

*Ecole Nationale Polytechnique*

Département : Génie civil



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'état  
en Génie Civil

Thème :

**ANALYSE DES PROBLEMES DE CONDUCTION  
DE LA CHALEUR EN REGIME STATIONNAIRE  
PAR DIFFERENTES METHODES NUMERIQUES**

**Proposé et dirigé par :**

Mr. M. DEMIDEM

**Présenté par :**

KACIMI EL HASSANI Ahmed Amine

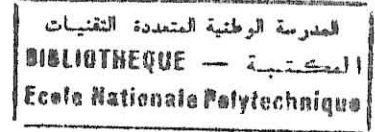
HARKATI Mounir

*Promotion JUIN 2003*

ENP, 10 avenue Hacène Badi, El Harrache, Alger



## DEDICACES



A la mémoire du très cher grand-père : Sidi El Cheikh El Emir,

Je dédie ce travail...

A ma mère

A mon père

A ma sœur et mes tantes

A mes chers oncles : Mohamed, Ahmed et Belkacem

**Amine**

A mon père

A ma mère et sa famille

A mes frères et mes sœurs

A tous les amis

**Mounir**

## Remerciements



*Nous tenons à remercier notre promoteur Mr DEMIDEM pour ses précieux conseils, son aide et suivi du travail durant toute l'année.*

*Nous remercions aussi l'ensemble du personnel de la bibliothèque de l'E.N.P pour leur coopération ainsi que tous nous amis. Que toute personne qui a contribué à la réalisation de ce travail, trouve –ici- l'expression de notre gratitude.*



**Mots clés:** transfert de la chaleur, séparation des variables, Poisson, Laplace, conduction, Galerkin, différences finies, éléments finis.

## RESUME

Notre travail a consisté en l'étude du problème de conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire (ou carré) pour un régime stationnaire, en se limitant au problème de Dirichlet comme type de conditions aux limites (C.A.L) et en utilisant les méthodes de Galerkin, différences finies et éléments finis. A cet effet, de nombreux cas ont été traités pour pouvoir comparer par la fin entre les résultats issus des différentes méthodes et en déduire les caractéristiques de chaque méthode dans le traitement de ce type de problèmes.

## ABSTRACT

The study of the heat conduction problem through a rectangular (or square) domain in the steady state and for Dirichlet boundary problem is present in this work. Thus, we have used : Galerkin, finite differences and finite elements methods.

For this aim, a various cases were been treated in order to compare between the results of this methods then deduce the characteristics of each method in the treatment of this kind of problems.

## ملخص

يتمثل هذا البحث في دراسة المسائل المتعلقة بانتشار الحرارة بواسطة خاصية الناقلية في وسط مستطيل (أو مربع) في حالة الثبوتية مقتصرين على شرط ديريكليه المتناهي واستعملنا لذلك التقنيات : غالركين، الفروق المحدودة و الأجزاء المحدودة. لهذه الغاية، تم معالجة حالات متعددة لنتمكن من المقارنة بين النتائج المحصلة من مختلف التقنيات و نستنتج خواص كل تقنية في معالجة مثل هذه المسائل.

## TABLE DES MATIERES

|   | Page |
|---|------|
| <b>INTRODUCTION.....</b>  | 01   |
| <b><i>CHAPITRE I LES EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES</i></b>   |      |
| <b>I.1) INTRODUCTION.....</b>   | 03   |
| <b>I.2) TYPE DES EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLE.....</b>   | 04   |
| I.2.1) le type hyperbolique.....  | 05   |
| I. 2.2) Le type elliptique.....   | 05   |
| I.2.3) le type parabolique (L'équation de la chaleur) .....   | 07   |
| <b>I.3 ) METHODES DE RESOLUTION .....</b>   | 09   |
| I.3.1) Régime stationnaire.....   | 09   |
| I.3.2) Régimes instationnaires.....   | 09   |
| <b>I.4) EXEMPLE SUR LA RESOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLEME.....</b>   | 10   |
| I.4.1) équation de poisson... ..  | 10   |
| <b>I.5) METHODE DE GALERKINE.....</b>   | 14   |
| I.5.1) Propriété de meilleure approximation .....   | 14   |
| I.5.2) Exemple.....   | 17   |
| <b><i>CHAPITRE II LE TRANSFERT DE LA CHALEUR</i></b>  |      |
| <b>II.1) INTRODUCTION.....</b>  | 20   |
| <b>II.2 ) MODES DE TRANSFERT DE LA CHALEUR .....</b>  | 20   |
| II. 2.1) La conduction .....  | 20   |
| II.2.1.1) Loi de Fourier.....   | 21   |
| II.2.2) la convection .....   | 22   |
| II.2.3) La radiation :.....   | 23   |
| <b>II.3) EQUATION GENERALE DE LA CONDUCTION.....</b>  | 24   |
| II.3.1) L'élaboration de l'équation de Laplace .....  | 24   |
| II..3.1). a équation de conservation de l'énergie.....  | 24   |
| <b>II.4) SOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE POUR LA PLAQUE<br/>RECTANGULAIRE.....</b>                            | 28   |
| II.4.1) Cas ou les trois cotes sont à la même température T1 et une cote à la<br>température: $T=\Phi(x)$ ..... | 29   |
| II.4-2) Cas ou les deux cotes sont à la même température T1 et deux cote<br>aux températures F1 et F2.....      | 34   |
| II.4.3 ) Cas ou les quatre cotes sont aux températures F1,F2,G1 et G2.....                                      | 35   |

### **CHAPITRE III METHODE DES DIFFERENCES FINIS**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>III.1) INTRODUCTION.....</b>   | <b>37</b> |
| <b>III.2) METHODE DES DIFFERENCES FINIS.....</b>  | <b>38</b> |
| III.2.1) Introduction .....   | 38        |
| III.2.2) Etapes de mise en œuvre .....  | 39        |
| III.2.2.a) Etape de discrétisation .....  | 39        |
| III.2.2.b) Etape d'approximation .....  | 39        |
| III.2.2.c) Etape de résolution.....   | 39        |
| III.2.3) Théorème de Taylor- Analyse d'approximation en différences<br>finies.....          | 39        |
| III.2.3.a) Théorème de Taylor (1D).....   | 39        |
| III.2.3.b) approximation en différences finies et opérateurs en différences<br>finies ..... | 40        |
| <b>III.3) EPRESENTATION DES DERIVEES PAR LES DIFFERENCES FINIES.....</b>                    | <b>41</b> |
| <b>III.4) EXPRESSION DES DIFFERENCES FINIES EN COORDONNEES<br/>CARTESIENNES.....</b>        | <b>43</b> |
| <b>III.5) PRESENTATION DE L'ALGORITHME M.D.F.....</b>                                       | <b>44</b> |
| <b>III.3) EXEMPLE.....</b>  | <b>45</b> |

### **CHAPITRE IV PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>VI.1) INTRODUCTION.....</b>                                  | <b>46</b> |
| <b>IV.2) PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL .....</b>                  | <b>46</b> |
| <b>IV.3) APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS.....</b>              | <b>48</b> |
| IV.3.1) Approximation nodales.....                              | 48        |
| IV.3.2) Eléments de référence.....                              | 49        |
| <b>IV.4) DERIVATION DES EQUATIONS POUR DE LA MEF .....</b>      | <b>56</b> |
| IV.4.1) approche variationnelle .....                           | 56        |
| IV.4.1.1) Etapes de dérivation des équations de la MEF .....    | 56        |
| <b>IV.5) EXEMPLE .....</b>                                      | <b>59</b> |
| <b>IV.6) CONVERGENCE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....</b> | <b>63</b> |
| IV.6.1) Convergence monotone .....                              | 63        |
| IV.6.2) Convergence non monotone .....                          | 64        |

### **CHAPITRE V Etude comparative de résultats**

|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| <b>V.1) INTRODUCTION.....</b> | <b>67</b> |
|-------------------------------|-----------|

Les solutions des équations de Poisson et de Laplace et des équations analogues possèdent de multiples propriétés: elles sont analytiques, ne peuvent pas avoir de maximum ni de minimum à l'intérieur d'un domaine où l'équation est vérifiée. On appelle *fonctions harmoniques* les fonctions qui vérifient l'équation de Laplace.

### La monotonie

On dit qu'une fonction  $F$  est *monotone* si pour tout couple

$$\begin{aligned} &\text{pour tout couple } (v, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \\ &(v-v)(F(v)-F(v)) \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{I-4})$$

Si  $F$  est linéaire par rapport à  $\text{grad } u$ , on peut écrire:

$$F_i(\overline{\text{grad } u}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

La condition de monotonie signifie alors que la partie symétrique de la matrice des  $a_{ij}$  est positive, et définie positive s'il y a monotonie stricte.

On notera en particulier que dans le cas de l'équation de Poisson-Laplace c'est l'opérateur:  $\Delta$  (Laplacien) qui a la propriété de monotonie.

### I.1.3) le type parabolique (L'équation de la chaleur) :

Si les équations hyperboliques décrivent l'évolution des phénomènes physiques réversibles, les phénomènes irréversibles relèvent du type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur, dite aussi de Fourier:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + f, \quad (\text{I-5})$$

Notons tout de suite qu'au contraire de l'équation des ondes cette équation est modifiée par le changement de  $t$  en  $-t$ .

Elle décrit la diffusion de la chaleur, mais aussi bien d'autres phénomènes de diffusion, en particulier celle d'un corps en solution.

Les problèmes bien posés typiques de l'équation de la chaleur, et des équations paraboliques en général, sont des *problèmes mixtes*. On donne un domaine ouvert  $Y$  de l'espace et on cherche une solution  $u$  sur  $[0, \infty[ \times \Omega$  qui vérifie une condition initiale :  $u(0, x) = u_0(x)$ ,  $u_0$  fonction donnée et, à chaque instant  $t$ , une condition sur la frontière, condition de Dirichlet, ou de Neumann ou mêlée.

La différence avec le cas hyperbolique est à chercher dans le comportement vis-à-vis de la variable temps.

Pour résoudre l'équation générale (I-5), il faut s'imposer une condition initiale (en général, la distribution initiale de la température) et des conditions aux limites à la surface du corps conducteur, conditions que l'on classe en trois types principaux:

- a) distribution de température imposée (variable ou non dans le temps) ou condition de Dirichlet;
- b) distribution imposée de densité de flux de chaleur (variable ou non dans le temps) ou condition de Neumann;
- c) relation entre la densité de flux de chaleur à la surface du corps et la température au même endroit. Si cette relation est linéaire, on appelle cette condition la condition de Fourier.

### I.3) METHODES DE RESOLUTION :

On se limitera dans le contexte de notre étude au cas des corps homogènes et isotropes sans sources de chaleur internes.

#### I.3.1) Régime stationnaire:

Si les températures ne varient pas dans le temps, le champ de température est alors une fonction harmonique des variables d'espace  $x, y$  et  $z$ . L'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

La détermination du champ de températures se ramène à un problème mathématique étudié depuis longtemps, pour lequel de nombreuses méthodes de résolution peuvent être appliquées: On va mettre en marche une méthode approximative dite de Galerkin , des méthodes numérique : différences finies et éléments finis pour comparer en fin avec la solution exacte .

#### I.3.2) Régimes instationnaires:

L'équation de la chaleur (1-5) est une équation aux dérivées partielles linéaires du type parabolique. On pourra ainsi obtenir la solution générale d'un problème thermique en superposant linéairement des solutions particulières; mais ce n'est pas le contexte de notre étude , on s'intéresse seulement au cas stationnaire.

**I.4) EXEMPLE SUR LA RESOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLEME:****I.4-1) Equation de poisson:**

Cette équation caractérise le phénomène de torsion elle s'écrit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (\text{I-6})$$

Avec  $u=0$  au  $x=0,a$  et  $y=0,b$  (Fig. I-1).

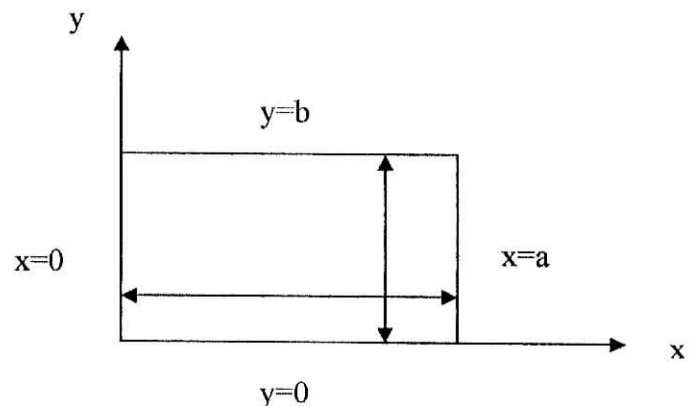


Fig.I-1

On peut prendre comme une première approximation

$$u = \alpha x(x-a)y(y-b) \quad (\text{I-7})$$

La formulation de Galerkin peut être écrite

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f \right) \delta u \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (\text{I-8})$$

Où  $\delta u = \delta \alpha x(x-a)y(y-b)$ . Après substitution de (I-7) on trouve que:

$$\frac{\alpha}{90} [a^3 b^3 (a^2 + b^2)] - \frac{a^3 b^3}{36} f = 0 \quad (\text{I-9})$$

$$\alpha = \frac{5}{2} \frac{f}{a^2 + b^2} \quad (\text{I-10})$$

$$u = \frac{5f}{a^2 + b^2} (x^2 - ax)(y^2 - by) \quad (\text{I-11})$$

L'évaluation de (I-11) au point du centre  $x=a/2, y=b/2$  donne :

$$u_c = \frac{5}{32} f \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (\text{I-12})$$

Soulevant maintenant le même exemple mais en utilisant des séries trigonométriques pour approximer  $u$ . on suppose, en tenant compte de la symétrie, que :

$$u = \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \quad (\text{I-13})$$

Cette expression satisfait les conditions aux limites et les fonctions sinusoïdales sont orthogonales.

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$$= \frac{a}{2} \quad \text{si } m = n \quad (\text{I-14})$$



Après substitution de (I-13) en (I-8) et en tenant compte de l'orthogonalité, on a :

$$\alpha_{kl} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\pi^2 l^2}{b^2} \right) \sin^2 \frac{k\pi}{a} x \sin^2 \frac{l\pi}{b} y dx dy - \int_0^a \int_0^b f \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y dx dy = 0 \quad (\text{I-15})$$

L'équation donne après intégration.

$$\alpha_{kl} = \frac{16 a^2 b^2}{\pi^4 kl (b^2 k^2 + a^2 l^2)} f \quad (\text{I-16})$$

à noter que les équations sont découplées due à l'orthogonalité des fonctions de bases. La solution approximative est:

$$u = \sum_k \sum_l f \frac{16 a^2 b^2}{\pi^4 kl (b^2 k^2 + a^2 l^2)} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \quad (\text{I-17})$$

Quand le nombre de termes est infini, on aura la solution exacte.

Dans le cas ou  $a=b$ , valeur dans le point du centre ( $x=a/2, y=b/2$ ). (\*):

$k$  et  $l$  varient de 1 à 199, c.a.d pour un nombre de termes =  $199 \times 199 = 397801$  termes. on a :

$$u_c = \left( 8 - \frac{16}{15} + \frac{8}{81} + \frac{16}{65} - \frac{16}{255} - \frac{32}{350} + \dots \right) \frac{a^2}{\pi^4} f = u_{\text{exact}} = \frac{28.71}{\pi^4} \left( \frac{a}{2} \right)^2 f \quad (\text{I-18})$$

pour  $a=10$  m, on trouve.

$$u_c = 7.369 f$$

**Remarque (\*) :**

L'attention des utilisateurs d'ouvrages numériques spécialisés est attirée quant à l'utilisation sans vérification de la solution exacte de Poisson, donnée dans certaines références, comme ci-dessous.

$$u_c = \left(8 + \frac{16}{15} + \frac{8}{81} \dots\right) \frac{a^2}{\pi^4} c = u_{\text{exact}} = \frac{36.64}{\pi^4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 f$$

Ce qui donne pour  $a=10$  m :

$$u_c = 9,447 f$$

La correction que nous avons apportée à cette formule nous a permis de confirmer les résultats trouvés à ceux obtenus par les différentes méthodes numériques utilisées.

## I.5) METHODE DE GALERKINE:

### I.5.1) Propriété de meilleure approximation :

La méthode de Galerkin, possède une propriété de minimisation pour une certaine classe d'équations différentielles.

#### Définitions :

- Un opérateur différentiel  $\mathcal{L}$  est dit **homogène** si:

$$\mathcal{L}(u=0)=0$$

- Un système d'équations linéaires aux dérivées partielles :

$$[\mathcal{L}]\{u\} + \{f_v\} = 0$$

est dit **homogène** si :

$$\{f_v\} = 0$$

- Les Conditions Aux Limites :

$$[C]\{u\} = \{f_s\}$$

sont dites **homogènes** si :

$$\{f_s\} = 0$$

- Un système différentiel linéaire est **auto-adjoint** si:

$$\int_V \langle u \rangle [\mathcal{L}]\{V\} dV = \int_V \langle v \rangle [\mathcal{L}]\{u\} dV$$

ou  $u$  et  $v$  sont des fonctions suffisamment dérivables sur  $V$ , qui satisfont les C.A.L homogènes:

$$C(u)=C(v)=0.$$

#### Théorème 1 :

Tout opérateur linéaire défini positif et auto-adjoint, défini sur un espace doté d'un produit interne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , génère l'existence d'un second produit interne, appelé produit interne énergétique (energy inner product) : EIP

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{L}} \equiv \langle \mathcal{L}u, v \rangle \quad (I- 19)$$

Les EIP sont IP pour la méthode de Galerkin ( $u$  remplacé par  $\hat{u}$  et  $v$  par  $\phi_i$ ). La norme énergétique tient son nom du fait que l'EIP correspond souvent à une mesure de l'énergie dans plusieurs systèmes physiques.

De plus, les équations de Galerkin représentent une minimisation de cette mesure énergétique (énergie potentielle d'un système) pour une certaine de problèmes physique. Autrement dit, pour une certaine class de problèmes, la méthode de Galerkin minimise l'erreur commise dans l'approximation numérique lorsque cette erreur est mesurée par la norme énergétique.

### **Théorème 2 :**

Soit l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\mathcal{L}u(x) = f(x) \quad ; x \in \Omega \quad (I-20)$$

Où  $\mathcal{L}$  est un opérateur défini positif et auto adjoint. Le produit interne est défini par :

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (I-21)$$

soit une solution approchée recherchée dans  $S_N$  avec une base fonctionnelle  $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ , alors pour une approximation du  $u(x)$  de la forme :

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (I-22)$$

la méthode de Galerkin pour le calcul des coefficients  $\{a_j\}_{j=1}^N$  minimise l'erreur  $(u - \hat{u})$  au sens de la norme énergétique

$$\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{L}} = [\langle (u - \hat{u}), (u - \hat{u}) \rangle_{\mathcal{L}}]^{1/2} \quad (I-23)$$

**Démonstration :**

$\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}$  et  $\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}^2$  ont un minimum au même point. On s'intéressera à  $\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}^2$  pour des raisons de commodité.

$$\begin{aligned}\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}^2 &= \langle \mathcal{L}(u - \hat{u}), (u - \hat{u}) \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}u, u \rangle - \langle \mathcal{L}\hat{u}, u \rangle - \langle \mathcal{L}u, \hat{u} \rangle + \langle \mathcal{L}\hat{u}, \hat{u} \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}u, u \rangle - 2\langle \mathcal{L}u, \hat{u} \rangle + \langle \mathcal{L}\hat{u}, \hat{u} \rangle\end{aligned}$$

$$\text{or } \hat{u} = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j$$

$$\begin{aligned}\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}^2 &= \langle \mathcal{L}u, u \rangle - 2\left\langle \mathcal{L}u, \left( \sum_{j=1}^N a_j \phi_j \right) \right\rangle + \left\langle \mathcal{L} \left( \sum_{j=1}^N a_j \phi_j \right), \left( \sum_{k=1}^N a_k \phi_k \right) \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}u, u \rangle - 2 \sum_{j=1}^N a_j \langle \mathcal{L}u, \phi_j \rangle + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k \langle \mathcal{L}\phi_j, \phi_k \rangle\end{aligned} \quad (\text{I-24})$$

La minimisation de  $\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}^2$  se fait comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial U_i} \|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}^2 = 0, \quad \forall i$$

$$\frac{\partial}{\partial U_i} \|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}^2 = -2\langle \mathcal{L}u, \phi_i \rangle + 2 \sum_{j=1}^N a_j \langle \mathcal{L}\phi_j, \phi_i \rangle$$

$\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{E}}^2$  est minimum lorsque  $\{a_j\}$  est choisi de sorte que :

$$\sum_{j=1}^N a_j \langle \mathcal{L}\phi_j, \phi_i \rangle = \langle \mathcal{L}u, \phi_i \rangle = \langle f, \phi_i \rangle$$

$$\text{Où } \left\langle \mathcal{L} \left( \sum_{j=1}^N a_j \phi_j \right), \phi_i \right\rangle = \langle f, \phi_i \rangle$$

et finalement :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L} \hat{u} - f) \phi_i dx = 0 \quad : \text{Formulation de Galerkin} \quad (I-25)$$

Ainsi, lorsque  $\mathcal{L}$  est défini positif et auto-adjoint, la méthode de Galerkin produit une solution qui minimise l'erreur  $(u - \hat{u})$  au sens de la norme de l'énergie.

A ce titre, la solution de Galerkin est considérée comme la 'meilleure approximation'.

### I.5.2) Exemple:

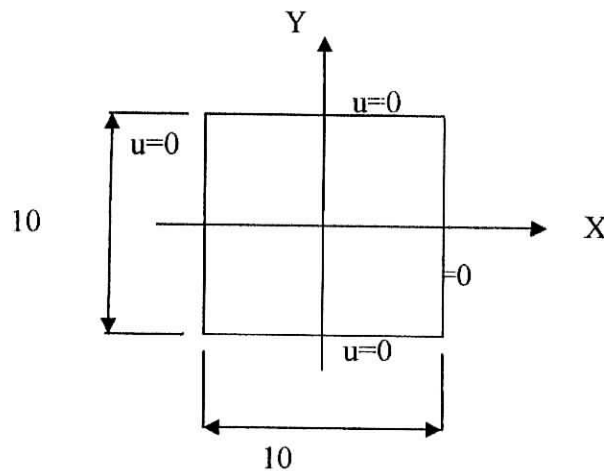


Fig.I.2

On considère le cas de la figure (I-2) pour une plaque carré, avec  $a=b=10$  m.

la solution de Galerkin est sous la forme :

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)$$

$N$  : le nombre de paramètres d'approximation  $\{a_j\}$ .

En utilisant les fonctions suivantes :

$$\Phi_1(x,y) = (x^2 - 25) + (y^2 - 25)$$

$$\Phi_2(x,y) = [(x)^2 + (y)^2] \cdot \Phi_1(x,y)$$

$$\Phi_3(x,y) = [(x)^2 \cdot (y)^2] \cdot \Phi_1(x,y)$$

**Notation:**

$$\diamond \iint_A \phi_i(x,y) dx dy = I(\phi_i)$$

A: surface de la plaque.

$\diamond$  L'exponentiel:

$$\text{Exemple : } E9 = 10^9.$$

**a) Approximation à 1 paramètre :**

$$u(x,y) = a_1 \cdot \Phi_1(x,y).$$

D'où l'équation:

$$[I(\Phi_1 \cdot f(\Phi_1))] \cdot a_1 = -[I(\Phi_1)] \cdot f$$

Après calcul, on trouve :

$$2.22222E6 \cdot a_1 = 27777.8 f.$$

$$\Rightarrow a_1 = 0.0125$$

**la solution au centre :**

$$u_c = u(0,0) = 7.812 f.$$

**b) Approximation à 2 paramètres :**

$$u(x,y) = \Phi_i(x,y) \cdot (a_1 + a_2 \cdot [(x)^2 + (y)^2]).$$

D'où le System symétrique:

$$[I(\Phi_1 \cdot f(\Phi_1))] \cdot a_1 + [I(\Phi_1 \cdot f(\Phi_2))] \cdot a_2 = -[I(\Phi_1)] \cdot f$$

$$[I(\Phi_2 \cdot f(\Phi_1))] \cdot a_1 + [I(\Phi_2 \cdot f(\Phi_2))] \cdot a_2 = -[I(\Phi_2)] \cdot f$$

Après calcul, on trouve :

$$2.22222E6 \cdot a_1 + 1.90476E7 \cdot a_2 = 27777.8 f$$

$$1.90476E7 \cdot a_1 + 5.82011E9 \cdot a_2 = 277778 f$$

$$a_1 = 0.011688 f.$$

$$a_2 = 0.000095 f.$$

La solution au centre :

$$u_c = u(0,0) = 7.305 \text{ f.}$$

c) Approximation à 3 paramètres :

$$u(x,y) = \Phi_1(x,y) \cdot (a_1 + a_2 \cdot [(x)^2 + (y)^2] + a_3 \cdot [(x)^2 \cdot (y)^2])$$

Après calcul, on trouve :

$$2.22222 \text{ E}6 \cdot a_1 + 1.90476 \text{ E}7 \cdot a_2 + 3.96825 \text{ E}7 \cdot a_3 = 27777.8 \text{ f}$$

$$1.90476 \text{ E}7 \cdot a_1 + 5.82011 \text{ E}8 \cdot a_2 + 1.88964 \text{ E}9 \cdot a_3 = 277778 \text{ f}$$

$$3.96825 \text{ E}7 \cdot a_1 + 1.88964 \text{ E}9 \cdot a_2 + 1.29913 \text{ E}10 \cdot a_3 = 694444 \text{ f.}$$

$$a_1 = 0.011797 \text{ f.}$$

$$a_2 = 0.000066 \text{ f.}$$

$$a_3 = 0.000008 \text{ f.}$$

La solution au centre :

$$u_c = u(0,0) = 7.373 \text{ f.}$$

La méthode de Galerkin présente une très bonne approximation de la solution de ce problème. C'est une méthode puissante qui converge rapidement avec un bon choix des fonctions.

Cependant, son emploi devient difficile dans des cas plus compliqués ce qui nous amène à l'utilisation d'autres méthodes numériques telles que la M.D.F et notamment la M.E.F.



*Chapitre II :*

***Le transfert de la chaleur***

## II.1) INTRODUCTION:

La thermique est la branche de la physique qui traite des échanges de chaleur accompagnés ou non d'échange de masse et de changement de phases. Elle peut donc être considérée comme partie intégrante de la thermodynamique des phénomènes irréversibles puisque, pour avoir l'échange de chaleur entre différentes parties d'un système, il est nécessaire que ce système soit en dehors de l'équilibre thermodynamique.

## II.2) MODES DE TRANSFERT DE LA CHALEUR :

Il a fallu longtemps pour que l'on puisse distinguer entre les divers types d'échanges de chaleur et les classer en rayonnement, conduction, convection naturelle et convection forcée. D'ailleurs ne parle-t-on pas encore de «radiateurs» de chauffage central ou d'automobile, bien qu'une partie importante du flux de chaleur soit transmise à l'atmosphère par convection naturelle dans le premier cas et par convection forcée dans le second ?

### II.2.1) La conduction :

Le phénomène de la conduction de la chaleur existe dans tous les corps, solides ou fluides, bien que, pour ces derniers, le transfert d'enthalpie dû à la présence d'un écoulement ait tendance à masquer le phénomène de conduction.

Celui-ci se traduit par une élévation de température de proche en proche qui, pour les solides, correspond à un accroissement de l'énergie de vibration du réseau cristallin et, pour les fluides, à une transmission d'énergie cinétique opérée par les chocs entre les molécules.

C'est à J. Fourier (1822) que l'on doit la théorie analytique de la conduction de la chaleur qui a amené, en dehors des applications physiques, à des progrès en analyse mathématique

Le processus de conduction de la chaleur s'effectue de proche en proche, la chaleur passant spontanément des corps les plus chauds aux corps les plus froids, la température tendant alors à s'uniformiser lorsqu'il n'y a pas de source de chaleur interne.

### II.2.1.1) Loi de Fourier

Le flux de chaleur à travers une surface est, par définition, la quantité de chaleur (mesurée en joules dans le système SI) qui traverse, par unité de temps (la seconde), cette surface. La densité de flux de chaleur  $q$ ; en un point est le rapport du flux de chaleur passant à travers un élément de surface entourant ce point à l'aire de cet élément.

Cette densité est proportionnelle (pour un corps isotrope) et opposée au gradient de température au point considéré:

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad } u} \quad (\text{II} - 1)$$

C'est la loi de Fourier,  $\lambda$  étant le coefficient de conductibilité thermique ou *conductivité thermique*.

Pour les corps composites :

$$\vec{q} = -\bar{\lambda} \overrightarrow{\text{grad } u} \quad (\text{II} - 2)$$

La densité de flux de chaleur est le produit contracté d'un tenseur de conductivité thermique et du gradient de température. Pour les corps composites, l'élément de surface qui entre dans la définition de la densité de flux de chaleur ne doit pas être trop petit. La loi correspondant à l'expression (II - 2) n'est valable que pour les grandeurs dont on prend la moyenne dans un volume élémentaire; les dimensions de celui-ci doivent être de l'ordre de grandeur de plusieurs dimensions des éléments des corps composites: les diamètres des fibres pour les fibres enrobées ou les diamètres des pores pour les milieux poreux.

Revenant au cas d'un corps homogène, la densité de flux de chaleur suivant la longueur est donné par :

$$q = -\lambda A \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II} - 3)$$

Où

q : la densité de flux .

A : la surface du corps au travers lequel se fait le flux de chaleur..

$\lambda$  :conductivité thermique du corps .

u : Température.

x : paramètre de la longueur.

### II.2.2) La convection :

Le phénomène de conduction peut se produire normalement dans n'importe quel système dans lequel un mouvement électronique ou moléculaire est possible. Dans le cas des liquides et des gazes, la conduction joue un rôle relativement moins important dans le transfert de l'énergie.

Quant à la convection, la plus grande influence sur ce transfert est due au mouvement du fluide lui-même qui peut, en ce système, être en mouvement par flottabilité au moyen des pompes, ventilateurs, et causé par des forces météorologiques et celles de la marée.

Dans tels cas, On doit s'attendre à ce que le transfert de chaleur soit plus grand que dans des cas comparables pour les systèmes solides.

Le premier qui a analysé avec succès la totalité du phénomène complexe de convection était Isaac Newton en 1701, il a proposé son équation générale de la densité de flux :

$$q = hA.(u_h - u_c) \quad (\text{II} - 4)$$

Où :

$q$  : la densité de flux .

$A$  : l'aire de la surface du corps au travers laquelle se propage la chaleur.

$h$  : coefficient du transfert de la chaleur.

$u_h$  : Température de la surface du corps.

$u_c$  : Température du milieu ambiant.

### II.2.1) La radiation :

Le principe de transfert de chaleur par radiation est un mécanisme de transfert d'énergie complètement différent des deux autres modes : la convection et la conduction. Ces deux derniers nécessitent un contact physique entre surfaces, fluides et surfaces, le transfert par radiation peut bien se produire dans le vide, tout a fait comme la propagation de la lumière qui se fait à travers l'air.

Du point de vue d'engineering, la principale découverte en radiation, c'était en 1884, quand Stefan et Boltzmann ont proposé la loi gouvernante l'émission d'énergie à travers une surface chauffée, la densité de flux est donné par :

$$q = \sigma.A.u^4 \quad (\text{II} - 5)$$

Où :

$q$  : la densité de flux .

$u^4$  : la température du corps.

$\sigma$  : la constante de Stefan-Boltzman.

$A$  : l'aire de la surface du corps au travers laquelle se propage la chaleur.

### II.3) EQUATION GENERALE DE LA CONDUCTION :

#### II.3-1) L'élaboration des équations gouvernantes :

##### II.3-1) a) équation de conservation de l'énergie:

La loi de Fourier s'emploie dans le cas d'un solide ou d'un fluide au repos par rapport à un référentiel donné. Par rapport à ce dernier, le premier principe de la thermodynamique donne en chaque point l'équation de conservation de l'énergie.

*Principe de conservation de l'énergie:*

$$E_{in} + E_g = E_{out} + E_{ie} \quad (II - 6)$$

$E_{in}$  = Énergie affluée au système.

$E_g$  = Énergie générée à l'intérieur du système.

$E_{out}$  = Énergie écoulée par le système.

$E_{ie}$  = Variation dans l'énergie interne du système.

Comme, en conduction pure, le travail est nul, si l'on néglige la dilatation thermique.

On considère un petit élément matériel dans un corps solide, comme il est figuré dans Fig. (II.1). Il est d'une forme rectangulaire parallélépipédique et à faces  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

L'équation (II.5) peut être reformulée comme suivant:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} \text{chaleur affluée} \\ \text{durant un temp dt} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Chaleur générée par les sources} \\ \text{internes durant un temps dt} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{chaleur écoulé} \\ \text{durant un temp dt} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Variation de l'énergie} \\ \text{interne durant un temp dt} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (II - 7)$$

On a :

$$\text{Variation d'énergie interne : } \Delta E_i = m.C.du = C.\rho.dv.du = C.\rho.dx.dy.dz.du$$

C: Chaleur massique

Chaleur générée par les sources internes:

$$q dv = q dx dy dz$$

tq:  $q$  est la chaleur créée par unité de volume,

Donc, l'équation (II-5) peut s'écrire sous la forme:

$$(q_x + q_y + q_z).dt + q.dx.dy.dz = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}).dt + C.\rho.dx.dy.dz.du \quad (\text{II} - 8)$$

On a:  $u(x,y,z)$ :

$x,y,z$  : variables d'espace.

