

10/03

République algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**Ecole Nationale Polytechnique**  
Département de Génie Civil  
Laboratoire de Génie Sismique et Dynamique des Structures  
(LGSDS)

*Thèse de Fin d'Etude*  
*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état*  
*en génie civil*

Analyse d'un pipeline sous l'action  
d'un mouvement de sol sismique  
permanent : approche stochastique

Proposé et dirigé par :  
M. B. Tilliouine  
M. M. Hammoutène

Etudié par :  
M. Badredine Bouhired

septembre 2003

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique



**Résumé :**

Des méthodes d'analyse de second ordre du problème de poutre sur appui élastique avec des paramètres aléatoires sont actuellement développées.

Le présent travail a pour objectif de présenter une méthode de calcul, par une approche simple, pour analyser l'importance des incertitudes du sol et du chargement sur la réponse d'un pipeline métallique soumis au mouvement de sol aléatoire et leur influence sur la conception et le calcul des structures.

La méthode des différences finies sera adoptée pour la résolution déterministe des équations différentielle.

*Mots clefs : aléatoire, différences finies, analyse du second ordre, pipeline (oléoduc), sismique, stochastique, sol, incertitudes.*

**Abstract :**

Methods for second moment analysis of beams on elastic foundation with random characteristics are currently developed.

The present piece of work aims to introduce a method of calculus, using a simple approach, to analyse the importance of soil uncertainties and loads, on the response of metal pipelines subjected to random soil motion. Their influence on structures conception and calculus is also investigated.

The finite differences method will be used to solve differential equations deterministically.

*Key words: random, finite differences, second moment analysis, pipeline, seismic, stochastic, soil, incertitude.*

### Dédicaces

Je ne saurais penser en premier lieu qu'à ma tendre mère source de tendresse, d'amour et de réconfort, celle avec qui tout à commencé et pour qui tout est dédié, mais aussi à la seconde moitié de ce bonheur que dieu m'a offert, à mon cher père, mon soutien et mon

Je pense aussi à mes sœurs Nacila et surtout Dénia, la benjamine, qui m'a toujours soutenu et qui n'a pu assister à ma soutenance. Elle nous manque beaucoup en ces instant. A mohamed mon grand frère et mon modèle. A toute ma famille, mes tantes bien aimées, tante Naïma, Fella et toutes les autres, à Soraya, Jaouida, le petit dernier Sid Ahmed Anis et à mes grands-mères Dieu les bénissent.

A mes amis avec qui je partage tout et sans qui je ne serai rien, avec qui je vie et pour qui je me dévoue, je ne les citerai pas, mais ils ne peuvent ne pas se reconnaître, car tout les jours que dieu fait, ils le savent, je me réjouis de penser qu'à jamais ma main à la leur sera liée. Merci à vous ma bande d'amis et mes deux amis !

Les morts comme les vivants restent dans mon cœur, c'est pour ça qu'à m'a regretté sœur Zakia s'en vont toutes mes pensées, à son âme éternelle je dédie tout mes bien fait et pour qui je garderai le souvenir le plus pur et le plus parfait.

A la patrie,  
Les sciences,  
Et la gloire.

## Remerciements



Louange à Dieu, seigneur de l'univers, le tout miséricordieux, maître du jour de la rétribution, lui seul nous prions et à lui seul demandons secours. Nous remercions Dieu qui nous a donné la santé, la force et le savoir pour accomplir cette tâche et finir ce travail.

Toute ma gratitude va vers les hommes et les femmes de science, bâtisseurs des rampes du savoir et guides de ceux qui ignorent vers la connaissance. A ceux qui nous ont éclairé le chemin et nous ont guidé, ceux pour qui il n'existe point de présent égale à leur dévouement et leur patience ni d'expression de gratitude assez juste pour leur rendre hommage.

Parmi ces hommes d'exception, je tiens à remercier mes promoteurs : le professeur Boualem Tilliouine le directeur du laboratoire qui m'a accueilli et le docteur Malek Hammoutène qui a accepté de m'encadrer. Je les remercie pour le temps qu'ils m'ont accordé, la patience qu'ils ont pu montrer, les précieux conseils qu'ils m'ont prodigué et l'effort qu'ils ont mis en œuvre pour que je puisse arriver à bout de ma recherche.

Tout les enseignants du département du génie civil, le chef du département et la totalité du personnel ont ma pleine gratitude et mes plus profonds sentiments de respect, je me permettrai toute fois de citer Mme A. Chikh qui pendant nos trois années a su être le centre autour duquel nous gravitons tous, qui nous a aidé à tout moment et qui n'a jamais ménagé force, temps et santé pour nous venir en aide.

A tout cela, merci.

# CALCUL STOCHASTIQUE D'UNE POUTRE SUR APPUI ELASTIQUE



## SOMMAIRE

### CHAPITRE I

#### Méthode des Différences Finies en Mécanique des Structures

1-1	Introduction	2
1-2	Principe de la méthode	2
1-3	Présentation des dérivées par les différences finies	3
1-3-1	Différences en arrière	4
1-3-2	Différences en avant	5
1-3-3	Différences au centre	6
1-4	Exemple d'approximation par différences finies	7
1-5	Conditions aux limites	9

### CHAPITRE II

#### Introduction à la théorie des probabilités

2-1	Introduction	11
2-2	Objet de la théorie des probabilités	11
2-3	Événement. Probabilité d'un événement	12
2-4	Variable aléatoire	12
2-5	Vecteur de probabilité	12
2-6	Vecteur aléatoire	13
2-7	Loi, suite et fonction de répartition d'une variable aléatoire	13
2-8	Densité de probabilité	13
2-9	Caractéristiques numériques des variables aléatoires. Leur rôle et leur désignation	14
2-9-1	Caractéristique de position : l'espérance mathématique	14
2-9-2	Variance. Ecart quadratique moyen	15
2-9-3	Covariance de deux variables aléatoires	16
2-10	Caractéristiques numériques d'un vecteur aléatoire	17
2-11	Somme et produit de deux variables aléatoires	18
2-12	Caractéristiques numériques des fonctions de variables aléatoires	19
2-12-1	Espérance mathématique. Variance	19
2-12-2	Linéarisation des fonctions aléatoires	20
2-12-3	Linéarisation d'une fonction d'un argument aléatoire	20
2-12-4	Linéarisation d'une fonction de plusieurs arguments aléatoires	22

### CHAPITRE III

#### Etude d'une poutre sur fondation élastique

3-1	Définition du problème	26
3-2	Description du problème	26
3-3	Solution générale de l'équation différentielle	28
3-4	Résolution par différences finies de l'équation différentielle	29
3-5	Conditions aux limites	31

CHAPITRE IV  
 Analyse du second ordre

4-1	Objet de l'approche stochastique	39
4-2	Analyse du second ordre du problème	39
4-3	Calcul des dérivées partielles	41
4-4	Matrice de covariance du vecteur déplacement	43

CHAPITRE V  
 Organisation générale du programme

5-1	Présentation du langage FORTRAN	45
5-2	Les instructions d'un programme FORTRAN	45
5-3	Programme de calcul stochastique d'une poutre sur appui élastique	46
5-3-1	Objectif	46
5-3-2	Description du programme	46
5-3-3	Dictionnaire des variables	47
5-3-4	Entrée des données	47
5-3-5	Programme principal et sous-programmes	48
5-4	Partie1 : programme de résolution par différence finies	49
5-4-1	Résolution	49
5-4-2	Organigramme	49
5-5	Partie2 : calcul des caractéristiques numériques du vecteur aléatoire $\underline{V}$	51
5-5-1	Résolution	51
5-5-2	Organigramme	51
5-6	Calcul des moments et efforts tranchant	53
5-7	Présentation des résultats et fichiers d'entrée-sortie	53

CHAPITRE VI  
 Application : effet des incertitudes sur le calcul  
 d'un pipeline en contexte aléatoire

6-1	Unités	55
6-2	Présentation de l'application	56
6-3	Description du problème	56
6-4	Définitions et propriétés	58
6-5	Schématisme du problème	58
6-6	Etude déterministe	60
6-7	Résolution par différences finies	60
6-8	Conditions aux limites	63
6-9	Résultats	67
6-10	Analyse du second ordre	70
6-11	Calcul des dérivées partielles	71
6-12	Matrices de covariances	73
6-13	Résultats	74
	Conclusion	76

## Chapitre 1 :

### METHODE DES DIFFERENCES FINIES EN MECANIQUE DES STRUCTURES

## 1.1 Introduction

En mécanique des structures, dans la résolution de nombreux problèmes, on est conduit à écrire des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. La solution de ces équations ne peut être obtenue directement que dans les cas simples lorsque la distribution des charges, les caractéristiques de la section et les conditions aux limites peuvent être représentées facilement par des expressions mathématiques. Si ces conditions deviennent complexes la résolution exacte peut parfois devenir impossible et les méthodes numériques sont alors les seuls moyens susceptibles d'être utilisés.

Pour résoudre des équations différentielles par les méthodes numériques, il est nécessaire d'exprimer les dérivées d'une fonction par l'expression des différences de cette fonction à des intervalles finis. A chaque *point pivot* des intervalles, on peut écrire une équation différentielle en fonction des différences finies. En tenant compte en même temps des conditions aux limites, on établit un système d'équations simultanées qui permet de résoudre numériquement la fonction aux *points pivots*. La technique des calculateurs n'implique pas de hautes connaissances mathématiques et peut être exécutée mécaniquement. Elle convient parfaitement aux calculateurs digitaux.

## 1.2 Principe de la méthode

La méthode des différences finies est couramment utilisée dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

Le domaine de variation continu des arguments est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds, appelé *réseau*. Les dérivées figurant dans l'équation différentielle et les conditions aux limites sont remplacées par des combinaisons linéaires de valeurs prises par la fonction en certains nœuds; le problème aux limites de l'équation différentielle se transforme en un système d'équations algébriques.

### 1.3 Présentation des dérivées par les différences finies

Les dérivées d'une fonction  $y(x)$  sont définies comme étant la variation de  $y$  ou de ses dérivées par rapport à  $x$  et elles sont représentées de la façon suivante :

Dérivée première :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Dérivée seconde :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \quad (1-1)$$

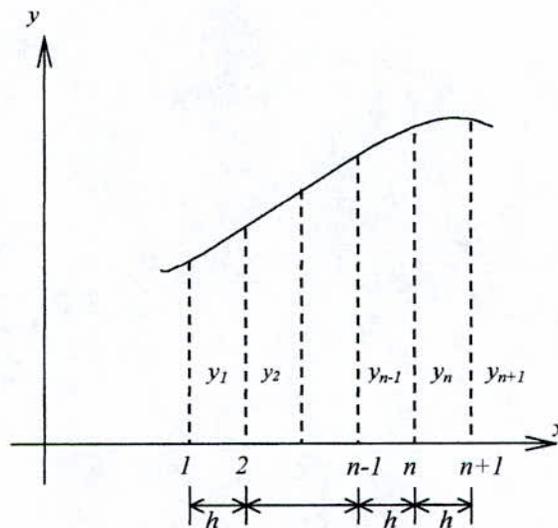


Fig. 1-1

Ainsi qu'on peut le voir sur la figure 1-1, quand  $\Delta x$  ne tend pas vers zéro mais a une valeur finie  $h$  les dérivées au point  $x = x_n$  sont représentées par des expressions en fonction de différences finies, soit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_n &= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \text{ ou } \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \\ \left( \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_n &= \frac{(y_{n+1} - y_n)/h - (y_n - y_{n-1})/h}{h} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (1-2)$$

Les différences d'ordre supérieur peuvent être déduites de la même façon. Le symbole  $\Delta$  utilisé dans ces expressions est appelé *opérateur de différence*. Ainsi la différence première  $\Delta y$  est  $y_n - y_{n-1}$  et la différence seconde  $\Delta^2 y$  est  $y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}$ . Les dérivées,  $dy/dx$ ,  $d^2y/dx^2$ , etc., sont représentées respectivement par les différences finies  $\Delta y$ ,  $\Delta^2 y$ , etc., divisées par  $h$ ,  $h^2$ , etc.

En utilisant différents groupes de points, nous pouvons exprimer les différences finies en un point de trois manières différentes :

**1.3.1 Différences en arrière.** Les points utilisés sont tous dans l'ordre décroissant par rapport au point considéré. Par exemple,

$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1} \quad \text{et} \quad \Delta^2 y_n = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

L'expression générale des différences est représentée sous forme d'un tableau que l'on peut voir en 1-1. Le côté gauche de ce tableau montre le processus schématique de réduction.

	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta y_n$	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$
$y_n$					+1	+1	+1	+1
$y_{n-1}$	$\Delta y_n$				-1	-2	-3	-4
$y_{n-2}$	$\Delta y_{n-1}$	$\Delta^2 y_n$				+1	+3	+6
$y_{n-3}$	$\Delta y_{n-2}$	$\Delta^2 y_{n-1}$	$\Delta^3 y_n$				-1	-4
$y_{n-4}$	$\Delta y_{n-3}$	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-1}$	$\Delta^4 y_n$				+1

Tableau 1-1 Différences en arrière

Par exemple,

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_n - \Delta y_{n-1}$$

est représentée par l'intersection en  $\Delta^2 y_n$  des deux lignes provenant de  $\Delta y_n$  et de  $\Delta y_{n-1}$  qui elles-mêmes sont l'intersection des lignes provenant respectivement de  $y_n$  et  $y_{n-1}$  d'une part, et de  $y_{n-1}$  et  $y_{n-2}$  d'autre part, ce qui montre que

$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$$

et

$$\Delta y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$$

Par conséquent,  $\Delta^2 y_n = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$ . Sur le côté droit de ce tableau les différences  $\Delta y_n$ ,  $\Delta^2 y_n$ , etc., sont exprimées par la sommation des produits des coefficients inscrits au-dessous de ces différences (surlignés en jaune) par les ordonnées correspondantes  $y_n$ ,  $y_{n-1}$ , etc. Ainsi

$$\Delta^4 y_n = y_n - 4 y_{n-1} + 6 y_{n-2} - 4 y_{n-3} + y_{n-4}$$

**1.3.2 Différences en avant.** On utilise les points situés dans l'ordre croissant par rapport au point considéré. La forme du tableau 1-2 obtenu est semblable à celle du tableau des différences en arrière.

	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta y_n$	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$
$y_n$	} $\Delta y_n$	} $\Delta^2 y_n$	} $\Delta^3 y_n$	} $\Delta^4 y_n$	-1	+1	-1	+1
$y_{n+1}$					} $\Delta y_{n+1}$	+1	-2	+3
$y_{n+2}$	} $\Delta y_{n+2}$					+1	-3	+6
$y_{n+3}$					} $\Delta y_{n+3}$	+1	-4	
$y_{n+4}$	+1							

Tableau 1-2 Différences en avant

**1.3.3 Différences au centre.** Les différences au centre utilisent les points situés symétriquement par rapport au point considéré. En 1–3 on en montre la disposition en tableau.

L'expression  $\Delta y_{n+3/2}$  indique la différence finie prise au point situé à mi-chemin entre les abscisses  $x = x_{n+1}$  et  $x = x_{n+2}$ .

En général, on peut constater que les coefficients des ordonnées  $y$  de la  $n$ ième différence finie sont les coefficients du développement du binôme  $(a - b)^n$  pour les différences en arrière ou en avant aussi bien que pour les différences au centre du même ordre. Les différences au centre d'ordre  $(n)$  impair sont déduites de la différence (avec un intervalle égal à  $2h$ ) de la différence d'ordre  $(n-1)$  des points  $y_{n+1}$  et  $y_{n-1}$ . Ainsi l'expression des différences finies du troisième ordre s'établit comme suit :

$$\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right)_n = \frac{(\Delta^2 y_{n+1})/h^2 - (\Delta^2 y_{n-1})/h^2}{2h} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{2h^3} \quad (1-3)$$

	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$2\Delta y_n$	$\Delta^2 y_n$	$2\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$
$y_{n+2}$	$\Delta y_{n+3/2}$	$\Delta^2 y_{n+1}$	$\Delta^3 y_{n+1/2}$	$\Delta^4 y_n$			+1	+1
$y_{n+1}$					+1	+1	-2	-4
$y_n$	$\Delta y_{n+1/2}$	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_{n-1/2}$		0	-2	0	+6
$y_{n-1}$	$\Delta y_{n-1/2}$	$\Delta^2 y_{n-1}$			-1	+1	+2	-4
$y_{n-2}$	$\Delta y_{n-3/2}$						-1	+1

Tableau 1–3 Différences au centre

### 1.4 Exemple d'approximation par différences finies [3]

Considérons le cas simple d'une poutre uniformément chargée.

Quand une partie est soumise à une charge répartie, les moments et les déformations peuvent s'exprimer par les équations différentielles

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \quad (1-4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{ou} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (1-5)$$

où,  $M$  est le moment de flexion positif quand la fibre supérieure est comprimée,  $q$  est l'intensité de la charge positive lorsqu'elle est dirigée vers le haut,  $y$  est la déformation positive lorsqu'elle se produit vers le haut,  $E$  est le module d'élasticité et où  $I$  est le moment d'inertie de la section de la poutre.

Ce sont des équations différentielles simples du deuxième et du quatrième ordre et elles peuvent être exprimées en un point particulier jouant le rôle de *pivot* en fonction de la différence au centre, soit

$$M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} = h^2 q_n \quad (1-6)$$

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = h^2 \frac{M_n}{I_n E} \quad (1-7)$$

Rappelons que le schéma de discrétisation du domaine se fait généralement de tel sorte que les nœuds extrêmes du réseau correspondent aux frontières du domaine considéré.

En utilisant en même temps les conditions aux limites, on peut établir un système d'équations linéaires simultanées dont le nombre est égal au nombre des variables inconnues.

Afin d'expliquer cette méthode, nous allons prendre l'exemple de la figure 1-2.

La poutre a une portée  $L$ . La charge dirigée vers le bas varie selon un triangle. Le maximum d'intensité de la charge est de  $q_0$  à l'extrémité droite.

