$[\lambda]$ la matrice unicolonne des charges linéiques.

Les charges linéiques se déduisent du système précédent :

$$[\lambda] = 2\pi\epsilon_0 [A']^{-1} [V]$$

Le champ électrique produit par le conducteur i ($i=1,2,3$), de charge λ_i , et de coordonnées d_i et h_i , en un point situé sur la terre est :

$$\vec{E}_{(i)} = - \frac{\lambda_i}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{h_i}{(x-d_i)^2 + h_i^2} \vec{d}$$

Le champ résultant sera donc la somme algébrique des

trois champs engendrés par l'ensemble des trois conducteurs de la ligne.

II-5-4 ligne unifilaire au dessus d'une terre cylindrique:

Cette configuration est traitée dans le but d'étudier la variation du champ électrique en présence d'une aspérité terrestre. Le fait de simuler cette aspérité à une forme cylindrique nous permet d'élaborer facilement la formule du champ électrique en se basant sur l'influence d'une ligne sur un cylindre conducteur.

Soit a le rayon du cylindre, g la distance OP d'un point P à l'axe du cylindre (fig II-14).

Si on suppose que le cylindre est au potentiel zéro, il faut considérer, outre la ligne λ dont la trace est en A , deux autres lignes (fictives) parallèles, intérieures au cylindre, dont les traces sont en O et B , avec les densités linéiques λ et $-\lambda$ respectivement.

Au point P , le potentiel résultant des effets superposés de chaque ligne.

peut se mettre sous la forme: [5]:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{r}{r'} + \ln K g \right) \quad (\text{II-42})$$

où K est une grandeur à déterminer sous la condition

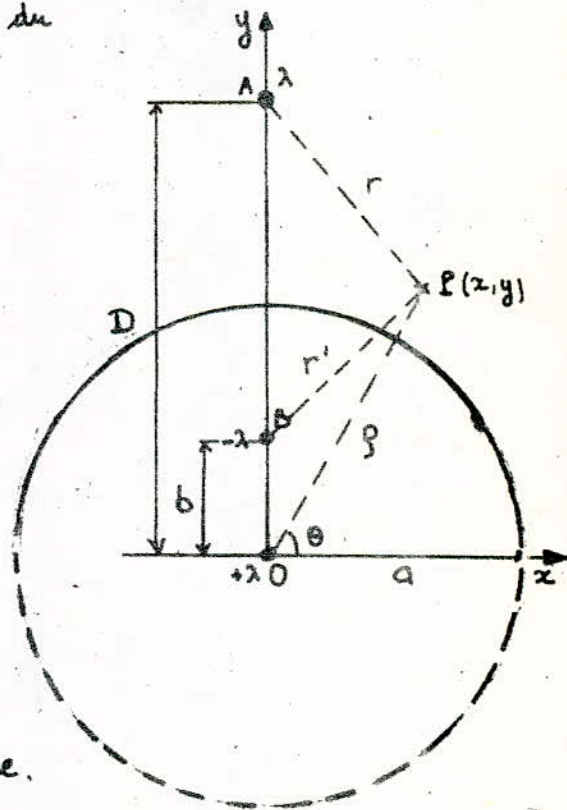


Fig II-14

que le potentiel s'annule sur la surface du cylindre,
soit :

$$\left(\ln \frac{Kgr'}{r} \right)_{\rho=a} = 0 \quad (\text{II-43})$$

or, nous avons :

$$\frac{r}{r'} = \frac{D-a}{a-b} = \frac{D+a}{a+b} = \frac{D}{a} = \frac{a}{b}$$

Sur le cylindre, nous devons écrire, en vertu de (II-) :

$$\frac{D}{a} \cdot Ka = 1$$

d'où :

$$K = \frac{1}{D}$$

et :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r}{r'} \cdot \frac{\rho}{D} \right) \quad (\text{II-44})$$

Sur le conducteur de rayon $R \ll D$, le potentiel est ainsi :

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{D-b}{R} \cdot \frac{D}{\rho} \right)$$

On en déduit la charge portée par le conducteur par
unité de longueur :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln \left(\frac{D-b}{R} \cdot \frac{D}{\rho} \right)} \quad (\text{II-45})$$

et la capacité par unité de longueur :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{D-b}{R} \cdot \frac{D}{\rho} \right)} \quad (\text{II-46})$$

Les deux composantes du champ électrique au point P sont, à partir de la relation $\vec{E} = -\text{grad } V$:

$$\vec{E}_x = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} x \left[\frac{1}{x^2+(y-b)^2} - \frac{1}{x^2+(y-D)^2} - \frac{1}{D(x^2+y^2)} \right] \vec{i} \quad (\text{II-47})$$

$$\vec{E}_y = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{y-b}{x^2+(y-b)^2} - \frac{y-D}{x^2+(y-D)^2} - \frac{y}{D(x^2+y^2)} \right] \vec{j}$$

avec : $b = \frac{a^2}{D}$

En un point P situé sur la surface du cylindre, et avec $x = a \cos \theta$; $y = a \sin \theta$, θ étant l'angle que fait OP avec l'axe des abscisses, ces deux composantes deviennent :

$$\vec{E}_x = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} a \cos \theta \left(\frac{1}{a^2+b^2-2ab \sin \theta} - \frac{1}{a^2+D^2-2aD \sin \theta} - \frac{1}{a^2 D} \right) \vec{i} \quad (\text{II-48})$$

$$\vec{E}_y = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a \sin \theta - b}{a^2+b^2-2ab \sin \theta} - \frac{a \sin \theta - D}{a^2+D^2-2aD \sin \theta} - \frac{a \sin \theta}{a^2 D} \right) \vec{j}$$

II.5.5 Ligne triphasée au dessus d'une terre cylindrique

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les charges portées par chacun des conducteurs de la ligne, D_i la distance $A_i O$ de la ligne λ_i à l'axe du cylindre, et b_i la distance $A'_i O$ de la ligne $-\lambda_i$ à l'axe du cylindre (fig II-15), $i = 1, 2, 3$.

La ligne λ_i de coordonnées $x_i = d_i$ et $y_i = D$ produit au point P le potentiel :

$$V_{(i)} = -\frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_i}{r'_i} \cdot \frac{D_i}{D_i} \right)$$

avec $r_i = A_i P$ et $r'_i = A'_i P$

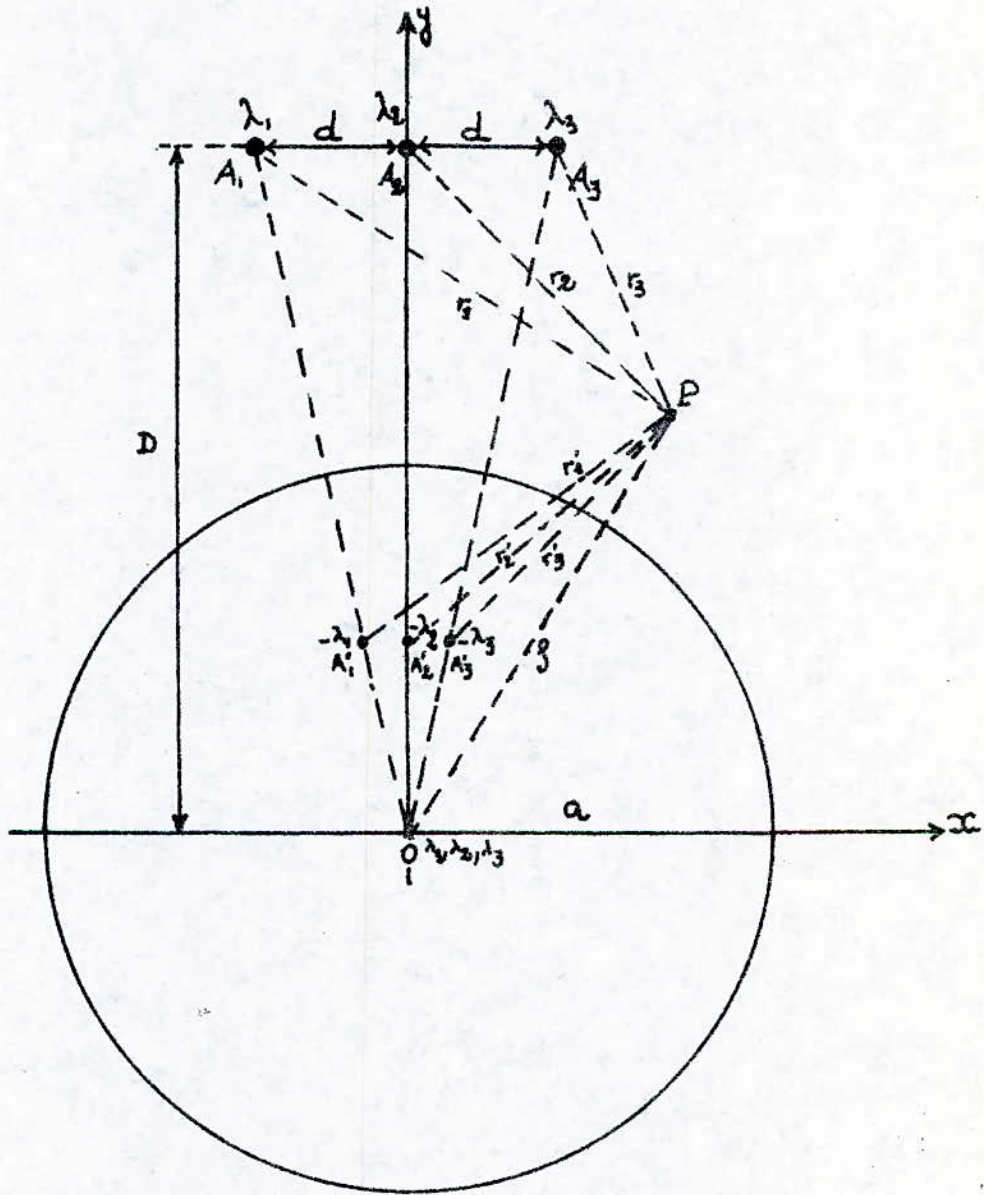


Fig II - 15

ligne à trois fils au dessus d'une terre cylindrique

Dans le plan (x, y) , avec :

$$r_i = \sqrt{(x-d_i)^2 + (y-D)^2}$$

$$r'_i = \sqrt{(x-d'_i)^2 + (y-c_i)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

cette expression devient :

$$V_{(i)}(x, y) = - \frac{\lambda_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left[\frac{(x-d_i)^2 + (y-D)^2}{(x-d'_i)^2 + (y-c_i)^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{D_i^2} \right] \quad (\text{II-49})$$

où : $d'_i = \frac{a^2 d_i}{D_i^2}$ est l'abscisse de la ligne $-\lambda_i$

$c_i = \frac{a^2 \cdot D}{D_i^2}$ est l'ordonnée de la ligne $-\lambda_i$

Ainsi, les deux composantes du champ électrique seront :

$$\vec{E}_{x(i)} = \frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x-d_i)(x^2+y^2) + x[(x-d_i)^2 + (y-D)^2]}{[(x-d_i)^2 + (y-D)^2] (x^2+y^2)} - \frac{x-d'_i}{(x-d'_i)^2 + (y-c_i)^2} \right] \vec{i}$$

$$\vec{E}_{y(i)} = \frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{(y-D)(x^2+y^2) + y[(x-d_i)^2 + (y-D)^2]}{[(x-d_i)^2 + (y-D)^2] (x^2+y^2)} - \frac{y-c_i}{(x-d'_i)^2 + (y-c_i)^2} \right] \vec{j}$$

Le champ électrique résultant s'obtient en faisant la sommation des trois composantes E_x d'une part, et des trois composantes E_y d'autre part.

Dans ce chapitre, les méthodes de calcul du champ électrique que nous avons vues ne s'appliquent qu'à des systèmes extrêmement simples. S'il y a une aspérité de forme compliquée au niveau de la terre, la distribution

des équipotentielles et des lignes de champ est déformée et il devient difficile d'évaluer le champ électrique en utilisant ces méthodes. Pour résoudre ce problème délicat, il est indispensable de se référer à des techniques numériques en utilisant l'ordinateur. Les principales méthodes numériques feront l'objet du chapitre suivant.

