

9/04

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département : Génie civil



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'état en
Génie Civil

Thème :

UTILISATION DE MODELES NUMERIQUES D'ELEMENTS
FINIS LINEAIRE ET QUADRATIQUE POUR L'ANALYSE
DES PROBLEMES DE CONDUCTION DE LA CHALEUR

Proposé et dirigé par :

ME. M. DEMIDEM

Présenté par :

MEZIDI Omar

Promotion JUN 2003

ENP : 10, avenue Hacène Badi, El Harrache, Alger

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier dieu le tout puissant et miséricordieux qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour achever ce travail.

Ce modeste travail a été réalisé sous la direction de Mr DEMIDEM chargé de cours à l'Ecole Nationale Polytechnique « ENP ».

Je tiens à lui témoigner tout particulièrement ma reconnaissance pour ses précieux conseils, son aide et suivi du travail ainsi que pour sa grande disponibilité.

Je tiens à remercier également l'ensemble du personnel de bibliothèque de l'ENP, pour leur coopération.

Que toute personne qui a contribué à la réalisation de ce travail, trouve ici toute ma reconnaissance.

J'exprime aussi ma plus grande reconnaissance à tous les enseignants de l'ENP et particulièrement les enseignants du département du génie civil.

Que Mesdames et Messieurs les membres de Jury trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce travail.

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو حل المسائل المتعلقة بانتشار الحرارة التي حلها يكون بواسطة معادلة لابلاس (Laplace).

في المرحلة الأولى قمنا بحل المعادلة مستعملين طريقة الأجزاء المحدودة ثم مقارنتها بالنتائج المتحصل عليها بالطريقة التحليلية الدقيقة, وعندما وجدنا الحلين السابقين متقاربين, قمنا بمقارنة النتائج المتحصل عليها بواسطة الأجزاء المحدودة مستعملين نوعين من العناصر, عنصر يحتوي على 4 عقد فقط و الثاني بالجمع بين عنصرين يحتويان على 4 و 6 عقد في آن واحد.

تم معالجة حالات متعددة لنتمكن من إثبات سريان مفعول النتائج المتحصل عليها.

كلمات مفتاحية: لابلاس، الحرارة، ، عنصر ذو أربعة عقد ، عنصر ذو ستة عقد ، جمع.

Résumé

L'objectif de cette étude est de résoudre les problèmes liés à la répartition de la chaleur régit par l'équation de LAPLACE. La première étape était de résoudre l'équation en utilisant la méthode des éléments finis ensuite comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus par la résolution analytique.

Après vérification de la convergence de la méthode des éléments finis, on a comparé les résultats obtenus par la MEF en utilisant deux types d'éléments finis: élément à 4 nœuds et association d'éléments à 4 et à 6 nœuds.

Plusieurs cas on été étudiés afin de démontrer la validité des résultats obtenus.

Mots clés: Laplace, chaleur, élément à 4 nœuds, éléments à 6 nœud, association.

Summary

The objective of this study is to solve problems involved in heat transfer governed by Laplace's equation. The first stage is to solve the equation by using the finite element method then to compare the results obtained with those obtained by the analytical solution.

After checking the convergence of the finite element method, we have compared the results obtained with the FEM by using two types of finite elements: elements with 4 nodes and association of elements with 4 and 6 nodes.

Several cases have been studied in order to prove the validity of the results obtained.

Key words: Laplace, heat, element with 4 nodes, elements with 6 nodes, association.

TABLEAU DE MATIERES

Page

Chapitre I: Introduction générale

I- Introduction générale.....	1
-------------------------------	---

Chapitre II: Conduction Thermique

II- 1-Introduction aux transferts thermiques.....	4
---	---

II.1.1 Les différents modes de transferts.....	4
1.1.1 La conduction.....	4
1.1.2 Le rayonnement.....	5
1.1.3 La convection.....	5
II.1.2 Combinaison des différents modes de transferts.....	6

II- 2-La conduction de la chaleur.....	6
--	---

II.2.1 La loi de Fourier.....	6
2.1.1 Définitions.....	6
2.1.2 Enonce de la loi de Fourier.....	9
II.2.2 La conductivité thermique.....	10
2.2.1 Généralités.....	10
2.2.2 Matériaux anisotropes.....	12
II.2.3 L'équation de la chaleur en conduction.....	12
2.3.1 Conditions aux limites.....	13
2.3.2 Conductivité et diffusivité thermique.....	13

Chapitre III: Equation de Laplace

III- Laplacien en coordonnées cartésiennes.....	19
III- 1 – Introduction.....	19
III-2- Laplacien et équation de Laplace.....	19
III-3- Définitions.....	20
III-3-1- Problème de Dirichlet sur un domaine R rectangulaire.....	20
III-4- Séparation des variables.....	21
III-4-a- la solution pour $v(x)$	21
III-4-b- la solution pour $w(y)$	22
III-5- Conditions aux frontières.....	23

Chapitre VI: Présentation De La Méthode Des Elément Finis

IV-1- Introduction	25
IV-2- Aperçu historique	26
IV-3- Idée de la méthode et leurs avantages	27
IV- 4- Fondement de la méthode des éléments finis.....	28
IV-5- Principe de travail virtuel.....	28
a)Principe du travail virtuel (dû au déplacement virtuel)	28
b) Principe du travail virtuel complémentaire (dû à la force virtuelle)	29
IV-6-Les démarches de M.E.F.....	30
IV-7- Avantages des éléments en coordonnées naturelles normalisées.....	33
IV-8- convergence de la méthode des éléments finis.....	34
1) Convergence monotone.....	34
2) Convergence non monotone.....	34
IV-9-Des exemples	35
a- Solution d'un exemple Q4.....	35
b- Solution d'un exemple Q6.....	39
IV-10- Présentation de l'Algorithme de la M.E.F.....	44
IV-11- Subroutine de maillage et numérotation automatique Q4.....	45
IV-12- Subroutine de maillage et numérotation automatique Q4 +Q6.....	47
Note importante	48

Chapitre V : Interprétation et Comparaison des Résultats

V.1. Introduction.....	49
V.2.Equation de Laplace.....	50
Différents cas de chargement	50
a) Cas de chargement A	50
b) Cas de chargement B.....	50
Différents types de maillage utilisés dans la M.E.F.....	51
plaque rectangulaire Q4	51
Cas de la plaque rectangulaire Q4 + Q6.....	55
a) Maillage (6x1m + 2m)	55
Cas de chargement A100.....	55
Cas de chargement B100.....	56
b) Maillage régulier (5x1m + 3m)	57
Cas de chargement A100.....	57
Cas de chargement B100.....	58
V.3. Equation de Laplace.....	59
a. Étude de convergence de la MEF.....	59
a.1. Chargement A100.....	59
a.2. Chargement B100.....	59
V.4. Comparaison MEF-ANA.....	60
V.4.1. Cas de la plaque rectangulaire Q4.....	60
Maillage raffiné régulier.....	60
Cas de la plaque rectangulaire Q4 (Les Tableaux)	63
V-4-2 Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (2M)	65

V-4-2 Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (2M)	65
Maillage raffiné régulier.....	65
Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (2M): (les tableaux).....	67
V-4-3- Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (3M)	69
Maillage raffiné régulier.....	69
Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (3M) (les tableaux)	71
V-5- Interprétation des résultats	73
Conclusion Générale	76
Références Bibliographie	78
Annexe	79

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre I :

Introduction Générale

I- Introduction générale :

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
École Nationale Polytechnique

Le transfert de la chaleur a fait l'objet de nombreuses études à travers le monde ces dernières années. Son importance dans l'isolation thermique a poussé les chercheurs à étudier et à modéliser plus finement ses propriétés.

Des recherches ont lieu pour satisfaire les besoins de l'homme qui a toujours tenté de se protéger en concevant et en construisant son habitat de manière à y maintenir une température convenable. Il évitait ainsi que la chaleur dégagée par le foyer soit totalement perdue. Une bonne isolation signifie : conduction et convection aussi faibles que possible, la conduction est l'une des modes de transfert de la chaleur, c'est probablement le mode et le plus familier le plus largement assimilé.

Durant plusieurs années, la technologie a considéré la science de transfert de la chaleur comme étant un domaine périphérique élémentaire ayant certains habilités et techniques qui étaient utiles pour d'autres spécialités. Récemment, ce corps assez riche de faits et de théories est devenu par conséquent plus unifié, plus qu'une technologie séparée dans son propre pivot.

L'architecte ou l'ingénieur civil, intéressé principalement par l'édification des structures, instruit suffisamment de la théorie de transfert de la chaleur pour isoler et chauffer conformément ses constructions.

La conduction, comme beaucoup de phénomènes physiques, est régie par des équations aux dérivées partielles qui traduisent l'équilibre et qui sont d'une importance fondamentale en plusieurs branches de la physique, ils étaient le sujet d'une étude intense depuis le Dix-huitième siècle. Une variété de méthodes ont été développées, telle que la technique : de séparation des variables. Aussi, la résolution de ce type de problèmes fait très souvent recours aux méthodes numériques qui présentent une très bonne approximation de la solution.

L'objectif de l'analyse numérique, en tant que branche des mathématiques appliquées, est de caractériser les problèmes bien posés qui conduisent à une solution unique qui varie de manière continue en fonction des données.

La méthode des éléments finis (M.E.F) permet une formulation plus rigoureuse des problèmes aux dérivées partielles par sa souplesse d'emploi en programmation. Par ailleurs, la complexité des conditions aux limites (C.A.L) et de la forme géométrique du domaine met l'accent à l'importance des méthodes numériques et approximatives dont la méthode des éléments finis est l'une des meilleurs et puissants outils de résolution des problèmes des équations aux dérivées partielles (E.D.P).

Ceci nous a suscité à reconnaître de près les avantages de cette méthode, leurs domaines d'application et leur puissance à converger vers la solution exacte du problème en sachant que l'outil numérique présente un volet indispensable dans la formation d'ingénieur civil.

Dans cette étude, on a commencé par citer des généralités théoriques sur les problèmes de la conduction thermique. Ensuite, on a donné un aperçu sur la méthode des éléments finis, avant de présenter l'algorithme de numérotation des nœuds des éléments Q4 et Q6. Enfin on a terminé par une interprétation et une comparaison des résultats obtenus.

Le plan de travail que nous avons adopté s'articule autour de :

Chapitre I: Introduction générale

Chapitre II: conduction de la chaleur.

Chapitre III: Equation de Laplace ,résolution par la méthode des séparation des variables

Chapitre IV: Formulation du problème par méthodes des éléments finis (M.E.F)
Nous exposons ses différentes étapes et la procédure de la résolution. Avec la solution de deux types d'éléments Q4 et Q6.

Aussi Présenter l'algorithme de numérotation des nœuds Q4 et Q46 (la numérotation est faite suivant la petite dimension de la plaque afin de réduire la largeur de la bande de la matrice de rigidité

Chapitre V: En arrivant à l'interprétation et comparaison des résultats avec la conclusion générale

L'annexe regroupe les résultats issus des différents modèles présentés (deux types de modèles pour la résolution par la méthode des éléments finis et la résolution analytique) sous forme de tableaux.

Chapitre II :

Conduction de la chaleur

Conduction de la chaleur

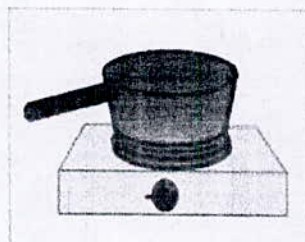
II-1-Introduction aux transferts thermiques

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. Il y a échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz, etc..., électronique) ou domestique (chauffage de l'habitat). Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid. Comme on le verra par la suite, flux de chaleur dont la densité locale est notée $\vec{\varphi}$ est une grandeur vectorielle, ce qui signifie qu'un flux de chaleur est caractérisé non seulement par son intensité mais aussi par sa direction. Il est défini en chaque point de l'espace et à l'unité d'une densité surfacique de puissance (W/m^2). Il existe trois modes essentiels de transferts de chaleur: la conduction, le rayonnement et la convection.

1.1 Les différents modes de transferts

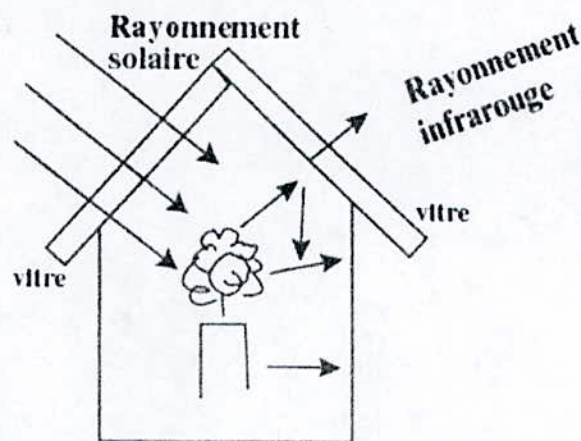
1.1.1 La conduction

On sait que la température est une fonction croissante de l'agitation moléculaire dans un corps, qu'il soit solide, liquide ou gazeux. Considérons pour l'instant un corps solide au sein duquel la température varie. L'agitation moléculaire élevée de la zone chaude communiquera de l'énergie cinétique aux zones plus froides par un phénomène appelé conduction de la chaleur. La conduction est un phénomène de diffusion qui permet donc à la chaleur de se propager à l'intérieur d'un corps solide. Il en est de même pour un liquide ou un gaz mais on verra par la suite que pour eux, la convection est un autre mode de transfert de chaleur possible. Notons enfin que la conduction de la chaleur n'est pas possible dans le vide puisqu'il n'y a pas de support moléculaire pour cela.



1.1.2 Le rayonnement

La chaleur du soleil frappe pourtant notre planète alors qu'il n'y a aucun support solide, liquide ou gazeux au de la de l'atmosphère terrestre. Ceci signifie donc que l'énergie thermique peut tout de même traverser le vide. Ce mode de transfert s'appelle le rayonnement. Il correspond à un d'ondes électromagnétiques émises par tout corps, quelle que soit sa température. Comme on l'imagine, le rayonnement électromagnétiques est d'autant plus élevé que sa température est grande. Comme pour la conduction, ce sont les interactions entre atomes et molécules qui sont à l'origine de ce rayonnement. Elles peuvent le générer, ce qui diminue leur énergie, ou encore l'absorber, ce qui l'augmente. De par sa nature, le rayonnement n'intervient que dans les milieux transparents (gaz, verre, vide) ou semi opaque (gaz + fumées de CO₂, gaz + vapeur d'eau).



1.1.3 La convection

Un débit ou une circulation de liquide ou de gaz peut transporter avec lui une certaine quantité d'énergie thermique. Ce transport de chaleur porte le nom de CONVECTION thermique. Ce transport de l'énergie par un écoulement est analogue au transport d'autres quantités scalaires (non vectorielles): transport d'une concentration de sel par de l'eau, transport de l'humidité par l'air, ... On retiendra donc que dans la convection, la chaleur se sert du fluide comme véhicule pour se déplacer. Sans entrer dans les détails, notons qu'il existe deux types de transferts convectifs:

La convection forcée dans laquelle l'écoulement du fluide est forcé par un dispositif mécanique quelconque (pompe ou gravite pour un liquide, ventilateur pour de l'air).

La convection naturelle: lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un fluide, le fluide chaud, qui aura une masse volumique plus faible que le fluide froid aura tendance à monter sous l'effet de la poussée d'Archimède. Il y aura ainsi circulation naturelle du fluide sous l'effet de la chaleur qui, par ailleurs, sera transportée avec lui: on parle de convection naturelle. Si l'on prend l'exemple d'un chauffage domestique, l'eau chaude qui arrive dans les radiateurs circule par convection forcée, entretenue par le circulateur (petite pompe située dans la chaufferie) tandis que l'air des pièces de la maison circule par convection naturelle depuis le radiateur autour duquel il s'échauffe jusqu'au plafond vers lequel il s'élève avant de redescendre pour former un circuit fermé.

En convection on caractérise le flux de chaleur Φ qui est extrait par le fluide de température T_0 d'une paroi de surface S à la température T_P par :

$$\Phi = h S (T_P - T_0)$$

Où Φ est en Watt, S en m^2 , T en Kelvin et où h désigne le coefficient d'échange entre la paroi et le fluide (en $W.m^{-2}.K^{-1}$).

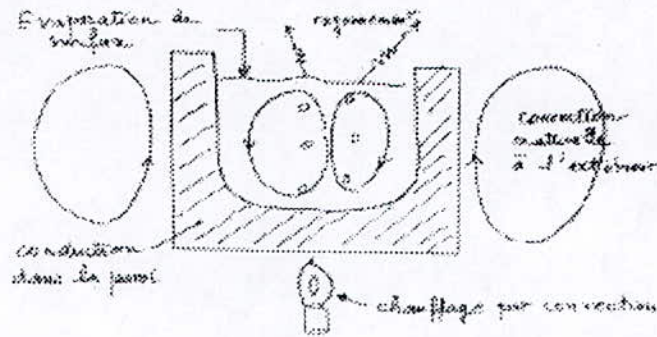


1.2 Combinaison des différents modes de transferts

Dans beaucoup de situations, il y a coexistence de 2 ou même 3 modes de transferts thermiques décrits précédemment. Fort heureusement, il est fréquent qu'un mode soit prépondérant et simplifie l'analyse. Avant de finir ce paragraphe, signalons que certains échanges de chaleur s'accompagnent d'un changement d'état (vaporisation, condensation, fusion, congélation). Ces phénomènes se

comportent alors comme une source (ex. de la condensation) ou un puits de chaleur (ex. de la vaporisation).

Le dessin de la figure 1.1 qui représente une marmite chauffée au gaz synthétise l'ensemble des exemples cités.



FigII.1 (Exemple illustrant les différents types de transferts de chaleur)

II- 2-La conduction de la chaleur

2.1 La loi de Fourier

Rappelons que la conduction est le seul mode de transfert de chaleur possible dans un solide (sauf pour quelques solides transparents comme le verre qui laissent passer un rayonnement électromagnétique). C'est un mode de transfert sans transport de matière.

2.1.1 Définitions

Température T : elle se définit en chaque point d'un corps liquide, solide ou gazeux. C'est une fonction scalaire de l'espace et du temps lorsque le problème en dépend (problème instationnaire). L'unité de température est le degré Kelvin [K] ou encore le degré Celsius [°C].

Flux de chaleur : c'est la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps :

$$\Phi = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{En Watt}$$

Densité de flux $\vec{\varphi}$: elle représente la puissance qui traverse l'unité de surface.

Pour une surface perpendiculaire aux flux de chaleur : $\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial S}$

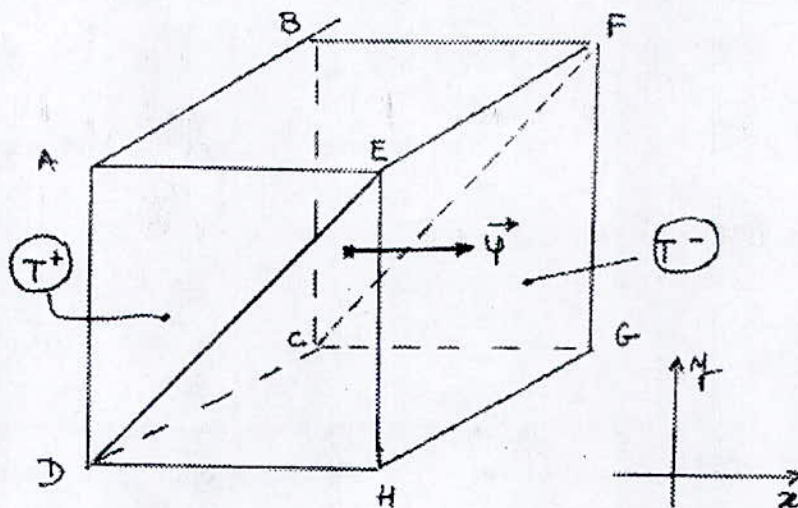


Fig.II.2 {schéma représente la densité de flux}

Le flux à travers les 4 faces isolées est nul. Comme on le verra par la suite, s'il n'y a pas de sources de chaleur internes au cube, le flux de chaleur se conserve. Ainsi, si l'on calcule le flux Φ_1 qui traverse la surface diagonale $DCEF$ inclinée à 45° on trouvera $\Phi_1 = \Phi_0$.