Divisons la poutre en quatre parties ( $L = 4h$ ). Les contraintes aux limites sont données par  $M_0 = 0$  et  $M_4 = 0$

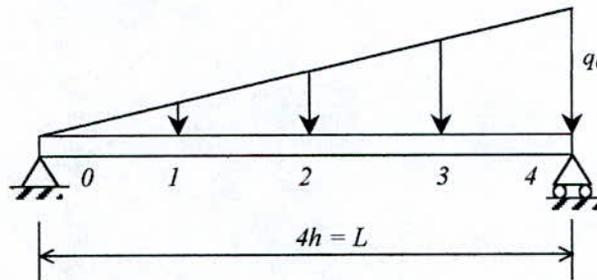


Fig.1-2

Ecrivons l'équation 1-6 pour chaque appuis interne, nous obtenons

$$0 - 2M_1 + M_2 = -h^2 \frac{q_0}{4}$$

$$M_1 - 2M_2 + M_3 = -h^2 \frac{q_0}{2}$$

$$M_2 - 2M_3 + 0 = -h^2 \frac{3q_0}{4}$$

La résolution de ces équations donne

$$M_1 = +0.625 q_0 h^2 \qquad M_1 = +0.0390 q_0 L^2$$

$$M_2 = +1.000 q_0 h^2 \qquad \text{ou,} \qquad M_2 = +0.0625 q_0 L^2$$

$$M_3 = +0.873 q_0 h^2 \qquad M_3 = +0.0546 q_0 L^2$$

Les déformations de la poutre sont obtenues en écrivant l'équation 1-7 des différences aux *points pivots*. Les déplacements aux limites sont  $y_0 = y_4 = 0$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} -2 y_1 + y_2 &= \frac{h^2}{EI} (0.625 q_0 h^2) \\ y_1 - 2 y_2 + y_3 &= \frac{h^2}{EI} (q_0 h^2) \\ y_2 - 2 y_3 &= \frac{h^2}{EI} (0.873 q_0 h^2) \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne

$$\begin{aligned} y_1 &= -1.187 \frac{q_0 h^4}{EI} = -0.00463 \frac{q_0 L^4}{EI} \\ y_2 &= -1.749 \frac{q_0 h^4}{EI} = -0.00683 \frac{q_0 L^4}{EI} \\ y_3 &= -1.311 \frac{q_0 h^4}{EI} = -0.00512 \frac{q_0 L^4}{EI} \end{aligned}$$

Les solutions exactes obtenues par la résolution des équations différentielles d'équilibre (Cf. Chapitre3, solution générale de l'équation différentielle) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} y_1 &= -0.00443 \frac{q_0 L^4}{EI} \\ y_2 &= -0.00652 \frac{q_0 L^4}{EI} \\ y_3 &= -0.00486 \frac{q_0 L^4}{EI} \end{aligned}$$

### 1.5 Conditions aux limites

Les efforts appliqués à un système mécanique peuvent souvent être exprimés sous forme différentielle. Ces équations sont sujettes à des conditions aux limites qui sont la valeur de la fonction  $y$  ou de ses dérivées aux points particuliers (frontière). Ce sont en réalité les contraintes physiques qui délimitent le phénomène. Les nœuds qui se trouvent sur les frontières du domaine font appel à des points fictifs dont le déplacement peut être connu en faisant développer la condition d'appui.

Nous exposerons ultérieurement en détail les différents systèmes d'appuis possibles.

## **Chapitre 2 :**

### **INTRODUCTION A LA THEORIE DES PROBABILITES**

## **2.1 Introduction**

Dans ce qui suit nous allons rappeler d'une manière succincte quelques notions de la théorie des probabilités. En effet, nous avons trouvé judicieux de réunir dans un même document théorie des probabilités et éléments de calcul de structure traditionnel, ceci est dû au manque d'ouvrages, que nous avons nous même trouvé, qui souvent dissocient génie civil et probabilité. Ainsi, à travers une quinzaine de pages, nous retrouverons les définitions et règles de calcul essentielles et fondamentales du calcul stochastique.

## **2.2 Objet de la théorie des probabilités**

La théorie des probabilités est une science mathématique étudiant les lois régissant les phénomènes aléatoires. On dit qu'un phénomène est *aléatoire* si, produit maintes fois, il se déroule chaque fois un peu différemment, de sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois à l'autre d'une manière aléatoire, imprévisible.

L'exemple classique et illustratif de phénomène aléatoire est celui qui consiste à jeter un dé (un dé à six faces portant entre un et six points). Le résultat de l'expérience est le nombre de points amenés par le dé. En répétant l'expérience plusieurs fois, tout en maintenant constantes les conditions essentielles, on verra son résultat changer d'une manière aléatoire, imprévisible.

Il est évident qu'il n'existe pas, dans la nature, d'effet physique libre de tout hasard. Quelque exactes et identiques que soient les conditions de l'expérience, il est impossible de faire de telle sorte que les résultats coïncident exactement et entièrement.

Tout phénomène déterministe est inévitablement accompagné d'écarts aléatoires.

La méthode probabiliste d'étude ne s'oppose pas à la méthode classique, mais la complète, permettant d'analyser plus en détail le phénomène, compte tenu du hasard.

Cette étude permet non seulement de faire des prévisions scientifiques dans un domaine très particulier de phénomènes, mais également de diriger le cours des processus aléatoires, de les contrôler, de limiter le champ d'action du hasard, de réduire son influence pratique.

### 2.3 Evénement. Probabilité d'un événement

En théorie des probabilités on entend par *événement* tout fait pouvant être réalisé ou ne pas être réalisé par une expérience. On peut citer quelques exemples d'événements tel que l'apparition de face lorsqu'on jette une pièce de monnaie, le tirage d'un as dans un jeu de cartes ou encore l'obtention de la bonne combinaison à six chiffres dans le loto.

Il est évident que pour comparer quantitativement entre eux les événements suivant leur possibilité de réalisation, il faut associer à chaque événement un certain nombre qui est d'autant plus grand que la possibilité de réalisation est plus élevée et que nous appellerons *probabilité de l'événement*. La probabilité d'un événement est la mesure numérique de la possibilité effective de cet événement.

Notons qu'une probabilité est toujours positive ou nulle et que la somme de toutes les probabilités possibles d'un événement est égale à l'unité.

### 2.4 Variable aléatoire

Une des notions fondamentales de la théorie des probabilités est celle de la variable aléatoire.

On appelle *variable aléatoire* une grandeur qui peut dans l'expérience prendre l'une quelconque des valeurs possibles, inconnue d'avance.

Des variables aléatoires prenant des valeurs discrètes, pouvant être énumérées, sont dites *discrètes* ou *discontinues*.

Il existe également des variables aléatoires d'un autre type, par exemple l'abscisse d'un point qui se déplaçant le long de l'axe des abscisses d'une façon aléatoire. Les valeurs éventuelles de ces variables aléatoires ne sont pas séparées les unes des autres ; elles remplissent d'une manière continue un certain intervalle qui parfois a des limites très nettes. Ce type de variables aléatoires sont dites *continues*.

### 2.5 Vecteur de probabilité

Soit une variable aléatoire finie  $X$  (le domaine de variation de  $X$  est discret et fini) définie sur l'espace fondamentale  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

On associe à la variable aléatoire  $X$  un vecteur noté  $\underline{P}_X$  dont les  $n$  éléments  $P_{x_i}$  sont respectivement les probabilités des événements  $x_i$ . Ce vecteur est appelé *vecteur de probabilité* associé à la variable aléatoire  $X$ .

Il est clair que toutes les composantes d'un vecteur de probabilité sont positives ou nulles et que leur somme est égale à 1.

## 2.6 Vecteur aléatoire

Soit un vecteur à  $n$  composantes:  $\underline{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . On dit que  $u$  est un *vecteur aléatoire* si ses composantes sont des variables aléatoires et de même nature(\*).

## 2.7 Loi, suite et fonction de répartition d'une variable aléatoire

On appelle *loi de répartition* d'une variable aléatoire toute relation établissant une correspondance entre les valeurs possibles de cette variable aléatoire et leurs probabilités. On dira alors que la variable aléatoire *suit* la loi de répartition en question.

On peut donner la loi de répartition d'une variable aléatoire discrète  $X$  sous la forme simple d'un tableau où se trouvent inscrites les valeurs possibles de  $X$  et les probabilités correspondantes :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Nous appellerons ce tableau *suite de répartition* de  $X$ .

Pour une variable aléatoire continue dont les valeurs possibles constituent un ensemble dit non dénombrable, on définit une fonction  $F(x)$  qui donne en tout point  $x$  de cet ensemble la probabilité de l'événement  $X < x$  (chaque valeur particulière de la variable aléatoire continue n'a pas de probabilité différente de zéro). Cette fonction est appelée *fonction de répartition* de la variable aléatoire  $X$ .

La fonction de répartition se trouve être une des formes de la loi de répartition. Elle est la caractéristique la plus universelle d'une variable aléatoire.

## 2.8 Densité de probabilité

Pour une variable aléatoire continue  $X$  dont la fonction de répartition est  $F(x)$  on définit une fonction  $f(x)$  dérivée de  $F(x)$  :

$$f(x) = F'(x)$$

La fonction  $f(x)$  caractérise la densité de la répartition des valeurs de la variable aléatoire en un point donné. Cette fonction est appelée *densité de probabilité* de la variable aléatoire continue  $X$ . La densité de probabilité tout comme la fonction de répartition est une des formes de la loi de répartition. Cette forme n'est cependant pas universelle, car elle n'a de sens que pour des variables aléatoires continues.

(\*) Deux variables aléatoires sont dites de même nature si elles sont définies sur le même ensemble fondamental.

## 2.9 Caractéristiques numériques des variables aléatoires

### Leur rôle et leur désignation

On a précédemment défini un certain nombre de caractéristiques des variables aléatoires appelées lois de répartition (fonction de répartition, tableau ou suite, densité, ... etc.). Cependant dans de nombreuses applications pratiques on n'a pas besoin d'une caractéristique aussi complète qu'est la loi de répartition. Souvent il suffit d'indiquer seulement certains paramètres numériques caractérisant dans une certaine mesure les traits essentiels de la répartition étudiée : par exemple une valeur moyenne autour de laquelle se trouvent groupées les valeurs éventuelles de la variable aléatoire; un nombre quelconque caractérisant la dispersion de ces valeurs autour de la valeur moyenne, etc. En utilisant ces caractéristiques qu'on appelle *numériques*, on peut exprimer toutes les connaissances dont on dispose sur la variable aléatoire étudiée d'une manière plus compacte, à l'aide d'un nombre minimal de paramètres numériques. Les caractéristiques numériques et les manipulations qu'on peut effectuer sur elles jouent un rôle de premier plan en théorie des probabilités.

### 2.9.1 Caractéristique de position : l'espérance mathématique

Parmi les caractéristiques numériques des variables aléatoires il faut tout d'abord distinguer celles qui caractérisent la position de la variable aléatoire sur l'axe numérique, c'est-à-dire celles qui indiquent une certaine valeur moyenne, approchée, autour de laquelle se trouvent groupées toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire étudiée. La valeur moyenne d'une variable aléatoire appelée aussi *espérance mathématique* est un certain nombre en quelque sorte représentatif de cette variable et pouvant la remplacer dans les calculs approchés.

Soit la variable aléatoire discrète  $X$  qui prend les valeurs possibles  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avec les probabilités respectives  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . L'espérance mathématique notée  $m_x$  ou encore  $E(X)$  est la moyenne arithmétique pondérée des valeurs  $x_i$ , les poids étant pris proportionnels aux probabilités de ces valeurs [7]

$$m_x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

$$\text{Compte tenu de } \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (2-1)$$

Pour une variable aléatoire continue le signe somme est remplacé par une intégrale.

Nous présenterons en détail quelques propriétés relatives à la notion d'espérance mathématique pour des opérations sur des variables aléatoires ultérieurement. On peut cependant énoncer deux caractéristiques fondamentales : soit  $X, Y$  deux variables aléatoires définies sur le même ensemble fondamental et  $k$  un nombre réel :

$$E(X + k) = E(X) + k$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Ainsi,

(2-2)

$$E(\sum a_i X_i + b) = \sum(a_i E(X_i) + b)$$

### 2.9.2 Variance. Ecart quadratique moyen

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire  $X$  mesure, dans un certain sens, la valeur «moyenne» de  $X$ . Le concept suivant qui est celui de la *variance* de  $X$ , mesure «l'étendue» ou «la dispersion» de  $X$ .

Avant de donner la définition de la variance introduisant tout d'abord la notion de variable aléatoire centrée.

Soit une variable aléatoire  $X$  d'espérance mathématique  $m_x$ . On appelle variable aléatoire centrée associée à  $X$  et on note  $X_0$  la différence :

$$X_0 = X - m_x$$

Il est facile de voir que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire centrée est nulle.

On appelle variance de la variable aléatoire  $X$  notée  $\text{Var}(X)$  l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire centrée associée, ainsi

$$\text{Var}(X) = E[(X_0)^2] = E[(X - m_x)^2]$$

$$\text{Ou, } \text{Var}(X) = E(X^2) - m_x^2 \quad (*) \quad (2-3)$$

La variance a la dimension du carré de la variable aléatoire. Pour mieux caractériser la dispersion, plus commode est d'utiliser une grandeur dont la dimension est celle de la variable aléatoire. A cet effet, on prend la racine carrée de la variance. La grandeur ainsi obtenue est appelée *écart quadratique moyen* de  $X$  ou *écart type* de  $X$ .

(\*) La démonstration de ce résultat peut être obtenue en développant le binôme  $(x - m_x)^2$  et en utilisant les propriétés données en (2-2)

On désigne l'écart type par  $\sigma(X)$  :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (2-4)$$

Pour simplifier l'écriture on utilise souvent la désignation abrégée  $\sigma_x$ .

On établit maintenant quelques propriétés de la variance [8] :

$$\text{Var}(X + k) = \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(kX) = k^2 \text{Var}(X)$$

D'où, (2-5)

$$\sigma_{x+k} = \sigma_x \text{ et } \sigma_{kx} = |k| \sigma_x$$

On définit enfin la variable aléatoire centrée-réduite associée à  $X$  et notée  $X^*$  par :

$$X^* = \frac{X - m_x}{\sigma_x} = \frac{X - m_x}{\sigma_x}$$

On peut montrer que :  $E(X^*) = 0$  et  $\text{Var}(X^*) = 1$

### 2.9.3 Covariance de deux variables aléatoires

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires.  $X_0$  et  $Y_0$  les variables aléatoires centrées associées.

On définit la covariance de  $X$  et  $Y$ , que l'on écrit  $\text{Cov}(X, Y)$ , par

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X_0 Y_0) = E(XY) - m_x m_y \quad (2-6)$$

On utilisera par commodité la notation  $\sigma_{x, y}$  pour la covariance de  $X$  et  $Y$ .

Notons qu'en fait, pour un système de variables aléatoires, la variance de chaque variable aléatoire  $X$  n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la covariance, à savoir la covariance de la variable  $X$  et de la même variable  $X$ , ainsi

$$\text{Cov}(X, X) = \sigma_{x, x} = \sigma_x^2 \quad (2-7)$$

La covariance est une caractéristique du système décrivant, en plus de la dispersion des variables  $X$  et  $Y$ , leur *liaison*. On dira que deux variables aléatoires sont indépendantes si leur covariance est nulle, ainsi un vecteur aléatoire est dit *système de variables indépendantes* si ses composantes aléatoires sont deux à deux indépendantes.

Pour un système ou vecteur de variables aléatoires  $\underline{V} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  on définira la *matrice de covariance* associée notée  $\underline{\Sigma}(\underline{V})$  dont les éléments  $\sigma(i,j)$  sont:

$$\sigma(i,j) = \sigma_{x_i,x_j} = \text{Cov}(X_i,X_j) \quad i \neq j \quad (2-8)$$

$$\sigma(i,i) = \sigma_{x_i,x_i} = \text{Var}(X_i) \quad i = j$$

C'est une matrice de dimension  $n \times n$  symétrique. Dans la diagonale on trouve les variances des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Dans le cas des variables indépendantes, tous les éléments de la matrice de covariance sauf ceux de la diagonale sont nuls.

On définit aussi une grandeur sans dimension liée à la covariance de deux variables aléatoires, c'est le *coefficient de corrélation* noté  $\rho_{xy}$

$$\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2-9)$$

On dira ainsi que deux variables aléatoires sont parfaitement corrélées si leur coefficient de corrélation est égale à 1.

### 2.10 Caractéristiques numériques d'un vecteur aléatoire

Dans beaucoup de cas pratique il y a lieu d'utiliser une description approchée d'un système de variables aléatoires, ceci à l'aide d'un nombre restreint de caractéristiques numériques.

Enumérons ce minimum de caractéristiques permettant de décrire un vecteur aléatoire  $\underline{X}$  de  $n$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  [8] :

1. Un vecteur constant de  $n$  composantes noté  $\underline{m}_x$

$$\underline{m}_x = \{m_{x1}, m_{x2}, \dots, m_{xn}\}$$

caractérisant les valeurs moyennes ou espérances mathématiques du vecteur aléatoire ;

2.  $n$  variances représentées par le vecteur  $\underline{\sigma}_x$

$$\underline{\sigma}_x = \{\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \dots, \sigma_{xn}\}$$

caractérisant la dispersion;

3.  $n(n - 1)$  covariances

$$\sigma_{xi,xj} = E(X_{0i}X_{0j}) \quad i \neq j$$

représentées par une matrice de  $n(n - 1) + n$  éléments ( $n$  variances définies par  $\sigma_x$ )

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1,x2} & \cdots & \sigma_{x1,xn} \\ \sigma_{x2,x1} & \sigma_{x2}^2 & \cdots & \sigma_{x2,xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{xn,x1} & \sigma_{xn,x2} & \cdots & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Introduisant enfin la notion de vecteurs *non corrélés* de variables aléatoires :

$$\underline{V} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}; \quad \underline{U} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$$

On dit que les vecteurs aléatoires  $\underline{V}$  et  $\underline{U}$  *ne sont pas corrélés* si aucune des composantes du vecteur  $\underline{V}$  n'est corrélée avec aucune des composantes du vecteur  $\underline{U}$  :

$$\sigma_{xi,yj} = E(X_{0i}Y_{0j}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n$$

### 2.11 Somme et produit de deux variables aléatoires

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires complètement définies (espérance mathématique, variance et covariance).

Nous allons énoncer sans le démontrer les caractéristiques essentielles de la somme et du produit de deux variables aléatoires en fonction de leurs caractéristiques propres [8].

Ainsi,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X * Y) = E(X) * E(Y)$$

(2-11)

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}(X * Y) = \text{Var}(X) * \text{Var}(Y) + m_x^2 \text{Var}(Y) + m_y^2 \text{Var}(X)$$

Notons que pour un système de variables aléatoires indépendantes ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) la variance de la somme devient:

$$\text{Var}(\sum X_i) = \sum \text{Var}(X_i), \quad (2-12)$$

Ceci découle du fait que les covariances sont nulles.

## 2.12 Caractéristiques numériques des fonctions de variables aléatoires

Pour résoudre différents problèmes liés aux phénomènes aléatoires la théorie moderne des probabilités fait appel aux lois des variables aléatoires, qu'il importe de connaître. On pourrait déterminer ces lois expérimentalement, mais en général les expériences visant à retrouver la loi de répartition d'une variable ou d'un système de variables aléatoires (surtout dans le domaine militaire) sont compliquées et coûteuses. Le problème qui se pose tout naturellement est de réduire au minimum le volume des expériences et d'essayer de se faire une idée des lois inconnues en se basant sur les lois connues d'autres variables aléatoires. On procède par des méthodes indirectes, qui jouent un rôle particulièrement important dans la théorie des probabilités. En général la variable dont on s'intéresse est une fonction d'autres variables aléatoires; connaissant la loi de répartition des arguments on arrive souvent à trouver la loi de la fonction [7].

Souvent dans la pratique on n'a pas besoin de déterminer complètement la loi de répartition d'une fonction des variables aléatoires, on peut se contenter à quelques caractéristiques numériques: il suffit de connaître l'espérance mathématique, la variance et parfois la corrélation existante. Il arrive souvent que les lois mêmes des arguments ne sont connues que très approximativement. Il s'agit alors de déterminer seulement les caractéristiques numériques des fonctions de variables aléatoires.