Chapitre III - METHODES NUMERIQUES

III - 1 Introduction

Généralement, la détermination du champ électrique à proximité d'un dispositif à haute tension se heurte à deux difficultés fondamentales :

- La forme géométrique (conditions aux limites) compliquée du système.
- L'espace dans lequel le problème est posé s'étend à l'infini.

Dans le cas d'une ligne à haute tension au dessus d'une terre présentant des aspérités (naturelles ou artificielles), les méthodes analytiques présentées dans le chapitre précédent sont défaillantes sauf si on peut approcher ces déformations à des formes géométriques pour lesquelles l'application de la théorie des images est aisée. C'est pourquoi on a recours à des techniques numériques approchées pour déterminer la distribution du champ électrique sur la surface de ces aspérités.

Les principales méthodes numériques de calcul des champs sont :

- La méthode des charges fictives.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des différences finies.

III - 2 Méthode des charges Fictives [1]

La méthode des charges fictives est basée sur une simulation de la distribution superficielle des charges électriques sur la surface des conducteurs par une distribution discrète des charges fictives à l'intérieur de ces derniers. L'emplacement et la valeur de ces charges fictives seront déterminés de manière à ce que leur effet intégré satisfasse aux conditions aux limites du potentiel connu sur la surface des conducteurs [9].

III - 2 - 1 Equation de base [1]

En tenant compte de la disposition spatiale des charges fictives, une relation du type :

$$v_{ij} = K_{ij} q_j \quad (\text{III} - 1)$$

peut être trouvée entre le potentiel v_{ij} d'un point P_i dû à la charge q_j . Les coefficients K_{ij} qui ne sont autres que les coefficients potentiels (définis au paragraphe III-5-2-a), doivent être déterminés pour chaque disposition des charges fictives.

En appliquant le principe de superposition le potentiel du point P_i dû à toutes les charges fictives introduites sera donné par

$$v_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} q_j \quad (\text{III} - 2)$$

On peut alors exprimer cette relation sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 3)$$

III - 2 - 2 Disposition spatiale des charges fictives

La méthode des charges fictives permet de simuler des problèmes bidimensionnels et tridimensionnels en adoptant pour chaque cas des dispositions spatiales appropriées des charges fictives.

- Pour simuler un champ bidimensionnel : charges linéiques de longueur infinie. fig. III.1
- Pour simuler un champ tridimensionnel à symétrie axiale : charges annulaires centrées sur l'axe de symétrie combinées avec des charges ponctuelles ou linéiques de longueur finie disposées le long de l'axe de symétrie.
- Pour simuler un champ tridimensionnel de forme arbitraire : charges annulaires à densité de charge variable sur la circonférence, combinées avec des charges linéiques de longueur finie disposées parallèlement aux axes des électrodes.

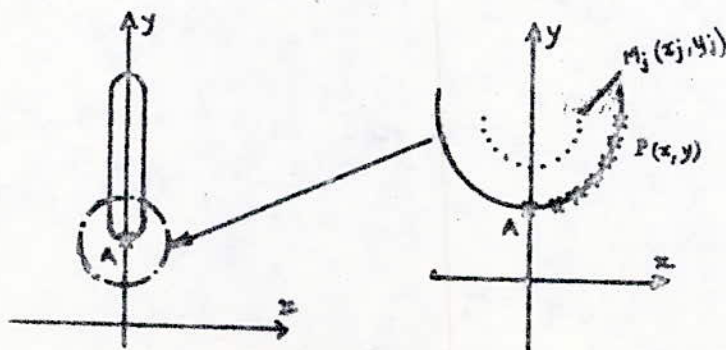


fig III-1

III-2-3 Méthode de résolution

Etant donné un ou plusieurs conducteurs dont le potentiel est connu, on place n charges q_j . L'emplacement est choisi d'une manière arbitraire, mais avec une certaine expérience on arrive à réaliser dès le premier essai une configuration qui ne sera pas trop éloignée de l'optimum auquel on essaie d'arriver. On déterminera la valeur de ces charges en résolvant le système (III-3) par rapport à q_j :

$$[q_j] = [K_{ij}]^{-1} [v_{ci}] \quad (\text{III-4})$$

Les valeurs v_{ci} du potentiel sont des valeurs connues aux points P_{ci} situés sur le contour des conducteurs.

On choisit alors n autres points de vérification P_{vi} situés aussi sur le contour des conducteurs et on calcule les potentiels v_{vi} donnés par les charges q_j :

$$[v_{vi}] = [K_{ij}] [q_j] \quad (\text{III-5})$$

On change l'arrangement spatial des n charges fictives, on calcule à nouveau les valeurs des charges q_j et on répète la vérification jusqu'à ce que toutes les différences:

$$\delta v_i = |v_{vi} - v_{ci}| \quad (\text{III-6})$$

soient plus petites qu'une quantité ϵ fixée au départ. Les valeurs de δv_i reflètent la précision de la simulation réalisée.

III-2-4 Calcul du champ électrique.

Pour une distribution de charges fictives qui simule

d'une manière satisfaisante le potentiel connu sur les conducteurs on peut calculer le champ électrique en un point quelconque P_e de l'espace environnant :

Pour un champ bidimensionnel, par exemple, les composantes suivant deux axes Ox et Oy peuvent être déduites du potentiel v_e que prend le point P_e pour la distribution trouvée des charges fictives :

$$E_{x(e)} = - \frac{\partial v_e}{\partial x} ; \quad E_{y(e)} = - \frac{\partial v_e}{\partial y} \quad (\text{III} - 7)$$

Connaissant le champ électrique en un certain nombre de points de l'espace situé entre les conducteurs, il est possible de tracer les lignes de champ électrique.

Remarque :

La méthode de calcul des champs électriques par l'intermédiaire des charges électriques fictives ne nécessite de valeurs du potentiel que sur les conducteurs, qui ne présentent pas nécessairement des contours fermés. Elle s'applique donc particulièrement bien au calcul des champs électriques dans les installations extérieures.

III-3 Méthode des éléments finis

III-3.1 Principe :

L'intégration directe d'une équation différentielle peut souvent être remplacée par une méthode d'approche numérique beaucoup plus commode. Elle consiste à remplacer le problème original par celui de la minimisation d'une certaine expression intégrale. Cette expression peut d'ailleurs souvent se rattacher à une grandeur physique du problème, par exemple, l'énergie [3].

III-2.2 Méthode de résolution :

Pour réduire la taille des équations, nous allons nous restreindre à un champ électrique bidimensionnel Laplacien.

Soit un domaine S limité par deux contours sur lesquels les potentiels V_a et V_b sont connus (fig III-2). En adoptant un système de coordonnées cartésiennes, l'énergie électrique W accumulée dans toute la surface S est : [6]

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iint_S \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (III-8)$$

Le diélectrique étant l'air de permittivité ϵ_0 .

Pour arriver à la fonction V qui minimise l'énergie W , on peut faire appel aux multiples techniques d'optimisation.

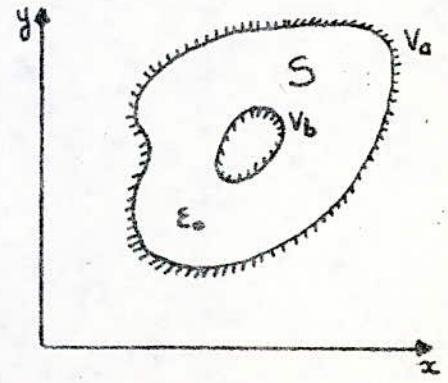


Fig III-2

Il est avantageux de diviser le domaine S en éléments plus petits sur chacun desquels on impose une combinaison particulière pour le potentiel. On s'assure évidemment d'avoir une continuité satisfaisante entre éléments adjacents.

Une division en éléments finis permet en général d'obtenir un degré de précision très satisfaisant avec des fonctions relativement simples et en nombre limité.

Comme exemple, on peut diviser le domaine S en éléments triangulaires irréguliers. Cette division a l'avantage de pouvoir faire coïncider les triangles avec les formes des frontières du domaine. La figure III-3 montre une partie de la surface S subdivisée.

Soit (e) un élément possédant les nœuds 1, 2 et 3.

Choisissons une approximation linéaire pour le potentiel:

$$V(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (\text{III-9})$$

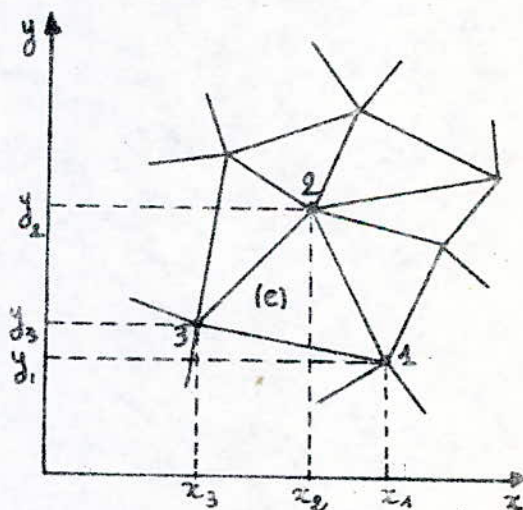


Fig III-3.

Cette combinaison veut dire que le potentiel dans chaque élément est linéairement distribué et que l'intensité du champ électrique, dont les composantes suivant les directions x et y peuvent être facilement calculées par une simple dérivation de l'équation (III-9), est constante.

Les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ correspondants à l'élément (e) sont facilement déterminés en fonction de ses trois valeurs nodales a priori inconnues :

$$V_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \quad (\text{III} - 10 - a)$$

$$V_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \quad (\text{III} - 10 - b)$$

$$V_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \quad (\text{III} - 10 - c)$$

La résolution de ce système donne :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta e} (a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3) \quad (\text{III} - 11 - a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta e} (b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3) \quad (\text{III} - 11 - b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta e} (c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3) \quad (\text{III} - 11 - c)$$

avec :

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad (\text{III} - 12 - a)$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad (\text{III} - 12 - b)$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (\text{III} - 12 - c)$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad (\text{III} - 13 - a)$$

$$b_2 = y_3 - y_1 \quad (\text{III} - 13 - b)$$

$$b_3 = y_1 - y_2 \quad (\text{III} - 13 - c)$$

$$c_1 = x_3 - x_2 \quad (\text{III} - 14 - a)$$

$$c_2 = x_1 - x_3 \quad (\text{III} - 14 - b)$$

$$c_3 = x_2 - x_1 \quad (\text{III} - 14 - c)$$

et :

$$2\Delta e = a_1 + a_2 + a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 \quad (\text{III} - 15)$$

On peut vérifier que Δe désigne la surface de l'élément (e)

En introduisant les valeurs de a_1, a_2, a_3 dans l'équation (III-9), on obtient pour l'élément (e) :

$$V_e(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e} \left[(a_1 + b_1 x + c_1 y) V_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y) V_2 + (a_3 + b_3 x + c_3 y) V_3 \right] \quad (\text{III} - 16)$$

Le potentiel de l'élément (e) est ainsi exprimé en fonction des trois potentiels aux nœuds de celui-ci.

Cette dernière équation peut s'écrire :

$$V_e(x, y) = N_1^{(e)}(x, y) V_1 + N_2^{(e)}(x, y) V_2 + N_3^{(e)}(x, y) V_3 \quad \dots (\text{III} - 17)$$

dans laquelle :

$$N_1^{(e)}(x, y) = (a_1 + b_1 x + c_1 y) \frac{1}{2\Delta_e} \quad (\text{III} - 18-a)$$

$$N_2^{(e)}(x, y) = (a_2 + b_2 x + c_2 y) \frac{1}{2\Delta_e} \quad (\text{III} - 18-b)$$

$$N_3^{(e)}(x, y) = (a_3 + b_3 x + c_3 y) \frac{1}{2\Delta_e} \quad (\text{III} - 18-c)$$

Ainsi, pour un élément quelconque (e) possédant n nœuds, la forme générale de l'approximation locale du potentiel peut s'écrire sous la forme :

$$V_e(x, y) = \sum_{k=1}^n N_k^{(e)}(x, y) \cdot V_k \quad (\text{III} - 19)$$

avec :

- n : Nombre de nœuds de l'élément (e)
- $V_k, k=1, n$: valeurs nodales
- $N_k^{(e)}(x, y)$: Fonctions de pondération, telles que :

$$N_k^{(e)}(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Les dérivées partielles de $V(x, y)$ pour chaque élément sont :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha_2 = f(V_1, V_2, V_3) \quad (\text{III} - 20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \alpha_3 = f(V_1, V_2, V_3) \quad (\text{III} - 21)$$

La méthode des éléments finis étant basée sur la minimisation de l'énergie dans tout le système, seules donc les dérivées des énergies par rapport aux potentiels des nœuds du système retiennent notre intérêt.