$t$  : variable de temps

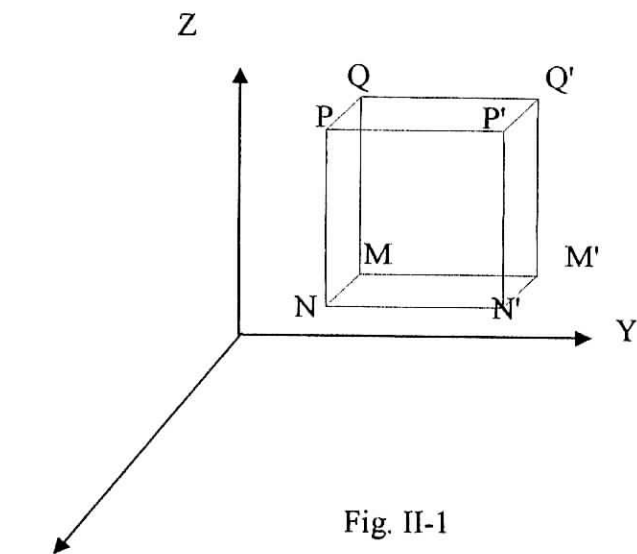


Fig. II-1

1-1) *Coordonnées cartésiennes:*

Ce qui entre :

Dans la direction de  $x$  :

à travers le plan  $QQ'MM'$  :

$$q|_x = -\lambda_x.S.\frac{\partial u}{\partial x}|_x \quad (\text{II} - 9)$$

**Dans la direction de y :**

à travers le plan PQMN :

$$q|_y = -\lambda_y \cdot S \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_y \quad (\text{II-10})$$

**Dans la direction de z :**

à travers le plan NN'MM' :

$$q|_z = -\lambda_z \cdot S \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_z \quad (\text{II-11})$$

Ce qui sorte :

$$q|_{x+dx} = -\lambda_x \cdot S \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} \cdot dt$$

$$q|_{y+dy} = -\lambda_y \cdot S \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y+dy} \cdot dt$$

$$q|_{z+dz} = -\lambda_z \cdot S \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z+dz} \cdot dt$$

On sait que :

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

Donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$



En remplaçant le tout dans l'équation (II-7), on obtient :

$$q \, dx \, dy \, dz \, dt = -\lambda_x \, dx \, dy \, dz \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, dt - \lambda_y \, dx \, dy \, dz \, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \, dt - \lambda_z \, dx \, dy \, dz \, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \, dt + C \, \rho \, dx \, dy \, dz \, du$$

Si :  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$

→  $q \, dt = -\lambda \, dt \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot c \, du$ , on divise le tout par  $dt$  et on obtient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t}$$

D'où 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{II-12})$$

Avec:  $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$  (diffusivité thermique).

Dans le cas d'un corps isotrope et homogène et sans sources de chaleur internes, l'équation (II-11) devient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{II-13})$$

*Cas de régime permanent :*

$u$  ne varie pas en fonction du temps :  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

Donc, l'équation (II-12) devient: 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

Posons :  $-\frac{q}{\lambda} = f$ ,

On obtient l'équation de Poisson: 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f \quad (\text{II-14})$$

Si de plus, il n'y a pas de création de chaleur (aucune source de chaleur) :  $q=0$

L'équation (II-14) se réduit à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II} - 15)$$

pour le cas bidimensionnel, (II - 15) s'écrit: 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II} - 16)$$

#### II.4) SOLUTION DE L' EQUATION DE LAPLACE POUR LA PLAQUE RECTANGULAIRE :

Considérons une plaque homogène ( $K$  uniforme), sans source interne, et isolée sur ses faces  $x$  et  $y$  (pas de conduction dans la direction  $Oz$ ), en régime permanent, il s'agit de résoudre l'équation différentielle linéaire de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II} - 17)$$

Plaçons l'origine des coordonnées l'un des angles du rectangle (figure II-2)

Supposons (méthode de séparation des variables) que la solution peut se mettre sous la forme:

$$u = X(x)Y(y) \quad (\text{II} - 18)$$

Ce qui conduit, en substituant (II - 18) dans (II - 17) à:

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} \quad \text{Où } X''=X \text{ et } Y''=-Y.$$

Le membre de gauche est fonction de  $x$  seulement, tandis que le membre de droite est fonction de  $Y$  seulement.

Ces deux membre ne peuvent être égaux à une même constante  $\pm \lambda^2$ , appelée constante de séparation, dont le signe sera déterminé par la nature des conditions aux limites, Prenons pour l'instant le signe (+).

Ceci équivaut aux deux équations différentielles ordinaires:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (\text{II} - 19)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (\text{II} - 20)$$

donc les solutions sont respectivement :

$$X = B_3 \sin(\lambda x) + B_4 \cos(\lambda x)$$

$$Y = B_1 \sin(\lambda y) + B_2 \cos(\lambda y)$$

Donc, la solution générale de l'équation indéfinie (II - 13) est:

$$u = [B_1 \sinh(\lambda y) + B_2 \cosh(\lambda y)] [B_3 \sin(\lambda x) + B_4 \cos(\lambda x)] \quad (\text{II} - 21)$$

dont on détermine les constantes  $B$  et  $\lambda$  en utilisant les conditions aux limites.

#### II.4.1) Cas où les trois cotes sont à la même température $T_1$ et une cote à la température

$T = \Phi(x)$ :

$$\text{en } x=0, T=T_1 \quad \text{ou } u = T - T_1 = 0, \quad \forall y \quad (\text{II} - 22)$$

$$\text{en } x=L, T=T_1 \quad \text{ou } u = T - T_1 = 0, \quad \forall y \quad (\text{II} - 23)$$

$$\text{en } y=0, T=T_1 \quad \text{ou } u = T - T_1 = 0, \quad \forall x \quad (\text{II} - 24)$$

$$\text{en } x=H, T=T_1 \quad \text{ou } u = \Phi(x) - T_1 = f(x) \quad (\text{II} - 25)$$

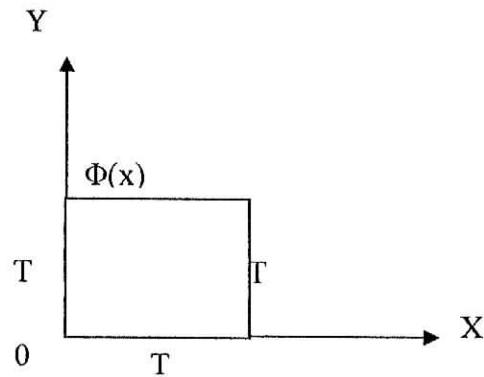


Fig. II-2

Les trois premières conditions aux limites (C.A.L) sont homogènes.

On demande  $u(x, y)$ ?

La C.A.L n° 3 montre que pour que, quel que soit  $x$ , on ait  $U=0$  en  $y=0$ , il faut que  $B_2=0$  et (II - 19) se ramène à :

$$u = B_1 \sinh(\lambda y) [B_3 \sin(x) + B_4 \cos(\lambda x)] \quad (\text{II} - 26)$$

La C.A.L n°1 permet de déduire semblablement que pour quel que soit  $y$ , on ait  $u=0$  en  $x=0$ , il faut que  $B_4 = 0$ , donc

$$u = B \sinh(\lambda y) \sin(\lambda x) \quad \text{Avec } \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \quad (\text{II} - 27)$$

La C.A.L n° 2 donne

$$0 = B \sinh(\lambda y) \sin(\lambda x) \quad , \quad \forall y \in [0, H]$$

D'où:

$$\sin(\lambda L) = 0, \text{ c'est à dire } \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{II} - 28)$$

Chacun des  $\lambda$  de (II - 28) conduit à une solution générale sera donc la solution de toutes ces solutions particulières:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sinh(\lambda_n y) \sin(\lambda_n x)$$

Où  $B_n$  représente la constante B pour chacune des solutions.

En effet, pour chaque valeur de  $\lambda$  correspond un système d'équations différent (II-19) et (II-20) et donc les solutions X, Y possédant des constantes B différentes (pour chaque  $\lambda$ ).

comme pour  $n=0, \lambda_n = 0$ , ce qui ne conduit à rien, il reste :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\lambda_n y) \sin(\lambda_n x) \quad (\text{II-29})$$

la C.A.L n°4 donne :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sinh(\lambda_n y) \sin(\lambda_n x) \quad (\text{II-30})$$

---

Avec  $\lambda_n = \frac{n\lambda}{L}$ ,  $n=1,2,\dots$   
 $0 \leq x \leq L$

D'après la théorie des fonctions orthogonales, Une fonction arbitraire  $f(x)$  peut –si la série converge –être représentée par une série de fonctions

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n x) \quad (\text{II-31})$$

Où les  $C_n$  sont données par

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\lambda_n x) dx$$

$$\text{avec } \lambda_n = \frac{n\lambda}{L}, \quad n = 1, 2, 3..$$

(II-32)

On voit que les constante  $B_n$  peuvent s'exprimer par:

$$B_n \text{Sinh}(\lambda_n H) = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \text{Sin}(\lambda_n x') dx' \quad \dots \quad (\text{II} - 33)$$

Permet de calculer  $B_n$ .

D'où la solution finale est :

$$u = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \left( \frac{\text{sinh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\text{sinh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \right) \text{sin}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \int_0^L f(x') \text{sin}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) dx' \quad (\text{II} - 34)$$

La série en question converge habituellement assez lentement, de sorte qu'un assez grand nombre de termes est nécessaire.

Si  $f(x) = F_2 = \text{constante}$ , en  $y = H$ ,

$$\frac{u}{F_2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \left( \frac{\text{Sinh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\text{Sinh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \right) \text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \dots \quad (\text{II} - 35)$$

Dans ce cas, si la somme est écrite

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}$$

Le facteur  $\frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$  devient  $\frac{2}{n\pi}$

$$u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\text{Sinh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\text{Sinh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \right) \text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot F_2 \quad (\text{II} - 36)$$

**b) Deuxième cas :**

en  $x=0, T=T_1$  ou  $u = T - T_1 = 0, \forall y$

en  $x=L, T=T_1$  ou  $u = T - T_1 = 0, \forall y$

en  $y=0, T=T_1$  ou  $u = F_1$

en  $x=H, T=T_1$  ou  $u = T - T_1 = 0, \forall x$

avec le changement de variables :

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = -y + H \end{cases}$$

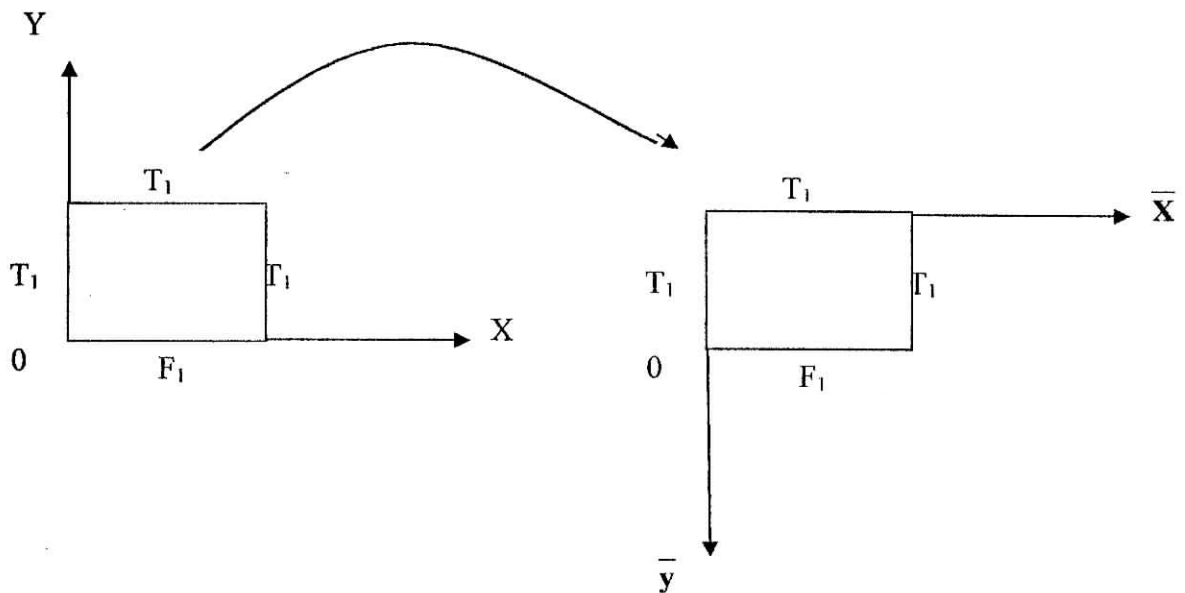


Fig. II-3

et la solution devient :

$$u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\text{Sinh}\left(\frac{n\pi(-y+H)}{L}\right)}{\text{Sinh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \right) \text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot F_1 \quad (\text{II} - 37)$$

**II.4-2) Cas ou les deux cotes sont à la même température T1 et deux cote aux températures F1 et F2:**

**a) Premier cas (Fig II-4) :**

- en  $x=0, T=T_1$  ou  $u=T-T_1=0, \forall y$
- en  $x=L, T=T_1$  ou  $u=T-T_1=0, \forall y$
- en  $y=0, T=T_1$  ou  $u=F_1$
- en  $x=H, T=T_1$  ou  $u=F_2$

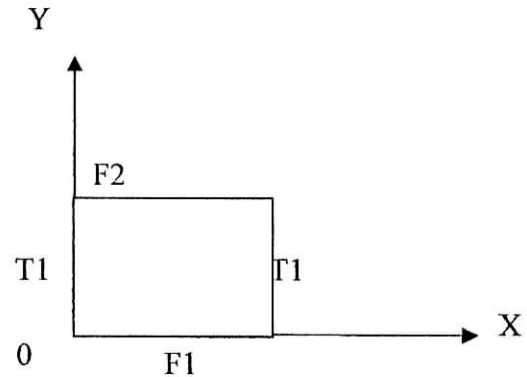


Fig. II-4

Pour le cas ou les deux cotes sont chargées, on procède par superposition des cas (II - 34) et (II - 35):

$$u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \text{Sinh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left( \left( \text{Sinh}\left(\frac{n\pi(-y+H)}{L}\right) \right) \cdot F_1 + \left( \text{Sinh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right) \cdot F_2 \right) \quad (\text{II} - 38)$$

**b) Deuxième cas (Fig II-5) :**

- en  $x=0, T=T_1$  ou  $u=T-T_1=0, \theta=G_1$
- en  $x=L, T=T_1$  ou  $u=T-T_1=0, \theta=G_2$
- en  $y=0, T=T_1$  ou  $u=T-T_1=0, \forall x$
- en  $x=H, T=T_1$  ou  $u=T-T_1=0, \forall x$

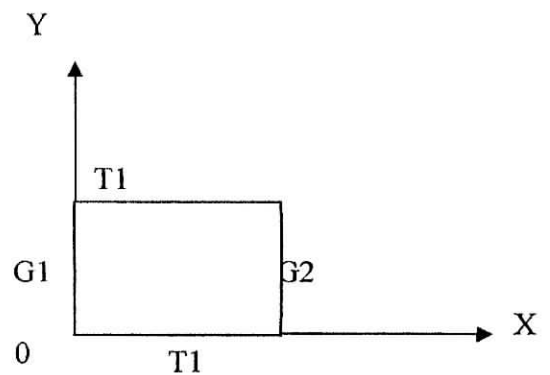


Fig. II-5



pour ce cas on procède par changement de variables :

$$\begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = x \end{cases}$$

$$u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi L}{H}\right)} \operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \left( \left( \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi(-x+L)}{H}\right) \right) \cdot G_1 + \left( \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi x}{H}\right) \right) \cdot G_2 \right) \quad (\text{II} - 39)$$

..

### II.4.3) Cas où les quatre cotes sont aux températures F1, F2, G1 et G2:

en  $x=0, T=T_1$  ou  $u = G_1$

en  $x=L, T=T_1$  ou  $u = G_2$

en  $y=0, T=T_1$  ou  $u = F_1$

en  $x=H, T=T_1$  ou  $u = F_2$

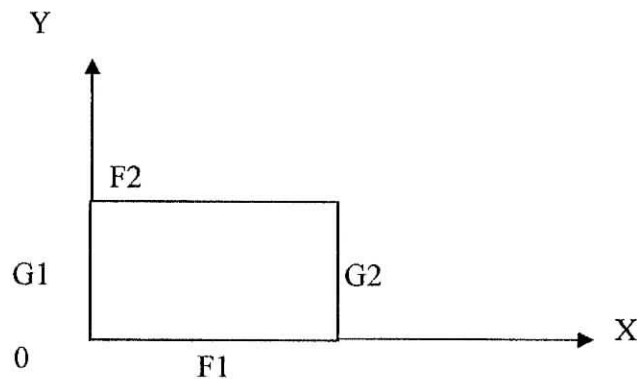


Fig. II-6

Pour le cas où les quatre cotes sont chargées, on procède par superposition des cas (II - 38) et (II - 39):

$$u = \frac{4}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left( \left( \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi(-y+H)}{L}\right) \right) F_1 + \left( \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right) F_2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi L}{H}\right)} \operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \left( \left( \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi(-x+L)}{H}\right) \right) G_1 + \left( \operatorname{Sinh}\left(\frac{n\pi x}{H}\right) \right) G_2 \right) \right) \quad (\text{II} - 40)$$

Historiquement, la méthode de séparation des variables est peut être la plus ancienne méthode systématique de résolution des E.D.P, utilisée par D'Alembert, D.Bernoulli, et Euler environ 1750 lors de leur traitements de l'équation des ondes. Après, elle est considérablement raffinée et généralisée et elle reste une méthode très importante jusqu'aujourd'hui.

Son emploi reste limité à des cas relativement simples ce qui a mis l'accent sur la puissance des méthodes numériques dans le traitement des problèmes complexes.

*Chapitre III :*

**La méthode des  
Différences Finies**

### III.1) INTRODUCTION:

Plus peut-être que tout autre domaine des mathématiques, les équations aux dérivées partielles étaient prédisposées à bénéficier de l'utilisation des ordinateurs, pour de nombreuses raisons. La plus importante est leur intervention dans de nombreux problèmes techniques. C'est d'ailleurs un problème d'hydrodynamique, dont la solution devait «améliorer» les premières bombes atomiques, qui a fait l'objet de la première application traitée sur ordinateur.

Une deuxième raison est la complexité des problèmes aux dérivées partielles. Pour s'en faire une idée, réfléchissons à ce que représente la résolution numérique d'un problème aux limites. Très schématiquement, on sera amené à résoudre un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues, où  $N$  est de l'ordre de grandeur de  $(1/h)n$ ; ici,  $h$  est le pas de discrétisation (dont dépendra la précision de la solution) et  $n$  le nombre de variables indépendantes. C'est dire que, même avec une approximation très grossière pour un problème simple,  $N$  se comptera en centaines pour deux variables et en milliers pour trois variables indépendantes. On n'oubliera pas, pour estimer ces ordres de grandeur, que le volume des calculs croît plus vite que  $N$ .

Une troisième raison vient donner toute son importance à la deuxième; c'est dans cette théorie que, plus encore que dans beaucoup d'autres branches des mathématiques, les situations où on dispose de solutions explicites sont rares. Il en est de même des solutions semi explicites sous forme de séries.

L'analyse numérique des équations aux dérivées partielles n'est pas née avec les ordinateurs, tant s'en faut; la situation est plus complexe. De toute façon, l'introduction de l'analyse numérique comme branche particulière des mathématiques est un fait relativement récent, qui exprime son extrême spécialisation.

Un des premiers travaux mathématiques sur les équations aux dérivées partielles – le mémoire de Daniel Bernoulli publié en 1753 – contient deux procédés d'approximation de la solution. L'un est celui des séries trigonométriques; l'autre consiste à remplacer la corde vibrante par un nombre fini de masses ponctuelles reliées par un fil élastique sans masse, ce qui donne une approximation du type différences finies. Il est vrai que, au XVIII<sup>ème</sup> siècle, ces

procédés étaient considérés comme des outils de démonstration et non comme des méthodes numériques. Quand Fourier, au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, reprend la méthode des séries trigonométriques, il l'applique à l'équation de la chaleur qu'il vient de trouver. Il est alors pleinement conscient de l'importance du calcul numérique des solutions que cette méthode permet. La résolution des équations aux dérivées partielles sans l'aide d'un ordinateur est maintenant limitée soit à des cas très particuliers, soit à l'approximation grossière de problèmes simples.

## **III.2) METHODE DES DIFFERENCES FINIS:**

### **III.2.1) Introduction :**

De nombreux problèmes sur les structures conduisent à la résolution d'équation aux dérivées partielles, c'est le cas pour les plaques en flexion, pour les barres de section non circulaire en torsion et aussi pour l'analyse bidimensionnelle et tridimensionnelle des contraintes. Quand, ces équations, sont adjointes des conditions de chargement ou des conditions aux limites compliquées, la résolution rigoureuse du système se présente comme un problème redoutable. La méthode des différences finies constitue alors un outil généralement efficace pour résoudre ces équations. Expressions fondamentales des différences finies peuvent être développées pour s'appliquer à des fonctions de deux variables ou plus. On peut choisir comme système de coordonnées soit le système cartésien qui est le cas dans notre étude<sup>2</sup>.(wan)

L'avantage fondamental de la méthode des différences finies est l'approximation d'équations différentielles par des équations algébriques. En effet, il est procédé au remplacement d'une équation différentielles continue, dont l'espace solution est généralement de dimension infinie, par un ensemble d'équations algébriques dont l'espace solution est de dimension finie.

**III.2.2) Etapes de mise en œuvre :**

La mise en œuvre de la méthode des différences finies se fait en trois étapes :

**III.2.2.a) Etape de discrétisation :**

Elle consiste à identifier un nombre fini de points discrets (nœuds) dans le domaine spatio- temporel d'intérêt. C'est en ces points que la solution exacte est approchée.

Dans le cas de cette étude, on se limite au régime stationnaire de la conduction, Le domaine est seulement spatial.

**III.2.2.b) Etape d'approximation :**

Elle consiste à remplacer les dérivés apparaissant dans l'équation différentielle par des approximations en différences discrètes. Ces approximations sont écrites en terme d'évaluations nodales de la fonction inconnue. Cette étape mène vers un ensemble d'équations algébriques avec des valeurs nodales discrètes comme inconnues.

**III.2.2.c) Etape de résolution :**

Elle consiste à résoudre le système d'équations algébriques obtenues à l'étape précédente, et permet l'obtention d'une approximation discrète de la solution de l'équation différentielle d'origine.

**III.2.3) Théorème de Taylor- Analyse d'approximation en différences finies :****III.2.3.a) Théorème de Taylor (1D)**

Soit une fonction  $u(x) \in C^N[\omega_1, \omega_2]$  et soit  $x_k$  un point de  $[\omega_1, \omega_2]$ , alors pour tout point  $x \in [\omega_1, \omega_2]$ .

$$u(x) = u(x_k) + \frac{du}{dx}\bigg|_{x_k} (x-x_k) + \frac{d^2u}{dx^2}\bigg|_{x_k} \frac{(x-x_k)^2}{2!} + \dots + \frac{d^{N-1}u}{dx^{N-1}}\bigg|_{x_k} \frac{(x-x_k)^{N-1}}{(N-1)!} + R^N \quad (\text{III-1})$$

$$\text{ou } R^N \equiv \frac{d^N u}{dx^N}\bigg|_{\xi} \frac{(x-x_k)^N}{N!}, \quad \xi \in [x, x_k]$$

**Corollaire** : séries infinies de Taylor

Soit une fonction  $u(x) \in C^\infty[\omega_1, \omega_2]$ , et soit un point  $x_k \in [\omega_1, \omega_2]$ , alors pour tout  $x \in [\omega_1, \omega_2]$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n u}{dx^n}\bigg|_{x_k} \frac{(x-x_k)^n}{n!}$$

Le théorème de Taylor constitue un outil d'analyse des approximations en différences finies.

### III.2.3.b) approximation en différences finies et opérateurs en différences finies :

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (\text{III-2})$$

Dans la méthode des différences finies, il s'agit de remplacer la dérivée par le taux d'accroissement. Une approximation en différences finies d'une dérivée n'est pas unique.

1.  $\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i}$  (Forward difference) différence avancée.
2.  $\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$  (Backward difference) différence retardée.
3.  $\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$  (Central difference) différence centrée.

Approximation pour  $\frac{d^2u}{dx^2}(x_i)$  :

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{\left. \frac{du}{dx} \right|_{i+1/2} - \left. \frac{du}{dx} \right|_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \approx \frac{\left( \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \right) - \left( \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \quad (\text{III-3})$$

si l'espace nodal est constant :  $\Delta x$

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Les opérateurs les plus utilisés en différences finies définis comme suit :

Forward difference Operator,  $\Delta$                        $\Delta u_i \equiv u_{i+1} - u_i$

Backward difference Operator,  $\nabla$                        $\nabla u_i \equiv u_i - u_{i-1}$

Central difference Operator,  $\delta$                        $\delta u_i \equiv u_{i+1/2} - u_{i-1/2}$

### III.3) REPRESENTATION DES DERIVEES PAR LES DIFFERENCES FINIES

Les dérivées d'une fonction  $y(x)$  sont définies comme étant la variation de  $y$  ou de ses dérivées par rapport à  $x$  et elles sont représentées de la façon suivante :

Dérivée première :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

Dérivée seconde :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$



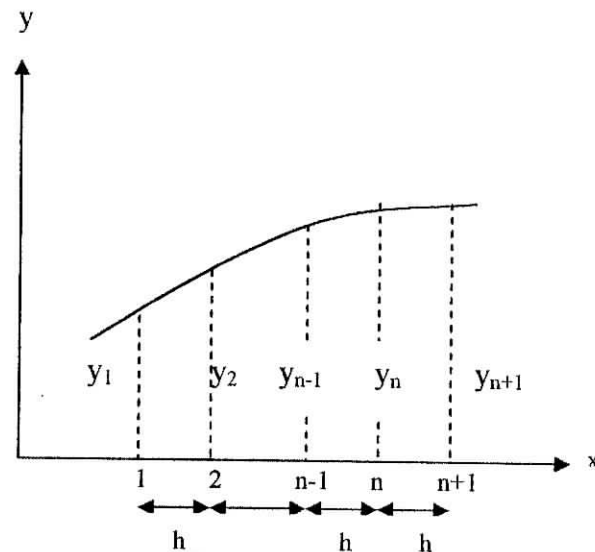


Fig.III-1

Ainsi qu'on peut le voir sur la figure(III-1), quand  $\Delta x$  ne tend pas vers zéro mais a une valeur finie  $h$  les dérivées au point  $x = x_n$  sont représentées par des expressions en fonction de différences finies, soit :

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{u_n - u_{n-1}}{h}$$

Les différences d'ordre supérieur peuvent être déduits de la même façon. Le symbole  $\Delta$  utilisé dans ces expressions est appelé opérateur de différence. Ainsi la différence première  $\Delta u$  est  $u_n - u_{n-1}$  Et la différence seconde  $\Delta^2 u$  est  $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$  les

dérivées  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{d^2 u}{dx^2}$ , Etc., sont représentées respectivement par les différences

finies  $\Delta u$ ,  $\Delta^2 u$  Etc., divisées par  $h, h^2$ , etc.

### III.4) EXPRESSION DES DIFFERENCES FINIES EN COORDONNEES CARTESIENNES:

Les différences partielles finies d'une fonction  $u = f(x, y)$  par rapport à une seule des variables  $x$  ou  $y$  s'expriment comme les différences finies ordinaires.

dans le cas des différences au centre, on en déduit les expressions suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (\text{III-4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \quad (\text{III-5})$$

les indices  $i$  et  $j$  désignent la position des points pivots comme on peut le voir sur la figure (III-2) les différences finies par rapport à  $x$  et à  $y$  à la fois sont obtenues en prenant la première différences partielles dans une direction et en prenant la différences.

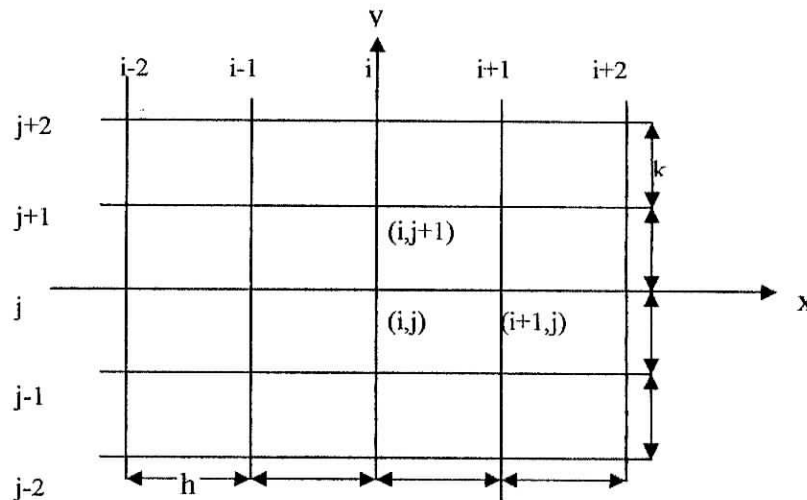


Fig.:III-2

**III-5) EXEMPLE:**

de l'équation de poisson :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

$$k^2 u_{i+1,j} + k^2 u_{i-1,j} - 2(k^2 + h^2)u_{i,j} + h^2 u_{i,j+1} + h^2 u_{i,j-1} = k^2 h^2 f$$

exemple de l'équation de poisson

$$\begin{cases} i=1: u_1 = 0 \\ i=2: u_2 = 0 \\ i=3: u_3 = 0 \\ i=4: u_4 = 0 \\ i=6: u_6 = 0 \\ i=7: u_7 = 0 \\ i=8: u_8 = 0 \\ i=9: u_9 = 0 \end{cases}$$

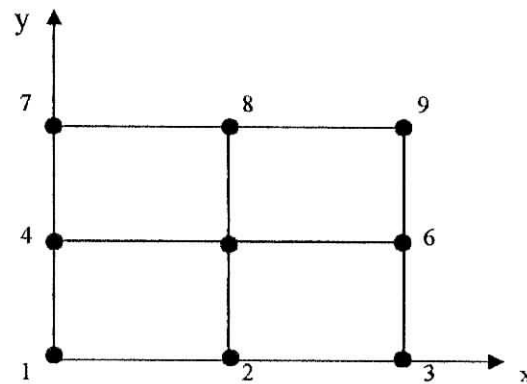


Fig.III.3

$$i=5: k^2(u_4 + u_6) - 2(k^2 + h^2)u_5 + h^2 u_2 + h^2 u_8 = k^2 h^2 f$$

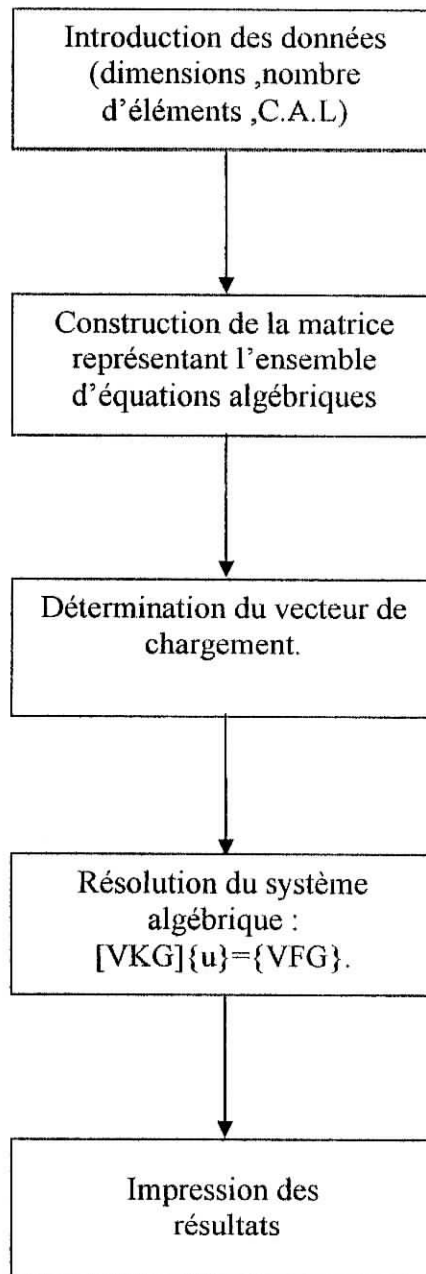
$$\Rightarrow u_5 = -\frac{h^2 k^2 f}{2(h^2 + k^2)}$$

$$h=k=5m \Rightarrow u = 6.25f$$

Pour un maillage  $10 \times 10$  éléments, on retrouve:  $u_5 = 7.31f$

**III-5) PRESENTATION DE L'ALGORITHME MDF :**

On a développé un programme de calcul par MDF qui traite les cas de la plaque rectangulaire. Les étapes de calcul sont résumées comme ci-dessous:



*Chapitre IV :*

***Présentation de la méthode  
des éléments finis***

#### IV.1) INTRODUCTION:

La méthode des éléments finis (M.E.F) connaît un développement rapide et significatif dans la plupart de ses applications aux différents domaines des sciences appliquées. Les problèmes de transfert de chaleur bénéficient donc de l'outil numérique que représente cette méthode.

la M.E.F est essentiellement une méthode d'approximation d'une fonction inconnue sur un domaine continu par l'utilisation de fonctions connues, généralement polynomiales, sur un ensemble de sous domaines compatibles entre eux et représentant au mieux le milieu d'origine. Principalement, cette technique d'approximation est utilisée pour transformer les équations aux dérivées partielles en système d'équations algébriques. la formulation de la M.E.F peut se faire selon la principe des travaux virtuel.

