

11/04

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

**Département de Génie Civil**

**Laboratoire génie parasismique et dynamique des structures**

**Mémoire de fin d'études**

**En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie Civil**

**Intitulé :**

# FIABILITÉ DES OUVRAGES DE SOUTÈNEMENTS

***Proposé et dirigé par :***

Mr .B. ZEGHLACHE

***Étudié par :***

SADOUNI Amer

**Promotion 2004**

## *Remerciements*

*Je tien à remercier mon promoteur Mr ZEGHLAGHE pour ses précieux conseils, son aide et suivi du travail durant toute l'année.*

*Mes profonds remerciements vont à tout les professeur de l'école nationale polytechnique plus spécialement ceux du département Génie Civil qui ont contribuer ma formation d'ingénieur.*

*Je remercie aussi l'ensemble du personnel de la bibliothèque de l'E.N.P pour leur coopération ainsi que tous mes amis. Que toute personne qui a contribué à la réalisation de ce travail, trouve –ici- l'expression de ma gratitude.*

الهدف من هذه الدراسة هو البحث عن المثالية في إنجاز المنشآت، و لهذا حاولنا إيجاد أحسن الطرق لتقدير إمكانية حصول حوادث نادرة، مثل احتمال تقهقر منشأة، نحتفظ بالطرق التي تظهر بأنها أكثر فاعلية حسب نوع التقهقر المدروس لتطبيقها بشكل صحيح و مقارنة النتائج المحصل عليها.

مفاتيح: التقهقر، دفع، جر، جدار السند، ...

#### Résumé :

L'objectif de ce travail est la recherche de la perfection dans la réalisation des ouvrages, et pour cela inventorier les meilleures façons d'estimer l'occurrence d'un évènement rare, tel que la probabilité de défaillance d'un ouvrage. Nous retiendrons celles qui paraissent les plus efficaces suivant le type de défaillance traité, pour les appliquer concrètement et comparer les résultats obtenus.

Mots Clés : défaillance, poussée, butée, mur de soutènement, ...

#### Abstract:

The objective of this work is the research of the perfection in the realization of works, and for this reason to inventory the best ways of estimating the occurrence of evenement rare, such as the probability of failure of work. We will retain those witch appear more efficacies following the type of failure treated, to apply them concretely and compare the results obtained.

Keys words: failure, pushed, butted, retaining wall...

## Sommaire

Introduction	1
Dimensionnement des ouvrages de soutènements	3
I. Calcul des forces de poussée et de butée	3
I.1. Méthode de Coulomb	3
I.2. Méthode graphique de Culmann	5
I.3. Méthode de Rankine	6
I.4. Méthodes des équilibres limites	8
II. Murs de soutènement en béton armé	9
II.1 Principe de calcul des murs en béton armé	9
II.2. Sécurité vis-à-vis d'un glissement sur la base du mur	10
II.3. Sécurité au renversement :	10
II.4. Sécurité vis-à-vis d'une rupture du sol de fondation	11
L'approche probabiliste en ouvrages de génie civil	12
I. Généralités	12
II. Limites de la probabilisation	14
III. Indice de fiabilité de Hasofer-lind	15
IV. Les méthodes de résolutions numériques	16
V. Les différentes méthodes d'analyse de la sécurité des structures	16
VI. Les méthodes de Niveau III	17
VI.1. Le Problème Fondamental	20
VI.2. Interprétation géométrique de $\beta$	22
VII. Méthode de Monte Carlo	24
Les méthodes de niveau I et II	27
I. Les méthodes de Niveau II	27
I.1. Généralités	27
I.2. Détermination de la fonction d'état limite :	28
I.2.1. Détermination de l'indice de fiabilité $\beta$	29
I.2.2. Le calcul de $\beta$ Dans le cas d'un domaine fermé des méthodes approchées	31
I.2.3. Méthode de Paloheimo Hannus	32
I.2.4. Méthode basant sur les abaques	33
II. Les Méthode de Niveau I	35
II.1. Généralités	35
II.2. Bilan relatif aux méthodes de calcul	38
II.3.1 Variable aléatoire de base	38
II.3.2 Initiation a la mise en œuvre du calcul probabiliste	39
II.4. Conclusion	40
Applications aux ouvrages de soutènements	42
Généralités sur les méthodes FORM	42
I. La méthode FORM 1	42
II. Application sur un mur poids	43
III. Approche probabiliste de la stabilité de l'ouvrage par la méthode FORM1	43

<i>III.1. Détermination de la fonction d'état limite</i>	44
<i>III.2. Calcul du coefficient des pressions des terres <math>K_a</math></i>	44
<i>III.2.1 Stabilité au renversement</i>	44
<i>III.2.2 Stabilité au glissement</i>	45
<i>III.2.3 Stabilité au poinçonnement</i>	45
<b>IV. Etudes paramétriques</b>	<b>47</b>
<i>VI.1. Stabilité au renversement</i>	47
<i>IV.2. Stabilité au glissement</i>	55
<b>V. La méthode FORM 2</b>	<b>58</b>
<i>V.1 Algorithme de la méthode FORM 2</i>	58
<i>V.2 Application sur un mur cantilever</i>	61
<i>VI.1. Stabilité au renversement</i>	62
<i>VI.2. Stabilité au poinçonnement</i>	67
<b>Conclusions</b>	<b>69</b>

## INTRODUCTION

Bien que rares, les événements tels que ruptures d'ouvrages de soutènements peuvent conduire à des conséquences extrêmement graves. Jusqu'à un passé récent, on se protégeait de ces événements en prenant des marges, des facteurs de sécurité, que l'on cumulait sur l'ensemble des paramètres influant, à l'aide d'une méthodologie uniquement déterministe. Cette démarche ne permet pas néanmoins de bien connaître les risques pris. Dans l'analyse de la fiabilité des structures, les paramètres influant sont considérés comme des variables aléatoires et, à partir d'une équation physique de défaillance dont les variables sont probabilisées, on calcule la probabilité de défaillance. Les applications industrielles sont nombreuses : optimisation de la maintenance et des inspections, calcul de durée de vie résiduelle, etc.

Le retour d'expérience et la connaissance des cinétiques de dégradation sont deux des conditions essentielles d'application de l'analyse de fiabilité des structures.

Le dimensionnement des structures est fondé sur une démarche réglementaire et codifiée, essentiellement déterministe. Des coefficients de sécurité sont introduits dans les calculs afin de respecter des marges importantes pour garantir leur intégrité.

Dans la démarche probabiliste, de fiabilité des structures, le risque est évalué sous la forme d'une probabilité et non plus sous la forme d'un jugement binaire (le dimensionnement est acceptable ou non, l'exploitation peut être poursuivie ou non).

Le calcul de cette probabilité permet de réduire le risque de défaillance par l'organisation des programmes de maintenance inspection, de prolonger la durée d'exploitation en optimisant leur utilisation.

Ce travail donne quelques éléments de fiabilité des structures. Après avoir passé en revue et opté pour un modèle mécanique de la rupture pour un type d'ouvrage de soutènement donné (mur poids ou mur cantilever) on se propose de déterminer pour chaque mode de défaillance la fiabilité de la structure. Bien que les sources d'incertitudes soit diverses à savoir d'une part les *phénomènes aléatoires* (charges, etc.) s'exerçant sur les ouvrages et d'autre part, les *milieux aléatoires* (matériaux hétérogènes, bétons, sols, etc.), nous ne considérerons dans cette approche que les incertitudes d'origine géométrique ou mécanique.

Cependant, les murs de soutènement sont des ouvrages destinés à reprendre les efforts de poussée dus à l'action des terrains situés à l'amont. Parmi ces ouvrages, les murs en béton armé de type cantilever et les murs poids, représentent le cas le plus fréquemment rencontré en pratique. La construction de ces ouvrages nécessite un dimensionnement devant assurer la stabilité statique.

La démarche déterministe bien largement répandue à ce jour, ne permet pas d'appréhender la valeur réelle de la fiabilité d'un ouvrage et donne tout au plus une marge volontairement pessimiste vis-à-vis des modes de ruine par l'introduction de facteurs de sécurité. En effet, ce dimensionnement ne permet pas d'évaluer le risque lié à la défaillance d'une structure. Il donne généralement une marge dite de sécurité volontairement pour les différents modes de ruines possibles et conduites le plus souvent à des surdimensionnements, injustifiés, donc à des surcoûts. En outre certains chargements peuvent être ignorés au moment de la conception

et découverts seulement à l'exploitation. Les structures vieillissent, les propriétés des matériaux peuvent se trouver altérées, les modes d'exploitation ne sont plus les mêmes.

En revanche, la démarche probabiliste qui fait l'objet de ce travail, présente l'avantage de s'appuyer sur un modèle mécano-fiabiliste permettant de prendre en considération différentes sources d'incertitudes notamment les incertitudes physiques incluant les propriétés des matériaux et le chargement. Dans ce type de démarche le risque est évalué sous forme d'une probabilité de rupture de l'ouvrage.

Les murs de soutènement sont supposés retenir un massif de sol incliné sans cohésion. La poussée statique s'exerçant sur le mur de soutènement est évaluée à partir de différentes théories

Les incertitudes considérées sont de part et d'autre, les données relatives aux caractéristiques physiques et mécaniques du sol, à savoir le poids volumique, l'angle de frottement interne, la cohésion du sol ainsi que l'incertitude liée à la surcharge s'exerçant sur la surface libre du sol, et finalement les incertitudes liées à la géométrie de l'ouvrage et du sol. Un programme de calcul basé sur une méthode de niveau I et II de la famille des algorithmes dits FOSM (First Order Second Moment method) est développé en vue de l'évaluation des coefficients partiels de sécurité, de l'indice de fiabilité et de la probabilité de survie. Les modes de ruine considérés sont successivement les ruines engendrées par glissement, par renversement ou par poinçonnement de l'ouvrage.

Deux études de cas réels sont effectuées et l'effet des diverses incertitudes sur la probabilité de ruine étudié afin d'apprécier leur influence, pour les deux types d'ouvrages de soutènement les plus courants.

Ainsi notre travail se présente comme suit :

- en chapitre 2 nous développons les méthodes classiques de dimensionnement déterministes des ouvrages de soutènements. Nous opterons pour l'approche fiabiliste des mêmes modèles mécanique et des mêmes modes de ruines.
- En chapitre 3, nous présentons les approches probabilistes en génie civil pour le calcul des structures
- En chapitres 4 nous développerons principalement les méthodes de niveaux deux que nous utiliserons pour déterminer la fiabilité d'une structure.
- En chapitre 5 nous étudierons la fiabilité de deux types de structures. A savoir un mur poids et un mur cantilever. A cet effet on montrera l'incidence des paramètres mécaniques sur cette fiabilité, ainsi que l'incidence des incertitudes sur ces paramètres et aussi l'incidence de la méthode utilisée pour exprimée la poussée active sur cette fiabilité
- Le dernier chapitre fera l'objet d'une conclusion générale.

## Dimensionnement des ouvrages de soutènements:

On distingue essentiellement les murs-poids et les murs cantilevers simples ou avec des contreforts pour augmenter leur résistance structurale.

Dimensionner un mur consiste à déterminer sa géométrie et sa structure (ferraillage pour un mur en béton armé) pour qu'il soit stable sous l'action des forces suivantes :

- Le poids du mur W
- La force de poussée  $F_a$
- La force de butée à l'aval  $F_p$
- La réaction du sol sous la fondation R

Le dimensionnement comporte les étapes suivantes en ce qui concerne la stabilité externe:

- Calcul des efforts de poussée et de butée.
- Sécurité vis-à-vis d'un glissement à la base du mur.
- Sécurité au renversement.
- Sécurité vis-à-vis d'une rupture du sol de fondation.
- Sécurité vis-à-vis d'un grand glissement englobant le mur.

En premier lieu, il convient de vérifier que les déplacements du mur sont suffisants pour mobiliser la poussée ou la butée (cf. article Ouvrage de soutènement. Poussée et butée).

La force de poussée doit, par ailleurs, être calculée en fonction des conditions hydrauliques probables les plus défavorables derrière le mur.

### I. Calcul des forces de poussée et de butée :

#### I.1. Méthode de Coulomb :

Mise au point par Coulomb en 1773, cette méthode permet de déterminer les forces de poussée et de butée limites s'exerçant derrière un écran ou un mur quelconque sans considération de l'état des contraintes s'exerçant dans le sol derrière le mur.

Elle repose sur deux hypothèses :

- a) le sol se rompt suivant une surface de rupture plane passant par le pied de l'écran.
- b) La force agissant sur l'écran à une direction connue. En d'autres termes, cela signifie que l'angle de frottement entre l'écran et le sol est connu.

Ces deux hypothèses faites, la force agissant sur le mur est calculée par de simples considérations d'équilibre statique.

Le calcul sera d'abord conduit dans le cas des sols pulvérulent, puis étendu au cas des sols cohérents.

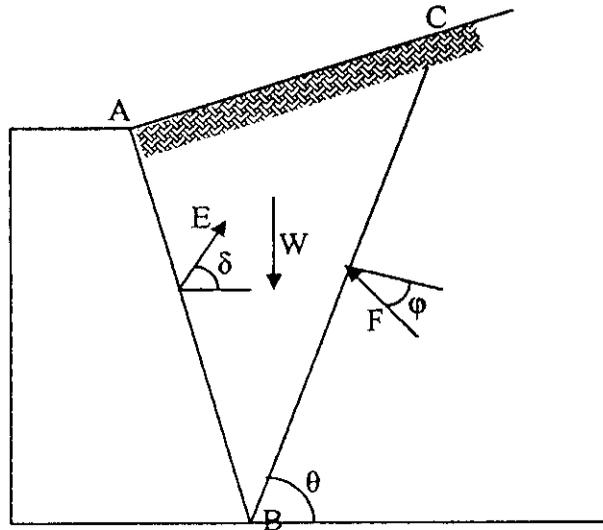


Fig.1. Coin de Coulomb

**Principe:**

Soit un mur soutenant un massif de sol pulvérulent, d'angle de frottement interne  $\varphi$ . On suppose que la surface de rupture est le plan BC faisant l'angle  $\theta$  avec l'horizontale.

En chaque point  $M$  du plan de rupture s'exerce une contrainte  $\bar{r}$  faisant l'angle  $\varphi$  avec la normale au plan et située d'un côté ou de l'autre de cette normale, suivant que le massif est en butée ou en poussée. Donc, la réaction totale  $\bar{R}$  du sol sur ce plan de rupture fait avec la normale à ce plan l'angle  $\varphi$ .

Le principe de calcul consiste à écrire la nullité de la résultante générale des forces agissant sur le coin de sol ABC. Ces forces sont:

- Le poids  $W$ .
- La réaction  $R$  exercée par le sol sur le plan de rupture AC.
- La force  $E$  exercée par le mur et inclinée de l'angle  $\delta$  sur la normale au parement du mur. Cette force est notée  $F^+$  ou  $F^-$  suivant que la force de réaction  $R$  est inclinée de  $+\varphi$  ou  $-\varphi$  sur la normale au plan de rupture.
- La force  $F$  exercée par le sol est inclinée de l'angle  $\varphi$  par rapport à l'horizontale.

On détermine ainsi la valeur de la force  $F$  en fonction de l'angle  $\theta$  que fait le plan de rupture avec l'horizontale.

D'après le calcul des charges limites résultant de la théorie de la plasticité, l'expression ainsi obtenue correspond à la méthode cinématique, c'est-à-dire à une approche par l'extérieur de la vraie valeur de  $F$ . C'est pourquoi la force de poussée sera obtenue en prenant le maximum de  $F^+(\theta)$ , alors que la force de butée sera obtenue en prenant le minimum de  $F^-(\theta)$ . Dans les deux cas, on écrira que:

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = 0$$

**Calcul.**

Le diagramme des forces appliquées sur le coin ABC donne, dans le cas de la poussée.

$$F^+ = W \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\delta + \eta + \varphi - \theta)}$$

$$\text{Avec } W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\sin(\eta - \beta) \sin(\eta - \theta)}{\sin^2 \eta \sin(\theta - \beta)}$$

Pour trouver l'orientation du plan de rupture, il faut déterminer le maximum de  $F^+$ , c'est-à-dire écrire que :

$$\frac{\partial F^+}{\partial \theta} = 0$$

La formule générale donnant la force de poussée est la suivante:

$$F_a = \frac{1}{2} K_a \gamma H^2$$

$$\text{Avec } K_a = \frac{\sin^2(\eta - \theta)}{\sin^2 \eta \sin(\eta + \delta) \left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\sin(\eta + \delta) \sin(\eta - \beta)}} \right]^2}$$

La force de butée a, de même, pour expression générale:

$$F_p = \frac{1}{2} K_p \gamma H^2$$

$$\text{Avec } K_p = \frac{\sin^2(\eta + \theta)}{\sin^2 \eta \sin(\eta + \delta) \left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \beta)}{\sin(\eta + \delta) \sin(\eta - \beta)}} \right]^2}$$

**Critique :**

Il faut remarquer que cette théorie ne permet pas de déterminer le point d'application de la force  $F$ . Lorsqu'il en est besoin, on suppose une répartition linéaire des contraintes sur le parement du mur, et le point d'application de la force résultante  $F$  est alors situé au tiers de la hauteur à partir de la base.

La zone de rupture est réduite à un plan et il n'y a aucune prise en compte de l'état des contraintes dans le sol. L'hypothèse du plan de rupture est relativement bien vérifiée pour les sols pulvérulents en état de poussée, mais ne l'est plus ni pour les sols cohérents, ni pour les états de butée.

**1.2. Méthode graphique de Culmann.**

Lorsque les conditions géométriques ne permettent pas de déterminer analytiquement la force de poussée ou de butée, on utilise alors la méthode graphique de Culmann qui est illustrée par la figure ci-dessous dans le cas de la poussée et dont le principe est décrite ci-après.

La masse de sol derrière le mur est subdivisée en une succession de coins. Pour chacun de ces coins, délimité par un plan de rupture passant par le point **B** au pied du mur et incliné de l'angle  $\theta$ , sur l'horizontale, on détermine, grâce au graphique de la résultante générale des forces appliquées ( $W_i$ ,  $R_i$ ,  $F_i$ ), la force correspondante  $F_i$  exercée sur le parement du mur. Pour cela, les poids  $W_i$  des différents coins sont

reportés sur un axe BX faisant l'angle  $\varphi$  avec la direction horizontale et les forces  $F_i$  sont tracées à partir des extrémités des  $W_i$ , parallèlement à l'axe BY faisant l'angle  $(\delta+\eta)$  avec l'axe BX. Les extrémités des forces  $F_i$  sont sur les plans de rupture inclinés de  $\theta_i$ , d'après le diagramme des résultantes et leur ensemble constitue la ligne de

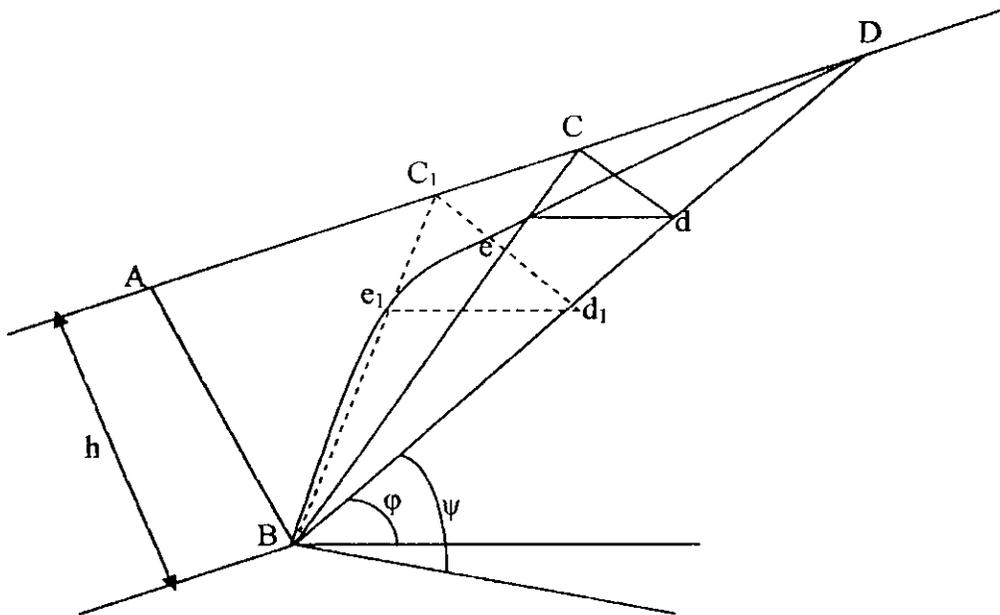


Fig.2. Construction de Culmann.

Culmann. Le point où la tangente à cette courbe est parallèle à l'axe BX correspond à la valeur maximale de  $F$ , soit à la poussée limite  $F_a$ , et détermine le plan de rupture le plus dangereux, incliné de l'angle  $\theta_a$  sur l'horizontale.

La méthode s'applique de façon analogue à la détermination de la force de butée  $F_p$ .

### 1.3. Méthode de Rankine :

#### Principe :

La méthode de Rankine consiste à calculer les forces de poussées et de butées à partir d'une approximation de l'état des contraintes dans le sol au contact de l'écran.

Si  $f$  est la contrainte exercée par le sol sur l'écran, la force de poussée ou de butée par unité de longueur de l'écran a pour expression :

$$F = \int_0^H f dz$$

Cette méthode repose sur l'hypothèse simplificatrice fondamentale suivante:

La présence de discontinuités, provoquées par la présence de murs ou d'écran à la surface d'un massif de sol, ne modifie pas la répartition des contraintes verticales dans le sol.

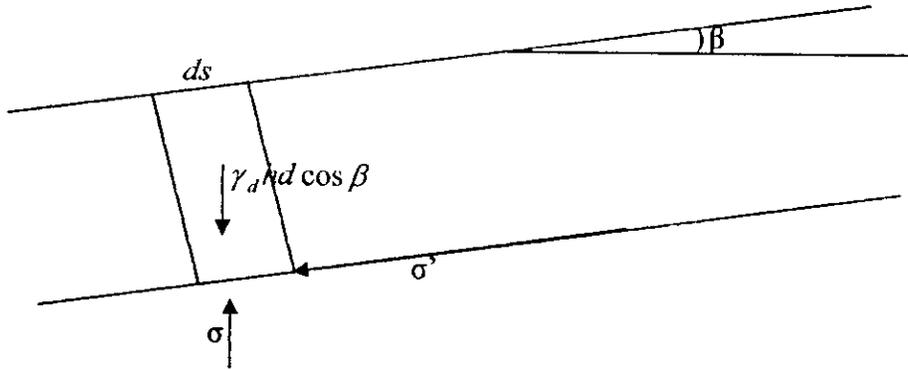


Fig.3. Théorie de Rankine.

Ainsi sur un plan parallèle à la surface du massif de sol, la contrainte reste verticale et égale à  $\gamma z \cos \beta$  ( $\beta$  : angle d'inclinaison de la surface du sol par rapport à l'horizontale).

Cette méthode conduit à une répartition triangulaire des contraintes de poussée ou de butée sur l'écran et permet d'obtenir le point d'application de la force correspondante.

**a) Force de poussée pour un massif pulvérulent saturé à surface horizontale.**

Soit un mur à parement vertical supportant un massif à surface horizontale, constituer d'un sol pulvérulent saturé. La nappe affleure à la surface du massif.

Si le sol est en état de rupture de poussée, la contrainte qui s'exerce sur le mur horizontale, principale et a pour expression :

$$\sigma_h = u + K_a \sigma_v \quad \text{Avec : } K_a = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Soit encore :

$$\sigma_h = \gamma_w z + K_a (\gamma - \gamma_w) z$$

Avec  $\gamma_w$  poids spécifique de l'eau.

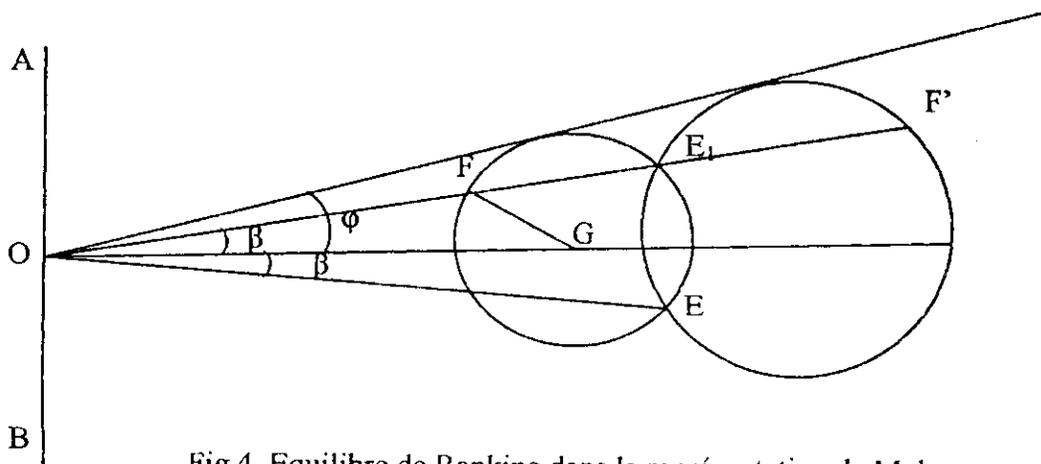


Fig.4. Equilibre de Rankine dans la représentation de Mohr.