Pour l'élément (e) considéré, la fonctionnelle d'énergie est alors :

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \Delta e \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] e \quad (\text{III} - 22)$$

puisque : $\iint dx dy = \Delta e$.

Il en résulte que la fonctionnelle W_e dépend seulement des valeurs nodales du potentiel de l'élément (e).

Il est alors possible de trouver une fonctionnelle équivalente pour tout le système (fig III-2, surface S).

La minimisation de l'énergie dans tout le système se traduit donc par :

$$\frac{\partial W}{\partial V_1} = 0 ; \quad \frac{\partial W}{\partial V_2} = 0 ; \quad \dots ; \quad \frac{\partial W}{\partial V_m} = 0 \quad (\text{III} - 23)$$

où m est le nombre de nœuds du système.

Pour l'élément (e), il s'agira de dériver l'équation (III-22) par rapport à V_1 , V_2 et V_3 respectivement.

En tenant compte des équations (III-20) et (III-21) et des valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ données par les formules (III-11), la dérivée par rapport à V_1 par exemple sera :

$$\frac{\partial W_e}{\partial V_1} = \frac{\epsilon_0}{4\Delta e} [(b_1^2 + c_1^2)V_1 + (b_1 b_2 + c_1 c_2)V_2 + (b_1 b_3 + c_1 c_3)V_3]$$

On obtient alors pour l'élément (e) un système de trois équations qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial V_1} \\ \frac{\partial W}{\partial V_2} \\ \frac{\partial W}{\partial V_3} \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_0}{4\Delta e} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\left[\frac{\partial W}{\partial V} \right]^e = [h]^e [V]^e \quad (\text{III-24})$$

Où $[h]^e$ est une matrice contenant les quantités géométriques de l'élément et la permittivité du diélectrique ϵ_0 .

Ainsi, pour tout le domaine S, l'application de la méthode des éléments finis se ramène à la résolution d'un système d'équations algébriques qui s'écrit sous la forme :

$$\left[\frac{\partial W}{\partial V} \right] = 0 = [H][V] \quad (\text{III-25})$$

qui peut être résolu à l'aide des méthodes usuelles.

Appliquée au calcul du champ électrique dans les systèmes d'isolation, la méthode des éléments finis présente les avantages suivants:

- a. Elle peut aussi être applicable dans le cas des systèmes non-homogènes (diélectriques de permittivités différentes).
- b. Les formes et les tailles des éléments peuvent être choisies de manière à coïncider avec les limites du domaine et la dimension de la grille peut facilement être adaptée aux gradients des potentiels. C'est à dire que les petits éléments doivent être placés dans des régions à gradient élevé et inversement.
- c. L'exactitude des calculs peut encore être améliorée si l'approximation choisie pour le potentiel était d'ordre supérieur.
- d. Elle peut aussi traiter le cas où des courants de conduction existent.

III-4 Méthode des différences finies

III-4-1 Principe de la méthode:

La méthode des différences finies comporte deux étapes [3]:

D'abord l'opérateur différentiel doit être transformé en un opérateur aux différences où chaque dérivée est remplacée par une différence de valeurs de la grandeur étudiée en un certain nombre fini de points. En considérant ces points à une distance h les uns des autres, on a pour l'opérateur Laplacien :

$$\Delta V = [V(x, y, z+h) + V(x, y, z-h) + V(x, y+h, z) + V(x, y-h, z) + V(x+h, y, z) + V(x-h, y, z) - 6V(x, y, z)] / h^2 \quad (\text{III} - 26)$$

Cette formule est en fait une série de Taylor tronquée, ce qui permet de connaître très rapidement l'ordre de grandeur de l'approximation introduite. Cette équation aux différences finies est alors appliquée en un certain nombre de points choisis dans le domaine de définition de l'équation aux dérivées partielles, en tenant compte des conditions imposées aux frontières. Pour obtenir un système simple à résoudre, on a avantage à prendre ces points suivant un schéma le plus régulier possible.

Si on cherche la solution de l'équation de Laplace

$$\Delta V(x, y, z) = 0, \text{ on tire de (III-27) :}$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{6} [V(x, y, z+h) + V(x, y, z-h) + V(x, y+h, z) + V(x, y-h, z) + V(x+h, y, z) + V(x-h, y, z)] \quad (\text{III} - 28)$$

pour chaque point du réseau choisi.

La deuxième phase de la méthode consiste alors à trouver la solution de ce système d'équations linéaires, lequel a en général des dimensions assez importantes.

Pour des raisons de temps de calcul et surtout de réservation de mémoire nécessaire, la solution ne peut être obtenue directement. Une méthode itérative s'impose.

Le schéma d'une méthode itérative est le suivant :

On prend une solution de départ satisfaisant les conditions aux limites et on l'introduit dans l'équation précédente successivement pour tous les nœuds du système. Ceci permet de corriger la solution de départ. La solution corrigée est alors utilisée comme nouvelle solution de départ et le processus peut se répéter aussi longtemps qu'on constate une amélioration de la solution.

III 4 - 2 Expression de l'équation de Laplace sous forme de différences finies :

Considérons un système dans lequel le potentiel est invariant tout le long de l'axe Oz , de manière à se ramener à un problème bidimensionnel.

Soit le développement en série de Taylor de la fonction $V(x, y)$ autour d'un point $O'(x_0, y_0)$, limité aux dérivées secondes :

$$V(x, y) = V(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial V}{\partial x}(O') + (y - y_0) \frac{\partial V}{\partial y}(O') + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(O') +$$

$$+ \frac{1}{2} (y-y_0)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} (0') + (x-x_0)(y-y_0) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} (0') \quad (\text{III-29})$$

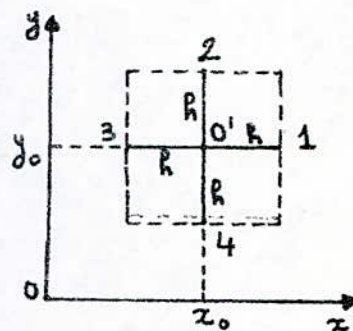
Ecrivons que cette équation est satisfaite en quatre points voisins de O' et situés à la même distance h de celui-ci (fig III-) :

$$V_1 = V_0 + h \frac{\partial V}{\partial x} (0') + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (0') \quad (\text{III-30})$$

$$V_2 = V_0 + h \frac{\partial V}{\partial y} (0') + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} (0') \quad (\text{III-31})$$

$$V_3 = V_0 - h \frac{\partial V}{\partial x} (0') + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (0') \quad (\text{III-32}). \quad (\text{Fig III-4})$$

$$V_4 = V_0 - h \frac{\partial V}{\partial y} (0') + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} (0') \quad (\text{III-33})$$



avec $V(x_0, y_0) = V_0$; $V(x_0+h, y_0) = V_1$; $V(x_0, y_0+h) = V_2$;
 $V(x_0-h, y_0) = V_3$; $V(x_0, y_0-h) = V_4$

En sommant (III-30) et (III-32) d'une part, (III-33) et (III-31) d'autre part, on obtient :

$$V_1 + V_3 = 2V_0 + h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (0') \quad (\text{III-34})$$

$$V_2 + V_4 = 2V_0 + h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} (0') \quad (\text{III-35})$$

La somme de ces deux dernières équations donne :

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 4V_0 + h^2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (0') + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} (0') \right]$$

Si le potentiel obéit à l'équation de Laplace dans le domaine considéré, on aura alors :

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0 = 0 \quad (\text{III-36})$$

Ainsi, pour un point quelconque (x, y) , on peut écrire :

$$V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h) - 4V(x, y) = 0 \quad (\text{III-37})$$

Cette équation est l'expression de l'équation de Laplace sous forme de différences finies.

III-4-3 Formule relative aux branches inégales [7] :

Quand les points 1, 2, 3, 4 sont à des distances R_1, R_2, R_3, R_4 du point O' , comme l'indique la figure

III-5, on est conduit aux expressions suivantes :

$$V_1 = V_0 + R_1 \frac{\partial V}{\partial x}(O') + \frac{1}{2} R_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(O') \quad (\text{III-38})$$

$$V_2 = V_0 + R_2 \frac{\partial V}{\partial y}(O') + \frac{1}{2} R_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(O') \quad (\text{III-39})$$

$$V_3 = V_0 - R_3 \frac{\partial V}{\partial x}(O') + \frac{1}{2} R_3^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(O') \quad (\text{III-40})$$

$$V_4 = V_0 - R_4 \frac{\partial V}{\partial y}(O') + \frac{1}{2} R_4^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(O') \quad (\text{III-41})$$

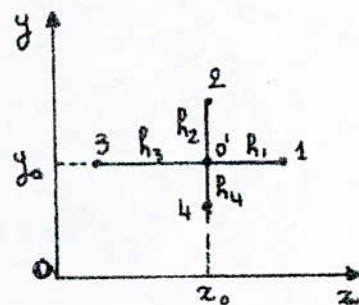


Fig III-5

A partir des équations (III-38) et (III-40) d'une part, et de (III-39) et (III-41), on tire :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(O') = 2 \cdot \frac{R_3(V_1 - V_0) + R_1(V_3 - V_0)}{R_1 R_3 (R_1 + R_3)} \quad (\text{III-42})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(O') = 2 \cdot \frac{R_4(V_2 - V_0) + R_2(V_4 - V_0)}{R_2 R_4 (R_2 + R_4)} \quad (\text{III-43})$$

En sommant ces deux dernières équations et en tenant compte que le potentiel obéit à l'équation de Laplace dans le domaine considéré, on obtient :

$$\frac{1}{R_1(R_1+R_3)} \cdot V_1 + \frac{1}{R_2(R_2+R_4)} \cdot V_2 + \frac{1}{R_3(R_1+R_3)} \cdot V_3 + \frac{1}{R_4(R_2+R_4)} \cdot V_4 = \left(\frac{1}{R_1R_3} + \frac{1}{R_2R_4} \right) V_0$$

cette formule relative aux branches inégales est utile au voisinage des limites du domaine.

Chapitre IV. CALCUL ET MESURE DU CHAMP ELECTRIQUE SOUS UNE LIGNE AERIENNE 220 kV

IV-1 Méthodes de mesure des champs électriques [1] :

La mesure des champs électriques peut s'effectuer par :

- . la méthode directe.
- . Des méthodes indirectes.

IV-1-1 Méthode directe :

Elle consiste à déterminer le champ électrique E_T à la surface du sol en mesurant la différence de potentiel U entre un point A d'altitude connue et la terre B, au moyen d'un voltmètre électrostatique (fig IV-1).

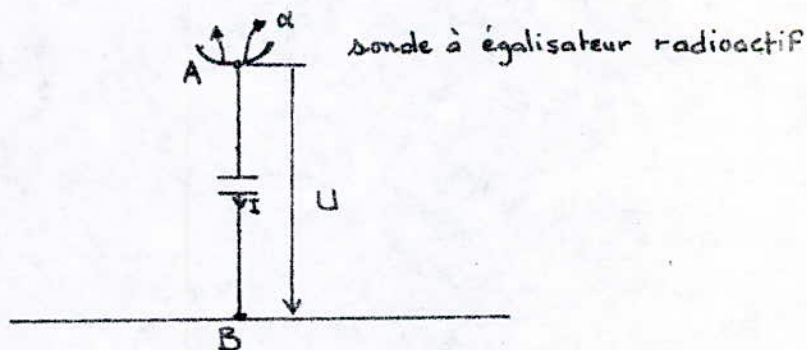


Fig. IV-1.