#### IV.2) PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL :

Pour qu'un corps déformable soit en équilibre, il faut et il suffit que le travail des forces extérieures soit égale au travail de déformation pour tous champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible (vérifiant les conditions aux limites) :

$$\delta \pi = \delta u \quad (IV- 1)$$

Commençons par un exemple très simple, la déformation d'une tige élastique fixée à un bout et soumise à une force longitudinale  $F$  à l'autre. Imaginons cette tige composée de  $N$  petits ressorts accrochés bout à bout (ce sont les «éléments finis»). Au repos, le  $i$ -ème ressort va du point  $x_{i-1}$  au point  $x_i$ , avec  $x_0 = 0$  et  $x_N = L$ , longueur de la tige. Appelons  $u_i$  le déplacement de  $x_i$ . Nous supposons les ressorts linéaires, c'est-à-dire qu'ils suivent une loi de Hooke, avec une constante que nous prendrons égale à  $k_i / (x_i - x_{i-1})$ , en ne supposant donc pas la tige homogène. Appliquons alors le principe des travaux virtuels à un déplacement de

l'extrémité du  $i$ -ème ressort (point qui, au repos, se trouve en  $x_i$ ). On obtient

$$\begin{cases} k_i \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - k_{i+1} \cdot \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = 0, \\ k_N \cdot \frac{u_N - u_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} = F. \end{cases} \quad i=1, \dots, N-1 \quad (\text{IV-2})$$

Ce système nous permet de calculer une solution approchée du problème. (Dans la première de ces équations, le premier terme est le travail effectué sur le  $i$ -ème ressort, le second sur le  $(i + 1)$ -ème ressort; on obtient l'équation en sommant élément par élément.)

Nous sommes ainsi parvenus à une solution approchée sans tenir compte de l'équation différentielle qui s'écrit comme indique ci-dessous et dont la solution exacte peut être obtenue analytiquement.

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{du}{dx} \right] = 0, \quad (\text{IV-3})$$

Ce point est typique de la première phase de l'histoire des méthodes d'éléments finis qui ont surtout été développées par des ingénieurs sur la base de considérations physiques où l'équation aux dérivées partielles n'apparaissait pas. C'est la raison pour laquelle ces méthodes sont restées quelque temps cachées aux mathématiciens. Mais la situation avait ses inconvénients, en particulier un gaspillage d'énergie du fait qu'il fallait réinventer une même méthode pour chaque champ nouveau d'application.

### IV.3) APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS:

#### IV.3.1) Approximation nodales:

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions dites exactes  $u_{ex}(x)$  : température, vitesses, épaisseurs, etc. Celles-ci sont représentées par des fonctions « approchée »  $u(x)$  telles que la différence :  $e(x) = u(x) - u_{ex}(x)$ , soit assez « petite » pour l'objectif visé.

Pour construire une fonction « approchée », nous pouvons :

- Choisir un ensemble finis de fonctions dépendant de  $n$  paramètres  $a_i$ , «  $u(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$  ».
- Déterminer les paramètres  $a_i$ , en faisant par exemple coïncider  $u_{ex}(x)$  et  $u(x)$  en  $n$  points  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , c'est à dire en annulant  $e(x)$  en ces  $n$  points.

Le plus souvent, la fonction approchée  $u$  est linéaire en  $a_i$  :

$$u(x) = P_1(x)a_1 + P_2(x)a_2 + \dots + P_n(x)a_n \quad (\text{IV-4})$$

$$u(x) = \langle P_1(x) \ P_2(x) \ \dots \ P_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{a\} \quad (\text{IV-5})$$

Où :

$P_i$  : Sont des fonctions connues linéairement indépendantes, telles que des polynômes ou des fonction trigonométriques.

$a_i$  : Sont les paramètres d'approximation (paramètres généraux).

Cependant nous pouvons choisir comme paramètres  $a_i$  les valeurs de la fonction  $u_{ex}$  en  $n$  points appelés *nœuds de coordonnées*  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Imposons de plus que la fonction approchée  $u$  coïncide avec la fonction  $u_{ex}$  en ces nœuds :

$$u(x_i) = u_{ex}(x_i) = u_i.$$



La fonction approchée (IV-4) s'écrit :

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \dots + N_n(x)u_n$$

$$u(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad \dots \quad N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (\text{IV-6})$$

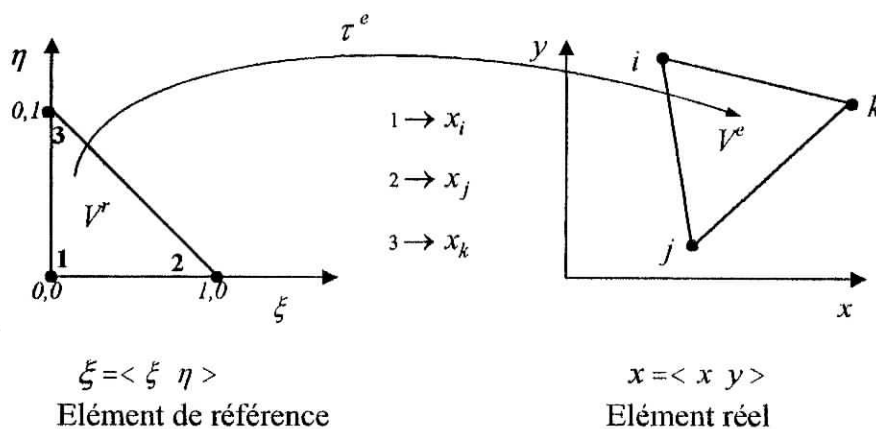
$u_i$  : Sont les paramètres nodaux ou variables nodales d'approximation.

$P(x)$  : Fonctions de base de l'approximation

$N(x)$  : Les fonctions d'interpolation.

### IV.3.2) Eléments de référence:

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence : un élément de référence  $V^r$  est un élément de forme simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel  $V^e$  par une transformation géométrique  $\tau^e$ . Par exemple le cas d'un triangle:



**Figure IV.1 :** relation entre élément de référence et élément réel

La transformation  $\tau^e$  définit les coordonnées  $x^e$  de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées  $\xi$  du point correspondant de l'élément de référence :

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi)$$

La transformation  $\tau^e$  dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des nœuds géométriques qui le définissent. Il y a donc une transformation  $\tau^e$  différente pour chaque élément réel :  $\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi, x_i, x_j, \dots)$

où  $x_i, x_j, \dots$  sont les coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à l'élément  $e$ .

Nous utiliserons une transformation  $\tau$  linéaire par rapport aux coordonnées  $\{x_k, y_k\}$  des nœuds géométriques de l'élément réel  $V^e$  :

$$\tau : \xi \rightarrow x(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{x_n\} \quad (\text{IV-7})$$

où  $\bar{N}_i$  sont les fonctions de transformation géométrique.

pour l'approximation sur un élément de référence Nous choisissons sur le domaine  $V$  un ensemble de  $n$  nœuds d'interpolation de coordonnées  $(x_i)$  confondues ou non avec les nœuds géométriques . Sur chaque élément  $V$  nous utilisons une approximation nodale de type (IV.5) de la fonction exacte  $u_{ex}(x)$ .

$$u_{ex}(x) \approx u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad \dots \quad N_n(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = [N(x)] \{u_n\} \quad (\text{IV-8})$$

Où :  $x$  appartient au domaine  $V^e$

$u_1, u_2, \dots, u_n$  sont les valeurs de  $u_{ex}$  à l' $i$ ème nœud d'interpolation de l'élément sur l'élément de référence.

$N(x)$  : Sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

Remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence :

$$u_{ex} \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} \quad (\text{IV-9})$$

à partir de l'équation (éq.IV.7), on a :

$$\tau : \xi \rightarrow x(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{x_n\} \quad (\text{IV-10})$$

$\bar{N}(\xi)$  : Sont des polynômes en  $\xi$  appelées fonctions de transformation géométrique

$\tau$  : Est la transformation géométrique permettant de remplacer la définition analytique de chaque élément dans l'espace  $(x)$  par la définition analytique plus simple, de son élément de référence.

$u_n$  : Sont les variables nodales de l'élément.

$N(\xi)$  : Les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

En général, les fonctions  $N(x)$  ne sont utilisées que pour des éléments simples. Elles sont le plus souvent remplacées par les fonctions  $N(\xi)$  où  $(x)$  et  $(\xi)$ , et sont liés par la transformation  $(\tau)$  définie par (IV-10).

Pour la Construction des fonctions  $N(\xi)$  et  $\bar{N}(\xi)$ , on recommande de suivre les étapes suivants:

1. Choix de la base polynomiale  $\langle P_i(\xi) \rangle$
2. Evaluation de la matrice nodale  $[P_n] = [P_j(\xi_i)] ; i, j = 1, 2, \dots, n_d$
3. Inversion de la matrice nodale  $[P_n]$
4. Calcul de  $\langle N \rangle$  aux points  $\xi$  désirés :  $\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$
5. Calcul de la matrice  $[B_\xi]$ .

❖ Choix de la base polynomiale:

Exprimer  $u(\xi)$  sur l'élément de référence sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions connues indépendantes ( $P_i(\xi)$ ). Le choix de ces fonctions est l'une des opérations de base de la méthode des éléments finis :

$$u(\xi) = \langle P_1(\xi) \ P_2(\xi) \ \dots \ P_n(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P(\xi) \rangle \{a\} \quad (\text{IV-11})$$

Où :

$\{a\}$  : Sont dites variables généralisées de l'élément par opposition a variables nodales  $\{u_n\}$ .

$\langle P(\xi) \rangle$ : Sont les approximations généralisées par opposition aux approximations nodales  $\{u_n\}$ .

L'ensemble des fonctions  $P_i(\xi)$  constitue la base polynomiale de l'approximation, son nombre de termes doit être égal au nombre de degré de liberté ( $n_d$ ) de l'élément .

Nous utilisons le plus souvent une base polynomiale complète .

Pour construire les fonctions de transformation géométrique  $\bar{N}$  , choisissons de la même manière des expressions de  $(x)$  de la forme .

$$\begin{cases} x(\xi) = \langle \bar{P}(\xi) \rangle \{a_x\} \\ y(\xi) = \langle \bar{P}(\xi) \rangle \{a_y\} \\ z(\xi) = \langle \bar{P}(\xi) \rangle \{a_z\} \end{cases} \quad (\text{IV-12})$$

le nombre de fonctions  $\bar{P}(\xi)$  et de coefficients  $\{a_x\}$  ,  $\{a_y\}$  ,  $\{a_z\}$  est égal au nombre de nœuds géométrique de l'élément .

❖ Relations entre variables généralisées et variables nodales:

Sachant qu'à chaque nœud la fonction  $u(\xi)$  prend la valeur  $u_i = u_{ex}(\xi_i)$  donc :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{nd} \end{Bmatrix} = \{u_n\} = \begin{Bmatrix} \langle P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1) & \dots & P_{nd}(\xi_1) \rangle \\ \langle P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) & \dots & P_{nd}(\xi_2) \rangle \\ \dots \\ \langle P_1(\xi_{nd}) & P_2(\xi_{nd}) & \dots & P_{nd}(\xi_{nd}) \rangle \end{Bmatrix} \{a\} \quad (\text{IV. 13})$$

D'où :

$$\{u_n\} = [P_n]\{a\} \Rightarrow \{a\} = [P_n]^{-1}\{u_n\} \quad (\text{IV-14})$$

Et en écrivant les relations (éq.IV.24) aux nœuds géométriques on aboutit à :

$$\begin{cases} \{x_n\} = [\bar{P}_n]\{a_x\} \\ \{y_n\} = [\bar{P}_n]\{a_y\} \\ \{z_n\} = [\bar{P}_n]\{a_z\} \end{cases} \quad (\text{IV-15})$$

Donc, on pourra exprimer les variables généralisées  $\{a\}$  en fonction des coordonnées nodales généralisées par :

$$\begin{cases} \{a_x\} = [\bar{P}_n]^{-1}\{x_n\} \\ \{a_y\} = [\bar{P}_n]^{-1}\{y_n\} \\ \{a_z\} = [\bar{P}_n]^{-1}\{z_n\} \end{cases} \quad (\text{IV-16})$$

❖ Expression des fonctions  $N$  et  $\bar{N}$ :

Reportant (éq.IV.14) dans (éq.IV.11) l'équation devient :

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \{u_n\} \\
 u(\xi) &= \langle N(\xi) \rangle \{u_n\}
 \end{aligned}
 \tag{IV.17}$$

Où :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}
 \tag{IV.18}$$

Idem , pour le cas des fonctions  $\bar{N}$  on obtient :

$$\begin{cases}
 \{x(\xi)\} = \langle \bar{N} \rangle \{x_n\} \\
 \{y(\xi)\} = \langle \bar{N} \rangle \{y_n\} \\
 \{z(\xi)\} = \langle \bar{N} \rangle \{z_n\}
 \end{cases}
 \tag{IV-19}$$

Où :

$$\langle \bar{N}(\xi) \rangle = \langle \bar{P}(\xi) \rangle [\bar{P}_n]^{-1}
 \tag{IV-20}$$

❖ Dérivation de la fonction  $u(\xi)$  :

Par dérivation de (éq.IV.17), nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,n} \\ u_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle P_{, \xi} \rangle \\ \langle P_{, n} \rangle \\ \langle P_{, \zeta} \rangle \end{Bmatrix} [P_n]^{-1} \{u_n\} = \begin{Bmatrix} \langle N_{, \xi} \rangle \\ \langle N_{, n} \rangle \\ \langle N_{, \zeta} \rangle \end{Bmatrix} \{u_n\} = [B_{\xi}] \{u_n\}
 \tag{IV.21}$$

la notation indicielle suivante veut dire :  $f_{,x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$

la jacobienne de la transformation  $\tau$ , qui lie les dérivées par rapport aux coordonnées normalisées et celles en coordonnées cartésiennes, s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

Ce que nous noterons :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} = [J] \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} \text{ et } \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \quad (\text{IV.23})$$

Où :  $[J]$  est la matrice jacobienne de la transformation géométrique.

Ainsi, on arrive au changement de variable permettant de passer de l'intégrale d'une fonction  $f$  sur l'élément réel  $V^e$  à une intégration simple sur l'élément de référence  $V^r$  (cas de la matrice de rigidité).

$$K = \int_{V^r} [B_\xi]^T [D] [B_\xi] \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{IV-24})$$

#### IV.4) DERIVATION DES EQUATIONS POUR DE LA MEF :

##### IV.4.1) approche variationnelle :

Dans cette approche, on considère la minimisation de la fonctionnelle I donnée par l'équation (IV-1) qui satisfait les C.A.L précisés.

$$\text{L'équation de Poisson: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{q}{\lambda} = 0 \quad (\text{IV- 25})$$

on pose  $\frac{q}{\lambda} = -f$ , l'équation (IV-39) devient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (\text{IV- 26})$$

##### IV.4.1.1) Etapes de dérivation des équations de la MEF :

**Etape N°1 :** diviser le domaine V en E éléments finis pour chaque nœud.

**Etape N°2 :** adopter une forme convenable de la variation de température  $u$  en chaque élément fini et exprimer  $u^{(e)}(x, y)$  en élément  $e$  par :

$$u^{(e)}(x, y, t) = [N(x, y)] u^{(e)} \quad (\text{IV- 27})$$

**Etape N°3 :** exprimer la fonctionnelle I comme étant la somme des quantités élémentaires  $I^{(e)}$  comme :

$$I = \sum_{e=1}^E I^{(e)} \quad (\text{IV-28})$$

$$I^{(e)} = \iint_{\Lambda^{(e)}} \left[ k_x \left( \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \right)^2 + -2(q)u^{(e)} \right] dA \quad (\text{IV-29})$$



pour la minimisation de la fonctionnelle I ,on utilise les conditions nécessaires :

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^{(e)}}{\partial u_i} = 0, i = 1, 2, \dots, M$$

avec M :le nombre total des variables nodales, de l'équation (IV-43 ),on a :

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial u_i} = \iint_{\Lambda^{(e)}} \left[ k_x \cdot \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \right) + k_y \cdot \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \right) - (q) \frac{\partial u^{(e)}}{\partial u_i} \right] dA \quad (IV-30)$$

L'équation (IV-41 ) donne

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} &= \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \dots \frac{\partial N_p}{\partial x} \right] u^{(e)} \\ \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial u_i} &= N_i \end{aligned} \right\} \quad (IV-31)$$

Ainsi, l'équation (IV-44 ) s' exprime par :

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial u^{(e)}} = \left[ k^{(e)} \right] u^{(e)} - \bar{p}^{(e)} \quad (IV-32)$$

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Lambda^{(e)}} \left( k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \dots \right) dA \quad (IV-33)$$

et

$$P_i^{(e)} = \iint_{\Lambda_2^{(e)}} q N_i dV \quad (IV-34)$$

**Etape N°4 :** Réécrire les équations. (IV-42) dans la matrice de forme comme suivant :

$$\frac{\partial I}{\partial u} = \sum_{e=1}^E \left( [K^{(e)}] u^{(e)} - \bar{P}^{(e)} \right) = \bar{0} \quad (\text{IV-35})$$

Où :

$$\vec{u} = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_p \end{array} \right\} : \text{Vecteur température des variables nodales du système.}$$

en utilisant le processus d'assemblage, l'équation (IV-49) devient :

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K^{(e)}] \quad (\text{IV-36})$$

$$\bar{P} = \sum_{e=1}^E \bar{P}^{(e)} \quad (\text{IV-37})$$



**b) Evaluation de  $[P_n]$ :**

Evaluons  $\langle P(\xi) \rangle$  en chacun des 4 nœuds de coordonnées  $\xi_i$ :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \{\xi_n\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \{\eta_n\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

**c) Inversion de  $[P_n]$ :**

Dans ce cas, la matrice  $[P_n]$  est orthogonale puisque les produits scalaires de ses différentes colonnes sont nuls. Chaque vecteur colonne a pour norme 4.

Donc:

$$[P_n]^{-1} = \frac{1}{4} [P]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**d) Expression de  $\langle N \rangle$ :**

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \\ \langle N \rangle &= \left\langle \frac{1-\xi-\eta+\xi\eta}{4}, \frac{1+\xi-\eta-\xi\eta}{4}, \frac{1+\xi+\eta+\xi\eta}{4}, \frac{1-\xi+\eta-\xi\eta}{4} \right\rangle \\ \langle N \rangle &= \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1+\eta); (1-\xi)(1+\eta) \rangle. \end{aligned}$$

L'élément est isoparamétrique:

$$\langle \bar{N} \rangle \equiv \langle N \rangle$$

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$y(\xi, \eta) = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

**e) Détermination de [J]:**

Dérivation les fonction  $\bar{N}$  on obtenir, selon (IV.27):

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1-\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

Dans le cas particulier ou l'élément est rectangulaire de cotés a et b

$$x_2 = x_3 = a \text{ et } x_1 = x_4 = 0$$

$$y_3 = y_4 = b \text{ et } y_1 = y_2 = 0$$

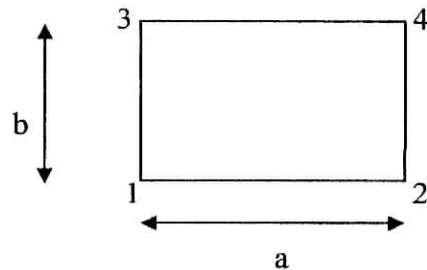


Fig.IV.3

Donc:  $\det(J) = \frac{ab}{4}$

Tel que :  $a=b=10$

Donc:  $\det(J)=25$

De (IV-8 )

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle P_{,\xi} \rangle \\ \langle P_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} [P_n]^{-1} \{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} = [B_\xi] \{u_n\}$$

Donc:

$$\begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} = [B_\xi]$$

Par ailleurs:

$$B_\xi = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-n) & (1-n) & (1+n) & -(1-n) \\ -(1+\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

D'ou:

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T \cdot k \cdot B \cdot \det(J) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Avec:

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc:

$$K = 25 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

## IV-6) CONVERGENCE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

La convergence de la solution éléments finis vers la solution exacte au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente peut se faire soit de manière monotone soit de manière non monotone.

### IV.6.1) Convergence monotone :

Les éléments doivent être complets et compatibles.

#### a) Élément complet :

Les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter :

- déplacement de corps rigide :  $\sum h = 1$
- état de déformation constante

A mesure que le nombre d'éléments dans un maillage, augmente la taille de l'élément devient petite et la déformation au sein de l'élément tend vers une valeur constante.

#### b) Élément compatible :

Les déplacements au sein des éléments et à travers les limites séparant les éléments doivent être continue. Physiquement la compatibilité assure qu'il n'y aura pas apparition d'espace ou vides entre éléments lorsque l'assemblage est chargé.

La complétude est difficile à satisfaire lorsque les d.d.l. aux nœuds sont dépendants (déplacement, rotation) : flexion de plaques, Coques. Il est avantageux d'avoir des d.d.l. indépendants.

complétude }  
compatibilité }  $\Rightarrow$  Convergence monotone

**IV.6.2) Convergence non monotone :**

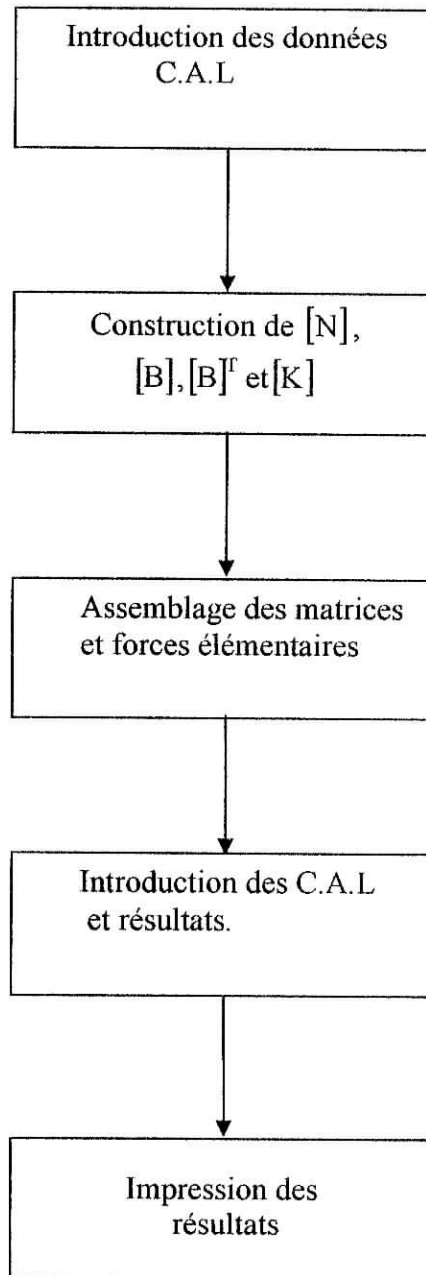
En pratique, nous remarquons souvent que la solution éléments finis converge vers la solution exacte malgré l'emploi d'éléments ne préservant pas la continuité inter éléments. Il s'agit dans ce cas de convergence non monotone due à l'utilisation d'éléments incompatibles.



**III-7) PRESENTATION DE L'ALGORITHME MEF :**

On a mis au point un programme MEF qui traite tout les cas du problème étudié.

Les étapes de calcul sont résumées comme ci-dessous:



*Chapitre V :*

***Etude comparative  
des résultats***

**V.1) INTRODUCTION :**

Dans un premier temps, nous allons présenter les résultats de la résolution de l'équation de Poisson par les trois méthodes : analytique (ANA), Galerkin (GLK) et différence finies (MDF), (Cas traité dans les chapitres I et III).

On passe à la résolution de l'équation de Laplace, pour les différents cas de chargements.

À noter que pour la MEF on a utilisé trois types de maillage :

- un maillage régulier semblable à celui utilisé en MDF,
- un maillage raffiné régulier : on a augmenté régulièrement le nombre de d.d.l.
- un maillage raffiné non régulier : on a raffiné le maillage aux limites de la plaque.

**Notations:**

| Notation           | Signification  |
|--------------------|--|
| $u_{10 \times 10}$ | $u$ obtenu par MDF maillage de $10 \times 10$ éléments. (10 suivant $x$ et 10 suivant $y$ ). |
| $Gl_k1$            | $u$ obtenu par GLK avec un seul paramètre: $a_1$   |
| $u_1$              | $u$ obtenu en $y=1m$ .   |
| $E_{max}$          | L'erreur maximale obtenue dans le cas de chargement indiqué.                                 |

## V.2) Equation de Poisson :

### a) Étude de convergence de la MDF :

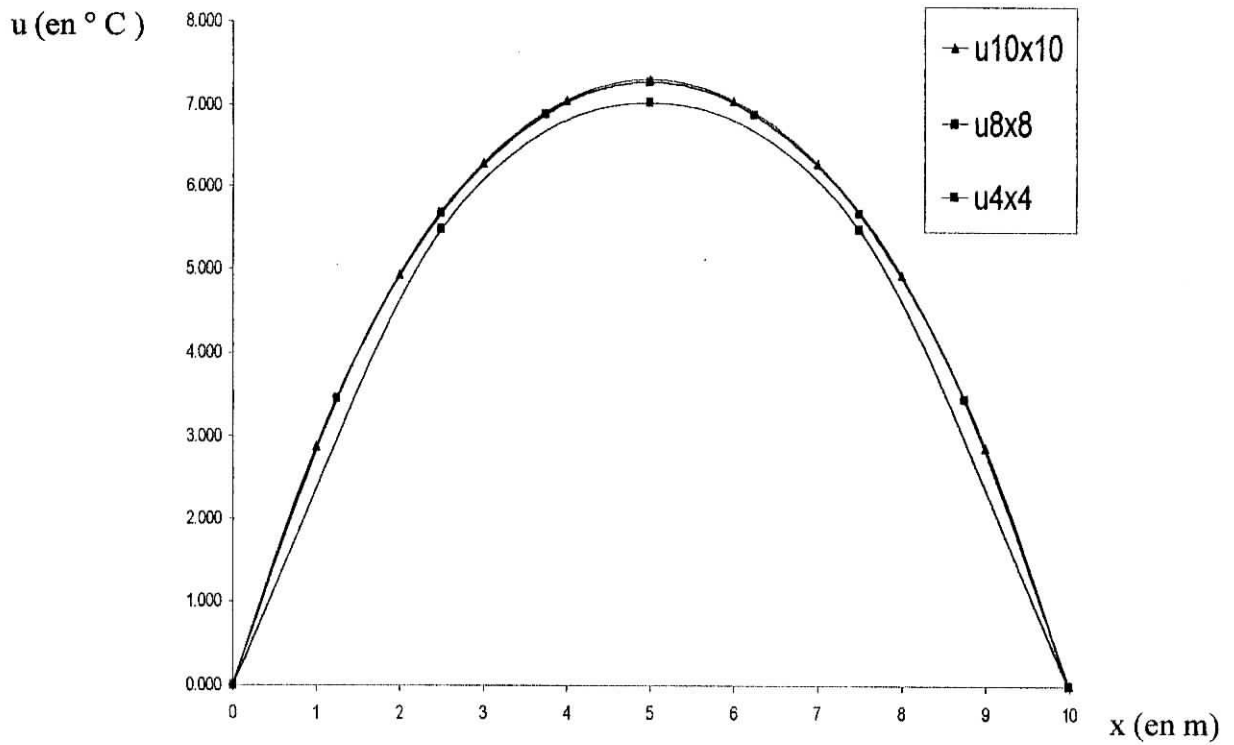


Fig.V-1: Variation de la température à mi-hauteur.

### b) Étude de convergence de la GLK :

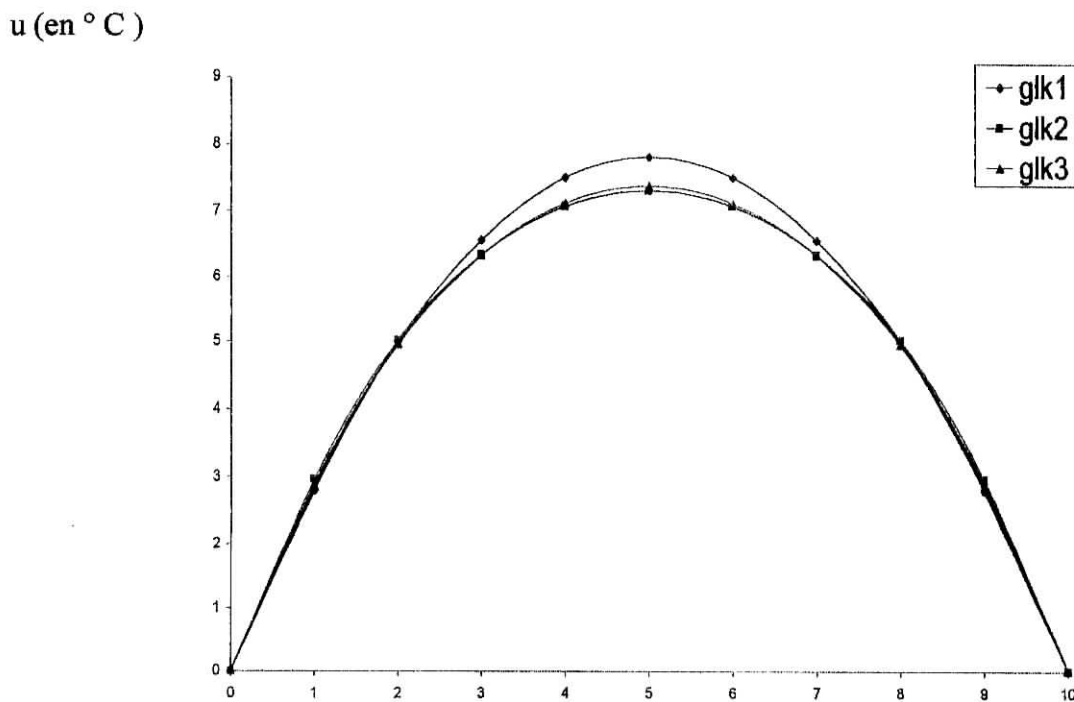


Fig.V-2: Variation de la température à mi-hauteur.