La répartition est linéaire, et la force de poussée horizontale  $F_a$  est appliquée au tiers de la hauteur à partir de la base. Elle a pour expression :

$$F_a = \int_0^H \sigma_h dz$$

$$F_a = \frac{1}{2}(\gamma_w + K_a \gamma') H^2 \quad \text{Avec : } \gamma' = \gamma - \gamma_w$$

### b) Force de butée pour un massif pulvérulent à surface inclinée.

Soit un écran vertical appliqué sur un massif pulvérulent dont la surface est inclinée d'un angle  $\beta$  sur l'horizontale. Si l'on met le sol en rupture de poussée, la force de poussée exercée est donnée par :

$$F_a = \int_0^H f dz$$

La contrainte  $f$  exercée sur le sol est inclinée de l'angle  $\beta$  sur l'horizontale et a pour valeur :

$$f = K_a(\beta) \gamma z \cos \beta$$

$$\text{D'où : } F_a = \frac{1}{2} K_a(\beta) \gamma H^2 \cos \beta$$

Cette force est inclinée de l'angle  $\beta$  et appliquée au tiers de la hauteur à partir de la base.

#### Critique :

Cette théorie impose en tout point du mur, la direction de la contrainte qui s'exerce sur le mur, et donc de ne pas tenir compte de la valeur du frottement entre le mur et le sol. Ainsi, dans le cas d'un sol à surface horizontale et d'un mur à paroi verticale, la théorie de RANKINE suppose que le frottement entre le mur et le sol est nul, puisque la contrainte est horizontale. L'hypothèse  $\sigma_v = \gamma z$  est d'autant plus inexacte que le frottement est moins négligeable.

### 1.4. Méthodes des équilibres limites :

La méthode des équilibres limites permet de déterminer les forces de poussée et de butée à partir de la connaissance de coefficients  $K_a$  et  $K_p$ , tels que :

$$K_a = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xz}^2}}{\gamma z} = \frac{|f|}{\gamma z}$$

Cette méthode conduit à une répartition linéaire des contraintes sur l'écran et par suite :

$$F = \frac{1}{2} \int_0^H f dz = \frac{1}{2} K_a \gamma H^2$$

Les tables de SOKOLOVSKI ou de CAQUOT-KERISEL sont directement utilisables dans le cas d'un sol pulvérulent. Lorsque le sol présente de la cohésion, on est conduit à appliquer le théorème des états correspondants dont l'énoncé est le suivant (CAQUOT-KERISEL) :

« Le milieu cohérent peut être remplacé par un milieu pulvérulent, de même forme et de même angle de frottement interne  $\varphi$ , supportant la contrainte  $\tau = c \cot \varphi$  sur toute la surface extérieure, c'est-à-dire, d'une part, sur la surface libre où elle joue le rôle d'une surcharge, d'autre part, sur la surface en contact avec l'écran, où, dirigée vers l'intérieur du massif, elle vient en déduction de la composante normale d'action du massif ».

## II. Murs de soutènement en béton armé

### II.1. Principe de calcul des murs cantilever.

La conception des murs de soutènement en béton armé diffère sensiblement de celle des murs gravitaires. Les terres sont retenues par un voile vertical dont l'équilibre est assuré par une semelle qui se prolonge sous le remblai. Cette semelle supporte le poids des terres dont le rôle stabilisateur est évident. La partie la plus délicate de l'ouvrage se situe à l'encastrement du voile dans la semelle, il se développe là des moments fléchissant notables.

La forme du parement intérieur de ces murs diffère par trop de la ligne droite pour que l'on puisse utiliser telles quelles les méthodes développées pour le calcul de la poussée des terres. Il faut d'ailleurs bien voir que la partie du massif comprise entre le voile et la semelle ne peut pas passer à l'état plastique et reste à l'état élastique. De plus, ce type de mur comporte assez souvent des contreforts, ce qui vient encore compliquer le problème en introduisant la troisième dimension. Le calcul de ces murs relève beaucoup plus, dans l'état actuel des choses, d'un empirisme plus ou moins paré de la théorie que d'une connaissance profonde du comportement mécanique des terres.

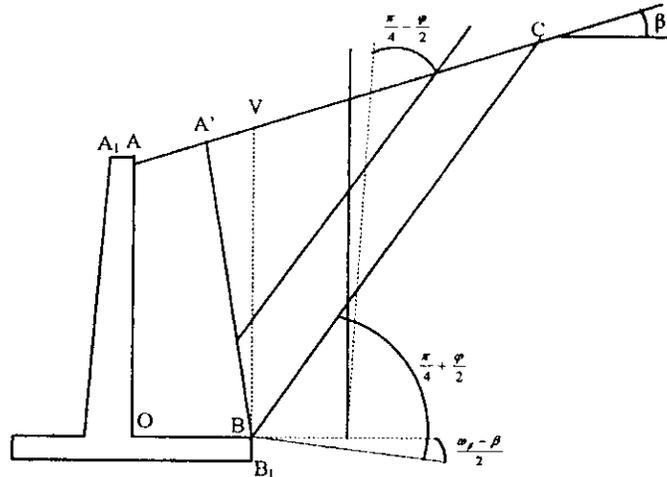


Fig.5. Mur de soutènement en béton armé.

On tracera les lignes de glissement  $BA'$  et  $BC$  issue de l'extrémité  $B$  de la semelle dans un équilibre inférieur de Rankine. On peut penser que lors de la rupture, la zone  $A'BC$  du massif est passée en état d'équilibre plastique, tandis que la zone  $A'AOB$  reste à l'état élastique puisque ses possibilités de déformation sont très faibles. On est donc fondé à admettre que sur le plan vertical  $BV$  règne la distribution de contraintes de l'équilibre de Rankine. Il est donc possible de calculer l'équilibre d'ensemble du mur.

Le calcul de la poussée des terres doit en principe être légèrement modifié lorsque la ligne de glissement  $BA'$  ne peut pas se développer complètement et que le point  $A'$  est situé sur le voile. On peut admettre dans ce cas que la partie  $A_1OB$  du massif fait corps avec le mur et que l'on doit calculer la poussée sur le parement  $AA_1BB_1$ . En toute rigueur, il n'est pas évident que la frontière de la zone élastique reste la ligne de glissement  $BA'$  de l'équilibre de Rankine, mais l'expérience montre qu'une erreur importante sur la position du point  $A'$  n'a que peu d'influence sur la poussée ; on

admettra donc, pour simplifier, que la masse de terre solidaire du mur est limitée par la ligne de glissement de l'équilibre de Rankine.

## II.2. Sécurité vis-à-vis d'un glissement sur la base du mur

Le déplacement du mur par glissement sur le plan de sa fondation est la deuxième éventualité à envisager.

Le coefficient de sécurité  $F_g$  vis-à-vis d'un glissement sur la base du mur est défini comme le rapport de la force résistante de cisaillement à la composante tangentielle de la réaction exercée sur la base.

Si  $R$  est cette force de réaction,  $T$  et  $N$  ses composantes suivant la base du mur et la normale,  $\tan \delta$  le coefficient de frottement entre le sol de fondation et la base du mur, le coefficient de sécurité vis-à-vis d'un glissement a pour expression :

$$F_g = \frac{N}{T} \tan \delta$$

C'est donc l'obliquité de  $R$  qui permet de juger la sécurité au glissement. Il arrive quelques fois que pour satisfaire à cette règle de sécurité, on soit amené à alourdir notablement l'ouvrage initialement prévu ; on peut essayer alors de conserver les dimensions primitives tout en orientant différemment la base de la fondation pour diminuer l'obliquité de  $R$ . on est toutefois limité dans cette voie, car il faut également vérifier la stabilité du terrain de fondation à l'égard d'une rupture superficielle, rupture tout à fait analogue à la rupture par glissement proprement dite.

En règle générale, on ne tient pas compte, dans la détermination de la force  $R$ , de la butée des terres qui s'exerce sur la partie frontale du mur.

Pour un contact sol-béton, on admet que le frottement sol-mur sur la base a la même valeur qu'au parement :

$$\delta = \frac{2}{3} \varphi$$

Avec  $\varphi$  angle de frottement interne du sol.

## II.3. Sécurité au renversement :

Pour vérifier la stabilité du mur au renversement, on localise arbitrairement l'axe de rotation du mur.

La sécurité au renversement d'un mur traduit par son équilibre statique par rapport au moment des forces exercées. Le coefficient de sécurité est calculé en considérant l'équilibre limite, généralement lorsque le mur se renverse autour de son arrête extérieure.

Au dessus de la base, le mur est sollicité par deux types de forces :  
Des forces qui tendent à renverser le mur autour de son arrête extérieur, principalement la force de poussée ;

Des forces qui tendent à stabiliser le mur autour de cette arrête ; principalement le poids du mur.

Si  $M_1$  et  $M_2$  sont les moments de forces autour de l'arrête extérieur, on définit le coefficient de sécurité au renversement  $F_R$  par rapport de ses deux moments :

$$F_R = \frac{M_2}{M_1} = \frac{W d_1}{F_a d_2}$$

On utilise parfois la règle du tiers central, la réaction  $R$  sur la base passe dans le tiers central de la semelle de fondation. Cette règle équivaut à ce que, dans une distribution linéaire des contraintes verticales sous la semelle, aucune zone de cette semelle ne soit décomprimée.

Vis-à-vis de la sécurité au renversement, la règle du tiers central est plus sévère que la méthode du rapport des moments; elle correspond à une valeur de  $F_R$  supérieur à 2 et voisine de 3 selon les cas. Lorsque le mur est fondé sur un terrain résistant, on peut admettre que la réaction sur la base soit en dehors du tiers central.

#### II.4. Sécurité vis-à-vis d'une rupture du sol de fondation :

Après le renversement et le glissement, on étudiera maintenant la résistance du sol de fondation sous les efforts verticaux.

On admet que la distribution des contraintes normales sous la fondation d'un mur de soutènement est linéaire, et l'on détermine cette distribution pour que sa résultante soit égale à la composante normale  $N$  de la réaction  $R$ .

La sécurité vis-à-vis d'une rupture du sol de fondation est obtenue par l'adoption d'un coefficient de sécurité égal à 3 sur la capacité portante du sol de fondation relative à une charge excentrée et inclinée.

L'étude de la capacité portante  $q$  repose soit sur des essais de laboratoire, soit sur des essais sur place.

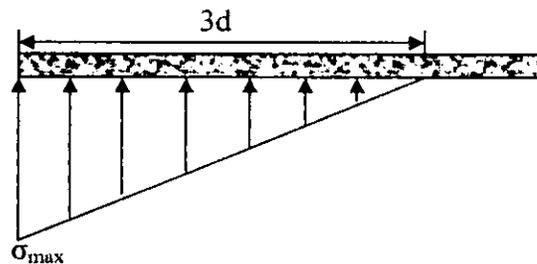


Fig.6. Répartition théorique des contraintes sur le sol de fondation

Pour tenir compte de l'excentrement  $e$  de la charge, on peut utiliser fréquemment la **formule de Meyerhof** qui consiste à calculer la force portante sur la largeur réduite

$B - 2e$  de la semelle.

Les Méthode basée sur les essais en laboratoire donnent les résultats suivants:

$$q = (B - 2e)q_a$$

$$\text{avec : } q_a = q_0 + \frac{1}{3} \left[ cN_c + \gamma \frac{B}{2} N_\gamma + q_0 (N_q - 1) \right]$$

où  $\gamma$  est le poids volumique du sol.

Les coefficients  $N_q, N_c$  et  $N_\gamma$  dépendent de l'angle de frottement interne  $\phi$  et de l'inclinaison de la charge.

## I. Généralités :

Le calcul des structures est basé sur une modélisation mécanique des ouvrages. Cette modélisation est à la fois le résultat de raisonnement mathématique et de confirmation expérimentale ce qui lui confère un caractère déterministe. En effet, les équations de la mécanique manipulent des grandeurs et fournissent un moyen de calculer juste. Le problème apparaît en fait au niveau des données, quelle fiabilité peut-on alors accorder à un résultat ? Est-ce que l'ouvrage réalisé présentera les mêmes caractéristiques mécaniques, géométriques ou de chargement que les prévisions ? L'existence des défauts d'exécution ou des tolérances sur chacune des caractéristiques de l'ouvrage nous permet de répondre non. L'insuffisance du calcul déterministe est ainsi démontrée. Il faut prendre en compte le caractère aléatoire de la plupart des paramètres c'est à cette fin qu'ont été développées les méthodes de calcul probabiliste. Et pour cela la notion de sécurité repose sur la validité des hypothèses de base et sur la validité des modèles de calcul.

Une fois le modèle mécanique élaboré, il s'agira d'être capable d'évaluer les contributions des incertitudes des différents éléments internes et externes du système. Les aléas portent par exemple sur la résistance des matériaux, les données géométriques susceptibles de variations significatives dues aux imperfections de réalisation.

Nous constatons donc notre incapacité à limiter ces aléas qui dépendront des moyens techniques et humains mis en œuvre, des conditions extérieures.

Malencontreusement certaines concrétisations des variables peuvent entraîner la ruine du système. L'objectif de la fiabilité est d'être capable d'évaluer de façon exacte le rapport du nombre de réalisations qui entraînent la défaillance sur le nombre total des réalisations possibles. Le concepteur aura ainsi à sa disposition un outil supplémentaire qui lui permettra d'évaluer les risques qu'il prend. De plus l'indice de fiabilité peut être utilisé pour contrôler des valeurs de coefficients partiels de sécurité ou pour une meilleure adaptation de ceux-ci dans certains cas particuliers.

L'approche probabiliste revient donc à admettre qu'une partie de la concrétisation du projet dépend de l'incertain. Grâce à la notion de probabilité, il est possible d'évaluer les risques encourus à partir des moyens que l'on se donne.

Ainsi la fiabilité permet une meilleure maîtrise des conceptions, et de modéliser l'incertain. De plus l'analyse des sensibilités nous permet de voir

quelles sont les grandeurs qui influencent le plus sur l'indice de fiabilité. Le concepteur saura ainsi sur quels éléments il doit faire porter ses efforts et concentrer son savoir faire afin de réduire le plus possible les risques de défaillance.

Il est maintenant nécessaire de rattacher la notion de la probabilité de défaillance  $P_f$  au caractère physique du problème, pour cela il est nécessaire de définir un domaine de sécurité et un domaine de ruine.  $P_f$  est alors la probabilité de passer du premier dans le second pendant la vie de l'ouvrage. La frontière entre les deux domaines ainsi définis est l'Etat Limite.

Si on note  $X$  les paramètres du problème et  $D_x$  le domaine où  $X$  ne conduit pas à la ruine de l'ouvrage on aura :

$$1 - P_f = P(X \in D_x) = \int_{D_x} f_x(X) dX \dots \dots \dots (1)$$

Selon l'équation (3) la résolution de l'équation (1) doit permettre la détermination de  $X$  pour  $P_f$  donné.

Cette définition de  $P_f$  peut donc être interprétée comme la probabilité d'atteindre la frontière du domaine de sécurité dite Etat Limite. Pratiquement on distingue plusieurs types d'Etat Limite :

selon l'équation (6) l'Etat Limite résulte d'une idéalisation du problème nous devant prendre en compte des notions telles que "fragilité" ou "ductilité", pratiquement  $P_f$  est directement lié au type d'Etat Limite envisagé, en pratique on distingue essentiellement deux types d'Etat Limite:

- Etat Limite Ultime dû à une seule atteinte de la sollicitation maximum ou à de multiples atteintes de sollicitations conduisant à une ruine par fatigue, selon l'équation (3) et pour une ELU  $P_f \in [10^{-3}, 10^{-7}]$  suivant le type de ruine.
- Etat Limite de Service lié à l'atteinte d'un état engendrant des problèmes de durabilité de l'ouvrage (ouverture des fissures dans une poutre BA par exemple}, toujours entre l'équation (3) et l'équation (6) on aurait alors  $P_f \in [10^{-1}, 10^{-2}]$ .

Notons que ces  $P_f$  sont des valeurs conventionnelles acceptables moyennant certaines hypothèses telles que la durée de vie de l'ouvrage de l'ordre de

cinquante ans... et respecte ces hypothèses.

Par des moyens de contrôle appropriés, au niveau des 3 éléments de base du problème (mécanique, géométrie et chargement).

Comme le note l'équation (9) la distinction de ces 3 domaines de base du problème permet une approche rigoureuse du problème en distinguant

S sollicitation agissante

R sollicitation résistante et en écrivant

$P_f = P(R \leq S)$  Où R est directement issu de la modélisation mécanique au voisinage de l'Etat Limite.

### **II. Limites de la probabilité.**

Comme nous venons de le voir, le traitement probabiliste des problèmes de structure doit permettre d'atteindre un degré de sécurité conventionnel compatible avec des contraintes d'utilité plus ou moins intuitives... Pour cela, le calcul probabiliste consiste à traiter le problème avec un modèle mécanique déterministe et des variables à caractères aléatoires prenant en compte des "écarts" sur les paramètres mécaniques géométriques ou de chargement. En fait, cette notion d'écart sur les paramètres est très subjective, en effet, on ne peut pas prendre en compte des écarts trop importants liés à l'occurrence de circonstances imprévues dont la probabilité est pourtant souvent  $> 10^{-5}$ .

En fait les erreurs non prises en compte dans le calcul actuel occuperait une place importante dans les accidents et incidents [(1/1000) alors que  $P_f$  théorique  $\approx 10^{-6}$ ], des erreurs d'exécution par exemple, telles que omission de ferrailage ou mauvaise qualité du béton sont à la base d'un grand nombre d'accidents.

En fait, on ne pourra prendre en compte dans les calculs probabilistes que les écarts jusqu'à point déterminée, ces écarts seront alors notés "erreurs systématiques". Les écarts plus importants étant des "erreurs grossières", l'équation (6) a montré que le fait de multiplier le coefficient de sécurité par 1,5 ne permettrait même pas de passer d'une probabilité d'occurrence.

D'erreur grossière de  $10^{-5}$  à  $10^{-4}$  mais engendrait un surcoût d'environ 15%  
 $\Rightarrow$  il est impossible d'agir sur le taux d'accident dû à ces erreurs autrement qu'en améliorant le contrôle (ce qui est également très difficile).

De plus, généralement, on calcule chaque élément de la structure mais pour la

structure dans sa globalité, le  $P_f$  global serait alors de 10 à 100 fois plus grand.

Au niveau des modélisations on a également, le problème de définition des lois statistiques liées à chacune des variables qu'on ne connaît pas toujours très bien, surtout au niveau des peu de distributions. D'autres paramètres tels que les charges de chantier ou l'adhérence acier béton ne sont même pas prises en compte.

On retiendra donc que le calcul probabiliste sera basé sur des hypothèses limitant la validité du calcul d'atteinte d'un EL, les valeurs trouvées auront donc un caractère conventionnel qui ne pourra être comparé qu'à des valeurs admissibles choisies en conséquence, les  $P_f$  réels paraissent alors inaccessibles mais le calcul permet d'en connaître l'ordre de grandeur, en particulier si l'on dispose de moyens de contrôle suffisants pour valider les hypothèses de calcul.

### III. Indice de fiabilité de Hasofer-lind :

L'indice de fiabilité de **Hasofer-lind** permet de calculer directement la probabilité de défaillance lorsque toutes les variables ont des distributions normales et que la surface d'état limite est linéaire. Si ce n'est pas le cas on estime la probabilité de défaillance

$$P_f = \Phi(-\beta_{hl})$$

( $\Phi$  est la fonction de répartition de la variable normale réduite. Les valeurs  $\Phi(x)$  peuvent être obtenues sous forme tabulaire).

En effectuant une approximation linéaire de la surface d'état limite (méthode FORM). Mais comme en général les variables physiques ne sont pas normales, l'expression de  $\beta_{hl}$  dans le cas où elles représente une mesure de la marge par rapport à la position de la surface d'état limite ( $M=0$ ).

Compte tenu de ce qui précède, dans l'espace normal, on définit l'indice de fiabilité **Hasofer-lind**, comme la plus petite distance entre l'origine et la surface d'état limite. Le point  $u^*$  le plus proche de l'origine situé sur cette surface est, comme on la vu, le point de défaillance le plus probable, appelé aussi le point de conception. Pour déterminer la position de  $u^*$ , il faut donc résoudre un problème de minimisation de distance, avec pour condition supplémentaire une contrainte d'égalité traduisant l'appartenance de ce point à la surface d'état limite.

#### **IV. Les méthodes de résolutions numériques :**

Dans toute étude de fiabilité, et en particulier pour la fiabilité des ouvrages de soutènement, l'étape d'analyse numérique intervient juste après le travail de modélisation mécanique et probabilité du problème et de sa résolution mathématique. Ces études ont permis de formuler l'expression de la probabilité de défaillance  $P_f$  qu'il s'agit alors d'évaluer numériquement. C'est un des points qui se révèle souvent le plus délicat dans la réalisation d'un code, et cette évaluation doit faire face à nombreuses difficultés opératoires qui ne sont pas sans imposer certaines contraintes. Les méthodes numériques de résolution doivent permettre en effet de prendre en compte un nombre important de facteurs d'influence, avec des temps de calcul modérés pour estimer des probabilités souvent très faible ( $10^{-6}$  est une valeur courante) avec une bonne précision. Il est essentiel de pouvoir réaliser également sans trop de difficultés des études de sensibilité sur les paramètres clés du modèle.

#### **V. Les différentes méthodes d'analyse de la sécurité des structures.**

On distingue essentiellement 3 niveaux de calcul pour la détermination de la sécurité d'une structure. Dans tous les cas, la démarche utilisée sera la suivante

- 1 - Définition des variables aléatoires (VA) de base.
- 2 - Modélisation mécanique du problème d'atteinte de l'Etat Limite.
- 3 - Définition du domaine de sécurité et du domaine de ruine par traitement mathématique des deux points précédents.
- 4) Approche probabiliste du problème par l'une des 3 méthodes que nous allons décrire, dans tous les cas il s'agira du traitement statistique du problème (1).

Ces 3 méthodes d'analyse de la sécurité sont notées

- **Méthode de Niveau III** intégration directe de l'équation (1) sur le domaine.
- **Méthode de Niveau II** vérification basée sur le calcul en un nombre

finie de point de la frontière du domaine et souvent en un seul point. Cette méthode ne nécessite pas d'intégration contrairement à la méthode de niveau

**III**, le plus souvent le problème se ramène à la détermination d'un indice de fiabilité, qui permet d'accéder à  $P_f$ , cette méthode nécessite la prise en compte d'approximations qui conduit à la définition d'un intervalle sur les valeurs probables de  $P_f$ . Dans certains cas simples,  $P_f$  peut correspondre comme nous le verrons, au  $P_f$  exact, le paramètre d'exactitude du résultat étant la convexité du domaine de sécurité.

**Méthode au niveau I** l'aspect probabiliste des variables de base est pris en compte par l'introduction de coefficients de sécurité partiels (pouvant être déduit d'une méthode de niveau II). Le problème est que ces coefficients (actuellement pris en compte dans les codes de calcul) restent constants pour des plages de variation importantes des VA, nous aurons l'occasion d'explicitier ce problème lors de la présentation détaillée des méthodes de niveau II.

Il apparaît donc que la méthode de niveau I (ou semi probabiliste) ne permet pas de connaître précisément le degré de sécurité, c'est pourquoi les méthodes de niveau II, selon (3), peuvent être utilisées pour des problèmes d'importance relative et pour affiner les coefficients de la méthode de niveau I.

Quant à la méthode de niveau III, elle peut être utilisée pour tester la validité des approximations faites par les utilisateurs des méthodes de niveaux inférieurs ou pour mesurer l'influence de certains paramètres.

## VI. Les méthodes de Niveau III.

### I. Principe :

Après avoir défini le problème mécanique de façon déterministe on est en mesure de définir le domaine de sécurité, ce dernier étant directement issu de la notion d'Etat Limite.