La résistance interne de la source étant extrêmement grande (la conductivité électrique de l'atmosphère étant très faible au niveau du sol : $\sigma = 23 \cdot 10^{-15}$ S/m, par beau temps), il est nécessaire d'utiliser un ioniseur

-54-

radioactif. on a recours, en général, au noyau d'Hélium ${}^4_2\text{He}$ qui émet des particules α lourdes et peu pénétrantes, générées par des substances telles que l'Uranium.

L'égalisateur radioactif placé sur la sonde voltométrique a pour but d'augmenter la conductivité électrique de l'air, afin de délivrer un courant de mesure I suffisant, ou, en d'autres termes, de permettre à la sonde d'acquiescer le potentiel du point auquel elle se trouve. On a :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B E_T dr_{AB} = E_T \cdot \overline{AB}$$

d'où :

$$E_T = \frac{U}{\overline{AB}} \quad (\text{IV} - 1).$$

IV-1.2 Méthode indirecte de Wilson :

La méthode de Wilson consiste à déterminer le champ électrique E_{Tm} , à la surface du sol, en mesurant les charges électriques Q à la surface de celui-ci.

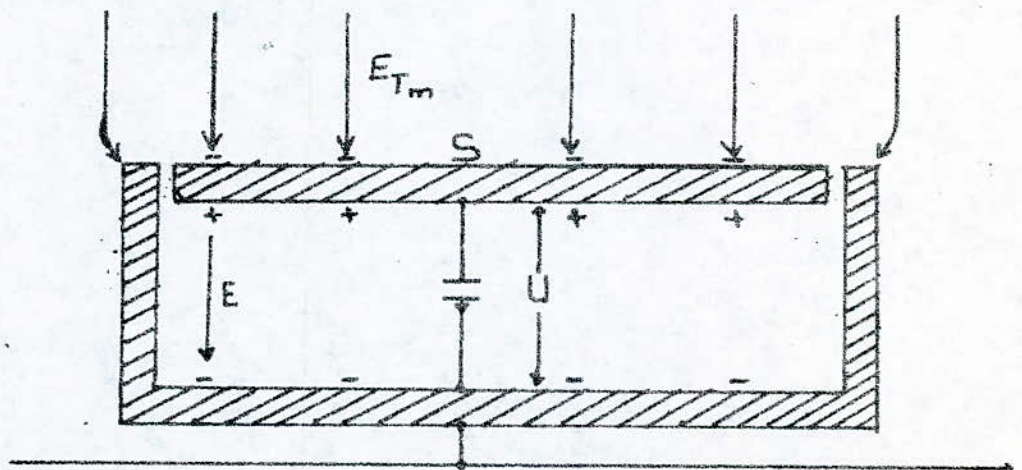


Fig IV - 2

Après le théorème - 55 - Gauss, on a :
d'après le théorème de Gauss, on a :

$$\epsilon_0 E S = C U \quad (\text{IV} - 2)$$

où C est la capacité de l'électrode de surface S ,
contre le boîtier mis à la terre (fig IV-2).

Le champ électrique E_{Tm} est donc égal à :

$$E_{Tm} = E = \frac{C U}{\epsilon_0 S} \quad (\text{IV} - 3)$$

IV. 1.3 Méthode Indirecte du voltmètre rotatif (Moulin à champs électriques):

La méthode du voltmètre rotatif pour la détermination
du champ électrique E_{Tm} à la surface du sol est basée
sur la mesure du courant $i(t)$, résultant de la variation
de la capacité $\frac{dC}{dt}$ entre un rotor tournant à la
vitesse n et un stator fixe (fig IV-3).

La valeur moyenne du courant $i(t)$ de mesure
vaut :

$$I_m = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (\text{IV} - 4)$$

$$\text{or :} \quad \int_0^T i(t) dt = Q(t) \quad (\text{IV} - 5)$$

$$\text{donc :} \quad I_m = \frac{1}{T} Q(t) \quad (\text{IV} - 6)$$

Comme la vitesse de rotation n est liée à la
période T par la relation :

$$n = \frac{1}{T} \quad -56- \quad (\text{IV} - 7)$$

alors :

$$Q(t) = \frac{I_m}{n} \quad (\text{IV} - 8)$$

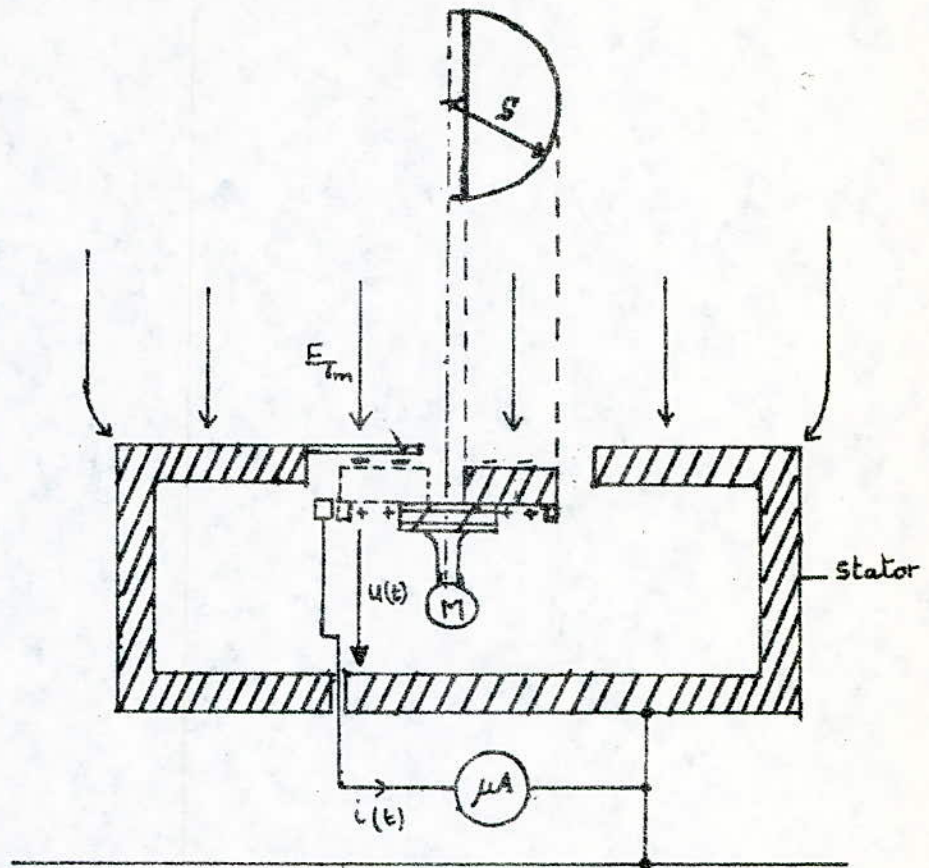


Fig . IV - 3 .

La surface du demi-secteur S vaut :

$$S = \frac{1}{2} \pi r^2 \quad (\text{IV} - 9)$$

où r est le rayon du secteur du rotor .

Si ρ_s est la densité de la charge surfacique du demi-secteur lors du passage au droit de l'ouverture sectorielle du stator , on a :

$$\rho_s = \frac{Q(t)}{S} = \frac{I_m}{n S} \quad (\text{IV} - 10)$$

La densité de charge à la surface du moulin à

champs électrique est donnée par le déplacement électrique :

$$P_S = D = \epsilon_0 E_{Tm} \quad (\text{IV} - 11)$$

d'où :

$$E_{Tm} = \frac{P_S}{\epsilon_0} \quad (\text{IV} - 12)$$

En combinant toutes les équations (IV - 10), (IV - 11) et (IV - 12), on trouve :

$$E_{Tm} = \frac{2 I_m}{\pi \epsilon_0 n r^2} \quad (\text{IV} - 13)$$

Le moulin à champs électrique peut être utilisé aussi pour la mesure des champs variables, si la fréquence de rotation du moteur est synchronisée avec la fréquence du champ électrique à mesurer. [6]

Par exemple, un moteur à quatre pôles tournant à la vitesse $n = 1500$ tr/min convient pour la mesure d'un champ électrique de fréquence industrielle 50 Hz.

IV.2 Résultats de calculs et de mesures

IV.2.1 Introduction

Ce chapitre intervient dans le but de connaître les valeurs du champ électrique au dessous d'une ligne aérienne 220 kV. Il rapporte les résultats de calculs et de mesures effectués dans différentes configurations de lignes.

IV.2.2 Calcul du champ électrique sous une ligne aérienne

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de calcul et leur interprétation.

Les courbes présentées sur la figure IV-4 résultent d'un calcul portant sur une ligne 220 kV en nappe, au dessus d'une terre plane. Les détails de calcul sont reportés en annexe I.

Les caractéristiques géométriques de la ligne étudiée sont:

- Distance entre phases, $d = 7 \text{ m}$.
- Rayon de chaque conducteur de phase, $R = 9,5 \text{ mm}$. (Calculé à partir de la section des conducteurs, $S = 288 \text{ mm}^2$, utilisée par la Sonelgaz).

a. Type de courbes tracées

Les courbes $E = f(x)$ sont tracées pour différentes hauteurs de ligne par rapport au sol : $h = 7 \text{ m}$; $10,5 \text{ m}$; 12 m ; 14 m . (fig IV-4)

Les courbes $E = f(h)$, (fig IV-5), résultent en prenant la valeur du champ électrique de chaque courbe $E = f(x)$, pour un point fixe donné. Exemple, pour notre cas de figure,

$$x = 2 \text{ m}, 5 \text{ m}, 8 \text{ m}, 11 \text{ m}, 15 \text{ m}, 20 \text{ m}.$$

En la symétrie que présente une ligne triphasée en nappe, les courbes $E = f(x)$ ont été tracées suivant un seul côté de la phase centrale S.

b. Interprétation des résultats

Les courbes $E = f(x)$ présentent deux maximums au dessous des phases extrêmes, se déplaçant plus à l'extérieur si la hauteur des conducteurs par rapport à la terre augmente. Ce phénomène est dû à l'augmentation des capacités entre phases par rapport à la capacité phase-terre.

Si les distances entre phases sont égales aux hauteurs conducteur-terre, on observe trois maximums au dessous de chaque phase, le maximum de la phase centrale étant le plus petit.

Lorsque la hauteur h augmente, le champ électrique tend à diminuer plus lentement. A partir d'une distance x supérieure ou égale à 20 m, les valeurs du champ varient très peu bien que la hauteur varie.

La courbe $E = f(h)$ montre nettement que, plus la ligne électrique est haute, plus le champ électrique qu'elle engendre est faible.