Surface isotherme : si dans un milieu on relève les températures en tout point à un instant donné et qu'on relie entre eux les points de même température on obtient des surfaces isothermes en 3D et des lignes isothermes en 2D (voir figure II.3).

2.1.2 Enoncé de la loi de Fourier

Considérons à nouveau le montage de la figure II.2. Imposons une différence de température $T^+ - T^- = \Delta T_0$ entre les deux faces non isolées : un flux de chaleur Φ_0 circulera. Doublons cette différence de température : un flux égal à $2\Phi_0$ circulera alors. Pour une valeur donnée de l'écart de température, remplaçons le cube par un matériau différent. La valeur de flux en sera affectée. Ceci donne l'intuition que le flux qui circule par conduction est proportionnel à la différence de température et à l'aptitude du matériau à conduire la chaleur.

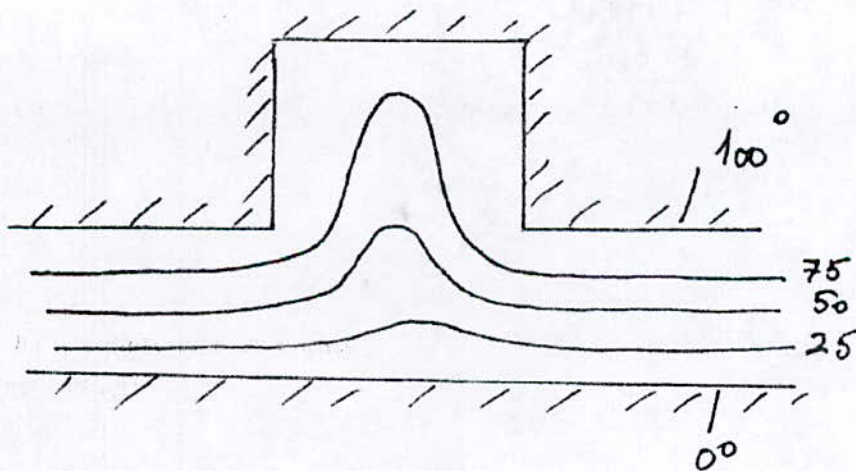


Fig. II.3 (Exemples de courbes isothermes).

En 1811, Fourier propose une formulation *locale* de cette loi, donc valable en tout point :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \text{grad}T$$

Qui relie la densité de flux $\vec{\varphi}$ en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ à la conductivité thermique λ du matériau ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) et au gradient local de température. Le signe - de la loi de Fourier résulte d'une convention qui rend positif un flux de chaleur s'écoulant du chaud vers le froid, donc dans le sens d'un gradient négatif.

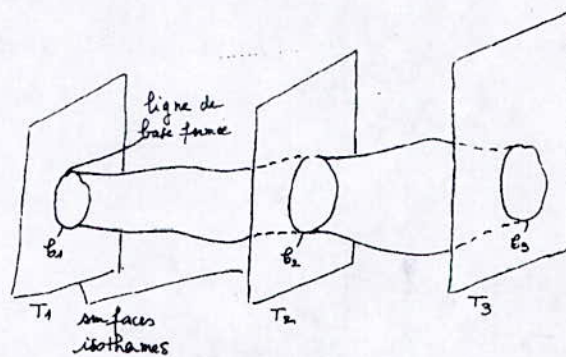


Fig. II.4 (Définition d'un tube de flux.)

2.2 La conductivité thermique :

2.2.1 Généralités :

Comme on le voit sur le tableau II.1 la conductivité thermique λ des solides varie de $2300 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pour le diamant à $0.04 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pour le polystyrène. En règle générale, les métaux qui sont bons conducteurs de l'électricité sont bons conducteurs thermiques.

Conducteur	λ_{en} ($W.m^{-1}.K^{-1}$)		λ_{en} ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
Diamant	2300	pierre	2.8
Argent	420	brique	1.5
Cuivre	375	verre	0.8
Aluminium	203	Sodium liq 100°C	80
Fer	73	Eau à 20°C	0.6
Acier	45	antigel	0.25
Plomb	35		

isolant	λ_{en} ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
amiante	0.15
Laine de verre	0.04
polystyrène	0.04
air	0.023
Super-isolant	0.02
vide	0

TAB II.5 (Valeurs physiques de la conductivité thermique de quelques corps)

Les liquides conduisent en général moins bien la chaleur que les solides, sauf lorsque ce sont des métaux liquides (mercure, sodium liquide, etc.). La conductivité thermique des gaz dépend de la pression mais aussi fortement de la température et de la masse molaire M du gaz. La relation suivante donne

Un bon ordre de grandeur :

$$\lambda = A \sqrt{\frac{T}{M}}$$

Où A est une constante.

2.2.2 Matériaux anisotropes

Certains Matériaux ont une structure qui rend la conductivité thermique différente selon la direction de propagation de la chaleur. C'est le cas des Matériaux fibreux par exemple (fibre de verre, fibre de carbone). Dans ces matériaux, qu'on appelle anisotropes, le flux de chaleur aura donc une direction privilégiée.

2.3 L'équation de la chaleur en conduction

Régime permanent: la température ne varie pas en fonction du temps. De ce fait

$$\frac{dT}{dt} = q = 0 \text{ et équation de la chaleur devient :}$$

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q = 0$$

Absence de sources de chaleur : on a ici " équilibre " entre l'apport de chaleur par conduction dans le solide et son échauffement :

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Conductivité λ constante : en dehors des solides anisotropes, λ est une constante. On se limitera à ce cas. On peut donc le sortir de l'opérateur *div.* et la loi de Fourier devient :

$$\lambda \nabla^2 T + q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Où ∇^2 désigne opérateur laplacien

2.3.1 Conditions aux limites

Même dans un cas très simple sans sources et permanent, $\frac{dT}{dt} = q = 0$ la résolution de l'équation de T, qui devient $\nabla^2 T = 0$, nécessite l'adjonction de conditions aux limites aux frontières du domaine étudié. Ces conditions peuvent être de trois types

Conditions aux limites isothermes

La température de la frontière est imposée. Elle peut dépendre du temps et même varier le long de la frontière. Le cas le plus simple est $T = T_0 = \text{cte}$ sur toute la frontière. Une telle condition est expérimentalement difficile à réaliser sauf si le solide dans lequel on cherche la distribution de température est en contact avec un milieu extrêmement conducteur (cuivre par exemple) et que ce milieu est lui-même parcouru par un fluide qui le maintient à T_0 (cf. figure II.8).

Conditions aux limites à flux constant

Une densité de flux de chaleur $\bar{\varphi}_0$ est imposée sur la frontière. Cette condition, de part la loi de Fourier, impose donc la valeur du gradient de température à la frontière du corps considéré ($\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$) où $\bar{\eta}$ est la normale à la frontière. La réalisation expérimentale d'un flux imposé peut se faire par exemple au moyen de résistances électriques (cf. figure II.9). Un cas particulier de flux imposé est $\varphi_0 = 0$ cela signifie que la paroi est isolée thermiquement (on dit aussi adiabatique) ce qui se réalise en la calfeutrante avec un matériau isolant (laine de verre, polystyrène). Toujours de part la loi de Fourier, on en déduit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_p = 0$$

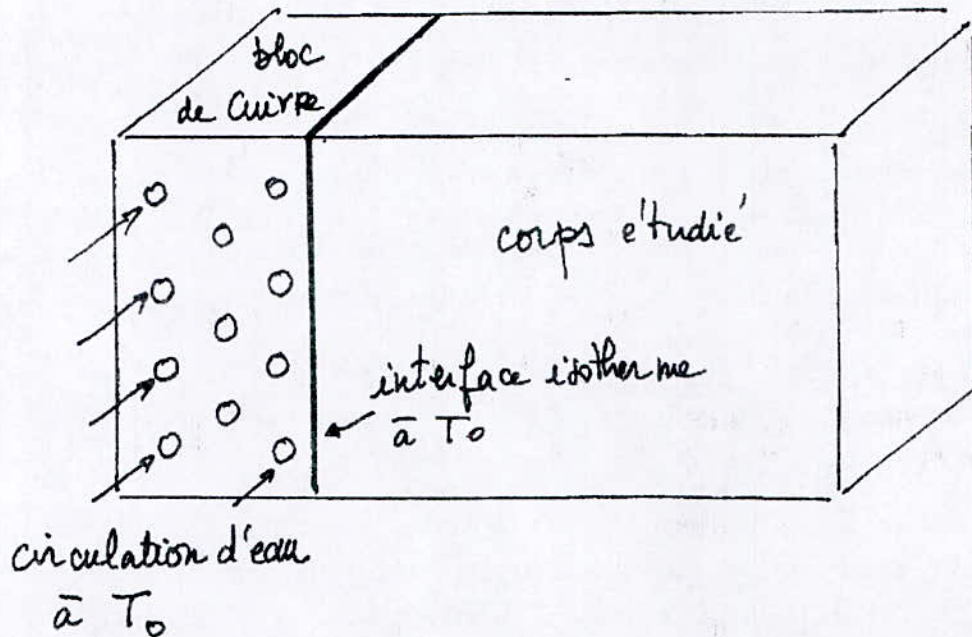


Fig II.5 Réalisation expérimentale d'une condition aux limites isothermes A T₀

Echanges convectifs sur une paroi :

Lorsqu'une paroi échange de la chaleur par convection avec l'extérieur, la densité flux φ qu'elle échange est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu fluide extérieur, multipliée par un coefficient d'échange h en $W.m^{-2}.K^{-1}$ qui tient compte des différentes propriétés physiques et cinématiques du fluide léchant la paroi :

$$\varphi = h(T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})$$

En tout point de la frontière, ce flux φ étant fourni par conduction au travers du solide étudié, on en déduit le gradient de T à cette frontière :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{\text{paroi}} = h(T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})$$

Echanges radiatifs sur une paroi

Le rayonnement d'une paroi peut être un mode d'échange à prendre en compte, surtout si sa température est élevée (supérieure à 100 degrés environ). Comme on le verra, le flux qu'une paroi à la température TP échange par rayonnement avec le milieu externe à la température T_{ext} vaut : $\delta(T_p^4 - T_{\text{ext}}^4)$ ou δ est la constante de Stefan Boltzmann. Dans un tel cas, la condition aux limites à la frontière deviendra donc :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{\text{paroi}} = \delta(T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{ext}}^4)$$

Condition de passage entre 2 solides

Si le problème étudié comporte deux milieux (ou plus) on devra écrire une condition aux limites à chaque frontière entre deux solides en contact. La conservation de la chaleur de part et d'autre de la frontière impose :

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right)_{\text{paroi}} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial \eta} \right)_{\text{paroi}}$$

Où λ_1 et λ_2 sont les conductivités thermiques des solides 1 et 2 et T_1 et T_2 sont les distributions de température dans ces solides.

2.3.2 Conductivité et diffusivité thermique

Considérons la résolution d'un problème de conduction permanent sans sources ($q = 0$) dans un milieu homogène. On résoud donc :

$$\nabla^2 T = 0$$

Si les conditions aux limites sont isothermes, la conductivité thermique

λ Du solide n'intervient pas dans la solution. Elle n'interviendra que si celles-ci prescrivent le flux qui, on l'a vu, impose la valeur de $-\lambda \frac{\partial T}{\partial \eta}$ à la frontière.

Considérons maintenant un problème non permanent de conduction (toujours avec $q = 0$). On résoud donc:

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Où $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ en ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) désigne la diffusivité thermique du solide. Le tableau II.10 donne les valeurs comparées de λ et a pour quelques corps. Il est intéressant de comparer le fer et l'air qui ont des λ totalement dissemblables mais une diffusivité thermique a presque égale. On retiendra que la conductivité thermique λ est l'aptitude à transmettre un flux sous l'effet d'une différence de température tandis que la diffusivité thermique a est l'aptitude à évaluer plus ou moins vite dans le temps les différences de température présentes dans le corps étudié

Sur la figure II.11a, c'est la conductivité thermique λ qui fixera la valeur du flux dans la brique lorsqu'on la soumet à un écart de température ΔT .

C'est par contre la diffusivité thermique a qui fixera le temps nécessaire à ce que la face de droite ressente l'effet d'un choc thermique imposé à $t = 0$ sur la face gauche

2.3.4 Equation de la chaleur en régime permanent

En régime permanent et dans un matériau isotrope, l'équation de la chaleur est une équation de Poisson :

$$\nabla^2 T = -\frac{q}{\lambda}$$

L'expression développée varie avec le système de coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

Matériau	λ en : $\text{W. m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	a en : $\text{m}^2. \text{s}^{-1}$
fer	73	20.10^{-6}
Pierre	2.8	$1.4.10^{-6}$
verre	0.8	$0.4.10^{-6}$
eau	0.6	$0.14.10^{-6}$
air	0.026	22.10^{-6}

Tableau II.7 valeurs comparées de la conductivité et de la diffusivité thermique de quelque corps

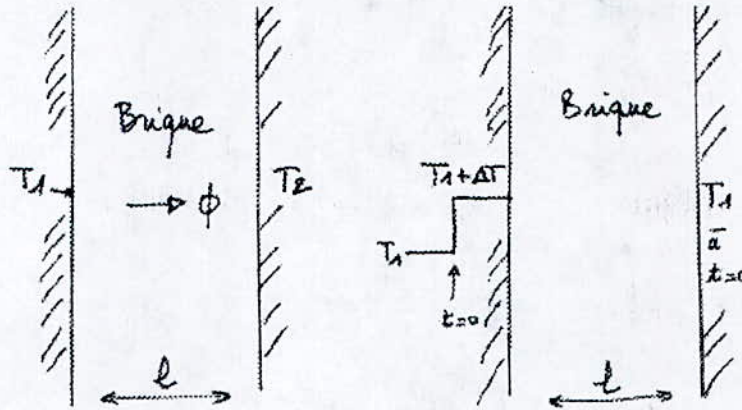


Fig. II.8 {Brique en régime stationnaire (a) et in stationnaire (b)}

Cylindriques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

Sphériques

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

Les problèmes 1D peuvent souvent se résoudre analytiquement. Les problèmes 3D nécessitent souvent l'emploi de méthodes numériques traitées par ordinateur. En 1D, les équations ci-dessus deviennent:

En cartésien: $\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q}{\lambda}$

Cylindrique: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q}{\lambda}$

En sphérique: $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q}{\lambda}$

Chapitre III :

EQUATION DE LAPLACE

ÉQUATION DE LAPLACE

III- LAPLACIEN EN CORDONNÉES CARTÉSIENNES

III- 1 - Introduction

Lors du chapitre 2 sur l'équation de la chaleur, nous avons abordé l'écoulement thermique dans 2 directions de l'espace. Cependant nous l'avons laissé en suspens pour aborder l'équation d'onde. C'était pour procéder par ordre croissant du degré des équations différentielles. Dans l'équation de la chaleur à une dimension, c'était une équation d'ordre 3. Avec l'équation d'onde à une dimension, c'était en fait une équation d'ordre 4 (2 selon x et 2 selon t). À présent, nous abordons une autre équation d'ordre 4 (2 selon x et 2 selon y).

III-2- Laplacien et équation de Laplace

L'équation de la chaleur selon la distribution dans un plan est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \Delta^2 T = c^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad \text{Avec } c^2 = \frac{K}{\sigma \rho} \dots \dots \dots \text{(III.1)}$$

Cette équation est du 5^{ème} ordre (2 selon x , et 2 selon y , et 1 selon t). Pour la réduire d'un degré, nous pouvons supposer la situation où l'écoulement thermique est constant, c'est à dire où il n'y a pas de variation Thermique dans le temps $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Dans cette situation l'équation de la chaleur se réduit à :

$$\Delta^2 T = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \dots \dots \dots \text{(III.2)}$$

En fait beaucoup d'équations sont exprimés d'un coté par le Laplacien (On parle

Alors d'équation de Laplace. Voici donc, les équations de Laplace selon une, deux et trois dimensions (en coordonnées cartésiennes) :

$$\Delta^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots \text{(III.3)}$$

Comme il n'y a plus de condition initiale à introduire, seulement les conditions aux limites pour x , y et z , on parle de **problème aux frontières**. On désigne par frontière, la courbe fermée C qui délimite la région R du plan y sur laquelle l'équation de Laplace à deux

dimensions doit être satisfaite, ou encore la surface fermée S qui délimite un volume V dans laquelle l'équation de Laplace à trois dimensions doit satisfaire.

III-3- DÉFINITIONS :

- On parle de problème de **Derichlet** si c'est la frontière (conditions aux limites) C est appliquée à la fonction $T(x, y)$ elle-même.

- On parle de problème de **Neumann** si la frontière C est appliquée sur la normale à $T(x, y)$, c'est-à-dire à $\frac{\partial}{\partial n} T(x, y)$ (III.4)

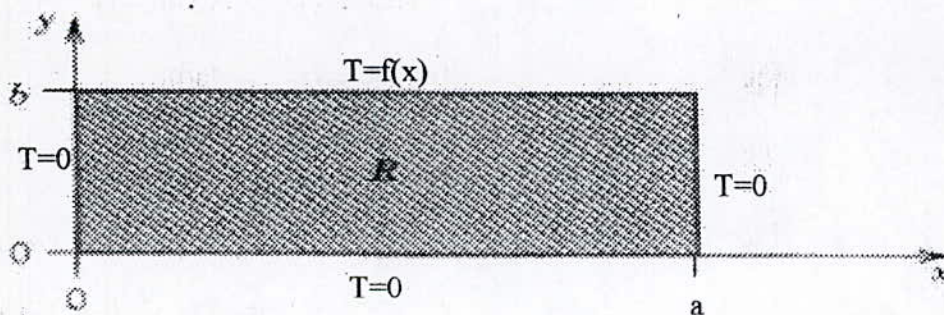
- On parle de problème **mixte** si une partie de la frontière C est appliquée sur $T(x, y)$ et l'autre partie de C sur sa normale $\frac{\partial}{\partial n} T(x, y)$ (III.5)

III-3-1- Problème de Derichlet sur un domaine R rectangulaire

Considérons le cas d'une frontière thermique découpée rectangulaire sur le plan xy :

$$\begin{cases} T(0, y) = 0, & \forall 0 < y < b \\ T(a, y) = 0, & \forall 0 < y < b \\ T(x, 0) = 0, & \forall 0 < x < a \\ T(x, b) = f(x), & \forall 0 < x < a \end{cases} \dots\dots\dots (III.6)$$

C'est à dire la figure suivante :



Nous allons chercher à résoudre ce problème selon la méthode suivante :

- 1) Faire en sorte de simplifier l'expression de la forme solution en l'exprimant comme étant le produit de deux fonctions indépendantes $T(x, y) = v(x) \cdot w(y)$.
- 2) Déterminer une solution $v(x)$ qui satisfasse les conditions aux frontières pour x .
- 3) Déterminer la forme solution $w(y)$ en conséquence des imposés sur $v(x)$.
- 4) Exprimer la solution $T(x, y)$ sous forme de série de Fourier pour qu'elle satisfasse à présent aux conditions aux frontières pour y .