Si  $X$  représente l'ensemble des VA de base on aura :

$Z = g(X)$  fonction d'Etat Limite, le domaine de sécurité est alors

$$\frac{D_n}{Z} > 0$$

Calcul de  $P_f$  :

$$\text{On a } F_X(X_1, \dots, X_n) dX_1, \dots, dX_n = P \begin{cases} X_1 \leq X_1 < X_1 + dX_1 \\ \dots \\ X_n \leq X_n < X_n + dX_n \end{cases}$$

$f_x$  Densité de probabilité de  $X$

On aura donc

$$P_f = \int_{D_n} F_X(X_1, \dots, X_n) dX_1, \dots, dX_n \dots \dots \dots (2)$$

Où  $D_n$  est le domaine de ruine.

**Exemple :** Prenons un cas simple où toutes les VA de base suivent une loi normale

On note K matrice covariance = 
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Où  $\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x}_i)(y_j - \bar{y}_j) f_{x,y_j}(x_i, y_j) dx_i y_j$

Et  $\sigma_{ii} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x}_i)^2 f_{x_i}(x_i) dx_i$

La densité de probabilité  $F_X(X_1, \dots, X_n)$  s'écrira alors selon (3) (11) (12).

$$f_x(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{\left[ -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j (k^{-1})_{ij} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \right]}}{\sqrt{(2\pi)^n |K|}}$$

Si les VA sont indépendantes K sera diagonale et il restera :

$$f_x(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{\left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]}}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1 \dots \sigma_n}}$$

Ce qui revient à écrire :

$$f_x(x_1, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{x_n}(x_n)$$

**Remarque :** si les VA sont dépendantes (ou corrélées, il suffit de chercher un repère où K est diagonale pour retrouver cette expression.

⇒ Le problème se résume alors à

- (1) Choix des VA de base.
- (2) Définition de la frontière du domaine de sécurité  
ou fonction d'Etat Limite {problème déterministe en soi}
- (3) Calcul de  $P_f = \int_{D_n} f_X(X) dX$ .

Mais généralement le nombre de VA de base est important et une intégration directe est impossible. Il est alors nécessaire de réduire le domaine d'intégration pour cela on opère comme dans un domaine bidimensionnel en faisant la distinction suivante :

$$\begin{aligned} X(X_1, \dots, X_n) &\rightarrow R(X_1, \dots, X_a) \rightarrow f_{X_a}(X_a) \\ &\rightarrow S(X_{a+1}, \dots, X_n) \rightarrow f_{X_p}(X_p) \end{aligned}$$

Pour  $X_a$  donné l'intersection  $X_a = C^{s^{te}}$  avec le domaine donne un sous domaine de  $D_a(X_p)$ .

Pratiquement

Les VA de base peuvent être classées suivant trois familles principales selon l'équation(5) :

- (1) → les actions
- (2) → les résistances des matériaux
- (3) → les dimensions géométriques.

On définit alors l'Etat Limite dans le domaine de ces variables de sortie R et S avec : S → les actions et les dimensions géométriques.

R → les résistances des matériaux et les dimensions géométriques.

La fonction d'Etat Limite prend alors la forme

$$g_r(X_1, \dots, X_m) - g_s(X_{m+1}, \dots, X_n) = 0$$

Si  $Z = r - s$  on aura  $D_n$  où  $Z \leq 0$  domaine de ruine

$D_n$  ou  $Z > 0$  domaine de sécurité.

Remarque :  $Z = (r - s)^{2n+1}$

Où  $Z = \frac{r}{s} - 1$

Où  $Z = \ln \frac{r}{s}$  pouvant également définir les deux domaines.

Les données statistiques :

On suppose connues les lois suivies par chacune des VA de base, on se ramène alors au VA de sortie R et S par des théories analytiques donnant

$f_x(x_1, \dots, x_n)$  en fonction des  $f_x(x_i)$  et de K comme nous l'avons fait précédemment pour des VA normales, ou bien On utilise des méthodes de simulation telle que celle de Monte Carlo pour construire  $f_x(x_1, \dots, x_n)$  de façon numérique, nous reviendrons sur ce problème.

**II.1. Le Problème Fondamental :**

Une fois  $f_r(r)$  et  $f_s(s)$  déterminés, on est dans un espace d'intégration réduit où l'on a :

Si R et S sont stochastiquement indépendantes.

On peut alors écrire :

$$P_f = \int_0^{+\infty} \left( \int_{s=r}^{+\infty} f_s(s) ds \right) f_r(r) dr$$

$$P_f = \int_0^{+\infty} (1 - f_s(r)) f_r(r) dr \dots \dots \dots (3)$$

Ou encore :

$$P_f = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^s f_r(r) dr \right) f_s(s) ds$$

$$P_f = \int_0^{+\infty} F_r(s) f_s(s) ds \dots\dots\dots(4)$$

Où  $F$  fonction de répartition définie par :

$F = \int_{-\infty}^t f(t) dt$  ,  $f(t)$  étant la densité de probabilité. (Il conviendra de prendre certaines précautions si  $R$  et  $S$  sont susceptibles de changer de signe).

**Exemple** : lors d'une distribution normale pour  $r$  et  $s$ .

$$R \in N(\bar{R}, \sigma_r) \quad Z = R - S$$

$$S \in N(\bar{S}, \sigma_s) \quad \sigma_z = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}$$

$$\Rightarrow P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_0^{+\infty} e^{-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z-\bar{z}}{\sigma_z}\right)^2\right]} dz$$

Soit en travaillant en **VACR** (variable aléatoire centrée réduite)

$$u = \frac{z - \bar{z}}{\sigma_z}$$

$$\Rightarrow P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{u=\frac{-\bar{z}}{\sigma_z}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Et on notant  $\beta = \frac{+\bar{z}}{\sigma_z}$  il vient  $P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{u=\beta} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \Phi(-\beta)$

$$\Rightarrow P_f = \Phi(-\beta) \dots\dots\dots(5)$$

On appelle alors  $\beta$  indice de fiabilité de la structure

en effet  $\beta = \frac{\bar{r} - \bar{s}}{\sigma_z} \dots\dots\dots(6)$

Pratiquement si nous reprenons les domaines de variation de

$P_f$  définies par l'équation (3) ou l'équation (6) on trouve, en supposant que  $Z \in N$  :

EL	$P_f = \Phi(-\beta)$	$\beta = \Phi^{-1}(P_f)$
ELS	$10^{-1}$	1,28
	$10^{-3}$	3,09
ELU	$10^{-4}$	3,71
	$10^{-7}$	5,20

## II.2. Interprétation géométrique de $\beta$

$$\beta = \frac{\bar{z}}{\sigma_z} = \frac{\bar{r} - \bar{s}}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}}$$

Si on travaille en VACR on aura :

$$\xi(r) = \frac{r - \bar{r}}{\sigma_r} \in N(0,1)$$

$$\xi(s) = \frac{s - \bar{s}}{\sigma_s} \in N(0,1)$$

$\Rightarrow \beta$  Est la distance entre l'origine et la fonction d'Etat Limite dans un repère de VACR.

Cette distance permet d'accéder directement à  $P_f$  pour  $\Phi(-\beta)$ , ceci dans le cas où l'on travaille en variables gaussiennes.

Facteur de sécurité central

$$C' \text{ est : } \gamma_0 = \frac{\bar{r}}{\bar{s}} \dots \dots \dots (7)$$

$$\text{Si on note } C_r = \frac{\sigma_r}{\bar{r}} \text{ et } C_s = \frac{\sigma_s}{\bar{s}} \text{ (coefficient de variation)}$$

On aura : Si R et S ∈ N

$$\gamma_0 = \frac{1 + \sqrt{\beta^2(C_s^2 + C_r^2) - \beta^4 C_s^2 C_r^2}}{1 - \beta^2 C_r^2} \dots \dots \dots (8)$$

Or  $\beta = \phi^{-1}(P_f)$  on peut ainsi

Calculer  $\gamma_0$  pour  $P_f$  donnée ⇔ dimensionnement.

Mais en pratique r et s sont rarement toutes deux gaussiennes comme nous le verrons lors de l'étude des VA de base. On trouve notamment des distributions lognormales ou extrêmes.

(En général les résistances de matériaux suivraient des lois lognormales (selon (3) et (6)), et les actions variables des lois de type E1):

Dans le cas où R et S suivraient toutes les deux des lois lognormales

On aurait :  $\gamma_0 \# e^{\beta\sqrt{C_r^2 + C_s^2}} \dots \dots \dots (9)$

Ceci dans le cas où  $C_r$  et  $C_s \ll 1$ .

Dans le cas générale où R et S suivent des lois quelconques on a :

$$P_f = \int \int f_r(r) f_s(s) dr ds$$

$$= \int_0^{+\infty} f_r(r) [1 - f_s(r)] dr$$

Si les deux variables R et S sont indépendante on a toujours  $\gamma_0 = \frac{\bar{r}}{\bar{s}}$  mais  $P_f$  n'est intégrable que numériquement.

$P_f = P_f(\gamma_0)$  Ne peut être construit que numériquement.

Dans (3) l'auteur nous fait remarque que si on trace  $P_f$  pour divers types de lois suivies pour R et S ont a un

$P_f$  Max quand :

Les matériaux appartiennent à LN.

Les actions appartiennent à E1.

**Remarque :** on définit, outre le coefficient de sécurité central  $\gamma_0 = \frac{\bar{r}}{\bar{s}}$

Les coefficients de sécurité caractéristique  $\gamma_k = \frac{r_{0.05}}{s_{0.95}}$

Et de conception  $\gamma^* = \frac{r_{0.05}}{s_{0.95}}$ .

0.05 représente la fraction de  $r$  et défini  $r$  par

$$\int_{-\infty}^r f_r(r) dr = 0.05 \Leftrightarrow P(r < r_{0.05}) = 0.05$$

On retiendra donc que la méthode de Niveau III permet d'accéder à la valeur exacte de  $P_f$  conventionnel et permet d'étudier par des procédés numériques tous les paramètres de sécurité d'un problème de structure.

Elles comprennent aussi celles qui demandent la connaissance de la densité conjointe de tous les paramètres considérés comme variables aléatoires. On attend donc à ce stade une évaluation exacte du niveau de défaillance. Le seul exemple de calcul que l'on puisse donner actuellement est je pense celui de l'évaluation par la méthode de Monte Carlo. C'est également l'objectif des méthodes conditionnelles basées sur FORM. Mais à condition d'être capable d'évaluer le point de conception  $u^*$ .

### III. Méthode de Monte Carlo

Il apparaît donc que  $P_f$  est issu d'un calcul intégral faisant intervenir des expressions de densité de probabilité pratiquement incalculable manuellement dès que le nombre de variables de base devient important. Il faut donc procéder numériquement, pour cela il existe une méthode qui permet d'accéder à une approche satisfaisante des quantités à sommer pour calculer des intégrales : c'est la méthode « directe » de Monte Carlo, cette méthode consiste à simuler de façon probabiliste une image du problème réel.

Le principe de la méthode est le suivant :

Si  $F_{X_i}$  fonction de répartition de la variable aléatoire  $X_i$ , il s'agit de reconstituer fictivement un échantillon de VA  $x_i$ , telle que  $F_{x_i}(x_i) = F_{X_i}(X_i)$

Pour cela on tire au hasard des nombres  $t_i^K$  entre  $[0,1]$  on écrit que  $t_i^K = F_{x_i}(x_i^K) = P(X_i \leq x_i^K)$

$x_i^K$ ,  $K^{\text{ème}}$  réalisation de  $X_i$  donnée alors par  $x_i^K = F_{x_i}^{-1}(t_i^K)$

En effet si  $t_i^K$   $K^{\text{ème}}$  réalisation de  $T_i$  distribuée sur  $(0,1)$  en aura :

$$\begin{aligned} P(T_i \leq t_i^K) &= P(F_{x_i}(x_i) \leq t_i^K) \\ \Leftrightarrow P(T_i \leq t_i^K) &= P(X_i \leq F_{x_i}^{-1}(t_i^K)) \\ \Leftrightarrow P(T_i \leq t_i^K) &= P(X_i \leq x_i^K) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Il faut et il suffit que  $P(T_i \leq t_i^K) = t_i^K$

Qui est la définition d'une VA uniformément répartie sur  $[0,1]$ .

Si  $Z = g(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$ , il suffira de simuler un vecteur  $X$  de  $K^{\text{ème}}$  réalisation de  $X^K$  et de composante  $x_1^K = F_{x_1}^{-1}(t_1^K), x_2^K = F_{x_2}^{-1}(t_2^K) \dots$  pour calculer la  $K^{\text{ème}}$  réalisation de  $Z$  notée  $Z^K$  on classera ensuite les réalisations observées sur un histogramme.

On montre alors que l'allure de cet histogramme tend vers  $f$  théorique si le nombre d'observation  $\rightarrow \infty$ , mais en pratique les équations (8) (9) (10) et (2) ont observé des stabilisations des résultats pour des nombres de simulations limitées. Le calcul de  $P_f$  peut alors se faire de deux façons :

Suivant la méthode adoptée par Lemaire et Fogli qui consiste à ne simuler que la variable de sortie  $E$  et à approcher par une courbe de lissage théorique la répartition issue de l'histogramme des réalisations de  $E$  on calcul alors  $P_f$ , intégration sur  $]-\infty, 0[$  de la fonction densité de probabilité ajustée par test du  $\chi^2$ .

Remarque :

L'ajustement se fait sur la totalité du domaine de variation de  $E$  alors que le résultat  $P_f$  ne dépend que des valeurs négatives de  $f_e(e)$ .

Lorsque l'histogramme des réalisations de  $E$  tend vers une loi

normale, on a  $P_f = \int_{-\infty}^0 f_e(e) de$  qui s'écrit  $P_f = \int_{-\infty}^{\frac{-\bar{e}}{\sigma_e}} e_r f(t) dt$

Soit encore  $P_f = \phi(-\beta)$  il est donc également possible de parler de sécurité en terme d'indice de fiabilité  $\beta$  avec  $\beta = \frac{\bar{e}}{\sigma_e}$ , on constate que l'on peut donner à ce  $\beta$  la même signification que dans les méthodes de niveau II. On peut également définir un intervalle de confiance sur  $\beta$  et  $P_f$  à partir de l'intervalle de confiance sur la valeur moyenne  $e$ .

**I. Les méthodes de Niveau II.**

**I.1. Généralités :**

Comme nous venons de le voir la méthode de niveau III nécessite une intégration multidimensionnelle généralement compliquée, sauf dans le cas où l'on peut se ramener à un espace réduit (R et S) ou dans le cas où les fonctions sont analytiquement simples. On a donc cherché à simplifier la procédure de calcul ce qui a aboutit aux méthodes de niveau II qui permettent de faire selon (3) de bonnes approximations sur  $P_f$  dans la mesure où, comme nous allons le voir, la géométrie du domaine de sécurité n'est pas trop compliquée.

Le principe de base est de faire une approximation sur la forme de la frontière du domaine de sécurité au voisinage du point de distance minimale à l'origine dans un repère de VACR Gaussiennes, ceci par analogie avec la définition du coefficient  $\beta$  défini lors de la description de la méthode de niveau III.

**Exemple**

On opère dans l'espace réduit des VA de sortie R et S on a

$Z = R - S$ . Critère de ruine :

$Z > 0$	Sécurité
$Z = 0$	EL
$Z < 0$	Ruine

Avec :

$$r = g_r(x_1, \dots, x_m) \# g_r(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial g_r}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}} (x_i - \bar{x}_i)$$

$$\text{Et } \Delta = g_s(x_{m+1}, \dots, x_n) \# g_s(\bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g_s}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}} (x_i - \bar{x}_i) \dots \dots \dots (10)$$

Soit en notant  $a_i = \left( \frac{\partial g_r}{\partial x_i} \right)_x \dots \dots \dots (11)$  il vient :

$$\left. \begin{aligned} &g_r(x_1, \dots, x_m) \# \bar{r} + \sum_{i=1}^m a_i (x_i - \bar{x}_i) \\ &g_s(x_{m+1}, \dots, x_n) \# \bar{s} + \sum_{i=1}^n a_i (x_i - \bar{x}_i) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

et pour des VA indépendante (VAI) il vient :

$$\sigma_r = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

on a alors :  $z = \bar{r} - \bar{s}$   
 et  $\sigma_z = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}$

et la mesure de l'hyperplan:

$$z = \left( \bar{r} + \sum_{i=1}^n a_i (x_i - \bar{x}_i) \right) - \left( \bar{s} + \sum_{i=1}^n a_i (x_i - \bar{x}_i) \right)$$

à l'origine du repère vaut alors  $\frac{\bar{z}}{\sigma_z}$

que l'on note évidemment  $\beta$  on a établi lors de l'étude de la méthode de niveau II que  $P_f = \Phi(-\beta)$

$$\text{Si } \beta = \frac{\bar{r} - \bar{s}}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}}$$

⇒ dans le cas où toutes les variables aléatoires sont gaussiennes on retrouve bien  $P_f = \Phi(-\beta)$

⇒ si on veut s'assurer qu'un degré de sécurité donné par  $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$  il suffira de s'assurer que  $\frac{\bar{z}}{\sigma_z} \geq \beta$

**1.2. Détermination de la fonction d'état limite :**

Si maintenant on fait la même analyse dans l'espace des VA de base

Si on a :  $z' = g(x_1, \dots, x_n)$  et  $EL/z = 0$  On aura :  $z' = \bar{z} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_f (x_i - \bar{x}_i)$

$$\text{Et } \sigma_{z'} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_f^2 \sigma_{x_i}^2} \quad \text{Soit en posant } a_i = \frac{\left( -\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_X \sigma_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_X^2 \sigma_{x_i}^2}} \dots \dots \dots (13)$$

$$\text{Il vient } \sigma_z = -\sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_X \sigma_{x_i}$$

Et la condition de sécurité à  $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$  s'écrit alors :

$$\frac{z'}{\sigma_z} \geq \beta' \Rightarrow z' - \beta' \sigma_z \geq 0 \Leftrightarrow g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \beta' \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_X \sigma_{x_i} \geq 0 \dots \dots \dots (14)$$

Et dans le cas particulier où g est linéaire on a :

$$g = \sum_{i=1}^n a_i x_i \Rightarrow a_i = \frac{-a_i \sigma_{x_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma_{x_j}^2}} \Rightarrow \sigma_z' = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{x_i}$$

et  $g(\bar{x}) - \beta \sigma_z = 0$

S'écrit alors :  $\sum_{i=1}^n a_i (\bar{x}_i + \beta a_i \sigma_{x_i}) = 0 \dots \dots \dots (15)$

Qui est vrai si g est linéaire, si on applique ce résultat au VA de sortie R et S.

Il vient :

$z = r - s$

$$a_1 = -a_2 = \frac{\sigma_r}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}} = 1$$

$$\Rightarrow a_1(\bar{r} + \beta a_1 \sigma_r) + a_2(\bar{s} + \beta a_2 \sigma_s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{r}(1 + \beta c_r a_r) - \bar{s}(1 + \beta c_s a_s) = 0$$

Soit en posant  $\left. \begin{matrix} \Delta R = 1 + \beta c_r a_r \\ \Delta S = 1 + \beta c_s a_s \end{matrix} \right\} \Rightarrow \bar{r} \Delta R - \bar{s} \Delta S = 0 \dots \dots \dots (16)$

**1.2.1. Détermination de l'indice de fiabilité  $\beta$**

Ce résultat est particulièrement important pour la compréhension de la méthode de niveau I où l'on introduira effectivement des coefficients sur les VA.

Cette méthode consistant à déterminer  $\beta$  ainsi n'est en fait vraie que si la forme de g est linéaire et si toutes les VA sont normales mais en pratique g n'est pas linéaire et les VA ne sont pas toutes gaussiennes, ainsi le fait d'approximer g au point moyen pour déterminer S est source d'erreur.

On voit que pour se rapprocher de la solution vraie il faut faire l'approximation de la surface d'Etat Limite non Pas en X mais en un point le plus près possible de l'origine du repère, d'où la méthode dite de la distance minimale, qui consiste à travailler dans un repère en VANCR

$$U_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$$

Où l'on déterminera  $\beta$  distance minimale par résolution de

$$\begin{cases} \beta = \min \sqrt{\sum u_i^2} \\ g(u_1, \dots, u_n) = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(17)$$

Selon (3) :

Dans le cas où la frontière est linéaire on retrouve bien:

$$\beta = \frac{\bar{z}}{\sigma_z} = \frac{g(\bar{x})}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2}} \dots\dots\dots(18)$$

Dans le cas où la frontière n'est pas linéaire :

$$\beta = \min OP^*, \begin{cases} \beta = \min \sqrt{\sum u_i^2} \\ g(u_1, \dots, u_n) = 0 \end{cases}$$

Avec  $g(0) > 0$  par hypothèse.

Ainsi, si  $g$  est dérivable autour de  $P^*$  on effectue la recherche par itération jusque  $\beta = \beta_{\min}$  par méthode du gradient, en effet :

$$\overline{\text{grad}(g)} \perp \text{à } g(X(P^*)) = 0 \Rightarrow \text{si } u_i = a_i, \beta = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\bar{\sigma}_{x_i}}$$

On prend un point de départ et on calcule

$$\beta_j \text{ tel que } g(a_i \beta_j \sigma_{x_i}, \dots, \dots) = 0$$

En prenant à chaque itération  $j$  comme nouveau point de départ le

Point :

$$X_{j+1}^* = a_{ij} \beta_j \sigma_{x_i} + \bar{x}_i$$

$$\text{avec } a_{ij} = \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{x_i}\right)_{X_{j-1}^*}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{X_{j-1}^*} \sigma_{x_i}\right)^2}}$$

Qui est une composante de  $\frac{\overline{\text{grad}(g)}}{|\overline{\text{grad}(g)}|}$

On définit ainsi un processus itératif qui converge

vers  $\beta = OP^* = \beta \text{ min}$ , on suppose alors que  $P_f = \Phi(-\beta \text{ min})$  par analogie avec les résultats de la méthode de Niveau III.

Les méthodes de niveau II décrites jusqu'à maintenant ne font pas intervenir le type de loi suivie par chacune des VA de base toutefois il est possible d'en tenir compte.

Supposons que toutes les VA de base soient normales :

Comme nous venons de le voir si la surface d'Etat Limite est linéaire on a  $\beta$  distance minimale =  $\frac{z}{\sigma_z}$  et  $P_f = \Phi(-\beta) = P_{\beta} \dots \dots \dots (19)$

Si maintenant la surface d'état limite est une hyper sphère on aura :

$$z = g(u_1, \dots, u_n) = \beta^2 - \sum_{i=1}^n u_i^2 = 0 \text{ et } v^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$$

$$\begin{aligned} \text{Si } u_i \in N(0,1) &\Rightarrow \sum_{i=1}^n u_i^2 \in \chi_n^2 \Leftrightarrow v^2 \in \chi_n^2 \\ &\Rightarrow P(v^2 > \beta^2) = 1 - \chi_n^2(\beta^2) = P_f = P_{\beta} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

***1.2.2. Le calcul de  $\beta$  Dans le cas d'un domaine fermé des méthodes approchées***

Et dans le cas d'un domaine fermé des méthodes approchées prenant en compte la forme de la frontière existante, elles sont basées sur des approches de domaine par secteur hyper sphérique (Méthode de Veneziano (3)).

Dans le domaine concave des études sur les moyens de trouver  $\beta \text{ min}$  par intersection d'hyperplan avec la frontière du domaine ont également été menées (8).

En fait des problèmes apparaissent souvent lorsque les VA de base ne sont pas toutes normales, en effet, on est obligé pour trouver  $\beta$  de travailler en VACR gaussienne et les transformations alors nécessaires distordent l'espace des VA de base à un tel point qu'il devient même difficile de trouver un  $\beta \text{ min}$  absolu selon (8).

Le principe de base pour transformer une loi quelconque en loi normale est d'écrire :

$\Phi(u_i) = F(x_i) \forall$  la loi suivie par  $x_i$

Si  $x_i \in EI$  (loi extreme type I)

$$u_i \in N$$

$$\Rightarrow x_i = \left( \frac{-\ln(-\ln(\Phi(u_i))) - 0.5772}{1.2825} \right) \sigma_{x_i} + \bar{x}_i$$

Si  $x_i \in \ln N$  (loi log normale)  $\rightarrow y_i = \ln(x_i) \in N$

$$\Rightarrow \sigma_{y_i} \# C_{x_i}^2$$

$$x_i \# \bar{x}_i e^{C_{x_i}^2} \text{ si } C_{x_i} \text{ petit}$$

À partir de ces principes de base des méthodes ont été développées, prenant en compte le type de loi de distribution de chacune des VA de base.