## c) Comparaison ANA-MDF :

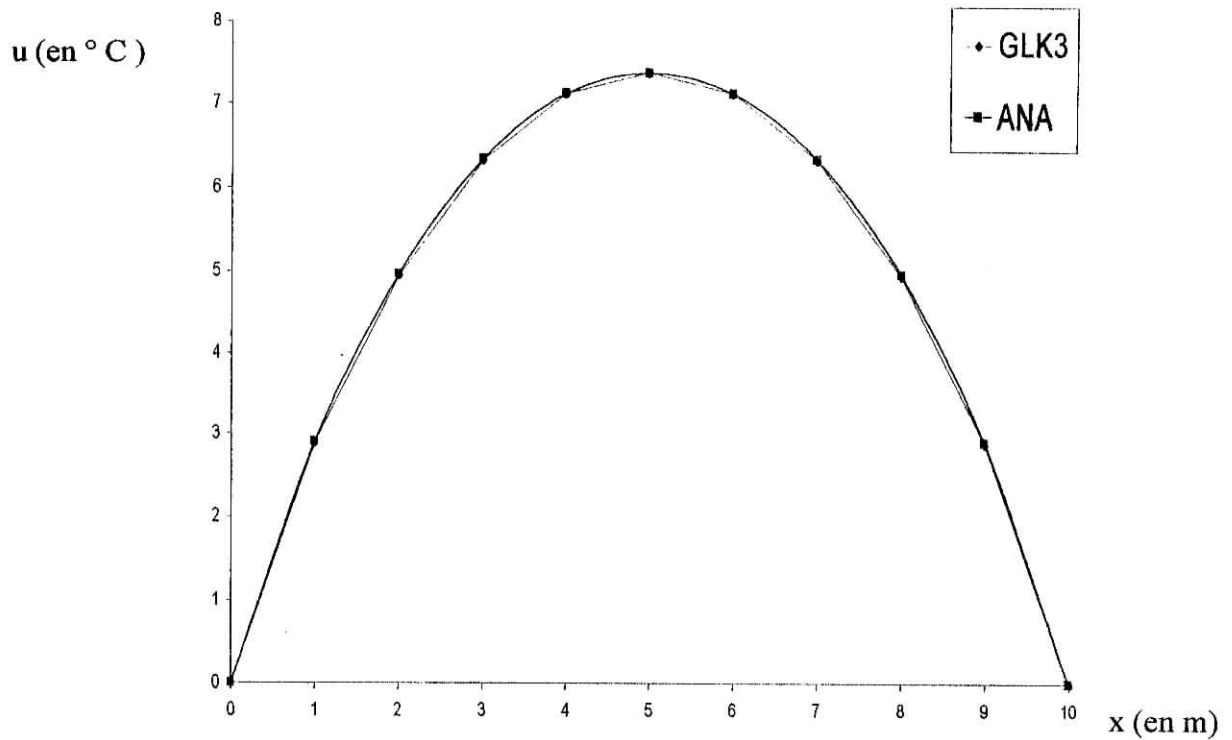


Fig.V-3: Variation de la température en fonction de la hauteur I

## d) Comparaison GLK-MDF :

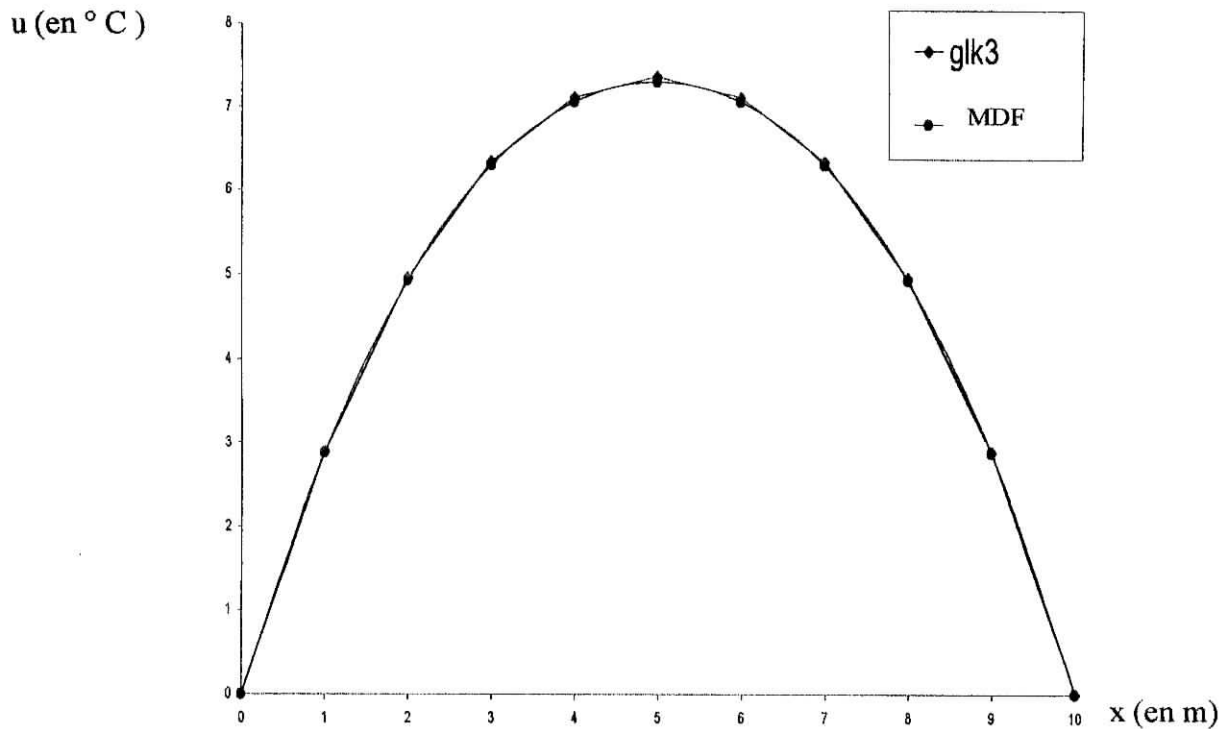


Fig.V-4: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

## V.3) Equation de Laplace :

❖ Différents cas de chargement :

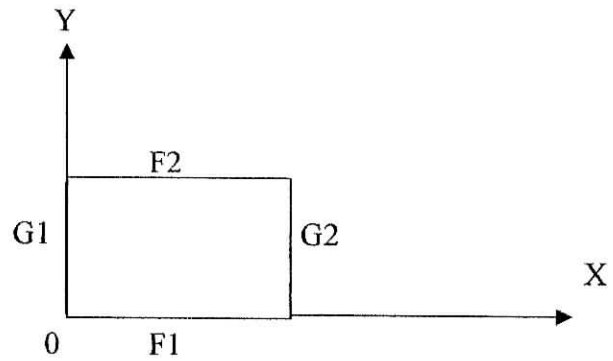


Fig.V-5

## a) Cas de chargement A :

$$\begin{cases} F1 = 0 \\ F2 = 0 \\ G1 \neq 0 \\ G2 = 0 \end{cases}$$

## b) Cas de chargement B :

$$\begin{cases} F1 = 0 \\ F2 \neq 0 \\ G1 \neq 0 \\ G2 = 0 \end{cases}$$

## c) Cas de chargement C :

$$\begin{cases} F1 = 0 \\ F2 = 0 \\ G1 \neq 0 \\ G2 \neq 0 \end{cases}$$

## d) Cas de chargement D :

$$\begin{cases} F1 = 0 \\ F2 \neq 0 \\ G1 \neq 0 \\ G2 \neq 0 \end{cases}$$

**Notation:**

Le potentiel est indiqué comme suivant:

Par exemple, un potentiel de  $100^\circ \text{C}$  pour le cas A est noté ainsi : **A100**.

❖ Différents types de maillage utilisés dans la M.E.F :

➤ Cas de la plaque rectangulaire :

a) Maillage régulier :

Cas de chargement A:

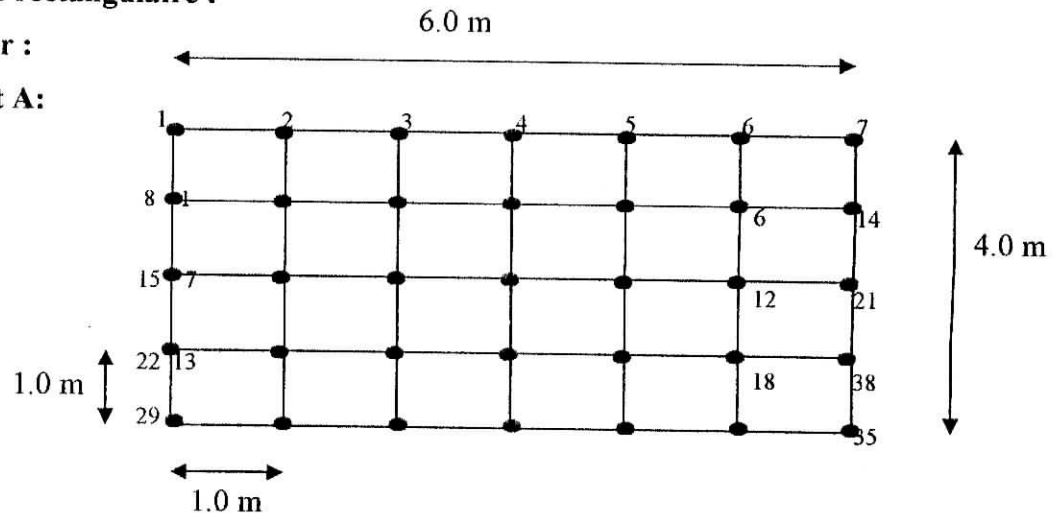


Fig.V-6 : Maillage régulier

b) Maillage raffiné régulier :

Cas de chargement A:

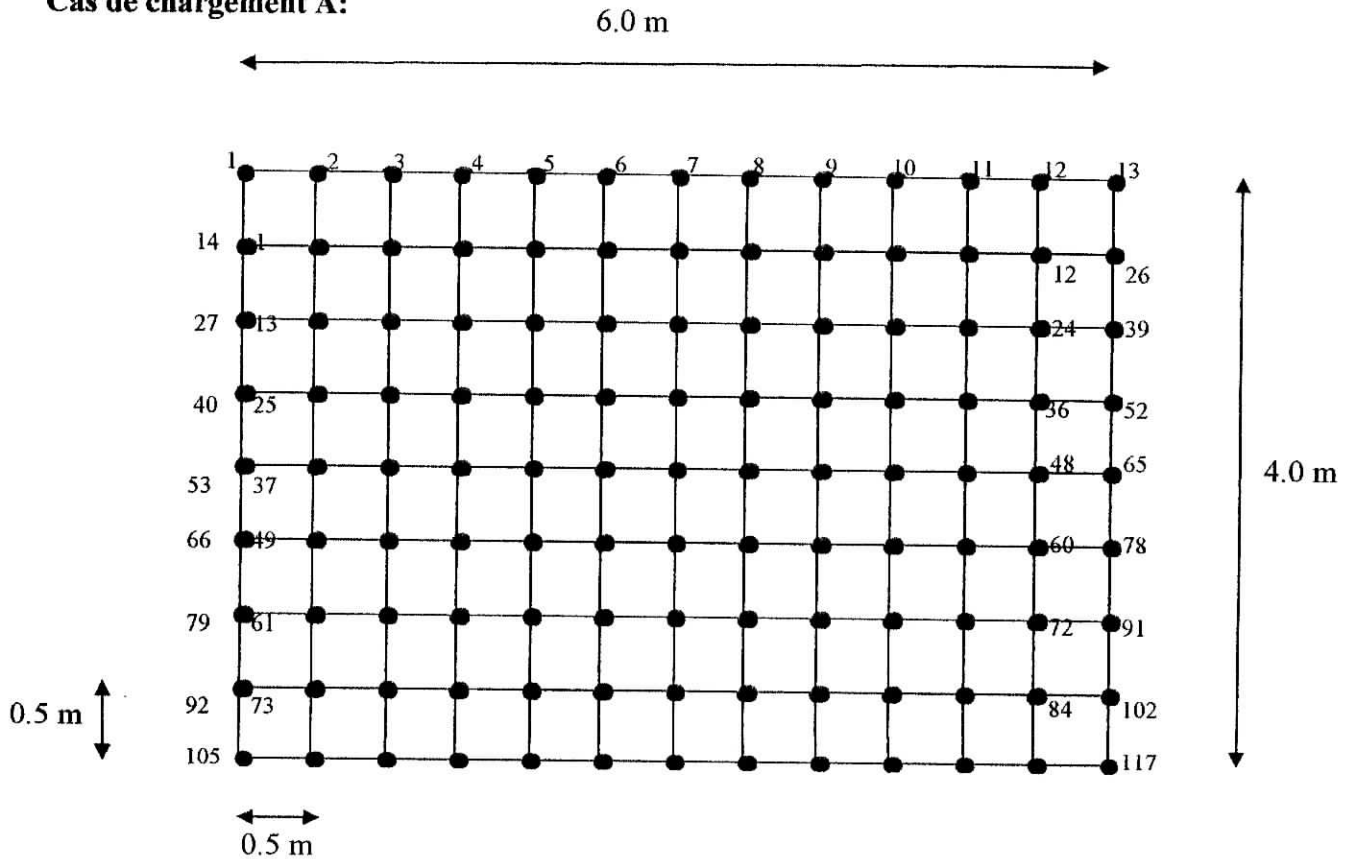


Fig. .V.7 : Maillage régulier raffiné

## c) Maillage raffiné non régulier :

## Cas de chargement A:

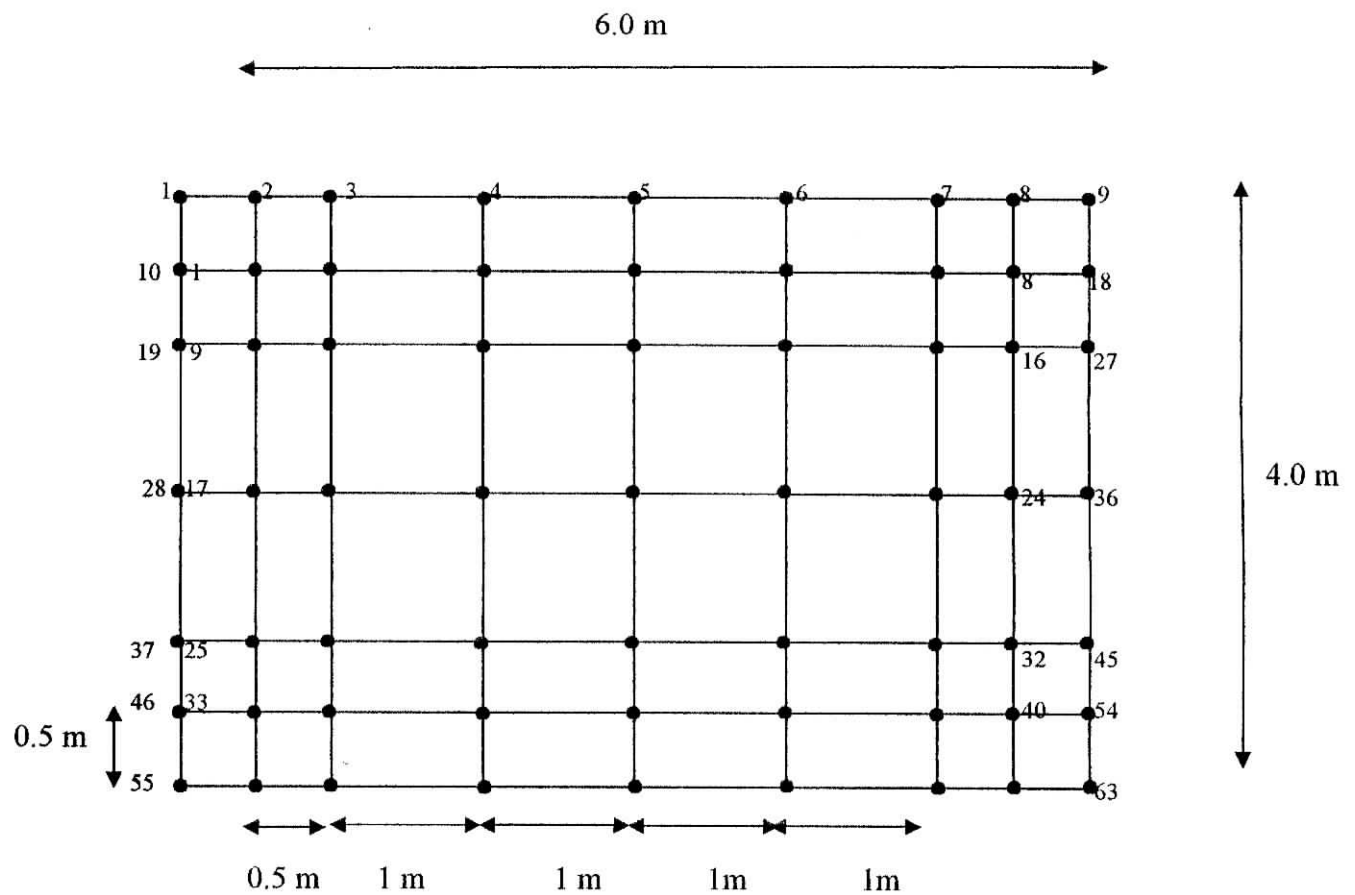


Fig. .V.8 : Maillage raffiné non régulier



➤ Cas de la plaque carré :

a) Maillage régulier :

Cas de chargement B:

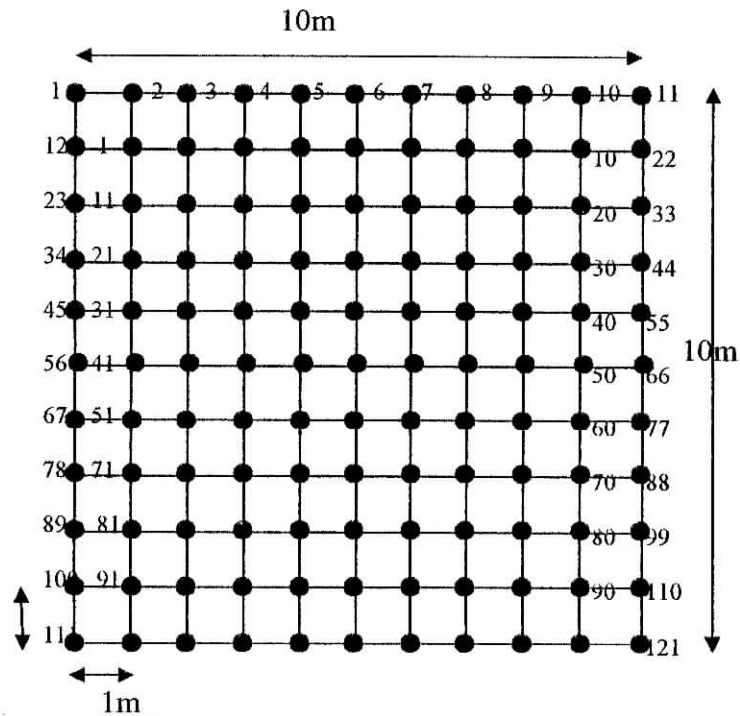


Fig. V-9 : Maillage régulier

**b) Maillage raffiné non régulier :**

**Cas de chargement B:**

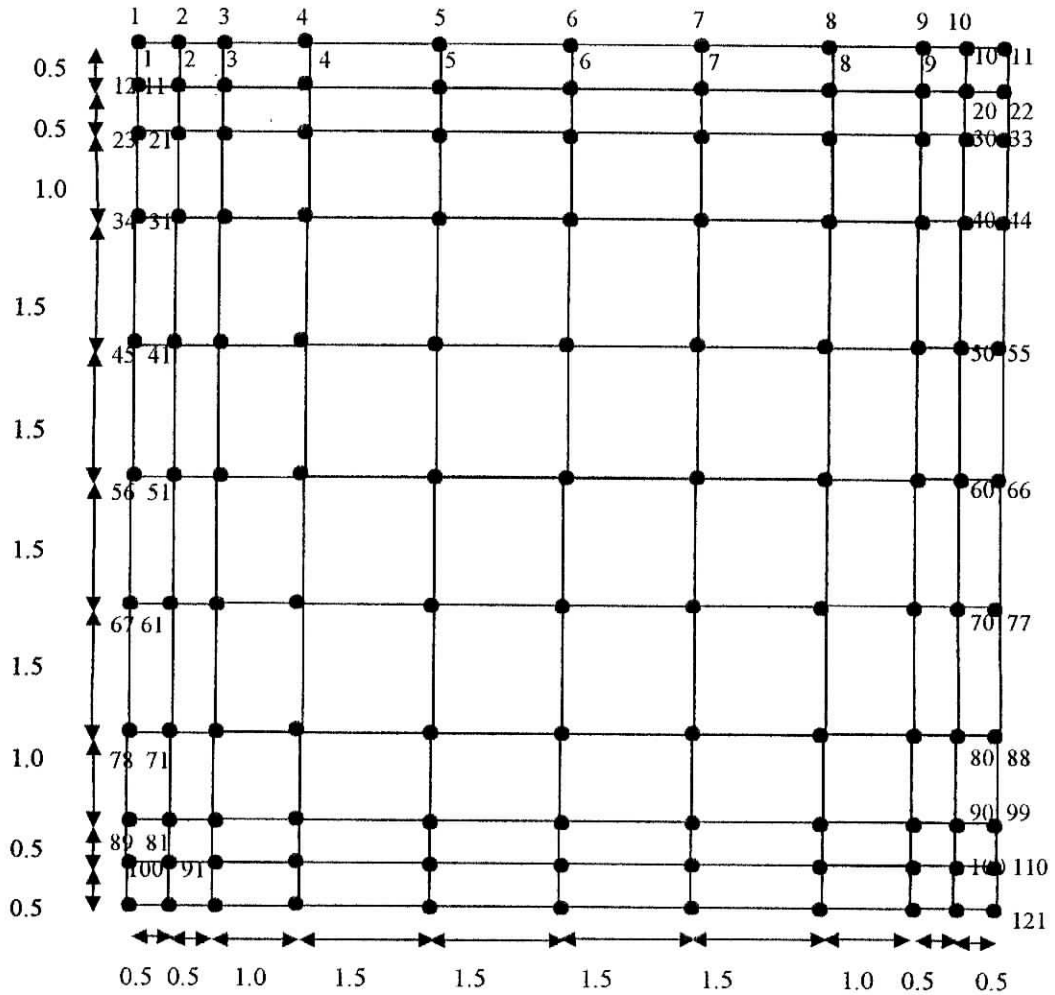
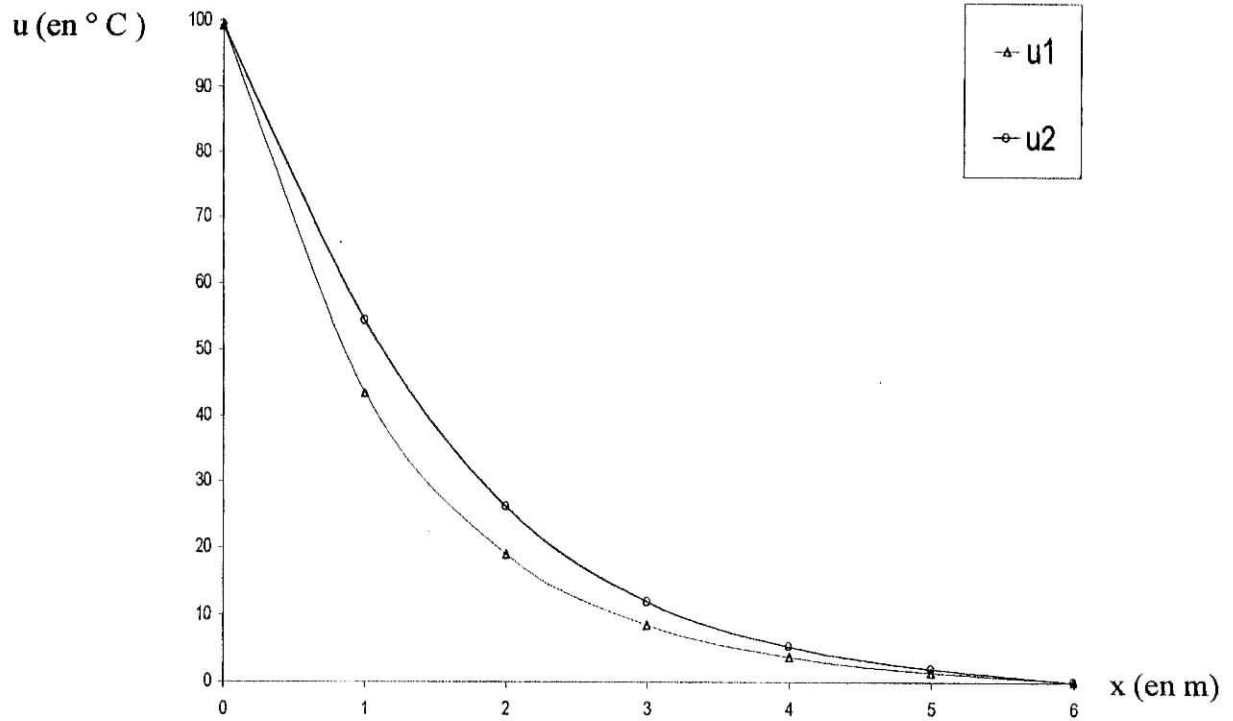


Fig.V.10 : Maillage raffiné

**V.3.1) VARIATION DE LA TEMPERATURE EN FONCTION DE LA HAUTEUR:**

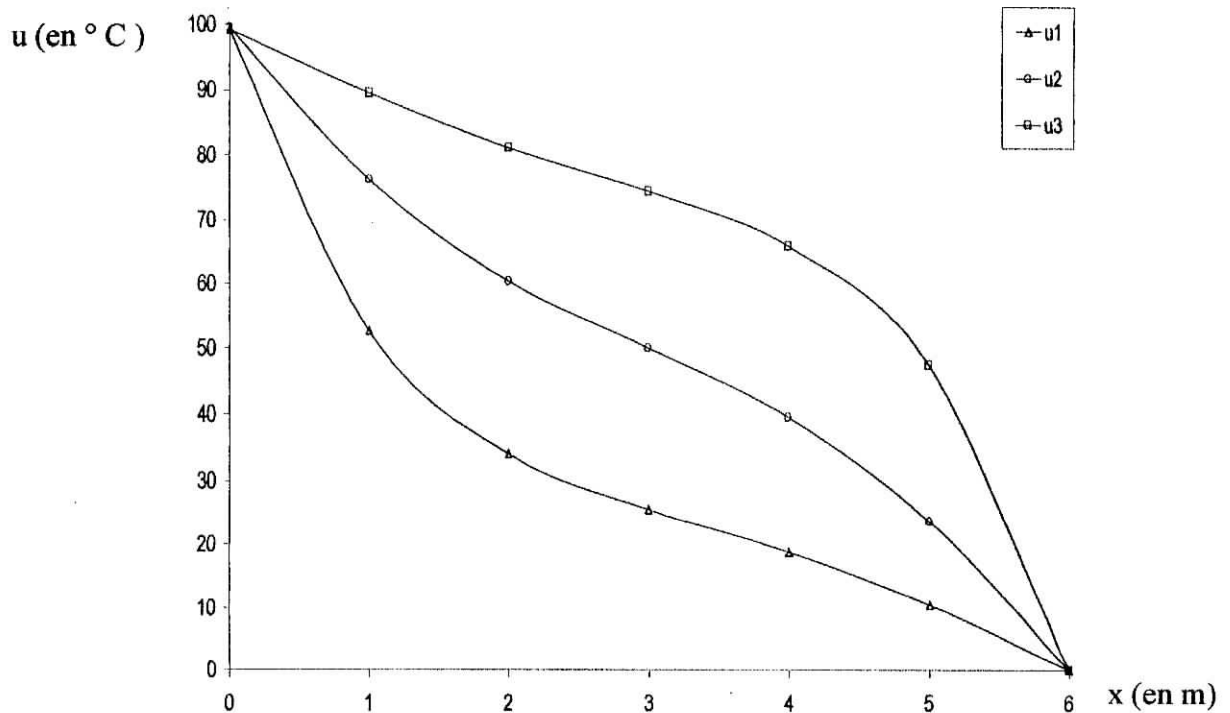
➤ **Cas de la plaque rectangulaire:**

**a) Cas de chargement A :**



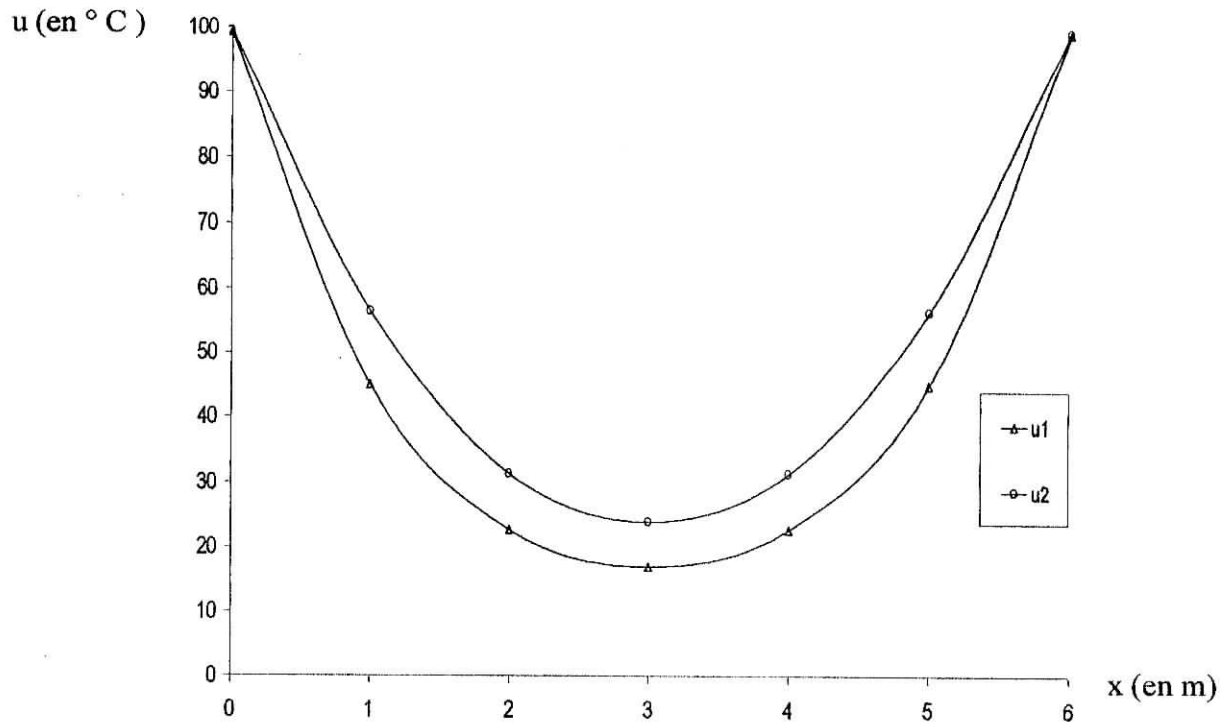
**Fig.V-11:** Variation de la température en fonction de la hauteur H.

**b) Cas de chargement B :**



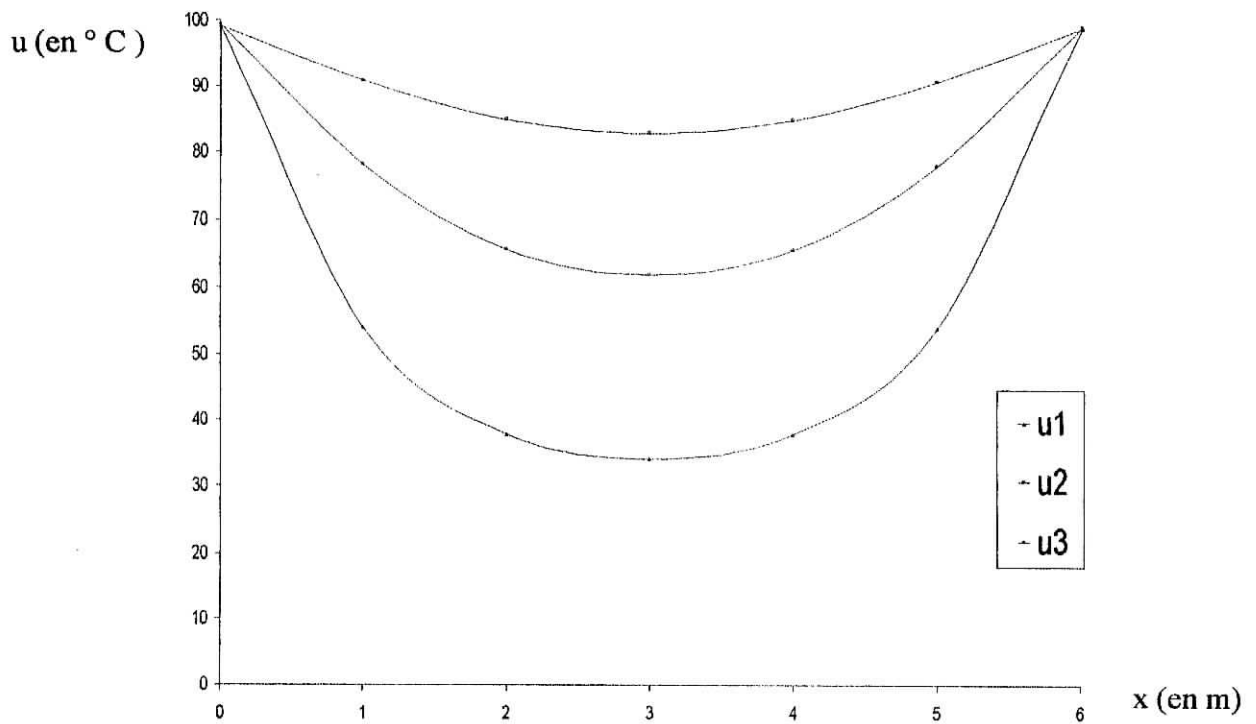
**Fig.V-12:** Variation de la température en fonction de la hauteur H.