III-4- SÉPARATION DES VARIABLES

$$T(x, y) = v(x)w(y) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \cdot w(y) = v'' \cdot w \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = v(x) \cdot \frac{\partial^2 w(y)}{\partial y^2} = v \cdot w'' \end{cases} \dots\dots\dots (III.7)$$

Et l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'' \cdot w = -v \cdot w'' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''}{v} = -\frac{w''}{w} \dots\dots\dots (III.8)$$

Comme encore une fois, les variables x et y sont indépendantes, la seule façon pour que les quantités de droite et de gauche soient égales à tout moment, c'est que ces quantités soient égales elles-mêmes à une constante :

$$\frac{v''}{v} = -\frac{w''}{w} = -k \dots\dots\dots (III.9)$$

Ce qui nous conduisons à deux équations différentielles ordinaires séparées :

$$\begin{cases} v'' + kv = 0 \\ w'' - kw = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (III.10)$$

III-4-a- LA SOLUTION POUR $v(x)$:

Des trois formes ci-dessous :

$$v(x) = ax + b, \quad \text{si } k = 0$$

$$v(x) = C_1 e^{+\sqrt{kx}} + C_2 e^{-\sqrt{kx}}, \quad \text{si } k < 0$$

$$v(x) = A \cos \sqrt{kx} + B \sin \sqrt{kx}, \quad \text{si } k > 0$$

Seule la troisième forme sera retenue à cause des conditions aux frontières suivantes :

$$\begin{cases} T(0, y) = v(0)w(y) = 0, & \forall 0 < y < b \\ T(a, y) = v(a)w(y) = 0, & \forall 0 < y < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(a) = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (III.11)$$

Et la forme solution est :

$$v_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad \dots\dots\dots (III.12)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

III-4-bLA SOLUTION POUR $w(y)$:

À cause de la contrainte sur $k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 > 0$, nous avons l'équation suivante pour $w(y)$

$$w'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 w = 0$$

Des trois formes envisagées :

$$v(y) = ay + b, \quad \text{si } k = 0$$

$$v(y) = C_1 e^{+\sqrt{ky}} + C_2 e^{-\sqrt{ky}}, \quad \text{si } k < 0 \dots\dots\dots (III.13)$$

$$v(y) = A \cos \sqrt{ky} + B \sin \sqrt{ky}, \quad \text{si } k > 0 \dots\dots\dots (III.14)$$

Seule la deuxième forme est acceptable :

$$w_n(y) = C_{1n} e^{+\left(\frac{n\pi}{a}\right)y} + C_{2n} e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y}, \dots\dots\dots (III.15)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

III-5- CONDITIONS AUX FRONTIÈRES POUR y :

$$\begin{cases} T(x,0) = v(x)w(0) = 0, & \forall 0 < x < a \\ T(x,b) = v(x)w(b) = f(x), & \forall 0 < x < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w(0) = 0 \\ a(x,0) = f(x) \end{cases} \dots\dots\dots (III.16)$$

De la 1ère condition, nous pouvons tirer directement :

$$w_n(0) = C_{1n}e^{+\left(\frac{n\pi}{a}\right)0} + C_{2n}e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)0} \Rightarrow C_{1n} + C_{2n} = 0 \dots\dots\dots (III.17)$$

Donc que le terme doit s'écrire :

$$w_n(y) = C_n \left[e^{\left(\frac{n\pi}{a}\right)y} - e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y} \right] = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)y \dots\dots\dots (III.18)$$

Pour pouvoir utiliser la seconde condition sur y , il faut d'abord user de la solution générale qui est la série des termes :

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)w_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)y \times \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)x \dots\dots\dots (III.19)$$

Et

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)b \times \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)x = f(x) \Rightarrow C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\right)b = \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \dots \dots (III.20)$$

C'est à dire pour les coefficients :

$$C_n = \frac{2}{a \sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \dots\dots\dots (III.21)$$

Historiquement, la méthode de séparation des variables est peut être la plus systématique méthode de résolution des E.D.P, utilisée par D'Alembert, D.Bernoulli, et Euler environ 1750 lors de leur traitements de l'équation des ondes. Après, elle est considérablement raffinée et généralisée et elle reste une méthode très importante jusqu'aujourd'hui.

Son emploi reste limité à des cas relativement simples ce qui a mis l'accent sur la puissance des méthodes numériques dans le traitement des problèmes complexes.

Chapitre IV :

Présentation de

la Méthode des Elément Finis

Présentation De La Méthode Des Elément Finis

IV-1- INTRODUCTION :

La méthode de calcul par éléments finis a connu un essor très important essentiellement a travers son application au calcul des structures, elle est considérée comme un des outils de résolution des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.

Par ailleurs, le progrès de l'informatique et sa démocratisation font qu'aujourd'hui la simulation numérique n'est plus l'affaire des grands groupes industriels mais concerne de plus en plus les petites et moyennes entreprises. Ainsi, les outils numériques deviennent à la portée économique et technique de ces dernières et constituent souvent un atout majeur voire incontournable pour leur développement. Cette banalisation des méthodes de simulation touche actuellement un large éventail de disciplines scientifiques et de nombreux secteurs techniques ou technologiques. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes de simulation numérique les plus pratiquées de nos jours. Elle consiste à utiliser une approximation simple de la géométrie et des variables décrivant le phénomène physique telles que le déplacement, la vitesse, la pression,... afin de ramener le problème continu comportant une infinité d'inconnues vers un système algébrique à un nombre fini de degrés de liberté. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- les sciences de l'ingénieur pour la formulation mathématique du problème physique qui, le plus souvent, nous mène à un système d'équations aux dérivées partielles.
- les méthodes numériques pour la construction du système algébrique à résoudre.
- les techniques informatiques pour l'exécution des calculs de simulation.

L'emploi de la méthode des éléments finis (M.E.F) s'est développé depuis une soixantaine d'années à travers l'analyse des structures via des assemblages de barres ou de poutres dont le comportement était dicté par les hypothèses de la résistance des matériaux. L'apparition de l'informatique et les besoins industriels a provoqué un développement rapide de la méthode à travers une re-formulation à partir de considérations énergétiques d'une part, et la création d'éléments de haute précision géométrique et physique d'autre part. Dès 1960, la méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution de problèmes physiques linéaires ou non linéaires, stationnaires ou non stationnaires non seulement dans le domaine des structures mais aussi dans d'autres domaines tels que la mécanique des sols, la mécanique des fluides, la thermique, l'électromagnétisme... L'utilisation de cette méthode s'est donc répandue, au cours des dernières décennies, dans divers secteurs industriels tels que l'aéronautique, la construction navale, l'industrie

automobile et dans des domaines liés, entre autres, à la mécanique des matériaux et des structures.

En calcul des structures, l'utilisation de la méthode des éléments finis contribue efficacement à l'optimisation des structures soumises à des chargements statiques ou dynamiques.

Pour la mise au point d'essais expérimentaux, la simulation peut jouer un rôle prépondérant dans l'optimisation et l'identification des variables principales à mesurer au cours de l'essai.

En résumé, les problèmes traités par la M.E.F sont généralement liés au dimensionnement, à l'optimisation et à la fiabilité de l'objet à concevoir ou à construire. La finalité étant de simuler numériquement le comportement d'une structure soumise à diverses sollicitations mécaniques afin d'évaluer l'état de déformation, donc la valeur des contraintes en supposant un comportement linéaire, et d'en optimiser les paramètres structuraux. Sans totalement se substituer aux essais expérimentaux, la simulation numérique constitue donc un outil complémentaire qui s'avère souvent beaucoup plus rapide et moins onéreux que ces derniers.

Nous commençons par donner une petite esquisse historique sur la M.E.F Avant de cocher les fondements de base de cette méthode.

IV-2- Aperçu historique :

L'utilisation des méthodes de discrétisation et des approximations numériques pour résoudre les problèmes d'ingénierie est connue depuis très longtemps et le concept de "l'élément fini" provenait de ces méthodes.

Si nous voulons identifier le premier "élément fini", probablement nous serons obligés a revenir en arrière jusqu'à l'approximation géométrique des pyramides par les égyptiens quelques 5000 ans avant. Si nous considérons, par exemple, l'approximation numérique de π comme un point de départ des éléments finis, nous trouvons un archive intéressant dans la Chine, l'Egypte et la Grèce.

L'archive nous montre que l'approximation de π a commencé avec les chinois dès le premier siècle apr. j.c. La valeur de 3.1547 a été proposée pour le calcul du volume d'un cylindre. Liu Hui (265-317 apr. j.c) a utilisé un polygone enfermé dans un cercle pour approximer sa circonférence et a trouver $\pi=3.1416$ en utilisant un polygone de 3072 arrêtes (éléments finis), Tsu Tzong Tze (429 -500 apr. j.c) a démontré que $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ et ceci en utilisant un polygone de 24576 arrêtes.

Plus rigoureusement, si nous considérons les solutions approchées des problèmes d'élasticité comme le point de départ de la M.E.F nous pouvons nous référer à l'apport

historique du développement de Timoshenko. Si nous considérons l'apparition de l'analyse des portiques comme le début de la MEF, nous devons revenir aux travaux de Maxwell, Castignilano, et Mohr pendant la période 1850-1875. Parallèle à ces travaux anticipés sur l'analyse des structures en portiques, le concept d'utiliser l'analogie du maillage pour résoudre les problèmes mécaniques des milieux continus apparaît. En 1940, Courant proposa d'utiliser l'interpolation polynomiale pour formuler des triangles "subrégionaux" comme un méthode variationnelle spatiale de Rayleigh-Ritz (1908) pour avoir des solutions approchées.

L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures entre 1950 et 1960. Tuner, Clough, Martin et Topp introduisent en 1956 le concept "moderne" de l'élément fini: Le comportement de chaque élément est caractérisé par une matrice de rigidité élémentaire. A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode. Signalons en particulier les trois éditions très répandues du livre de Zienkiewicz. Des programmes généraux de type industriel ont apparu, et ne cessent de se développer, et ils sont capables de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels: ABAQUS, ANSYS, CASTEM 2000, NASTRAN, SAMCEF, etc. Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses :

- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu
- Analyse statique ou dynamique
- Prise en compte de lois de comportement complexes
- Problèmes d'optimisation; etc.

IV-3- Idée de la méthode et leurs avantages :

L'idée fondamentale de cette méthode est de discontinuer le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple.

Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation.

En effet, l'analyse numérique ou la modélisation numérique présente des avantages par rapport à l'expérimentation dans le cas où :

-l'expérimentation n'est pas réalisable pour des raisons matérielles, des difficultés n'est pas réalisable économique ou des délais trop courts ;

-les résultats expérimentaux sont trop incomplets ou trop bruités pour être exploités.

Permet les avantages de méthode des éléments finis :

Elle possède deux grands avantages sur celle des différences finies : elle s'adapte beaucoup mieux et sans grand effort, d'une part aux frontières de forme irrégulière, et d'autre part aux conditions aux limites font intervenir une dérivée (c'est le cas du deuxième type à flux non nul ou du troisième type) ou encore la conductivité est variable.

IV- 4- Fondement de la méthode des éléments finis :

Comme nous l'avons déjà vu, La MEF est une méthode générale de résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui caractérisent un système physique et ceci en le transformant en un système d'équations algébriques.

Nous allons tout d'abord construire les équations gouvernantes de notre système physique en Mécanique des structures et ceci après avoir introduit le principe de travail virtuel.

IV-5- Principe de travail virtuel :

a) Principe du travail virtuel (dû au déplacement virtuel) :

Dans la mécanique variationnelle, nous imaginons qu'il y a des déplacements qui se produisent, mais dans la réalité aucun de tels déplacements n'existent, ces déplacements fictifs sont les déplacements virtuels (δq) et les travaux effectués par ces déplacements sont appelés travaux virtuels (δW) on aura donc

$$\delta W = \sum P_i \delta q_i \quad (IV.1)$$

Théorème:

Une condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre des systèmes physiques est que le travail virtuel effectué par les forces externes égale et opposé à celui effectué par les forces internes

$$\delta W^e + \delta W^i = 0 \quad (IV.2)$$

Pour les milieux continus élastiques, le travail effectué par les forces internes W^i est égal et opposé à l'énergie de déformation U interne,

$$W^i = -U \quad (IV.3)$$

En remplaçant Eq. (1.5) dans Eq. (1.4) et en représentant δW^e par δW on obtient:

$$\delta W = \delta U \quad (IV.4)$$

C'est le principe du travail virtuel (dû au déplacement virtuel).

b) Principe du travail virtuel complémentaire (dû à la force virtuelle) :

La figure (1.4) représente un diagramme force-déplacement. On définit W^* et U^* comme étant le complémentaire et l'énergie de déformation complémentaire respectivement, δ étant un opérateur variationnelle définissant une quantité virtuelle. De la figure on remarque que:

$$\delta W^* = q \delta P \quad (IV.5)$$

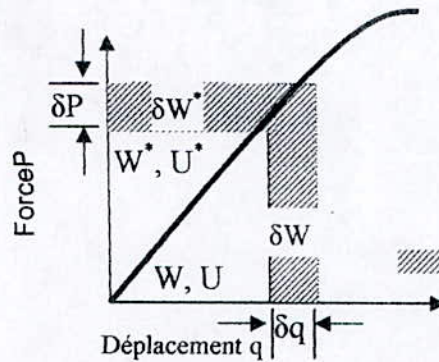


Figure IV.1 : courbe force-déplacement avec les travaux et les énergies associés

Le principe du travail virtuel est aussi maintenu dans le cas du travail complémentaire et l'énergie de déformation :

$$\delta W^* = \delta U^* \quad (IV.6)$$

Dans ce cas le travail virtuel due au force virtuel

c) Premier théorème de Castigliano

Pour un déplacement virtuel δq_i sous une charge P_i le travail virtuel est égale à $P_i \delta q_i$, selon Eq. (1.4) ce travail virtuel est égal à l'énergie de déformation virtuelle:

$$\delta U = P_i \delta q_i \quad (IV.7)$$

Or, à la limite :

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (IV.8a)$$

Si au lieu du déplacement virtuel δq_i , nous introduisons une rotation virtuelle $\delta \theta_i$ dans le point où agit le moment M_i l'équation (1.8a) peut être écrite comme

$$M_i = \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \quad (\text{IV.8b})$$

Les équations (1.8a) et (1.8b) sont le premier théorème de Castigliano.

IV-6-Les démarches de M.E.F :

Les différentes étapes de la méthode des éléments finis sont les suivantes:

- Représentation du domaine de volume V par un ensemble de sous domaines de volume V^e :

$$V = \sum V^e; W = \sum W^e$$

- Représentation de la géométrie de chaque élément V^e :

$$\{X(\xi)\} = [N(\xi)] \{X_n^*\} \quad (\text{IV.1})$$

$\{X\}$ position d'un point; $\{X_n\}$ coordonnées des nœuds définissant V^e

ξ coordonnées paramétriques ξ, η, ζ

$[N]$ fonction d'interpolation en variables paramétriques.

- Représentation (iso paramétrique) de la fonction solution $\{u\}$ sur chaque élément :

$$\{u(\xi)\} = [N(\xi)] \{u_n\}; \{u^*(\xi)\} = [N(\xi)] \{u_n^*\}$$

$\{U\}$ fonction solution; $\{u^*\}$ fonctions tests (ou virtuelles).

$\{U_n\}$ variables nodales caractérisant la fonction solution.

$\{U_n^*\}$ variable nodales virtuelles.

- Représentation de la forme variationnelle (discrétisation).
- Calcul élémentaire: sur chaque élément la quantité W , noté W^e , s'exprime en fonction de $\{u_n\}$ et $\{u_n^*\}$ Eq. (1.2):

$$W^e = \langle u_n^* \rangle ([k] \{u_n\} - \{f_n\}) \quad (\text{IV.2})$$

$[K]$ Matrice élémentaire (dite de rigidité); $\{f_n\}$ vecteur élémentaire des sollicitations.

- Assemblage: construction de $[K]$ et $[F]$:

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \langle u_n^* \rangle ([K] \{u\} - \{f_n\}) \quad (\text{IV.3})$$

$$W = \langle U^* \rangle ([K] \{U\} - \{F\}) = 0 \quad U^*$$

Soit $[K] \{U\} = \{F\}$

$[K]$ Matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires;

$\{F\}$ Vecteur global des sollicitations obtenu par assemblage des vecteurs sollicitations élémentaires.

- Résolution :

En tenant compte des conditions aux limites, trouvées $\{U\}$ tel que:

$$\{R\} = [K] \{U\} - \{F\} = 0 \quad (IV.4)$$

Pour un problème linéaire: $\{U\} = [K]^{-1} \{F\}$

- Evaluation des quantités relatives à chaque élément :

-Extraire $\{u\}$ de $\{U\}$

-Calculer des gradients de $\{u\}$ en un point de l'élément (déformation)

-Calculer les quantités représentatives du problème (contraintes).

Note : En mécanique des structures, dans la résolution de nombreux problèmes sur les efforts tranchants, les moments, les déformations et la flexion des poutres ou sur le flambement des poteaux, on est conduit à écrire des équations différentielles ordinaires tandis que dans la résolution des problèmes de flexion des plaques ou de vibration des poutres ainsi que les problèmes du thermique, on est conduit à écrire des équations aux dérivées partielles.

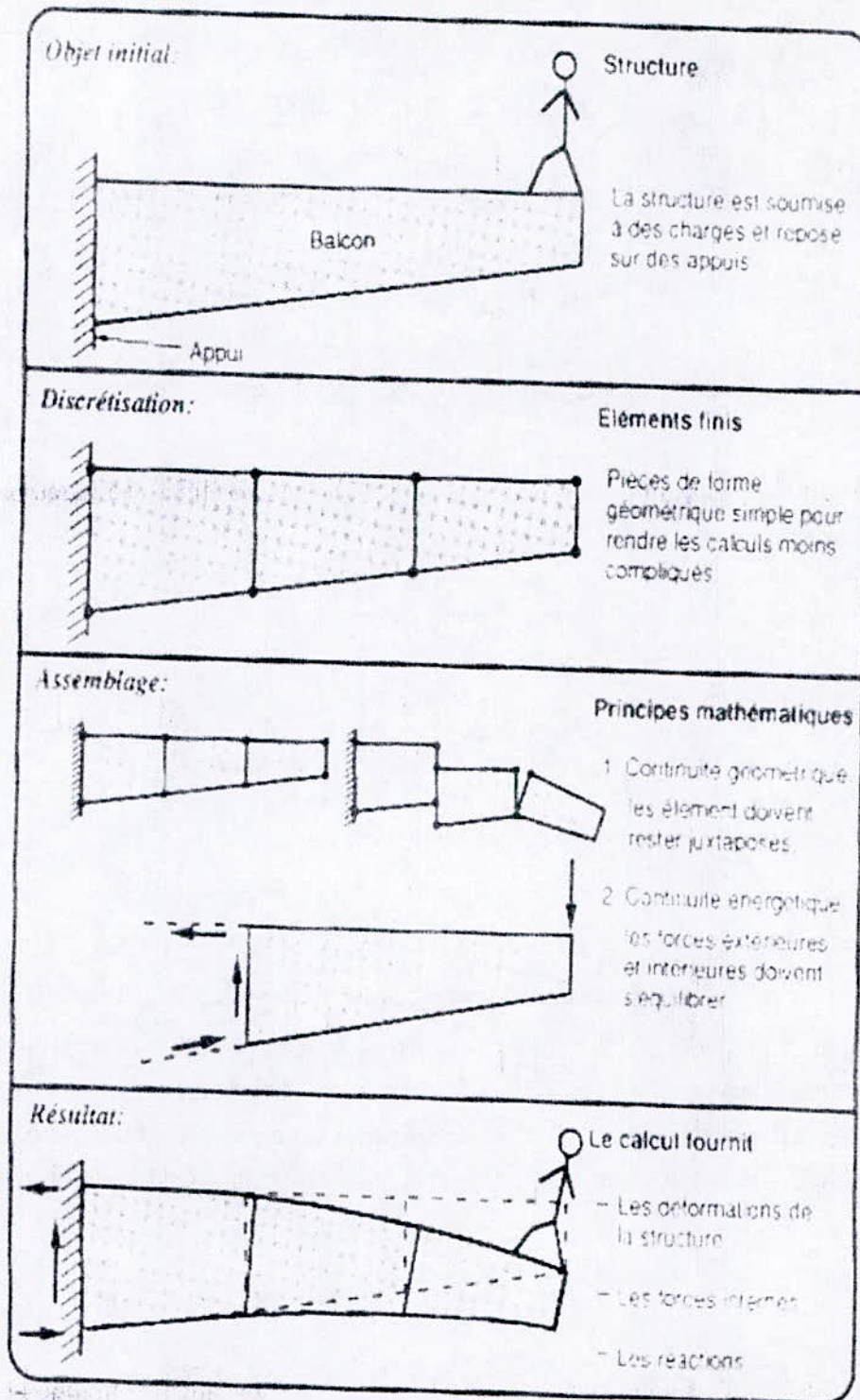


Figure IV.2: Affiche sur l'analyse des structures par éléments finis (EPFL)

Cette figure illustre les différents aspects de la méthode des éléments finis (problème physique, discrétisation, assemblage, présentation des résultants)

IV-7- Avantages des éléments en coordonnées naturelles normalisées

- 1 -grande simplification dans les calculs des intégrales.
- 2-une grande diversité de la géométrie des éléments
- 3-possibilité d'utiliser des éléments d'ordre supérieur (pour avoir une très grande précision)

IV-9- CONVERGENCE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

La convergence de la solution éléments finis vers la solution exacte au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente peut se faire soit de manière monotone soit de manière non monotone.