### 1.2.3. Méthode de Paloheimo Hannus :

Notons celle de **Paloheimo Hannus** qui permet de faire de la conception à coefficient de sécurité fixé a priori, elle est également basée sur un procédé itératif qui consiste en la résolution de

$g(\nu, x_1^*, \dots, x_n^*) = 0$  où  $\nu$  est un paramètre de sécurité à déterminer pour trouver une forme de  $g$  telle que la distance  $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$  fixée a priori

$$\text{soit respectée, il faut pour cela que } \begin{cases} \overline{OP^*} \perp \dot{g}(\nu, X) & (a) \\ \|\overline{OP^*}\| = \beta & (b) \\ g(\overline{OP^*}) = 0 & (c) \end{cases}$$

On itère en calculant  $\nu$ , pour être à la distance  $\beta$  de l'origine, on fait passer par le point de calcul une courbe  $g(\nu_{j+1})$  et on recommence

jusqu'à la vérification de (a) et (b), le processus converge.

La prise en compte de la forme de loi de chaque VA se fait au niveau du calcul de  $\beta$  où l'on prend un  $\beta_i^{\pm}$  équivalent tel que si  $x_i \in F_i$

On ait :

$$F_i(\bar{x}_i + a_i \beta_i^{\pm} \sigma_{x_i}) = P_f$$

Où  $\beta_i^{\pm}$  est donc fonction de la loi prise en compte

Si la loi est normale  $\beta_i^{\pm} = \beta$

Si la loi  $1nN$  on distinguera  $\beta_i^+$  et  $\beta_i^-$  suivant que la variable considérée est défavorable.

$$\Rightarrow \beta_i^- = \frac{1 - e^{(\phi^{-1}(P_f)\sqrt{K} - K/2)}}{C_{x_i}}$$

Ou favorable :

$$\Rightarrow \beta_i^+ = \frac{e^{(\phi^{-1}(P_f)\sqrt{K} - K/2)}}{C_{x_i}}$$

Si  $x_i \in E1$

$$\beta_i^- = \frac{\sqrt{6}}{\pi} (\ln(-\ln(P_f)) + 0.5772) \text{ pour } x_i \text{ favorable.}$$

$$\beta_i^+ = \frac{-\sqrt{6}}{\pi} (\ln(-\ln(1 - P_f)) + 0.5772) \text{ pour } x_i \text{ défavorable.}$$

Une justification de la méthode est proposée dans (3).

Si on applique cette méthode à un cas simple où l'on a deux VAN reliées par une fonction linéaire on retrouve bien les résultats issus de la méthode de Niveau III, notamment au niveau du facteur de sécurité central  $\gamma_0 = \frac{\bar{r}}{s}$ , on remarquera aussi que si le domaine est linéaire il ne sera pas nécessaire d'itérer le processus car le plan n'a qu'une direction perpendiculaire, il suffit alors de déterminer  $\nu$  pour placer ce plan à la distance  $\beta$  désirée du centre du repère.

#### 1.2.4. Méthode basant sur les abaques :

Une autre méthode, semblable a été proposée dans l'appendice I du CEB n° 116 E, le principe de cette méthode est du même ordre que dans la méthode précédente :

Il s'agit pour  $X(X_1, \dots, X_n)$  VA données

Et  $g(X_1, \dots, X_n)$  équation de la surface d'état limite donnée, en supposant que  $g(X) > 0$  et en connaissant la fonction de répartition  $F_{X_i}(X_i)$  pour chaque composante du vecteur aléatoire de passer en repère central réduit Gaussien pour déterminer  $\beta$  min.

$$\rightarrow u_i \text{ VACR si } y_i \in N(0,1) \dots \dots \dots (21)$$

$$\rightarrow u_i = \frac{y_i - \bar{y}_i}{\sigma_{y_i}} \Rightarrow \text{on se propose de chercher } y_i$$

$$\Rightarrow \text{il faut : } \phi(u_i) = F_{x_i}(x_i)$$

$$\Rightarrow u_i = \phi^{-1}(F_{x_i}(x_i))$$

Que l'on développe au voisinage de  $X_i^*$  donnée  $\in$  à la surface d'état limite.

$$\text{On arrive ainsi à } u_i = \phi^{-1}(F_{x_i}(x_i^*)) + \frac{F_i(x_i^*)(x_i - x_i^*)}{\phi(\phi^{-1}(F_{x_i}))_{x_i^*}}$$

$$\text{Que l'on identifie a : } u_i = \frac{y_i - \bar{y}_i}{\sigma_{y_i}} \dots \dots \dots (22)$$

On a ainsi

$$\bar{y}_i = x_i^* - \frac{\phi^{-1}F(x_i^*)\phi(\phi^{-1}F(x_i^*))}{F(x_i^*)} \dots \dots \dots (23)$$

$$\sigma_{y_i} = \frac{\phi(\phi^{-1}F(x_i^*))}{F(x_i^*)} \dots \dots \dots (24)$$

$$\text{et donc : } u_i = \frac{y_i - \bar{y}_i}{\sigma_{y_i}} \in N(0,1) \dots \dots \dots (25)$$

Ceci n'est vraie qu'au voisinage de  $X_i^*$ .

(Remarque  $x_i \quad x \in \ln(N) \quad x_i = \frac{1}{C_{x_i}} \ln \frac{X_i}{\bar{X}_i}$  directement).

Avec les  $u_i$  ainsi définies l'équation d'Etat Limite devient

$g'(U_1, \dots, U_n) = 0$ , on cherche alors  $\beta$  par itération par une méthode du gradient, en recalculant à chaque itération j les nouvelles valeurs de :

$$u_i = \frac{y_i - \bar{y}_i}{\sigma_{y_i}} \text{ et } y_i, \sigma_{y_i} \text{ de } u_{ij}^*$$

$$\rightarrow a_{ij} = \frac{\left( \frac{\partial g}{\partial u_i} \right)_{U_{j-1}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{\partial g}{\partial u_i} \right)_{U_{j-1}} \sigma_{x_i} \right)^2}}$$

$$\rightarrow u_{ij}^* = a_{ij} \beta_j \Rightarrow \beta_j = f(g^{-1}(u_{1j}^*, \dots, u_{nj}^*))$$

Avec  $a_i$  issu du gradient en  $\beta$  est alors définie à chaque itération par la résolution de :

$$g(a_{1j}, \beta_j, \dots, a_{nj}, \beta_j) = 0$$

On itère jusqu'à convergence suffisante

Remarque : on effectue deux approximations :

Une sur la loi des VA (développement en série)

Et Une sur la forme de la frontière (plan tangent).

## II. Les Méthode de Niveau I

### II.1. Généralités

Les méthodes de niveau I sont à la base de tous les codes de calcul actuels (13), elles consistent en l'association de coefficients de sécurité partiels aux valeurs caractéristiques des variables de base :

**Exemple:**  $x_r k = s_r (1 - k_r c_r k)$  pour les résistances

$$x_s k = x_s (1 + k_s c_s k) \text{ pour les sollicitations.}$$

$x_{sk}$  valeur caractéristique.

L'équation d'état limite prend alors la forme :

$$g\left(\frac{x_1^k}{\gamma_{m_1}}, \frac{x_2^k}{\gamma_{m_2}}, \dots, \frac{x_n^k}{\gamma_{m_n}}\right) \geq 0$$

Cette méthode est adoptée par le CEB.

Or comme nous l'avons vu lors de l'étude des méthodes de niveaux supérieurs, les formulations employées, pouvaient être explicitées sous forme de coefficient de sécurité de la forme :

$$\left. \begin{array}{l} (1 + \beta \quad C_r \quad a_r) \text{ pour } R \\ (1 + \beta \quad C_s \quad a_s) \text{ pour } S \end{array} \right\} \text{ d'après l'équation (16).}$$

Avec  $C_r$  coefficient de variation sur **R** et  $C_s$  sur **S**

$a_r$  et  $a_s$  définis en équation (13), il ne peut donc pas être exclu selon l'équation (3), d'utiliser des méthodes permettant de calculer ces coefficients de sécurité partiels en tant que méthodes usuelles de calcul. Mais cela ne pourra être fait qu'à partir du moment où l'on aura imposé conventionnellement les lois de chacune des VA de base, ainsi que le niveau de sécurité à envisager le calcul étant alors fait comme pour les méthodes de niveau II ne pourrait être que numérique.

En fait, le principal problème des méthodes de niveau I est de fixer les coefficients de sécurité partiels, en effet, les équations (16) et (13) nous montrent que ceux-ci sont en fait fonction de la forme d'état limite et de la valeur prise par les VA de base, la méthode de Niveau I apparaît donc comme un système de discrétisation du problème et du fait ne peut pas permettre d'accéder à un coefficient de sécurité constant,

Actuellement, la méthodologie de choix des facteurs de sécurité est la suivante :

Si la variable est favorable (résistante) on divisera la valeur caractéristique par un coefficients  $>1$  (Nm ou NF) si au contraire la variable est défavorable elle sera majorée. Le principal avantage de cette méthode de pondération est, bien entendu, lié à la mise en oeuvre du système de résolution, mais son principal inconvénient, rappelons-le, est de ne pas permettre d'atteindre une fiabilité constante. Concrètement,

Cette méthode semi probabiliste est applicable sous sa forme explicitée donnée dans (6) et (7) du CEB : elle consiste en une analyse dans l'espace des variables sur R et S où l'on écrit l'équation d'Etat Limite sous la forme

$$g_r(f_c, f_e) - g_s(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0 \dots \dots \dots (26)$$

Il est donc certain que le caractère probabiliste est ainsi pris en compte, de plus la méthode de mise en oeuvre, d'un point de vue logique est intellectuellement satisfaisante, toute fois, aussi affinée que soit le système de pondération, il ne permet pas d'accéder à la connaissance de la probabilité de ruine de l'ouvrage. Il est alors Probable que l'utilisation d'une méthode de niveau II permettrait de calculer ces coefficients en fonction du degré de sécurité désiré, ce qui serait "encore plus satisfaisant".

Exemple :

Déduction des coefficients de sécurité partiels à partir des méthodes de niveau II :

Si  $X(X_1, \dots, X_n)$  Va de base et Etat limite  $g(X_1, \dots, X_n) = 0$

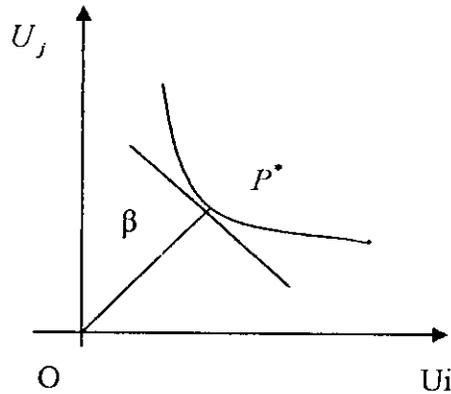
On pose  $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$  en VACR il vient  $g'(U_1, \dots, U_n) = 0$

Ou  $\bar{U} = 0 \in D_n$  domaine de sécurité

Si  $U \in N(0,1) \rightarrow \beta = OP^*$  et  $P_f \leq \Phi(-\beta)$

Avec  $a_i$  coefficient directeur de  $\overline{OP^*} \Leftrightarrow a_i \beta = U_i$

Or :



$$u_i = \frac{x_i^* - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$$

$$\Rightarrow x_i^* = a_i \beta \sigma_{x_i} + \bar{x}_i = \bar{x}_i (a_i \beta c_{x_i})$$

$$\Rightarrow g(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0 \text{ devient}$$

$$g(\bar{x}_1 + a_1 \beta \sigma_{x_1}, \dots, \bar{x}_n + a_n \beta \sigma_{x_n}) = 0$$

$$= g(\bar{x}_1 (1 + a_1 \beta c_{x_1}), \dots, \bar{x}_n (1 + a_n \beta c_{x_n})) = 0$$

Or dans une méthode de niveau I on travaille en écrivant l'équation :

$$g(\bar{x}_1 \Delta_1, \dots, \bar{x}_n \Delta_n) = 0$$

avec si  $x_r$  résis tant  $\frac{x_{kr}}{\gamma_{mr}} = \frac{\bar{x}_r (1 - krCr)}{\gamma_{mr}} = \Delta_r x_r$

$$\Rightarrow \Delta_r = \gamma_{mr}^{-1} (1 - krCr) \text{ et de meme on aura :}$$

$$\Delta_s = \gamma_{fs} (1 + ksCs)$$

$$\Rightarrow \gamma_{mr}^{-1} = (1 + a_r \beta Cxr) / (1 - krCr)$$

$$\gamma_{fs} = (1 + a_s \beta Cxs) / (1 + ksCs)$$

Il apparaît donc que pour un niveau de sécurité donnée les méthodes de niveau I et II sont identiques si on calcule les coefficients de sécurité ainsi....

D'autre part (3) montre qu'il n'est alors pas nécessaire d'affecter un coefficient à chacune des VA de base pour un  $\beta$  donnée, car tous les  $P_f$  de la surface d'Etat Limite sont solution, on pourra donc fixer à priori les coefficients de quelques données de base à 1, pour les dimensions géométriques par exemple, on aboutirait ainsi à une équation d'Etat Limite paramétrée ré

solvable par une méthode telle que celle Paloheimo.

## **II.2. Bilan relatif aux méthodes de calcul.**

On retiendra que la méthode de niveau III donne, théoriquement  $P_f$  exact, ce sera donc la méthode de référence pour les études comparatives.

La méthode de niveau II (ou de la distance minimale) permet de faire un encadrement de  $P_f$ , ou du moins de borner son domaine de variation dans le cas d'une frontière concave (qui sera théoriquement le cas le plus courant). De plus, cette méthode permet théoriquement par un procédé itératif, de faire soit de la conception à  $P_f$  fixé à priori, soit de la vérification ( $\beta > \beta(P_f \text{ max})$ ). Enfin, elle permet d'établir une relation susceptible d'interpréter les coefficients de la méthode de niveau I de façon probabiliste.

La méthode de Niveau I, (ou calcul semi probabiliste) permet de faire de la conception mais ne permet pas d'atteindre un coefficient de sécurité constant. Parfois les coefficients partiels de cette méthode peuvent être interprétés de façon probabiliste et, théoriquement, ils devaient pouvoir être déduits d'une méthode de niveau II, toutefois, un tel passage ne pourrait, pratiquement, être mis en oeuvre qu'à partir du moment où les lois de distribution de chacune des variables de base étaient connues de façon suffisamment sûre.

Il apparaît donc qu'une optimisation des méthodes de calcul a comme condition sine qua non une bonne connaissance, non seulement du modèle mécanique utilisé, mais aussi des VA de base, c'est pourquoi nous allons poursuivre cette étude par une approche de la définition des VA de base.

### **II.3.1 Variable aléatoire de base.**

Comme nous l'avons vu en III, la définition des VA de base est la première étape de l'approche probabiliste du problème.

D'une façon générale, nous avons distingué trois grandes familles de VA de base :

- résistance des matériaux
- Géométrie.
- Sollicitations.

Ces variables, pour être traitées statistiquement de façon efficace doivent être caractérisées par des lois de distribution, ces lois sont issues de campagnes de sondages pour les problèmes, géométriques, ou de sollicitations ou de chargement. Pour les matériaux, ces lois peuvent être

déterminées expérimentalement par sondage, ou encore données pour les fournisseurs de matériaux (aciers normalisés).

Comme nous l'avons signalé en I, le domaine de variation pratique des VA de base ne peut pas être infini : ces lois seront tronquées.

### II.3.2 Initiation à la mise en œuvre du calcul probabiliste :

Problème général

Comme nous l'avons vu, tout problème probabiliste peut se traiter de la façon suivante :

Choix des variables aléatoire de base.

Définition du modèle mécanique.

Définition du domaine de ruine.

Calcul statique de  $P_f$ .

Nous venons de donner un aperçu des théorie du calcul probabiliste (méthode de niveaux III, II et I), de la définition de VA de base (mécanique, géométrique et de chargement), ainsi que de la construction de modèle mécanique déterministe faisant intervenir la notion d'état limite et du fait, permettant de définir la frontière entre le domaine de ruine et le domaine de sécurité. Il nous reste donc à faire le calcul statique de  $P_f$ , pour cela nous allons adopter une méthode de niveau III, en effet cette méthode fournit théoriquement un résultat rigoureux qui permettra ultérieurement de mener des études comparatives vis-à-vis des autres méthodes, d'autre part, comme nous allons le voir, la méthode de niveau III permet de s'affranchir de la forme explicite de l'équation de la frontière du domaine de sécurité, ce qui est un avantage, car comme nous venons de le voir, les modèles mécaniques décrits précédemment ne permettent pas d'accéder à cette frontière autrement que ponctuellement.

Le problème est alors de déterminer la probabilité de ruine conventionnelle  $P_f$  :

Si  $X(X_1, \dots, X_n)$  VA de base et  $g(X)$  équation d'état limite on aura :

$$P_f = \int \dots \int_{D_r} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Avec  $D_r$  domaine de ruine définie par  $g(X) \leq 0$

Il est alors commode de travailler dans l'espace des variables de sortie R et S avec :

$$R = g_r(X_1, \dots, X_m)$$

$$S = g_s(X_{m+1}, \dots, X_n)$$

On définit alors  $E=R-S$  avec

$E > 0 \rightarrow$  sécurité

$E = 0 \rightarrow$  état limite

$E < 0 \rightarrow$  ruine

Et  $P_f = \iint_{D_{E<0}} f_{r,s}(r,s) dr ds$  ou  $f$  densité de probabilité du couple de variables aléatoires  $R$  et  $S$ .

Si ces deux VA sont stochastiquement indépendant : c'est-à-dire si :

$$\sigma_{r,s} = \iint (r - \bar{r})(s - \bar{s}) f_{r,s}(r,s) dr ds = 0$$

$$\Leftrightarrow K = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_s \end{bmatrix} \Leftrightarrow R = \begin{bmatrix} r_r & 0 \\ 0 & s_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il vient  $f_{r,s}(r,s) = f_r(r) f_s(s)$

$$\Rightarrow P_f = \iint_{D_{E<0}} f_r(r) f_s(s) dr ds \dots \dots \dots (27)$$

$$\Leftrightarrow P_f = \int_{E<0} f_e(e) de \dots \dots \dots (28)$$

$$\Rightarrow P_f = \int_0^{+\infty} f_r(r) \left( \int_{s=r}^{+\infty} f_s(s) ds \right) dr = \int_0^{+\infty} f_r(r) [1 - F_s(r)] dr \dots \dots \dots (28)$$

ou bien:  $P_f = \int_0^{+\infty} f_s(s) \left( \int_{r=-\infty}^{r=s} f_r(r) dr \right) ds = \int_0^{+\infty} f_s(s) F_r(r) dr \dots \dots \dots (29)$

**II.4. Conclusion :**

En fait, cette étude superficielle des méthodes de calcul du Niveau II et I permet de mettre en évidence des points essentiels:

- les résultats issus de ces méthodes ne sont exacts que dans le cas de domaine à frontière plane et variables normales.
- Dans tous les autres cas la précision du résultat est très dépendante de la forme de la frontière dans l'espace.

Des variables centrées réduites et rendues gaussiennes, mais comme l'a signalé MEBARKI en équation (8) on arrive vite à des domaines trop distordus pour être exploitables facilement et surtout conduire à des résultats suffisamment précis. Ce problème de mise en

oeuvre ne doit, toutefois, pas condamner ces méthodes qui, bien que peu précises dans certaines configurations sont particulièrement efficaces dans d'autres plus souples, de plus la mise en oeuvre nécessite le passage par des étapes susceptibles de nous fournir des renseignements intéressants pour l'étude des méthodes de niveau I, que nous allons maintenant développer. De plus, il faut noter que toutes les méthodes de niveau II ainsi définies nécessitent la connaissance de l'équation d'état limite  $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ , qui n'est pratiquement, pas toujours accessible comme nous le verrons lors de l'étude de quelques modèles déterministes utilisés dans les calculs probabilistes.

Enfin, nous avons vu que les méthodes de niveau II et I faisaient intervenir beaucoup d'approximations au niveau des calculs, à ces approximations s'ajouteront bien entendu, les incertitudes sur le modèle mécanique et sur la connaissance des VA de base, il ne faudra alors pas oublier le caractère imprécis et conventionnel du résultat ainsi défini...

### Généralités sur les méthodes FORM :

Ces méthodes consistent à calculer l'indice de fiabilité dans l'espace normal réduit. Pour cela, la surface d'état limite est approximée par un hyperplan.

L'application de ces méthodes s'effectue en trois étapes :

- Les variables de bases  $X_i$  sont transformées en variables aléatoires normales centrées et réduites,  $U_i$ , tel que :  $T : X=T[U]$

La fonction d'état limite s'exprime :

$$g(U)=G [T(U)]$$

D'où la probabilité de défaillance :

$$P_f = P[z(U)] \leq 0$$

- L'indice de fiabilité, qui définit la plus petite distance de l'origine à la surface d'état limite dans cette espace  $U$ , est calculé ainsi que la position du point de conception

$U^*$ , grâce à un algorithme d'optimisation qui résout :

$$\begin{cases} \text{Min } d^2 = U^T U \\ \text{sachant } g(u) = 0 \end{cases}$$

- La surface d'état limite  $g(u)=0$  est approximée par un hyper plan tangent au point de conception  $u^*$ . On obtient ensuite une approximation de la probabilité de défaillance par la relation :

$$P_f = \Phi(-\beta) \Leftrightarrow \beta \approx \Phi^{-1}(P_f)$$

$$\text{On a : } u^* = \beta \alpha$$

$$\text{Où } \beta = |u^*|$$

L'approximation du premier ordre de la marge est :

$$M_1 = \beta - \alpha^T U$$

Et la variance de  $M_1$  est :

$$\text{var}[M_1] = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1.$$

#### L. La méthode FORM 1 :

L'algorithme est le suivant :

- 1<sup>ère</sup> étape : définir la fonction d'état limite.
- 2<sup>ème</sup> étape : assumer une valeur initiale pour l'indice de fiabilité  $\beta$ , quand les valeurs de  $\beta$  sont choisit intelligemment, l'algorithme converge dans peu d'étapes, une valeur initiale  $\beta = 3$  est raisonnable.
- 3<sup>ème</sup> étape : assumer la valeur initiale du point de conception  $x_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dans l'absence de d'autre information la valeur initial de  $x_i^*$  peut être assumé par la moyenne de la variable aléatoire.
- 4<sup>ème</sup> étape : calculer la moyenne et l'écart type du point de conception pour l'équivalent d'une distribution normale dans le cas des variables non normales.
- 5<sup>ème</sup> étape : calculer les dérivés partiels pour le point de conception.
- 6<sup>ème</sup> étape : calculer les cosinus directeurs du point de conception.

$$\alpha_{x_i} = \frac{\left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \sigma_{x_i}^N}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{x_i}^N \right)^2}}$$

- 7<sup>ème</sup> étape : calculer la nouvelle valeur de du point  $x_i^*$  trouver :

$$x_i^* = \mu_{x_i}^N - \alpha_i \beta \sigma_{x_i}^N$$

Si nécessaire, répété l'étape 4 à 7 jusqu'à ce que l'estimation de  $\beta$  converge avec une tolérance prédéterminée. Le niveau de tolérance de 0.005 est commun. Dès que les cosinus directeurs convergent, la nouveau point trouver peut être estimer, gardons  $\beta$  un paramètre inconnu, ce calcul additionnel peut prouver la robustesse de l'algorithme. Noter que l'acceptation d'une valeur initiale pour le  $\beta$  dans l'étape 2 est nécessaire seulement pour ce calcul additionnel. Autrement, l'étape 2 peut être annulé.

- 8<sup>ème</sup> étape : calculer une mise à jour de  $\beta$  on utilisons la condition que la fonction d'état limite doit être satisfaite par ce nouveau point trouver.
- 9<sup>ème</sup> étape : répété l'étape 3 à 8 jusqu' à ce que  $\beta$  converge pour un niveau de tolérance de 0.001.

## II. Application sur un mur poids :

Dans notre cas on prend un mur poids dont ces dimensions sont les suivantes :

Les caractéristiques du mur :

$b_0$  : la largeur de la semelle du mur.

$d$  : la hauteur de la semelle du mur

$h_0$  : la hauteur du mur

$e$  : l'épaisseur du mur

Les caractéristiques du sol :

$\gamma_d$  : poids volumique.

$\varphi$  : angle de frottement interne

$\beta$  : angle d'inclinaison de la surface du sol.

$q$  : la charge répartie sur la surface du sol.