**c) Cas de chargement C :**



**Fig.V-13:** Variation de la température en fonction de la hauteur H.

**d) Cas de chargement D :**



**Fig.V-14:** Variation de la température en fonction de la hauteur H.

➤ Cas de la plaque carré:

a) Cas de chargement A :

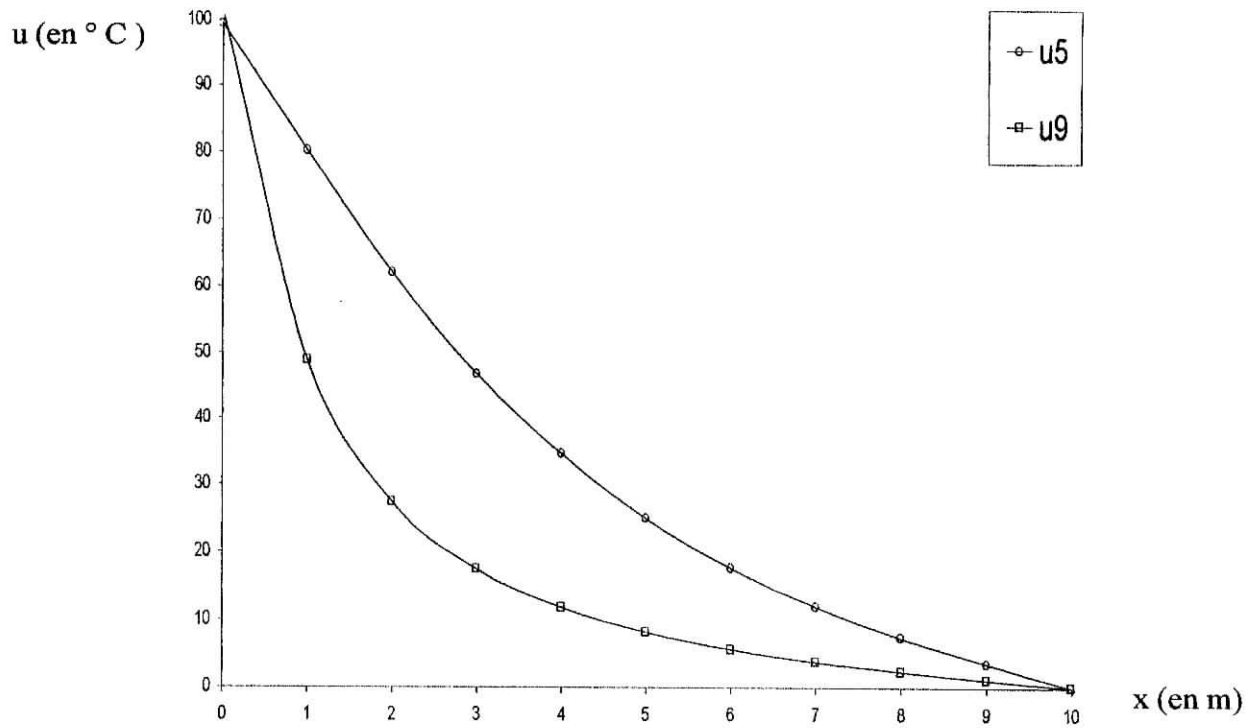


Fig.V-15: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

b) Cas de chargement B :

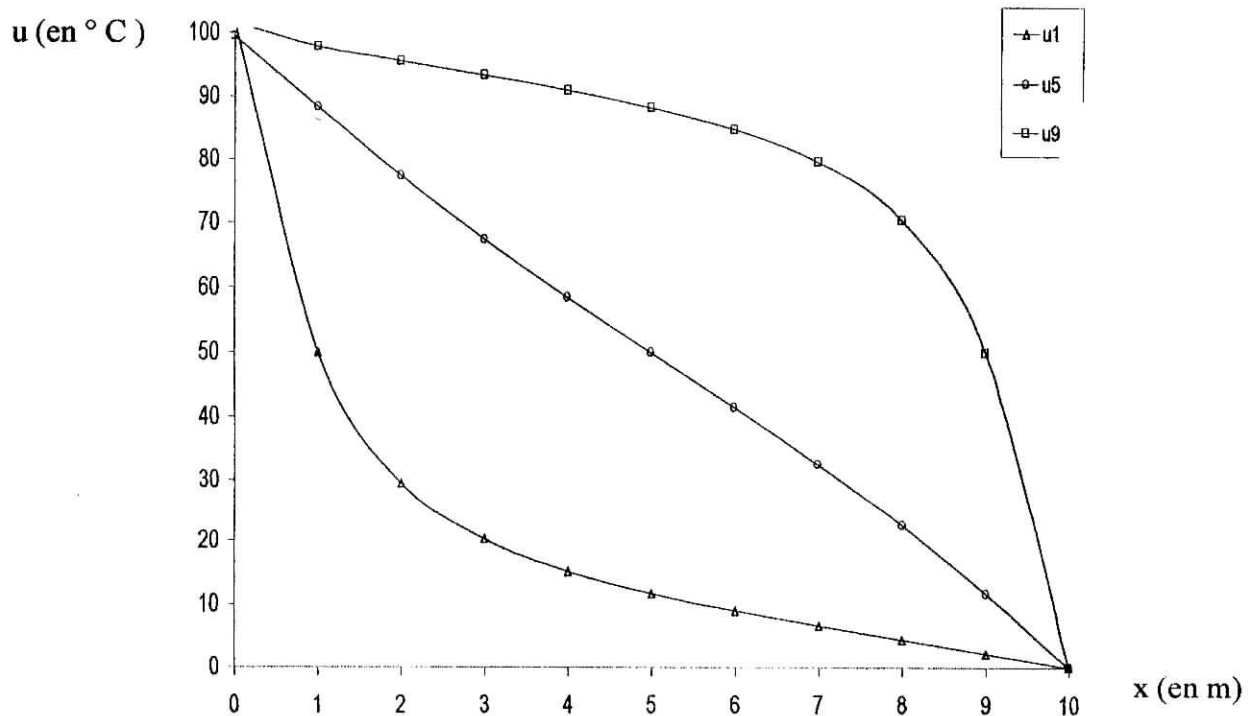


Fig.V-16: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

**b) Cas de chargement C :**

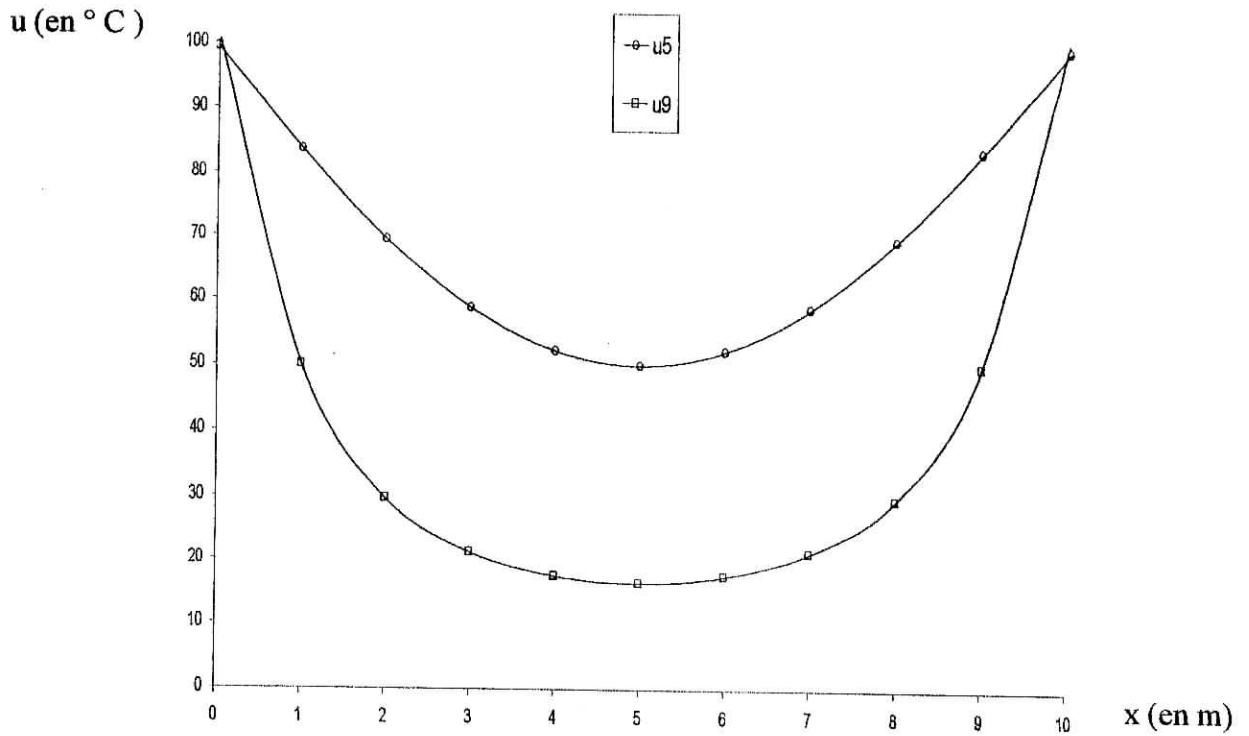


Fig.V-17: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

**d) Cas de chargement D :**

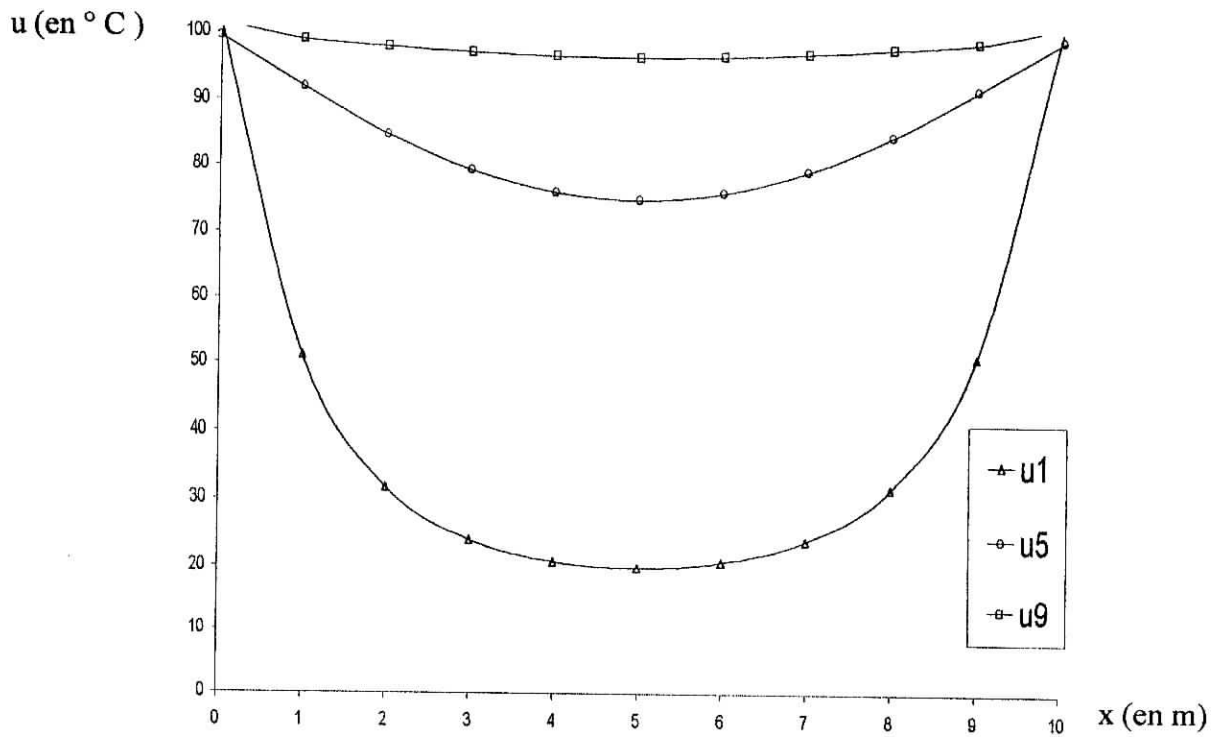


Fig.V-18: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

### V.3.2) COMPARAISON ANA-MDF:

Cas de la plaque rectangulaire:

a) Cas de chargement A100 :  $y=1,3$  m :  $E_{max}=6$  %

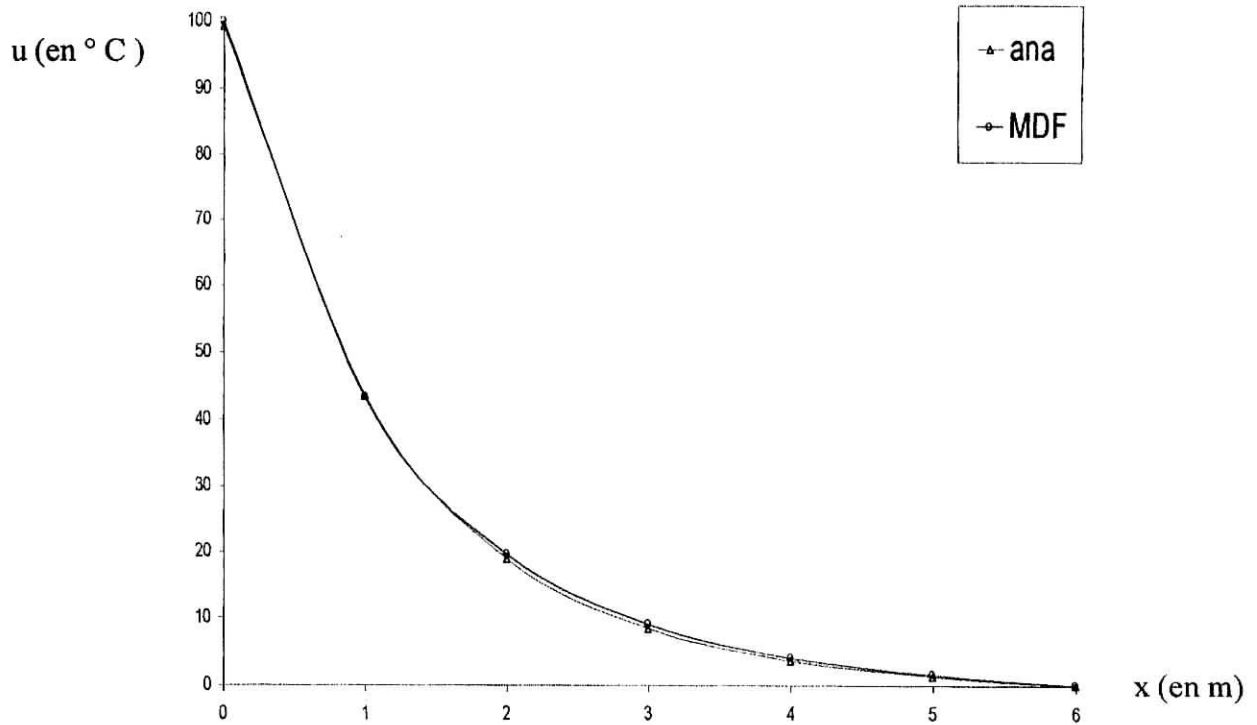


Fig.V-19: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

b) Cas de chargement B100 :  $y=1$  m :  $E_{max}=4$  %

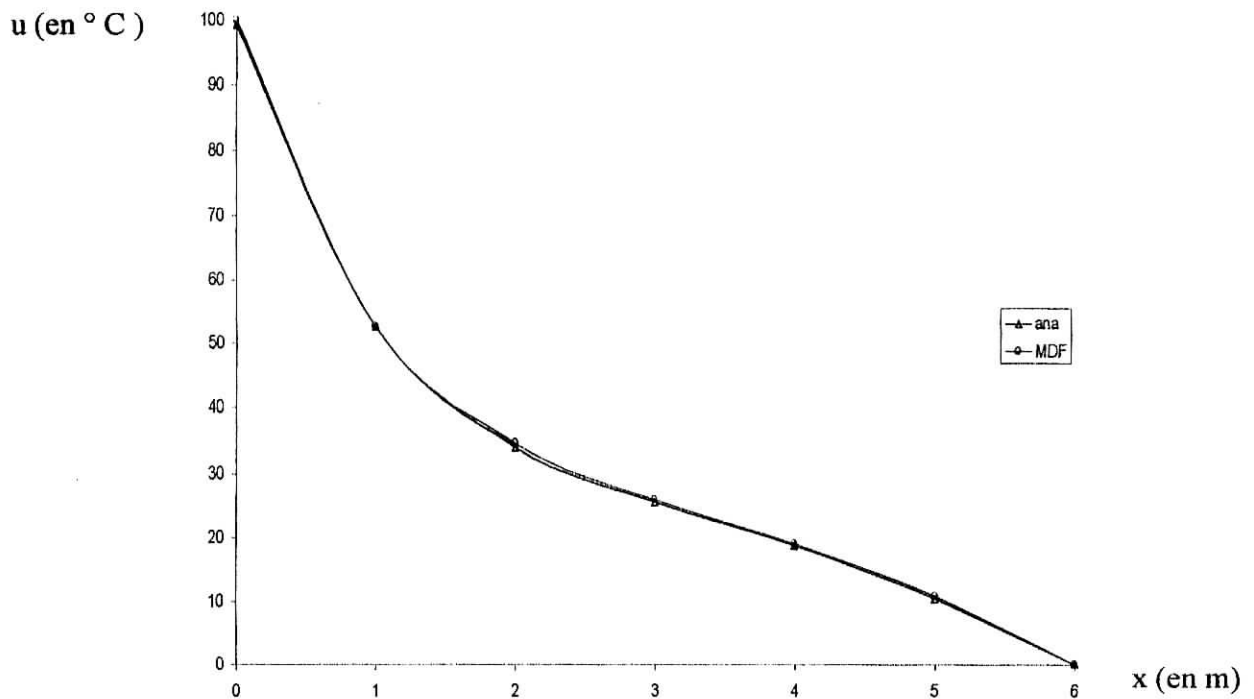


Fig.V-20: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

c) Cas de chargement C150 :  $y=1,9m$  :  $E_{max}=6\%$

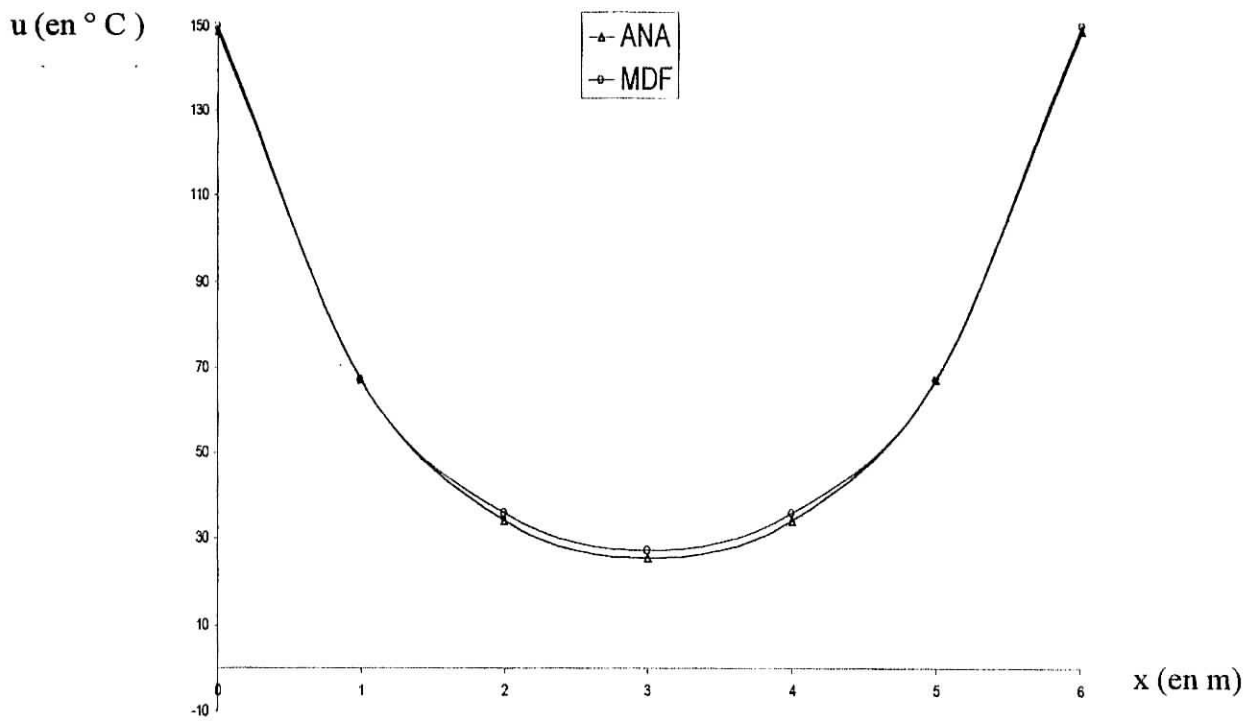


Fig.V-21: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

d) Cas de chargement D150 :  $y=1m$  :  $E_{max}=3\%$

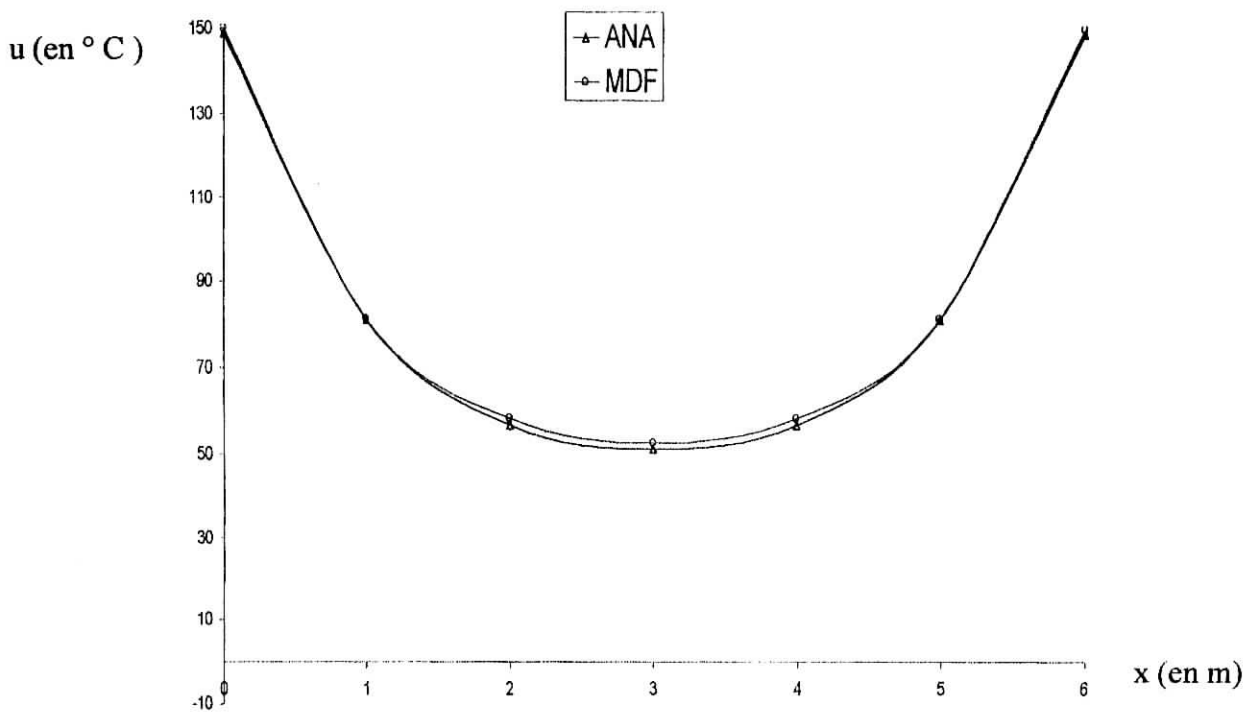


Fig.V-22: Variation de la température en fonction de la hauteur H.



➤ Cas de la plaque carré:

a) Cas de chargement A100 :  $y=1,9m$  :  $E_{max}=2\%$

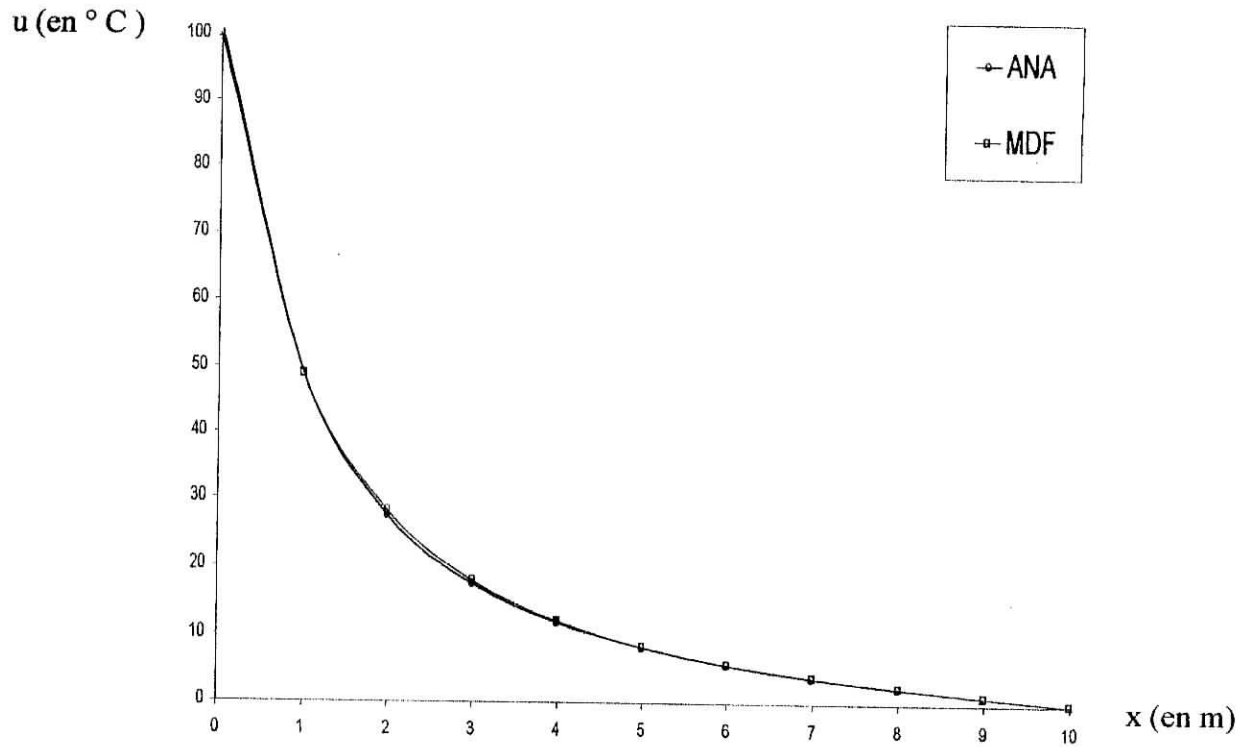


Fig.V-23: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

b) Cas de chargement B100 :  $y=1,9m$  :  $E_{max}=2\%$

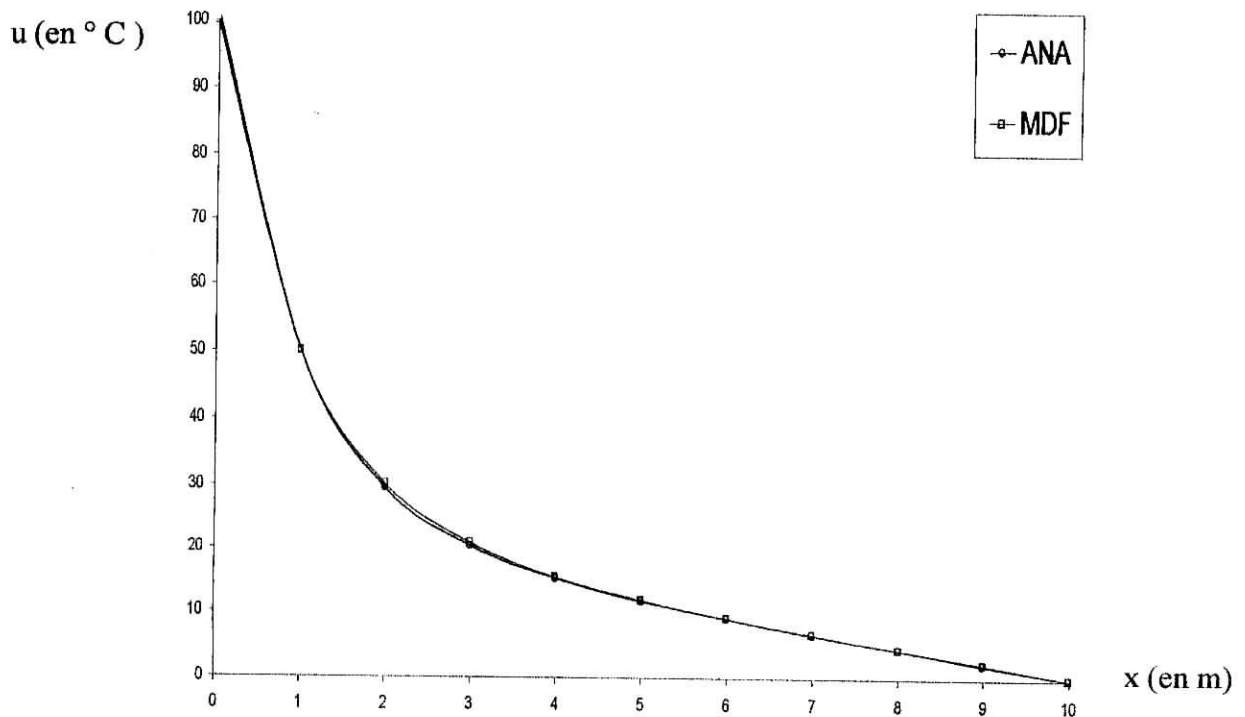


Fig.V-24: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

c) Cas de chargement C150 :  $y=1,9m$  :  $E_{max}=2$

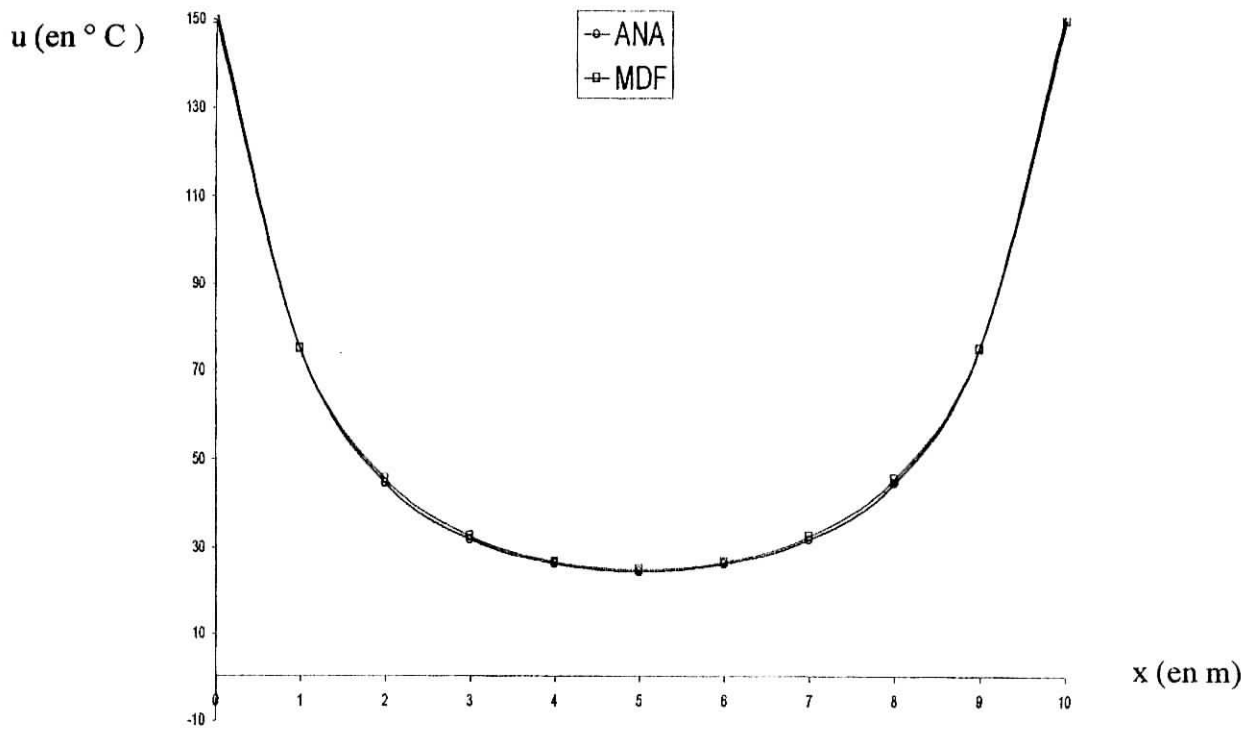


Fig.V.-25: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

d) Cas de chargement D150 :  $y=1m$  :  $E_{max}=2$

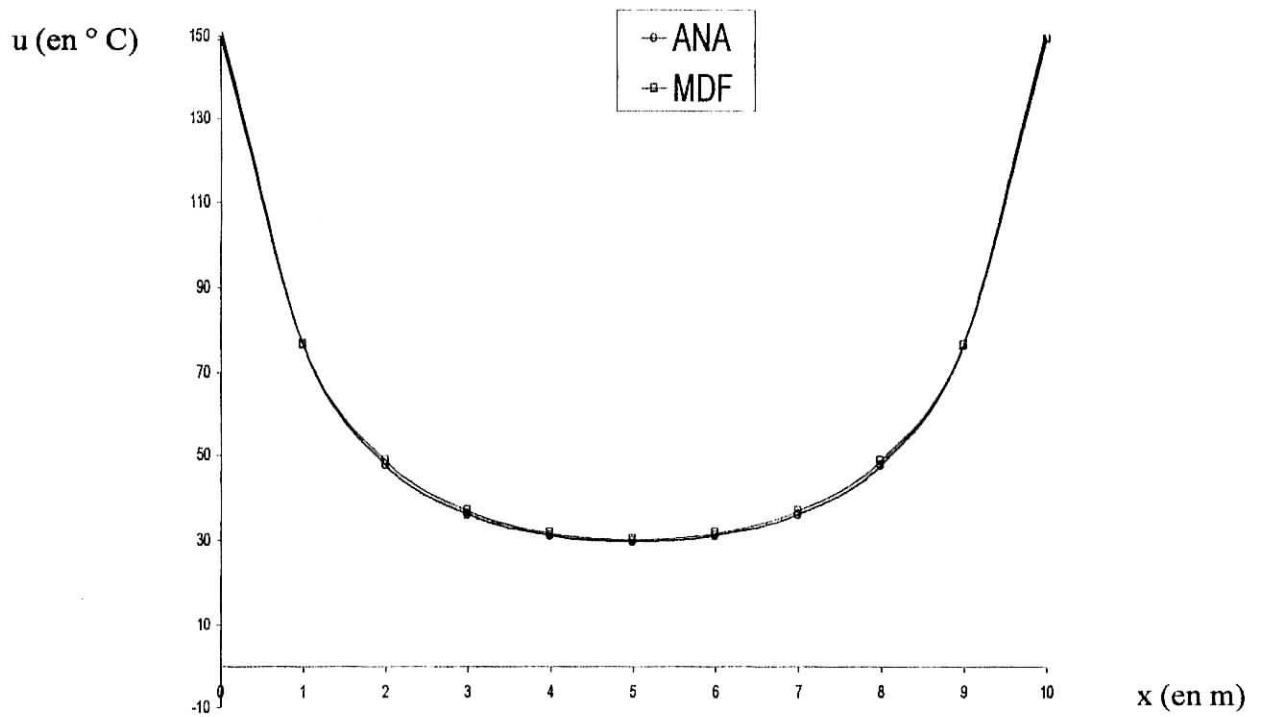


Fig.V-26 Variation de la température en fonction de la hauteur H.