Examinons le problème suivant :

Soit  $Y$  une fonction des plusieurs variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Supposons connue la loi de répartition du système d'arguments  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , trouver les caractéristiques numériques de  $Y$ .

### 2.12.1 Espérance mathématique. Variance

Si l'on a pu déterminer la loi de répartition  $g(y)$  de  $Y$ , il est facile de trouver les caractéristiques numériques ; celles-ci sont données par les formules 2-1 et 2-3 par exemple.

Cependant il est souvent difficile de trouver la loi de répartition  $g(y)$  de  $Y$ . Dans beaucoup de cas pour trouver les caractéristiques numériques d'une fonction aléatoire il n'est même pas nécessaire de connaître la loi de répartition des arguments, les caractéristiques numériques suffisent.

### 2.12.2 Linéarisation des fonctions aléatoires

Dans la pratique on rencontre souvent des cas où la fonction étudiée des variables aléatoires bien que non strictement linéaire, diffère peu d'une fonction linéaire et peut dans certains problèmes être remplacée par une fonction linéaire.

En effet, on sait que toute fonction continue dérivable, dans un domaine assez restreint de variation des arguments, peut approximativement être remplacée par une fonction linéaire (on dit que cette fonction est linéarisée). L'erreur apparaissant alors est d'autant plus petite que sont étroites les limites de variation des arguments et que la fonction est voisine de la loi linéaire. On pourra ainsi appliquer à cette fonction les outils de calcul des caractéristiques numériques élaborés pour les fonctions linéaires (Cf. 2-2, 2-5).

Connaissant les caractéristiques numériques des arguments on peut alors trouver les caractéristiques numériques des fonctions. Evidemment, on aura alors une solution approchée du problème, mais dans la majorité des cas, on n'a pas besoin de solution exactes mais d'une valeur moyenne.

### 2.12.3 Linéarisation d'une fonction d'un argument aléatoire

Dans la pratique il est rare qu'il y ait lieu de linéariser une fonction d'un seul argument aléatoire, en général, on est obligé de tenir compte de l'influence d'un ensemble de facteurs aléatoires. Cependant, du point de vue méthodique, il est commode de commencer par ce cas le plus simple.

Soit la variable aléatoire  $X$  dont on connaît les caractéristiques numériques : l'espérance mathématique  $m_x$  et la variance  $\sigma_x^2$ .

Supposons que les valeurs possibles de  $X$  se situent entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

Soit maintenant une autre variable aléatoire  $Y$ , liée à  $X$  par la relation fonctionnelle

$$Y = \varphi(X) \quad (*)$$

La fonction  $\varphi$ , bien que non linéaire, diffère peu d'une fonction linéaire sur le segment  $[\alpha, \beta]$  ( voir figure 2-1).

Il y a lieu de trouver les caractéristiques numériques de  $Y$ , à savoir son espérance mathématique  $m_y$  et sa variance  $\sigma_y^2$ .

(\*) on suppose que sur le segment  $[\alpha, \beta]$  la fonction  $y$  est continue et dérivable

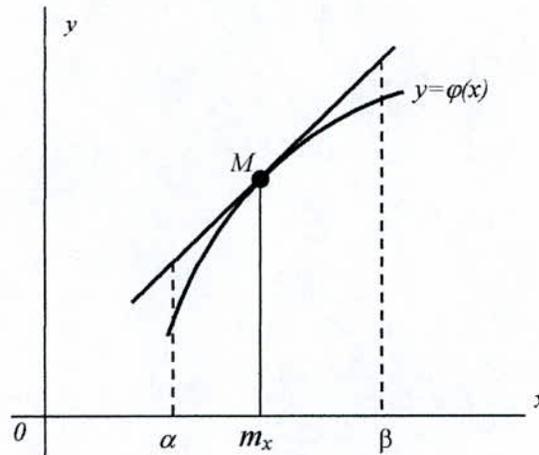


Fig. 2-1

Considérons la courbe  $y = \varphi(x)$  dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  (figure 2-1) et remplaçons-la par la tangente au point  $M$  d'abscisse  $m_x$ . Cette tangente a pour équation :

$$y = \varphi(m_x) + \varphi'(m_x) (x - m_x) \quad (2-13)$$

Supposons que l'intervalle des valeurs possibles de l'argument  $[\alpha, \beta]$  soit suffisamment étroit pour que la courbe et la tangente diffèrent peu. On peut alors remplacer la courbe pratiquement par un segment de tangente ; dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  la fonction  $Y = \varphi(x)$  se trouve être presque linéaire [8].

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont approximativement liées par la relation linéaire

$$Y = \varphi(m_x) + \varphi'(m_x) (X - m_x) \quad (2-14)$$

Ou en introduisant la désignation  $X - m_x = X_0$

$$Y = \varphi(m_x) + \varphi'(m_x) X_0 \quad (2-15)$$

On peut appliquer à la fonction linéaire (2-15) les méthodes connues de recherche des caractéristiques numériques des fonctions linéaires (voir 2-2, 2-5).

Pour trouver l'espérance mathématique de cette fonction linéaire il y a lieu de substituer dans son expression (2-15) l'espérance mathématique de  $X_0$  égale à zéro. On obtient:

$$m_y = \varphi(m_x) \quad (2-16)$$

La variance de  $Y$  est donnée par la formule

$$\text{Var}(Y) = [\varphi'(m_x)]^2 \text{Var}(X) \quad (2-17)$$

En passant à l'écart type quadratique moyen, on a :

$$\sigma_y = |\varphi'(m_x)| \sigma_x \quad (2-18)$$

Les formules (2-16, 17 et 18) sont évidemment approchées car le fait de remplacer une fonction non linéaire par une fonction linéaire est déjà une approximation. Pour de meilleurs résultats on peut appliquer une méthode plus précise, à savoir le développement de  $\varphi$  en série de Taylor au voisinage du point  $m_x$ , en ne conservant dans le développement que les trois premiers termes par exemple (ou faire un développement d'ordre supérieur si nécessaire).

Nous avons ainsi résolu le problème posé et nous sommes arrivés aux conclusions suivantes.

Pour trouver l'espérance mathématique d'une fonction presque linéaire il faut remplacer, dans l'expression de la fonction, l'argument par son espérance mathématique. Pour trouver la variance d'une fonction presque linéaire il faut multiplier la variance de l'argument par le carré de la dérivée au point correspondant à l'espérance mathématique donnée de l'argument.

#### 2.12.4 Linéarisation d'une fonction de plusieurs arguments aléatoires

Soit un système de  $n$  variables aléatoires :

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

et soient données les caractéristiques numériques du système, à savoir les espérances mathématiques :

$$(m_{x1}, m_{x2}, \dots, m_{xn})$$

et la matrice de covariance :

$$\text{Cov}(i,j) = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1,x2} & \dots & \sigma_{x1,xn} \\ \sigma_{x2,x1} & \sigma_{x2}^2 & \dots & \sigma_{x2,xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{xn,x1} & \sigma_{xn,x2} & \dots & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

la variable aléatoire  $Y$  est une fonction des arguments  $X_1, X_2, \dots, X_n$  :

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2-20)$$

La fonction  $\varphi$  n'est pas linéaire, mais diffère peu d'une fonction linéaire dans le domaine des valeurs possibles de tous les arguments, c'est-à-dire, c'est une fonction presque linéaire. Il y a lieu de trouver les caractéristiques numériques de  $Y$ , donc l'espérance mathématique  $m_y$  et la variance  $\sigma_y^2$ .

Pour résoudre ce problème on propose de linéariser la fonction :

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-21)$$

On ne peut pas donner ici l'interprétation géométrique car au-delà de l'espace tridimensionnel elle n'est plus figurative. Cependant qualitativement tout est analogue au cas étudié au paragraphe précédent.

Considérons la fonction  $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  au voisinage immédiat du point  $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$ . La fonction au voisinage de ce point étant presque linéaire, elle peut être approximativement remplacée par une fonction linéaire.

Ceci équivaut à ne conserver dans son développement en série de Taylor au voisinage du point  $(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})$  que les termes du premier ordre et à négliger les autres termes [8]:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i}(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})(x_i - m_{x_i})$$

Ceci signifie que la relation 2-20 entre les variables aléatoires peut être remplacée par une relation linéaire :

$$Y \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i}(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})(X_i - m_{x_i}) \quad (2-22)$$

Pour simplifier introduisons les désignations :

$$\varphi'_{x_i}(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m$$

Comme  $X_i - m_{x_i} = \overset{0}{X}_i$  la formule 2-22 s'écrit comme suit:

$$Y = \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m X_{0i} \quad (2-23)$$

On peut appliquer à la fonction linéaire 2-23 les méthodes de calcul des caractéristiques numériques des fonctions linéaires établies en 2-11-3. Les arguments centrés  $(X_{0_1}, X_{0_2}, \dots, X_{0_n})$  ayant des espérances mathématiques nulles et la même matrice de covariance, on a [8] :

$$m_y = \varphi (m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) \quad (2-24)$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \right)_m^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \right)_m \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_j} \right)_m \sigma_{x_i, x_j} \quad (2-25)$$

En passant dans la dernière formule des variances aux écarts quadratiques moyens on obtient :

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \right)_m^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \right)_m \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_j} \right)_m \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \quad (2-26)$$

où  $\rho_{ij}$  est le coefficient de corrélation des grandeurs  $X_i, X_j$ .

La formule 2-26 est particulièrement simple lorsque les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ne sont pas corrélées, c'est-à-dire lorsque  $\rho_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ . Dans ce cas:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \right)_m^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (2-27)$$

Ainsi, et à partir de ces éléments de base de la théorie des probabilités on peut développer d'autres relations ou applications selon le cas qu'on traite, le principe restant le même.

## **Chapitre 3 :**

### **ETUDE D'UNE POUTRE SUR FONDATION ELASTIQUE**

La méthode des différences finies peut être appliquée à l'analyse du second ordre du problème de poutre sur appui élastique avec des caractéristiques aléatoires. Cette méthode est plus simple dans ce cas que la méthode stochastique des éléments finis car celle-ci ne nécessite que des valeurs *ponctuelles* des paramètres aléatoires et non pas des valeurs spatiales de ces paramètres comme c'est le cas dans l'étude par éléments finis. On pourra par la suite voir une intéressante application de la méthode des différences finies dans l'analyse d'un oléoduc d'acier, plus souvent appelé pipe-line, soumis à un déplacement permanent du sol.

### 3.1 Définition du problème

Des approximations sont actuellement développées pour la description du second ordre de la réponse des poutres sur appuis élastiques. Nous établirons l'hypothèse que la poutre et la fondation dépendent simultanément de paramètres aléatoires. L'étude est basée sur la généralisation de la méthode des différences finies qui tient compte des incertitudes sur les caractéristiques de l'élément et les charges qui lui sont soumises.

Cette méthodologie sera appliquée notamment à l'étude d'un pipe-line enfouit dans le sol soumis au mouvement continu des tremblements de terre.

Cependant, dans ce qui suit de l'étude stochastique du phénomène on ne tiendra pas compte de la variabilité et des incertitudes sur les caractéristiques mécaniques de la structure de l'élément.

### 3.2 Description du problème

La figure 3-1 schématise la déformation hypothétique d'une poutre sur une fondation élastique soumise à un chargement uniforme ainsi que la réponse de cette dernière. La fonction de déplacement ou flèche de la poutre  $y(x)$  satisfait l'équation différentielle d'équilibre.

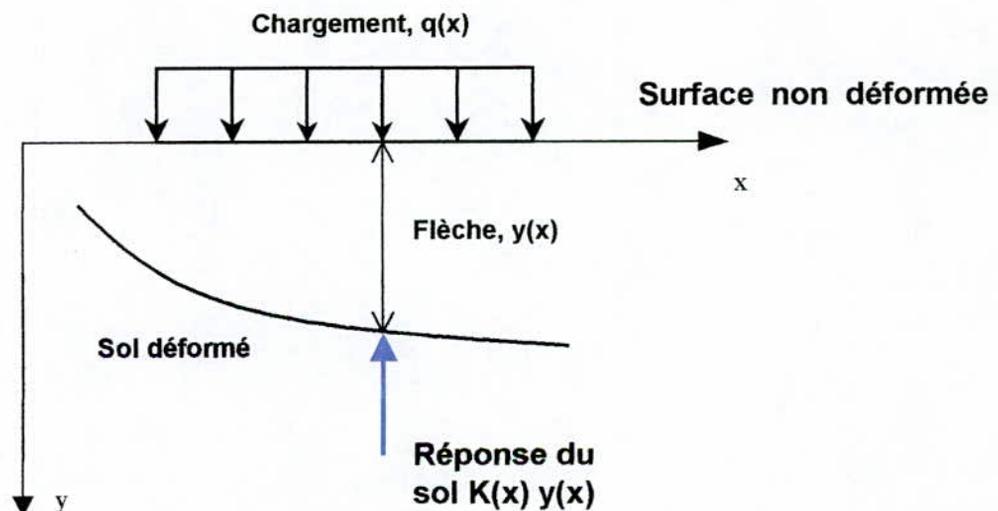


Fig. 3-1

Equation d'équilibre :

Pour une poutre reposant sur une fondation élastique, l'équation différentielle fondamentale est la suivante [4] :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -k y + q \quad \text{pour } l \text{ constant} \quad (3-1)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = -k y + q \quad \text{pour } l \text{ variable}$$

Pour  $k, q$  variables et  $EI$  constant on obtient :

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + \frac{K(x)}{EI} y(x) = \frac{Q(x)}{EI} \quad (3-2)$$

Où  $y$  est la déformation de la poutre,  $K(x)$  est le module de la fondation en  $x$  exprimé comme une force de réaction par unité de longueur de poutre pour une déformation égale à l'unité et où  $Q(x)$  est l'intensité de la charge répartie par unité de longueur.  $E$  et  $I$  sont respectivement le module d'élasticité et le moment d'inertie.

Néanmoins, nous supposons que la rigidité  $EI$  ne varie pas avec  $x$ .

L'équation 3-2 est déduite de l'équation 3-1 de la poutre classique.

La première dérivée de  $y(x)$

$$\theta(x) = -EI \frac{dy(x)}{dx} \quad (3-3)$$

exprime la rotation autour de l'abscisse  $x$  ; les dérivées d'ordre supérieur de cette fonction définissent le moment de flexion,  $M(x)$ , et l'effort tranchant,  $T(x)$ , selon les équations

$$M(x) = -EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (3-4)$$

$$T(x) = -EI \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \quad (3-5)$$

On considérera les fonctions  $K, EI,$  et  $Q$  comme des quantités aléatoires.  $EI$  est indépendante de l'abscisse  $x$ , cependant  $K$  et  $Q$  varient généralement avec ce paramètre. Il résulte que la fonction  $y(x)$  et ses dérivées dans 3-4 et 3-5 sont aussi des fonctions aléatoire de  $x$ .

On abordera dans un premier temps le problème d'un point de vu déterministe où les variables aléatoires  $K, EI$  et  $Q$  entrant dans l'équation différentielle ont une valeur

constante celle de leur moyenne. La résolution donnera donc les valeurs moyennes des déplacements  $y$ .

Par suite, on développera une méthode approximative pour la détermination des moyennes et covariances des déplacements, rotations, moments de flexion et des efforts tranchants.

### 3.3 Solution générale de l'équation différentielle

Soit une poutre reposant sur un sol élastique, de longueur  $L$ , de section  $b \times h$ , et de module

d'élasticité  $E$  (l'inertie est  $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ ).

Le calcul de ces poutres est basé sur l'hypothèse de WINKLER suivant laquelle les réactions du sol sont proportionnelles aux affaissements.

La solution du problème de la poutre sur sol élastique ne peut être obtenue à l'aide des équations d'équilibre. On choisira comme origine des coordonnées un point quelconque de la poutre, l'axe des abscisses sera orienté de gauche à droite et l'axe des ordonnées de bas en haut. Les réactions et toute autre force seront considérées comme positives quand elles seront dirigées de bas en haut.

L'équation d'équilibre s'écrit généralement :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -k y + q$$

Où  $q$  est la charge répartie et  $-ky$  la valeur de la réaction.

Le signe (-) dont sont affectées les réactions est nécessaire, car aux valeurs positives de ces dernières correspondent des valeurs négatives des affaissements.

On introduit la notation :  $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$

La solution générale de l'équation différentielle d'équilibre est de la forme :

$$y = e^{+\beta x} (A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)) + e^{-\beta x} (C \cdot \sin(\beta x) + D \cdot \cos(\beta x))$$

Les valeurs des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  devront être déterminées pour chaque cas particulier selon les conditions aux limites du problème.

Pour le cas de la poutre infinie soumise à une seule force par exemple, les conditions sont : une rotation nulle au point d'application de la force (en raison de la symétrie) et un déplacement nul lorsque  $x$  tend vers l'infini.

### 3.4 Résolution par différences finies de l'équation différentielle

Considérons un ensemble de  $n$  nœuds équidistants  $x_i$  le long d'une poutre tel que le premier et le dernier point correspondent aux extrémités du domaine (réseau ou maillage).

Soit  $y_i = y(x_i)$   $i = 1, \dots, n$  la flèche au nœud (i). Selon le principe de la méthode des différences finies, l'équation 3-2 peut être discrétisée en un point pivot (i) de la manière suivante :

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} (-Ky_i + Q_i) \quad (3-6)$$

est l'expression de l'équation différentielle d'ordre 4 selon un schéma au centre donc 3-6 s'écrit,

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + \left(6 + \frac{h^4 K}{EI}\right) y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = + \frac{h^4}{EI} Q_i \quad (3-7)$$

où  $h$  (constant) est le pas de discrétisation choisi de telle sorte qu'il soit assez petit pour que la méthode converge et assez grand pour impliquer un nombre raisonnable de points pivots dont l'appréciation et la manipulation par l'ingénieur est possible, c'est l'espace séparant deux nœuds consécutifs  $x_i$ ,  $K_i = K(x_i)$  et  $Q_i = Q(x_i)$  sont respectivement le module de la fondation et l'intensité de la charge répartie au point (i). La quantité  $EI$  est indépendante de la position car la rigidité est supposée invariante le long de la poutre, mais varie plus ou moins autour d'une même valeur en chaque point mais d'une manière identique quelque soit ce dernier.

En effet, les quantités  $K$ ,  $Q$  et  $EI$  sont des variables aléatoires dont la moyenne et l'écart type, qui les caractérisent respectivement, varient le long de l'axe des abscisses pour  $K$  et  $Q$  et sont constant en ce qui concerne la rigidité  $EI$ .

L'élasticité de la fondation oscille en chaque point autour d'une certaine valeur *probable* ou moyenne avec un certain écart plus ou moins grand d'un point pivot à un autre, de même pour la charge répartie  $Q$  qui en chaque *station* possède une valeur approximative finie avec une certaine incertitude définissant l'étendue du domaine de variation généralement très petit.

Il est utile pour une représentation mathématique d'associer aux ensembles de variables aléatoires  $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$  et  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  des valeurs respectives de  $K$  et  $Q$  les vecteurs aléatoires  $\underline{K}$  et  $\underline{Q}$  dont les valeurs sont évidemment les variables aléatoires  $K_i$  et  $Q_i$  ci-dessus citées.