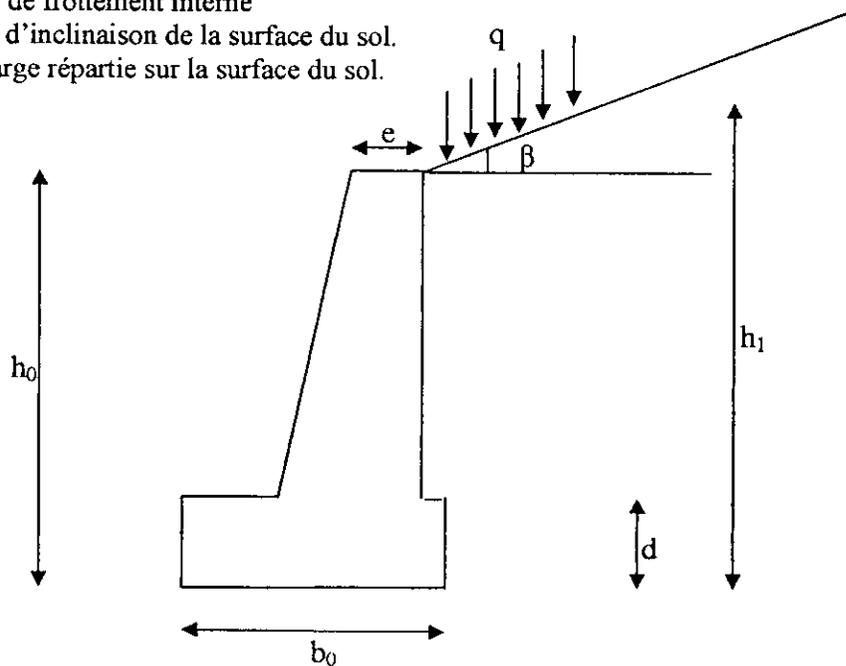


Figure-1-

## III. Approche probabiliste de la stabilité de l'ouvrage par la méthode FORM1

Etude de stabilité du mur vis-à-vis au renversement, glissement et poinçonnement.

La méthode d'approche utilisée dans cette partie est la méthode FORM1.

Tout au long du problème on va considérer que les paramètres de base sont  $\beta$ ,  $\varphi$  et  $\gamma_d$  comme étant des variables aléatoires indépendantes de distribution normale.

$$f_{\beta}(\beta) = \frac{1}{\sigma_{\beta} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta - \mu_{\beta}}{\sigma_{\beta}}\right)^2\right), \quad \sigma_{\beta}, \mu_{\beta} \text{ respectivement l'écart type et la moyenne de } \beta$$

$$f_{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{\sigma_{\varphi} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi - \mu_{\varphi}}{\sigma_{\varphi}}\right)^2\right), \quad \sigma_{\varphi}, \mu_{\varphi} \text{ respectivement l'écart type et la moyenne de } \varphi.$$

### III.1. Détermination de la fonction d'état limite

On choisit la fonction d'état limite pour notre cas, comme étant la différence entre les efforts résistants et les efforts sollicitant.

Donc notre fonction sera de la forme :

$$M=R-S$$

R : la résultante des efforts résistants.

S : la résultante de efforts sollicitant.

### III.2. Calcul du coefficient des pressions des terres $K_a$

Selon l'hypothèse de Rankine vus dans le chapitre précédent

$$K_a = \cos(\delta) \frac{\cos(\delta) - \sqrt{\cos^2(\delta) - \cos^2(\varphi)}}{\cos(\delta) - \sqrt{\cos^2(\delta) - \cos^2(\beta)}}$$

Selon l'hypothèse de Coulomb

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi)}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi)\sin(\varphi + \beta)}{\cos(\beta)}}\right]^2}$$

Résultantes des forces verticales :

$$R_v = P_b + V_s \cdot \gamma_s + q \cdot b_1 / \cos(\beta) + K_a \cdot h_1 \cdot (1/2 \cdot \gamma_s \cdot h_1 + q) \sin(\varphi)$$

$$\text{Avec } V_s = (h_1 - d) \cdot b_1 + 1/2 \cdot b_1 \cdot \text{tg}(\beta)$$

$$\text{Et } P_b = (b_0 \cdot d + 3/2 \cdot e \cdot (h_0 - d))$$

Résultantes des forces horizontales :

$$R_h = K_a \cdot h_1 \cdot (1/2 \cdot \gamma_s \cdot h_1 + q) \cos(\varphi)$$

#### III.2.1 Stabilité au renversement

$$M(\beta, \varphi) = R \cdot S = M_{st} - M_r$$

$M_{st}$  est le moment stabilisant par rapport à A

$$M_{st} = M_{pb} + M_s + M_{Qv} + M_{Rv} + M_q$$

$$M_{pb} = P_b \cdot e_b$$

$$M_s = V_s \cdot \gamma_s \cdot e_s$$

$$M_{Rv} = 1/2 \cdot K_a \cdot \gamma_s \cdot h_1 \cdot \sin(\beta) \cdot h_1 \cdot (b_0 - b_1)$$

$$M_{Qv} = K_a \cdot q \cdot h_1 \cdot \sin(\beta) \cdot (b_0 - b_1)$$

$$M_q = q \cdot b_1 / \cos(\beta) \cdot (b_0 - b_1 / 2)$$

$$e_b = \frac{\frac{b_0}{2} db_0 + (h_0 - d)e(b_0 - b_1 - \frac{e}{2}) + (b_0 - b_1 - \frac{4e}{3})(h_0 - d)e}{b_0 d + \frac{3}{2} e(h_0 - d)}$$

$$e_s = \frac{b_1(h_0 - d)(b_0 - \frac{b_1}{2}) + \frac{1}{2} \tan(\beta) b_1^2 (b_0 - \frac{1}{3} b_1)}{b_1(h_0 - d) + \frac{1}{2} \tan(\beta) b_1^2}$$

Avec respectivement  $M_{pb}$ ,  $M_s$ ,  $M_{Qv}$ ,  $M_{lav}$ ,  $M_q$  les moments par rapport au point A du poids du mur, du poids du sol, de la poussée des terres, de la poussée due à la surcharge et de la surcharge.

$M_r$  est le moment de renversement par rapport à A.

$$M_R = M_{FH} + M_{Qh}$$

$$M_{FH} = \frac{1}{2} K_a \gamma_s h_1^2 \cos(\beta) \left(\frac{h_1}{3}\right)$$

$$M_{Qh} = K_a q h_1 \cos(\beta) \left(\frac{h_1}{2}\right)$$

Donc notre fonction sera :

$$M(\varphi, \beta) = P_b e_b + V_s \gamma_s e_s + \frac{1}{2} K_a \gamma_s h_1^2 \sin(\beta) (b_0 - b_1) + K_a q h_1 \sin(\beta) (b_0 - b_1) + q \frac{b_1}{\cos(\beta)} (b_0 - \frac{b_1}{2})$$

$$= \frac{1}{2} K_a \gamma_s h_1^2 \cos(\beta) \left(\frac{h_1}{3}\right) - K_a q h_1 \cos(\beta) \left(\frac{h_1}{2}\right)$$

### III.2.2 Stabilité au glissement

$$M(\varphi, \beta) = R - S = R_R \tan(\varphi) - R_S$$

$$M(\varphi, \beta) = \left( P_b + V_s \gamma_s + q \frac{b_1}{\cos(\beta)} + K_a h_1 \left( \frac{1}{2} \gamma_s h_1 + q \right) \sin(\varphi) \right) \tan(\varphi) - K_a h_1 \left( \frac{1}{2} \gamma_s h_1 + q \right) \cos(\beta)$$

Où  $R_R$  est la force qui tend à faire glisser le mur sur sa base et  $R_S$  la résistance au glissement mobilisable par le terrain d'assise.

### III.2.3 Stabilité au poinçonnement :

$$M(\varphi, \beta) = R - S = \sigma_{max} - q_u$$

Où

$$\sigma_{max} = \frac{R_y}{b_1} \left( 1 + \frac{6|e_0|}{b_1} \right) \text{ Et représente la contrainte maximale à la base de la semelle.}$$

$$q_u = \frac{1}{2} \gamma_s b' \xi_\alpha N_\gamma \text{ Est la capacité portante d'une fondation continue sous mur soumise à un}$$

chargement excentré et incliné,  $b' = b - 2 \cdot e_0$  étant la largeur réduite de la fondation,  $N_\gamma$  le terme de portance et  $\xi_\alpha$  un coefficient correcteur relatif à l'inclinaison de la charge.

L'exécution des programmes nous donnera  $\beta_{HL}$  (fiab) pour chaque fonction d'état limite suivant la théorie de Rankine et Coulomb, avec une précision de 0.0001, ce dernier convergera après un certain nombre d'itération.

Pour l'exécution du programme nous prenons les caractéristiques du mur et sol comme suit :

La largeur de la semelle du mur  $b_0=2\text{m}$   
La hauteur de la semelle du mur  $d=1\text{m}$   
La hauteur du mur  $h_0=4\text{m}$   
L'épaisseur du mur  $e=0.6\text{m}$   
La largeur de la semelle de fondation sous massif  $b_1=0.15\text{m}$   
Poids volumique du sol  $\gamma_s=18 \text{ KN/m}^3$   
Angle de frottement interne  $\varphi=30^\circ$   
Angle d'inclinaison de la surface du sol  $\beta=20^\circ$ .  
La charge répartie sur la surface du sol  $q=200 \text{ KN/m}^2$ .

Nous allons comparer les différents résultats obtenus selon Rankine et Coulomb puis nous calculerons la probabilité de rupture des trois cas (rupture par glissement, rupture par renversement et rupture par poinçonnement).

$$P_f = 1 - \Phi(\beta_{HL})$$

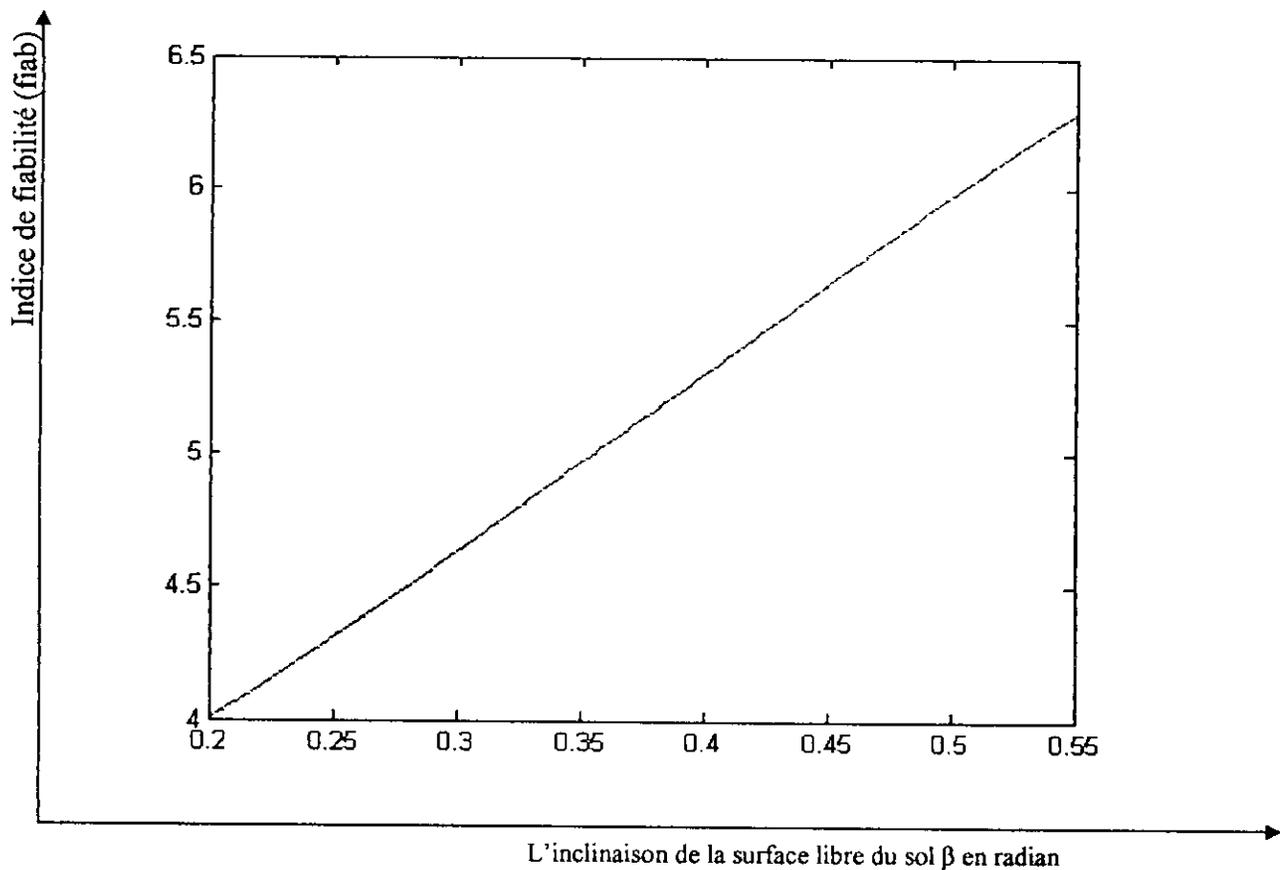
$\Phi$  est la distribution normale standard.

#### IV. Etudes paramétriques

##### VI.1. Stabilité au renversement

1) La variation de l'indice de fiabilité en fonction de la variation de  $\beta$  pour des valeurs relativement élevées de  $\varphi$ .

$\varphi$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$
$\beta$	$\pi/15$	$\pi/12$	$\pi/10$	$\pi/9$	$\pi/8$	$\pi/7$	$\pi/6$
fiab	4.01	4.35	4.70	4.92	5.21	5.58	6.10



Variation de l'indice de fiabilité en fonction de l'inclinaison de la surface libre pour un mur poids par la méthode Form1.

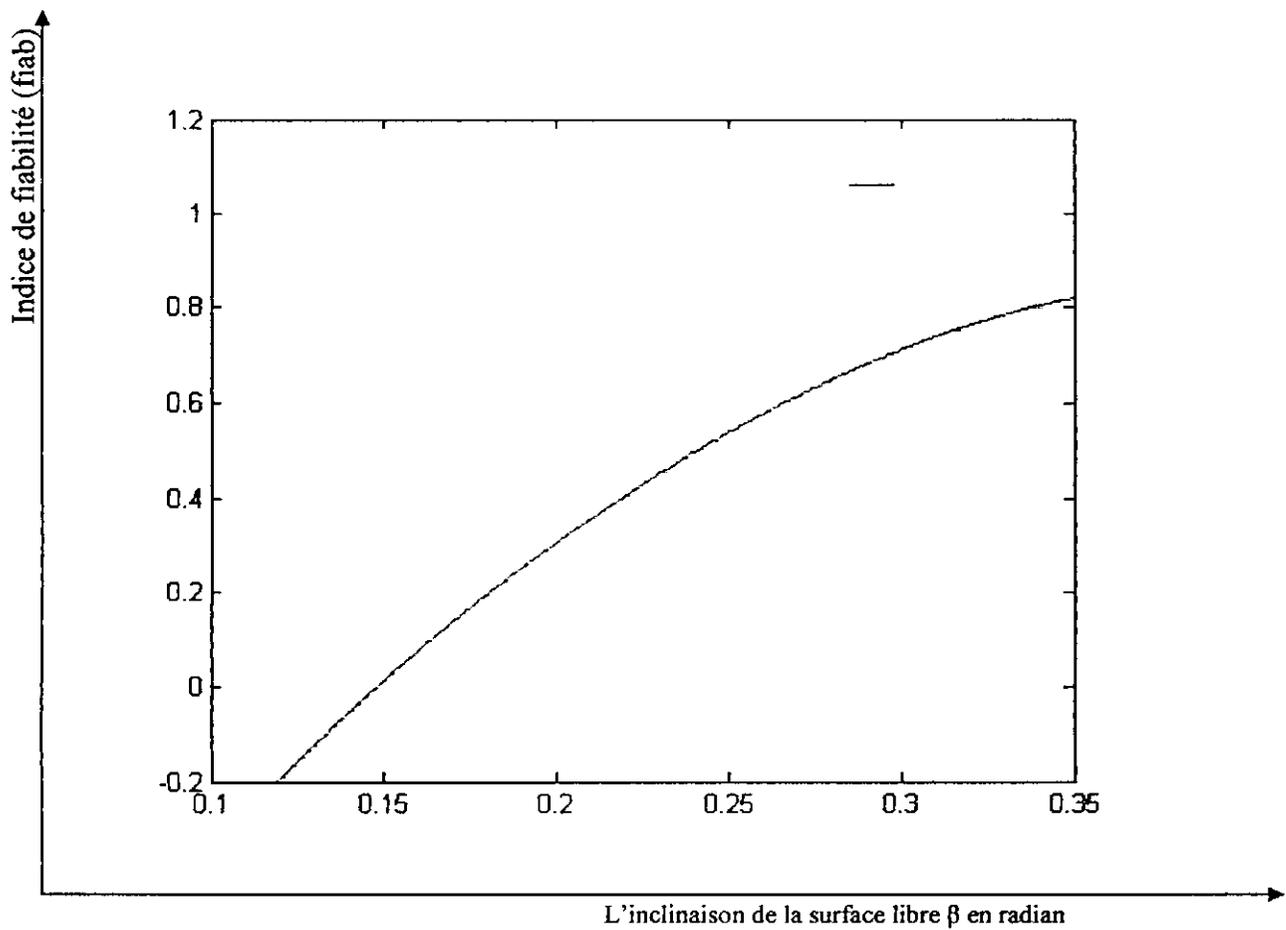
Graphe-1-

La courbe est croissante.

La variation de l'indice de fiabilité est importante

2) La variation de l'indice de fiabilité en fonction de la variation de  $\beta$  pour des valeurs relativement faible de  $\varphi$ .

$\varphi$	$\pi/8$	$\pi/8$	$\pi/8$	$\pi/8$	$\pi/8$	$\pi/8$
$\beta$	$\pi/24$	$\pi/18$	$\pi/15$	$\pi/12$	$\pi/10$	$\pi/9$
fiab	-0.13	0.13	0.33	0.58	0.70	0.83



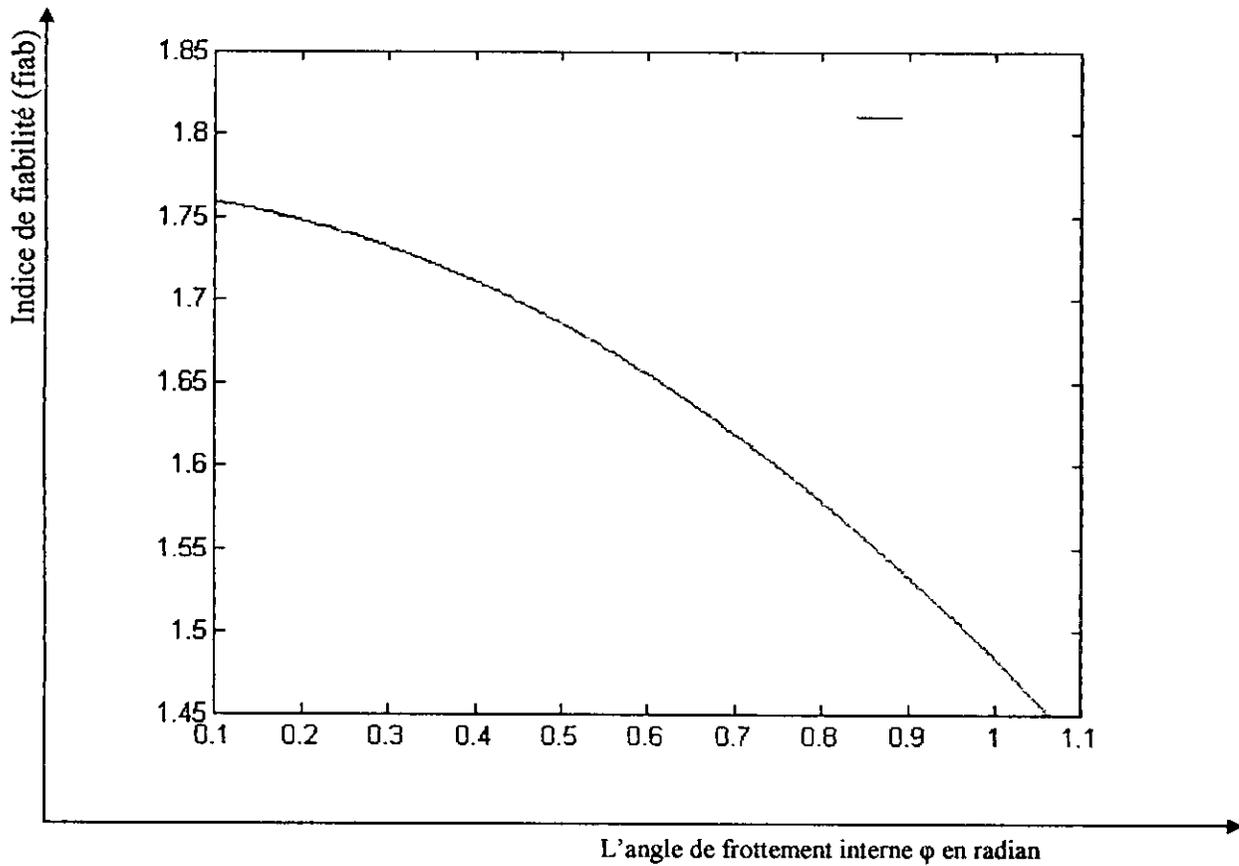
Variation de l'indice de fiabilité en fonction de l'inclinaison de la surface libre pour un mur poids par la méthode Form1  
Graphe-2-

La courbe est croissante.

La variation de l'indice de fiabilité est importante.

3) La variation de l'indice de fiabilité en fonction de la variation de  $\varphi$  pour des valeurs relativement élevées de  $\beta$ .

$\varphi$	$\pi/24$	$\pi/18$	$\pi/15$	$\pi/12$	$\pi/9$	$\pi/8$	$\pi/7$	$\pi/6$	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\beta$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$
fiab	1.76	1.75	1.75	1.74	1.72	1.71	1.70	1.68	1.65	1.59	1.45

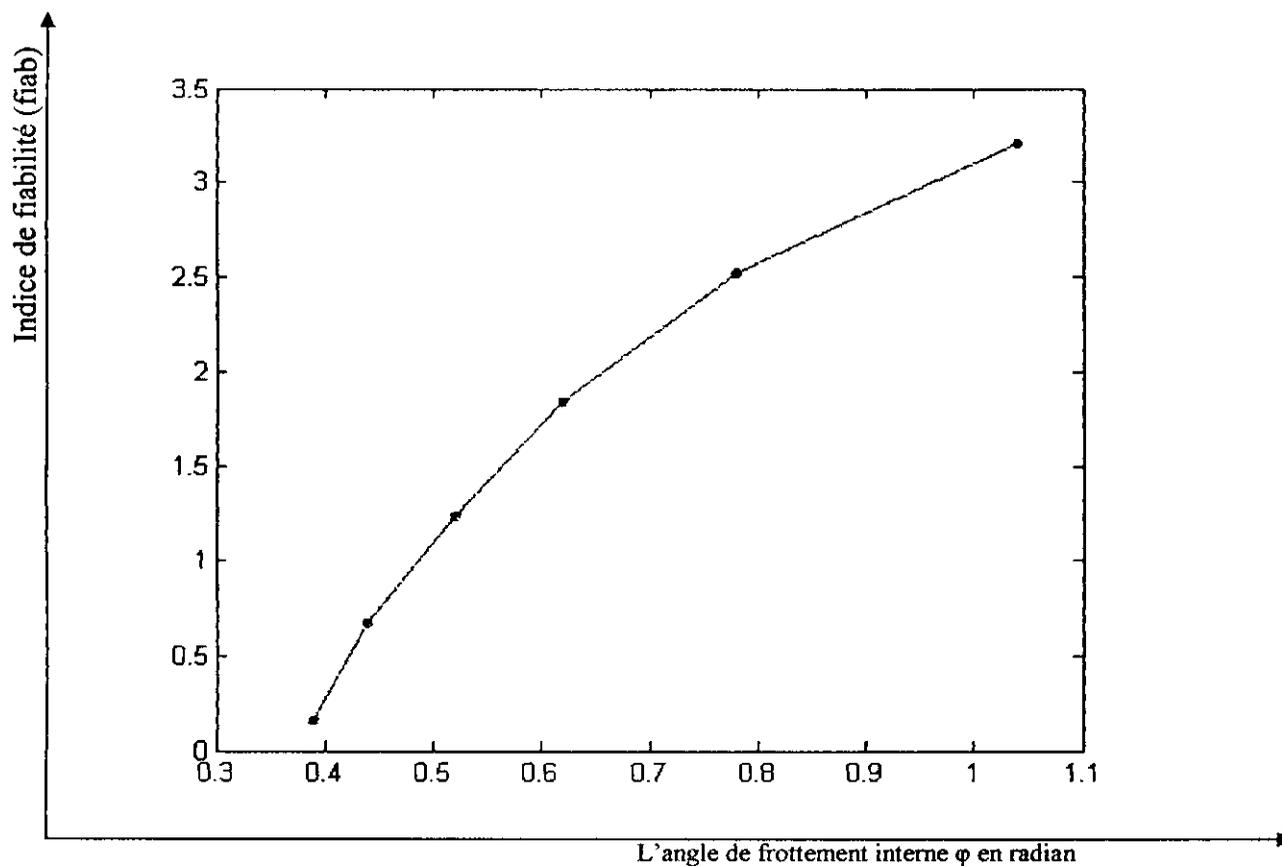


Variation de l'indice de fiabilité en fonction de l'angle de frottement interne pour un mur poids par la méthode Form1  
 Graphe-3-

La courbe est décroissante.  
 La variation de l'indice de fiabilité est faible.