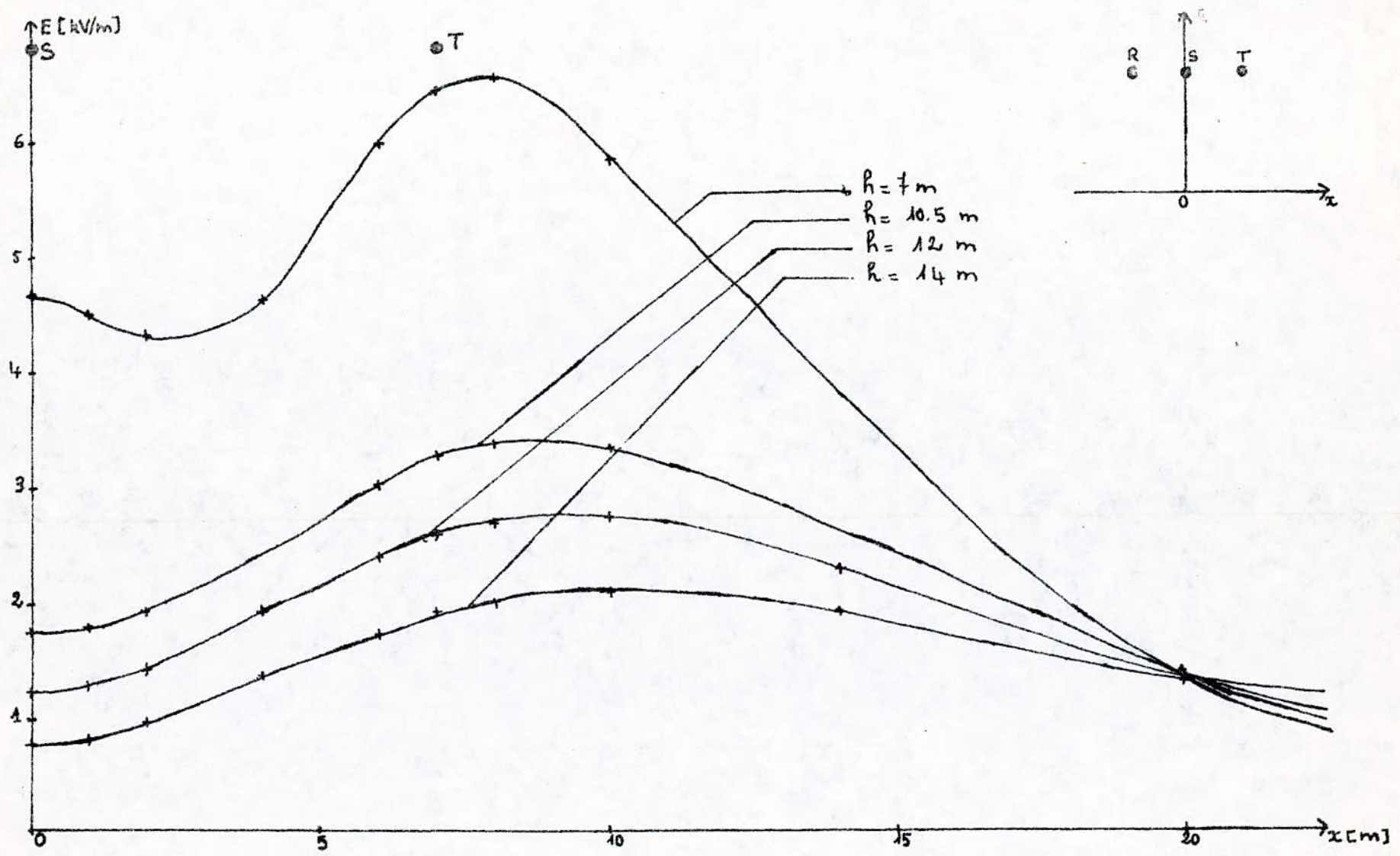


Fig IV - 4 . Variations du champ électrique en fonction de la distance x pour différentes hauteurs de la ligne .

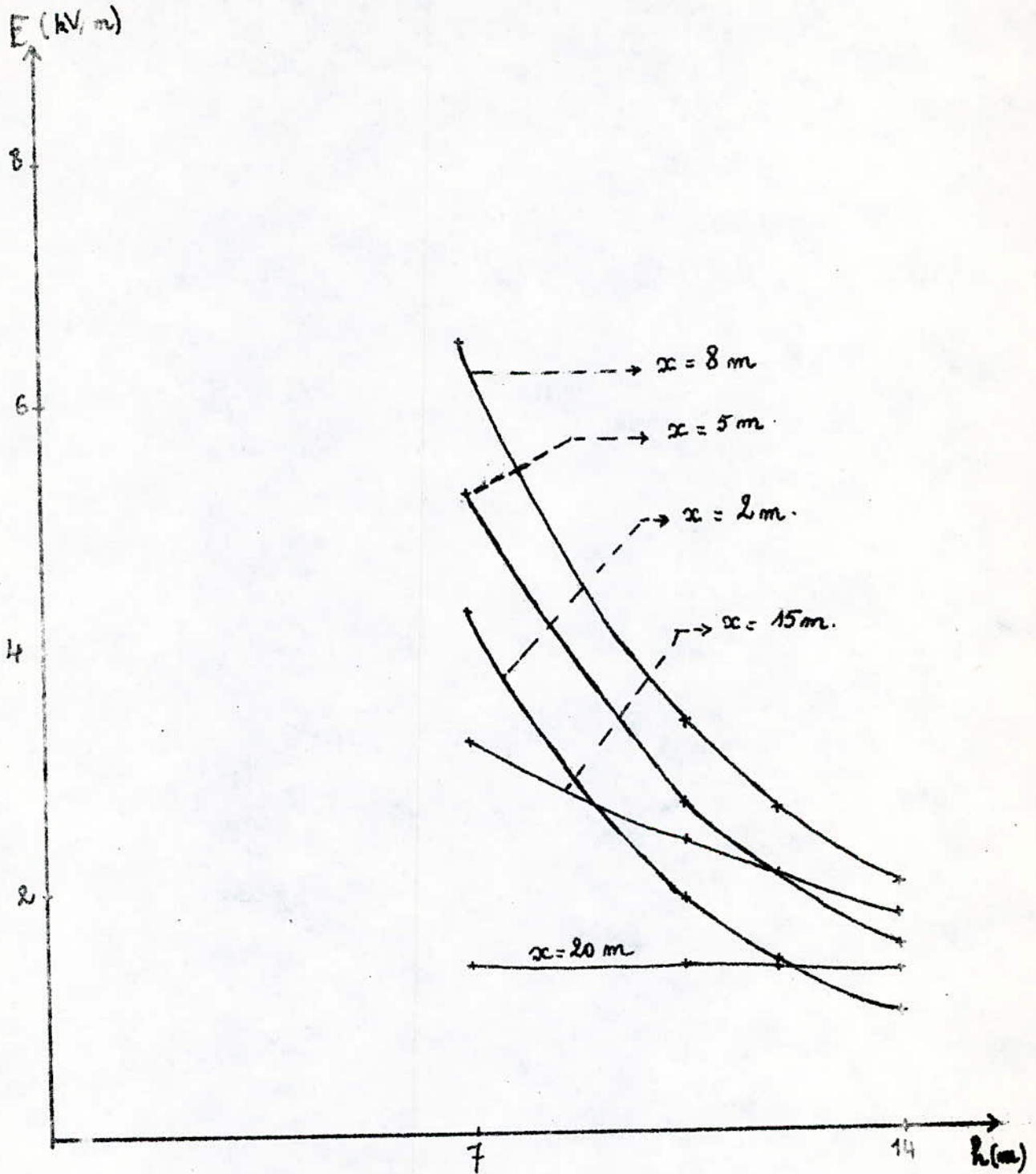


Fig IV - 5 Variations du champ électrique en fonction de la hauteur pour différents points donnés du sol.

IV.2-3 Mesure du champ électrique sous des lignes aériennes réelles

Afin de donner un appui pratique aux constatations théoriques que nous avons vues dans les chapitres précédents, nous avons jugé utile d'effectuer une série de mesures du champ électrique sous des lignes réelles. Ces mesures feront l'objet, dans la mesure où ce sera possible, de comparaison avec les résultats obtenus par calcul.

Les mesures ont été effectuées dans différentes configurations de terrain :

- Terrain cimenté à l'intérieur du poste de L'ARBA.
- Terrain plat labouré.
- Terrain surmonté d'un pont.
- Terrain plat semé.

Mode opératoire :

a) Le matériel de mesure que nous avons utilisé comporte :

- Un théodolite et sa mire pour la mesure des hauteurs de lignes.
- Un moulin à champs électrique type PHYWE, D⁵ Kleinwächter, possédant la gamme d'échelles suivantes : 1 kV/m ; 10 kV/m ; 100 kV/m.
- Un multimètre positionné sur mA pour la lecture des valeurs mesurées par le moulin à champs.

b) Dispositions prises lors des mesures :

Les précisions que nous allons citer ci-dessous seront communes pour toutes les mesures :

- Toutes les mesures ont été prises à 50 cm du sol (hauteur du support du moulin).
- Pour éviter les erreurs de proximité dues à l'influence de l'opérateur, les lectures ont été faites loin du système de mesure à l'aide de jumelles optiques (à des distances supérieures à 5 m).
- Le calibrage de l'appareil est indispensable avant de passer aux mesures, afin d'éviter les erreurs d'indication. Le réglage doit être effectué dans une région où il n'existe pas de champ électrique. Dans notre cas, le réglage a été effectué à l'intérieur d'une voiture. En effet, la voiture étant fermée, peut être assimilée à une cage de Faraday où le champ électrique est nul.
- La plaque conductrice fixée au moulin à champs est maintenue constamment horizontale. L'appareil mesure alors la composante verticale qui est la valeur exacte du champ électrique. En effet, jusqu'à une hauteur de 3 m environ au dessus du sol, le champ électrique peut être considéré comme homogène et vertical [8].
- Lors des mesures, nous avons observé que les indications du moulin à champs étaient pratiquement les mêmes si la carcasse est mise à la terre ou non.
- L'alimentation du moulin à champs est assurée à l'aide d'une batterie d'automobile 12 V.
- Toutes les mesures effectuées au dessus d'un sol plan

ont eu lieu approximativement en milieu de portée (flèche maximale), ce qui permet d'appliquer l'approximation qui suppose que la ligne est parallèle à la terre.

- Le procédé de mesure dans le cas d'une ligne au dessus d'une terre plane est le suivant :

On part d'un point au dessous du conducteur central de la ligne, ensuite on relève des mesures suivant une direction perpendiculaire aux conducteurs de la ligne, en des points régulièrement espacés.

- Pour permettre un meilleur suivi au lecteur, nous allons présenter chaque série de mesures séparément.

Effectivement, les conditions géométriques dans lesquelles furent effectuées les mesures sont différentes et, par conséquent, ne nous permettent pas de rassembler tous les résultats obtenus. Une interprétation des résultats est présentée pour chaque cas.

1^{er} cas . Poste de transformation et d'inter-
-connexion Sonelgoz de L'ARBA

Les mesures ont été faites au dessous d'une ligne double 220 kV, avec armement en nappe, sur un terrain plat cimenté à l'intérieur du poste (fig IV - 7).

La figure ci-dessous montre un schéma global du poste avec l'endroit où furent effectuées les mesures et les principales structures existantes.