A partir des caractéristiques numériques d'un vecteur aléatoire définies au (Cf. Chapitre2 §10), on établit les vecteurs espérance mathématique et variance associés à  $\underline{K}$  et  $\underline{Q}$  ainsi que leur matrice de covariance :

1. Un vecteur constant de  $n$  composantes

$$\underline{m}_K = \{m_{K1}, m_{K2}, \dots, m_{Kn}\}$$

caractérisant les valeurs moyennes du module de fondation,

2.  $n$  variances ou écart-types

$$\underline{\sigma}_K = \{\sigma_{K1}, \sigma_{K2}, \dots, \sigma_{Kn}\}$$

caractérisant la dispersion autour de la moyenne;

3.  $n(n - 1)$  covariances

$$\sigma_{K_i, K_j} = E(K_{0i}K_{0j}) \quad i \neq j$$

La matrice de covariance associée au vecteur aléatoire  $\underline{K}$  sera donc :

$$\underline{\Sigma}_{(K)} = \begin{bmatrix} \sigma_{K1}^2 & \sigma_{K1,K2} & \dots & \sigma_{K1,Kn} \\ \sigma_{K2,K1} & \sigma_{K2}^2 & \dots & \sigma_{K2,Kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Kn,K1} & \sigma_{Kn,K2} & \dots & \sigma_{Kn}^2 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

De la même manière,

$$\underline{m}_Q = \{m_{Q1}, m_{Q2}, \dots, m_{Qn}\}$$

$$\underline{\sigma}_Q = \{\sigma_{Q1}, \sigma_{Q2}, \dots, \sigma_{Qn}\}$$

$$\sigma_{Q_i, Q_j} = E(Q_{0i}Q_{0j}) \quad i \neq j$$

et,

$$\underline{\Sigma}_{(Q)} = \begin{bmatrix} \sigma_{Q1}^2 & \sigma_{Q1,Q2} & \dots & \sigma_{Q1,Qn} \\ \sigma_{Q2,Q1} & \sigma_{Q2}^2 & \dots & \sigma_{Q2,Qn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Qn,Q1} & \sigma_{Qn,Q2} & \dots & \sigma_{Qn}^2 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

A  $EI$ , qui varie de la même manière en tout point, il convient de l'associer tout simplement à une variable aléatoire dont la moyenne est  $m_{EI}$  et l'écart type  $\sigma_{EI}$ .

*Ecriture du système d'équations simultanées :*

L'application de l'équation 3-7 aux nœuds  $x_1, x_2, \dots, x_n$  fourni un système linéaire de  $n$  équations à  $n+4$  inconnues: les déplacements des  $n$  nœuds  $y_1, y_2, \dots, y_n$  et les déplacements fictifs notés  $y_{-1}, y_0, y_{n+1}$  et  $y_{n+2}$ . Les déplacements fictifs sont systématiquement introduits dans les dérivées partielles. Les déplacements fictifs peuvent être éliminés du système d'équations en prenant en considération *les conditions aux limites* du domaine.

Le système à  $n$  équations se présente comme suit :

$$\begin{array}{ll}
 \text{nœud 1:} & y_{-1} - 4y_0 + \left(6 + \frac{h^4 K}{EI}\right)y_1 - 4y_2 + y_3 = +\frac{h^4}{EI}Q_1 \\
 \text{nœud 2:} & y_0 - 4y_1 + \left(6 + \frac{h^4 K}{EI}\right)y_2 - 4y_3 + y_4 = +\frac{h^4}{EI}Q_2 \\
 & \vdots \\
 \text{nœud } i: & y_{i-2} - 4y_{i-1} + \left(6 + \frac{h^4 K}{EI}\right)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = +\frac{h^4}{EI}Q_i \quad (3-10) \\
 & \vdots \\
 \text{nœud } N-1: & y_{N-3} - 4y_{N-2} + \left(6 + \frac{h^4 K}{EI}\right)y_{N-1} - 4y_N + y_{N+1} = +\frac{h^4}{EI}Q_{N-1} \\
 \text{nœud } N: & y_{N-2} - 4y_{N-1} + \left(6 + \frac{h^4 K}{EI}\right)y_N - 4y_{N+1} + y_{N+2} = +\frac{h^4}{EI}Q_N
 \end{array}$$

Dans ce qui suit on donnera les valeurs des déplacements fictifs et réels des extrémités pour différents types de conditions aux limites.

### 3.5 Conditions aux limites

Il existe différents types de conditions aux limites selon le problème physique rencontré, dans le cas présent on ne s'intéressera qu'aux conditions d'appuis extrêmes d'une poutre simple.

On note par  $y(x)$ ,  $M(x)$  et  $T(x)$  respectivement la flèche, le moment fléchissant et l'effort tranchant en une abscisse  $x$  d'une poutre simple.

*Bord simplement appuyé*

Soit la poutre simplement appuyée représentée ci-dessous,

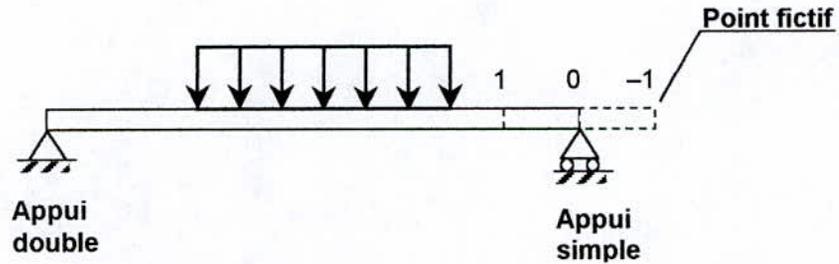


Fig. 3-2

Aux appuis on a

$$y(0) = 0 \text{ et } M(0) = 0 \quad (3-11)$$

En écrivant la différence finie au centre du moment fléchissant donné par l'équation 3-4 au niveau d'une des extrémités, on obtient :

$$y_{-1} - 2y_0 + y_1 = 0 \text{ ou, } y_{-1} = 2y_0 - y_1$$

Le type d'appui considéré implique que  $y_0$  est égale à zéro, donc

$$y_{-1} = -y_1 \quad (3-12)$$

*Bord encastré*

Dans le schéma suivant est représenté une poutre encastrée rigidement. Les conditions physiques imposées par ce dernier sont un déplacement et une rotation nuls autour du point d'encastrement. Ceci se traduit en terme d'équations par les expressions suivantes

$$y(0) = 0 \text{ et } \theta(0) = 0 \quad (3-13)$$

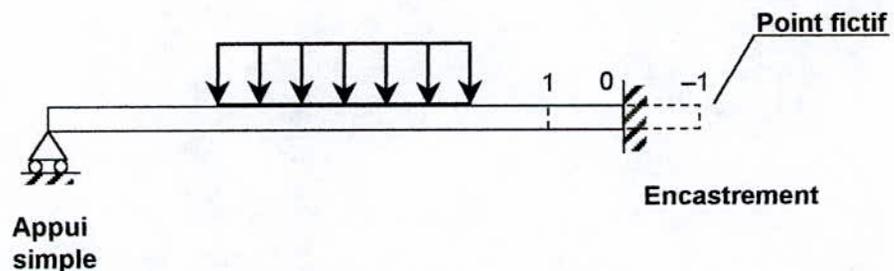


Fig. 3-3

La première dérivée autour d'un point d'abscisse  $x_i$  s'écrit en utilisant un schéma au centre comme suit

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \quad (3-14)$$

En appliquant la formule 3-14 au nœud correspondant à l'encastrement, on obtient

$$y_{-1} - y_1 = 0$$

donc,  $y_{-1} = y_1$  (3-15)

### Extrémités libres

C'est le cas où l'extrémité de la poutre est libre de toute contrainte, ainsi les déplacements, les moments et efforts tranchants appliqués dépendent du chargement et non pas du milieu physique (frontière).

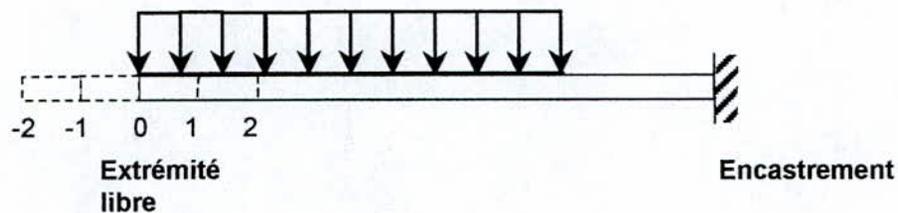


Fig. 3-4

Les extrémités étant libres aucune condition ne peut être imposée aux déplacements et aux rotations. Les contraintes physiques imposées aux frontières sont données par les valeurs du moment et de l'effort tranchant  $M_0$  et  $T_0$  au point d'abscisse nulle.

Les expressions discrètes de  $M(x)$  et  $T(x)$  sont données par les formules

$$M_n = -EI \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} \quad (3-16)$$

$$T_n = -EI \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{2h^3} \quad (3-17)$$

En  $x_0=0$ , on a

$$M_0 = -EI \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2}$$

$$T_0 = -EI \frac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3}$$

donc,

$$y_{-1} = 2y_0 - y_1 - \frac{h^2}{EI} M_0 \quad (3-18)$$

$$y_{-2} = 2y_{-1} - 2y_1 + y_2 + \frac{2h^3}{EI} T_0 \quad (3-19)$$

Ces équations supplémentaires sur les déplacements des points fictifs seront utilisées pour la réduction du système engendré par la méthode des différences finies.

Des relations similaires peuvent être développées pour  $y_{n+1}$  et  $y_{n+2}$ , ce qui ne sera pas nécessaire pour un problème symétrique.

Le tableau suivant résume les trois cas d'appuis développés et donne la valeur des déplacements fictifs. Ceci permet de combiner facilement les différents cas d'appuis et d'avoir les différents déplacements fictifs en fonction des réels.

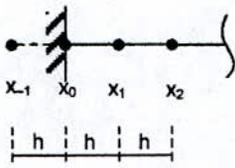
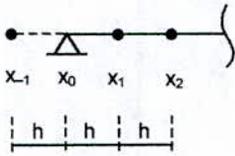
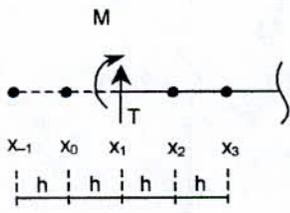
Conditions aux limites	$y_0$	$y_{-1}$
<p><u>Encastrement</u></p> 	0	$y_1$
<p><u>Appuis simple</u></p> 	0	$-y_1$
<p><u>Extrémité libre</u></p> 	$2y_1 - y_2 - \frac{h^2 M}{EI}$	$2y_0 - 2y_2 + y_3 + \frac{2h^3 T}{EI}$

Tableau 3-1 Déplacements fictifs pour différents types de conditions aux limites

*Réduction du système d'équations :*

Dans le système à  $n+4$  inconnues donné par 3-10 on injecte les déplacements des points fictifs calculés en fonction des déplacements réels, le nombre de ces équations supplémentaires étant de quatre, correspondant aux points fictifs  $-1, 0, n+1$  et  $n+2$ , le système finale réduit sera constitué de  $n$  équations et  $n$  inconnues.

Les équations (1), (2),  $(n+1)$  et  $(n+2)$  deviennent après substitution fonction des seuls déplacements réels  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Ces quatre équations diffèrent de la forme générale donnée par le système 3-10 et dépendent des conditions aux limites considérées.

Les autres équations du système n'étant pas modifiées car ne contenant pas les termes des déplacements fictifs. C'est donc finalement un système de  $n$  équations linéaires qu'on obtient fonction des quantités  $K_i, EI$  et  $Q_i$ .

Si on appel  $\underline{A}$  la matrice carrée du système, alors ce dernier s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\underline{A} \underline{V} = \underline{S} \tag{3-20}$$

Où,

$\underline{V} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  est le vecteur déplacement inconnu des nœuds d'abscisses  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\underline{S}$  = est le vecteur dont les composantes sont les éléments du second membre du système à savoir  $S_i = \frac{h^4 Q_i}{EI}$

La matrice  $\underline{A}$  possède  $n^2$  éléments notés  $a(i, j)$  ou encore  $a_{i,j}$  correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne tel que

Pour  $i = 3, \dots, n-2$

$$\left| \begin{array}{l} a_{i,i-2} = 1 \\ a_{i,i-1} = -4 \\ a_{i,i} = 6 + \frac{h^4 K_i}{EI} \\ a_{i,i+1} = -4 \\ a_{i,i+2} = 1 \end{array} \right. \tag{3-21}$$

Tous les autres éléments  $a_{ij} = 0$  ( $i=3, \dots, n-2$ )

Les coefficients des deux premières et deux dernières lignes correspondant à  $i = 1, 2, n-1, n$  ont généralement des valeurs différentes de celles qui peuvent être obtenues par l'équation 3-7.

Le système matriciel 3-20 s'écrit explicitement

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & C_3 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & C_{n-2} & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-3} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-2} \\ S_{n-1} \\ S_n \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

$$C_i = 6 + \frac{h^4 K_i}{EI}$$

La matrice  $\underline{A}$  n'est symétrique que dans le cas particulier de conditions aux limites identiques aux deux extrémités (exemple de la figure 3-2).

Il est important de souligner que dans la résolution, déterministe en un premier temps, les valeurs des variables aléatoires  $K_i$ ,  $EI$  et  $Q_i$  présentes dans l'équation 3-7 seront prises pour les calculs égales à celles de leurs moyennes, donc il advient que le vecteur  $\underline{V}$ , trouvé après résolution de l'équation matricielle 3-20, sera celui des moyennes des déplacements, car  $\underline{V}$  est en fait un vecteur aléatoire des variables aléatoires  $y_i$ ,

$$\underline{V} = \underline{m}_V = \{m_{y1}, m_{y2}, \dots, m_{y3}\} \quad (3-23)$$

Enfin, notons qu'à partir de l'équation 3-20 on peut constater que le vecteur déplacement est une fonction des quantités aléatoires  $\underline{K}$ ,  $EI$ , et  $\underline{S}$ .

$$\underline{V} = \underline{V}(\underline{K}, EI, \underline{S}) \quad (3-24)$$

Cette fonction est non linéaire en  $EI$  et en les éléments  $K_i$  de  $\underline{K}$  et varie par contre d'une manière linéaire avec  $S_i$ .

Une fois le vecteur des déplacements moyens  $\underline{V}$  déterminé, il est possible d'en conclure les différentes valeurs moyennes du moment fléchissant et de l'effort tranchant aux différentes stations ceci en utilisant les formules discrétisées de leurs expressions respectivement données par 3-16 et 3-17.

## **Chapitre 4 :**

### **ANALYSE DU SECOND ORDRE**

#### 4.1 Objet de l'approche stochastique

Dans ce qui suit, nous allons reprendre la résolution du problème aux différences finies dont la résolution déterministe fut exposée au chapitre précédant (Cf. §3.4) mais en considérant l'aspect aléatoire des paramètres  $K$ ,  $EI$  et  $S$  respectivement le module de la fondation, la rigidité de la poutre et le chargement.

Ainsi les valeurs supposées préalablement connues, déterminées et exactes seront considérées dans ce qui suit comme parfaitement aléatoires, on ne parlera donc plus d'une valeur de la variable mais de sa moyenne et on y correspondra un écart type pour en déterminer le domaine de variation.

Vu de cet angle le problème prend une nouvelle proportion plus intéressante et mieux adaptée à la réalité. Ceci répond plus aux exigences de l'ingénieur et de l'ingénierie car l'exactitude d'un résultat est souvent impossible à assurer du fait de l'accumulation d'erreurs survenant à différents niveaux de la collecte de données, souvent impossible à éliminer car systématiquement intervenant dans les mesures (erreurs dues aux appareils utilisés, aux sens et à l'appréciation de l'homme).

Il est donc nécessaire de reconnaître l'incertitude qu'il y a dans toutes les théories et les calculs de conception qu'on effectue et de ce fait de l'importance de l'introduction de l'aspect stochastique et aléatoires lors de la résolution.

#### 4.2 Analyse du second ordre du problème

Dans le chapitre précédant, paragraphe 3-4, nous avons définie les éléments caractéristiques des variables aléatoires  $K$ ,  $EI$  et  $S$ .

Rappelons succinctement ces caractéristiques :

##### 1. Vecteur aléatoire $\underline{K}$

$\underline{m}_k$ : vecteur constant de l'espérance mathématique associée au vecteur aléatoire ;

$\underline{\sigma}_k$  : vecteur constant de l'écart type associé au vecteur aléatoire ;

$\underline{\Sigma}_k$  : matrice de covariance associée au vecteur aléatoire  $\underline{K}$ .

##### 2. Variable aléatoire $EI$

$m_{EI}$ : moyenne de la variable aléatoire  $EI$  ;

$\sigma_{EI}$  : écart type de la variable aléatoire  $EI$ .

3. Vecteur aléatoire  $\underline{S}$

$\underline{m}_S$ : vecteur constant de l'espérance mathématique associée au vecteur aléatoire ;

$\underline{\sigma}_S$  : vecteur constant de l'écart type associé au vecteur aléatoire ;

$\underline{\Sigma}_S$  : matrice de covariance associée au vecteur aléatoire  $\underline{S}$ .

Notons que  $\underline{m}_S$  est proportionnel au vecteur de la moyenne du chargement  $\underline{Q}$ , tel que :

$$\underline{m}_S = h^4/EI \underline{m}_Q$$

4. Vecteur aléatoire  $\underline{V}$

$\underline{m}_V$  : vecteur de la moyenne associé au vecteur  $\underline{V}$  des déplacements donné par la résolution déterministe du problème (cf.3-22) ;

$\underline{\sigma}_V$  et  $\underline{\Sigma}_V$  sont respectivement les vecteurs de l'écart type associé et la matrice de covariance du vecteur  $\underline{V}$  que nous allons ultérieurement définir.

Considérons le développement d'ordre un en série de Taylor de la fonction vectorielle  $\underline{V}$  au voisinage des moyennes  $\underline{m}_K$ ,  $m_{EI}$  et  $\underline{m}_S$  des variables aléatoires  $\underline{K}$ ,  $EI$ , et  $\underline{S}$ , notons que pour le premier degré, ce développement correspond à la linéarisation d'une fonction donnée en 2-12-2.

Cette représentation approximative de  $\underline{V}$  est de la forme suivante [8]

$$\underline{V} \cong \underline{V}(\underline{m}_K, m_{EI}, \underline{m}_S) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \underline{V}}{\partial K_i} (K_i - m_{K_i}) + \frac{\partial \underline{V}}{\partial EI} (EI - m_{EI}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \underline{V}}{\partial S_i} (S_i - m_{S_i}) \quad (4-1)$$

Les différentes dérivées de  $\underline{V}$  doivent être calculées en  $(\underline{m}_K, m_{EI}, \underline{m}_S)$ ,  $m_{K_i}$  et  $m_{S_i}$  représentent respectivement les moyennes du module de la fondation et de la charge en (i).

De l'équation 4-1, on peut vérifier que la moyenne de  $\underline{V}$  peut être approximée par

$$\underline{m}_V \cong \underline{V}(\underline{m}_K, m_{EI}, \underline{m}_S) \quad (4-2)$$

Il est simple de retrouver ce résultat en utilisant les propriétés de l'espérance mathématique d'une fonction (Cf. chapitre 2, formule 2-16).