1) Convergence monotone :

Les éléments doivent être complets et compatibles.

a) Élément complet :

Les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter :

- déplacement de corps rigide :
- état de déformation constante

A mesure que le nombre d'éléments dans un maillage, augmente la taille de l'élément devient petit et la déformation au sein de l'élément tend vers une valeur constante.

b) Élément compatible :

Les déplacements au sein des éléments et à travers les limites séparant les éléments doivent être continus. Physiquement la compatibilité assure qu'il n'y aura pas apparition d'espace ou vides entre éléments lorsque l'assemblage est chargé.

La compatibilité est difficile à satisfaire lorsque les d.d.l. aux nœuds sont dépendants (déplacement, rotation) : flexion de plaques, Coques. Il est avantageux d'avoir des d.d.l. indépendants.

complétude }
compatibilité } \Rightarrow Convergence monotone

2) Convergence non monotone :

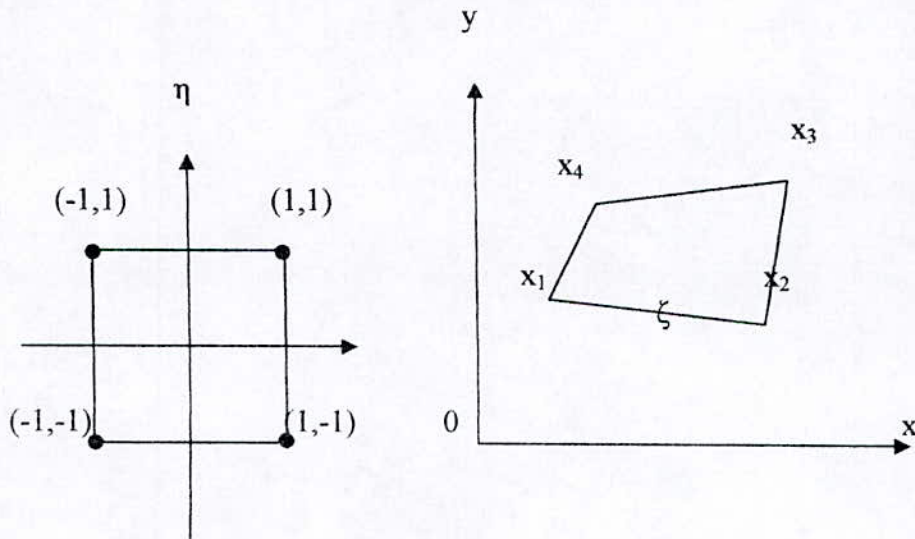
En pratique, nous remarquons souvent que la solution éléments finis converge vers la solution exacte malgré l'emploi d'éléments ne préservant pas la continuité inter éléments.

Il s'agit dans ce cas de convergence non monotone due à l'utilisation d'éléments incompatibles.

IV-10-DES EXEMPLES :

a- SOLUTION D'UN EXEMPLE Q4:

Construction des fonctions $N(\xi)$ d'un élément quadrilatéral isoparamétrique à 4 nœuds.



$$\xi = \langle \xi \ \eta \rangle$$

Elément de référence

$$X = \langle x \ y \rangle$$

Elément réel

Puisque l'élément est isoparamétrique, les nœuds sont à la fois nœuds géométriques et d'interpolation

a) Choix de la base polynomiale:

nous avons $n_d = 4$ variable nodales, et ne pouvons donc pas utiliser un polynôme complet. Le meilleur choix, qui respecte la symétrie et la continuité de u entre les éléments, est une base bilinéaire en ξ et η

$$\langle P \rangle = \langle 1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \rangle.$$

notons que $u(\xi) = \langle P \rangle \{a\}$ devient linéaire sur chaque coté $\xi = \pm 1$ et $\eta = \pm 1$.

b) Evaluation de $[P_n]$:

Evaluons $\langle P(\xi) \rangle$ en chacun des 4 nœuds de coordonnées ξ_i :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \{\xi_n\} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \{\eta_n\} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Inversion de $[P_n]$:

Dans ce cas, la matrice $[P_n]$ est orthogonale puisque les produits scalaires de ses différentes colonnes sont nuls. Chaque vecteur colonne a pour norme 4.

Donc:

$$[P_n]^{-1} = \frac{1}{4} [P]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Expression de $\langle N \rangle$:

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1}$$

$$\langle N \rangle = \left\langle \frac{1-\xi-\eta+\xi\eta}{4}, \frac{1+\xi-\eta-\xi\eta}{4}, \frac{1+\xi+\eta+\xi\eta}{4}, \frac{1-\xi+\eta-\xi\eta}{4} \right\rangle$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1+\eta); (1-\xi)(1+\eta) \rangle$$

L'élément est isoparamétrique:

$$\langle \bar{N} \rangle \equiv \langle N \rangle$$

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$y(\xi, \eta) = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

e) Détermination de $[J]$:

Dérivation les fonction \bar{N} on obtenir, selon (IV.27):

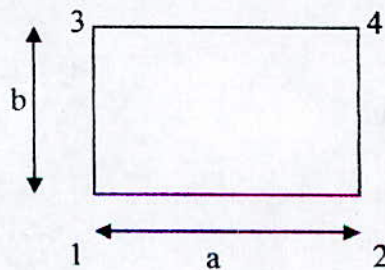
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1-\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

Dans le cas particulier ou l'élément est rectangulaire de cotés a et b

$$x_2 = x_3 = a \text{ et } x_1 = x_4 = 0$$

$$y_3 = y_4 = b \text{ et } y_1 = y_2 = 0$$



Donc: $\det(J) = \frac{ab}{4}$

Tel que : $a=b=10$

Donc: $\det(J)=25$

De (IV-8)

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle P, \xi \rangle \\ \langle P, \eta \rangle \end{bmatrix} [P_n]^{-1} \{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle N, \xi \rangle \\ \langle N, \eta \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} = [B_\xi] \{u_n\}$$

Donc:
$$\begin{bmatrix} \langle N, \xi \rangle \\ \langle N, \eta \rangle \end{bmatrix} = [B_\xi]$$

Par ailleurs:
$$B_\xi = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1-\eta) \\ -(1+\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

D'ou:
$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T \cdot k \cdot B \cdot \det(J) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

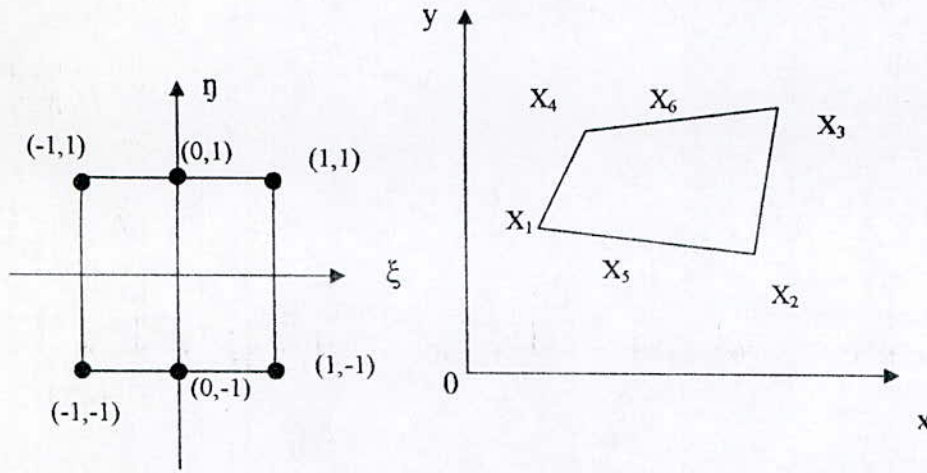
Avec:
$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc:

$$K = 25 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b- SOLUTION D'UN EXEMPLE Q6:

Construction des fonctions $N(\xi)$ d'un élément quadrilatéral isoparamétrique à 6 nœuds



$\xi = \langle \xi \ \eta \rangle$

$X = \langle x \ y \rangle$

Elément de référence

Elément réel

Puisque l'élément est isoparamétrique, les nœuds sont à la fois nœuds géométriques et d'interpolation.

a) Choix de la base polynomiale:

Nous avons $n_d=6$ variable nodales, et ne pouvons donc pas utiliser un polynôme complet. le meilleur choix, qui respecte la symétrie et la continuité de u entre les éléments, est une base bilinéaire en ξ et η

$\langle P \rangle = \langle 1 \ \xi \ \eta \ \xi^2 \ \eta\xi \ \eta^2 \rangle$

Notons que $u(\xi) = \langle P \rangle \{a\}$ devient linéaire sur chaque coté $\xi = \pm 1$ et $\eta = \pm 1$.et $\xi=0$

b) Evaluation de $[P_n]$:

Evaluons $\langle P(\xi) \rangle$ en chacun des 6 nœuds de coordonnées ξ_i :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \{\xi_n\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\eta_n\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) Inversion de $[P_n]$:

Dans ce cas, la matrice $[P_n]$ est orthogonale puisque les produits scalaires de ses différentes colonnes sont nuls. Chaque vecteur colonne a pour norme 6.

Donc:

$$[P_n]^{-1} = \frac{1}{4} [P]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Expression de $\langle N \rangle$:

$$\langle N \rangle = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1}$$

$\langle N \rangle =$

$$\left\langle \frac{-\eta + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2}{4}, \frac{1 - \xi + \eta + \xi^2 - \xi\eta + \eta^2}{4}, \frac{1 + \xi + \eta + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2}{4}, \frac{1 - \xi + \eta + \xi^2 - \xi\eta + \eta^2}{4}, \frac{1 + \xi + \eta + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2}{4}, \frac{1 + \xi - \eta + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2}{4} \right\rangle$$

L'élément est isoparamétrique:

$$\langle \bar{N} \rangle \equiv \langle N \rangle$$

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} \quad y(\xi, \eta) = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{Bmatrix}$$

e) Détermination de $[J]$:

Dérivation les fonctions \bar{N} on obtenir.

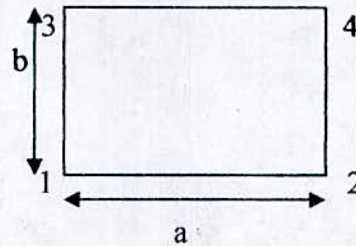
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1+2\xi+\eta) & (-1+2\xi-\eta) & (+1+2\xi+\eta) & (-1+2\xi-\eta) & (+1+2\xi+\eta) & (+1+2\xi+\eta) \\ (-1+\xi+2\eta) & (1-\xi+2\eta) & (+1+\xi+2\eta) & (+1-\xi+2\eta) & (+1+\xi+2\eta) & (-1+\xi+2\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix}$$

Dans le cas particulier ou l'élément est rectangulaire de cotés a et b

$$x_2=x_3=a \text{ et } x_1=x_4=0$$

$$y_3=y_4=b \text{ et } y_1=y_2=0$$



$$\text{Donc: } \det(J) = \frac{ab}{4}$$

$$\text{Tel que : } a=8$$

$$b=6$$

$$\text{Donc: } \det(J)=12$$

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle P, \xi \rangle \\ \langle P, \eta \rangle \end{bmatrix} [P_n]^{-1} \{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle N, \xi \rangle \\ \langle N, \eta \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} = [B_\xi] \{u_n\}$$

$$\text{Donc: } \begin{bmatrix} \langle N, \xi \rangle \\ \langle N, \eta \rangle \end{bmatrix} = [B_\xi]$$

Par ailleurs:

$$B_{\xi} =$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1+2\xi+\eta) & (-1+2\xi-\eta) & (+1+2\xi+\eta) & (-1+2\xi-\eta) & (+1+2\xi+\eta) & (+1+2\xi+\eta) \\ (-1+\xi+2\eta) & (1-\xi+2\eta) & (+1+\xi+2\eta) & (+1-\xi+2\eta) & (+1+\xi+2\eta) & (-1+\xi+2\eta) \end{bmatrix}$$

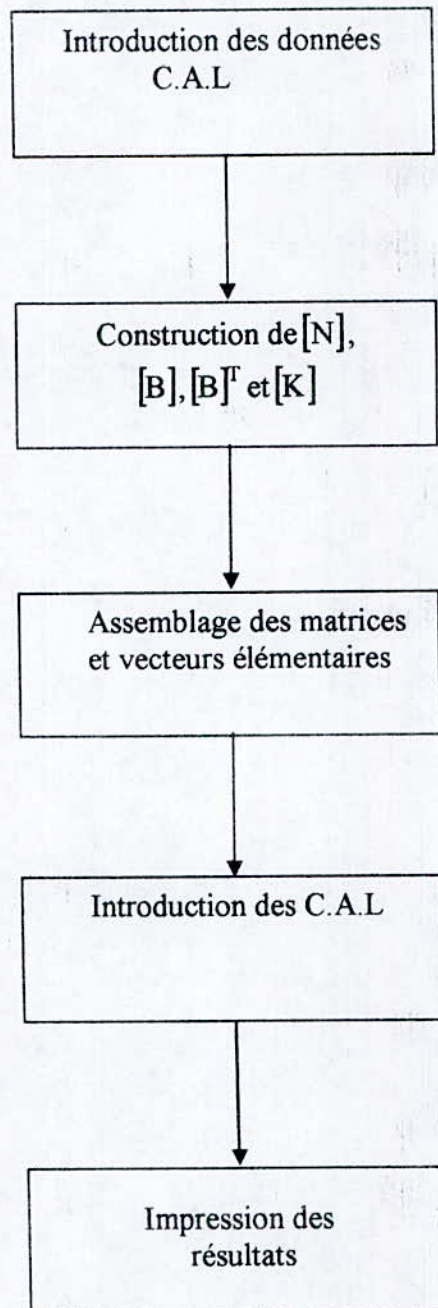
$$\text{D'ou: } K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T \cdot k \cdot B \cdot \det(J) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$\text{Avec: } k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

IV-11-Présentation de l'Algorithme de la M.E.F

On a mis au point un programme MEF qui traite tout les cas du problème étudié.

Les étapes de calcul sont résumées comme ci-dessous:



Notre objectif est de résoudre l'équation de Laplace définie sur un domaine rectangulaire (plaque).

La résolution par méthode des éléments finis exige la discrétisation du domaine.

Le maillage utilisé est constitué d'éléments rectangulaires à quatre ou à six nœuds

En premier lieu, on a utilisé l'élément à quatre nœuds pour le maillage de toute la plaque.

Afin de pouvoir introduire les données dans notre programme on a écrit une sous-routine chargée de la numérotation automatique pour simplifier l'opération et éviter la numérotation manuelle.

Plusieurs cas ont été testés par ce programme et ont montré leur validité.

La figure ci-dessous illustre la technique utilisée dans le programme.

La numérotation est effectuée de manière suivante :

IV-12-Subroutine de maillage et numérotation automatique Q4

NX : nombre d'éléments suivant ox

NY : nombre d'éléments suivant oy

G(I) : vecteur de localisation

II : compteur [1, 2, 3,NX]

JJ : compteur [1, 2, 3 NY]

$$O=(jj-1)*(nx+1)+ii$$

$$M=O+1$$

$$L=jj*(nx+1)+ii$$

$$N=L+1$$

$$G (ng, 1) =L$$

$$G (ng, 2) =O$$

$$G (ng, 3) =M$$

$$G (ng, 4) =N$$

Stop

End

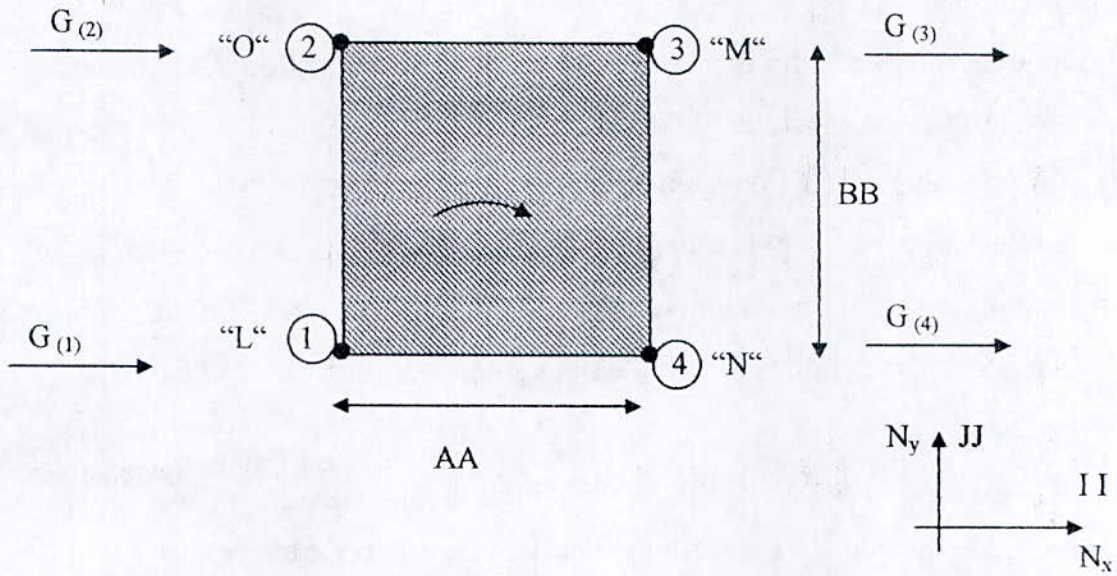


Figure représente technique de la numérotation

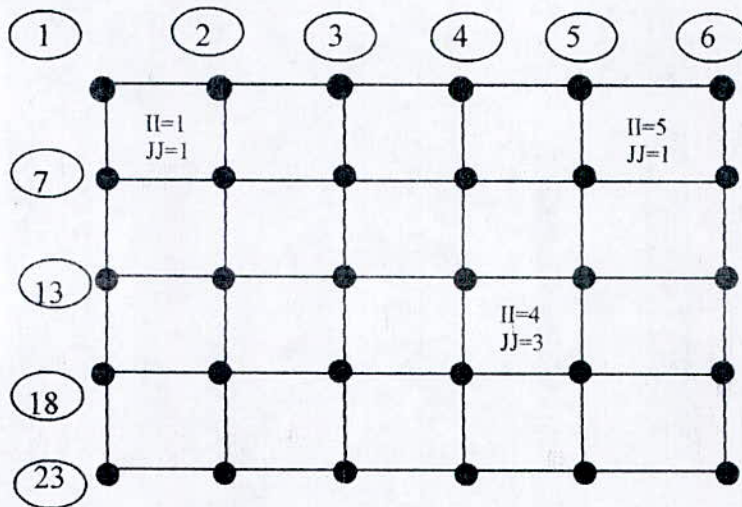
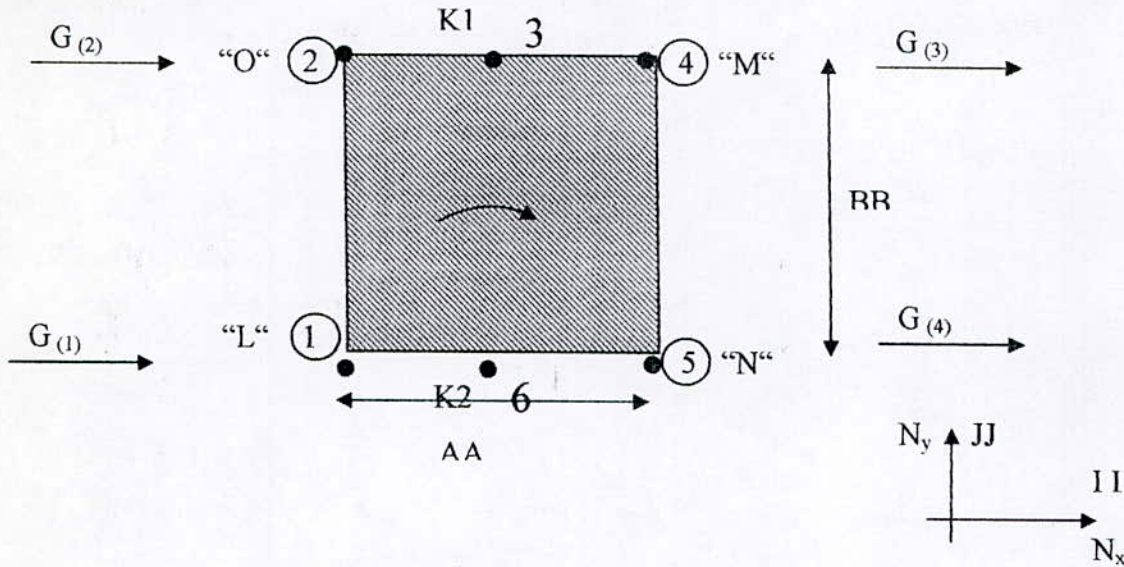