4) La variation de l'indice de fiabilité en fonction de la variation de  $\phi$  pour des valeurs relativement faibles de  $\beta$ .

$\Phi$	$\pi/8$	$\pi/7$	$\pi/6$	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\beta$	$\pi/15$	$\pi/15$	$\pi/15$	$\pi/15$	$\pi/15$	$\pi/15$
fiab	0.16	0.67	1.23	1.85	2.52	3.21



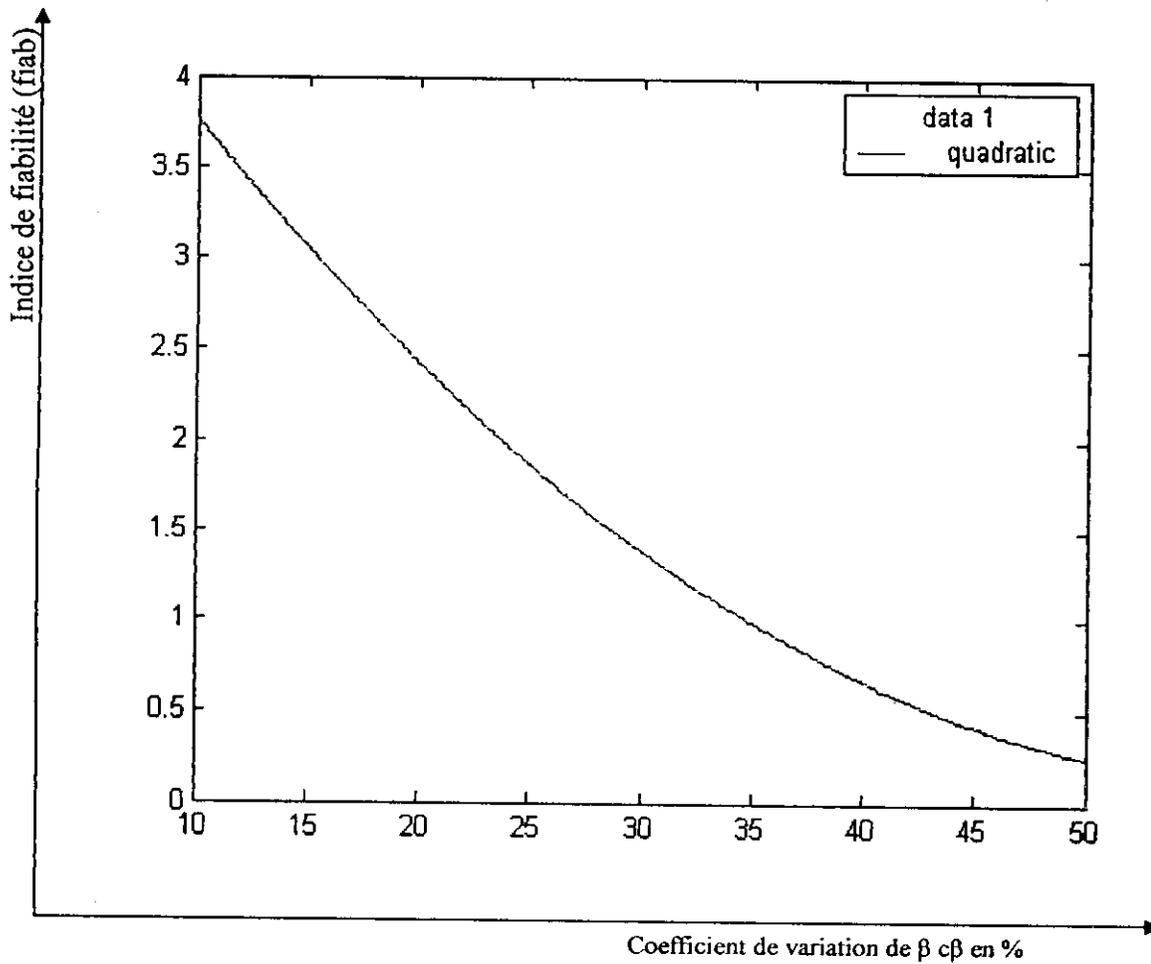
Variation de l'indice de fiabilité en fonction de l'angle de frottement interne pour un mur poids par la méthode Form1  
 Graphe-4-

La courbe est croissante.

La variation de l'indice de fiabilité est importante.

5) La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction du coefficient de variation de  $\beta$ .

$c\beta$	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	45.0	50.0
fiab	3.79	3.20	2.19	1.85	1.36	1.04	0.79	0.43	0.17



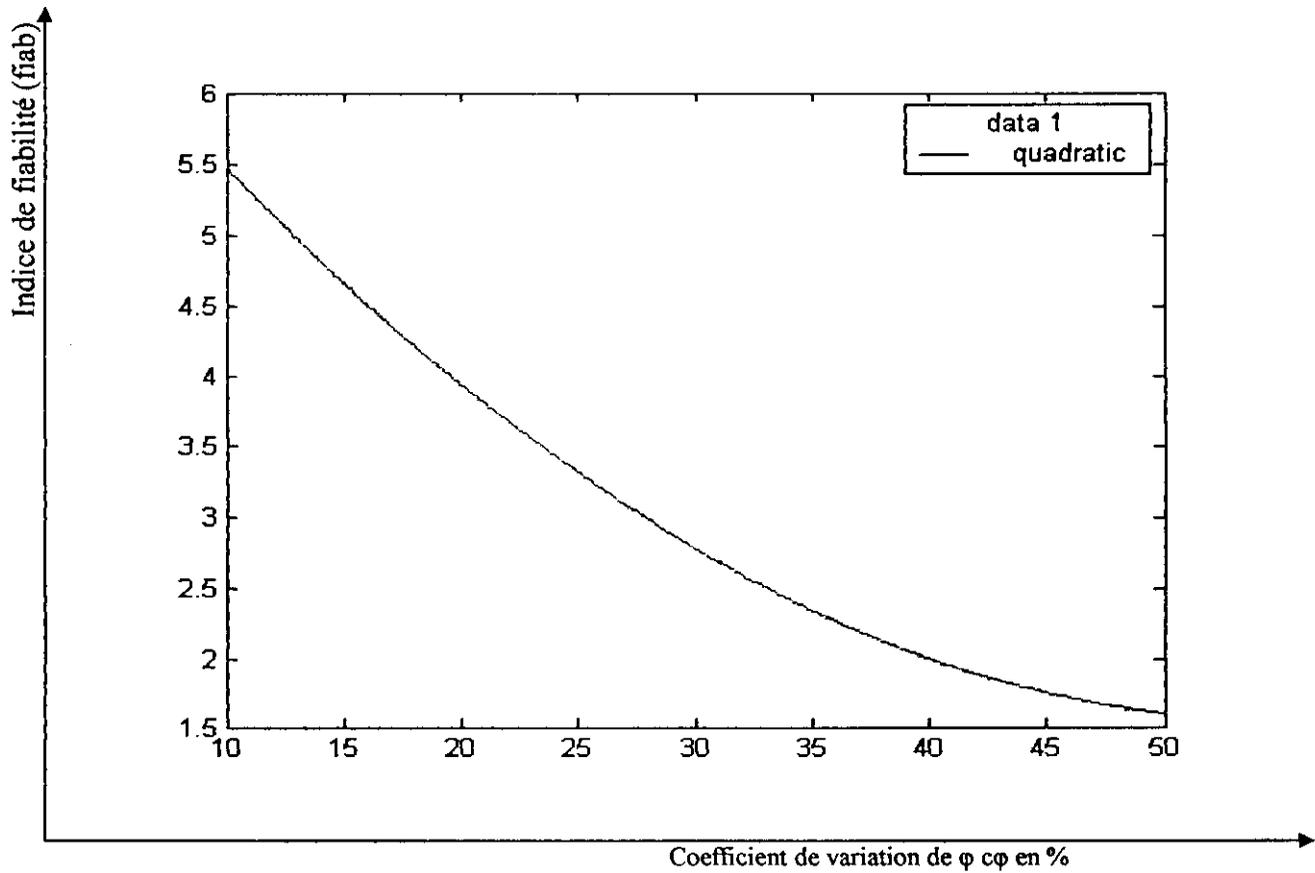
Variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de  $\beta$  pour un mur poids  
Grphe-5-

La courbe est décroissante.

La variation de l'indice de fiabilité est importante.

### 6) La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction du coefficient de variation de $\phi$

$c\phi$	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	45.0	50.0
fiab	5.54	4.45	3.79	3.44	2.95	2.25	1.99	1.77	1.58



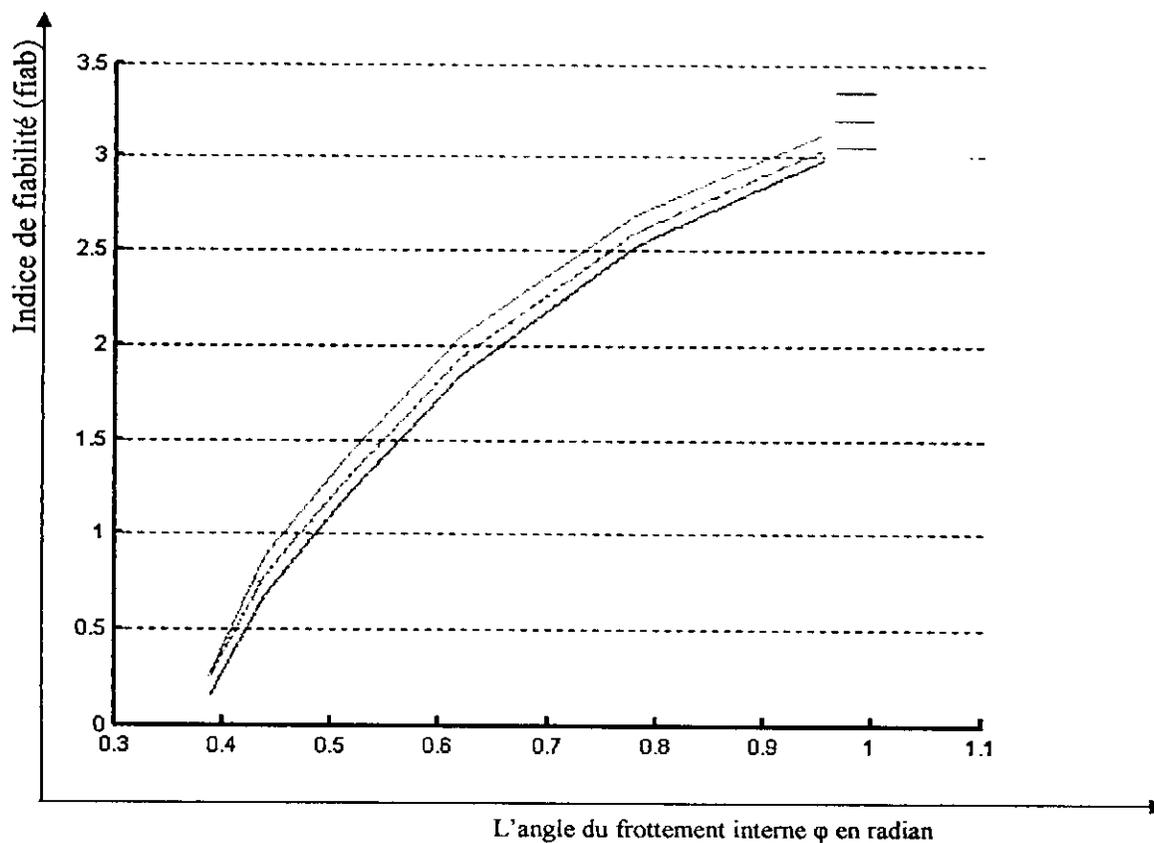
Variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de  $\phi$  pour un mur poids  
Graphe-6-

La courbe est décroissante.

La variation de l'indice de fiabilité est importante.

7) La variation de l'indice de fiabilité en fonction de la variation de  $\phi$ 

$\phi$	0.39	0.44	0.52	0.62	0.78	1.04
fiab (Coulomb)	0.16	0.67	1.23	1.85	2.52	3.21
fiab (Rankine)	0.25	0.77	1.33	1.94	2.59	3.26
fiab (Boussinesq)	0.27	0.88	1.45	2.05	2.69	3.34



Rankine —  
 Coulomb —  
 Boussinesq —

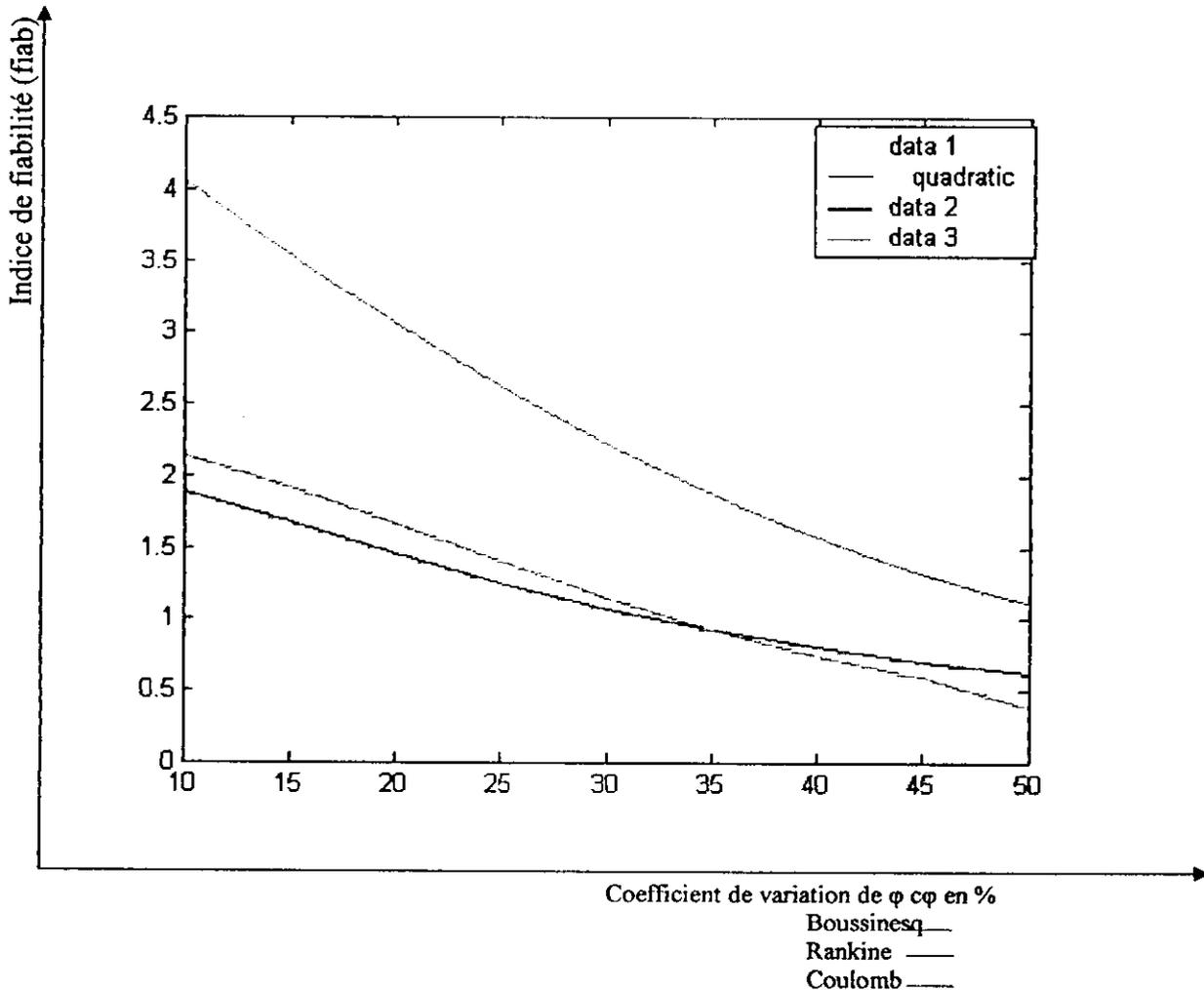
Variation de l'indice de fiabilité en fonction de l'angle de frottement  $\phi$  par les trois méthodes (Coulomb, Boussinesq, Rankine)

Graphe-7-

Les courbes sont croissantes, fortement non linéaire, et presque parallèle.  
 L'indice de fiabilité suivant Rankine est plus grand que celui de Coulomb.  
 L'indice de fiabilité suivant Boussinesq est plus grand que celui de Rankine.  
 La variation de l'indice de fiabilité est importante.

8) La variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de  $\phi$

$c\phi$	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	45.0	50.0
fiab (Boussinesq)	1.89	1.68	1.45	1.24	1.06	0.91	0.79	0.69	0.61
fiab (Rankine)	2.14	1.92	1.67	1.40	1.14	0.91	0.73	0.59	0.37
fiab (Coulomb)	4.06	3.55	3.04	2.61	2.23	1.88	1.54	1.36	1.09



Variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de  $\phi$  par les trois méthodes (Coulomb, Boussinesq, Rankine)  
 Graphe-8-

Les courbes sont décroissantes.

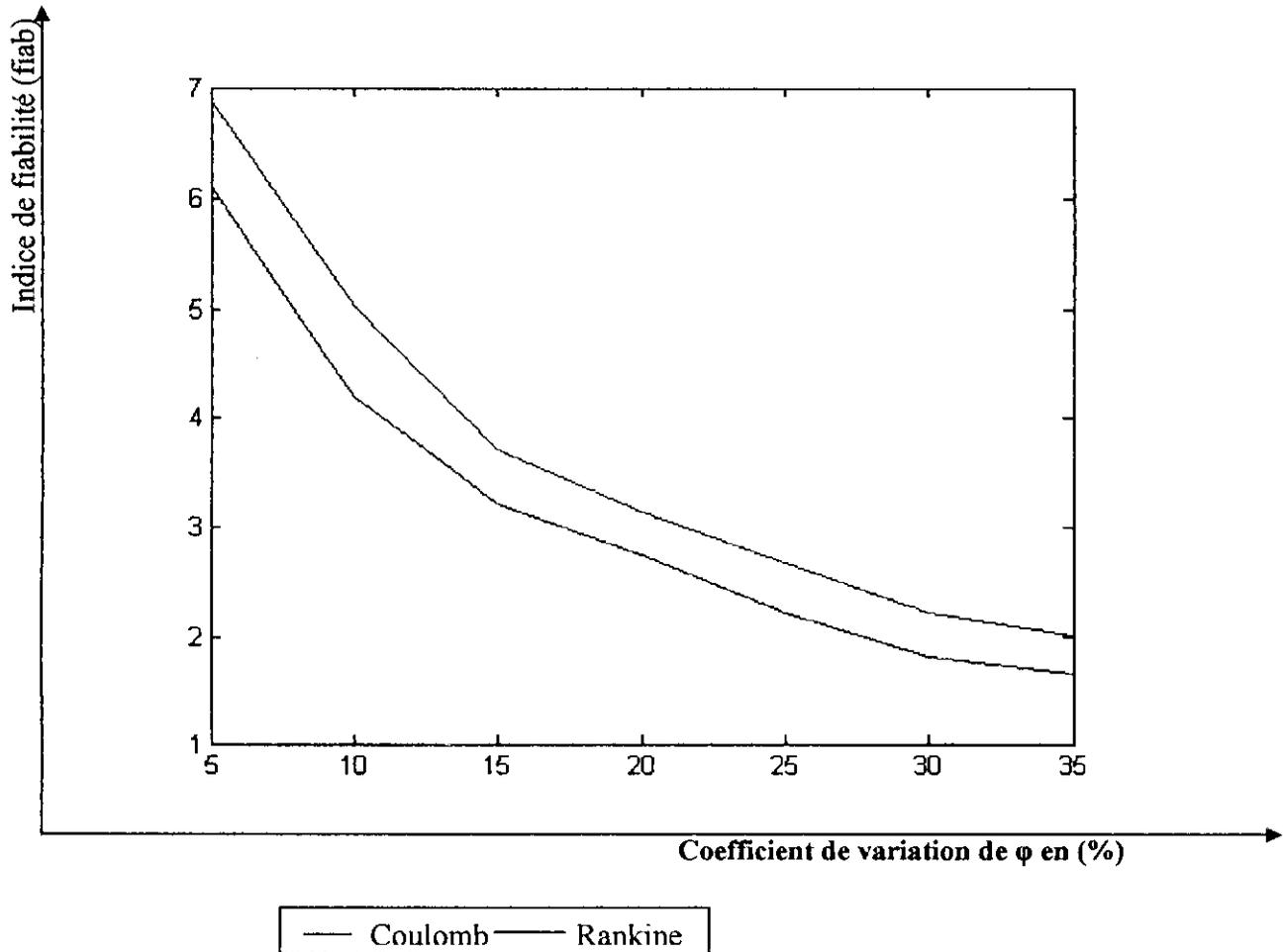
L'indice de fiabilité suivant Coulomb est plus grand que celui de Rankine et Boussinesq.

La variation de l'indice de fiabilité est importante.

## IV.2. Stabilité au glissement

### 1) La variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de $\phi$

$c\phi$	5	10	15	20	25	30	35
Coulomb	6.873	5.022	3.691	3.132	2.671	2.223	2.007
Rankine	6.091	4.181	3.203	2.743	2.211	1.823	1.651



**La variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de  $\phi$**   
**Graphe -9-**

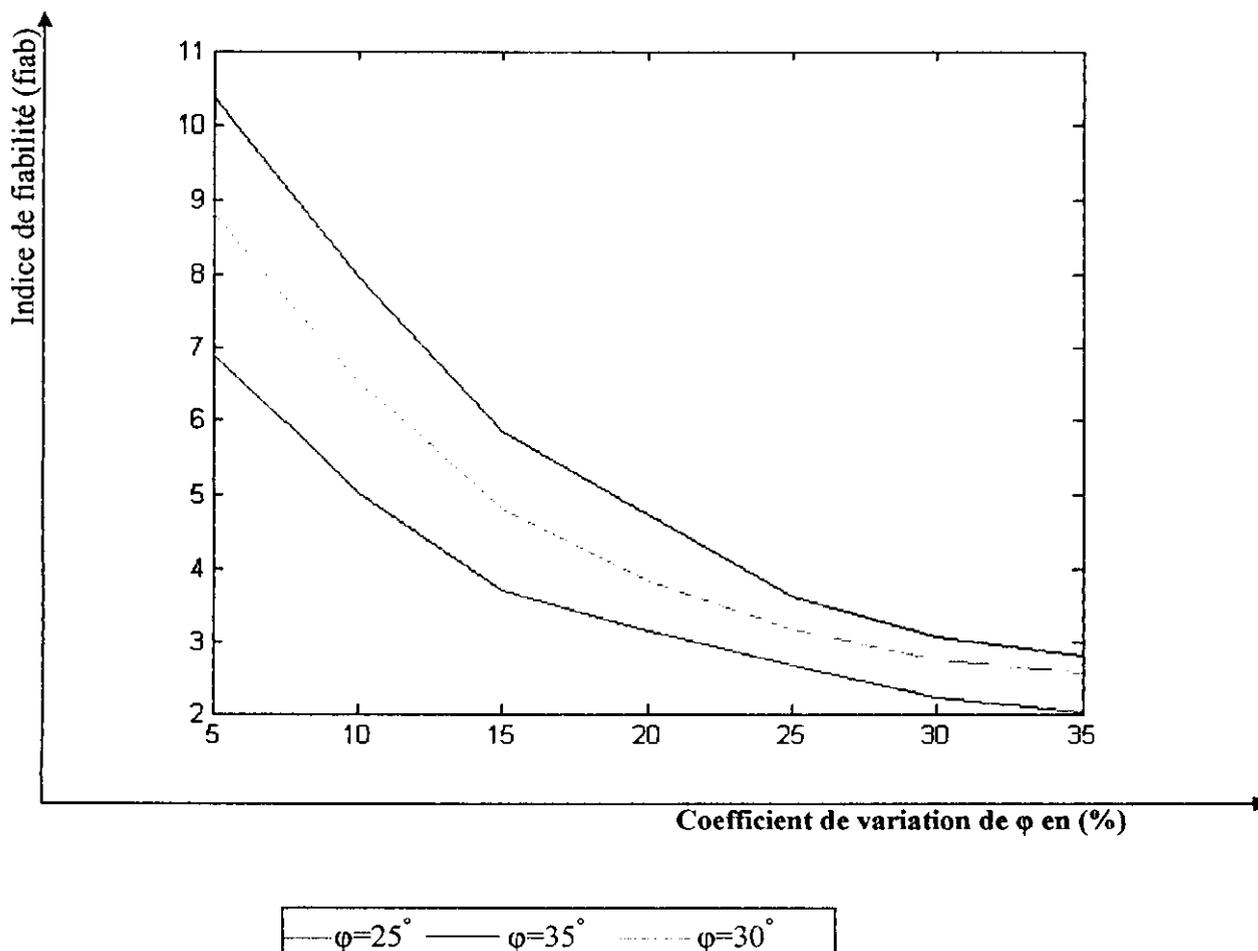
Les deux courbes sont décroissantes, fortement non linéaire, et presque parallèle.