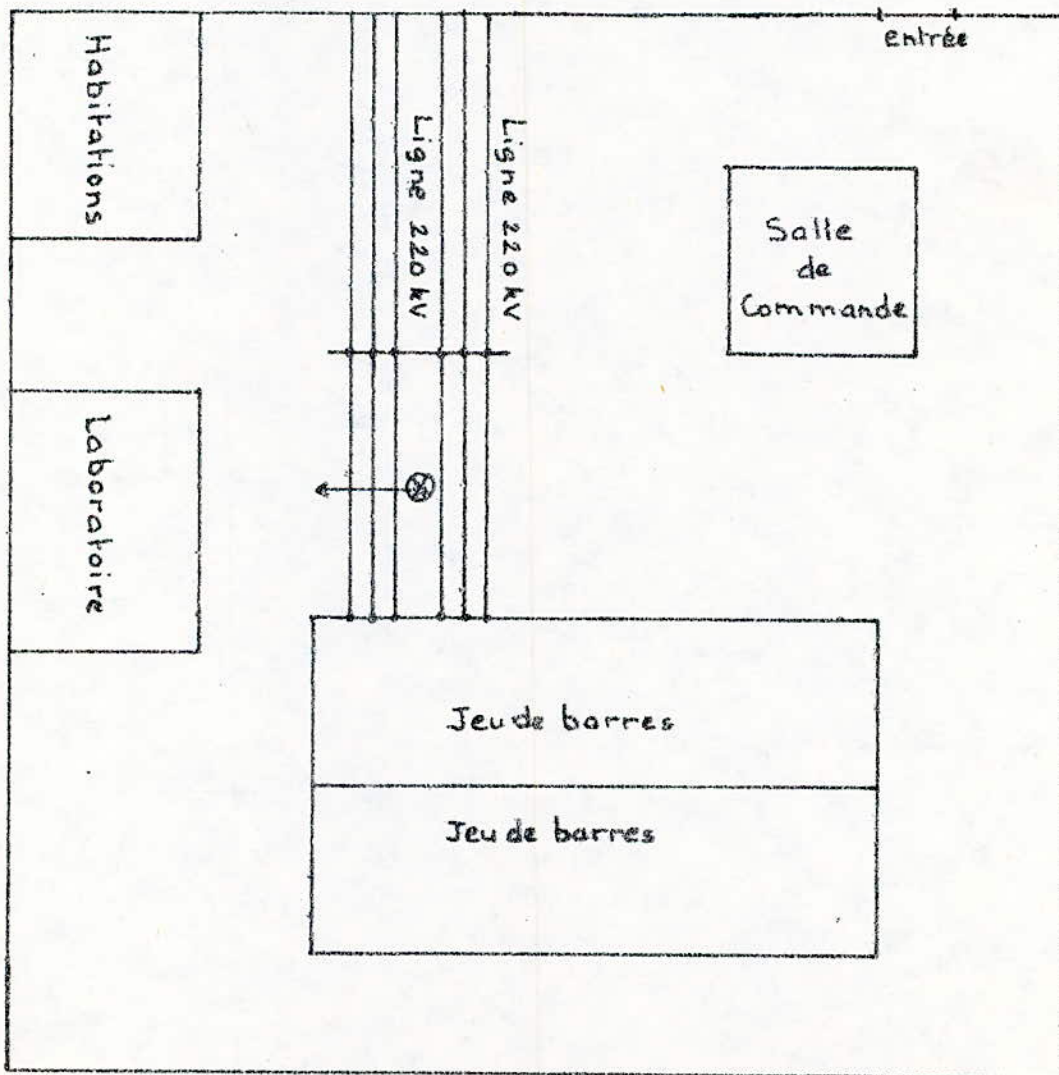


Fig IV-6 : Schéma approximatif du poste
de l'ARBA

- La valeur maximale du champ électrique atteint $4,5 \text{ kV/m}$ valeur qui est largement plus importante que celle obtenue par le calcul ($2,5 \text{ kV/m}$). Cette supériorité est due à l'existence de nombreux conducteurs se trouvant dans le poste (entre autre les jeux de barres), contribuant ainsi à l'élévation du champ électrique.

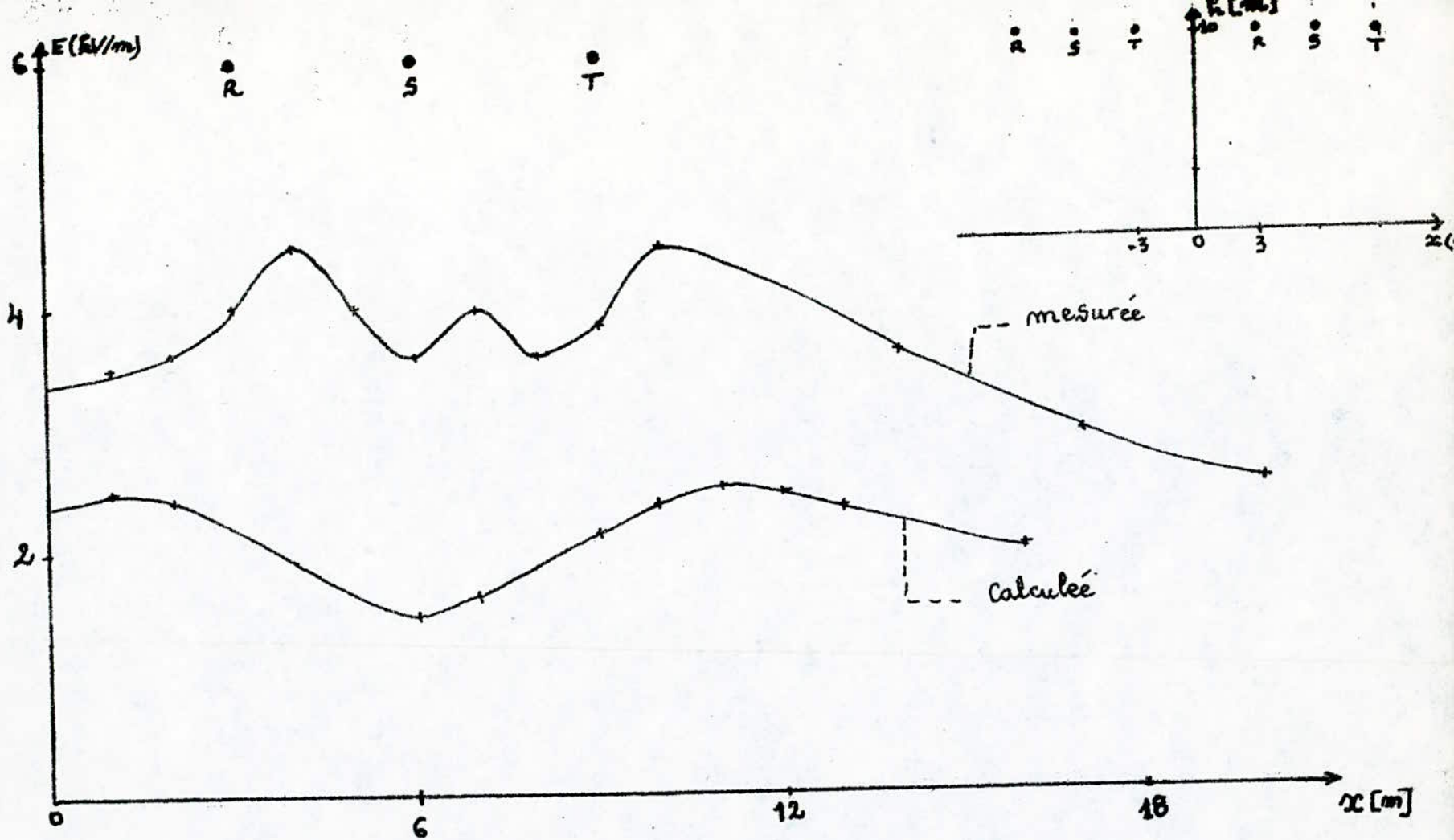


Fig IV - 8 Variations du champ électrique en fonction de la distance x pour la ligne double terre 220 kV à l'intérieur du poste de L'ARBA.

2^{ème} cas. Deux lignes 220 kV à la sortie
du poste de L'ARBA

L'endroit est choisi assez loin du poste pour
écarter toute influence en provenance de celui-ci.

Le terrain est plat et non labouré. Les deux lignes
sont distantes de 60 m.

Le temps durant les essais était clair et ensoleillé avec
un vent variable.

. Configuration géométrique :

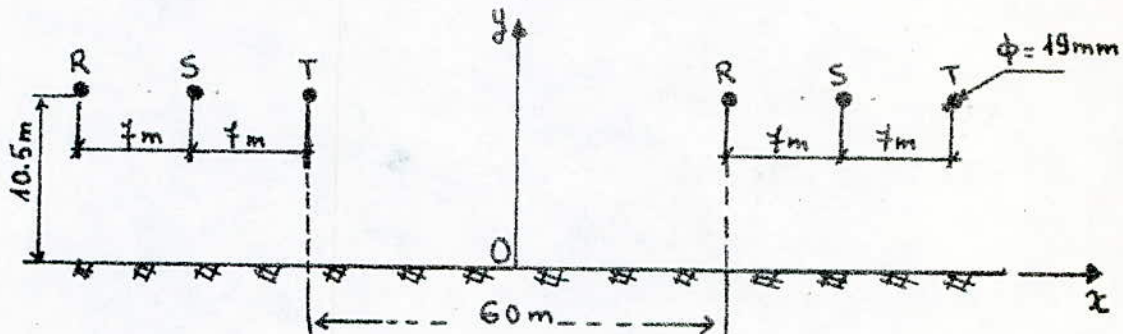


Fig II-9 . Configuration géométrique des deux
lignes 220 kV à l'extérieur du poste de L'ARBA

Interprétation des résultats :

La courbe $E = f(x)$ fig(II-10) possède la même allure
que celle obtenue pour les deux lignes à l'intérieur du
poste. On ne peut évidemment pas les comparer d'une
manière quantitative car les caractéristiques géométriques des
deux lignes dans les deux cas sont différentes. Le maximum
de la phase R est supérieur à celui de la phase T ou la
contribution de la deuxième ligne.

-70-

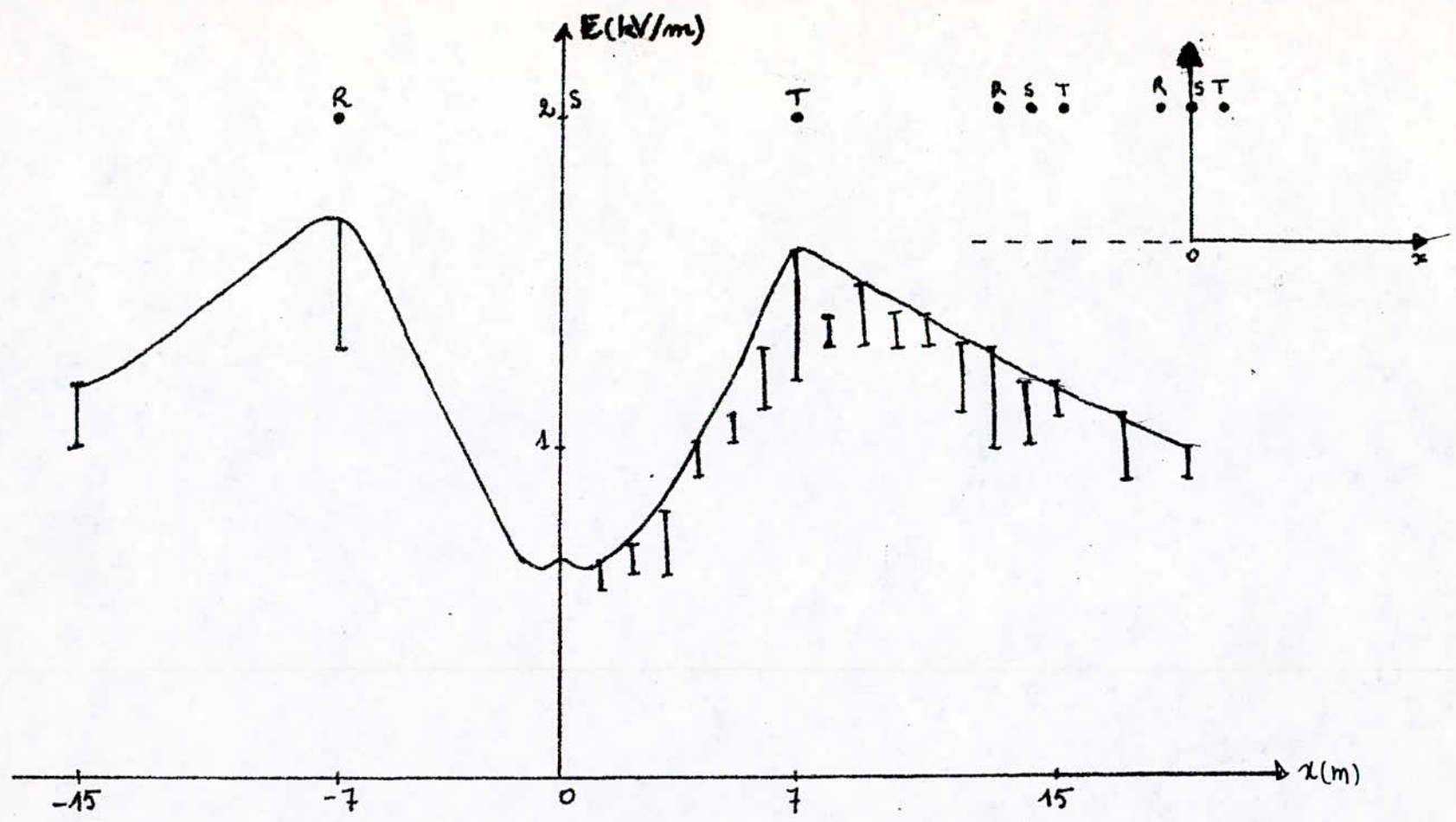


Fig IV. 10. Variations du champ électrique en fonction de la distance x dans le cas de deux lignes voisines 220kV à l'extérieur du poste de L'ARBA.

3^{ème} cos. Ligne 220 kV L'ARBA - TIZI-OUZOU

terrain plat

L'endroit se situe à proximité de l'intersection de la route ALGER - CONSTANTINE et la route ALGER - TIZI-OUZOU, près de la localité de Si-Mostefa.