Figure représentant maillage et numérotation automatique

La deuxième étape consiste à associer des éléments à quatre nœuds avec autres éléments

A 6 nœuds. Ceci est effectué automatiquement si on affecte la même numérotation au nœud commun (entre élément à 4 nœuds et à 6 nœuds)

La Figure ci-dessous montre la procédure de numérotation



IV-13- Subroutine de maillage et numérotation automatique Q4 +Q6

NX : nombre d'éléments suivant ox

NY : nombre d'éléments suivant oy

G (I) : vecteur de localisation

II : compteur [1, 2,3..... ..NX]

JJ : compteur [1, 2,3 NY]

$$O=(jj-1)*(nx+2)+ii$$

$$K1=O+1$$

$$M=O+2$$

$$L=jj*(nx+2)+ii$$

$$K2=L+1$$

$$N=L+2$$

$$G_{\nu}(ng, 1) = L$$

$G(\text{ng}, 2) = 0$

$G(\text{ng}, 3) = M$

$G(\text{ng}, 4) = N$

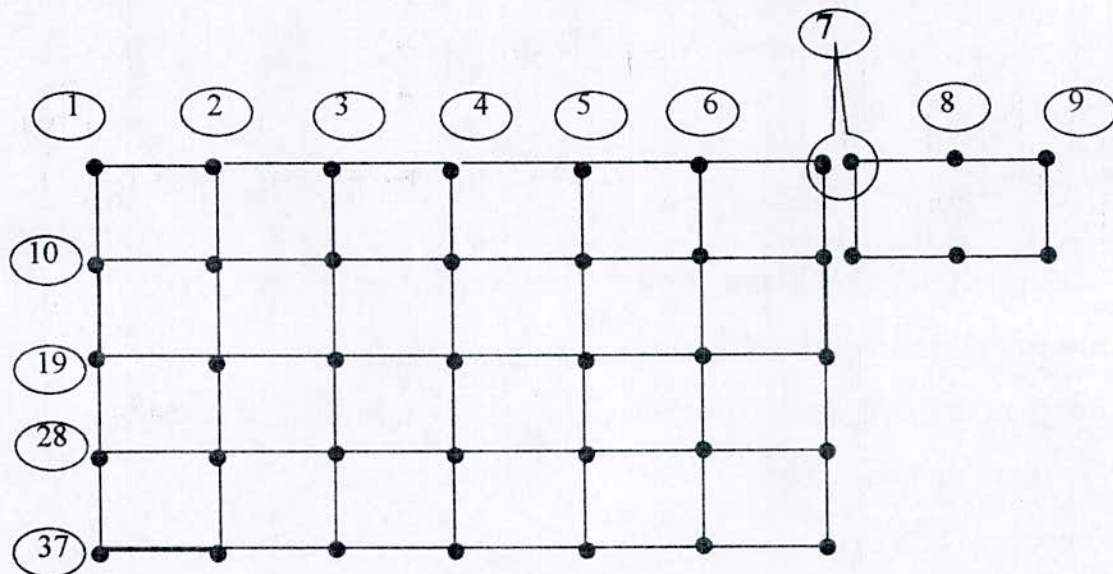
$G(\text{ng}, 5) = K1$

$G(\text{ng}, 6) = K2$

STOP

END

L'association est effectuée implicitement en donnant le même numéro aux nœuds communs entre l'élément Q4 et Q6



Note importante:

Notons que la numérotation doit être effectuée suivant la petite dimension de la plaque afin de minimiser la différence entre les numéros des nœuds d'un même élément ce qui permet de réduire la largeur de la bande de la matrice de rigidité entraînant une économie d'espace sur la machine puisque la matrice de rigidité est stockée en utilisant des techniques qui ne prennent pas en ligne de compte les éléments nuls.

Chapitre V :

Interprétation et Comparaison

des Résultats

V.1) INTRODUCTION :

Dans un premier temps, nous allons présenter les résultats la méthode des éléments finis pour les deux types de maillage (4x3 le pas = 2m) et (8x6 le pas = 1m) pour l'étude de la convergence sur une plaque de dimensions 8*6 m² en utilisant la condition de DIRICHLET

On passe à la résolution analytique de l'équation de Laplace, pour les différents cas de chargements.

À noter que pour la MEF on a utilisé trois types de maillage :

- Un maillage régulier u4x3 (2m x 2m).
- Un maillage raffiné régulier (1m x 1m) : on a augmenter régulièrement le nombre de d.d.l.
- Un maillage raffiné :
 - ✓ Q4 (1m) + Q6 (2m).
 - ✓ Q4 (1m) + Q6 (3m).

Les courbes tracées avec le logiciel de MATLAB utilisant l'option de filtrage.

Notations:

Notation	Signification
u 4x3	u obtenu par MEF maillage de 4x3 éléments.(4 suivant x et 3 suivant y).
u 8x6	u obtenu par MEF maillage de 8x6 éléments.(8 suivant x et 6 suivant y).
Q4	Elément rectangulaire à 4 noeuds
Q6	Elément rectangulaire à 6 noeuds
Q46	L'association de deux éléments rectangulaires à 4 et 6 noeuds respectivement.
u alternativement T	Température obtenue. (on a changer le signe de température de T a u dans ce chapitre).
ANA	La solution analytique (exacte) de l'équation de Laplace
MEF	La solution approximative obtenue par la méthode des éléments finis.
A100	Un potentiel de 100° C voir figure ci-après.
B100	Un potentiel de 100° C voir figure ci-après.
Erreur	L'erreur obtenu dans le cas de chargement indiqué.

V.2) Equation de Laplace :

❖ Différents cas de chargement :

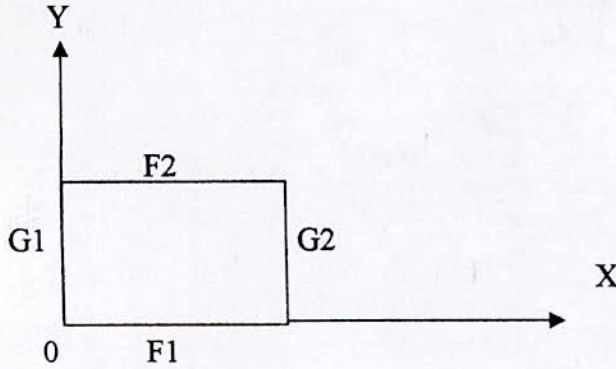


Fig.5-1

a) Cas de chargement A :

$$\begin{cases} F1 = 0 \\ F2 = 0 \\ G1 \neq 0 \\ G2 = 0 \end{cases}$$

b) Cas de chargement B :

$$\begin{cases} F1 = 0 \\ F2 \neq 0 \\ G1 \neq 0 \\ G2 = 0 \end{cases}$$

Notation:

Le potentiel est indiqué comme suivant:

Par exemple, un potentiel de 100°C pour le cas A est noté ainsi : **A100**.

❖ Différents types de maillage utilisés dans la M.E.F :

➤ plaque rectangulaire Q4 :

a) Maillage régulier u4x3 :

Cas de chargement B100:

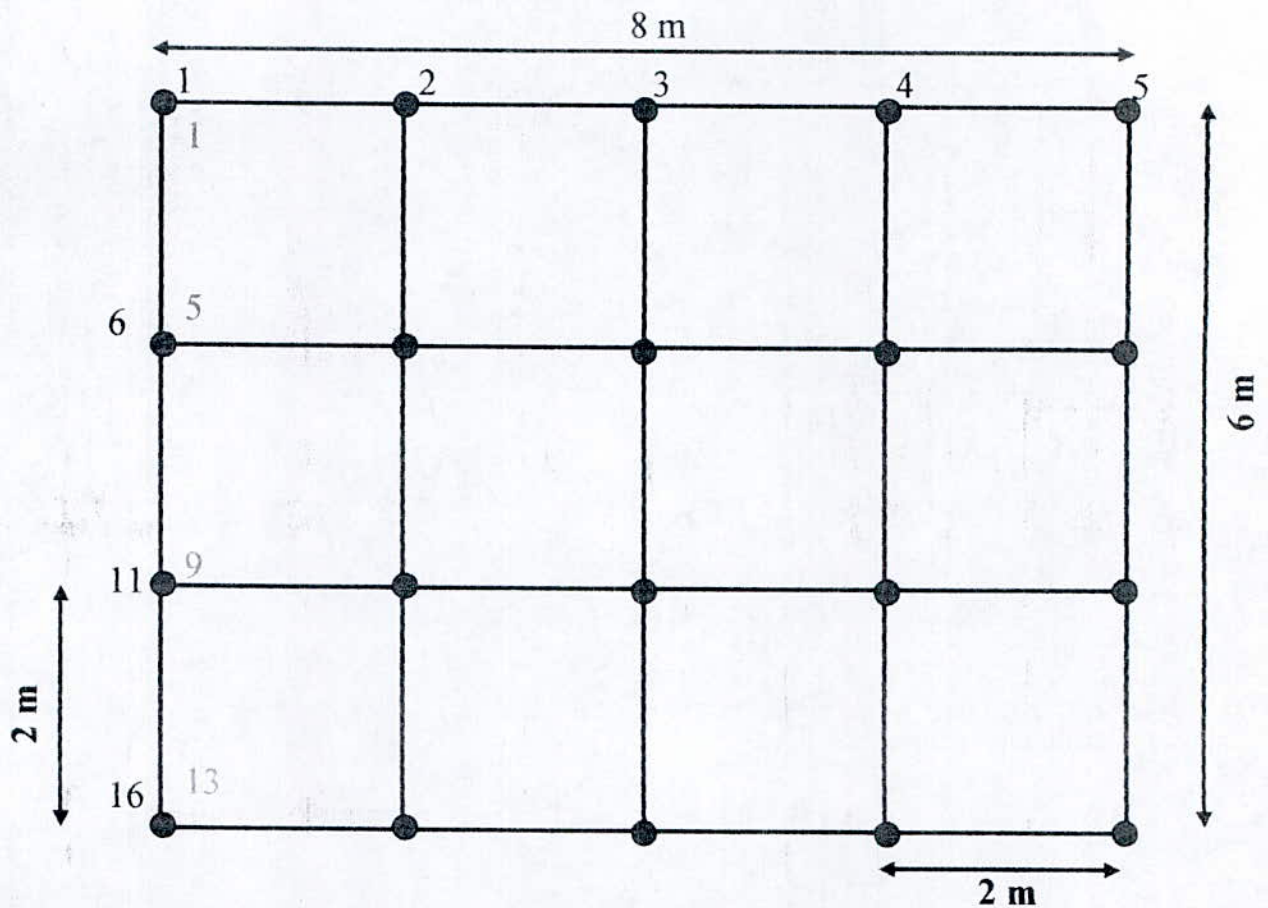


Fig 5.4 : Maillage régulier (chargement B100)

Cas de chargement A100:

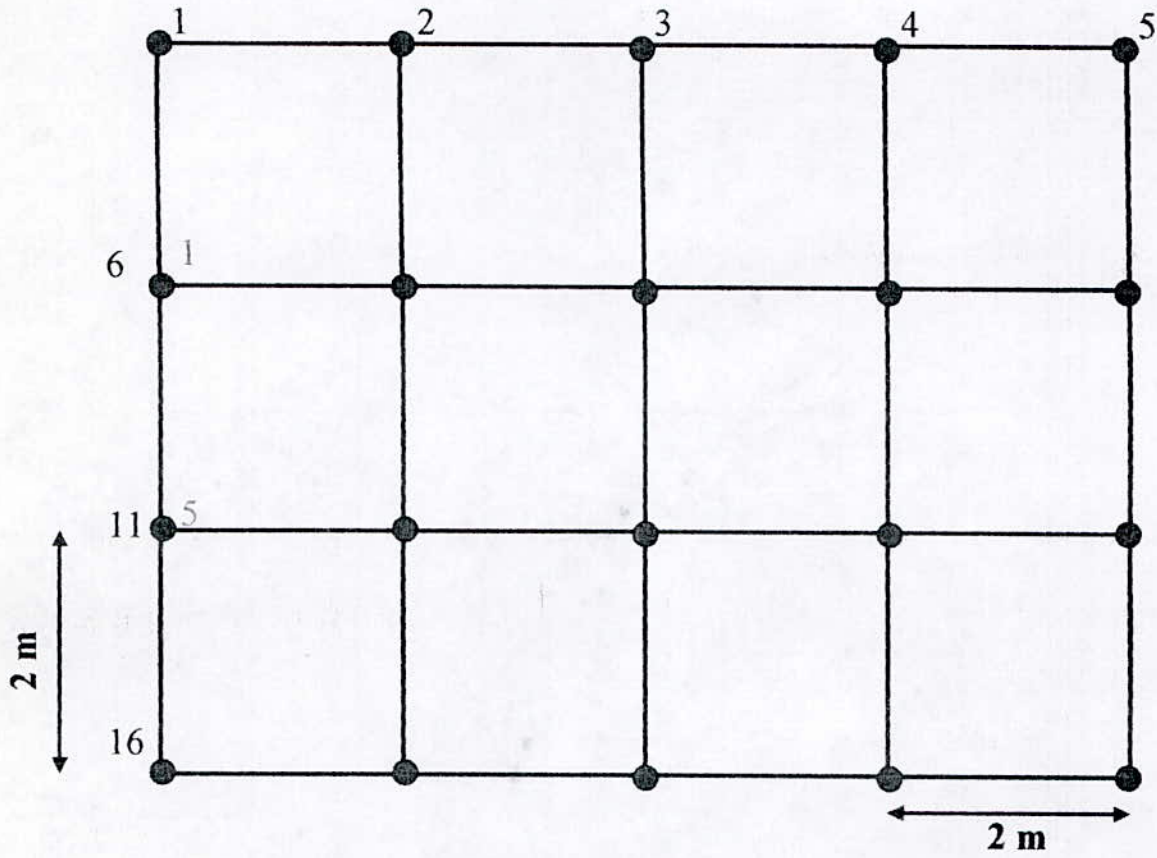
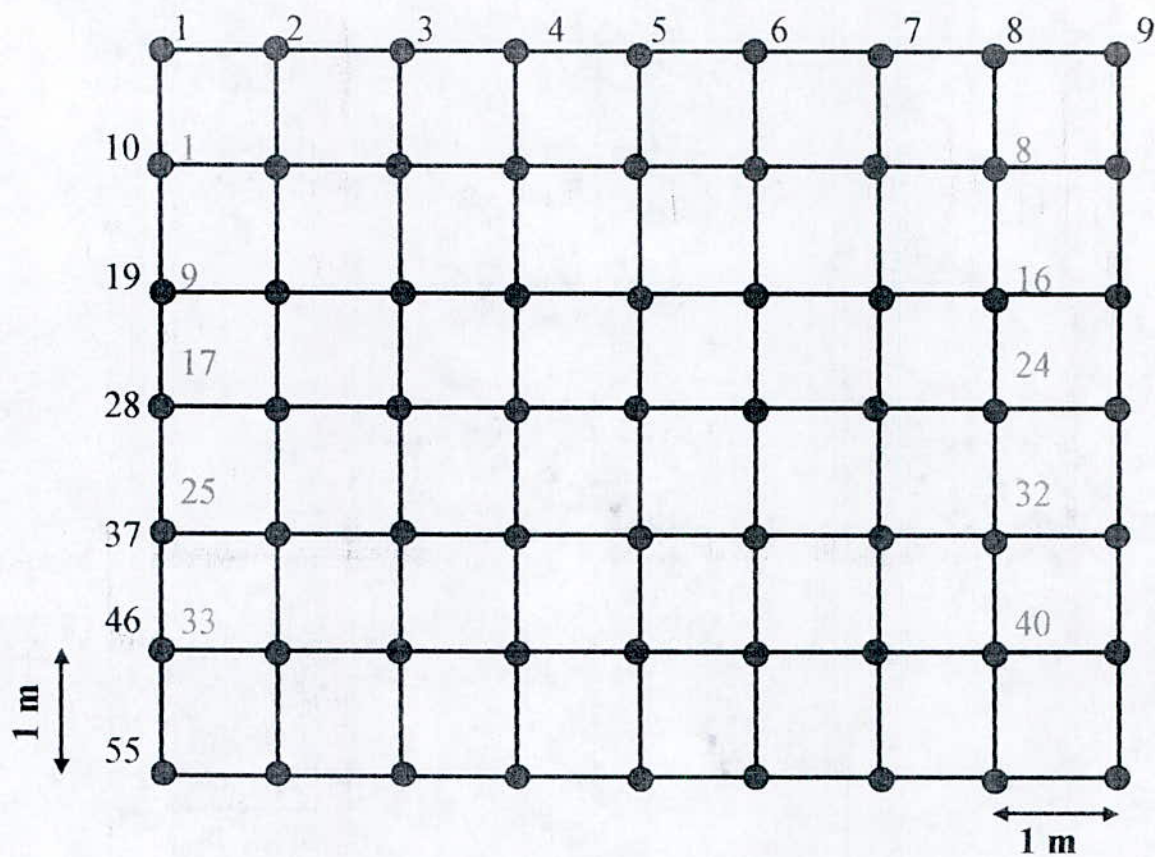