Le vecteur  $\underline{m}_V$  est donc parfaitement connu : c'est le résultat donné par la résolution du système d'équations 3-10.

Précisons maintenant les différentes valeurs des dérivées partielles de la fonction vectorielle  $\underline{V}$ .

### 4.3 Calcul des dérivées partielles

Dérivées partielles par rapport à  $K_i$

Soit à calculer la dérivée partielle de  $\underline{V}$  par rapport à  $K_i$   $\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial K_i}\right)$  présente dans l'équation

4-1, pour cela on propose de différentier l'équation 3-20 par rapport à  $K_i$ .

$$\frac{\partial}{\partial K_i} (\underline{A}\underline{V}) = \frac{\partial \underline{S}}{\partial K_i} \quad (4-3)$$

soit,

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial K_i} \cdot \underline{V} + \underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial K_i} = \frac{\partial \underline{S}}{\partial K_i} \quad (4-4)$$

finalement,

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial K_i} = \underline{A}^{-1} \left( \frac{\partial \underline{S}}{\partial K_i} - \frac{\partial \underline{A}}{\partial K_i} \cdot \underline{V} \right) \quad (4-5)$$

$\underline{A}^{-1}$  : est la matrice inverse de la matrice du système défini en 3-10.

Explicitons les dérivées de la matrice  $\underline{A}$  et du vecteur chargement  $\underline{S}$  par rapport à  $K_i$ .

D'après le détail des éléments de la matrice  $\underline{A}$  donné en 3-21 on a :

$\frac{\partial \underline{A}}{\partial K_i}$  : est une matrice carrée contenant un unique élément diagonal non nul

correspondant à la ligne  $i$ , dont la valeur est  $\frac{h^4}{EI}$  lorsque :  $3 \leq i \leq n-2$ .

Les dérivées par rapport à  $K_1, K_2, K_{n-1}$  et  $K_n$  sont semblables à celles définies ci-dessous, mais dont la valeur de l'élément diagonal dépend des conditions aux limites considérées.

$\frac{\partial \underline{S}}{\partial K_i}$  : est un vecteur dont la valeur dépend de la relation existant entre le chargement et

le module de fondation. Ainsi, il sera nul si  $\underline{S}$  (donc la charge  $Q(x)$ ) est indépendant de  $K_i$ .

Rappelons que  $S_i = \frac{h^4}{EI} Q_i$

Des résultats similaires sont obtenus dans le cas où la déformation de la poutre est causée par un déplacement permanent du sol, dans ce cas la formule (4-5) reste applicable en remplaçant  $Q(x)$  par  $U(x).K(x)$ , où  $U(x)$  décrit le déplacement permanent du sol. Cette fonction de déplacement peut être aussi bien déterministe qu'aléatoire. Ça sera notamment le cas lors de l'application qui sera considérée.

*Dérivées partielles par rapport à  $S_i$*

De la même manière, on calculera les différentes dérivées  $\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial S_i}\right)$  à partir de l'équation 3-20, on arrive donc à l'expression suivante :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial S_i} = \underline{A}^{-1} \left( \frac{\partial \underline{S}}{\partial S_i} - \frac{\partial \underline{A}}{\partial S_i} \cdot \underline{V} \right) \quad (4-6)$$

De même que précédemment,

$\frac{\partial \underline{A}}{\partial S_i}$  : est une matrice carrée qu'on calculera selon la relation entre K et S.

Dans le cas où S est proportionnel à K ( $Q_i = K_i U_i$ ) en remplaçant  $K_i$  par :  $\left(\frac{EI S_i}{h^4 U_i}\right)$

Finalement, la matrice  $\frac{\partial \underline{A}}{\partial S_i}$  contiendra un unique élément non nul (i,i) égal à  $\left(\frac{1}{U_i}\right)$  (tel que  $3 \leq i \leq n-2$ )

Si aucune relation n'existe entre le module de fondation et le chargement, la matrice dérivée de  $\underline{A}$  par rapport à  $S_i$  est identiquement nulle.

$\frac{\partial \underline{S}}{\partial S_i}$  : est la dérivée du vecteur  $\underline{S}$  par rapport à l'une de ses composantes  $S_i$ , c'est donc un vecteur dont tous les éléments sont nuls sauf celui correspondant à la ligne i et qui sera égale à un.

*Dérivée partielle par rapport à EI*

La dérivée partielle du vecteur déplacement  $\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial EI}\right)$  est déduite de la même façon, ainsi

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial EI} = \underline{A}^{-1} \left( - \frac{\partial \underline{A}}{\partial EI} \underline{V} \right) \quad (4-8)$$

#### 4.4 Matrice de covariance du vecteur déplacement

Il s'agit d'une matrice carrée dont les éléments diagonaux (i,i) et les éléments (i,j) sont respectivement les variances des variables  $V_i$  et les covariances de  $V_i$  et  $V_j$ .

On peut retrouver le résultat suivant et qui donne la formule générale de calcul de la matrice de covariance du vecteur  $\underline{V}$  en fonction des matrices de covariance des vecteurs aléatoires  $\underline{K}$  et  $\underline{S}$  ainsi que de la variance de la variable aléatoire  $EI$  [8]:

$$\underline{\Sigma}_V = \underline{V}_{(K)}^T \underline{\Sigma}_{(K)} \underline{V}_{(K)} + \left( \frac{\partial \underline{V}}{\partial EI} \right)^2 \sigma_{EI}^2 + \underline{V}_{(S)}^T \underline{\Sigma}_{(S)} \underline{V}_{(S)} \quad (4-9)$$

où,

$$\underline{V}_{(K)}^T = \left\{ \frac{\partial \underline{V}}{\partial K_1}, \frac{\partial \underline{V}}{\partial K_2}, \dots, \frac{\partial \underline{V}}{\partial K_n} \right\} : \text{matrice dont la colonne } i \text{ est la dérivée du vecteur } \underline{V} \text{ par}$$

rapport à  $K_i$ ;

$$\underline{V}_{(S)}^T = \left\{ \frac{\partial \underline{V}}{\partial S_1}, \frac{\partial \underline{V}}{\partial S_2}, \dots, \frac{\partial \underline{V}}{\partial S_n} \right\} : \text{matrice dont la colonne } i \text{ est la dérivée du vecteur } \underline{V} \text{ par}$$

rapport à  $S_i$ ;

$\sigma_{EI}^2$  : est la variance de la variable aléatoire  $EI$  ;

$\underline{\Sigma}_K, \underline{\Sigma}_S$  : les matrices de covariances des vecteurs aléatoires  $\underline{K}$  et  $\underline{S}$ .

Notons que la formule 4-9 n'est valable que si les variables aléatoires  $\underline{K}$ ,  $EI$  et  $\underline{S}$  sont non corrélées. Dans le cas contraire des termes décrivant la covariance de l'ensemble aléatoire ( $\underline{K}$ ,  $EI$ ,  $\underline{S}$ ) seront introduits.

## **Chapitre 5 :**

### **ORGANISATION GENERALE DU PROGRAMME**

### 5.1 Présentation du langage FORTRAN [3]

Fortran, pour « FORMula TRANslation » ou FORMulation TRANsposée, est un langage de programmation des ordinateurs pour applications scientifiques et techniques.

Dans le cadre de cette thèse nous utiliserons le FORTRAN77, c'est à dire le langage adopté par la norme ANSI 1977. C'est un langage perfectionné qui permet d'écrire les programmes pour la plus part des machines IBM ou compatible. Il est simple, clair et demande peu d'effort au programmeur. Ce langage est surtout avantageux pour résoudre les problèmes scientifiques ou ceux de l'ingénieur car il utilise les mêmes expressions que celles des mathématiques classiques.

### 5.2 Les instructions d'un programme FORTRAN

Les instructions d'un programme FORTRAN peuvent être classées comme suit [6] :

Instructions arithmétiques	Spécifient un calcul numérique. construites en reliant des <i>constantes</i> , des <i>variables</i> ou des <i>fonctions</i> avec des symboles arithmétiques (+, -, x, ÷, ...etc.)
Fonctions	Elles peuvent être incluses au FORTRAN, elles sont alors dites <i>fonctions de bibliothèque</i> ou alors définies au début du programme par le programmeur.
Instructions de contrôle	Elles sont utilisées pour diriger le cours du programme (IF, Do, DoWhile,...etc.)
Instructions Entrée-Sortie	Permettent l'échange de données entre le programme et les différents supports de lecture-écriture (clavier, écran, imprimante)
Instructions sous-programme	Un sous-programme est une séquence d'instructions écrites en FORTRAN pour réaliser une opération désirée et s'y référer ou encore pour être employée par un autre programme FORTRAN

### **5.3 Programme de calcul stochastique d'une poutre sur appui élastique**

#### **5.3.1 Objectifs**

Une fois le domaine discrétisé, le schéma d'approximation choisi et les équations aux différents pivots écrites, nous nous retrouvons avec un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues qui sont les valeurs de la fonction  $y$  aux nœuds considérés.

On a ainsi réécrit le système et mis sous la forme matricielle suivante

$$\underline{A} \underline{V} = \underline{S}$$

dont les termes  $\underline{A}$  et  $\underline{S}$  sont entièrement définis au chapitre précédent. Rappelons toujours que

$\underline{A}$  : est la matrice coefficient

$\underline{V}$  : vecteur de déplacement inconnu

$\underline{S}$  : vecteur chargement

Ce même système sera repris et résolu en considérant cette fois-ci le caractère aléatoire des termes  $y$  intervenant.

Les résultats recherchés sont le vecteur déplacement des points pivots et la matrice de covariance de ce vecteur aléatoire.

#### **5.3.2 Description du programme**

Le programme principal se présente en deux parties importantes. La première étant la résolution par différences finies du système d'équations défini en 3-10, et qui comporte donc les sous-routines classiques intervenant dans ce type de problème (de calcul matriciel). En seconde partie viennent les calculs stochastiques des caractéristiques numériques du vecteur aléatoire  $\underline{V}$  résultat de la résolution donné en partie une.

Notons que pour l'élaboration du programme de résolution par différences finies il est simple de trouver un canevas pouvant servir d'ossature au programme dans différents ouvrages de calcul numérique et de méthodes numériques [3].

De même les différentes sous-routines sont disponibles dans ces mêmes types d'ouvrages [5], il est clair que reprendre leur programmation n'est d'aucun intérêt scientifique par rapport au but fixé par ce présent rapport, elles seront donc prises comme outil numérique de résolution. Néanmoins la connaissance du principe et de la théorie de résolution de

tout sous programme reste principale pour un choix judicieux qui réponde à nos besoins en précision, vitesse d'exécution et espace mémoire.

### 5.3.3 Dictionnaire des variables

La signification des différentes variables utilisées dans notre programme est présentée ci-dessous

L	Portée de la poutre	m.
N	Nombre de parties divisant la portée	/
Q(i)	Intensité de la charge répartie aux points pivots	N/m
EI(i)	Rigidité de la poutre aux points pivots	N.m <sup>2</sup>
K(i)	Intensité du module de fondation aux points pivots	N/m <sup>2</sup>
V(i)	Vecteur déplacement vertical du pipeline	m.
S(i)	Vecteur des termes du second membre du système 3-10	m.
BETA(i)	La valeur de $K_i h^4 / EI$ aux points pivots	/
A(I,J)	Coefficients des équations aux différences finies	/
VarEI	Variance de la variable aléatoire EI (la rigidité)	(N.m <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>
Covk(I,j)	Coefficients de la matrice de covariance du vecteur $\underline{K}$	(N/m <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>
Covs(i,j)	Coefficients de la matrice de covariance du vecteur $\underline{S}$	m. <sup>2</sup>
Cov(i,j)	Coefficients de la matrice de covariance du vecteur $\underline{V}$	m. <sup>2</sup>
DVK	Dérivée du vecteur $\underline{V}$ par rapport à $\underline{K}$	/
DVS	Dérivée du vecteur $\underline{V}$ par rapport à $\underline{S}$	/
DVEI	Dérivée du vecteur $\underline{V}$ par rapport à EI	/

### 5.3.4 Entrée des données

Les informations sur les propriétés géométriques et mécaniques de la poutre, le nombre d'éléments à discrétiser selon l'axe (Ox), le chargement, le module de fondation et les caractéristiques numériques des différentes variables aléatoires (espérance mathématique, variance, ...etc.) constituent les informations nécessaires pour la résolution du problème. Les différents paramètres du programme seront enregistrés sur des fichiers pour en faciliter la manipulation sans pour autant toucher au programme.

### 5.3.5 Programme principal et sous-programmes

Il contient toutes les déclarations (nature des variables, dimension des matrices et vecteurs, ... etc.), la création des fichiers d'enregistrement, la définition des éléments des différentes variables indicées et des fonctions utilisées ainsi que les appels aux différentes sous-routines.

Il comprend deux parties essentielles : une partie déterministe pour la résolution numérique du problème et une partie qui reprend le résultat ainsi obtenu pour le soumettre à un traitement numérique faisant intervenir les théories stochastiques associées aux variables aléatoires et développées au chapitre deux.

On utilise principalement trois sous-routines présentées ci-après.

Subroutine	Fonction
SLVE	Triangularisation de la matrice $\underline{A}$ par la méthode de Gauss et calcul des valeurs du vecteur $\underline{V}$
MATINV	Calcul de l'inverse de la matrice $\underline{A}$
MATP	Calcul des différents produits matrice-matrice, matrice-vecteur
MATRANS	Calcul la transposée d'une matrice

On peut aussi développer encore plus la structure du programme en généralisant son utilisation à l'aide de quelques sous-routines proposées mais dont l'imbrication au programme réalisé n'a pas été faite pour simplifier le problème dont l'intérêt se pose surtout dans l'analyse aléatoire.

Subroutine	Fonction
Menu	Permet de fixer notre choix suivant les conditions d'appui auxquelles est soumise notre poutre
Génère	Permet de générer la matrice des coefficients puis l'inverser selon le cas d'appui
Derivect	Calcul les différents dérivées du vecteur $\underline{V}$ par rapport aux trois variables $\underline{K}$ , $EI$ et $\underline{S}$

La sous-routine « Menu » traite alors les différents cas d'appui simple, d'encastrement et d'extrémité libre et permet de les conjuguer.

## **5.4 Partie1 : programme de résolution par différences finies**

Il comprend la définition des termes  $\underline{A}$ ,  $\underline{V}$  et  $\underline{S}$  de l'équation 3-20 et leur enregistrement puis l'appel d'une subroutine de résolution [5] pour résoudre le système d'équations et enfin afficher les résultats.

### *Séquence d'entrée*

La longueur  $L$  de la poutre et  $N$  le nombre de subdivisions.

Aux points pivots dans l'ordre à partir de l'extrémité gauche,  $N+1$  fois :  $SK(i)$ ,  $Q(i)$ ,  $EI(i)$  ou alors les fonctions de répartition du module de fondation  $K$ , de la charge  $Q$  et de la rigidité  $EI$ .

### *Information de sortie*

Déplacements réels aux points pivots dans la séquence de gauche à droite.

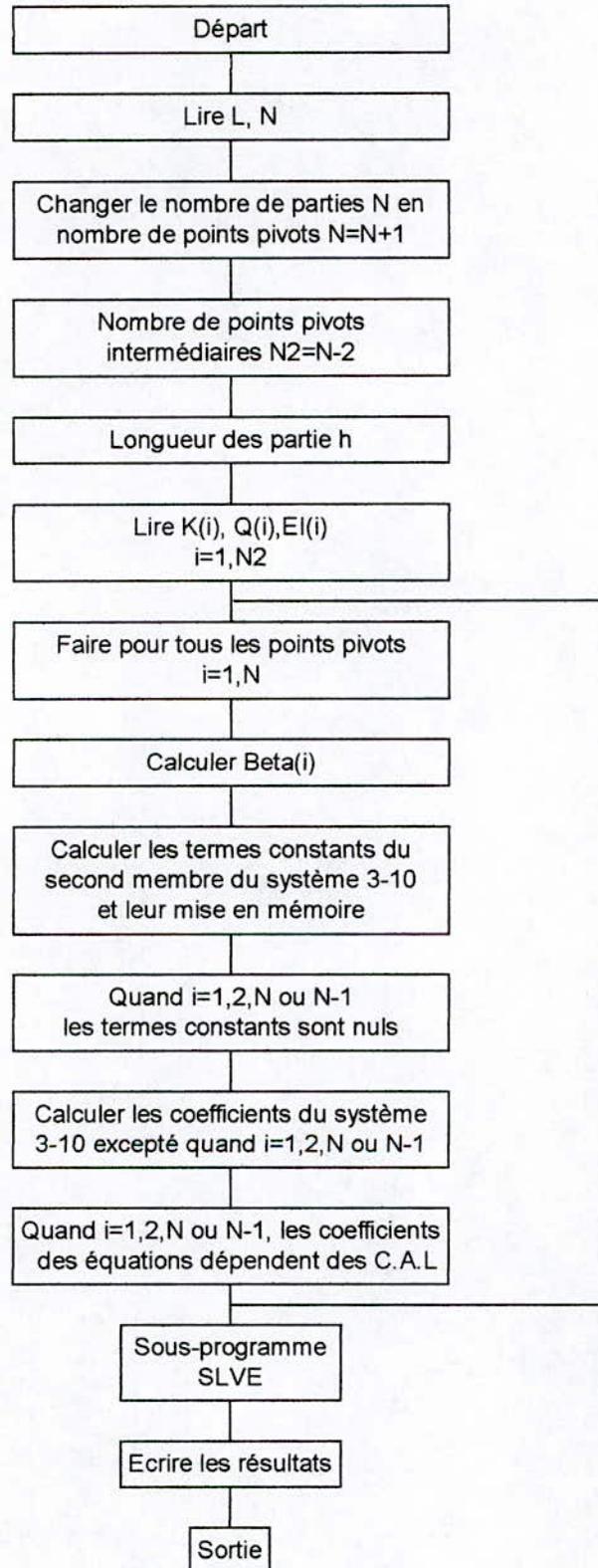
### **5.4.1 Résolution**

Selon la symétrie des conditions d'appui de la poutre, l'étude peut être réduite à la moitié. Les systèmes auxquels on aboutit ne sont généralement pas symétriques, on utilise alors l'algorithme de résolution de Gauss pour les système non symétriques, cet algorithme est caractérisé par deux étapes; la triangularisation puis la résolution du système par substitution récurrente.

### **5.4.2 Organigramme**

L'organigramme comprend la déclaration des différentes variables intervenant dans le programme, l'ouverture des différents fichiers de lecture et d'écriture, la constitution des différents termes de l'équation matricielle et leur enregistrement puis l'appel d'une subroutine de résolution et enfin l'écriture des résultats sur des fichiers de sortie.

Programme de résolution par différences finies  
du problème de poutre sur appui élastique



## **5.5 Partie2 : Calcul des caractéristiques numériques du vecteur aléatoire $\underline{V}$**

Cette partie prend en charge le calcul fastidieux des différents éléments des matrices de covariances, des produits matriciels ainsi que le calcul de dérivées des différents vecteurs et enfin l'expression sous forme de tableau des résultats obtenus quant aux caractéristiques numérique de la variable aléatoire  $y_i$ .