L'indice de fiabilité de Coulomb est plus grand que celui suivant Rankine.

La variation de l'indice de fiabilité est importante pour des valeurs faibles du coefficient de variation de  $\phi$ .

**2) La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction du coefficient de variation de  $\varphi$ .**

$c\varphi$	5	10	15	20	25	30	35
$\varphi=25$	6.873	5.022	3.691	3.132	2.671	2.223	2.007
$\varphi=30$	8.802	6.511	4.801	3.842	3.182	2.753	2.553
$\varphi=35$	10.367	7.962	5.841	4.724	3.612	3.066	2.808



**La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction du coefficient de variation de  $\varphi$ .**

**Graphe-10-**

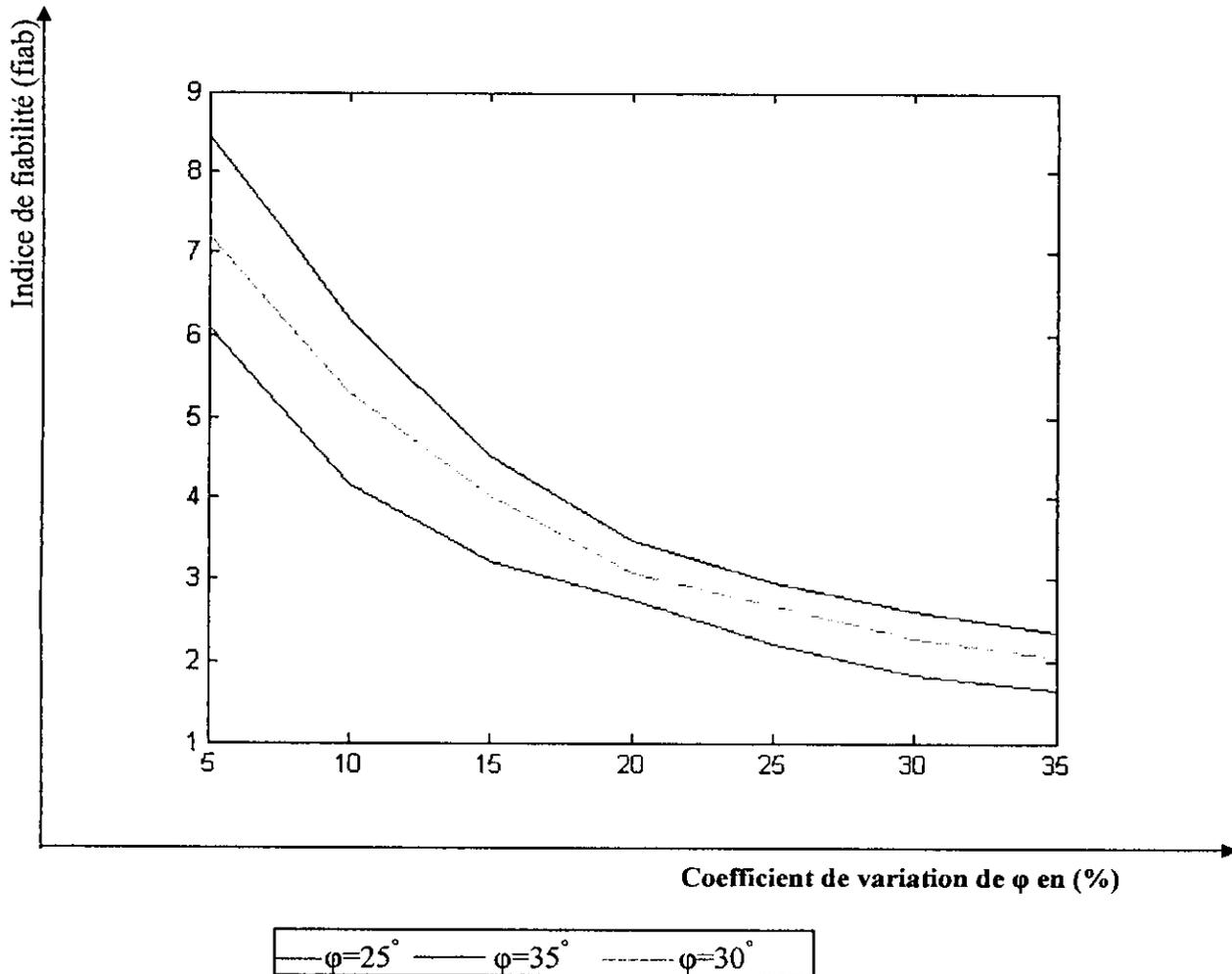
Les trois courbes sont décroissantes, fortement non linéaire, et presque parallèle.

L'indice de fiabilité est croissant avec l'angle de frottement interne.

La variation de l'indice de fiabilité est importante pour des valeurs faibles du coefficient de variation de  $\varphi$ .

3) La variation de l'indice de fiabilité suivant Rankine en fonction du coefficient de variation de  $\varphi$ .

$c\varphi$	5	10	15	20	25	30	35
$\varphi=25^\circ$	6.091	4.181	3.203	2.743	2.211	1.823	1.651
$\varphi=30^\circ$	7.182	5.293	4.031	3.071	2.683	2.277	2.042
$\varphi=35^\circ$	8.461	6.182	4.512	3.475	2.942	2.593	2.351



La variation de l'indice de fiabilité suivant Rankine en fonction du coefficient de variation de  $\varphi$ .

Graphe-11-

Les trois courbes sont décroissantes, fortement non linéaire, et presque parallèle.

L'indice de fiabilité est croissant avec l'angle de frottement interne.

La variation de l'indice de fiabilité est importante pour des valeurs faibles du coefficient de variation de  $\varphi$ .

## V. La méthode FORM 2 :

Dans la méthode FORM1, dans l'étape 8 la fonction d'état limite a besoin d'être résolue pour obtenir le nouveau point de conception, c'est un peu compliqué pour une fonction non linéaire, aussi, dans beaucoup de problèmes pratiques, la fonction  $g$  peut même ne pas être disponible dans une forme approchée, dans ce cas, il est impossible d'exécuter l'étape 8, de ce fait limitant l'utilité de FORM Méthode1. Donc, un type d'algorithme alternatif récursif de Newton-Raphson, cité par FORM Méthode2 dans cette section, est présenté ici pour trouver le point de conception.

Cet algorithme, suggéré par Rackwitz et Fiessler, est semblable à FORM Méthode1 et dans laquelle il linéarise la fonction d'exécution à chaque point d'itération ; cependant, au lieu de résoudre d'équation d'état limite explicitement pour  $\beta$ , il emploie les dérivés pour trouver le prochain point d'itération. L'algorithme peut mieux être expliqué avec l'aide de figure 1 et 2. Considèrent d'abord la fonction linéaire d'exécution représentée sur la figure 1. Puisque la fonction d'état limite n'est pas disponible sous la forme fermée, le point de départ  $x_0^*$  peut ne pas être sur la courbe d'état limite  $g(X_1', X_2')=0$  de, mais sur une ligne parallèle  $g(X_1', X_2')=k$ .

Par conséquent l'algorithme d'optimisation doit commencer à partir du point  $x_0^*$  qui peut ne pas être appartenir à la courbe de la fonction d'état limite, et converge à la distance minimale du point  $x^*$  dans la fonction d'état limite.

La linéarisation de la fonction de performance  $g(x')$  est exprimé par :

$$g(x') = b + a'x'$$

$$= b + a_1x_1' + a_2x_2'$$

Où  $a' = (a_1, a_2)$  est la transposé du gradient du vecteur de la fonction d'état limite. Le module du vecteur  $x_0^*$  et  $x^*$  considéré comme la distance du fonction  $g(X')=0$  à l'origine. Respectivement, dans la géométrie,  $x^*$  peut être exprimé par  $x_0^*$  :

$$x^* = \frac{1}{|a|^2} [a'x_0^* - g(x_0^*)] \{a\}$$

### V.1 Algorithme de la méthode FORM 2 :

L'algorithme est le suivant :

- 1<sup>ère</sup> étape: définir la fonction de performance.
- 2<sup>ème</sup> étape : assumer la valeur initiale du point de conception  $x_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , et calculer la valeur de  $g()$  correspondante, dans l'absence de d'autre information la valeur initiale du point  $x_i^*$  peut être assumer par la moyenne de la variable aléatoire considérée.
- 3<sup>ème</sup> étape : calculer la moyenne et l'écart type du point de conception dans un espace normal réduit dans le cas des variables non normales.

Les coordonnées du point de conception dans l'espace normal réduit sont:

$$x_i^* = \frac{x_i^* - \mu_{x_i}^N}{\sigma_{x_i}^N}$$

- 4<sup>ème</sup> étape : calculer les dérivées partielles  $(\partial G / \partial x_i)^*$  pour le point de conception  $x_i^*$ .
- 5<sup>ème</sup> étape : calculer les dérivées partielles  $(\partial G / \partial x_i)^*$  dans l'espace normal réduit par :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i'} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_i'} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{x_i}^N$$

- 6<sup>ème</sup> étape : calculer la nouvelle valeur du point de conception dans l'espace normal réduit(  $x_i^*$  ) on utilisons la formule réursive de l'équation:

$$x_{k+1}^* = \frac{1}{\|\nabla g(x_k^*)\|^2} [\nabla g(x_k^*)^T x_k^* - g(x_k^*)] \nabla g(x_k^*)$$

- 7<sup>ème</sup> étape : calculer la distance de l'origine a ce nouveau point

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2}$$

Et trouver le critère de convergence de  $\beta$ .

- 8<sup>ème</sup> étape : calculer la nouvelle valeur du point de conception dans l'espace original:

$$x_i^* = \mu_{x_i}^N + \sigma_{x_i}^N x_i^*$$

Calculer la valeur de  $g$  pour ce nouveau point de conception, et trouver le critère de convergence de  $g$ , fait de telle sorte que la valeur de  $g$  est très proche de 0, si les deux critères sont satisfaits alors on arrête. Autrement, répété l'étape 3 à 8 jusqu'à la convergence.

Dans le cas des variables corrélé On calcule la matrice de covariance:

$$[C] = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \text{cov}(x_1, x_2) & \dots & \dots & \text{cov}(x_1, x_n) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \sigma_{x_2}^2 & \dots & \dots & \text{cov}(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(x_n, x_1) & \dots & \dots & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

Pour la variable réduite

$$x_i' = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}$$

La matrice devient:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{x_1, x_2} & \dots & \dots & \rho_{x_1, x_n} \\ \rho_{x_2, x_1} & \dots & \dots & \dots & \rho_{x_2, x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x_n, x_1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Donc on utilise les variables non corrélées normaux et réduites Y.

$$\{X\} = [\sigma_x^N] [T] \{Y\} + \{u_x^N\}$$

T est la matrice de transformation qui converti les variables X' au variables non corrélées normaux et réduites Y

$$[T] = \begin{bmatrix} \theta_1^{(1)} & \theta_1^{(2)} & \dots & \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(1)} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_n^{(1)} & \theta_n^{(2)} & \dots & \theta_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

[T] est une matrice de transformation orthogonal qui est composé des valeurs propres de la matrice de corrélation [C].

$\theta^{(i)}$  Est la valeur propre du  $i^{\text{ème}}$  mode.

$\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}$  Sont les composantes de la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre.

$$Y = L^{-1}(x')^T$$

Où L est la matrice triangulaire inférieure de Cholesky, factorisation de la matrice [C].

## V.2 Application sur un mur cantilever :

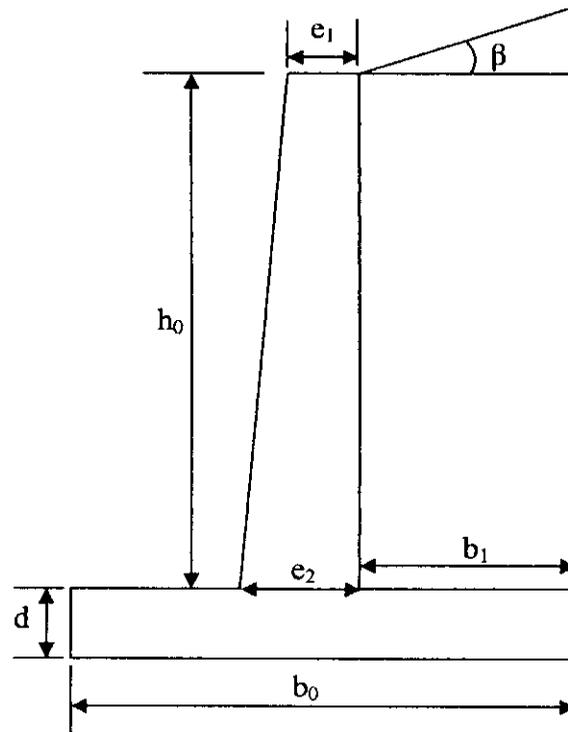


Figure-2-

On prend les dimensions suivantes :

$$h_0 = 4\text{m} ;$$

$$d = 0.45\text{m} ;$$

$$b_0 = 2\text{m} ;$$

$$b_1 = 0.85\text{m} ;$$

$$e_1 = 0.22\text{m} ;$$

$$e_2 = 0.45\text{m} ;$$

$$\gamma_{\text{mur}} = 25.10^3 \text{ kg/m}^3 ;$$

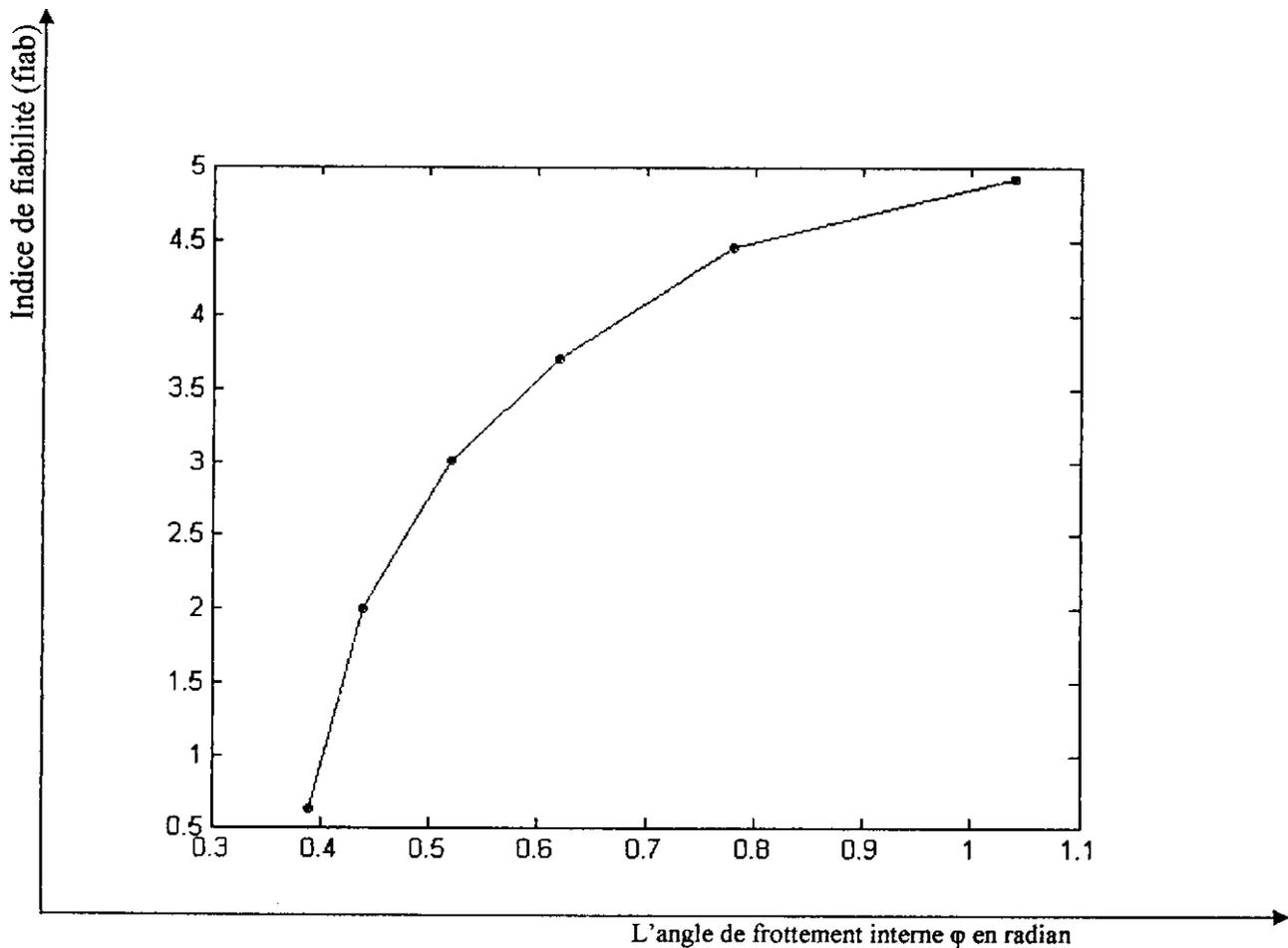
$$\gamma_{\text{sol}} = 18.10^3 \text{ kg/m}^3 ;$$

On ne fait varier que  $\beta$  et  $\varphi$ .

### VI.1. Stabilité au renversement

1) La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction de la variation de  $\varphi$  pour des valeurs moyennes de  $\beta$ .

$\varphi$	$\pi/8$	$\pi/7$	$\pi/6$	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\beta$	$\pi/9$	$\pi/9$	$\pi/9$	$\pi/9$	$\pi/9$	$\pi/9$
fiab	0.63	2.00	3.01	3.71	4.46	4.92



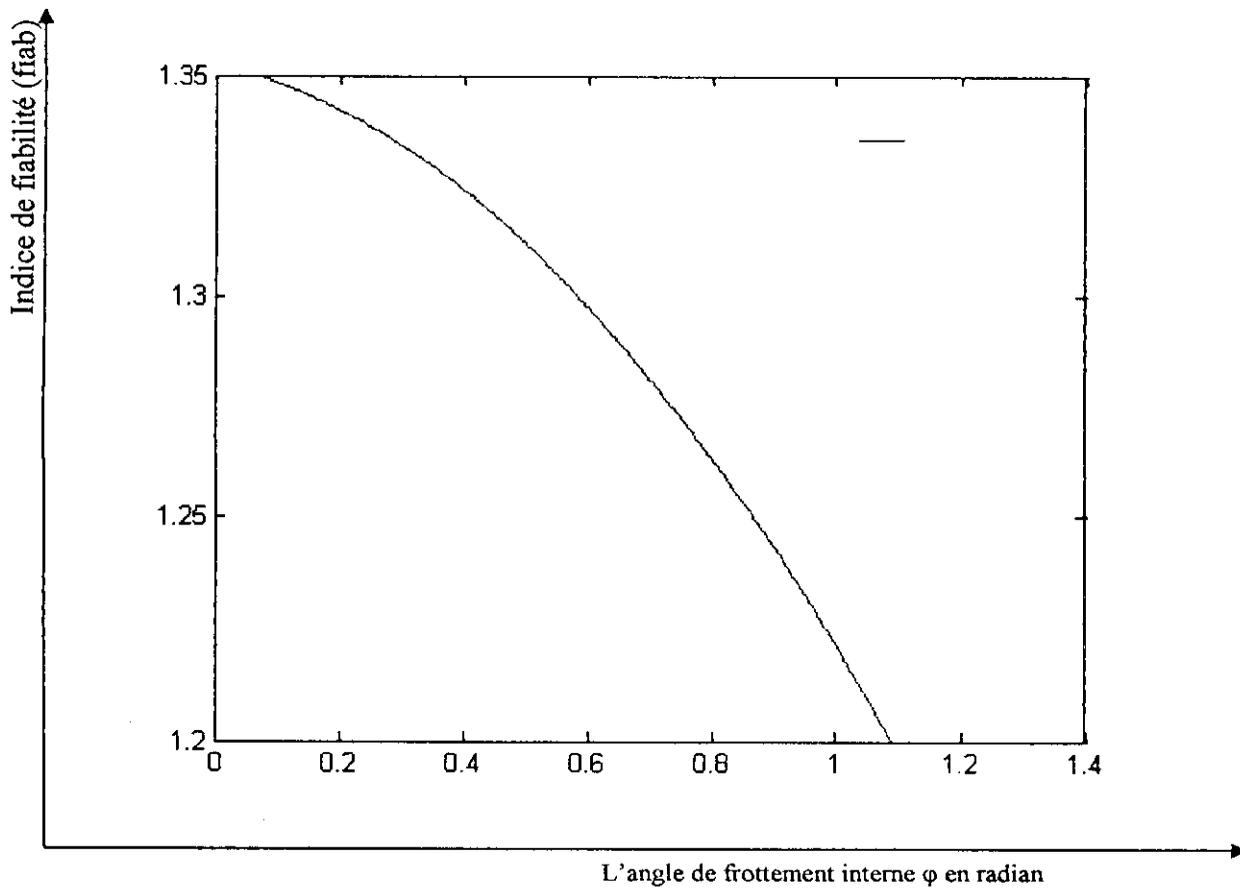
Variation de l'indice de fiabilité en fonction de angle de frottement interne pour un mur cantilever par la méthode Form2  
 Graphe-12-

La courbe est croissante.

La variation de l'indice de fiabilité est importante.

2) La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction de la variation de  $\varphi$  pour des valeurs élevées de  $\beta$ .

$\varphi$	$\pi/36$	$\pi/24$	$\pi/18$	$\pi/15$	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/7$	$\pi/6$	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\beta$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$
fiab	1.349	1.347	1.345	1.341	1.336	1.328	1.319	1.310	1.294	1.265	1.213



Variation de l'indice de fiabilité en fonction de l'angle de frottement interne pour un mur cantilever par la méthode Form2

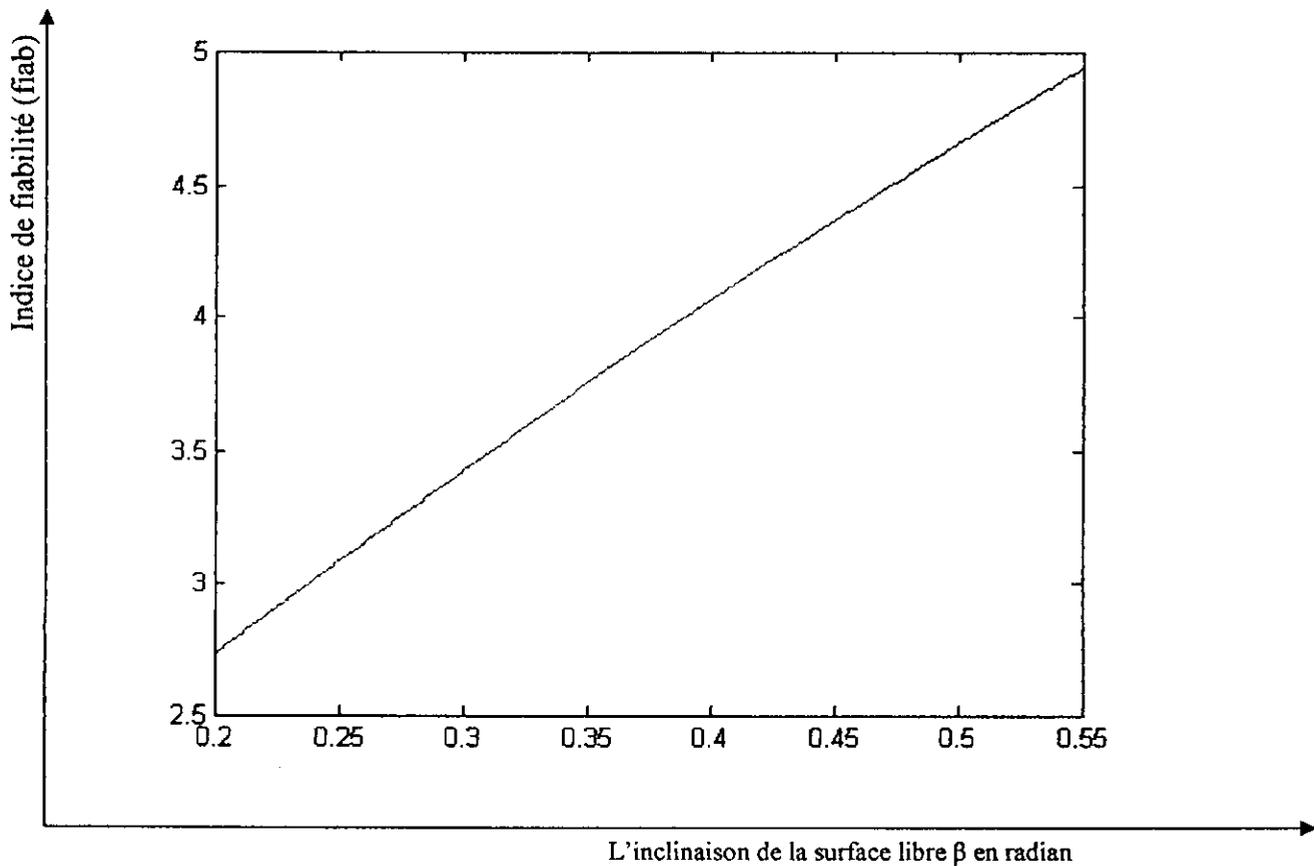
Graph-13-

La courbe est décroissante.