Fig 5.5 : Maillage régulier (chargement A100)

b) Maillage raffiné régulier u8x6 :**Cas de chargement A100:****Fig 5.6 : Maillage raffiné (chargement A100)**

Cas de chargement B100:

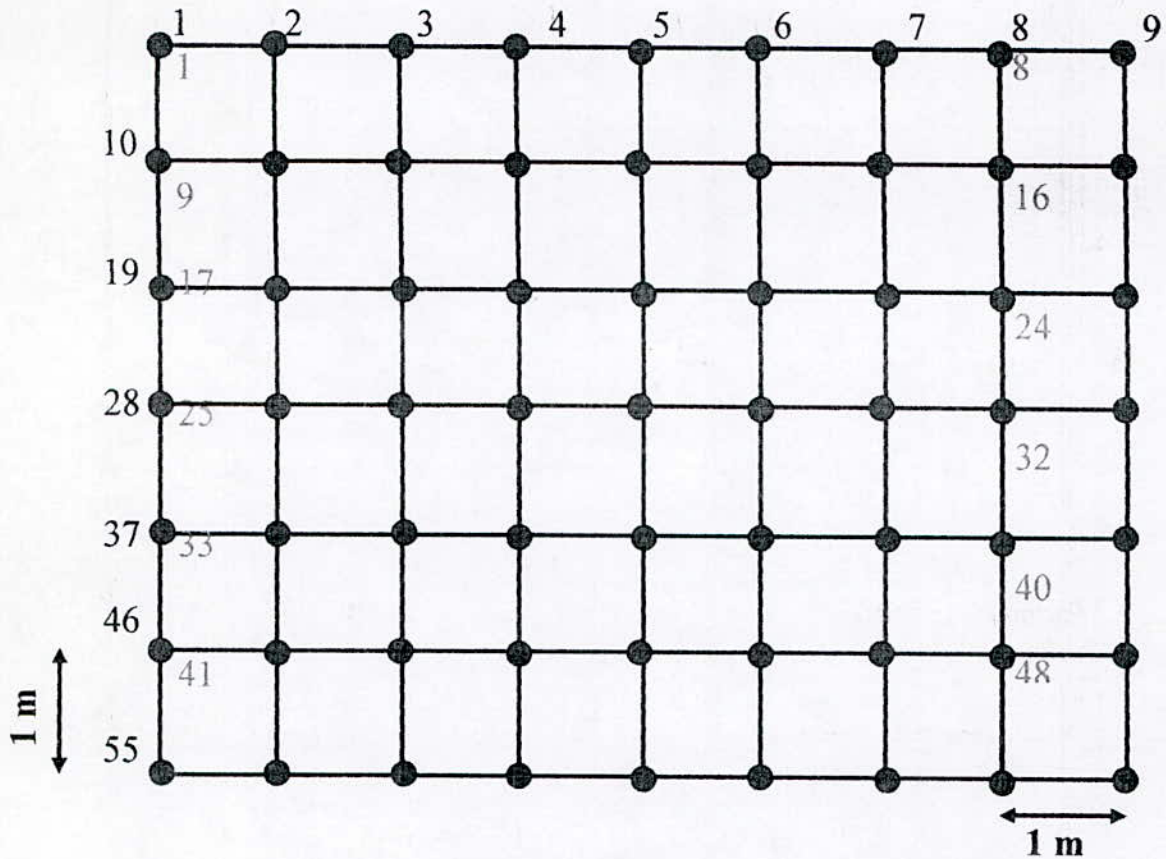


Fig 5.7 : Maillage raffiné (chargement B100)

➤ Cas de la plaque rectangulaire Q4 + Q6 :

a) Maillage (6x1m + 2m) :

Cas de chargement A100:

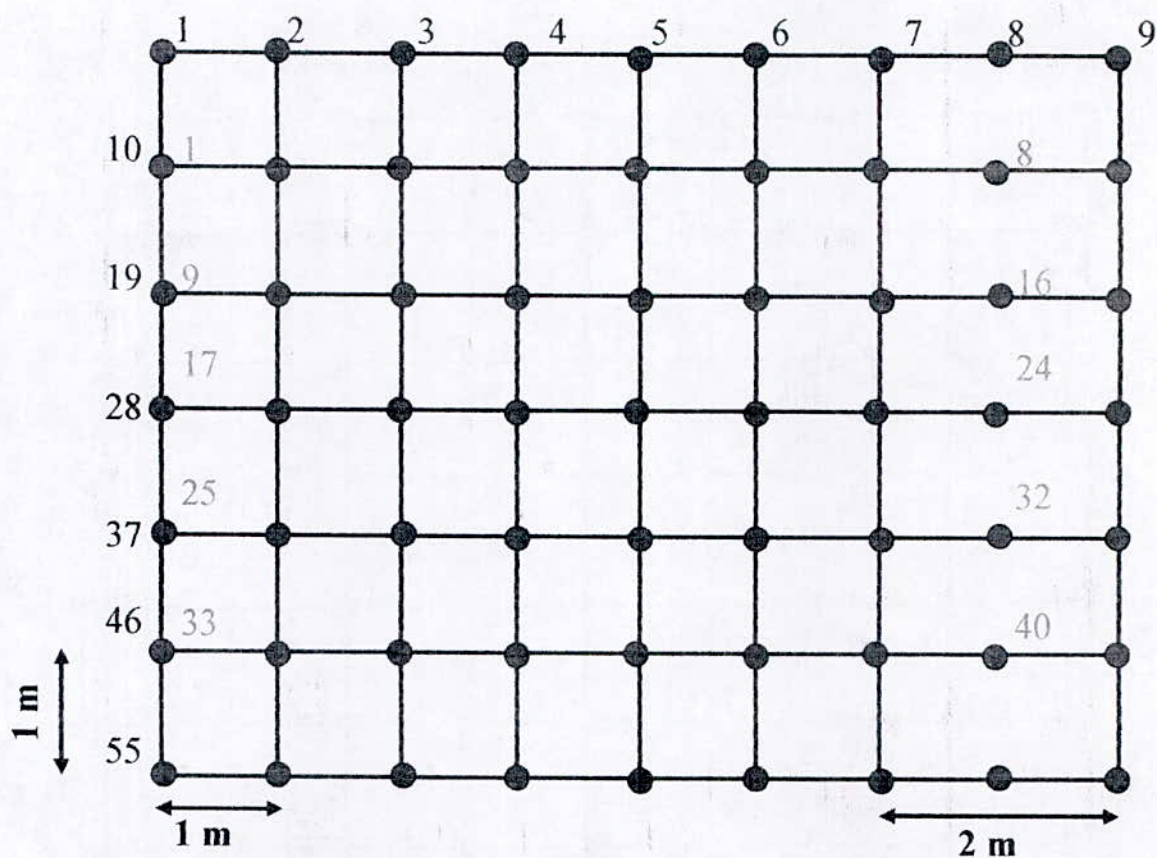


Fig 5.8 : Maillage Q4 + Q6 (chargement A100)

Cas de chargement B100:

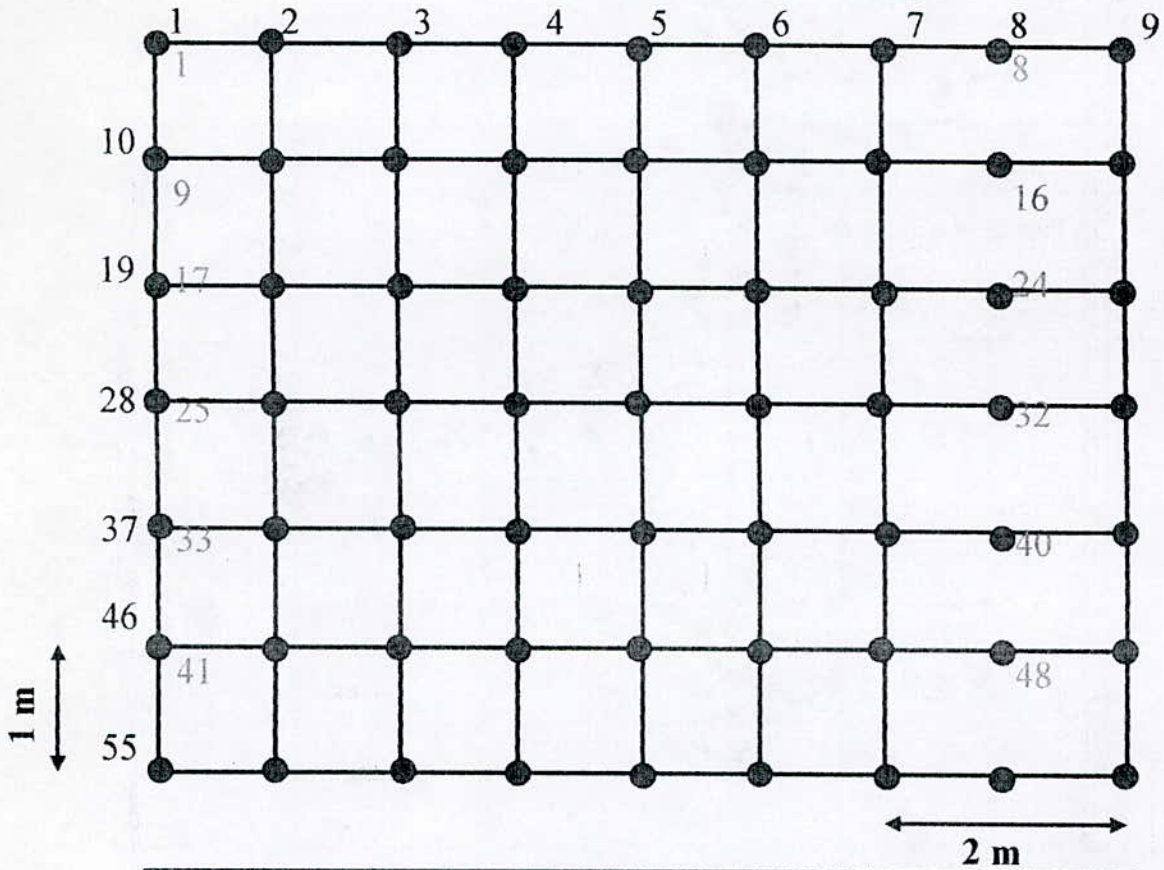


Fig 5.9 : Maillage raffiné Q4 + Q6 (chargement B100)

b) Maillage régulier (5x1m + 3m) :

Cas de chargement A100:

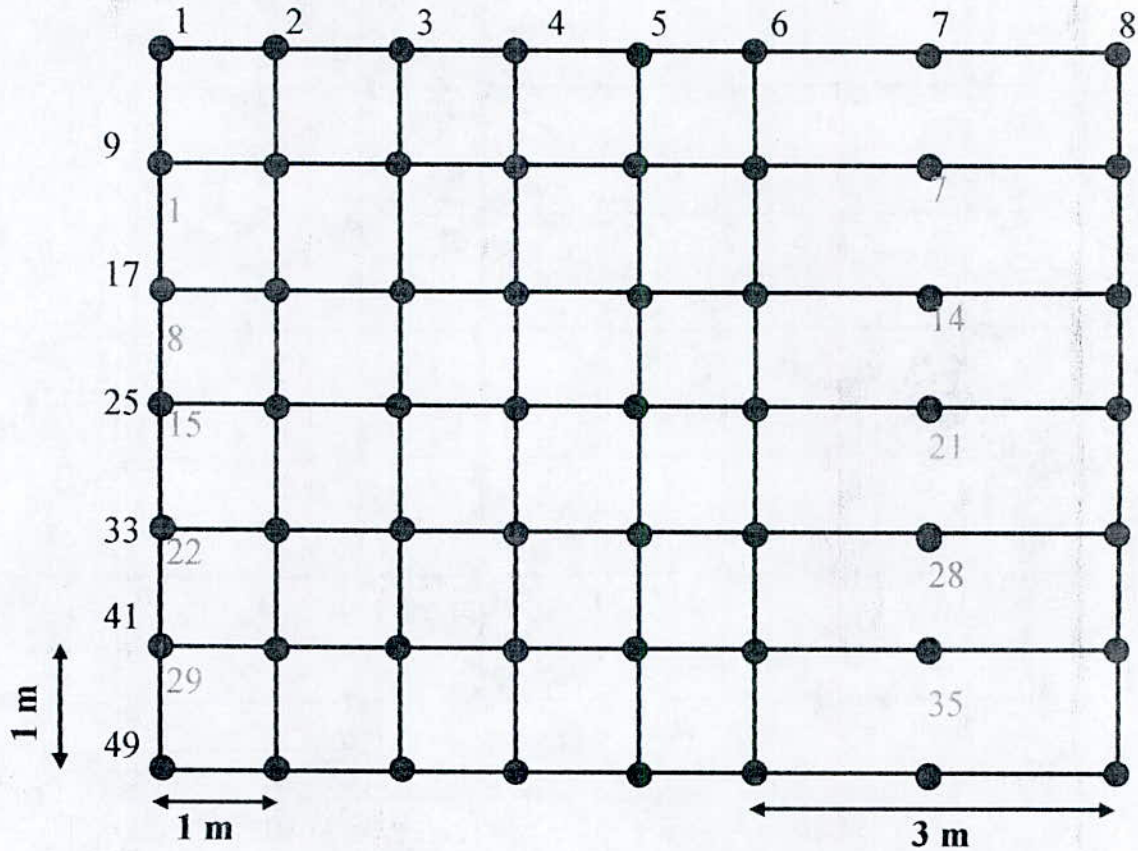


Fig. 5.10 : Maillage raffiné Q4 +Q6 (3m) (chargement A100)

Cas de chargement B100:

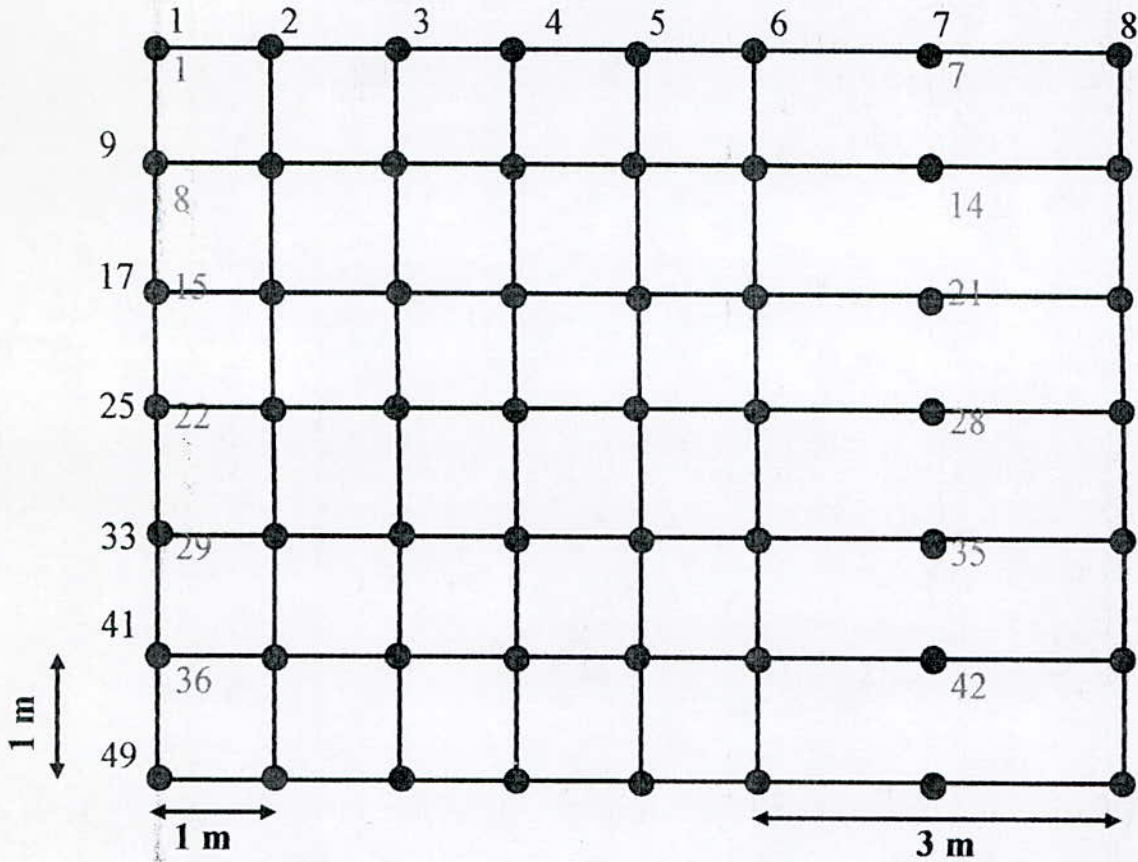


Fig 5.11 : Maillage raffiné Q4 +Q6 (chargement B100)

V.3) Equation de Laplace :

a) Étude de convergence de la MEF :

a.1). Chargement A100 :

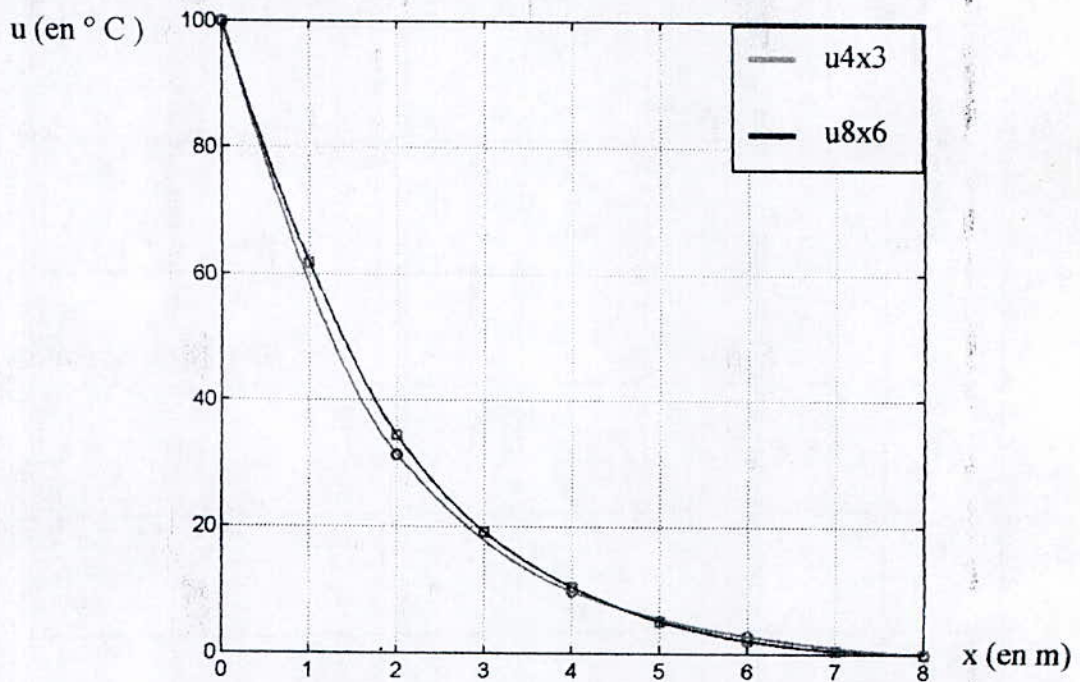


Fig.5-2: Variation de la température.

a.2). Chargement B100 :