### *Séquence d'entrée*

Les matrices de covariances des vecteurs aléatoires  $\underline{K}$  et  $\underline{S}$  et la variance de la variable aléatoire EI.

### *Information de sortie*

La matrice de covariance du vecteur déplacement des points pivots.

### **5.5.1 Résolution**

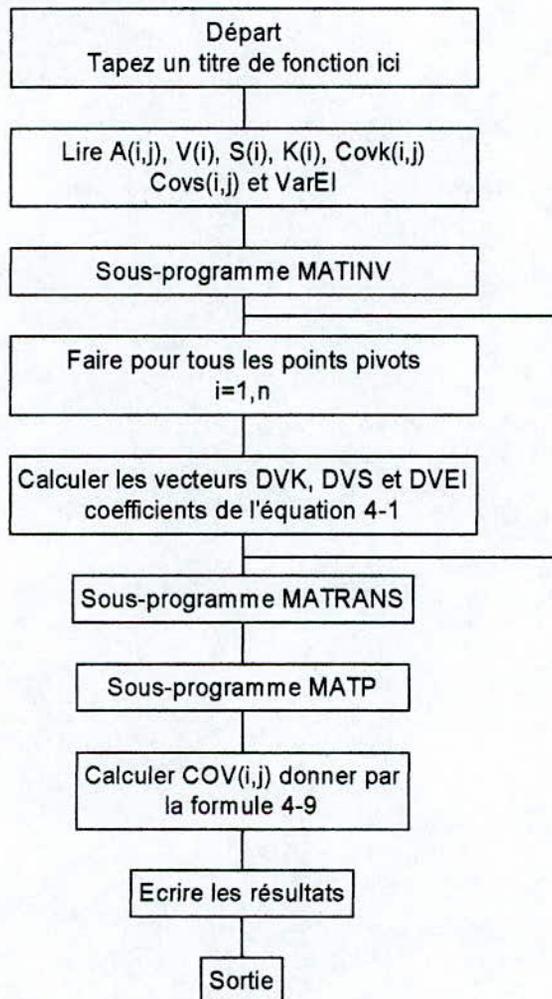
Le calcul effectué dans cette partie du programme est l'application des différentes propriétés de calcul de fonctions à arguments aléatoires et la mise en évidence de ces résultats sous forme d'une matrice de covariance. Ceci passe par l'application de la formule 4-9 qui fait intervenir les dérivées partielles du vecteur  $\underline{V}$  dont le calcul sera inclu dans le programme.

### **5.5.2 Organigramme**

Cette partie du programme comprend la déclaration de nouvelles variables indicées (tableaux et vecteurs) représentant les caractéristiques des vecteurs aléatoires  $\underline{K}$  et  $\underline{S}$  et de la variable EI ainsi que les dérivées du vecteur  $\underline{V}$  par rapports aux arguments desquels il dépend. Les caractéristiques aléatoires sont principalement la matrice de covariance, la moyenne et la variance.

La combinaison des deux organigrammes permet d'élaborer un programme FORTRAN capable de prendre en charge l'affichage des résultats recherchés (vecteur déplacement moyen et sa matrice de covariance) à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre, des valeurs moyennes du chargement et du module de fondation et de leurs écarts types respectifs.

Programme d'analyse du second ordre du problème de poutre sur appui élastique



### 5.6 Calcul des moments et efforts tranchants

Ayant obtenu le vecteur moyen des déplacements et le vecteur des écarts types correspondant, il est aisé de calculer les vecteurs moyens du moment fléchissant et de l'effort tranchant à partir des formules discrétisées de ces derniers. Les vecteurs écarts types associés seront de la même manière déduits en prenant en considération le fait que les incertitudes (et donc les écarts types) s'additionnent toujours même lorsque la formule contient un signe de soustraction. Ainsi tous les signes (-) seront remplacés par un signe (+) dans le calcul des vecteurs écarts types.

### 5.7 Présentation des résultats et fichiers d'entrée-sortie

Les différents résultats seront enregistrés sur des fichiers du type \*.dat (fichiers « data » ou données). Un fichier paramètres est utilisé pour la lecture des données de type \*.par. On établit ci-dessous la liste des fichiers utilisés :

Fichier	Description
Data.par	Contient toutes les données nécessaires à la résolution du problème (L, N, EI, ... etc.)
Ground.dat	Déplacements réels du sol $\underline{U}$
Beam.dat	Déplacements des points pivots $\underline{V}$
Moment.dat	Valeurs du moment de flexion aux différentes stations
Mat.dat	Éléments de la matrice de covariance du vecteur $\underline{V}$

## **Chapitre 6 :**

APPLICATION: EFFET DES INCERTITUDES SUR LE CALCUL D'UN PIPELINE EN  
CONTEXTE ALEATOIRE

## 6.1 Unités

Dans un grand nombre d'applications comme dans l'exemple que nous allons traiter, l'industrie et les normes de production nous imposent l'utilisation de certaines unités, pourtant non-internationales. Ainsi on mesurera la taille d'un écran en pouces (1pouce = 1inch. = 2.54 cm), le volume produit de pétrole en barils (1baril = 0.159m<sup>3</sup>)... etc.

Dans le matériel de forage les unités anglo-saxonnes sont la référence, ainsi les diamètres des pipelines, les poids et les pressions seront respectivement mesurés en inch (pouce), en pound (livre) et en PSI (livre par pouce carré).

On présente ci-dessous la table de conversion des mesures anglo-saxonnes et leur en système international SI. Notons que ceci n'affecte en rien les résultats obtenus ni les différents graphiques résultants.

$$1 \text{ in.} = 1 \text{ pouce} = 0.0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ lb.} = 1 \text{ livre} = 4.448 \text{ N}$$

$$1 \text{ lb./in.}^2 = 1 \text{ PSI} = 1 \text{ livre/pouce carré} = 0.6895 \times 10^4 \text{ Pa.}$$

$$1 \text{ KSI} = 1000 \text{ PSI}$$

$$1 \text{ in.lb} = 1 \text{ pouce-livre} = 0.1130 \text{ N.m}$$

## **6.2 Présentation de l'application**

Nous allons voir dans ce qui suit une application pratique de la théorie développée dans les précédents chapitres à savoir un calcul stochastique d'un élément poutre sur appui élastique en prenant en compte l'aspect aléatoire des différents paramètres entrant dans la résolution (charges, caractéristiques mécaniques de la poutre et de la fondation).

Pour cela on considérera un exemple qui montre bien l'intérêt de cette approche et qui donne une bonne appréciation des résultats ainsi obtenus. C'est aussi un cas qui est très illustratif des phénomènes dit aléatoires puisqu'il fait intervenir l'effet des séismes sur un pipeline métallique. Ces derniers étant le phénomène aléatoire par excellence en génie civil n'ayant ni de prévision ni de mesure exacte quant à leur magnitude et leur propagation.

## **6.3 Description du problème**

Considérons le cas d'un pipeline de fonte enterré avec les caractéristiques géométriques et mécaniques suivantes: un diamètre intérieur  $d = 6$  in (15.24 cm), une épaisseur de paroi  $t = 0.45$  in (1.14 cm), un moment d'inertie  $I = 47.65$  in<sup>4</sup> (19.8 10<sup>2</sup> cm<sup>4</sup>) et un module d'élasticité  $E = 11\ 000$  KSI (75845 MPa).

D'après des considérations géotechniques [4], le module de la fondation  $K$  à une moyenne de  $0.6875$  K/in<sup>2</sup> (4.74 N/mm<sup>2</sup>). Il est observé que  $K(x)$  varie d'une manière aléatoire en chaque point le long du pipeline (les mesures donnant une valeur sensiblement différente à chaque fois selon les conditions atmosphériques et le type d'appareillage utilisé). Il est supposé que la fonction aléatoire  $K(x)$  est parfaitement corrélée avec un coefficient de variation de 30%.

Le pipeline est sujet à un déplacement continu du sol perpendiculaire à ses axes, et défini par la fonction  $U(x) = a[1 - \exp(-\Lambda x)]$ , où  $x$  est mesuré du centre de la faille,  $a = 1$  in. (2.54 cm), et  $\Lambda$  est une variable aléatoire de moyenne égale à  $0.05$  in<sup>-1</sup>. (0.127 cm<sup>-1</sup>) et avec 20% de coefficient de variation.

L'analyse est basée sur l'hypothèse d'un mouvement d'ensemble du pipeline et du sol sur une longueur de 200 in. (510 cm) ce qui permet de rapporter le déplacement de l'un en un chargement de l'autre.

En effet, si on considère  $y(x)$  la fonction de déplacement du pipeline et  $U(x)$  le déplacement du sol alors cette hypothèse permet de calculer le chargement du pipeline à partir de la force exercée par le sol. Celle-ci résulte du déplacement du sol et dépend de ses propriétés d'élasticité. Ce dernier se comporte comme un système masse-ressort à la transmission des efforts jusqu'au pipeline (grâce à l'hypothèse d'un même mouvement du sol et du pipeline), à savoir une force  $F(x) = K(x)U(x)$ .

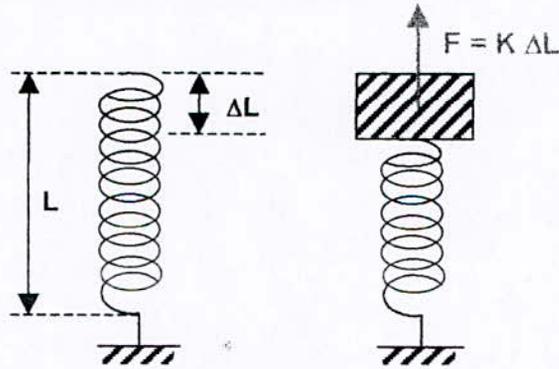


Fig. 5-1

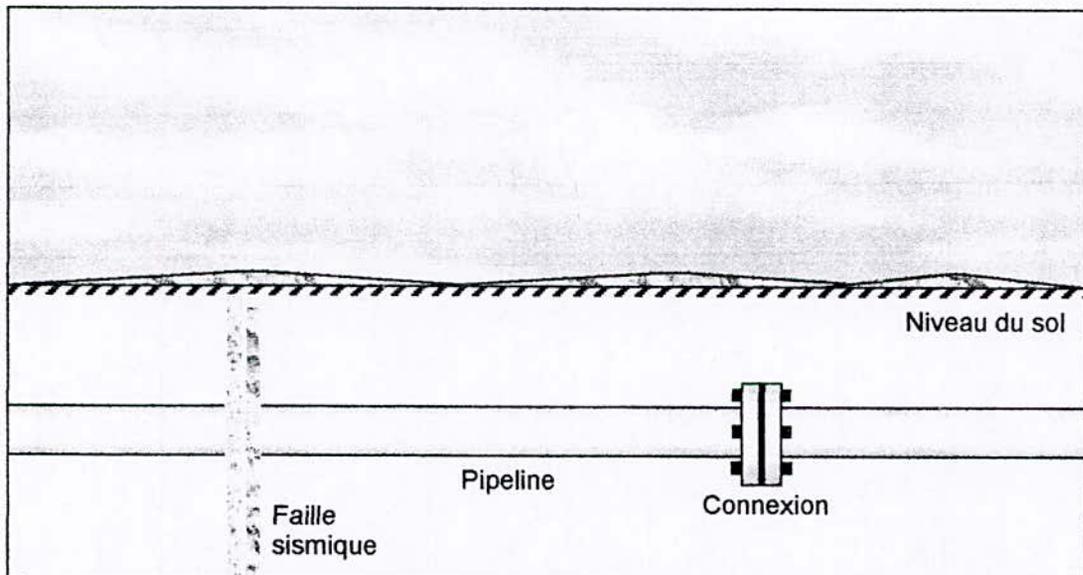


Fig. 5-2 Coupe transversale du pipeline et de la faille sismique

### 6.4 Définitions et propriétés

« pipeline » est le nom anglais donné à une canalisation servant au transport des liquides, des gaz ou des matières pulvérulentes.

Il se présente généralement sous forme d'un tuyau rigide cylindrique en acier ou en fonte de grandeur variable et qui peut être associé à d'autres pipelines pour réaliser des canalisations pouvant aller sur de très longues distances. L'assemblage se fait par un système de fixation très rigide appelé *connexion* réalisé généralement par boulonnage et dans certains cas par soudage bout à bout.

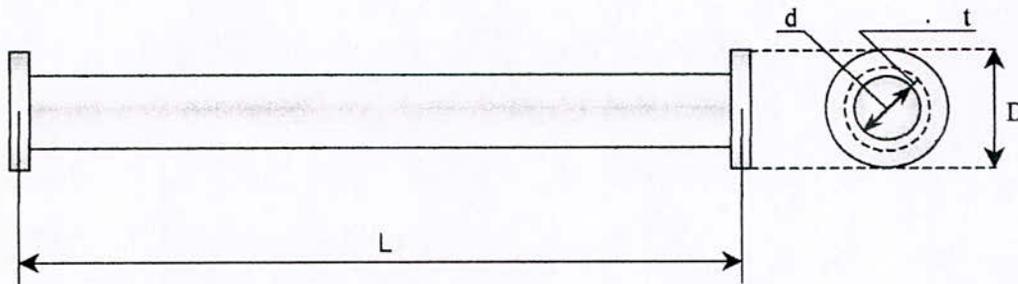


Fig. 5-3 Représentation simplifiée d'un pipeline

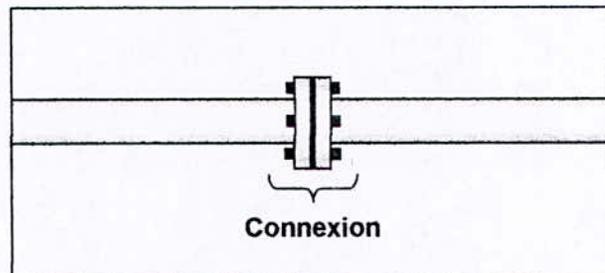


Fig. 5-4 Détail d'une connexion

### 6.5 Schématisation du problème

A partir des considérations énoncées précédemment et d'après la représentation donnée par la figure 5-2, on peut arriver à une schématisation du problème en adoptant les simplifications suivantes: on considère la rigidité de la connexion assez grande pour être finalement substituée par un encastrement dans la transposition du problème réel en schéma statique. La partie du pipeline traversant la faille est libre de se mouvoir de part et d'autre de celle-ci tout en étant localement fixe (au niveau de la faille, une plaque se déplace relativement par rapport à la seconde) ceci se traduit par un déplacement ponctuel nul et une rotation quelconque autour de ce point: c'est donc un appuis simple.

Ainsi, la figure 5-2 prend la forme simplifiée d'une poutre reposant à gauche sur un appui simple permettant toutes les rotations et bloquant les déplacements perpendiculaires et à droite encastree rigidement donc ayant une rotation nulle.

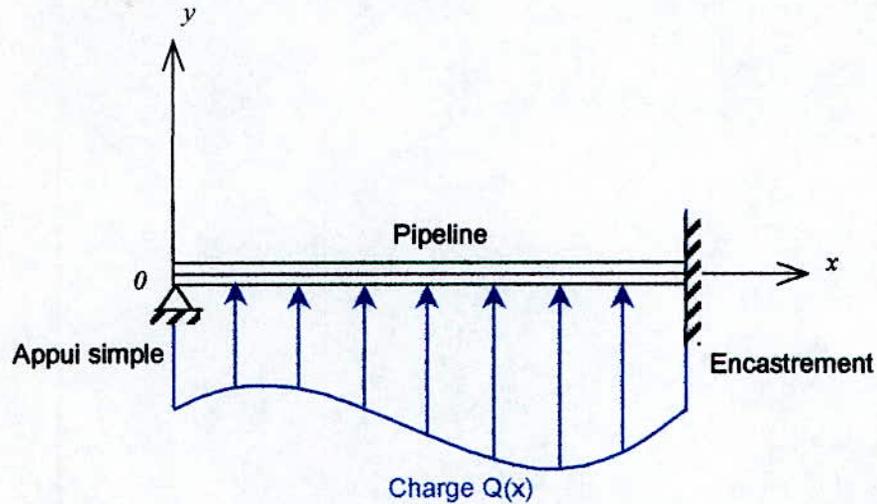


Fig. 5-5 Schéma statique du pipeline

Soumis à un chargement quelconque  $Q(x)$  et sous les contraintes imposées par les conditions aux limites considérées, on peut imaginer l'allure du pipeline après déformation comme suit

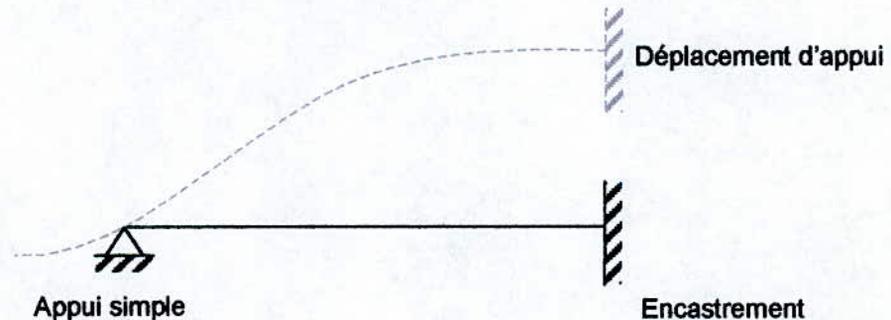


Fig. 5-6 Déformation du pipeline

On peut maintenant passer à la résolution par différences finies de l'équation différentielle d'équilibre 3-2 et dont on retrouve la forme discrète en l'équation 3-7.

### 6.6 Etude déterministe

Comme souligné dans l'énoncé du problème, le module de fondation  $K(x)$  et le déplacement du sol  $U(x)$  sont les seules variables aléatoires du problème, de ce fait le chargement  $Q(x)$ , qui est égal au produit des deux, est aussi une fonction aléatoire dont la moyenne et l'écart type seront déduits à partir des lois de combinaisons des variables aléatoires.

La rigidité est considérée comme une constante. Sa valeur est égale à sa moyenne, son écart type est égale à zéro.

Dans ce qui suit, on définira toute variable intervenant dans la résolution par sa moyenne, ainsi  $K(i) = m_K$ ,  $EI(i) = EI$  (constante) et  $Q(i) = m_Q$

### 6.7 Résolution par différences finies

Il est question dans ce qui suit de résoudre l'équation différentielle de l'équilibre de la poutre représentée par la figure 5-5.

Les conditions aux limites du problème ainsi que tous les paramètres géométriques et mécaniques sont définis dans l'énoncé du problème, rappelons-les brièvement :

Pipeline:

Réaction et chargement:

$$L = 200 \text{ in.}$$

$$t = 0.45 \text{ in.}$$

$$d = 6 \text{ in.}$$

$$I = 47.65 \text{ in}^4.$$

$$E = 11\,000 \text{ ksi}$$

$$K(x): [m_K = 0.6875 ; \sigma_K = 0.3 m_K] (\text{K/in}^2)$$

$$U(x): [m_U = 1 - \exp(-m_\Lambda x) ; \sigma_U = ?] (\text{in.})$$

$$\Lambda : [m_\Lambda = 0.05 ; \sigma_\Lambda = 0.2 m_\Lambda] (\text{in}^{-1})$$

$$EI : [m_{EI} = EI ; \sigma_{EI} = 0] (\text{in}^4)$$

$$Q(x) = K(x) U(x) ; m_Q = ? \text{ et } \sigma_Q = ?$$

Pour une bonne convergence de la méthode et une bonne précision des résultats, on discrétisera le pipeline en le divisant en  $N=40$  éléments d'égale longueur  $h$  donc en faisant intervenir 41 points pivots.  $h$  est le pas de discrétisation (figure 5-7).