Le terrain est plat et labouré. Notons aussi l'existence d'une ligne 60 kV aboutissant à un petit poste d'interconnexion situé dans les environs.

Le temps était ensoleillé avec un vent variable.

Géométriquement, le système ligne - terre peut être représenté comme suit :

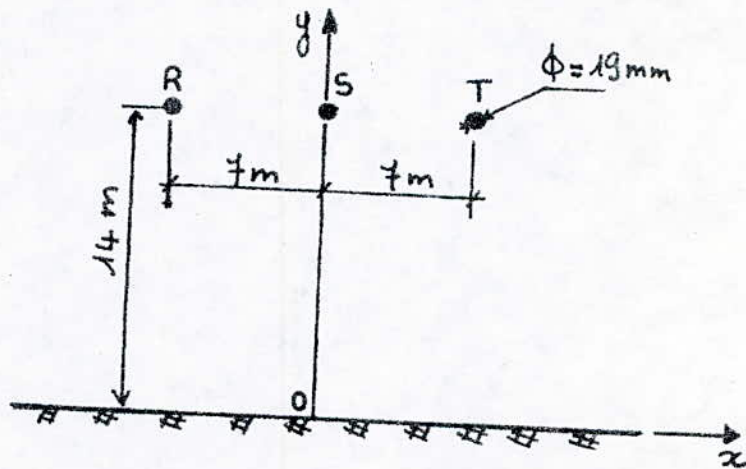


Fig IV-11 Configuration géométrique de la ligne 220 kV L'ARBA - TIZI-OUZOU près de Si-Mostefa

Interprétation des résultats :

- Avec cette configuration, on constate sur la courbe $E = f(x)$ fig (IV-12), deux maximums au dessous des phases extrêmes (R, T), déplacés vers l'extérieur de

celles-ci. Le déplacement vient confirmer ce qui est observé sur la courbe calculée.

- Entre les phases extrêmes, les deux courbes diffèrent de très peu, mais s'écartent considérablement en allant de part et d'autre de ces phases.

Cet écart peut être expliqué comme suit :

Les mesures entre les phases S et T étaient effectuées sur un sentier (donc terre non labourée). Au delà de la phase T, le terrain commence à présenter des déformations dues au labour. Il en résulte, tenant compte de la faible hauteur du support du moulin à champs, que le champ électrique pourrait être perturbé. Le phénomène, bien qu'il soit peu convaincant, ne permet pas à l'appareil de mesure d'offrir des résultats comparables avec les calculs.

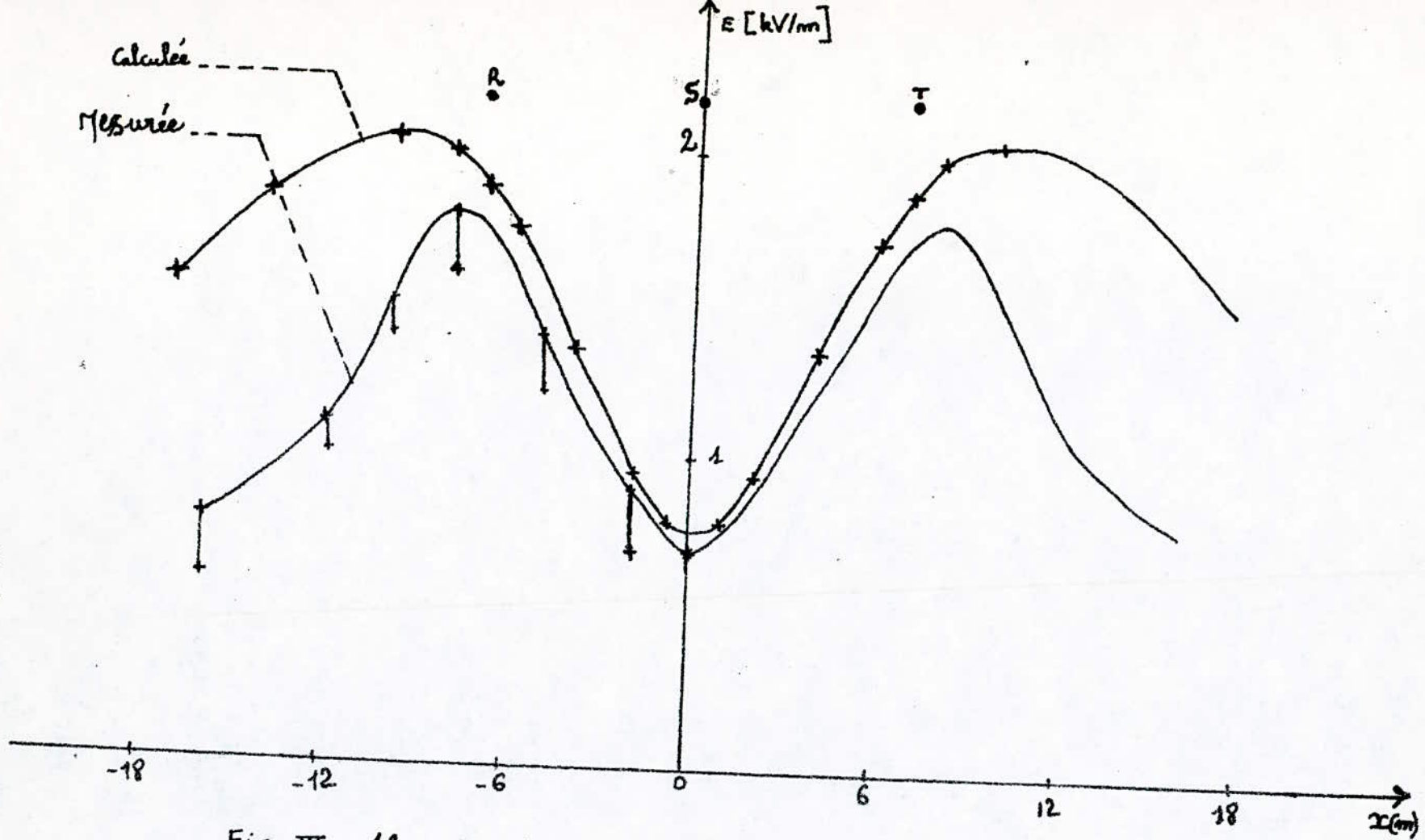


Fig IV - 12 Variations du champ électrique en fonction de la distance x pour la ligne simple terre 220 kV dans la région de Si Mostefa .

4^{ème} cas . Ligne 220 kV L'ARBA - TIZI-OUZOU
au dessus d'un pont

Le cas traite de la présence d'une aspérité artificielle surmontant une terre plane. Cette aspérité est réellement traduite par un pont routier construit sur la route nationale n°5, dans la localité de Si-Mostefa.

Les conditions atmosphériques sont les mêmes que celles du cas précédent car les mesures ont été prises durant la même journée.

Les relevés ont été effectués par rapport à l'axe du conducteur central de la ligne. Pour mettre en évidence l'influence de l'aspérité, trois mesures furent effectuées sur le pont, et deux autres de part et d'autre en bas du pont (fig IV-13).

Interprétation des résultats :

- Au point A (fig IV-13), situé à 15m au dessous de la ligne, l'appareil de mesure a fourni une intensité de champ électrique égale à 1 kV/m. Au même point, le calcul nous donne 1,3 kV/m. Cette différence, bien qu'elle soit acceptable, est introduite à cause de l'existence d'un chantier juste à côté du lieu de mesure. Les engins et les amas de gravier, formant ainsi des structures hémisphériques contribuent à la

déformation du champ électrique.

- Sur le pont, l'intensité du champ électrique augmente progressivement jusqu'à atteindre la valeur de 2 kV/m au point D, point culminant de l'aspérité (fig. II.14). Il en résulte qu'en ce point, la ligne engendre un champ électrique double de celui qu'elle produit au point A. En effet, un calcul effectué pour le point D (le pont étant supposé horizontal), donne une valeur égale à $4,9 \text{ kV/m}$.

- Au point E, le champ reprend la valeur de 1 kV/m . Ceci vient justifier l'hypothèse selon laquelle le champ électrique est constant suivant l'axe de la ligne.

- Cette série de mesures montre nettement le caractère perturbateur de l'aspérité terrestre sur la distribution du champ électrique à proximité du sol.

Remarques:

1°) Il est intéressant de souligner que les mesures pourraient être affectées par la présence des facteurs suivants:

- passage permanent des véhicules sur le pont.
- Conditions éoliennes variables.
- Panneaux indicateurs en bordure de la route formant des pointes.

2°) La valeur maximale du champ électrique aurait été plus importante si les mesures avaient été effectuées au dessous et suivant l'axe de l'un

des conducteurs extrêmes. Cette remarque est tirée du fait que, pour toutes les configurations déjà envisagées, le maximum du champ se situe au dessous des deux phases extrêmes de la ligne.

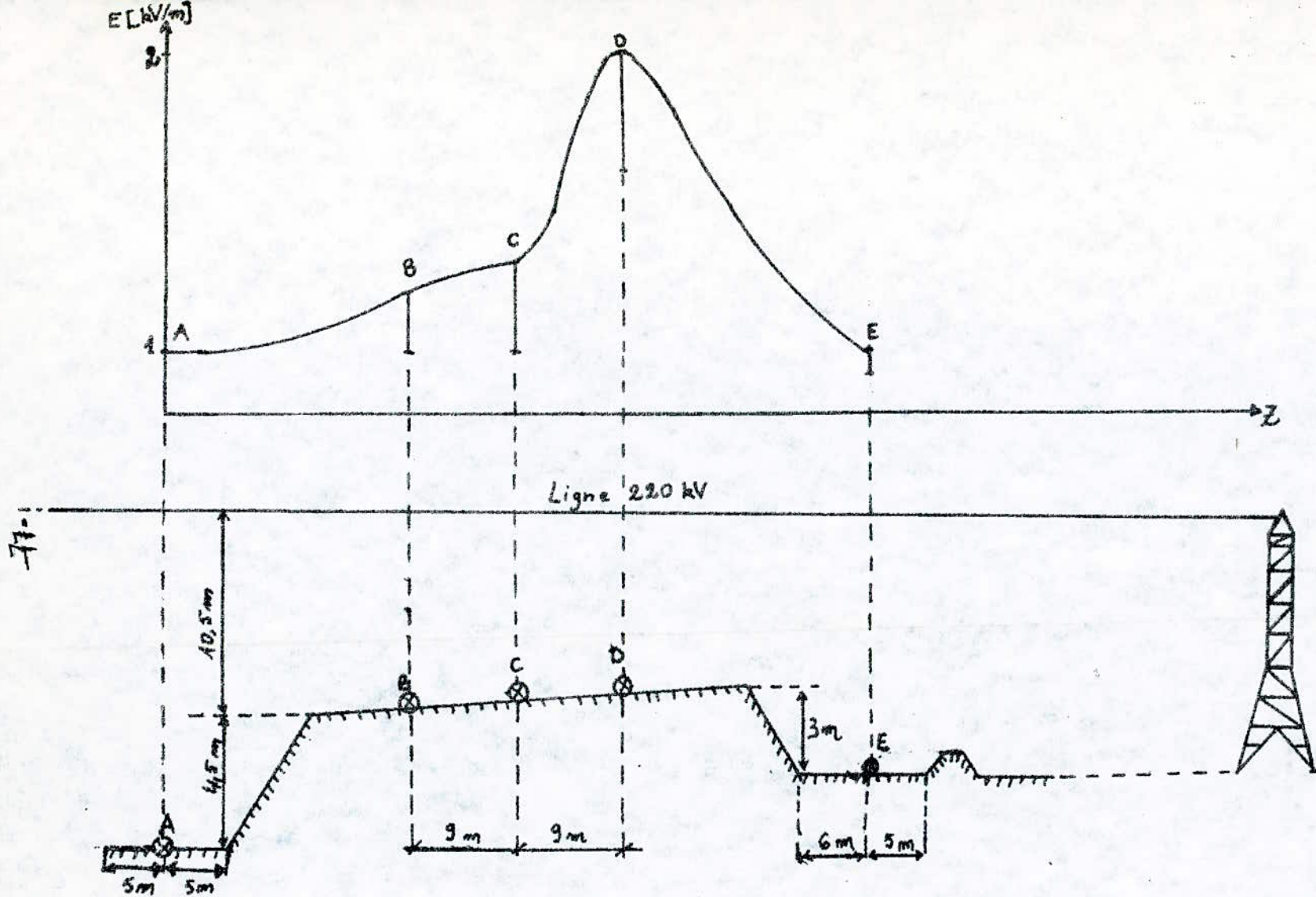


Fig III - 13 Variations du champ électrique le long de l'axe du conducteur central sur la surface de la terre, en présence du pont.