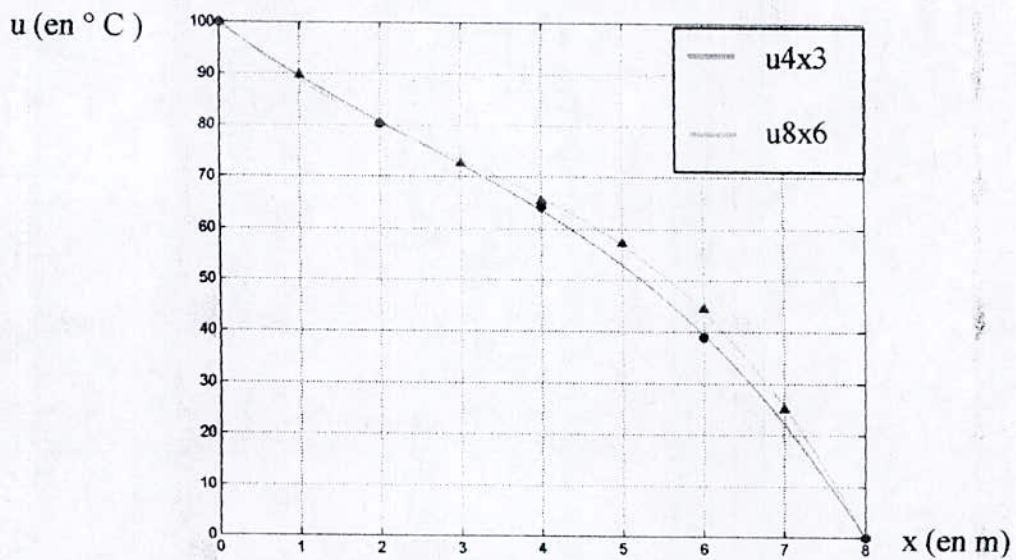


Fig 5.3 : variation de température

COMPARAISON MEF-ANA:

➤ Cas de la plaque rectangulaire Q4:

❖ Maillage raffiné régulier:

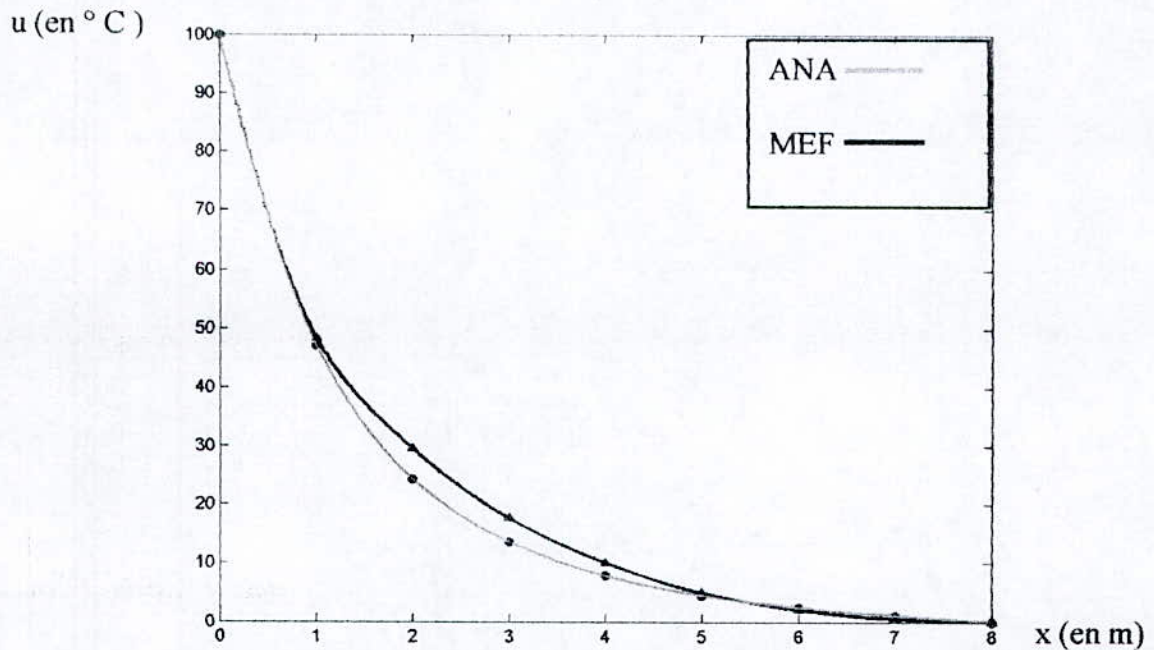
a) Cas de chargement A 100: $y=1,5m$ 

Fig.5-12: Variation de la température

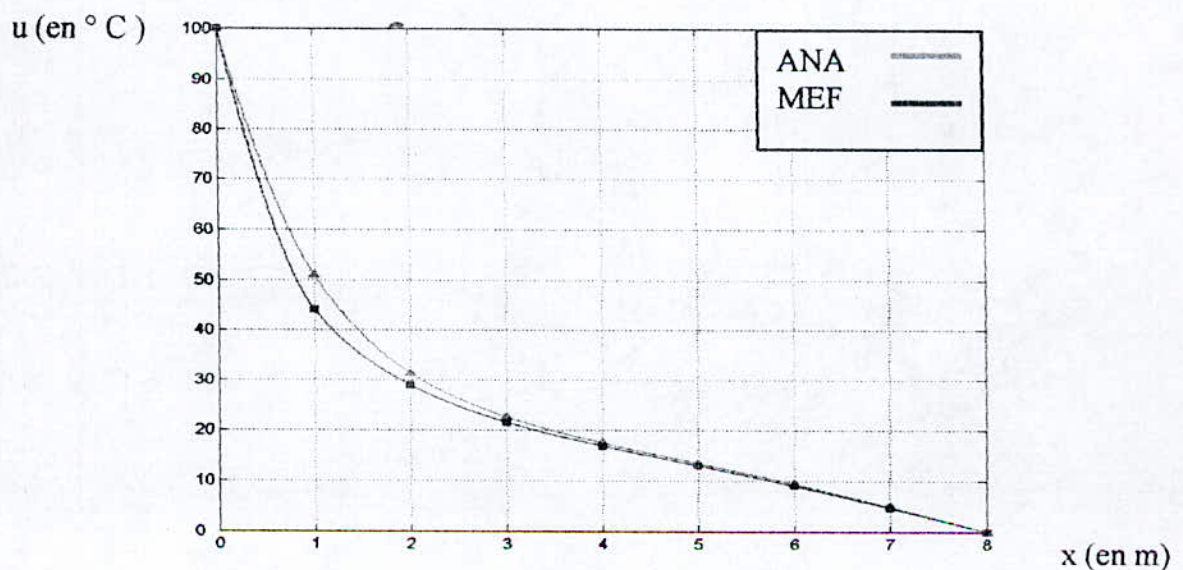
b) Cas de chargement B100 : $y=1m$ 

Fig5-13: Variation de la température.

c) Cas de chargement A 100: $y=2,4m$

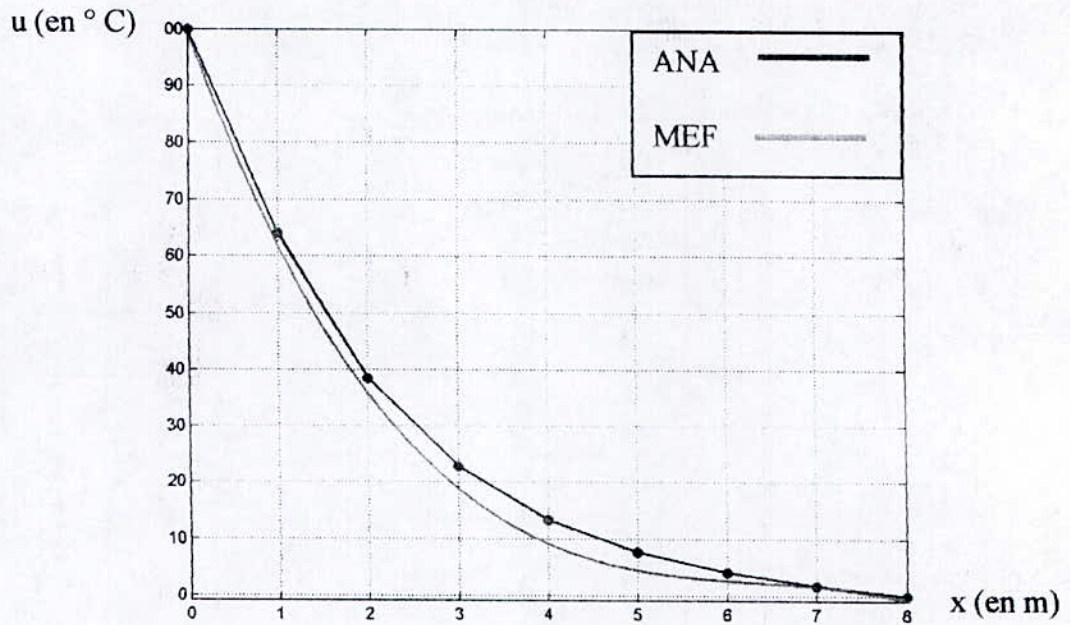


Fig.5-14: Variation de la température.

d) Cas de chargement B100 : $y=5m$.

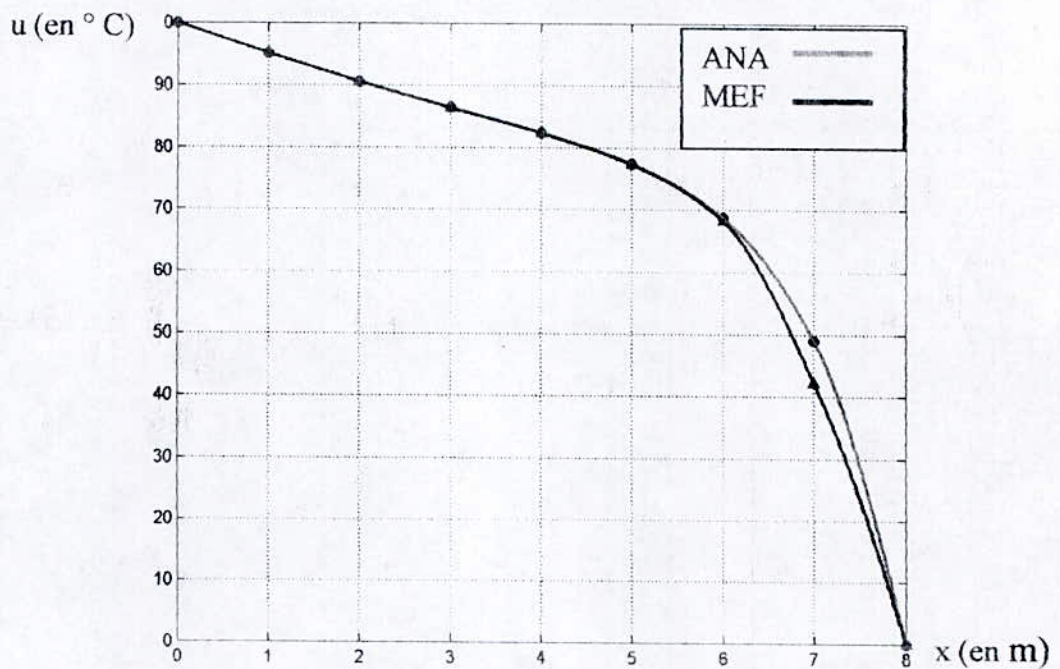


Fig5-15: Variation de la température.

E) cas de chargement A100 y = 3m

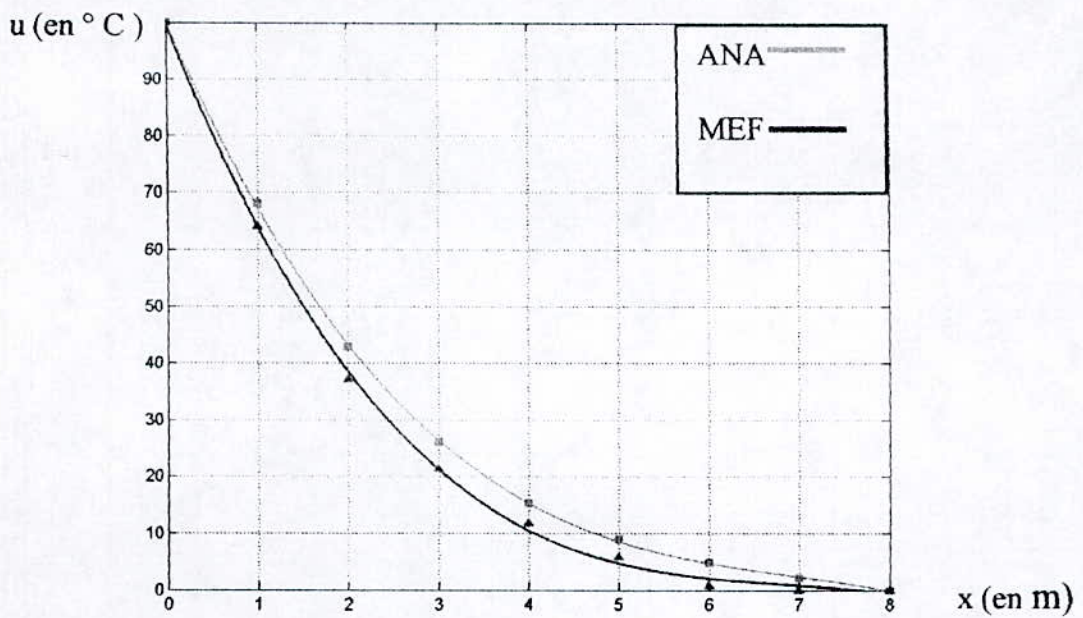


Fig5-16: Variation de la température.

F) cas de chargement B100 y = 3m

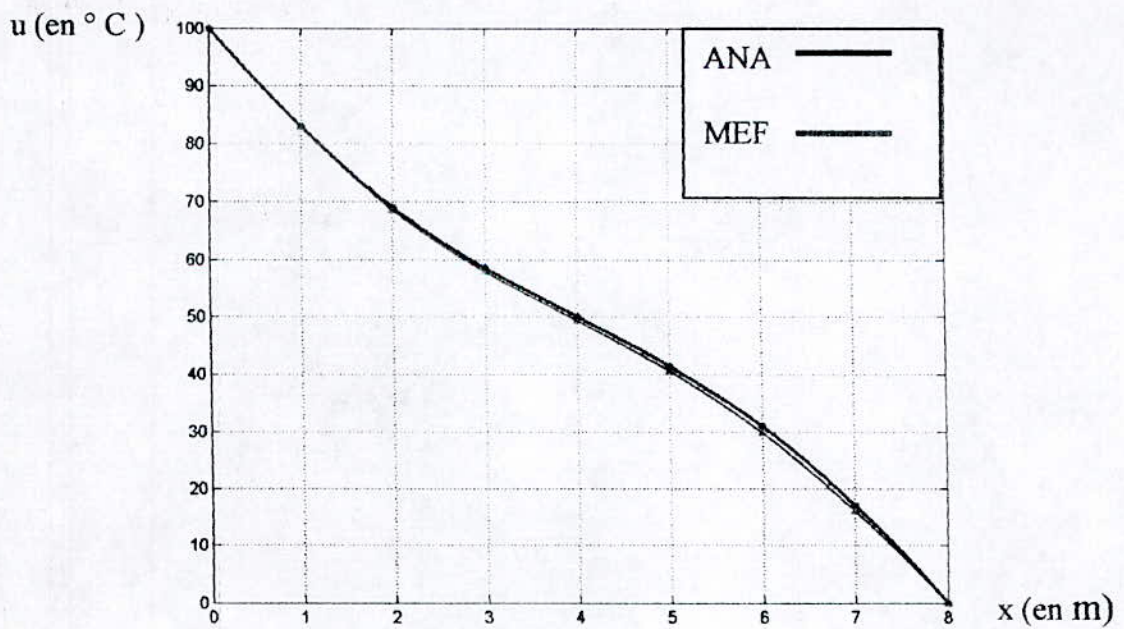


Fig.5-17: Variation de la température.

➤ Cas de la plaque rectangulaire Q4 (Les Tableaux):

❖ Maillage raffiné régulier:

a) Cas de chargement A 100: $y=1,5m$

	X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ANA	1	100	47.1	24.2	13.56	7.8	4.46	2.42	1.06	0
MEF	1	100	48.41	29.47	17.61	9.98	4.95	2.01	0.5	0
ERREUR	%	0.00	2.71	17.88	23.00	21.84	9.90	16.94	-	0.0

Tab.V-1

b) Cas de chargement B100 : $y=1m$

	X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ANA	1	100	50.93	31.21	22.58	17.51	13.49	9.43	4.92	0
MEF	1	100	44.13	28.87	21.54	16.91	13.03	9.06	4.69	0
ERREUR	%	0.0	13.35	7.5	4.6	3.4	3.4	3.9	4.7	0

Tab.V-2

c) Cas de chargement A 100: $y=2,4m$

	X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ANA	2	100	64.06	38.52	22.8	13.38	7.7	4.18	1.83	0
MEF	2	100	62	34.4	19.2	10.5	5.2	2.06	0.51	0
ERREUR	%	0	3.22	10.70	15.79	-	-	-	-	-

Tab.V-3

d) Cas de chargement B100 : $y=5m$.