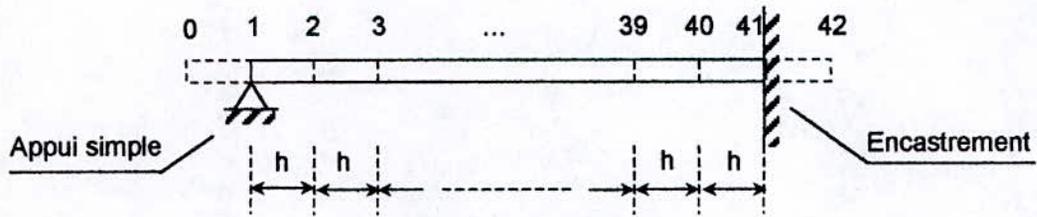


Fig. 5-7 Discrétisation du pipeline

$$h = \frac{L}{N} \quad (5-1)$$

donc,

$$h = \frac{200}{40} = 5 \text{ in.}$$

Le vecteur  $\underline{S}$  de l'équation matricielle 3-20 a pour composante à la  $i$ ème ligne la valeur  $S_i = \frac{h^4 Q_i}{EI}$  où  $Q_i$  est la charge au point pivot  $i$ . Il suffit donc de définir le vecteur de chargement  $\underline{Q}$  pour connaître  $\underline{S}$  directement proportionnel à ce dernier.

D'après les hypothèses du problème, le vecteur chargement  $\underline{Q}$  a pour  $i$ ème composante  $Q_i = K_i U_i$  avec  $K_i$  constant et égale à  $m_k$  et  $U_i$  est la valeur de la fonction  $U(x)$  à l'abscisse  $x_i = (i-1) \cdot h$ .

Le programme de calcul développé au chapitre précédant donne les différentes valeurs intermédiaires de calcul ainsi que le vecteur  $\underline{S}$ . Les résultats sont présentés sur le tableau 5-1.

i	$x_i$	$K_i$	$U_i$	$Q_i$	$S_i$
1	0	0.6875	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	5	0.6875	2.211992E-01	1.520745E-01	1.813346E-04
3	10	0.6875	3.934693E-01	2.705102E-01	3.225582E-04
4	15	0.6875	5.276334E-01	3.627480E-01	4.325431E-04
5	20	0.6875	6.321205E-01	4.345829E-01	5.181996E-04
6	25	0.6875	7.134952E-01	4.905280E-01	5.849088E-04
7	30	0.6875	7.768698E-01	5.340980E-01	6.368621E-04
8	35	0.6875	8.262261E-01	5.680304E-01	6.773233E-04
9	40	0.6875	8.646647E-01	5.944570E-01	7.088346E-04
10	45	0.6875	8.946008E-01	6.150380E-01	7.333755E-04
11	50	0.6875	9.179150E-01	6.310666E-01	7.524880E-04
12	55	0.6875	9.360722E-01	6.435496E-01	7.673729E-04
13	60	0.6875	9.502130E-01	6.532714E-01	7.789652E-04
14	65	0.6875	9.612258E-01	6.608427E-01	7.879933E-04
15	70	0.6875	9.698026E-01	6.667393E-01	7.950244E-04
16	75	0.6875	9.764823E-01	6.713316E-01	8.005003E-04
17	80	0.6875	9.816844E-01	6.749080E-01	8.047649E-04
18	85	0.6875	9.857358E-01	6.776934E-01	8.080861E-04
19	90	0.6875	9.888910E-01	6.798626E-01	8.106727E-04
20	95	0.6875	9.913483E-01	6.815520E-01	8.126872E-04
21	100	0.6875	9.932621E-01	6.828676E-01	8.142560E-04
22	105	0.6875	9.947525E-01	6.838923E-01	8.154778E-04
23	110	0.6875	9.959132E-01	6.846904E-01	8.164294E-04
24	115	0.6875	9.968172E-01	6.853119E-01	8.171705E-04
25	120	0.6875	9.975212E-01	6.857958E-01	8.177476E-04
26	125	0.6875	9.980695E-01	6.861728E-01	8.181970E-04
27	130	0.6875	9.984965E-01	6.864663E-01	8.185471E-04
28	135	0.6875	9.988291E-01	6.866950E-01	8.188198E-04
29	140	0.6875	9.990881E-01	6.868731E-01	8.190321E-04
30	145	0.6875	9.992898E-01	6.870117E-01	8.191974E-04
31	150	0.6875	9.994469E-01	6.871198E-01	8.193263E-04
32	155	0.6875	9.995692E-01	6.872038E-01	8.194265E-04
33	160	0.6875	9.996645E-01	6.872694E-01	8.195047E-04
34	165	0.6875	9.997388E-01	6.873204E-01	8.195655E-04
35	170	0.6875	9.997965E-01	6.873601E-01	8.196128E-04
36	175	0.6875	9.998415E-01	6.873910E-01	8.196497E-04
37	180	0.6875	9.998766E-01	6.874152E-01	8.196785E-04
38	185	0.6875	9.999039E-01	6.874340E-01	8.197009E-04
39	190	0.6875	9.999251E-01	6.874485E-01	8.197182E-04
40	195	0.6875	9.999417E-01	6.874599E-01	8.197319E-04
41	200	0.6875	9.999546E-01	6.874688E-01	8.197424E-04

**Tableau 5-1 Composantes des différents vecteurs**

L'équation 3-7 s'écrit donc:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + 8.1978.10^{-4})y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = +1.1924.10^{-3}Q_i \quad (5-2)$$

$C_i = 6 + 8.1978.10^{-4}$  est la constante donnée dans le système 3-22.

En reprenant l'équation 5-2 et en l'écrivant à chaque station  $i$  tel que  $2 \leq i \leq 40$  (car en  $i=1$  et  $41$  les déplacements sont connus), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \text{nœud 2:} & \quad y_0 - 4y_1 + (6 + 8.1978.10^{-4})y_2 - 4y_3 + y_4 = S_2 \\ \text{nœud 3:} & \quad y_1 - 4y_2 + (6 + 8.1978.10^{-4})y_3 - 4y_4 + y_5 = S_3 \\ & \quad \vdots \\ \text{nœud } i: & \quad y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + 8.1978.10^{-4})y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = S_i \\ & \quad \vdots \\ \text{nœud 39:} & \quad y_{37} - 4y_{38} + (6 + 8.1978.10^{-4})y_{39} - 4y_{40} + y_{41} = S_{39} \\ \text{nœud 40:} & \quad y_{38} - 4y_{39} + (6 + 8.1978.10^{-4})y_{40} - 4y_{41} + y_{42} = S_{40} \end{aligned} \quad (5-3)$$

C'est un système de 39 équations à 41+2 inconnues: 41 déplacements réels correspondant à  $y_i$ ,  $i=1,41$ , et 2 déplacements fictifs correspondant à  $y_0$  et  $y_{42}$ . Pour résoudre ce système on introduit les conditions aux limites.

### 6.8 Conditions aux limites

Du fait des considérations physiques dues au type de problème ainsi qu'à l'environnement naturel dans lequel il se trouve, le pipeline est considéré comme simplement appuyé à une extrémité tandis que l'autre extrémité rigidement fixée subit un déplacement d'appui. En effet, la connexion considérée comme un encastrement se déplace perpendiculairement à l'axe du pipeline d'une valeur égale à  $U(200)$ .

Ainsi, on peut rajouter au système 5-3 les 4 équations données par les conditions aux limites.

A l'appui simple

$$y_1 = 0 \text{ et } y_0 = -y_2 \tag{5-4}$$

A l'encastrement

$$y_{41} = U(200) \text{ et } y_{40} = y_{42} \tag{5-5}$$

Par commodité on notera par  $U_{200}$  la valeur de la fonction  $U$  a  $x = 200$ in. Celle ci est donnée par le tableau 5-1.

En injectant les déplacements donnés par 5-4 et 5-5, le système d'équations 5-3 devient

$$\begin{aligned} \text{nœud 2:} & \quad (5 + 8.1978.10^{-4})y_2 - 4y_3 + y_4 = S_2 \\ \text{nœud 3:} & \quad -4y_2 + (6 + 8.1978.10^{-4})y_3 - 4y_4 + y_5 = S_3 \\ & \quad \vdots \\ \text{nœud i:} & \quad y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + 8.1978.10^{-4})y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = S_i \tag{5-6} \\ & \quad \vdots \\ \text{nœud 39:} & \quad y_{37} - 4y_{38} + (6 + 8.1978.10^{-4})y_{39} - 4y_{40} = S_{39} - U_{200} \\ \text{nœud 40:} & \quad y_{38} - 4y_{39} + (7 + 8.1978.10^{-4})y_{40} = S_{40} + 4U_{200} \end{aligned}$$

Ce nouveau système est à 39 équations et 39 inconnues ( $y_2, y_3, \dots, y_{40}$ ). Le vecteur qu'on recherche  $\underline{V} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{40}, y_{41})$ , à 41 composantes, sera obtenu par la résolution du système 5-6 en y ajoutant les deux composantes  $y_1$  et  $y_{41}$  respectivement définies par 5-4 et 5-5.

L'écriture matricielle du système est  $\underline{A} \underline{V} = \underline{S}$  dont les termes sont ci-après explicités.

$$\begin{bmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & -4 & C_4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & -4 & C_5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & \ddots & & & & & & & \\
 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & C_i & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & C_{37} & -4 & 1 & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & C_{38} & -4 & 1 \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{38,36} & a_{38,37} & a_{38,38} & a_{38,39} \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{39,37} & a_{39,38} & a_{39,39}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 y_5 \\
 \vdots \\
 y_i \\
 \vdots \\
 y_{37} \\
 y_{38} \\
 y_{39} \\
 y_{40}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 S_2 \\
 S_3 \\
 S_4 \\
 S_5 \\
 \vdots \\
 S_i \\
 \vdots \\
 S_{37} \\
 S_{38} \\
 S_{39} - U_{200} \\
 S_{40} + 4U_{200}
 \end{bmatrix}
 \quad (5-7)$$

Pour  $i=1,41 : C_i = 6.00081978$

Les coefficients des deux premières et dernières lignes de la matrice sont :

$$\begin{array}{l}
 a_{1,1} = 5.00081978 \\
 a_{1,2} = -4 \\
 a_{1,3} = 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 a_{2,1} = -4 \\
 a_{2,2} = 6.00081978 \\
 a_{2,3} = 1 \\
 a_{2,4} = -4
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l}
 a_{38,36} = 1 \\
 a_{38,37} = -4 \\
 a_{38,38} = 6.00081978 \\
 a_{38,39} = -4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 a_{39,37} = 1 \\
 a_{39,38} = -4 \\
 a_{39,39} = 7.00081978
 \end{array}$$

Les valeurs numériques du vecteur  $\underline{S}$  (à N-2 composantes) sont données par le tableau suivant (sont identiques aux valeurs du tableau 5-1 sauf pour  $i=38$  et  $i=39$ )

<i>i</i>	<i>S</i>	<i>l</i>	<i>S</i>
1	1.813346E-04	21	8.154778E-04
2	3.225582E-04	22	8.164294E-04
3	4.325431E-04	23	8.171705E-04
4	5.181996E-04	24	8.177476E-04
5	5.849088E-04	25	8.181970E-04
6	6.368621E-04	26	8.185471E-04
7	6.773233E-04	27	8.188198E-04
8	7.088346E-04	28	8.190321E-04
9	7.333755E-04	29	8.191974E-04
10	7.524880E-04	30	8.193263E-04
11	7.673729E-04	31	8.194265E-04
12	7.789652E-04	32	8.195047E-04
13	7.879933E-04	33	8.195655E-04
14	7.950244E-04	34	8.196128E-04
15	8.005003E-04	35	8.196497E-04
16	8.047649E-04	36	8.196785E-04
17	8.080861E-04	37	8.197009E-04
18	8.106727E-04	38	-9.991348E-01
19	8.126872E-04	39	4.000638
20	8.142560E-04		

**Tableau 5-2 Composantes de *S***

Le programme Fortran, dans sa première partie, défini par l'organigramme page 51 permet de résoudre l'équation matricielle 5-7. La matrice *A* étant non symétrique on utilisera une subroutine de Gauss pour la triangularisation (il existe d'autres méthodes pour le cas de matrices symétriques : Cholesky... etc.).

## 6.9 Résultats

L'exécution du programme sous Fortran donne la valeur du vecteur déplacement  $\underline{V}$ . Les résultats sont représentés dans le tableau suivant

i	$\underline{V}$	i	$\underline{V}$
1	0.000000E+00	22	1.034485
2	9.689005E-02	23	1.036945
3	1.923740E-01	24	1.037820
4	2.851482E-01	25	1.037418
5	3.740730E-01	26	1.036012
6	4.582084E-01	27	1.033841
7	5.368252E-01	28	1.031116
8	6.094035E-01	29	1.028018
9	6.756222E-01	30	1.024700
10	7.353331E-01	31	1.021294
11	7.885482E-01	32	1.017909
12	8.354081E-01	33	1.014638
13	8.761596E-01	34	1.011557
14	9.111299E-01	35	1.008734
15	9.407111E-01	36	1.006225
16	9.653350E-01	37	1.004077
17	9.854553E-01	38	1.002336
18	1.001538	39	1.001043
19	1.014043	40	1.000236
20	1.023422	41	9.999546E-01
21	1.030102		

Tableau 5-3 Composantes de  $\underline{V}$

La figure 5-8 représente la valeur moyenne du déplacement du sol  $U(x)$  (c'est la valeur de la fonction  $U$  pour la valeur moyenne du paramètre  $\lambda$ ) ainsi que la valeur moyenne du déplacement vertical du pipeline (la fonction de déformation  $y(x)$  est obtenue par un lissage du vecteur déplacement  $V$  obtenu après résolution de l'équation différentielle par différences finies).

$U$  est parfaitement définie par l'expression:  $U(x) = 1 - \exp(-m_{\Lambda}x)$  avec  $m_{\Lambda} = 0.05 \text{ in}^{-1}$ .

$V(i)$  est définie par le tableau 5-3, ses valeurs sont une approximation de la solution exacte de l'équation différentielle.

L'utilisation d'un grapheur permet d'avoir simultanément la courbe de la fonction réelle  $U$  et l'interpolation de la fonction numérique  $y(x)$  (voir figure 5-8)

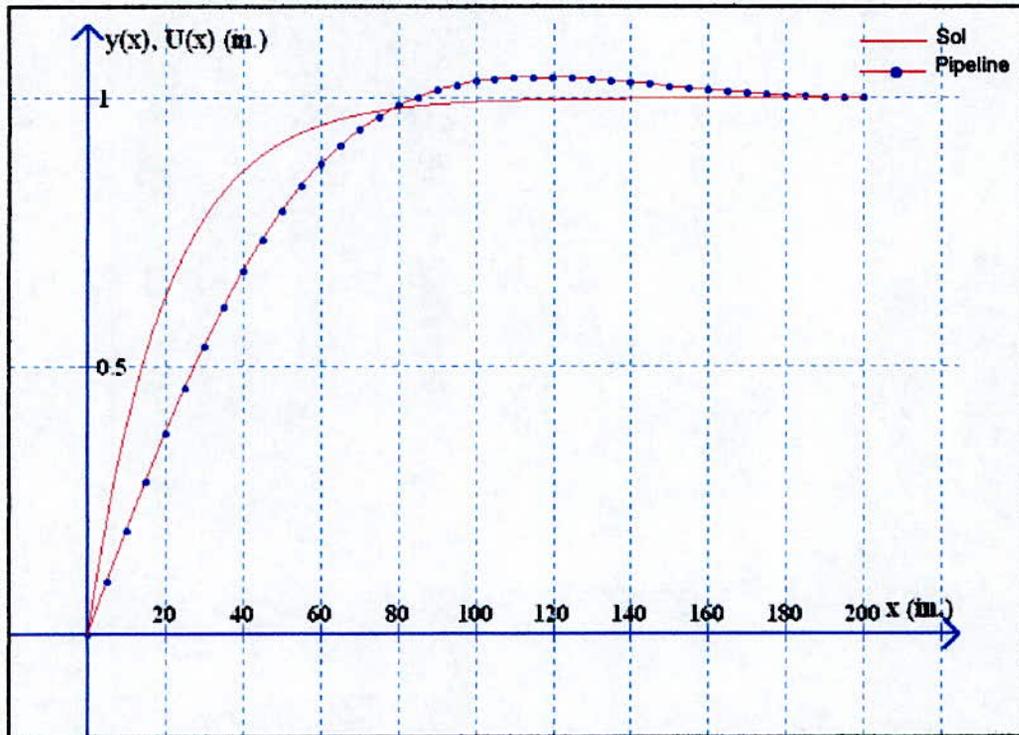


Fig. 5-8 Valeur moyenne du déplacement du sol et de la déformation du pipeline

Il apparaît que la déformation du pipeline prend la même allure que le déplacement du sol, ceci est un résultat clair de l'hypothèse énoncée du mouvement d'ensemble sol-pipeline, notons aussi l'existence d'une incertitude sur les valeurs de la déformation  $V(i)$  due à l'utilisation de méthodes approximatives de résolution.

On constate aussi que la tangente à la courbe des déformations du pipeline est différente de zéro à l'origine qui se traduit par une rotation autour de l'appui simple tandis qu'à l'encastrement la rotation est nulle.

On remarque aussi l'existence d'un point d'inflexion de la courbe des déformation autour de l'abscisse  $x=150$  in. L'interprétation mathématique de cette remarque est une seconde dérivée nulle de la fonction  $y(x)$ . Rappelons que le moment de flexion s'exprime à l'aide de la seconde dérivée de la déformation (Cf. Chapitre 1, §4).

On peut vérifier ces résultats en calculant la valeur du moment tout au long du pipeline.

Le moment de flexion moyen peu être facilement déterminé à partir des résultats ci-dessus trouvés. En effet, en utilisant la formule 3-16 on peu trouver les valeurs discrètes du moment de flexion en fonction des valeurs des déplacements verticaux.

Rappelons la formule 3-16

$$M_n = -EI \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$$

Ainsi, pour  $i=4$  par exemple on a :

$$M_4 = -EI \frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{h^2}$$

Le programme réalisé peut ainsi prendre en charge le calcul simultané des moments et des déplacements moyens à chaque station ou point pivot.