V. 3.3) COMPARAISON MEF-MDF:

➤ Cas de la plaque rectangulaire:

❖ Maillage régulier:

a) Cas de chargement A 100:  $y=1,3m$  :  $E_{max}=17\%$

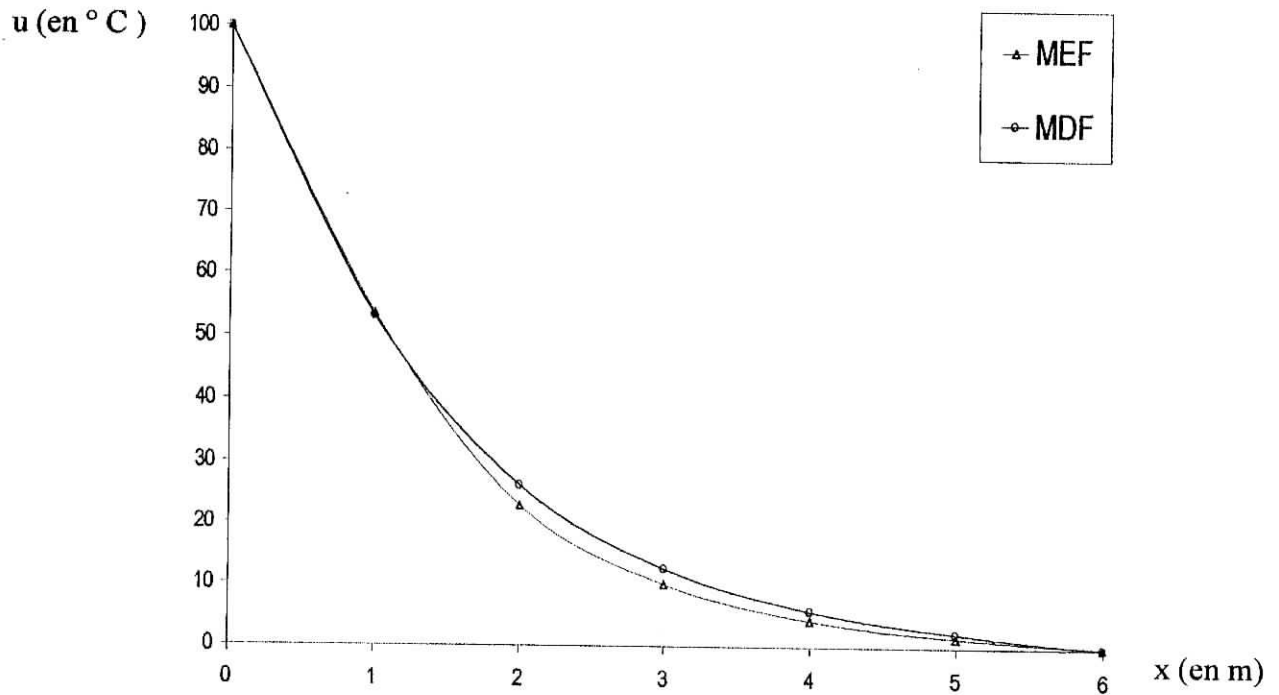


Fig.V-30: Variation de la température en fonction de la hauteur H

b) Cas de chargement B100 :  $y=1m$  :  $E_{max}=15\%$

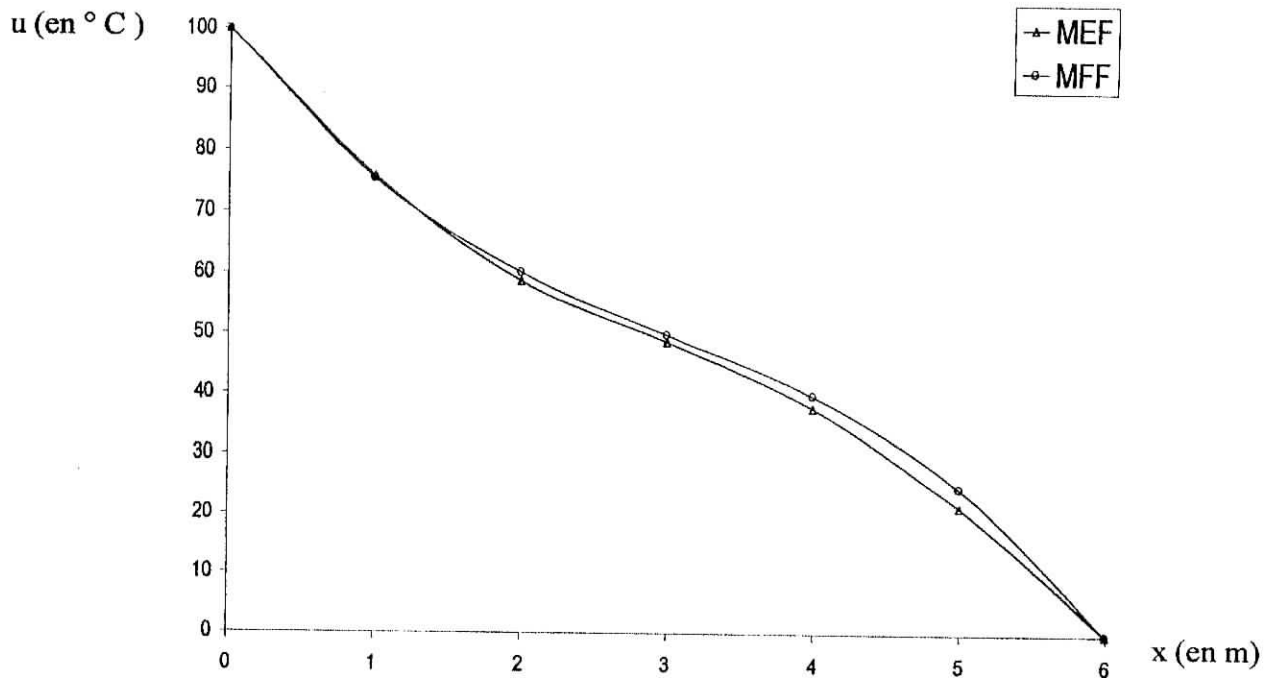


Fig.V-31: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

a) Cas de chargement A 150:  $y=1,3m$  :  $E_{max}=17\%$

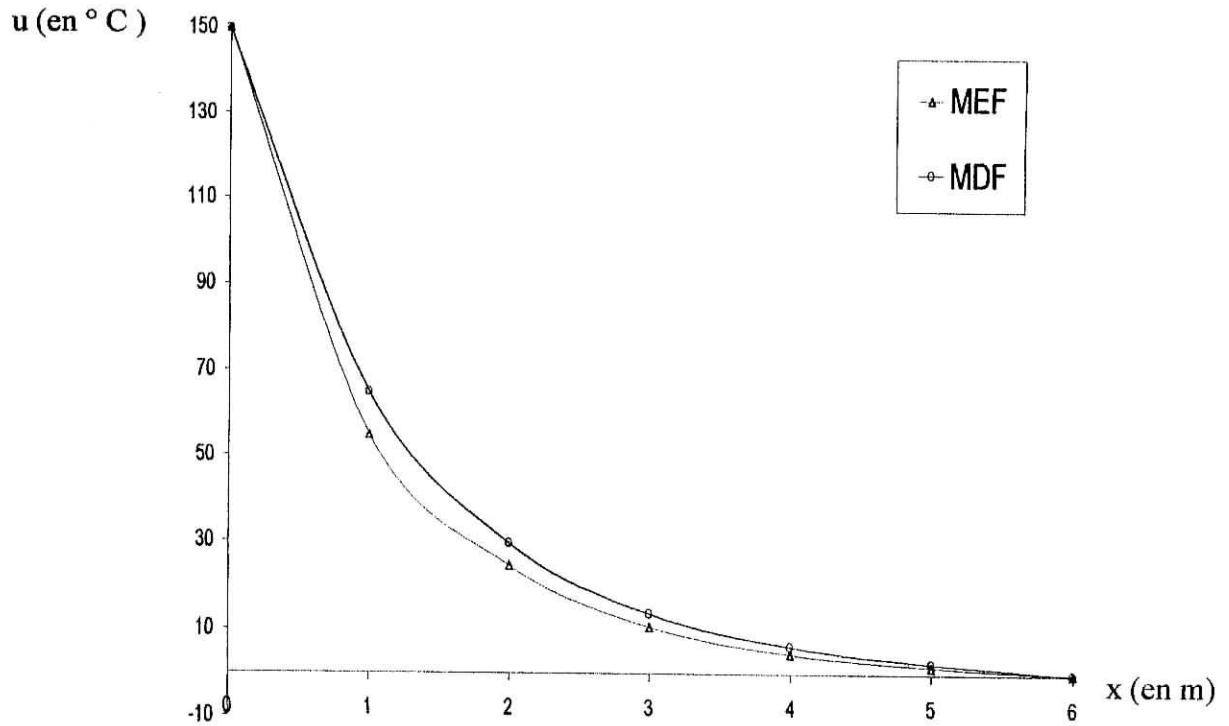


Fig.V-32: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

b) Cas de chargement B150 :  $y=3m$  :  $E_{max}=15\%$

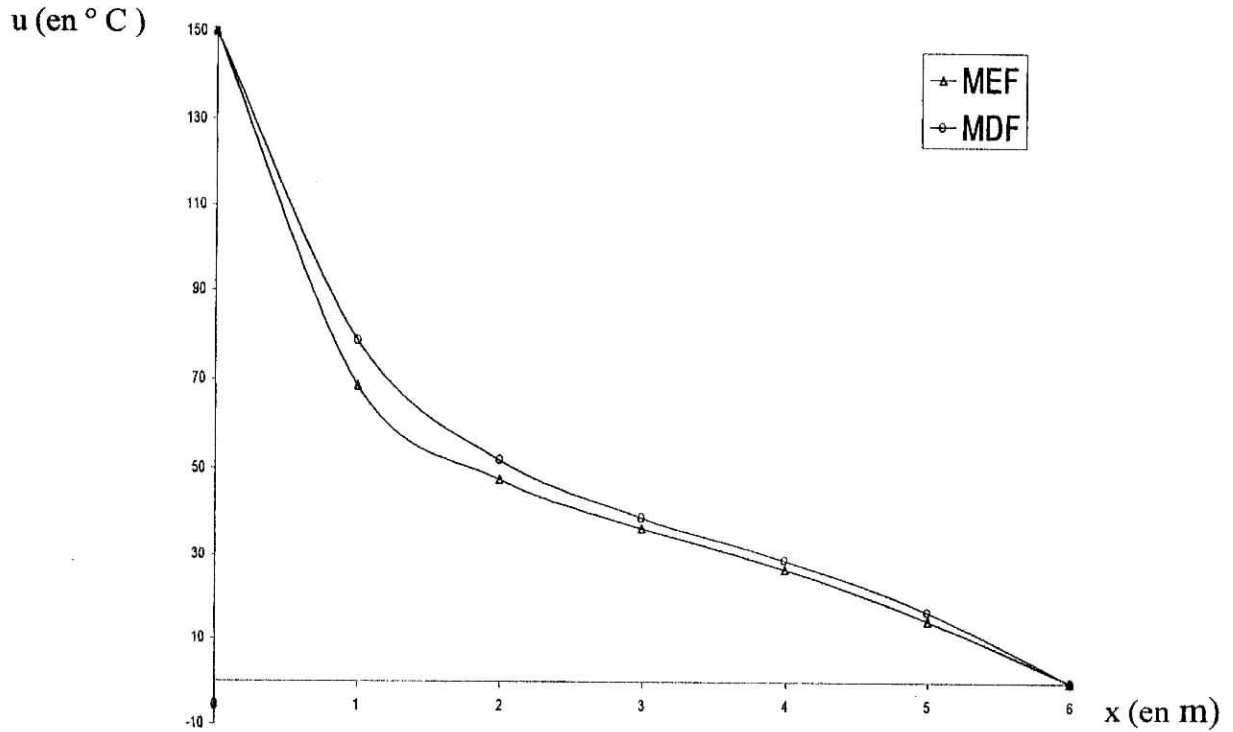


Fig.V-33: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

## ❖ Maillage régulier (tableau):

a) Cas de chargement A100 :  $y=1,3m$  :  $E_{max}=17\%$ 

|     |   | y \ x | 0       | 1      | 2      | 3     | 4     | 5     | 6     |
|-----|---|-------|---------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| MEF | 1 |       | 100,000 | 36,590 | 16,260 | 7,043 | 2,983 | 1,094 | 0,000 |
| MDF | 1 |       | 100     | 43,193 | 19,62  | 9,057 | 4,092 | 1,578 | 0     |
| E   | % |       | 0       | 15     | 17     | 22    | 27    | 31    | 0     |

|        |   |  |         |        |        |        |       |       |       |
|--------|---|--|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| MEF    | 2 |  | 100,000 | 53,580 | 22,920 | 9,965  | 4,219 | 1,547 | 0,000 |
| MDF    | 2 |  | 100     | 53,154 | 26,228 | 12,518 | 5,731 | 2,222 | 0     |
| Erreur | % |  | 0       | 1      | 13     | 20     | 26    | 30    | 0     |

Tab.V-1

b) Cas de chargement A150 :  $y=1,3m$  :  $E_{max}=17\%$ 

|     |   | y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|-----|---|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| MEF | 1 |       | 150,000 | 54,890 | 24,390 | 10,570 | 4,475 | 1,640 | 0,000 |
| MDF | 1 |       | 150     | 64,79  | 29,429 | 13,586 | 6,138 | 2,368 | 0     |
| E   | % |       | 0       | 15     | 17     | 22     | 27    | 31    | 0     |

|        |   |  |         |        |        |        |       |       |       |
|--------|---|--|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| MEF    | 2 |  | 150,000 | 80,370 | 34,380 | 14,950 | 6,329 | 2,320 | 0,000 |
| MDF    | 2 |  | 150     | 79,73  | 39,342 | 18,778 | 8,596 | 3,333 | 0     |
| Erreur | % |  | 0       | 1      | 13     | 20     | 26    | 30    | 0     |

Tab.V-2

## ❖ Maillage régulier raffiné:

b) Cas de chargement A150 :  $y=1,3m$  :  $E_{max}=7\%$ 

|     |   | y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|-----|---|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| MEF | 1 |       | 150,000 | 62,780 | 27,290 | 12,160 | 5,300 | 1,987 | 0,000 |
| MDF | 1 |       | 150     | 64,79  | 29,429 | 13,586 | 6,138 | 2,368 | 0     |
| E   | % |       | 0       | 3      | 7      | 10     | 14    | 16    | 0     |

|        |   |  |         |        |        |        |       |       |       |
|--------|---|--|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| MEF    | 2 |  | 150,000 | 81,200 | 38,070 | 17,160 | 7,493 | 2,810 | 0,000 |
| MDF    | 2 |  | 150     | 79,73  | 39,342 | 18,778 | 8,596 | 3,333 | 0     |
| Erreur | % |  | 0       | 2      | 3      | 9      | 13    | 16    | 0     |

Tab.V-3

## ❖ Maillage raffiné non régulier:

a) Cas de chargement A100 :  $y=1,3m$  :  $E_{max}=9\%$ 

|        | y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|--------|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| MEF    | 1     | 100,000 | 42,120 | 17,800 | 7,751  | 3,291 | 1,212 | 0,000 |
| MDF    | 1     | 100     | 43,193 | 19,62  | 9,057  | 4,092 | 1,578 | 0     |
| E      | %     | 0       | 2      | 9      | 14     | 20    | 23    | 0     |
| MEF    | 2     | 100,000 | 55,070 | 25,170 | 10,940 | 4,644 | 1,710 | 0,000 |
| MDF    | 2     | 100     | 53,154 | 26,228 | 12,518 | 5,731 | 2,222 | 0     |
| Erreur | %     | 0       | 4      | 4      | 13     | 19    | 23    | 0     |

Tab.V-4

b) Cas de chargement A150 :  $y=1,3m$  :  $E_{max}=9\%$ 

|        | y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|--------|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| MEF    | 1     | 150,000 | 63,180 | 26,700 | 11,630 | 4,937 | 1,817 | 0,000 |
| MDF    | 1     | 150     | 64,79  | 29,429 | 13,586 | 6,138 | 2,368 | 0     |
| E      | %     | 0       | 2      | 9      | 14     | 20    | 23    | 0     |
| MEF    | 2     | 150,000 | 82,610 | 37,750 | 16,400 | 6,966 | 2,565 | 0,000 |
| MDF    | 2     | 150     | 79,73  | 39,342 | 18,778 | 8,596 | 3,333 | 0     |
| Erreur | %     | 0       | 4      | 4      | 13     | 19    | 23    | 0     |

Tab.V-5

➤ Cas de la plaque carré:

❖ Maillage régulier:

a) Cas de chargement A 100:  $y=1,9m$  :  $E_{max}=14\%$

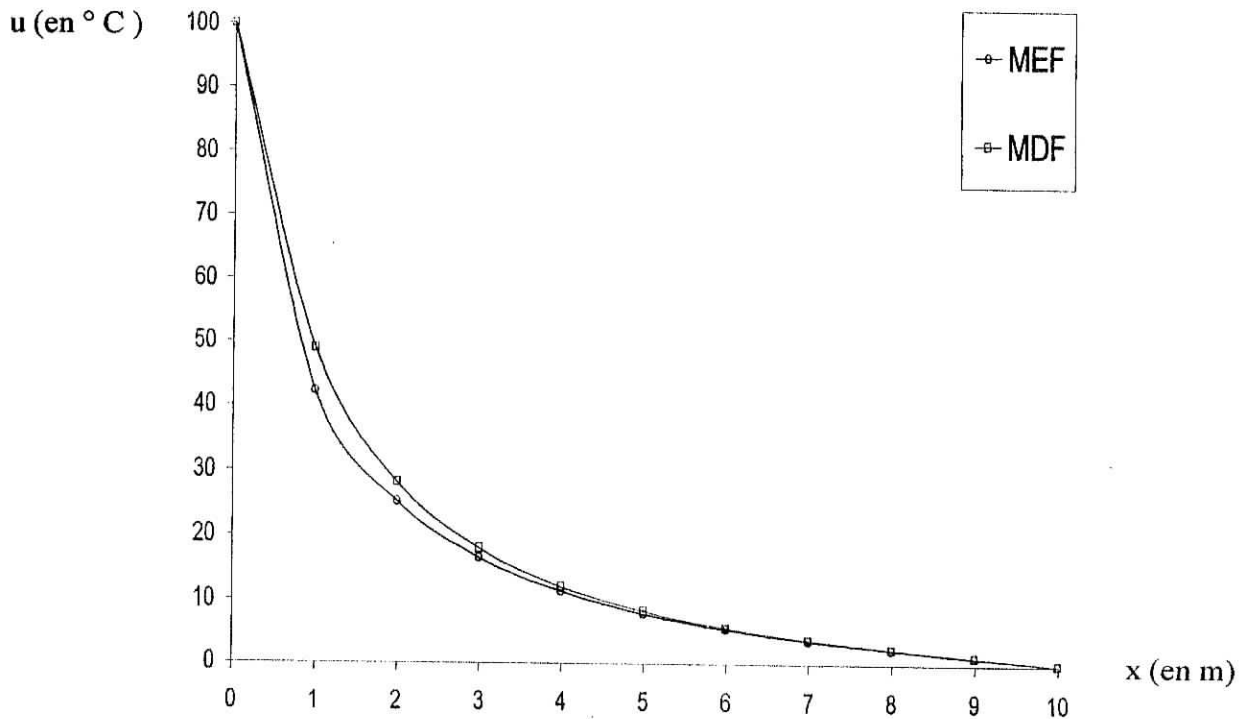


Fig.V-34: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

b) Cas de chargement B100 :  $y=1,9m$  :  $E_{max}=14\%$

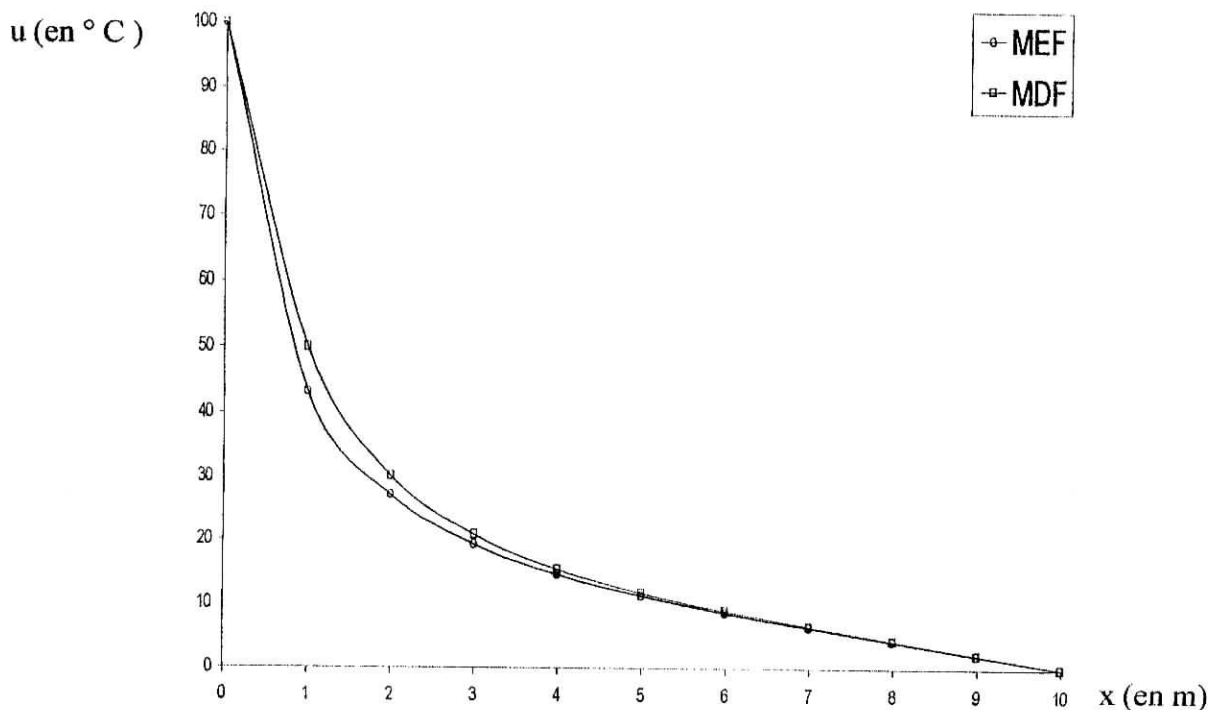


Fig.V-35: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

a) Cas de chargement A 150:  $y=1,9\text{m}$  :  $E_{\text{max}}=14\%$

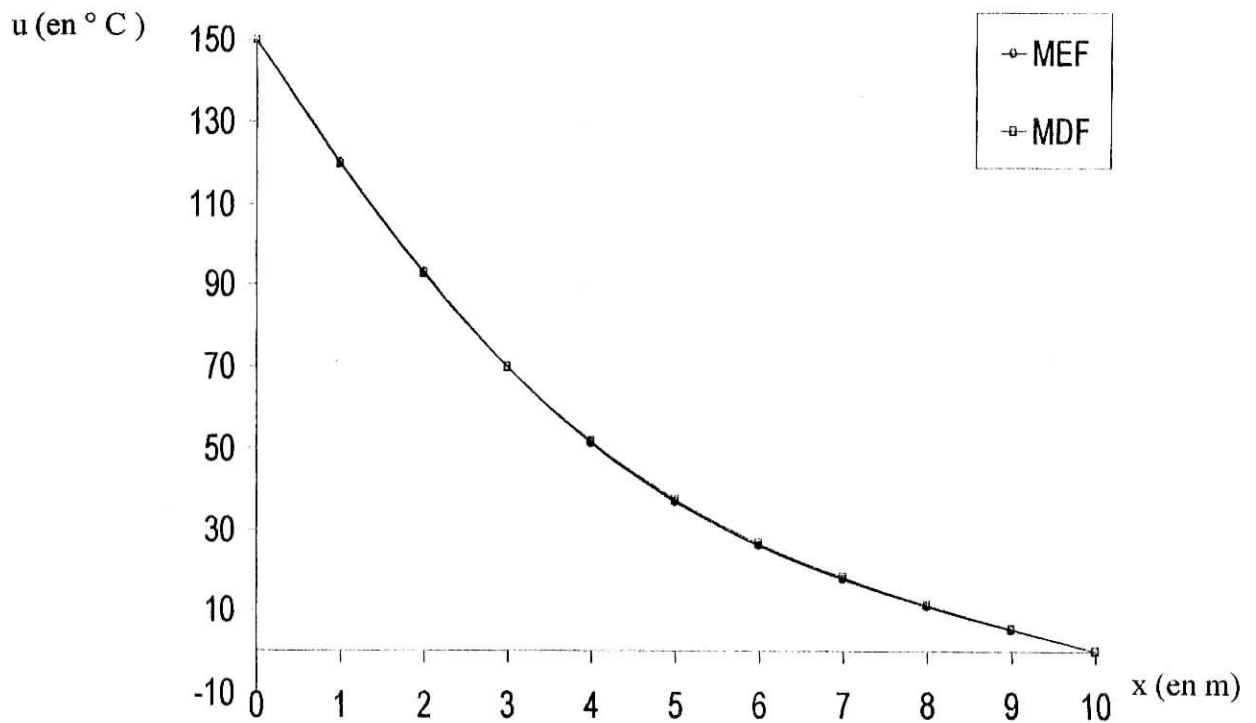


Fig.V-36: Variation de la température en fonction de la hauteur H.

b) Cas de chargement B150 :  $y=1,9\text{m}$  :  $E_{\text{max}}=14\%$

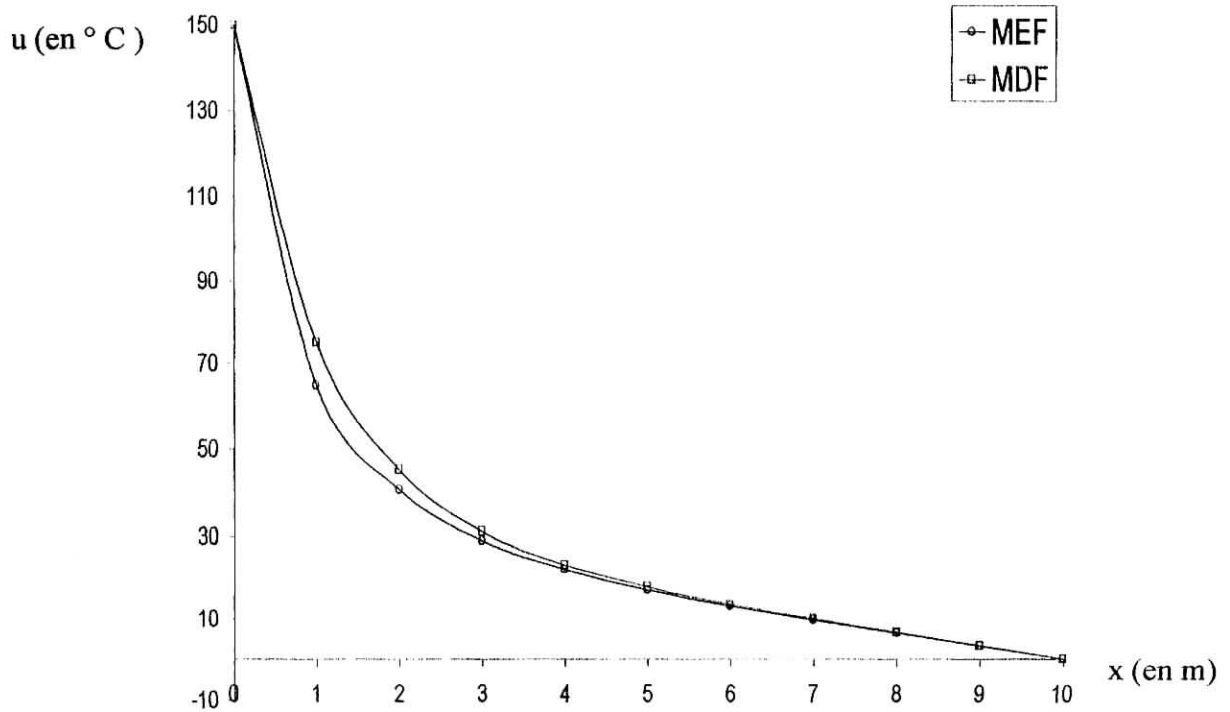


Fig.V-37: Variation de la température en fonction de la hauteur H.



## ❖ Maillage régulier (tableau) :

a) Cas de chargement B100 :  $y=1m$  :  $E_{max}=14\%$ 

| $y \backslash x$ |   | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10 |
|------------------|---|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|
| MEF              | 1 | 100 | 43.200 | 27.130 | 19.290 | 14.620 | 11.360 | 7.589  | 6.460  | 4.282  | 2.139  | 0  |
| MDF              | 1 | 100 | 50     | 30.190 | 20.761 | 15.406 | 11.829 | 9.701  | 6.680  | 4.43   | 2.215  | 0  |
| Erreur           | % | 0   | 14     | 10     | 7      | 5      | 4      | 3      | 3      | 3      | 3      | 0  |
| MEF              | 2 | 100 | 88.310 | 77.260 | 67.230 | 58.150 | 49.630 | 41.110 | 32.060 | 22.160 | 11.360 | 0  |
| MDF              | 2 | 100 | 88.171 | 77.160 | 67.279 | 58.369 | 50     | 41.631 | 32.721 | 22.840 | 11.829 | 0  |
| Erreur           | % | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 1      | 1      | 2      | 3      | 4      | 0  |

Tab.V-6

b) Cas de chargement B150 :  $y=1m$  :  $E_{max}=14\%$ 

| $y \backslash x$ |   | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8     | 9     | 10 |
|------------------|---|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|----|
| MEF              | 1 | 150 | 64.800 | 40.700 | 28.930 | 21.940 | 17.040 | 13.140 | 9.690  | 6.423 | 3.208 | 0  |
| MDF              | 1 | 150 | 57.000 | 45.285 | 31.142 | 23.109 | 17.744 | 13.607 | 10.020 | 6.645 | 3.222 | 0  |
| Erreur           | % | 0   | 14     | 10     | 7      | 5      | 4      | 3      | 3      | 3     | 3     | 0  |

Tab.V-7

## ❖ Maillage raffiné non régulier:

a) Cas de chargement B100 :  $y=1m$  :  $E_{max}=6\%$ 

| $y \backslash x$ |   | 0       | 1      | 2      | 5      | 8      | 9      | 10    |
|------------------|---|---------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| MEF              | 1 | 100,000 | 48,500 | 28,260 | 11,390 | 4,280  | 2,138  | 0,000 |
| MDF              | 1 | 100     | 50     | 30,19  | 11,829 | 4,43   | 2,215  | 0     |
| Erreur           | % | 0       | 3      | 6      | 4      | 3      | 3      | 0     |
| MEF              | 5 | 100,000 | 88,530 | 77,640 | 49,900 | 22,220 | 11,390 | 0,000 |
| MDF              | 5 | 100     | 88,171 | 77,16  | 50     | 22,84  | 11,829 | 0     |
| Erreur           | % | 0       | 0      | 1      | 0      | 3      | 4      | 0     |

Tab.V-8

b) Cas de chargement B150 :  $y=1m$  :  $E_{max}=6\%$ 

| $y \backslash x$ |   | 0       | 1       | 2       | 5      | 8      | 9      | 10    |
|------------------|---|---------|---------|---------|--------|--------|--------|-------|
| MEF              | 1 | 150.000 | 72.750  | 42.400  | 17.090 | 6.420  | 3.210  | 0.000 |
| MDF              | 1 | 150     | 75      | 45.285  | 17.744 | 6.645  | 3.322  | 0     |
| Erreur           | % | 0       | 3       | 6       | 4      | 3      | 3      | 0     |
| MEF              | 5 | 150.000 | 132.800 | 116.500 | 74.850 | 33.330 | 17.090 | 0.000 |
| MDF              | 5 | 150     | 132.256 | 115.74  | 75     | 34.26  | 17.744 | 0     |
| Erreur           | % | 0       | 0       | 1       | 0      | 3      | 4      | 0     |

Tab.V-9

## V. 3.4) COMPARAISON GENERALE MEF-MDF:

| MDF   | MEF  |
|---|--|
| <p><b>Maillage du domaine:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Simple dans le cas où la frontière à ses Côtés parallèles aux axes principaux.</li> <li>• Délicat dans le cas d'une frontière curviligne car il faut déterminer les points d'intersection du maillage avec la frontière. Un algorithme général est difficile à écrire.</li> <li>• les maillages réguliers sont fortement conseillés.</li> </ul> <p><b>définition des schémas aux différences:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Simple pour la partie régulière du maillage, intérieure au domaine, et ceci quel que soit l'ordre des opérateurs.</li> <li>• délicate au voisinage de frontières quelconques, l'écriture d'un algorithme général est difficile.</li> <li>• Plus délicate pour les schémas relatifs à des problèmes d'ordre élevé.</li> </ul> <p><b>Prise en compte des conditions aux limites:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En général, assez délicate.</li> </ul> <p><b>Formulation de la matrice du système:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• simple</li> <li>• la matrice du système est creuse.</li> </ul> | <p><b>Maillage du domaine:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Particulièrement simple dans le cas des domaines réguliers.</li> <li>• Dans tous les cas (<math>n = 1, 2, 3</math>) il existe des algorithmes de maillage performants quel que soit le domaine utilisé.</li> <li>• les maillages irréguliers ne posent pas de problème.</li> </ul> <p><b>Définition des éléments finis:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Simple pour les éléments finis de classe <math>\mathcal{P}^0</math> utilisés dans la résolution de problèmes d'ordre 2.</li> <li>• Plus délicate pour les éléments finis de classe <math>\mathcal{P}^m</math> utilisés dans la résolution de problèmes d'ordre <math>2m + 2</math>.</li> <li>• Pour tous les éléments finis, on peut écrire des sous-programmes généraux. Alors leur utilisation est immédiate.</li> </ul> <p><b>Prise en compte des conditions aux limites:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Elles font partie intégrante de la formulation du problème à résoudre.</li> </ul> <p><b>Formation de la matrice de rigidité:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• son calcul comporte deux niveaux : <ul style="list-style-type: none"> <li>i) pour chaque élément fini, on forme la matrice de rigidité élémentaire,</li> <li>ii) la matrice du système est la « somme » des matrices de rigidité élémentaires (assemblage).</li> </ul> </li> <li>• La matrice du système est creuse.</li> </ul> |

|   |  |
|---|--|
| <p><b>Formation du second membre du Système:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Souvent délicate, en particulier si la frontière est curviligne ou si les conditions aux limites sont compliquées.</li></ul> <p><b>Résolution du système:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• On utilise généralement des méthodes itératives, Gauss, etc...</li></ul> <p><b>Étude de la convergence:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Elle est délicate. Il faut établir les propriétés de consistance et de stabilité. Ces études n'ont rien de systématique; elles sont étroitement liées aux données du problème et à la méthode de différences finies choisie.</li></ul> | <p><b>Formation du second membre du système:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Simple et généralement effectuée avec celle de la matrice de rigidité.</li></ul> <p><b>Résolution du système:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• On utilise généralement des méthodes directes qui permettent aujourd'hui de prendre en compte les grands systèmes.</li></ul> <p><b>Étude de la convergence:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Systématique, comportant des étapes indépendantes les unes des autres</li><li>• Les estimations d'erreur dépendent directement des qualités d'approximation de l'espace d'éléments finis utilisé.</li></ul> |
|---|--|

### V. 3.5) INTERPRETATIONS DES RESULTATS:

Les applications traitées dans notre étude nous ont permis de voir le degré de puissance de chacune des méthodes utilisées.