La variation de l'indice de fiabilité n'est pas importante.

3) La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction de la variation de  $\beta$  pour des valeurs relativement élevées de  $\varphi$ .

$\varphi$	$\pi/5$	$\pi/5$	$\pi/5$	$\pi/5$	$\pi/5$	$\pi/5$	$\pi/5$
$\beta$	$\pi/15$	$\pi/12$	$\pi/10$	$\pi/9$	$\pi/8$	$\pi/7$	$\pi/6$
fiab	2.75	3.12	3.48	3.71	3.99	4.34	4.76



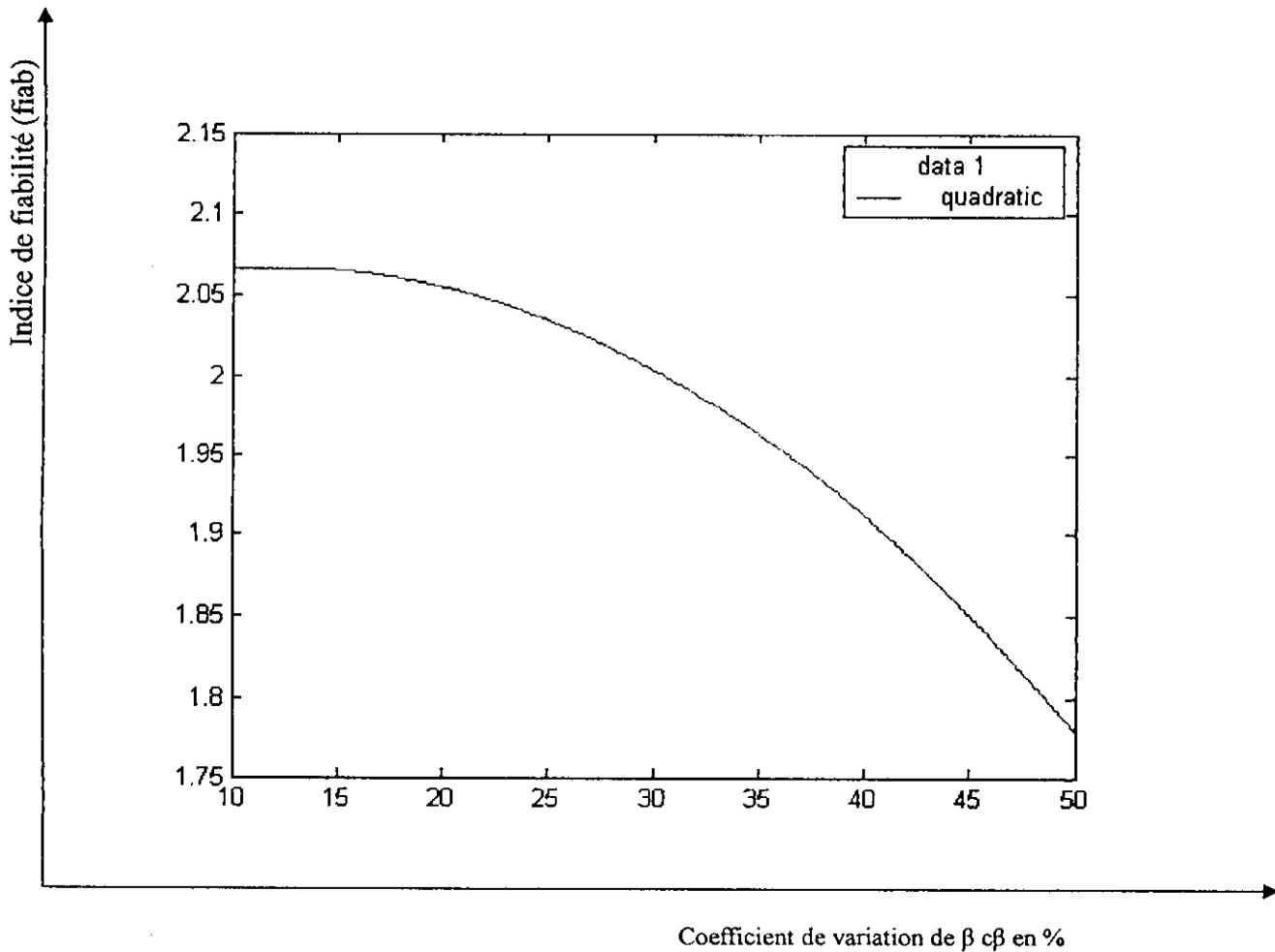
Variation de l'indice de fiabilité en fonction de l'inclinaison de la surface libre pour un mur cantilever par la méthode Form2

Graphe-14-

La courbe est croissante et presque linéaire.  
La variation de l'indice de fiabilité est importante.

4) La variation de l'indice de fiabilité suivant Rankine en fonction du coefficient de variation de  $\beta$ .

$c\beta$	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	45.0	50.0
fiab	2.058	2.054	2.050	2.042	2.003	1.951	1.906	1.850	1.795



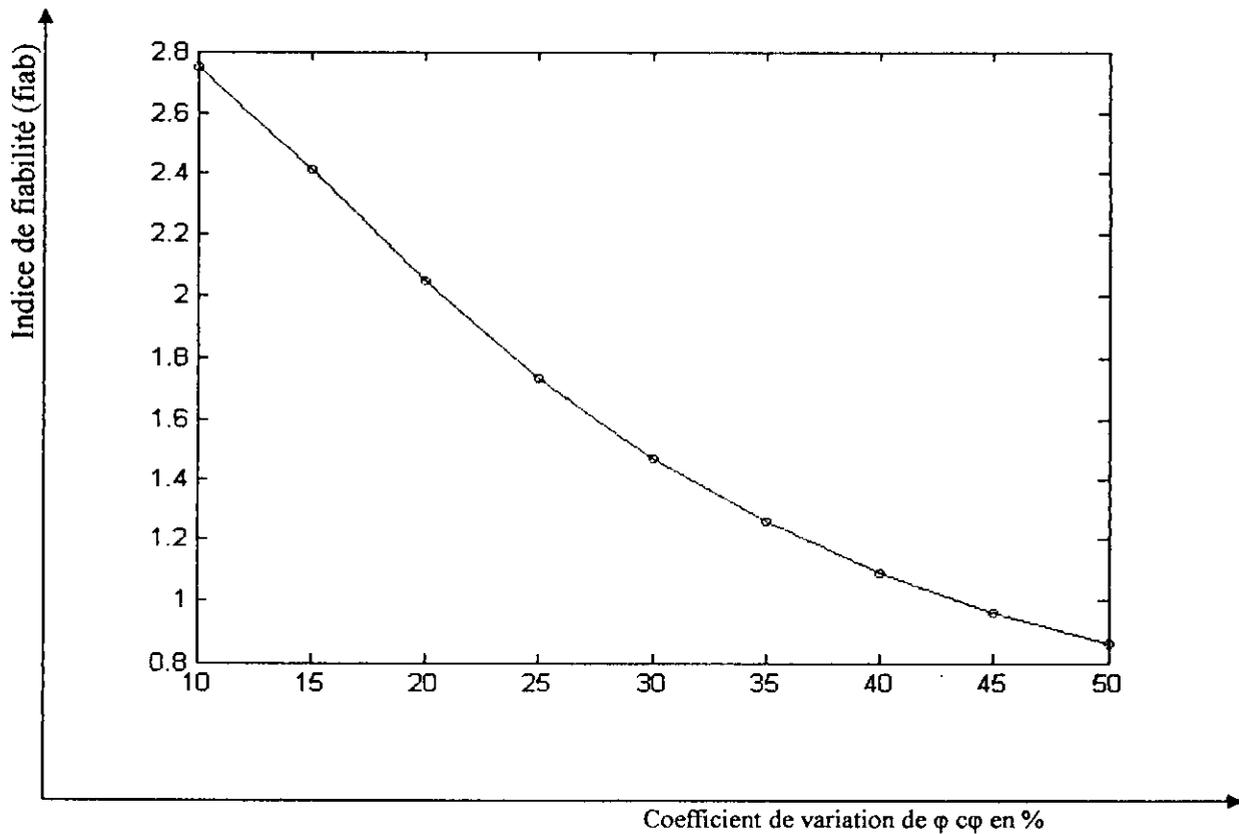
Variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de  $\beta$  pour un mur cantilever  
Graphe-15-

La courbe est décroissante.

La variation de l'indice de fiabilité n'est pas importante.

5) La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction du coefficient de variation de  $\phi$

$c\phi$	10.	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	45.0	50.0
Fiab	2.75	2.41	2.05	1.73	1.47	1.26	1.09	0.96	0.86



Variation de l'indice de fiabilité en fonction du coefficient de variation de  $\phi$  pour un mur cantilever  
Graphe-16-

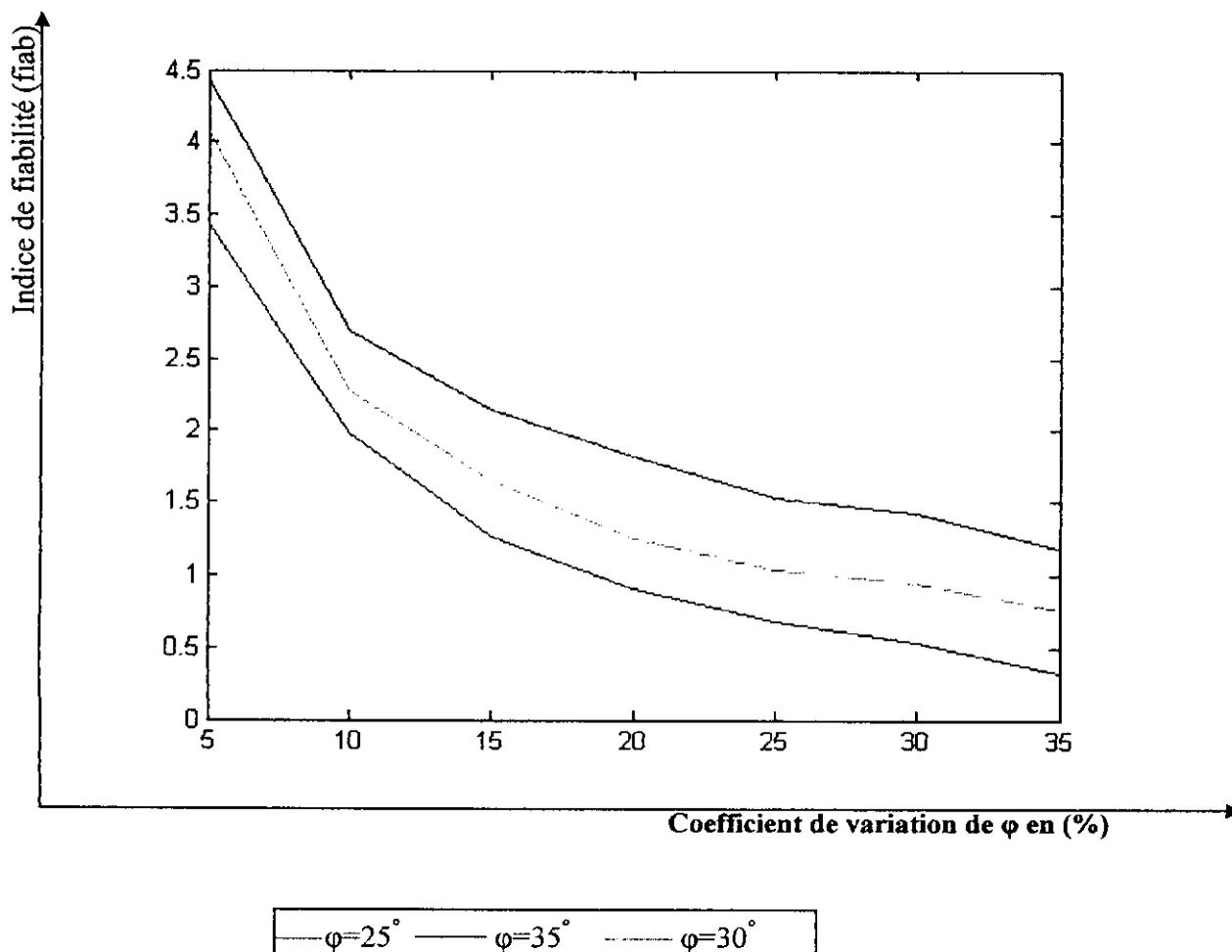
La courbe est décroissante.

La variation de l'indice de fiabilité est importante.

## VI.2. Stabilité au poinçonnement

### 1) La variation de l'indice de fiabilité suivant Rankine en fonction du coefficient de variation de $\varphi$

$c\varphi$	5	10	15	20	25	30	35
$\varphi=25^\circ$	3.3431	1.962	1.260	0.895	0.674	0.539	0.316
$\varphi=30^\circ$	4.058	2.268	1.635	1.244	1.027	0.938	0.761
$\varphi=35^\circ$	4.427	2.694	2.139	1.806	1.592	1.419	1.183



La variation de l'indice de fiabilité suivant Rankine en fonction du coefficient de variation de  $\varphi$   
 Graphe-17-

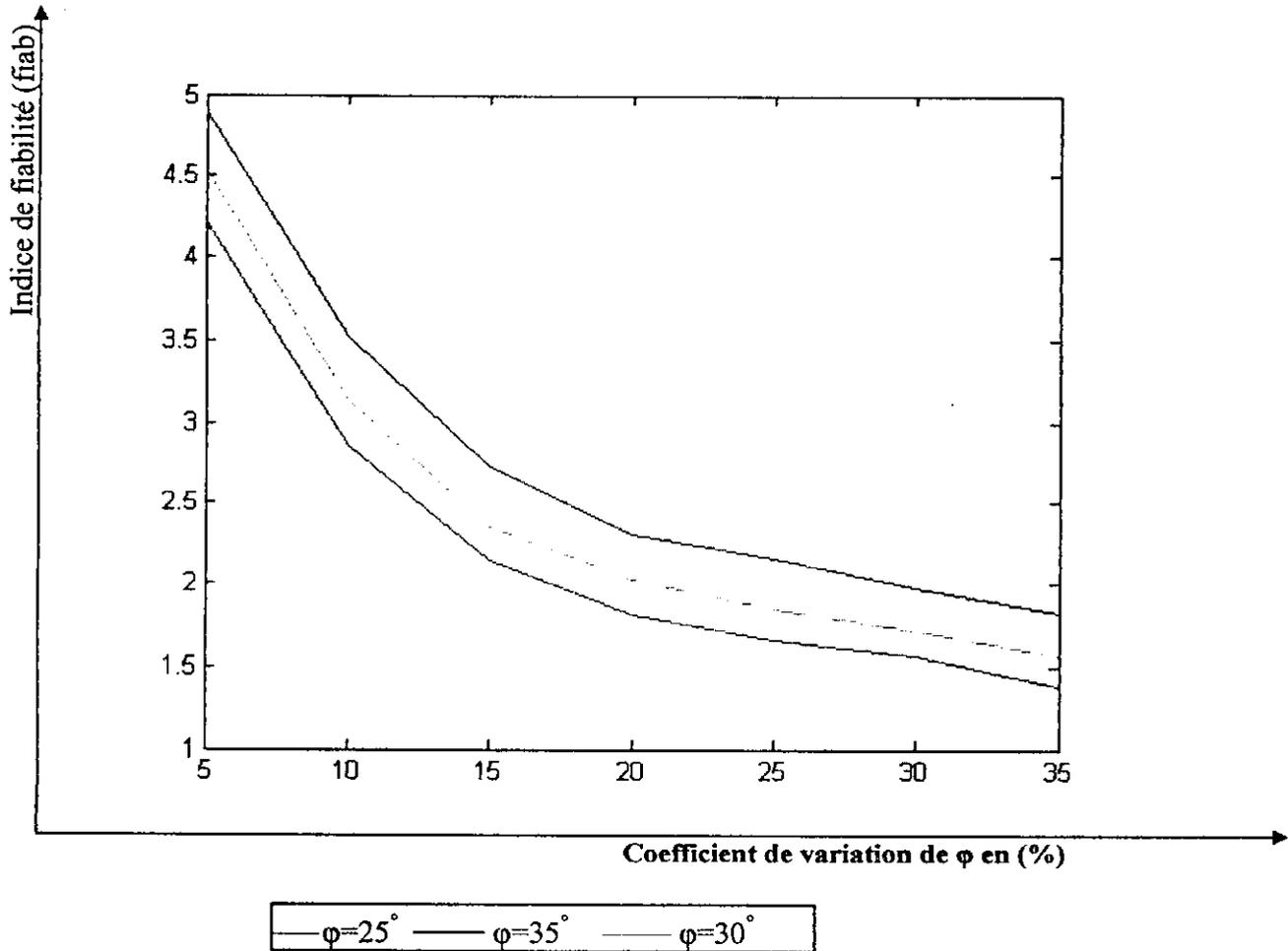
Les trois courbes sont décroissantes, fortement non linéaire, et presque parallèle.

L'indice de fiabilité est croissant avec l'angle de frottement interne.

La variation de l'indice de fiabilité est importante pour des valeurs faibles du coefficient de variation de  $\varphi$ .

2) La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction du coefficient de variation de  $\varphi$ .

$c\varphi$	5	10	15	20	25	30	35
$\varphi=25^\circ$	4.211	2.852	2.144	1.812	1.661	1.567	1.383
$\varphi=30^\circ$	4.532	3.134	2.348	2.023	1.843	1.721	1.571
$\varphi=35^\circ$	4.891	3.518	2.723	2.309	2.157	1.972	1.823



La variation de l'indice de fiabilité suivant Coulomb en fonction du coefficient de variation de  $\varphi$ .  
 Graphe-18-

Les trois courbes sont décroissantes, fortement non linéaire, et presque parallèle.  
 L'indice de fiabilité est croissant avec l'angle de frottement interne.  
 La variation de l'indice de fiabilité est importante pour des valeurs faibles du coefficient de variation de  $\varphi$ .

## Conclusion

Ce travail, malgré toutes ses simplifications, a permis de mettre en évidence le rôle important des incertitudes inévitables relatives à l'ensemble des paramètres entrant dans une étude de stabilité d'un ouvrage de soutènement.

Parmi les hypothèses simplificatrices que nous avons effectués, nous retiendrons principalement celles relatives

- 1- Au choix du modèle mécanique dont notamment l'évaluation de l'effort de poussée
- 2- Aux hypothèses relatives à la loi de distribution des variables (gaussiennes)
- 3- Aux hypothèses relatives à l'estimation des caractéristiques mécaniques
- 4- Aux hypothèses simplificatrices relatives à l'allure de la surface d'état limite pour la détermination de l'indice de fiabilité.
- 5- Au fait que nous traités indépendamment les trois modes de ruines et non simultanément (fiabilité système)
- 6- Les paramètres considérés sont indépendants entre eux deux à deux.

Malgré toutes ces hypothèses la méthodologie d'approche considérée ici a permis de montrer que la probabilité de survie de l'ouvrage est fortement influencée par l'estimation des paramètres considérés et de leurs distributions aléatoires, dont certaines comme celle de l'angle de frottement interne dont le rôle est déterminant.

Cette dernière remarque met en évidence le soin nécessaire à apporter à l'évaluation de l'indice de fiabilité et de sa variation en fonction des variables aléatoires de dimensionnement. Une sous ou sur estimation de ces fonctions affectent de façon plus ou moins importante, suivant le paramètre considéré, la probabilité de ruine.

Finalement, nous pouvons dire que l'approche stochastique est une voie rationnelle pour arriver à étudier la sécurité des ouvrages de soutènement. Il est recommandé d'orienter la recherche dans cette voie.

Une telle recherche aide à mieux comprendre la nature du problème de dimensionnement probabiliste et à faire apparaître la dépendance de la solution (pour une probabilité de survie à assurer à la construction), vis à vis de divers paramètres (dont les coefficients de variation des actions et des capacités portantes...).

Parmi tous les autres résultats obtenus il apparaît clairement que la fiabilité d'un ouvrage de soutènement varie de façon quasi linéaire en fonction de la surface d'inclinaison d'un sol

pour des fortes valeurs de l'angle de frottement interne et de façon non linéaire pour les sols à faible valeur de cet angle. De plus l'indice de fiabilité croit fortement en fonction de l'incertitude sur cette inclinaison, caractérisé ici par le coefficient de variation.

Les mêmes remarques peuvent être effectuées pour l'angle de frottement interne dont l'incidence est comme déjà cité fortement prépondérante.

De plus comme le montre l'ensemble des résultats obtenus, le choix d'une méthodologie d'évaluation de la force de poussée influe d'une façon modérée les résultats suivant le mode de rupture considérée. La méthode de Coulomb étant généralement la plus pessimiste.

Finalement on a obtenu les mêmes allures pour les courbes résultats qu'ils s'agissent des murs poids ou des murs cantilever.

Il est à remarquer qu'il serait intéressant de donner une suite à ce travail, principalement en introduisant moins d'hypothèses simplificatrices en faisant d'une part de la fiabilité système et de la simulation de Monte Carlo pour obtenir directement la probabilité de Ruine par intégration.

De plus il serait aussi intéressant d'introduire une corrélation entre les paramètres comme le montre les études statistiques faites à ce jour.

De plus, il serait aussi intéressant de traiter le sol comme un champ stochastique plutôt que simplement représenter par deux variables aléatoires (Angle de frottement interne et cohésion) Ceci nous permettrait en effet de pouvoir traiter des cas plus complexes comme par exemple le cas du multicouches.

Le cas des sols cohérents et des sols partiellement ou totalement saturés serait aussi une suite intéressante à donner à ce travail.

## **Références bibliographiques**

- [1]. **F. SCHLOSSER**, « Mur de soutènement », Vol cc1. Edition technique de l'ingénieur, 1991.
- [2]. **F. SCHLOSSER**, « Ouvrage de sol, poussée et butée », Vol cc1. Edition technique de l'ingénieur, 1990.
- [3]. **J.COSTET** et **G. SANGLERAT**, « Cours pratique de mécanique des sols tome 2 calcul des ouvrages », Edition Dunod, 1983.
- [4]. **G.PHILIPONAT** et **B.HUBERT**, « Fondation et ouvrages en terre », Edition Eyrolles paris 1979.
- [5]. **H.PROCACACCIA** et **P.MORILHAT**, « Fiabilité des structures des installations industrielles », Edition Eyrolles paris 1996.
- [6]. **A.HALDAR** « Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis » John Wiley & Son, Inc 2000 USA.
- [7]. **J.P MAGNAN** « les méthodes statiques et probabiliste en mécanique des sols », Presse Ponts et chaussées Paris 1982.
- [8]. **A.CAQUOT** et **J.KERISEL** « Traite de mécanique des sols », Edition Gautier-Villars paris 1966.
- [9]. **J PUTATTI** « Technologie de la construction des bâtiments », Edition Eyrolles paris 1979.