Le tableau suivant présente les valeurs numérique du moment

$i$	$M_n$	$i$	$M_n$
1	0.000000E+00	22	40.326890
2	29.479740	23	33.226250
3	56.812850	24	26.765450
4	80.707500	25	21.064460
5	100.414800	26	16.013280
6	115.701400	27	11.634440
7	126.603500	28	7.825440
8	133.334900	29	4.593791
9	136.442800	30	1.869508
10	136.192900	31	-4.498816E-01
11	133.241200	32	-2.394370
12	128.068800	33	-3.998947
13	121.209300	34	-5.396080
14	112.987800	35	-6.560773
15	103.933900	36	-7.598000
16	94.422650	37	-8.520257
17	84.660210	38	-9.395027
18	74.986510	39	-10.199810
19	65.567740	40	-11.007100
20	56.570110	41	-11.806890
21	48.162320		

**Tableau 5-4** *Valeur des moments*

On peut vérifier que le moment à l'encastrement qui correspond à  $i=41$  est différent de zéro, et qu'il est presque nul à  $x=155$  in. Cet écart du zéro est dû aux erreurs déjà cumulées sur les valeurs des déplacements, la méthode de résolution du problème, nous le rappelons, n'est qu'une approximation.

La figure 5-9 représente l'interpolation de la suite numérique  $M_n$ . C'est la moyenne prise en valeur absolue du moment de flexion aux différents points pivots considérés.

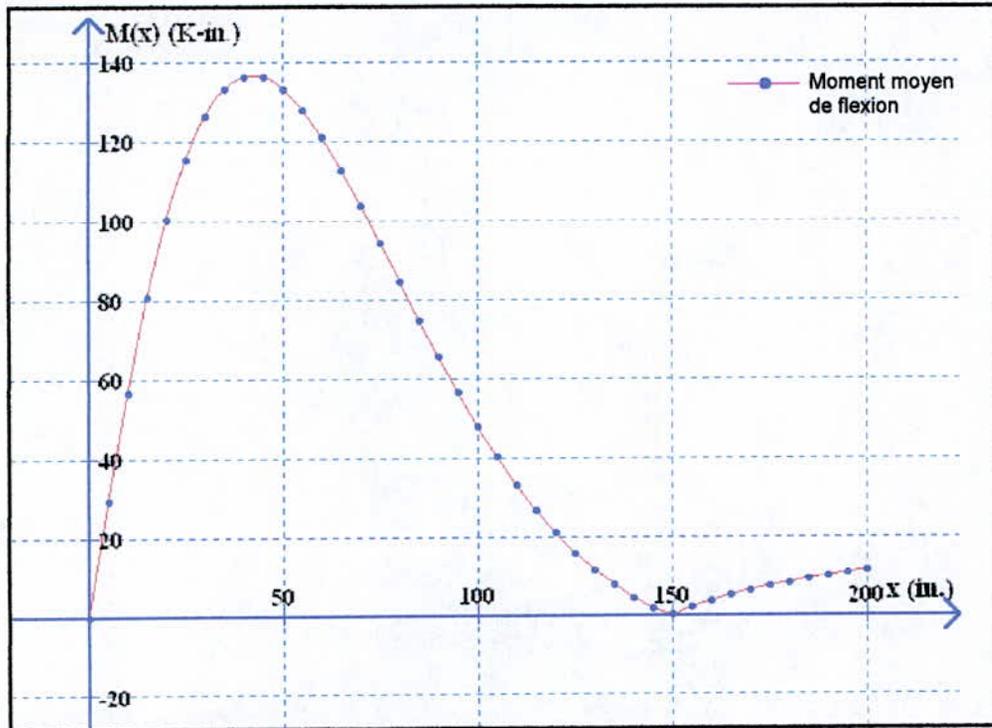


Fig. 5-9 Valeur moyenne du moment de flexion

C'est une courbe en cloche avec un maximum de 136 K-in. autour de l'abscisse  $x=40$  in. et qui s'annule en  $x \approx 150$  in. pour remonter à une valeur d'environ 12 K-in. à l'encastrement.

### 6.10 Analyse du second ordre

Le vecteur  $\underline{V}$  des déplacements est fonction des vecteurs aléatoires  $\underline{K}$  et  $\underline{S}$  ainsi que de la variable aléatoire  $EI$ . Le calcul déterministe permet de calculer la valeur moyenne de ce vecteur qui elle dépend des moyennes  $\underline{m}_k$ ,  $\underline{m}_{EI}$  et  $\underline{m}_s$  :

$$\underline{m}_V \cong \underline{V}(\underline{m}_k, \underline{m}_{EI}, \underline{m}_s)$$

Le calcul de la covariance de  $\underline{V}$  nécessite la connaissance des caractéristiques de  $\underline{K}$ ,  $EI$  et  $\underline{S}$  (énoncées en page 60, avec  $\underline{m}_s$  proportionnel à  $\underline{m}_Q$ ). Celle ci est donnée par la formule [8]

$$\underline{\Sigma}_V = \underline{V}_{(K)}^T \underline{\Sigma}_{(K)} \underline{V}_{(K)} + \left( \frac{\partial \underline{V}}{\partial EI} \right)^2 \sigma_{EI}^2 + \underline{V}_{(S)}^T \underline{\Sigma}_{(S)} \underline{V}_{(S)}$$

Dans notre cas la variance de  $EI$  est nulle. La relation 4-9 s'écrit alors :

$$\underline{\Sigma V} = \underline{V}_{(K)}^T \underline{\Sigma}(K) \underline{V}_{(K)} + \underline{V}_{(S)}^T \underline{\Sigma}(S) \underline{V}_{(S)} \quad (5-8)$$

### 6.11 Calcul des dérivées partielles

Dans cet exemple,  $Q(x)$  est lié au déplacement du sol  $U(x)$  par le module de fondation  $K(x)$ , ceci nous permet de reprendre directement les résultats obtenus au chapitre 4 concernant le calcul des différentes dérivées.

*Dérivées partielles par rapport à  $K_i$*

D'après la relation 4-5 on a,

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial K_i} = \underline{A}^{-1} \left( \frac{\partial \underline{S}}{\partial K_i} - \frac{\partial \underline{A}}{\partial K_i} \cdot \underline{V} \right)$$

pour :  $K_i = K = \text{constante}$ , on a :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial K_i} = \text{cste} = \underline{A}^{-1} \left( \frac{\partial \underline{S}}{\partial K} - \frac{\partial \underline{A}}{\partial K} \cdot \underline{V} \right) \quad (5-9)$$

$\frac{\partial \underline{A}}{\partial K}$  : est une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale

tous égale à  $\frac{h^4}{EI}$  ( c'est la conséquence de la dérivée de l'élément  $C + \frac{h^4}{EI} \cdot K$  ) ;

$\frac{\partial \underline{S}}{\partial K}$  : est un vecteur à 39 composantes non nulles, égales à  $\frac{h^4}{EI} U_i$ , car un élément de la

ligne (i) du vecteur  $\underline{S}$  s'écrit :  $S_i = \frac{h^4}{EI} K \cdot U_i$  ;

$\underline{A}^{-1}$  : est la matrice inverse de la matrice des coefficients  $\underline{A}$ .

La relation 5-8 s'écrit alors de la manière vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial K} = \underline{A}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{h^4 U_2}{EI} \\ \vdots \\ \frac{h^4 U_i}{EI} \\ \vdots \\ \frac{h^4 U_{40}}{EI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{h^4}{EI} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{h^4}{EI} & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{h^4}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_{39} \\ V_{40} \end{bmatrix} \right) \quad (5-10)$$

Finalement, la formule 5-9 devient :

$$\frac{\partial V}{\partial K} = \underline{A}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{h^4}{EI} (U_2 - V_2) \\ \frac{h^4}{EI} (U_3 - V_3) \\ \vdots \\ \frac{h^4}{EI} (U_{39} - V_{39}) \\ \frac{h^4}{EI} (U_{40} - V_{40}) \end{pmatrix} \quad (5-11)$$

*Dérivées partielles par rapport à  $S_i$*

De même, d'après 4-6 :

$$\frac{\partial V}{\partial S_i} = \underline{A}^{-1} \left( \frac{\partial \underline{S}}{\partial S_i} - \frac{\partial \underline{A}}{\partial S_i} \cdot \underline{V} \right)$$

$\frac{\partial \underline{A}}{\partial S_i}$  : est la matrice définie au chapitre 4 possédant l'élément  $a(i,i) = \left( \frac{1}{U_i} \right)$ .

$\frac{\partial \underline{S}}{\partial S_i}$  : est un vecteur à 39 composantes toutes nulles, sauf celle de la  $i$ ème ligne étant égale à 1.

Ainsi, la relation 4-6 s'écrira sous la nouvelle forme :

$$\frac{\partial V}{\partial S_i} = \underline{A}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_{39} \\ V_{40} \end{bmatrix} \right) \quad (5-12)$$

Après simplification :

$$\frac{\partial V}{\partial S_i} = \underline{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 - \frac{V_i}{U_i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5-13)$$

**6.12 Matrices de covariances**

Les vecteurs aléatoires  $\underline{K}$  et  $\underline{S}$  sont supposés parfaitement corrélés, ce qui suppose d'après 2-9 que,  $Cov(S_i, S_j) = \sigma_{S_i} \sigma_{S_j}$ , de même pour les covariances de  $\underline{K}$ .

La matrice  $\underline{\Sigma}(K)$  est une matrice 39x39, dont tous les éléments sont égaux à la variance donc :

$$\underline{\Sigma}_K = \begin{pmatrix} \sigma_K^2 & \dots & \sigma_K^2 & \dots & \sigma_K^2 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \sigma_K^2 & & \sigma_K^2 & & \sigma_K^2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ \sigma_K^2 & \dots & \sigma_K^2 & \dots & \sigma_K^2 \end{pmatrix} \quad (5-14)$$

$$\sigma_K^2 = (0.3.m_K)^2$$

La matrice  $\underline{\Sigma}(S)$  s'écrit de la même manière que  $\underline{\Sigma}(K)$ , reste à définir le vecteur variance associé au vecteur aléatoire  $\underline{S}$ .

Les composantes du vecteur aléatoire  $\underline{S}$  sont le produit de deux variables aléatoires K et U que multiplie un coefficient égale à  $h^4/EI$ .

Au chapitre 2 nous avons défini les caractéristiques numériques du produit de deux variables aléatoires, la formule donnée en 2-11 devient alors :

$$Var(K * U) = Var(K) * Var(U) + m_K^2 Var(U) + m_U^2 Var(K) \quad (5-15)$$

La moyenne de  $\underline{U}$  est connue en tout point, mais pas sa variance.  $U(x)$  est une fonction à paramètre  $\lambda$  aléatoire, nous pouvons déduire ses caractéristiques numériques à partir de celles de  $\lambda$  comme suit (voir formule 2-17) :

$$Var(U) = [U'(m_\lambda)]^2 Var(\lambda) \quad (5-16)$$

La variance de  $S_i$ , élément de  $\underline{S}$ , sera :

$$Var(S_i) = \left( \frac{h^4}{EI} \right)^2 Var(K.U) \quad (5-17)$$

Ainsi, la formule 5-8 est totalement définie. Le vecteur variance du vecteur V sera constitué des éléments diagonaux de la matrice de covariance obtenue. Le vecteur écart type en sera la racine carrée

### 6.13 Résultats

Le carré des valeurs diagonales de la matrice de covariance (donc le vecteur écart type de  $\underline{V}$ ) obtenues par le programme sont données par le tableau suivant :

l	$\sigma_v$	l	$\sigma_v$
1	7.752237E-03	21	1.188328E-02
2	1.515922E-02	22	1.157016E-02
3	2.191505E-02	23	1.162153E-02
4	2.777542E-02	24	1.181782E-02
5	3.256734E-02	25	1.198603E-02
6	3.619042E-02	26	1.201392E-02
7	3.861205E-02	27	1.184020E-02
8	3.985893E-02	28	1.144014E-02
9	4.000735E-02	29	1.081416E-02
10	3.917197E-02	30	9.979813E-03
11	3.749562E-02	31	8.966658E-03
12	3.513988E-02	32	7.812968E-03
13	3.227698E-02	33	6.563660E-03
14	2.908390E-02	34	5.269155E-03
15	2.573821E-02	35	3.984768E-03
16	2.241646E-02	36	2.770595E-03
17	1.929404E-02	37	1.691679E-03
18	1.654414E-02	38	8.184004E-04
19	1.432841E-02	39	2.269781E-04
20	1.276668E-02		

On donne ainsi les graphes suivants représentant respectivement la fonction de déplacement du pipeline précédemment donnée à laquelle est additionnée trois fois l'écart type (pour pouvoir apprécier les différents écarts par rapport à l'échelle) et les moments fléchissant additionnés à trois fois leur écart type :

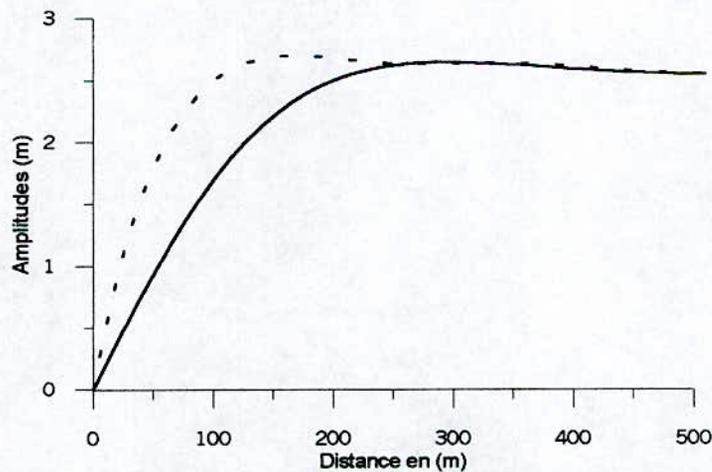
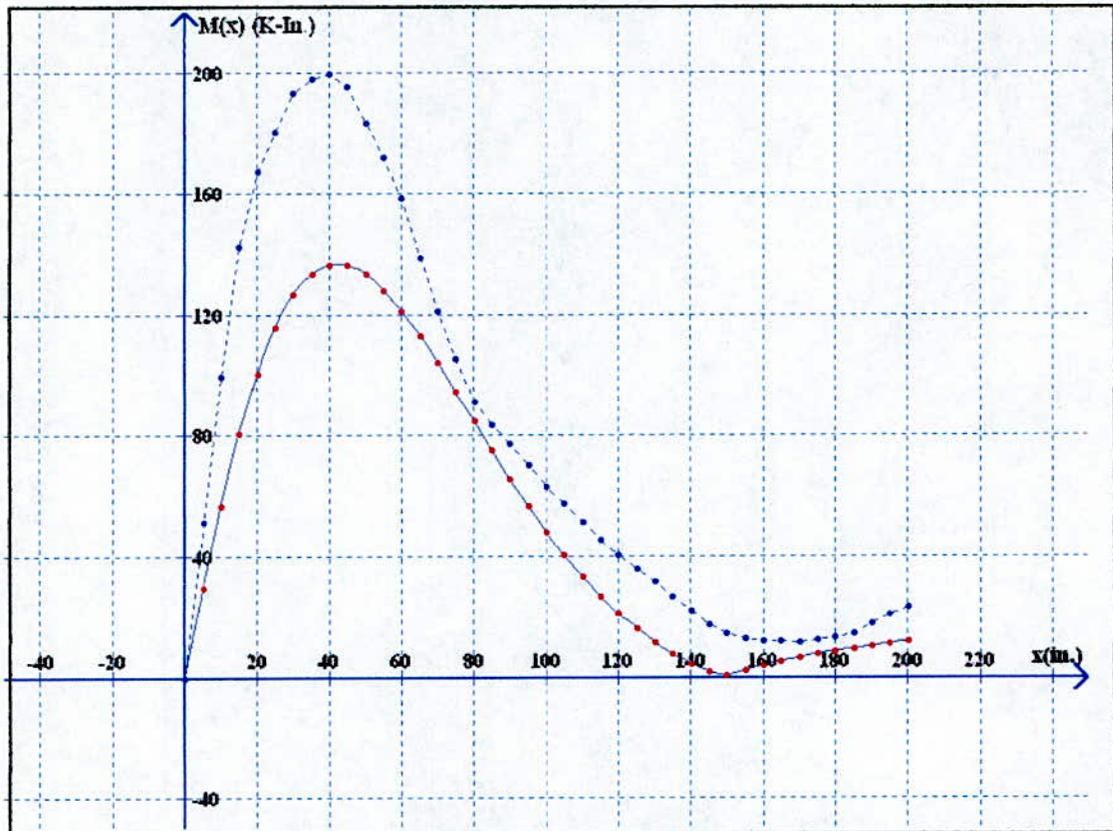


Figure 2 : Variation des déformations du pipeline (trait plein) et écart-type correspondant (pointillés)



**Fig.5-11** Variation du moment fléchissant (trait plein) et écart-type correspondant (pointillés)

Les écarts aux maxima sont trois fois la valeurs des écarts réels, ainsi on peut déduire une incertitude de 10% sur les moments autour de l'abscisse  $x=40$  in.

## Conclusions

A travers une méthodologie simple nous sommes arrivés à décrire les incertitudes de la réponse d'une poutre sur appui élastique et ceci à partir des charges et caractéristiques ponctuelles. L'analyse est bien plus simple que celle qui utilise la théorie des éléments finis stochastique qui nécessite des valeurs spatiales des différents paramètres.

La méthode de résolution est aussi très abordable et très aisée et avec une grande efficacité quant à la résolution de ce type d'équations aux différences finies. L'erreur introduite par la méthode est négligeable et tend vers zéro d'autant plus rapidement que le pas de discrétisation est réduit.

La méthode des différences finies a été généralisée pour l'analyse du problème de réponse des structures avec des caractéristiques aléatoires du sol et du chargement. Des développements théoriques ont été appliqués pour l'analyse de second ordre de la réponse d'un pipeline de fonte soumis à un mouvement du sol aléatoire permanent.

Les résultats montrent que les incertitudes sur les caractéristiques du sol et du chargement peuvent être des paramètres de design et de conception significatifs.

L'existence de ces champs aléatoires et des incertitudes, à une large échelle, dans les données de tout problème est inévitable. Leur maîtrise dans un futur proche est essentiel pour faire face aux problèmes d'ingénierie de design des structures par rapport aux tremblements de terre, aux mouvements tectonique et des raz de marées et tout autres éléments et propriétés qu'on connaît le moins.

Réduire le champ d'influence des différents aléas (atmosphériques, sismiques, géotechniques, ...etc.) est une obligation et un critère déterminant pour arriver à une diminution des risques et arriver à un haut degré de sécurité et de fiabilité des structures.

## **Bibliographie**

(Par ordre alphabétique des titres)

- [1] McCracken D., *A guide to FORTRAN programming*, John Wiley and sons, New York, 1961.
- [2] Bensaïbi M., Yahi M., *Analyse flexionnelle des plaques multicouches par différences finies-éléments finis et bandes finies*, ENP, Alger, 1990.
- [3] Wang P.C., *Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles*, Dunod, Paris, 1969.
- [4] Costet J. et Sanglerat G., *Cours pratique de mécanique des sols Tome 1&2*, Dunod, Paris, 1985.
- [5] Press William H. & Flannery Brian P., *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press.
- [6] Taïbi N., *Pratique du FORTRAN 77*, BERTI Edition, Alger, 1992.
- [7] Benjamain Jack R. & Cornell Allin C., *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill Publishing Company, 1970.
- [8] Ventsel H., *Théorie des probabilités*, Edition Mir, Moscou, 1973.