IV-3 . Synthèse et discussion des résultats de mesures

Toutes les précautions requises pour obtenir des mesures suffisamment précises du champ électrique sous les lignes ou dans le poste ne sont pas évidentes : des directives sont nécessaires pour une utilisation satisfaisante de l'appareil.

Lors des mesures, il faut souligner qu'on observait des variations permanentes des indications de l'appareil de mesure, de période variable aussi, allant de 30 secondes à 60 secondes, et même jusqu'à 120 secondes. Les valeurs indiquées du champ électrique pouvaient varier de 50% et même de 100% dans certains cas. On a relevé les valeurs moyennes des indications, et celles correspondantes à des périodes d'indication relativement stables.

En somme, l'exactitude des mesures n'était pas très satisfaisante ; les fluctuations des indications étant assez importantes. Certaines possibilités d'explication peuvent être résumées comme suit :

- Si on exclut les éventuelles variations de la tension de la ligne, seul paramètre variable pendant les mesures reste les conditions atmosphériques (vent, humidité, température). Il est possible que le vent et la convection décident de la répartition des charges libres dans l'air autour d'un conducteur à haute tension. Les charges, créées par

effet couronne, peuvent former un écran entourant la ligne ou au moins déformer les lignes de champ électrique.

Le phénomène, une fois stable, une fois perturbé par le vent ou la convection (ou autres variations des conditions extérieures) jouerait un rôle important bien que son effet soit difficile à estimer numériquement. Toutes ces hypothèses demandent quand même une vérification très stricte et rigoureuse.

- L'appareil de mesure est conçu essentiellement pour la mesure des champs électriques statiques, bien qu'il puisse être utilisé pour mesurer des champs électriques de faible fréquence, sous certaines réserves (paragraphe IV-1-3).

Comme on n'a pas eu d'autre instrument pour nos essais, on ne peut pas croire exclusivement à l'exactitude des résultats. Néanmoins on croit qualitativement aux indications du moulin à champs vu la ressemblance des courbes calculées et mesurées qu'on a obtenues.

Remarque :

Il aurait été utile d'avoir un autre appareil basé sur un autre principe de mesure du champ électrique variable. Ainsi, en comparant les résultats fournis par les deux appareils, on peut tirer une conclusion sur la qualité de notre moulin à champs. Des mesures dans un laboratoire équipé d'un modèle réduit d'une ligne à haute tension peuvent aussi se prêter à la comparaison.

CONCLUSIONS

Cette étude nous permet de dire que l'existence d'une aspérité terrestre sous une ligne électrique à haute tension provoque une nette augmentation des valeurs de l'intensité du champ électrique à proximité du sol.

Ces fortes intensités du champ peuvent engendrer des dangers tels que:

- Effets biologiques sur le public circulant sous la ligne si l'intensité du champ dépasse une certaine valeur (en général 10 kV/m).
- Risque de décharge entre un conducteur de la ligne et les véhicules assez hauts, dans le cas des surtensions.

A cet effet, il est indispensable d'adopter certaines mesures de précautions pour assurer une bonne sécurité, à savoir, par exemple:

- La surélévation de la ligne à l'endroit où le danger est alarmant (habitations, routes, ponts, chemins de fer).
- La couverture de l'endroit du danger par une structure conductrice mise à la terre.

Les résultats de mesure et de calcul montrent que, même aux cas peu favorables (petite hauteur des conducteurs, l'intérieur d'un poste, les aspérités prononcées du terrain), l'intensité du champ électrique ne dépasse pas les normes requises par certains pays, dans le cas d'une ligne 220 kV .

Néanmoins, la connaissance des méthodes de calcul théorique et des mesures pratiques sera beaucoup plus importante dans le cas des lignes à très haute tension.

La signification du présent projet peut donc être estimée non seulement par les résultats obtenus, mais aussi comme une préparation aux études plus importantes à l'avenir.

ANNEXE

I. Calcul du champ électrique sous une ligne en nappe, terrain plat :

Le calcul porte sur la valeur efficace du champ électrique. Sur la surface de la terre, l'expression du champ est, comme on l'a vu au paragraphe (II-4-2-c) :

$$\vec{E}(x) = -\frac{R}{\pi \epsilon_0} \left[\frac{\lambda_1}{(x+d)^2 + R^2} + \frac{\lambda_2}{x^2 + R^2} + \frac{\lambda_3}{(x-d)^2 + R^2} \right] \vec{z}$$

avec (paragraphe II-5-2-a) :

$$\lambda_1 = C'_{11} V_1 + C'_{12} V_2 + C'_{13} V_3$$

$$\lambda_2 = C'_{21} V_1 + C'_{22} V_2 + C'_{23} V_3$$

$$\lambda_3 = C'_{31} V_1 + C'_{32} V_2 + C'_{33} V_3$$

on pose :

$$X = (x+d)^2 + R^2$$

$$Y = x^2 + R^2$$

$$Z = (x-d)^2 + R^2$$

Le champ peut se mettre alors sous la forme :

$$E(x) = -\frac{R}{\pi \epsilon_0} \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3}{X Y Z}$$

avec :

$$a_1 = C'_{11} YZ + C'_{12} XZ + C'_{13} XY$$

$$a_2 = C'_{21} YZ + C'_{22} XY + C'_{23} XZ$$

$$a_3 = C'_{31} YZ + C'_{32} XZ + C'_{33} XY$$

or, on sait que:

$$V_1 = V_m \sin \omega t$$

$$V_2 = V_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$V_3 = V_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

on obtient alors:

$$a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 = V_m \left(F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t \right)$$

où :

$$F_1 = a_1 + (a_2 + a_3) \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$F_2 = (a_3 - a_2) \sin \frac{2\pi}{3}$$

Finalement, le champ électrique s'exprime par:

$$E(x) = -\frac{R}{\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{XYZ} \left(F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t \right)$$

$$E^2 = \frac{R^2}{(\pi \epsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{(XYZ)^2} \left(F_1^2 \sin^2 \omega t + F_2^2 \cos^2 \omega t + 2 F_1 F_2 \sin \omega t \cos \omega t \right)$$

La valeur efficace est donnée par:

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E^2 \, d\omega t$$

soit, tous calculs faits:

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{R^2}{2(\pi \epsilon_0)^2} \cdot (F_1^2 + F_2^2) \cdot \frac{1}{(XYZ)^2}$$

ou:

$$E_{\text{eff}} = \frac{R}{\sqrt{2} \pi \epsilon_0} \cdot \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \cdot \frac{1}{XYZ}$$

Tableau de valeurs calculées

$R = 7\text{ m}$	$x\text{ (m)}$	0	1	2	4	7	8	10	14	20	30
	$E\text{ (kV/m)}$	4,6	4,5	4,28	4,6	6,4	6,5	5,8	3,75	1,33	0,4
$R = 10,5\text{ m}$	$x\text{ (m)}$	0	1	2	4	7	8	10	14	20	30
	$E\text{ (kV/m)}$	1,7	1,75	1,9	2,4	3,25	3,37	3,36	2,6	1,4	0,51
$R = 12\text{ m}$	$x\text{ (m)}$	0	1	2	4	7	8	10	14	20	30
	$E\text{ (kV/m)}$	1,2	1,25	1,4	1,9	2,55	2,66	2,71	2,26	1,34	0,54
$R = 14\text{ m}$	$x\text{ (m)}$	0	1	2	4	7	8	10	14	20	30
	$E\text{ (kV/m)}$	0,75	0,8	0,95	1,35	1,9	2	2,1	1,9	1,26	0,58

II. Calcul du champ électrique engendré par une ligne sur un cylindre conducteur mis à la terre :

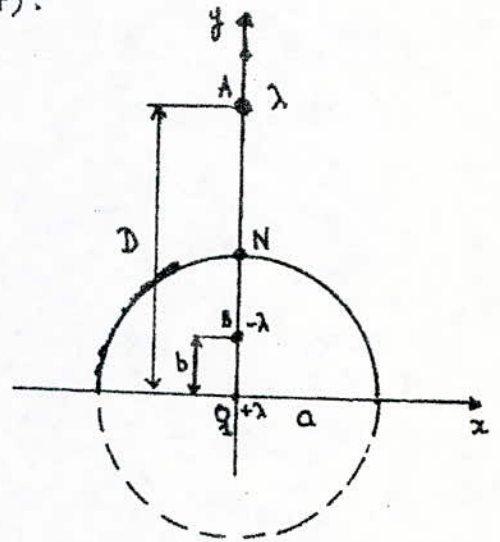
- Dans ce cas, l'expression du champ électrique sur la surface du cylindre au point N de la figure ci-dessous est (compte tenu de la formule II-47) :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{aD(a+D-1)+a^2}{a^2D(D-a)}$$

si on prend $a = 7\text{m}$; $D = 14\text{m}$

on trouve :

$$E_1 = 0,1985 \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \text{ kV/m} \quad (1)$$



- Pour une même ligne située à une hauteur $h = 14\text{m}$ au dessus d'un plan mis à la terre, on trouve :

$$E_0 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{R}{z^2 + R^2}$$

pour $z = 0$ (point O de la figure ci-contre), on

aura :

$$E_0 = 0,071 \cdot \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \text{ kV/m} \quad (2)$$

En calculant le rapport entre (1) et (2) :

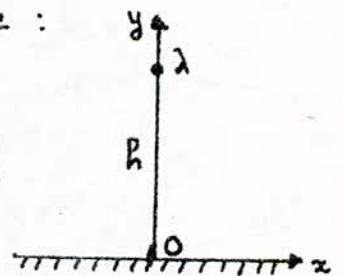
$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{0,1985}{0,071} \approx 3$$

soit ;

$$E_1 \approx 3 E_0$$

Si la ligne est à une hauteur $h = 7\text{m}$, le champ électrique E'_0 au point O sera tel que :

$$E_1 \approx 1,4 E'_0$$



Le petit calcul montre que la valeur du champ électrique engendrée par une ligne sur la surface d'une terre cylindrique est supérieure à celle engendrée par la même ligne sur la surface d'une terre plane. La ligne étant dans les deux cas à la même hauteur du point considéré pour les calculs.

Cette remarque peut être généralisée pour le cas d'une ligne triphasée réelle.

BIBLIOGRAPHIE .

- [1] - M. Aguet et M. Ionovici , Traité D'électricité , Tome XIII, Haute Tension , Ed. Georgi . 1981
- [2] - P. Lorrain et D.R. Corson , Champs et Ondes électro - magnétiques , Armand Colin - Collection U . Paris 1979 .
- [3] - Fred Gardiol , Traité d'électricité , volume III; Electromag - nétisme . Ed. Georgi . 1979
- [4] - B. Javorski et A. DeLaF , Aide mémoire de physique . Ed MIR Moscou. 1975
- [5] - A. Frühling , R. Dunstetter , C. Laurent , Problèmes d'électricité . Tome 7 , Dunod
- [6] - E. Kuffel et W.S Zaengl . High Voltage Engineering, Fundamentals . Pergamon Press . 1984
- [7] - E. Durand . Electrostatique , Tome II , Problèmes généraux , conducteurs. Masson et Cie .
- [8] - Mesures des Champs électriques à proximité des ouvrages à haute tension , Résultats et enseignements. Rapport CIGRE , session de 1978 , 30 août - 7 septembre n° 36 - 07 .
- [9] - H. singer , H Steinbigler , P. weiss . A charge simulation method for the calculation of high voltage fields. IEEE . TRANS . PAS 93 , 1974 .