Pour le cas de l'équation de Poisson, on a constaté que la méthode de Galerkin a donné une très bonne approximation de la solution avec un taux d'erreur d'environ 1% d'erreur avec deux paramètres et de 0.06 % avec trois paramètres d'approximation.

Cette méthode offre une très bonne approximation mais son emploi reste limité à des cas relativement simples ou l'on peut introduire les conditions aux limites de façon systématique qui assure une convergence rapide vers la solution du problème.

Quant à la méthode des différences finies, elle représente une bonne approximation (environ 1 % d'erreur pour le cas de la plaque carré pour l'équation de Poisson, et 2 % pour celui de Laplace).

L'emploi de la MDF est conseillé pour les cas où nous sommes ramenés à utiliser des maillages réguliers pour des problèmes qui ne présentent pas de complexité de forme géométrique ou de conditions aux limites.

La souplesse de la méthode des éléments finis nous a permis d'adopter trois types de maillages :

- maillage régulier.
- maillage raffiné régulier.
- maillage raffiné régulier.

L'erreur est réduite au fur et à mesure qu'on adopte le bon choix du maillage ce qui revient à l'expérience de l'ingénieur qui va choisir son modèle selon ses exigences économiques.

## *Conclusion générale*

## **Conclusion**

Notre travail a consisté en l'étude du problème de conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire (ou carré) pour un régime stationnaire, en se limitant au problème de Dirichlet comme type de conditions aux limites (C.A.L ) et en utilisant les méthodes de Galerkin, différences finies et éléments finis.

Pour la solution analytique, on a utiliser la méthode de séparation des variables qui est peut être la plus ancienne méthode systématique de résolution des E.D.P, utilisée par D'Alembert, D.Bernoulli, et Euler environ 1750 l'ors de leur traitements de l'équation des ondes .Elle a été considérablement raffinée et généralisée et elle reste une méthode très importante jusqu'aujourd'hui.

Son emploi reste limité à des cas relativement simples ce qui a mis l'accent sur la puissance des méthodes numériques dans le traitement des problèmes complexes.

La méthode de Galerkin présente une très bonne approximation de la solution de ce problème. C'est une méthode puissante qui converge rapidement avec un bon choix des fonctions.Cependant, son emploi devient difficile dans des cas plus compliqués ce qui nous amène à l'utilisation d'autres méthodes numériques telles que la M.D.F et notamment la M.E.F.

La MEF est relativement récente, et d'abord appliquée à des problèmes d'élasticité et de résistance des matériaux, s'applique aussi aux équations de la conduction, à une ou plusieurs dimensions, en régime stationnaire ou non.

Alors que la MDF remplace l'équation différentielle exacte en jeu par une équation aux différences (essentiellement en remplaçant les dérivées par une approximation algébrique), la MEF remplace la solution exacte par une solution approchée. Cette dernière méthode est essentiellement basée sur le calcul des variations, c'est à dire sur la recherche des extrema d'une fonctionnelle donnée.

La MDF offre une bonne approximation pour des cas simples de C.A.L ou le maillage est régulier et la forme géométrique est simple à manipuler.

La MEF présente une souplesse à adopter n'importe quelle forme géométrique d'élément et une variété de choix pour le type de maillage correspondant.



## **Références bibliographiques**



## BIBLIOGRAPHIE:

- [1] Bardos. C, " Analyse numérique des équations aux dérivées partielles" article. Encyclopédie Universalis, CD ROM. version 6.072.
- [2] BENABDELHAK.N;"Etude statique et dynamique des barrages par la méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontières". Projet de fin d'étude ENP (1994)
- [3] BERRAH.K; "Notes de cours de la méthode des éléments finis".E.N.P.
- [4] Boyce. E. W, Diprima .R. C, "Elementary differential equations and boundary value problems", enseelare Polytechnic Institute, Second Edition, New York.London.Sydney.Toronto.
- [5] Ciarlet. P. G, "Introduction à L'analyse numérique Matricielle et à L'optimisation", 5<sup>ème</sup> tirage, MASSON Paris Milan Barcelone, 1994.
- [6] Comité français de l'isolation, "Guide pratique de l'isolation thermique des bâtiments", Editions Eyrolles.
- [7] Dautry. R, LIONS. J. L, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Volume 4,6., MASSON Paris Milan Barcelone Mexico, 1988.
- [8] .DeVriendt. A. B, "La transmission de la chaleur:la conduction,", Volume 1,Tome 2,2<sup>ème</sup> édition.
- [9] DEMIDEM.M; "Notes de cours de la méthode des éléments finis et de la méthode des différences finies".ENP.
- [10] Dhatt. G, Touzot. G, " Une Présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A, 2<sup>ème</sup> édition, 1984.
- [11] Imbert . J. F., "Analyse des structures par éléments finis", 1979.
- [12] Lefer. B, "Thermique" article. Encyclopédie Universalis,CD ROM. version 6.072.
- [13] Schenck. H. J, "Heat transfer engieering ", Englewood Cliffs, N.J; Prentice-Hall, Inc.1959.
- [14] Ovaert. J. L, "Méthode des éléments finis", article. Encyclopédie Universalis, CD ROM. version 6.072.
- [15] Rao .S. S , "The finite element method in engineering"
- [16] Rougeron. C , "L'isolation acoustque et thermique dans le bâtiment", éditions Eyrolles,Paris 1979.
- [17] Wang. P. C., "calcul des structures par les méthode numériques et matricielles", Dunod PARIS 1969.
- [18] Zerer. M, "Equations aux dérivées partielles: source et application", article. Encyclopédie Universalis, CD ROM. version 6.072.
- [19] Zienkiewics. O. C., Taylor. R. L., "The finite element Method : Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity", volume 2. McGraw-Hill Book Company, 4th edition, 1989.

## *Annexe*

**Tableau représentatif de l'annexe:**

| TABLEAU         |               |  |
|-----------------|---------------|--|
| Tab.A-1         | cas carré     | solution analytique pou l'équation de Poisson  |
| Tab.A-2 à A-9   | //            | solution analytique pou l'équation de Laplace  |
| Tab.A-11 à A-13 | //            | solution Galerkin pour l'équation de Poisson   |
| Tab.A-14 à A-17 | //            | solution MDF pour l'équation de Laplace        |
| Tab.A-18 à A-25 | //            | solution MDF pour l'équation de Laplace        |
| Tab.A-26 à A-29 | Maillage 1    | solution MEF pour l'équation de Laplace        |
| Tab.A-30 à A-31 | Maillage 3    | solution MEF pour l'équation de Laplace        |
| Tab.A-32 à A-39 | cas rectangle | solution Analytique pour l'équation de Laplace |
| Tab.A-40 à A-47 |               | solution MDF pour l'équation de Laplace        |
| Tab.A-48 à A-52 | Maillage 1    | solution MEF pour l'équation de Laplace        |
| Tab.A-53 à A-54 | Maillage 2    | solution MEF pour l'équation de Laplace        |
| Tab.A-55 à A-56 | Maillage 3    | solution MEF pour l'équation de Laplace        |

## Equation de Poisson: Solution analytique.

| y \ x | 0 | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      |
|-------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0     | 0 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 1     | 0 | 1.30711 | 2.08804 | 2.56277 | 2.8217  | 2.90419 | 2.8217  | 2.56277 | 2.08804 | 1.30712 | 0.00001 |
| 2     | 0 | 2.08804 | 3.46469 | 4.33412 | 4.81555 | 4.96981 | 4.81556 | 4.33413 | 3.4647  | 2.08805 | 0.00002 |
| 3     | 0 | 2.56277 | 4.33412 | 5.48411 | 6.12987 | 6.33797 | 6.12987 | 5.48412 | 4.33413 | 2.56279 | 0.00002 |
| 4     | 0 | 2.8217  | 4.81555 | 6.12987 | 6.87446 | 7.11532 | 6.87446 | 6.12988 | 4.81557 | 2.82172 | 0.00003 |
| 5     | 0 | 2.90419 | 4.96981 | 6.33797 | 7.11532 | 7.36714 | 7.11532 | 6.33798 | 4.96983 | 2.90421 | 0.00003 |
| 6     | 0 | 2.8217  | 4.81556 | 6.12987 | 6.87446 | 7.11532 | 6.87446 | 6.12988 | 4.81557 | 2.82172 | 0.00003 |
| 7     | 0 | 2.56277 | 4.33413 | 5.48412 | 6.12988 | 6.33798 | 6.12988 | 5.48412 | 4.33414 | 2.56279 | 0.00002 |
| 8     | 0 | 2.08804 | 3.4647  | 4.33413 | 4.81557 | 4.96983 | 4.81557 | 4.33414 | 3.46471 | 2.08806 | 0.00002 |
| 9     | 0 | 1.30712 | 2.08805 | 2.56279 | 2.82172 | 2.90421 | 2.82172 | 2.56279 | 2.08806 | 1.30713 | 0.00001 |
| 10    | 0 | 0.00001 | 0.00002 | 0.00002 | 0.00003 | 0.00003 | 0.00003 | 0.00002 | 0.00002 | 0.00001 | 0       |

Tab.A-1

Equation de Laplace: Solution analytique. palque carré 10x10 m2.

Cas A-100

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8     | 9     | 10 |
|-------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|----|
| 0     | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0  |
| 1     | 101.514 | 48.906 | 27.395 | 17.452 | 11.802 | 8.159  | 5.623  | 3.755  | 2.302 | 1.094 | 0  |
| 2     | 99.69   | 68.226 | 45.634 | 31.22  | 21.776 | 15.275 | 10.604 | 7.108  | 4.366 | 2.077 | 0  |
| 3     | 99.787  | 75.942 | 55.685 | 40.275 | 28.95  | 20.634 | 14.444 | 9.725  | 5.987 | 2.851 | 0  |
| 4     | 100.482 | 79.231 | 60.603 | 45.228 | 33.159 | 23.906 | 16.841 | 11.378 | 7.017 | 3.344 | 0  |
| 5     | 99.432  | 80.169 | 62.079 | 46.79  | 34.535 | 25     | 17.653 | 11.942 | 7.37  | 3.513 | 0  |
| 6     | 100.482 | 79.231 | 60.603 | 45.228 | 33.159 | 23.906 | 16.841 | 11.378 | 7.017 | 3.344 | 0  |
| 7     | 99.787  | 75.942 | 55.685 | 40.275 | 28.95  | 20.634 | 14.444 | 9.725  | 5.987 | 2.851 | 0  |
| 8     | 99.69   | 68.226 | 45.634 | 31.22  | 21.776 | 15.275 | 10.604 | 7.108  | 4.366 | 2.077 | 0  |
| 9     | 101.514 | 48.906 | 27.395 | 17.452 | 11.802 | 8.159  | 5.623  | 3.755  | 2.302 | 1.094 | 0  |
| 10    | 0.018   | 0.001  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0  |

Tab.A-2

## Cas B-100

| y \ x | 0       | 1       | 2      | 3      | 4       | 5      | 6       | 7      | 8      | 9       | 10    |
|-------|---------|---------|--------|--------|---------|--------|---------|--------|--------|---------|-------|
| 0     | 0       | 0       | 0      | 0      | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0       | 0     |
| 1     | 101.514 | 50      | 29.471 | 20.303 | 15.146  | 11.672 | 8.967   | 6.606  | 4.379  | 2.188   | 0     |
| 2     | 99.69   | 70.528  | 50     | 37.207 | 28.793  | 22.645 | 17.621  | 13.095 | 8.732  | 4.379   | 0     |
| 3     | 99.787  | 79.697  | 62.793 | 50     | 40.328  | 32.576 | 25.822  | 19.449 | 13.095 | 6.606   | 0     |
| 4     | 100.482 | 84.854  | 71.207 | 59.672 | 50      | 41.559 | 33.682  | 25.822 | 17.621 | 8.967   | 0     |
| 5     | 99.432  | 88.328  | 77.354 | 67.424 | 58.441  | 50     | 41.559  | 32.576 | 22.645 | 11.672  | 0     |
| 6     | 100.482 | 91.033  | 82.379 | 74.178 | 66.318  | 58.441 | 50      | 40.328 | 28.793 | 15.146  | 0     |
| 7     | 99.787  | 93.394  | 86.905 | 80.551 | 74.178  | 67.424 | 59.672  | 50     | 37.207 | 20.303  | 0     |
| 8     | 99.69   | 95.621  | 91.268 | 86.905 | 82.379  | 77.354 | 71.207  | 62.793 | 50     | 29.472  | 0     |
| 9     | 101.514 | 97.812  | 95.621 | 93.394 | 91.033  | 88.328 | 84.854  | 79.697 | 70.528 | 50      | 0.001 |
| 10    | 100     | 101.515 | 99.69  | 99.787 | 100.482 | 99.432 | 100.482 | 99.787 | 99.69  | 101.514 | 100   |

Tab.A-3

## Cas C-100

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10      |
|-------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 0     | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       |
| 1     | 101.514 | 50     | 29.697 | 21.207 | 17.424 | 16.318 | 17.424 | 21.207 | 29.697 | 50     | 101.514 |
| 2     | 99.69   | 70.303 | 50     | 38.328 | 32.379 | 30.551 | 32.379 | 38.328 | 50     | 70.303 | 99.69   |
| 3     | 99.787  | 78.793 | 61.672 | 50     | 43.394 | 41.268 | 43.394 | 50     | 61.672 | 78.793 | 99.787  |
| 4     | 100.482 | 82.576 | 67.621 | 56.606 | 50     | 47.812 | 50     | 56.606 | 67.621 | 82.576 | 100.482 |
| 5     | 99.432  | 83.682 | 69.449 | 58.732 | 52.188 | 50     | 52.188 | 58.732 | 69.449 | 83.682 | 99.432  |
| 6     | 100.482 | 82.576 | 67.621 | 56.606 | 50     | 47.812 | 50     | 56.606 | 67.621 | 82.576 | 100.482 |
| 7     | 99.787  | 78.793 | 61.672 | 50     | 43.394 | 41.268 | 43.394 | 50     | 61.672 | 78.793 | 99.787  |
| 8     | 99.69   | 70.303 | 50     | 38.328 | 32.379 | 30.551 | 32.379 | 38.328 | 50     | 70.303 | 99.69   |
| 9     | 101.514 | 50     | 29.697 | 21.207 | 17.424 | 16.318 | 17.424 | 21.207 | 29.697 | 50     | 101.514 |
| 10    | 0.018   | 0.001  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0.001  | 0.018   |

Tab.A-4

## Cas D-100

| y \ x | 0       | 1       | 2      | 3      | 4       | 5      | 6       | 7      | 8      | 9       | 10      |
|-------|---------|---------|--------|--------|---------|--------|---------|--------|--------|---------|---------|
| 0     | 0       | 0       | 0      | 0      | 0       | 0      | 0       | 0      | 0      | 0       | 0       |
| 1     | 101.514 | 51.094  | 31.774 | 24.058 | 20.768  | 19.831 | 20.768  | 24.058 | 31.774 | 51.094  | 101.514 |
| 2     | 99.69   | 72.605  | 54.366 | 44.315 | 39.396  | 37.921 | 39.396  | 44.315 | 54.366 | 72.605  | 99.69   |
| 3     | 99.787  | 82.548  | 68.78  | 59.725 | 54.772  | 53.21  | 54.772  | 59.725 | 68.78  | 82.548  | 99.787  |
| 4     | 100.482 | 88.198  | 78.224 | 71.05  | 66.841  | 65.465 | 66.841  | 71.05  | 78.224 | 88.198  | 100.482 |
| 5     | 99.432  | 91.841  | 84.724 | 79.366 | 76.094  | 75     | 76.094  | 79.366 | 84.725 | 91.841  | 99.432  |
| 6     | 100.482 | 94.377  | 89.396 | 85.556 | 83.159  | 82.347 | 83.159  | 85.556 | 89.396 | 94.377  | 100.482 |
| 7     | 99.787  | 96.245  | 92.892 | 90.275 | 88.622  | 88.058 | 88.622  | 90.275 | 92.892 | 96.245  | 99.787  |
| 8     | 99.69   | 97.698  | 95.634 | 94.013 | 92.983  | 92.63  | 92.983  | 94.013 | 95.634 | 97.698  | 99.69   |
| 9     | 101.514 | 98.906  | 97.923 | 97.149 | 96.656  | 96.487 | 96.656  | 97.149 | 97.923 | 98.906  | 101.515 |
| 10    | 100     | 101.515 | 99.69  | 99.787 | 100.482 | 99.432 | 100.482 | 99.787 | 99.69  | 101.515 | 100     |

Tab.A-5



## Cas A-150

| y \ x | 0       | 1       | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9     | 10 |
|-------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|----|
| 0     | 0       | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | .000   | 000   | 0  |
| 1     | 152.272 | 73.359  | 41.092 | 26.178 | 17.703 | 12.238 | 8.434  | 5.632  | 3.453  | 1.641 | 0  |
| 2     | 149.535 | 102.339 | 68.451 | 46.83  | 32.663 | 22.913 | 15.905 | 10.661 | 6.549  | 3.115 | 0  |
| 3     | 149.681 | 113.913 | 83.528 | 60.413 | 43.425 | 30.951 | 21.666 | 14.587 | 8.98   | 4.276 | 0  |
| 4     | 150.723 | 118.847 | 90.905 | 67.842 | 49.738 | 35.859 | 25.262 | 17.066 | 10.526 | 5.016 | 0  |
| 5     | 149.147 | 120.253 | 93.119 | 70.185 | 51.802 | 37.5   | 26.48  | 17.912 | 11.055 | 5.27  | 0  |
| 6     | 150.723 | 118.847 | 90.905 | 67.842 | 49.738 | 35.859 | 25.262 | 17.066 | 10.526 | 5.016 | 0  |
| 7     | 149.68  | 113.913 | 83.528 | 60.413 | 43.425 | 30.951 | 21.666 | 14.587 | 8.981  | 4.276 | 0  |
| 8     | 149.535 | 102.339 | 68.451 | 46.83  | 32.663 | 22.913 | 15.905 | 10.661 | 6.549  | 3.115 | 0  |
| 9     | 152.271 | 73.359  | 41.093 | 26.178 | 17.703 | 12.238 | 8.434  | 5.632  | 3.453  | 1.641 | 0  |
| 10    | 0.027   | 0.001   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0  |

Tab.A-6

## Cas B-150

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10    |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0     |
| 1     | 152.272 | 75      | 44.207  | 30.454  | 22.719  | 17.508  | 13.45   | 9.908   | 6.568   | 3.282   | 0     |
| 2     | 149.535 | 105.792 | 75      | 55.811  | 43.189  | 33.968  | 26.431  | 19.642  | 13.098  | 6.568   | 0     |
| 3     | 149.681 | 119.545 | 94.189  | 75      | 60.492  | 48.863  | 38.732  | 29.174  | 19.642  | 9.908   | 0     |
| 4     | 150.723 | 127.281 | 106.81  | 89.508  | 75      | 62.339  | 50.523  | 38.732  | 26.431  | 13.45   | 0     |
| 5     | 149.147 | 132.491 | 116.032 | 101.136 | 87.661  | 75      | 62.339  | 48.863  | 33.968  | 17.508  | 0     |
| 6     | 150.723 | 136.55  | 123.569 | 111.267 | 99.476  | 87.661  | 75      | 60.492  | 43.189  | 22.719  | 0     |
| 7     | 149.68  | 140.091 | 130.358 | 120.826 | 111.267 | 101.136 | 89.508  | 75      | 55.811  | 30.454  | 0     |
| 8     | 149.535 | 143.431 | 136.902 | 130.358 | 123.569 | 116.032 | 106.81  | 94.189  | 75      | 44.207  | 0     |
| 9     | 152.271 | 146.717 | 143.432 | 140.091 | 136.55  | 132.492 | 127.281 | 119.546 | 105.792 | 75      | 0.001 |
| 10    | 150     | 152.272 | 149.535 | 149.681 | 150.723 | 149.148 | 150.723 | 149.681 | 149.535 | 152.271 | 150   |

Tab.A-7

## Cas C-150

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8       | 9       | 10      |
|-------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | 0       | 0       |
| 1     | 152.272 | 75      | 44.546  | 31.81  | 26.136 | 24.476 | 26.136 | 31.81  | 44.546  | 75      | 152.272 |
| 2     | 149.535 | 105.454 | 75      | 57.492 | 48.569 | 45.826 | 48.569 | 57.492 | 75      | 105.454 | 149.535 |
| 3     | 149.681 | 118.189 | 92.508  | 75     | 65.091 | 61.902 | 65.091 | 75     | 92.508  | 118.189 | 149.681 |
| 4     | 150.723 | 123.863 | 101.431 | 84.908 | 75     | 71.718 | 75     | 84.908 | 101.431 | 123.863 | 150.723 |
| 5     | 149.147 | 125.523 | 104.174 | 88.098 | 78.282 | 75     | 78.282 | 88.098 | 104.174 | 125.523 | 149.147 |
| 6     | 150.723 | 123.863 | 101.431 | 84.908 | 75     | 71.718 | 75     | 84.908 | 101.431 | 123.863 | 150.723 |
| 7     | 149.68  | 118.189 | 92.508  | 75     | 65.092 | 61.902 | 65.092 | 75     | 92.508  | 118.189 | 149.68  |
| 8     | 149.535 | 105.454 | 75      | 57.492 | 48.569 | 45.826 | 48.569 | 57.492 | 75      | 105.454 | 149.535 |
| 9     | 152.271 | 75      | 44.546  | 31.811 | 26.137 | 24.477 | 26.137 | 31.811 | 44.546  | 75      | 152.271 |
| 10    | 0.027   | 0.001   | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | 0.001   | 0.027   |

Tab. A-8

Cas D-150

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 1     | 152.272 | 76.641  | 47.66   | 36.087  | 31.153  | 29.747  | 31.153  | 36.087  | 47.66   | 76.641  | 152.272 |
| 2     | 149.535 | 108.907 | 81.549  | 66.472  | 59.095  | 56.881  | 59.095  | 66.472  | 81.549  | 108.907 | 149.535 |
| 3     | 149.681 | 123.822 | 103.169 | 89.587  | 82.158  | 79.815  | 82.158  | 89.587  | 103.17  | 123.822 | 149.681 |
| 4     | 150.723 | 132.297 | 117.336 | 106.574 | 100.262 | 98.197  | 100.262 | 106.574 | 117.336 | 132.297 | 150.723 |
| 5     | 149.147 | 137.762 | 127.087 | 119.049 | 114.141 | 112.5   | 114.141 | 119.049 | 127.087 | 137.762 | 149.148 |
| 6     | 150.723 | 141.566 | 134.094 | 128.334 | 124.738 | 123.52  | 124.738 | 128.334 | 134.095 | 141.566 | 150.723 |
| 7     | 149.68  | 144.367 | 139.338 | 135.413 | 132.933 | 132.088 | 132.933 | 135.413 | 139.339 | 144.367 | 149.681 |
| 8     | 149.535 | 146.546 | 143.451 | 141.019 | 139.474 | 138.945 | 139.474 | 141.019 | 143.451 | 146.547 | 149.535 |
| 9     | 152.271 | 148.358 | 146.885 | 145.724 | 144.984 | 144.73  | 144.984 | 145.724 | 146.885 | 148.359 | 152.272 |
| 10    | 150     | 152.272 | 149.535 | 149.681 | 150.723 | 149.148 | 150.724 | 149.681 | 149.535 | 152.272 | 150     |

Tab.A-9

### Equation de Poisson: Solution par la méthode de Galerine:

à 1 paramètre :

| y \ x | 0 | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10 |
|-------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----|
| 0     | 0 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0  |
| 1     | 0 | 1.01250 | 1.80000 | 2.36250 | 2.70000 | 2.81250 | 2.70000 | 2.36250 | 1.80000 | 1.01250 | 0  |
| 2     | 0 | 1.80000 | 3.20000 | 4.20000 | 4.80000 | 5.00000 | 4.80000 | 4.20000 | 3.20000 | 1.80000 | 0  |
| 3     | 0 | 2.36250 | 4.20000 | 5.51250 | 6.30000 | 6.56250 | 6.30000 | 5.51250 | 4.20000 | 2.36250 | 0  |
| 4     | 0 | 2.70000 | 4.80000 | 6.30000 | 7.20000 | 7.50000 | 7.20000 | 6.30000 | 4.80000 | 2.70000 | 0  |
| 5     | 0 | 2.81250 | 5.00000 | 6.56250 | 7.50000 | 7.81250 | 7.50000 | 6.56250 | 5.00000 | 2.81250 | 0  |
| 6     | 0 | 2.70000 | 4.80000 | 6.30000 | 7.20000 | 7.50000 | 7.20000 | 6.30000 | 4.80000 | 2.70000 | 0  |
| 7     | 0 | 2.36250 | 4.20000 | 5.51250 | 6.30000 | 6.56250 | 6.30000 | 5.51250 | 4.20000 | 2.36250 | 0  |
| 8     | 0 | 1.80000 | 3.20000 | 4.20000 | 4.80000 | 5.00000 | 4.80000 | 4.20000 | 3.20000 | 1.80000 | 0  |
| 9     | 0 | 1.01250 | 1.80000 | 2.36250 | 2.70000 | 2.81250 | 2.70000 | 2.36250 | 1.80000 | 1.01250 | 0  |
| 10    | 0 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0  |

Tab.A-11

Galerine 1

à 2 paramètres :

| y \ x | 0 | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10 |
|-------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----|
| 0     | 0 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0  |
| 1     | 0 | 1,19297 | 2,02507 | 2,56813 | 2,87345 | 2,97180 | 2,87345 | 2,56813 | 2,02507 | 1,19297 | 0  |
| 2     | 0 | 2,02507 | 3,42989 | 4,34213 | 4,85299 | 5,01720 | 4,85299 | 4,34213 | 3,42989 | 2,02507 | 0  |
| 3     | 0 | 2,56813 | 4,34213 | 5,48957 | 6,13015 | 6,33570 | 6,13015 | 5,48957 | 4,34213 | 2,56813 | 0  |
| 4     | 0 | 2,87345 | 4,85299 | 6,13015 | 6,84173 | 7,06980 | 6,84173 | 6,13015 | 4,85299 | 2,87345 | 0  |
| 5     | 0 | 2,97180 | 5,01720 | 6,33570 | 7,06980 | 7,30500 | 7,06980 | 6,33570 | 5,01720 | 2,97180 | 0  |
| 6     | 0 | 2,87345 | 4,85299 | 6,13015 | 6,84173 | 7,06980 | 6,84173 | 6,13015 | 4,85299 | 2,87345 | 0  |
| 7     | 0 | 2,56813 | 4,34213 | 5,48957 | 6,13015 | 6,33570 | 6,13015 | 5,48957 | 4,34213 | 2,56813 | 0  |
| 8     | 0 | 2,02507 | 3,42989 | 4,34213 | 4,85299 | 5,01720 | 4,85299 | 4,34213 | 3,42989 | 2,02507 | 0  |
| 9     | 0 | 1,19297 | 2,02507 | 2,56813 | 2,87345 | 2,97180 | 2,87345 | 2,56813 | 2,02507 | 1,19297 | 0  |
| 10    | 0 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0  |

Tab.A-12

Galerkine 2

à 3 paramètres :

| y \ x | 0 | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10 |
|-------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----|
| 0     | 0 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0  |
| 1     | 0 | 1,29252 | 2,10226 | 2,57588 | 2,81815 | 2,89193 | 2,81815 | 2,57588 | 2,10226 | 1,29252 | 0  |
| 2     | 0 | 2,10226 | 3,49005 | 4,34885 | 4,81114 | 4,95640 | 4,81114 | 4,34885 | 3,49005 | 2,10226 | 0  |
| 3     | 0 | 2,57588 | 4,34885 | 5,49177 | 6,12814 | 6,33203 | 6,12814 | 5,49177 | 4,34885 | 2,57588 | 0  |
| 4     | 0 | 2,81815 | 4,81114 | 6,12814 | 6,87571 | 7,11780 | 6,87571 | 6,12814 | 4,81114 | 2,81815 | 0  |
| 5     | 0 | 2,89193 | 4,95640 | 6,33203 | 7,11780 | 7,37313 | 7,11780 | 6,33203 | 4,95640 | 2,89193 | 0  |
| 6     | 0 | 2,81815 | 4,81114 | 6,12814 | 6,87571 | 7,11780 | 6,87571 | 6,12814 | 4,81114 | 2,81815 | 0  |
| 7     | 0 | 2,57588 | 4,34885 | 5,49177 | 6,12814 | 6,33203 | 6,12814 | 5,49177 | 4,34885 | 2,57588 | 0  |
| 8     | 0 | 2,10226 | 3,49005 | 4,34885 | 4,81114 | 4,95640 | 4,81114 | 4,34885 | 3,49005 | 2,10226 | 0  |
| 9     | 0 | 1,29252 | 2,10226 | 2,57588 | 2,81815 | 2,89193 | 2,81815 | 2,57588 | 2,10226 | 1,29252 | 0  |
| 10    | 0 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0  |

Tab.A-13

Galerkine 3

**Equation de Poisson: Solution par la méthode de différences finies:**

| y  | x | 0 | 5    | 10 |
|----|---|---|------|----|
| 0  |   | 0 | 0    | 0  |
| 5  |   | 0 | 6.25 | 0  |
| 10 |   | 0 | 0    | 0  |

**Tab.A-14**

| y   | x | 0     | 2.5   | 5     | 7.5   | 10    |
|-----|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0   |   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 2.5 |   | 0.000 | 4.300 | 5.469 | 4.300 | 0.000 |
| 5   |   | 0.000 | 5.469 | 7.031 | 5.469 | 5.469 |
| 7.5 |   | 0.000 | 4.300 | 5.469 | 4.300 | 4.300 |
| 10  |   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |

**Tab.A-15**



|   |       |       |        |        |        |        |        |    |
|---|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|----|
| y | x     | 0     | 1.669  | 3.338  | 5.007  | 6.676  | 8.345  | 10 |
|   | 0     | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0  |
|   | 1.669 | 1.669 | 3.338  | 5.007  | 6.676  | 3.9    | 2.645  | 0  |
|   | 3.338 | 3.338 | 69.578 | 50     | 38.59  | 32.673 | 30.841 | 0  |
|   | 5.007 | 5.007 | 78.314 | 61.41  | 50     | 43.528 | 41.439 | 0  |
|   | 6.676 | 6.676 | 82.266 | 67.327 | 56.472 | 50     | 47.86  | 0  |
|   | 8.345 | 10    | 83.423 | 69.159 | 58.561 | 52.14  | 50     | 0  |
|   | 10    | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0  |

Tab.A-16

Cas10x10

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10 |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0  |
| 1     | 100 | 50     | 30,19  | 20,761 | 15,406 | 11,829 | 9,071  | 6,68   | 4,43   | 2,215  | 0  |
| 2     | 100 | 69,81  | 50     | 37,449 | 29,033 | 22,84  | 17,776 | 13,22  | 8,825  | 4,43   | 0  |
| 3     | 100 | 79,239 | 62,551 | 50     | 40,439 | 32,721 | 25,974 | 19,597 | 13,22  | 6,68   | 0  |
| 4     | 100 | 84,594 | 70,967 | 59,561 | 50     | 41,631 | 33,802 | 25,974 | 17,776 | 9,071  | 0  |
| 5     | 100 | 88,171 | 77,16  | 67,279 | 58,369 | 50     | 41,631 | 32,721 | 22,84  | 11,829 | 0  |
| 6     | 100 | 90,929 | 82,224 | 74,026 | 66,198 | 58,369 | 50     | 40,439 | 29,033 | 15,406 | 0  |
| 7     | 100 | 93,32  | 86,78  | 80,403 | 74,026 | 67,279 | 59,561 | 50     | 37,449 | 20,761 | 0  |
| 8     | 100 | 95,57  | 91,175 | 86,78  | 82,224 | 77,16  | 70,967 | 62,551 | 50     | 30,19  | 0  |
| 9     | 100 | 97,785 | 95,57  | 93,32  | 90,929 | 88,171 | 84,594 | 79,239 | 69,81  | 50     | 0  |
| 10    | 100 | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 0  |

Tab.A-17

MDF

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5     | 6      | 7      | 8     | 9     | 10 |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|-------|----|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0      | 0      | 0     | 0     | 0  |
| 1     | 100 | 48.893 | 28.091 | 17.884 | 12.034 | 8.289 | 5.7    | 3.803  | 2.331 | 1.107 | 0  |
| 2     | 100 | 67.479 | 45.588 | 31.41  | 21.965 | 15.42 | 10.708 | 7.18   | 4.412 | 2.099 | 0  |
| 3     | 100 | 75.436 | 55.371 | 40.202 | 28.996 | 20.72 | 14.532 | 9.798  | 6.039 | 2.878 | 0  |
| 4     | 100 | 78.894 | 60.259 | 45.03  | 33.099 | 23.93 | 16.901 | 11.442 | 7.068 | 3.372 | 0  |
| 5     | 100 | 79.882 | 61.74  | 46.56  | 34.439 | 25    | 17.701 | 12.001 | 7.42  | 3.541 | 0  |
| 6     | 100 | 78.894 | 60.259 | 45.03  | 33.099 | 23.93 | 16.901 | 11.442 | 7.068 | 3.372 | 0  |
| 7     | 100 | 75.436 | 55.371 | 40.202 | 28.996 | 20.72 | 14.532 | 9.798  | 6.039 | 2.878 | 0  |
| 8     | 100 | 67.479 | 45.588 | 31.41  | 21.965 | 15.42 | 10.708 | 7.18   | 4.412 | 2.099 | 0  |
| 9     | 100 | 48.893 | 28.091 | 17.884 | 12.034 | 8.289 | 5.7    | 3.803  | 2.331 | 1.107 | 0  |
| 10    | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0      | 0      | 0     | 0     | 0  |

Tab.A-18

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10 |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0  |
| 1     | 100 | 50     | 30.19  | 20.761 | 15.406 | 11.829 | 9.071  | 6.68   | 4.43   | 2.215  | 0  |
| 2     | 100 | 69.81  | 50     | 37.449 | 29.033 | 22.84  | 17.776 | 13.22  | 8.825  | 4.43   | 0  |
| 3     | 100 | 79.239 | 62.551 | 50     | 40.439 | 32.721 | 25.974 | 19.597 | 13.22  | 6.68   | 0  |
| 4     | 100 | 84.594 | 70.967 | 59.561 | 50     | 41.631 | 33.802 | 25.974 | 17.776 | 9.071  | 0  |
| 5     | 100 | 88.171 | 77.16  | 67.279 | 58.369 | 50     | 41.631 | 32.721 | 22.84  | 11.829 | 0  |
| 6     | 100 | 90.929 | 82.224 | 74.026 | 66.198 | 58.369 | 50     | 40.439 | 29.033 | 15.406 | 0  |
| 7     | 100 | 93.32  | 86.78  | 80.403 | 74.026 | 67.279 | 59.561 | 50     | 37.449 | 20.761 | 0  |
| 8     | 100 | 95.57  | 91.175 | 86.78  | 82.224 | 77.16  | 70.967 | 62.551 | 50     | 30.19  | 0  |
| 9     | 100 | 97.785 | 95.57  | 93.32  | 90.929 | 88.171 | 84.594 | 79.239 | 69.81  | 50     | 0  |
| 10    | 100 | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 0  |

Tab.A-19

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10  |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0   |
| 1     | 100 | 50     | 30.422 | 21.686 | 17.734 | 16.577 | 17.734 | 21.686 | 30.422 | 50     | 100 |
| 2     | 100 | 69.578 | 50     | 38.59  | 32.673 | 30.841 | 32.673 | 38.59  | 50     | 69.578 | 100 |
| 3     | 100 | 78.314 | 61.41  | 50     | 43.528 | 41.439 | 43.528 | 50     | 61.41  | 78.314 | 100 |
| 4     | 100 | 82.266 | 67.327 | 56.472 | 50     | 47.86  | 50     | 56.472 | 67.327 | 82.266 | 100 |
| 5     | 100 | 83.423 | 69.159 | 58.561 | 52.14  | 50     | 52.14  | 58.561 | 69.159 | 83.423 | 100 |
| 6     | 100 | 82.266 | 67.327 | 56.472 | 50     | 47.86  | 50     | 56.472 | 67.327 | 82.266 | 100 |
| 7     | 100 | 78.314 | 61.41  | 50     | 43.528 | 41.439 | 43.528 | 50     | 61.41  | 78.314 | 100 |
| 8     | 100 | 69.578 | 50     | 38.59  | 32.673 | 30.841 | 32.673 | 38.59  | 50     | 69.578 | 100 |
| 9     | 100 | 50     | 30.422 | 21.686 | 17.734 | 16.577 | 17.734 | 21.686 | 30.422 | 50     | 100 |
| 10    | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0   |

Tab.A-20

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10  |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0   |
| 1     | 100 | 51.107 | 32.521 | 24.564 | 21.106 | 20.118 | 21.106 | 24.564 | 32.521 | 51.107 | 100 |
| 2     | 100 | 71.909 | 54.412 | 44.629 | 39.741 | 38.26  | 39.741 | 44.629 | 54.412 | 71.909 | 100 |
| 3     | 100 | 82.116 | 68.59  | 59.798 | 54.97  | 53.44  | 54.97  | 59.798 | 68.59  | 82.116 | 100 |
| 4     | 100 | 87.966 | 78.035 | 71.004 | 66.901 | 65.561 | 66.901 | 71.004 | 78.035 | 87.966 | 100 |
| 5     | 100 | 91.711 | 84.58  | 79.28  | 76.07  | 75     | 76.07  | 79.28  | 84.58  | 91.711 | 100 |
| 6     | 100 | 94.3   | 89.292 | 85.468 | 83.099 | 82.299 | 83.099 | 85.468 | 89.292 | 94.3   | 100 |
| 7     | 100 | 96.197 | 92.82  | 90.202 | 88.558 | 87.999 | 88.558 | 90.202 | 92.82  | 96.197 | 100 |
| 8     | 100 | 97.669 | 95.588 | 93.961 | 92.932 | 92.58  | 92.932 | 93.961 | 95.588 | 97.669 | 100 |
| 9     | 100 | 98.893 | 97.901 | 97.122 | 96.628 | 96.459 | 96.628 | 97.122 | 97.901 | 98.893 | 100 |
| 10    | 100 | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100 |

Tab.A-21

| y \ x | 0   | 1       | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9     | 10 |
|-------|-----|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|----|
| 0     | 0   | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0  |
| 1     | 150 | 73.339  | 42.136 | 26.826 | 18.052 | 12.433 | 8.55   | 5.704  | 3.496  | 1.661 | 0  |
| 2     | 150 | 101.219 | 68.381 | 47.114 | 32.948 | 23.131 | 16.062 | 10.771 | 6.619  | 3.149 | 0  |
| 3     | 150 | 113.154 | 83.056 | 60.302 | 43.494 | 31.079 | 21.798 | 14.698 | 9.059  | 4.316 | 0  |
| 4     | 150 | 118.341 | 90.388 | 67.544 | 49.648 | 35.895 | 25.352 | 17.163 | 10.602 | 5.057 | 0  |
| 5     | 150 | 119.823 | 92.61  | 69.839 | 51.659 | 37.5   | 26.551 | 18.002 | 11.129 | 5.311 | 0  |
| 6     | 150 | 118.341 | 90.388 | 67.544 | 49.648 | 35.895 | 25.352 | 17.163 | 10.602 | 5.057 | 0  |
| 7     | 150 | 113.154 | 83.056 | 60.302 | 43.494 | 31.079 | 21.798 | 14.698 | 9.059  | 4.316 | 0  |
| 8     | 150 | 101.219 | 68.381 | 47.114 | 32.948 | 23.131 | 16.062 | 10.771 | 6.619  | 3.149 | 0  |
| 9     | 150 | 73.339  | 42.136 | 26.826 | 18.052 | 12.433 | 8.55   | 5.704  | 3.496  | 1.661 | 0  |
| 10    | 0   | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0  |

Tab.A-22

| y \ x | 0   | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9      | 10 |
|-------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|----|
| 0     | 0   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      | 0  |
| 1     | 150 | 75      | 45.285  | 31.142  | 23.109  | 17.744  | 13.607  | 10.02   | 6.645   | 3.322  | 0  |
| 2     | 150 | 104.715 | 75      | 56.173  | 43.55   | 34.26   | 26.664  | 19.829  | 13.237  | 6.645  | 0  |
| 3     | 150 | 118.858 | 93.827  | 75      | 60.658  | 49.081  | 38.961  | 29.395  | 19.829  | 10.02  | 0  |
| 4     | 150 | 126.891 | 106.45  | 89.342  | 75      | 62.446  | 50.704  | 38.961  | 26.664  | 13.607 | 0  |
| 5     | 150 | 132.256 | 115.74  | 100.919 | 87.554  | 75      | 62.446  | 49.081  | 34.26   | 17.744 | 0  |
| 6     | 150 | 136.393 | 123.336 | 111.039 | 99.296  | 87.554  | 75      | 60.658  | 43.55   | 23.109 | 0  |
| 7     | 150 | 139.98  | 130.171 | 120.605 | 111.039 | 100.919 | 89.342  | 75      | 56.173  | 31.142 | 0  |
| 8     | 150 | 143.355 | 136.763 | 130.171 | 123.336 | 115.74  | 106.45  | 93.827  | 75      | 45.285 | 0  |
| 9     | 150 | 146.678 | 143.355 | 139.98  | 136.393 | 132.256 | 126.891 | 118.858 | 104.715 | 75     | 0  |
| 10    | 150 | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150    | 0  |

Tab.A-23



| y \ x | 0   | 1       | 2       | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8       | 9       | 10  |
|-------|-----|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|-----|
| 0     | 0   | 0       | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | 0       | 0   |
| 1     | 150 | 75      | 45.632  | 32.53  | 26.601 | 24.866 | 26.601 | 32.53  | 45.632  | 75      | 150 |
| 2     | 150 | 104.368 | 75      | 57.885 | 49.01  | 46.261 | 49.01  | 57.885 | 75      | 104.368 | 150 |
| 3     | 150 | 117.47  | 92.115  | 75     | 65.292 | 62.159 | 65.292 | 75     | 92.115  | 117.47  | 150 |
| 4     | 150 | 123.399 | 100.99  | 84.708 | 75     | 71.79  | 75     | 84.708 | 100.99  | 123.399 | 150 |
| 5     | 150 | 125.134 | 103.739 | 87.841 | 78.21  | 75     | 78.21  | 87.841 | 103.739 | 125.134 | 150 |
| 6     | 150 | 123.399 | 100.99  | 84.708 | 75     | 71.79  | 75     | 84.708 | 100.99  | 123.399 | 150 |
| 7     | 150 | 117.47  | 92.115  | 75     | 65.292 | 62.159 | 65.292 | 75     | 92.115  | 117.47  | 150 |
| 8     | 150 | 104.368 | 75      | 57.885 | 49.01  | 46.261 | 49.01  | 57.885 | 75      | 104.368 | 150 |
| 9     | 150 | 75      | 45.632  | 32.53  | 26.601 | 24.866 | 26.601 | 32.53  | 45.632  | 75      | 150 |
| 10    | 0   | 0       | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | 0       | 0   |

Tab.A-24

| y \ x | 0   | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10  |
|-------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----|
| 0     | 0   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0   |
| 1     | 150 | 76.661  | 48.781  | 36.846  | 31.659  | 30.177  | 31.659  | 36.846  | 48.781  | 76.661  | 150 |
| 2     | 150 | 107.864 | 81.619  | 66.944  | 59.612  | 57.39   | 59.612  | 66.944  | 81.619  | 107.864 | 150 |
| 3     | 150 | 123.174 | 102.886 | 89.698  | 82.456  | 80.161  | 82.456  | 89.698  | 102.886 | 123.174 | 150 |
| 4     | 150 | 131.948 | 117.052 | 106.506 | 100.352 | 98.341  | 100.352 | 106.506 | 117.052 | 131.948 | 150 |
| 5     | 150 | 137.567 | 126.869 | 118.921 | 114.105 | 112.5   | 114.105 | 118.921 | 126.869 | 137.567 | 150 |
| 6     | 150 | 141.45  | 133.938 | 128.202 | 124.648 | 123.449 | 124.648 | 128.202 | 133.938 | 141.45  | 150 |
| 7     | 150 | 144.296 | 139.229 | 135.302 | 132.837 | 131.998 | 132.837 | 135.302 | 139.229 | 144.296 | 150 |
| 8     | 150 | 146.504 | 143.381 | 140.941 | 139.398 | 138.871 | 139.398 | 140.941 | 143.381 | 146.504 | 150 |
| 9     | 150 | 148.339 | 146.851 | 145.684 | 144.943 | 144.689 | 144.943 | 145.684 | 146.851 | 148.339 | 150 |
| 10    | 150 | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150 |

Tab.A-25

MEF:(maillage normal).

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8     | 9     | 10 |
|-------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|----|
| 0     | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0  |
| 1     | 100.000 | 42.110 | 25.070 | 16.460 | 11.300 | 7.876  | 5.449  | 3.645  | 2.236 | 1.063 | 0  |
| 2     | 100.000 | 67.790 | 44.030 | 30.150 | 21.100 | 14.840 | 10.310 | 6.915  | 4.247 | 2.020 | 0  |
| 3     | 100.000 | 75.840 | 55.240 | 39.620 | 28.380 | 20.190 | 14.110 | 9.488  | 5.835 | 2.776 | 0  |
| 4     | 100.000 | 79.200 | 60.430 | 44.890 | 32.740 | 23.510 | 16.510 | 11.120 | 6.849 | 3.261 | 0  |
| 5     | 100.000 | 80.150 | 61.970 | 46.530 | 34.180 | 24.630 | 17.320 | 11.680 | 7.197 | 3.427 | 0  |
| 6     | 100.000 | 79.200 | 60.430 | 44.890 | 32.740 | 23.510 | 16.510 | 11.120 | 6.849 | 3.261 | 0  |
| 7     | 100.000 | 75.840 | 55.240 | 39.620 | 28.380 | 20.190 | 14.110 | 9.488  | 5.835 | 2.776 | 0  |
| 8     | 100.000 | 67.790 | 44.030 | 30.150 | 21.100 | 14.840 | 10.310 | 6.915  | 4.247 | 2.020 | 0  |
| 9     | 100.000 | 42.110 | 25.070 | 16.460 | 11.300 | 7.876  | 5.449  | 3.645  | 2.236 | 1.063 | 0  |
| 10    | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 | 0  |

Tab.A-26

MEF:(maillage normal).

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 1     | 100.000 | 43.200  | 27.130  | 19.290  | 14.620  | 11.360  | 8.759   | 6.460   | 4.282   | 2.139   | 0.000   |
| 2     | 100.000 | 70.080  | 48.380  | 36.110  | 28.080  | 22.160  | 17.260  | 12.830  | 8.546   | 4.282   | 0.000   |
| 3     | 100.000 | 79.580  | 62.330  | 49.310  | 39.710  | 32.060  | 25.390  | 19.090  | 12.830  | 6.460   | 0.000   |
| 4     | 100.000 | 84.810  | 71.020  | 59.320  | 49.570  | 41.110  | 33.230  | 25.390  | 17.260  | 8.759   | 0.000   |
| 5     | 100.000 | 88.310  | 77.260  | 67.230  | 58.150  | 49.630  | 41.110  | 32.060  | 22.160  | 11.360  | 0.000   |
| 6     | 100.000 | 91.020  | 82.330  | 74.070  | 66.130  | 58.150  | 49.570  | 39.710  | 28.080  | 14.620  | 0.000   |
| 7     | 100.000 | 93.390  | 86.890  | 80.500  | 74.070  | 67.230  | 59.320  | 49.310  | 36.110  | 19.290  | 0.000   |
| 8     | 100.000 | 95.620  | 91.260  | 86.890  | 82.330  | 77.260  | 71.020  | 62.330  | 48.380  | 27.130  | 0.000   |
| 9     | 100.000 | 97.810  | 95.620  | 93.390  | 91.020  | 88.310  | 84.810  | 79.580  | 70.080  | 43.200  | 0.000   |
| 10    | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 |

Tab.A-27

MEF:(maillage normal).

| y \ x | 0       | 1       | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9     | 10    |
|-------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|
| 0     | 0       | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     |
| 1     | 150.000 | 63.170  | 37.600 | 24.690 | 16.950 | 11.810 | 8.173  | 5.468  | 3.355  | 1.594 | 0.000 |
| 2     | 150.000 | 101.700 | 66.050 | 45.230 | 31.650 | 22.260 | 15.470 | 10.370 | 6.371  | 3.030 | 0.000 |
| 3     | 150.000 | 113.800 | 82.870 | 59.430 | 42.570 | 30.280 | 21.160 | 14.230 | 8.753  | 4.165 | 0.000 |
| 4     | 150.000 | 118.800 | 90.650 | 67.330 | 49.110 | 35.260 | 24.760 | 16.690 | 10.270 | 4.891 | 0.000 |
| 5     | 150.000 | 120.200 | 92.950 | 69.800 | 51.270 | 36.940 | 25.980 | 17.530 | 10.800 | 5.141 | 0.000 |
| 6     | 150.000 | 118.800 | 90.650 | 67.330 | 49.110 | 35.260 | 24.760 | 16.690 | 10.270 | 4.891 | 0.000 |
| 7     | 150.000 | 113.800 | 82.870 | 59.430 | 42.570 | 30.280 | 21.160 | 14.230 | 8.753  | 4.165 | 0.000 |
| 8     | 150.000 | 101.700 | 66.050 | 45.230 | 31.650 | 22.260 | 15.470 | 10.370 | 6.371  | 3.030 | 0.000 |
| 9     | 150.000 | 63.170  | 37.600 | 24.690 | 16.950 | 11.810 | 8.173  | 5.468  | 3.355  | 1.594 | 0.000 |
| 10    | 0.000   | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 |

Tab.A-28

MEF:(maillage normal).

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10    |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0     |
| 1     | 150,000 | 64,800  | 40,700  | 28,930  | 21,940  | 17,040  | 13,140  | 9,690   | 6,423   | 3,208   | 0,000 |
| 2     | 150,000 | 105,100 | 72,570  | 54,160  | 42,120  | 33,240  | 25,900  | 19,240  | 12,820  | 6,423   | 0,000 |
| 3     | 150,000 | 119,400 | 93,490  | 73,970  | 59,570  | 48,090  | 38,090  | 28,640  | 19,240  | 9,690   | 0,000 |
| 4     | 150,000 | 127,200 | 106,500 | 88,980  | 74,350  | 61,660  | 49,840  | 38,090  | 25,900  | 13,140  | 0,000 |
| 5     | 150,000 | 132,500 | 115,900 | 100,800 | 87,220  | 74,440  | 61,660  | 48,090  | 33,240  | 17,040  | 0,000 |
| 6     | 150,000 | 136,500 | 123,500 | 111,100 | 99,190  | 87,220  | 74,350  | 59,570  | 42,120  | 21,940  | 0,000 |
| 7     | 150,000 | 140,100 | 130,300 | 120,700 | 111,100 | 100,800 | 88,980  | 73,970  | 54,160  | 28,930  | 0,000 |
| 8     | 150,000 | 143,400 | 136,900 | 130,300 | 123,500 | 115,900 | 106,500 | 93,490  | 72,570  | 40,700  | 0,000 |
| 9     | 150,000 | 146,700 | 143,400 | 140,100 | 136,500 | 132,500 | 127,200 | 119,400 | 105,100 | 64,800  | 0,000 |
| 10    | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 0,000 |

Tab.A-29

❖ MEF : (maillage rafféni non régulier)

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 5       | 8       | 9       | 10      |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 2     | 100,000 | 48,500  | 28,260  | 11,390  | 4,280   | 2,138   | 0       |
| 3     | 100,000 | 71,010  | 49,620  | 22,220  | 8,543   | 4,280   | 0       |
| 5     | 100,000 | 88,530  | 77,640  | 49,900  | 22,220  | 11,390  | 0       |
| 8     | 100,000 | 95,700  | 91,410  | 77,640  | 49,620  | 28,260  | 0       |
| 9     | 100,000 | 95,850  | 95,700  | 88,530  | 70,010  | 48,500  | 0       |
| 10    | 100,000 | 100,000 | 100,000 | 100,000 | 100,000 | 100,000 | 100,000 |

Tab.A-30

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 5       | 8       | 9       | 10      |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 1     | 150,000 | 72,750  | 42,400  | 17,090  | 6,420   | 3,210   | 0,000   |
| 2     | 150,000 | 106,500 | 74,430  | 33,330  | 12,810  | 6,420   | 0,000   |
| 5     | 150,000 | 132,800 | 116,500 | 74,850  | 33,330  | 17,090  | 0,000   |
| 8     | 150,000 | 143,500 | 137,100 | 116,500 | 74,430  | 42,400  | 0,000   |
| 9     | 150,000 | 146,000 | 143,500 | 132,800 | 106,500 | 72,750  | 0,000   |
| 10    | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 | 150,000 |

Tab.A-31



ANA

| y \ x | 0      | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6 |
|-------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|---|
| 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0 |
| 1     | 99.196 | 43.483 | 18.945 | 8.483  | 3.725 | 1.405 | 0 |
| 2     | 99.432 | 54.449 | 26.049 | 11.924 | 5.261 | 1.987 | 0 |
| 3     | 99.196 | 43.483 | 18.945 | 8.483  | 3.725 | 1.405 | 0 |
| 4     | 0.018  | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0 |

Tab.A-32

| y \ x | 0      | 1       | 2       | 3      | 4       | 5       | 6   |
|-------|--------|---------|---------|--------|---------|---------|-----|
| 0     | 0      | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0   |
| 1     | 99.196 | 52.574  | 34.044  | 25.572 | 18.824  | 10.497  | 0   |
| 2     | 99.432 | 76.231  | 60.394  | 50     | 39.606  | 23.769  | 0   |
| 3     | 99.196 | 89.503  | 81.176  | 74.428 | 65.956  | 47.425  | 0   |
| 4     | 100    | 100.553 | 100.331 | 99.432 | 100.331 | 100.553 | 100 |

Tab.A-32

| y \ x | 0      | 1      | 2     | 3      | 4     | 5      | 6      |
|-------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|
| 0     | 0      | 0      | 0     | 0      | 0     | 0      | 0      |
| 1     | 99.196 | 44.888 | 22.67 | 16.965 | 22.67 | 44.888 | 99.196 |
| 2     | 99.432 | 56.436 | 31.31 | 23.849 | 31.31 | 56.436 | 99.432 |
| 3     | 99.196 | 44.888 | 22.67 | 16.965 | 22.67 | 44.888 | 99.196 |
| 4     | 0.018  | 0      | 0     | 0      | 0     | 0      | 0.018  |

Tab.A-33

| y \ x | 0      | 1       | 2       | 3      | 4       | 5       | 6      |
|-------|--------|---------|---------|--------|---------|---------|--------|
| 0     | 0      | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | 0      |
| 1     | 99.196 | 53.98   | 37.769  | 34.054 | 37.769  | 53.98   | 99.196 |
| 2     | 99.432 | 78.218  | 65.655  | 61.924 | 65.655  | 78.218  | 99.432 |
| 3     | 99.196 | 90.908  | 84.901  | 82.911 | 84.901  | 90.908  | 99.197 |
| 4     | 100    | 100.553 | 100.331 | 99.432 | 100.331 | 100.553 | 100    |

Tab.A-34

ANA

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6 |
|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|---|
| 0     | 0       | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0 |
| 1     | 148.795 | 65.224 | 28.417 | 12.724 | 5.588 | 2.108 | 0 |
| 2     | 149.147 | 81.673 | 39.074 | 17.887 | 7.892 | 2.98  | 0 |
| 3     | 148.795 | 65.224 | 28.417 | 12.724 | 5.588 | 2.108 | 0 |
| 4     | 0.027   | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0 |

Tab.A-35

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6   |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0   |
| 1     | 148.795 | 78.862  | 51.066  | 38.358  | 28.236  | 15.746  | 0   |
| 2     | 149.147 | 114.346 | 90.591  | 75      | 59.409  | 35.654  | 0   |
| 3     | 148.795 | 134.254 | 121.763 | 111.642 | 98.934  | 71.138  | 0   |
| 4     | 150     | 150.829 | 150.496 | 149.147 | 150.496 | 150.829 | 150 |

Tab.A-36

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6       |
|-------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 0     | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       |
| 1     | 148.795 | 67.332 | 34.005 | 25.448 | 34.005 | 67.332 | 148.795 |
| 2     | 149.147 | 84.654 | 46.966 | 35.773 | 46.966 | 84.654 | 149.147 |
| 3     | 148.795 | 67.332 | 34.005 | 25.448 | 34.005 | 67.332 | 148.795 |
| 4     | 0.027   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0.027   |

Tab.A-38

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 1     | 148.795 | 80.97   | 56.653  | 51.082  | 56.653  | 80.97   | 148.795 |
| 2     | 149.147 | 117.327 | 98.483  | 92.886  | 98.483  | 117.327 | 149.148 |
| 3     | 148.795 | 136.362 | 127.351 | 124.366 | 127.351 | 136.362 | 148.795 |
| 4     | 150     | 150.829 | 150.496 | 149.148 | 150.496 | 150.829 | 150     |

Tab.A-39

**MDF**

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6 |
|-------|-----|--------|--------|--------|-------|-------|---|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0 |
| 1     | 100 | 43.193 | 19.62  | 9.057  | 4.092 | 1.578 | 0 |
| 2     | 100 | 53.154 | 26.228 | 12.518 | 5.731 | 2.222 | 0 |
| 3     | 100 | 43.193 | 19.62  | 9.057  | 4.092 | 1.578 | 0 |
| 4     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0 |

Tab.A-40

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6 |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0 |
| 1     | 100 | 52.538 | 34.687 | 25.962 | 19.159 | 10.923 | 0 |
| 2     | 100 | 75.466 | 60.248 | 50     | 39.752 | 24.534 | 0 |
| 3     | 100 | 89.077 | 80.841 | 74.038 | 65.313 | 47.462 | 0 |
| 4     | 100 | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 0 |

Tab.A-41

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6   |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0   |
| 1     | 100 | 44.772 | 23.711 | 18.115 | 23.711 | 44.772 | 100 |
| 2     | 100 | 55.376 | 31.959 | 25.037 | 31.959 | 55.376 | 100 |
| 3     | 100 | 44.772 | 23.711 | 18.115 | 23.711 | 44.772 | 100 |
| 4     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0   |

Tab.A-42

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6   |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0   |
| 1     | 100 | 54.117 | 38.779 | 35.019 | 38.779 | 54.117 | 100 |
| 2     | 100 | 77.688 | 65.979 | 62.518 | 65.979 | 77.688 | 100 |
| 3     | 100 | 90.655 | 84.933 | 83.096 | 84.933 | 90.655 | 100 |
| 4     | 100 | 100    | 100    | 100    | 100    | 100    | 100 |

Tab.A-43

| y \ x | 0   | 1     | 2      | 3      | 4     | 5     | 6 |
|-------|-----|-------|--------|--------|-------|-------|---|
| 0     | 0   | 0     | 0      | 0      | 0     | 0     | 0 |
| 1     | 150 | 64.79 | 29.429 | 13.586 | 6.138 | 2.368 | 0 |
| 2     | 150 | 79.73 | 39.342 | 18.778 | 8.596 | 3.333 | 0 |
| 3     | 150 | 64.79 | 29.429 | 13.586 | 6.138 | 2.368 | 0 |
| 4     | 0   | 0     | 0      | 0      | 0     | 0     | 0 |

Tab.A-44

| y \ x | 0   | 1       | 2       | 3       | 4      | 5      | 6 |
|-------|-----|---------|---------|---------|--------|--------|---|
| 0     | 0   | 0       | 0       | 0       | 0      | 0      | 0 |
| 1     | 150 | 78.807  | 52.031  | 38.942  | 28.739 | 16.385 | 0 |
| 2     | 150 | 113.199 | 90.373  | 75      | 59.627 | 36.801 | 0 |
| 3     | 150 | 133.615 | 121.261 | 111.058 | 97.969 | 71.193 | 0 |
| 4     | 150 | 150     | 150     | 150     | 150    | 150    | 0 |

Tab.A-45

| y \ x | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6   |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0   |
| 1     | 150 | 67.158 | 35.567 | 27.172 | 35.567 | 67.158 | 150 |
| 2     | 150 | 83.063 | 47.938 | 37.555 | 47.938 | 83.063 | 150 |
| 3     | 150 | 67.158 | 35.567 | 27.172 | 35.567 | 67.158 | 150 |
| 4     | 0   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0   |

Tab.A-46

| y \ x | 0   | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6   |
|-------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|-----|
| 0     | 0   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0   |
| 1     | 150 | 81.175  | 58.168  | 52.528  | 58.168  | 81.175  | 150 |
| 2     | 150 | 116.532 | 98.969  | 93.778  | 98.969  | 116.532 | 150 |
| 3     | 150 | 135.983 | 127.399 | 124.644 | 127.399 | 135.983 | 150 |
| 4     | 150 | 150     | 150     | 150     | 150     | 150     | 150 |

Tab.A-47

MEF

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3     | 4     | 5     | 6     |
|-------|---------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0       | 0      | 0      | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 1     | 100.000 | 36.590 | 16.260 | 7.043 | 2.983 | 1.094 | 0.000 |
| 2     | 100.000 | 53.580 | 22.920 | 9.965 | 4.219 | 1.547 | 0.000 |
| 3     | 100.000 | 36.590 | 16.260 | 7.043 | 2.983 | 1.094 | 0.000 |
| 4     | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Tab.A-48

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0     | 0.000   | 0.000   | 0.000   | 0.000   | 0.000   | 0.000   | 0.000   |
| 1     | 100.000 | 45.800  | 31.700  | 24.350  | 17.720  | 9.598   | 0.000   |
| 2     | 100.000 | 75.830  | 58.840  | 48.800  | 37.700  | 21.360  | 0.000   |
| 3     | 100.000 | 89.440  | 80.860  | 73.940  | 65.290  | 40.540  | 0.000   |
| 4     | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 | 100.000 |

Tab.A-50

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| 0     | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1     | 150.000 | 54.890 | 24.390 | 10.570 | 4.475 | 1.640 | 0.000 |
| 2     | 150.000 | 80.370 | 34.380 | 14.950 | 6.329 | 2.320 | 0.000 |
| 3     | 150.000 | 54.890 | 24.390 | 10.570 | 4.475 | 1.640 | 0.000 |
| 4     | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Tab.A-51

| y \ x | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0     | 0.000   | 0.000   | 0.000   | 0.000   | 0.000   | 0.000   | 0.000   |
| 1     | 150.000 | 68.690  | 47.550  | 36.520  | 26.590  | 14.400  | 0.000   |
| 2     | 150.000 | 113.700 | 88.260  | 73.200  | 56.550  | 32.040  | 0.000   |
| 3     | 150.000 | 134.200 | 121.300 | 110.900 | 97.940  | 60.820  | 0.000   |
| 4     | 150.000 | 150.000 | 150.000 | 150.000 | 150.000 | 150.000 | 150.000 |

Tab.A-52

Maillage raffiné régulier

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| 0     | 0       | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0     |
| 1     | 100.000 | 36.430 | 16.270 | 7.285  | 3.177 | 1.191 | 0.000 |
| 2     | 100.000 | 50.570 | 22.950 | 10.300 | 4.493 | 1.685 | 0.000 |
| 3     | 100.000 | 36.430 | 16.270 | 7.285  | 3.177 | 1.191 | 0.000 |
| 4     | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Tab.A-53

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| 0     | 0,000   | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1     | 150,000 | 54,650 | 24,410 | 10,930 | 4,766 | 1,787 | 0,000 |
| 2     | 150,000 | 75,890 | 34,420 | 15,450 | 6,740 | 2,527 | 0,000 |
| 3     | 150,000 | 54,650 | 24,410 | 10,930 | 4,766 | 1,787 | 0,000 |
| 4     | 0,000   | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Tab.A-54

Maillage raffiné non régulier

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| 0     | 0       | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0     |
| 1     | 100.000 | 42.120 | 17.800 | 7.751  | 3.291 | 1.212 | 0.000 |
| 2     | 100.000 | 55.070 | 25.170 | 10.940 | 4.644 | 1.710 | 0.000 |
| 3     | 100.000 | 42.120 | 17.800 | 7.751  | 3.291 | 1.212 | 0.000 |
| 4     | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Tab.A-55

| y \ x | 0       | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     |
|-------|---------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| 0     | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1     | 150.000 | 63.180 | 26.700 | 11.630 | 4.937 | 1.817 | 0.000 |
| 2     | 150.000 | 82.610 | 37.750 | 16.400 | 6.966 | 2.565 | 0.000 |
| 3     | 150.000 | 63.180 | 26.700 | 11.630 | 4.937 | 1.817 | 0.000 |
| 4     | 0.000   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Tab.A-56