	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ANA	5	100	95.08	90.57	86.51	82.49	77.42	68.78	49.06	0
MEF	5	100	95.09	90.54	86.43	82.37	77.23	68.29	42.24	0
ERREUR	%	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.7	13.9	0

Tab.V-4

E) cas de chargement A100 $y = 3m$

	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ANA	3	100	68.06	42.9	25.96	15.37	8.88	4.83	2.12	0
MEF	3	100	64	37.02	21.24	11.8	5.8	0.75	0	0
ERREUR	%	0	5.97	13.71	18.18	23.23	-	-	-	-

Tab.V-5

F) cas de chargement B100 $y = 3m$

	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ANA	3	100	82.97	69.04	58.55	50	41.46	30.97	17.03	0
MEF	3	100	82.87	68.6	57.87	49.3	40.57	29.77	15.98	0
ERREUR	%	0.0	0.0	0.6	1.2	1.4	2.1	3.9	6.2	-

Tab.V-6

➤ Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (2M):

0 Maillage raffiné régulier:

a) Cas de chargement A 100: $y=3m$

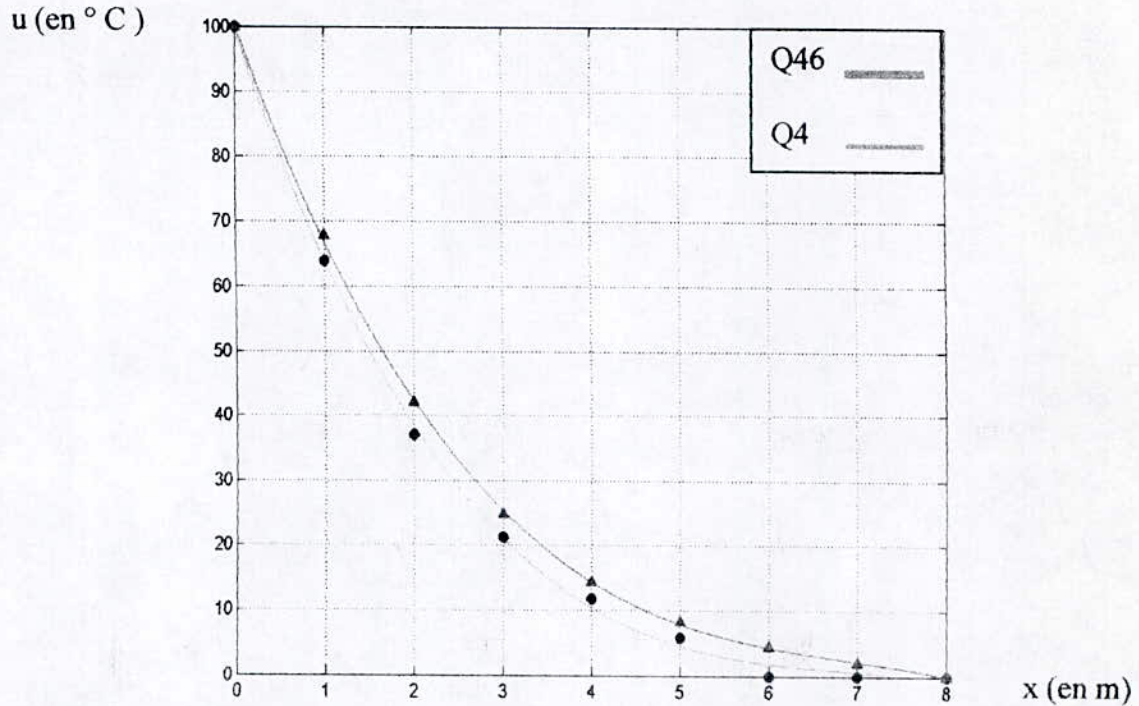


Fig.5.18 Comparaison de la température. Élément Q4 et Q46

b) Cas de chargement B100 : $y=3m$

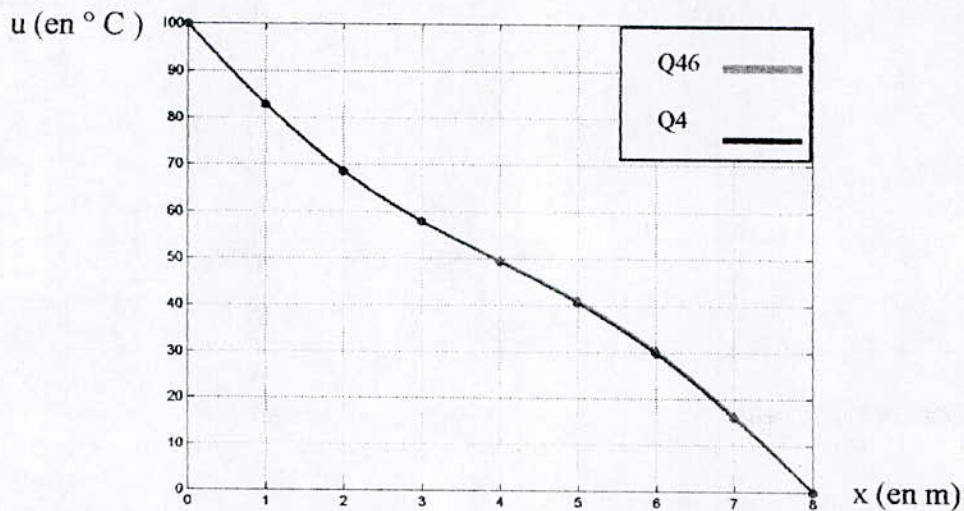


Fig.5.19 Comparaisons de la température. Élément Q4 et Q46

c) Cas de chargement A 100: y=5m

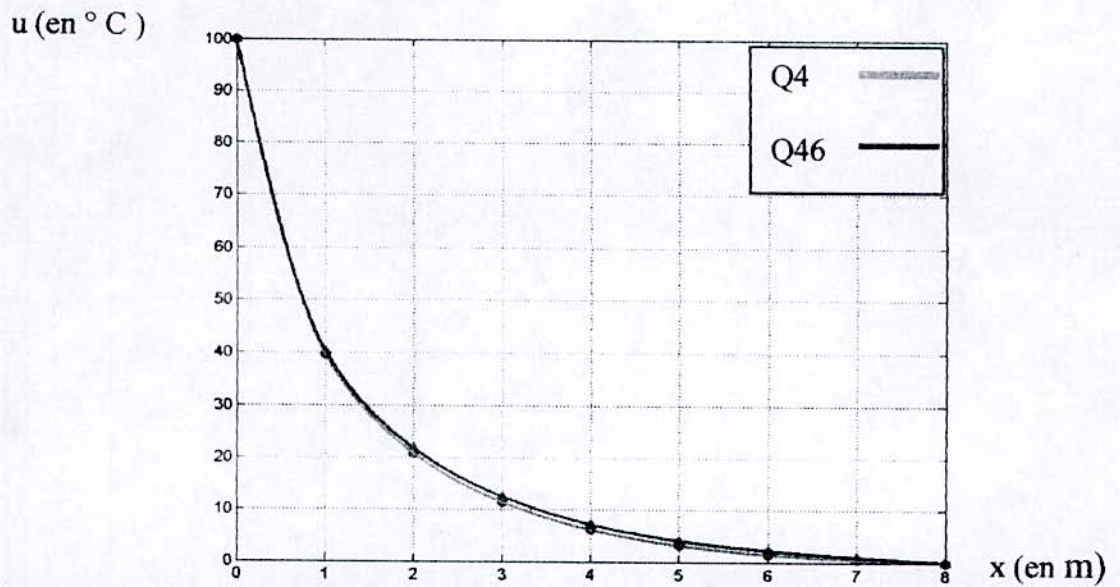


Fig.5.20 Paison de la température. Élément Q4 et Q46

d) Cas de chargement B100 : y=1m

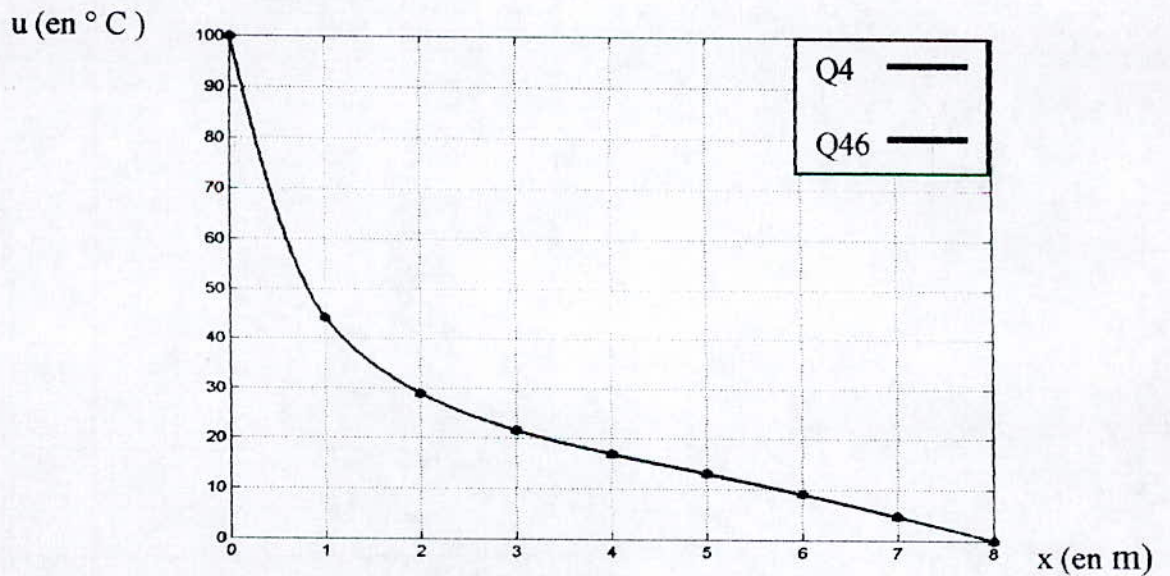


Fig 5.21 Cmparaison de la température. Élément Q4 et Q

➤ Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (2M): (les tableaux)

❖ Maillage raffiné régulier:

a) Cas de chargement A 100: $y=3m$

MEF	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q4	3	100	64	37.02	21.24	11.8	5.8	0.75	0	0
Q46 (2m)	3	100	67.85	42.04	24.73	14.38	8.2	4.42	1.93	0
ERREUR	%	0.0	6.0	13.6	16.4	21.9	-	-	-	-

TAB V - 7

b) Cas de chargement B100 : $y=3m$

MEF	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q4	3	100	82.87	68.6	57.87	49.3	40.57	29.77	15.98	0
Q46 (2m)	3	100	82.92	68.71	58.07	49.64	41.09	30.42	16.47	0
ERREUR	%	0.0	0.0	0.2	0.3	0.7	1.3	2.2	3.1	0.0

TAB V - 8

c) Cas de chargement A 100: $y=5m$

MEF	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q4	5	100	39.65	20.82	11.37	6.16	3.15	1.42	0.5	0
Q46 (2m)	5	100	40.58	21.33	12.57	7.23	4.15	2.29	0.97	0
ERREUR	%	0.0	2.3	2.4	10.6	17.4	-	-	-	0

TAB V - 9

d) Cas de chargement B100 : $y=1m$

MEF	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q4	1	100	44.13	28.87	21.54	16.91	13.03	9.06	4.69	0
Q46 (2m)	1	100	44.16	28.91	21.16	17.03	13.18	9.21	4.79	0
ERREUR	%	0.0	0.1	0.1	1.8	0.7	1.2	1.7	2.1	0

TAB V - 10

➤ Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (3M):

❖ Maillage raffiné régulier:

a) Cas de chargement A 100: $y=3m$

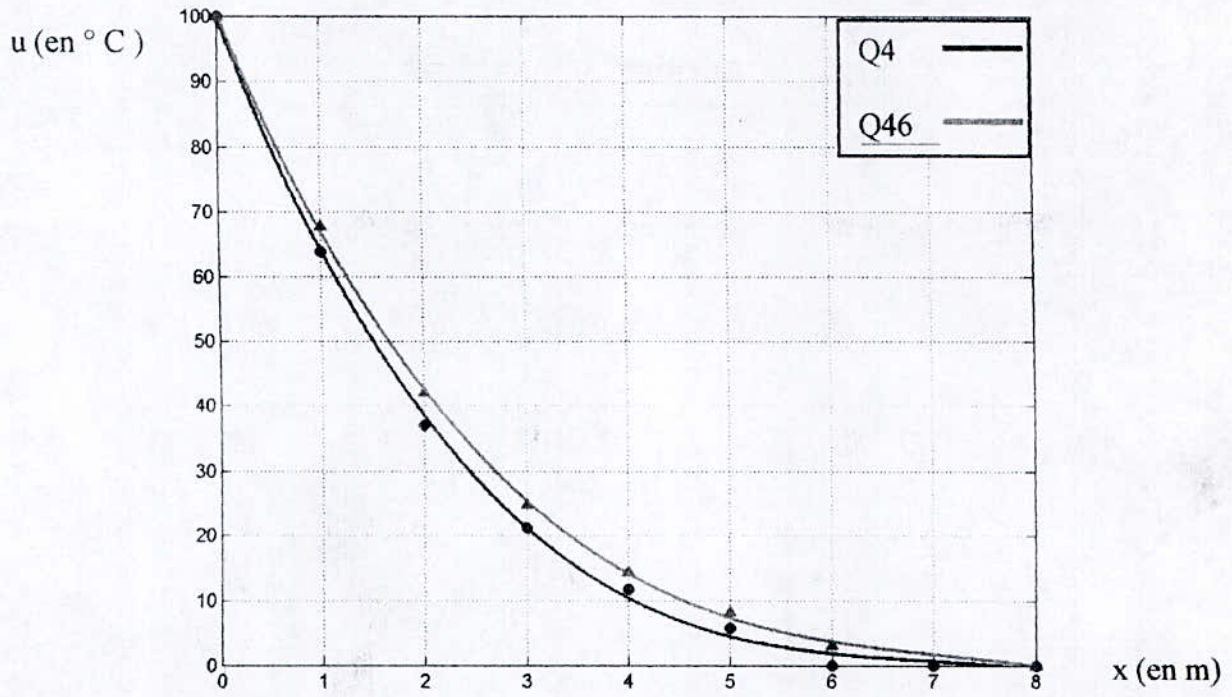


Fig5.22 Comparaison de la température. Élément Q4 et Q46

b) Cas de chargement B100 : $y=3m$

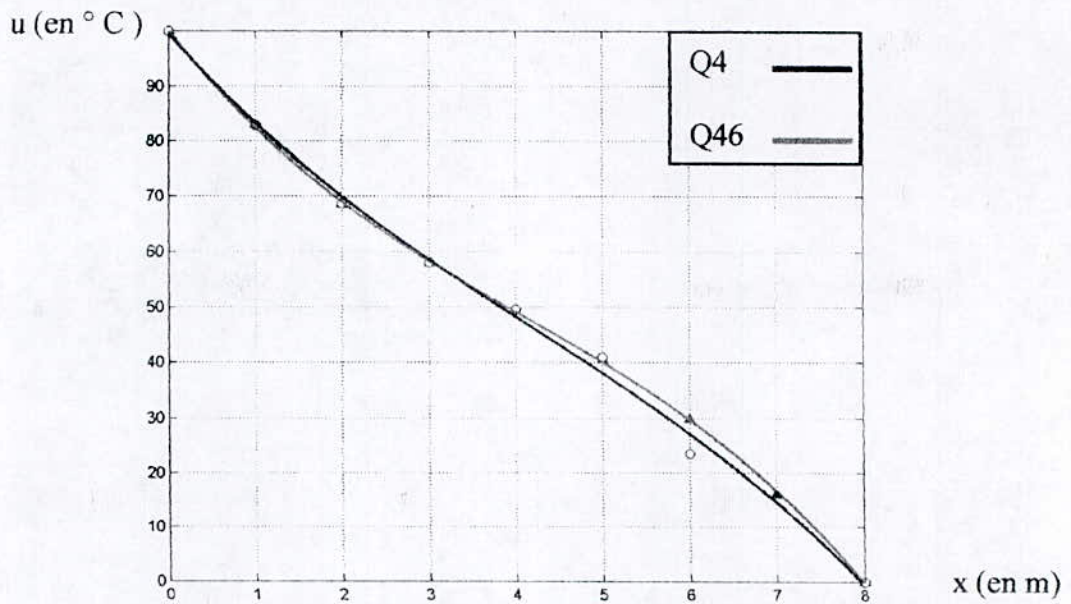


Fig.5.23 Comparaison de la température. Élément Q4 et Q46

c) Cas de chargement A 100: $y=1m$

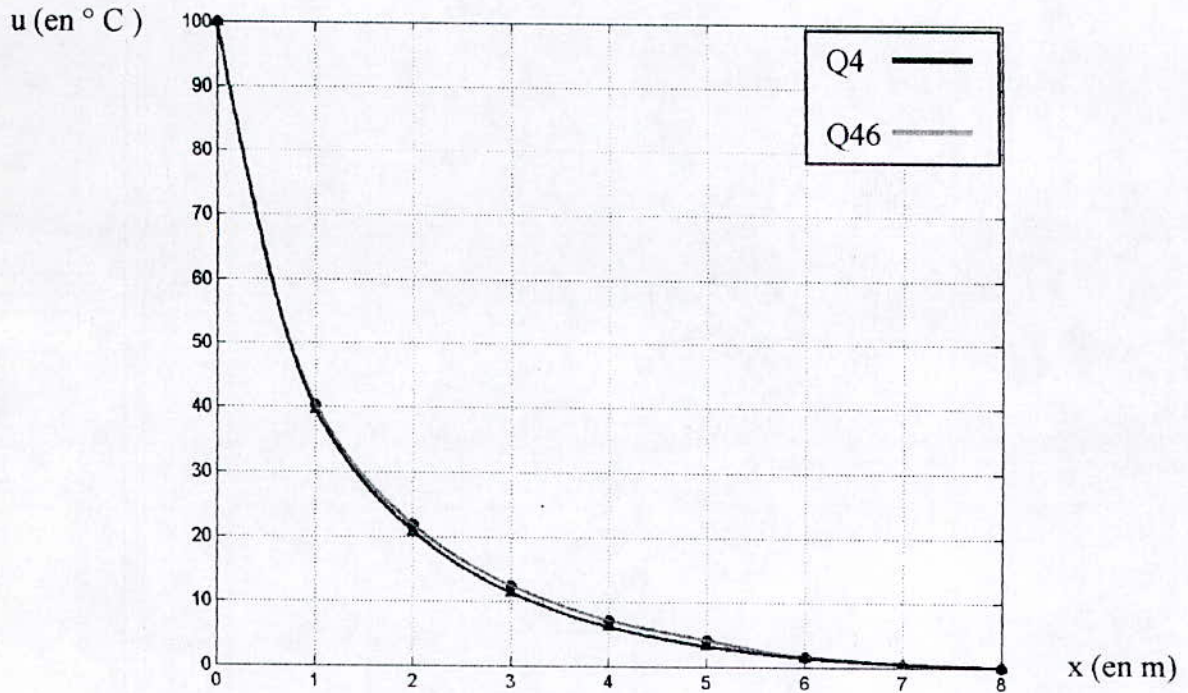


Fig.5-24 comparaison de la température. Élément Q4 et Q46

d) Cas de chargement B100 : $y=1m$

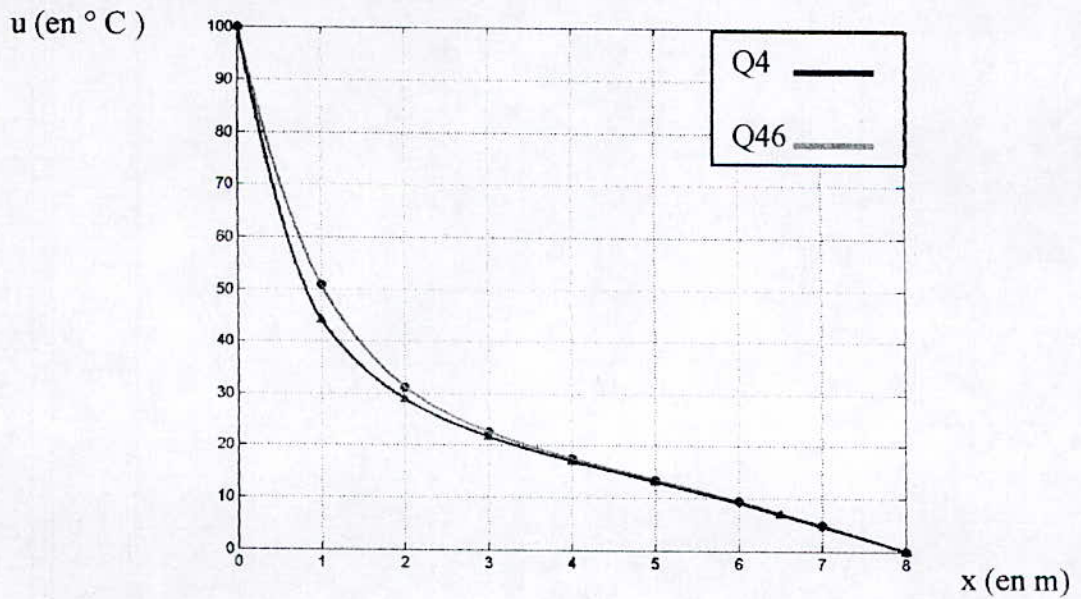


Fig.5-25 comparaison de la température. Élément Q4 et Q46

➤ Cas de la plaque rectangulaire Q4+Q46 (3M) (les tableaux)

❖ Maillage raffiné régulier:

a) Cas de chargement A 100: $y=3m$

MEF	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q4	3	100	64	37.02	21.24	11.8	5.8	0.75	0	0
Q46 (3m)	3	100	67.85	42.04	24.74	14.38	8.2	3.06		0
ERREUR	%	0.00	5.67	11.94	14.15	17.94	-	-	-	0.0

TAB V -11

b) Cas de chargement B100 : $y=3m$

MEF	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q4	3	100	82.87	68.6	57.87	49.3	40.57	29.77	15.98	0
Q46 (3m)	3	100	82.93	68.73	58.11	49.65	40.98	23.47		0
ERREUR	%	0.00	0.00	0.19	0.41	0.70	1.00	-	-	0

TAB V -12

c) Cas de chargement A 100: $y=5m$

MEF	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q4	5	100	39.65	20.82	11.37	6.16	3.15	1.42	0.5	0
Q46 (3m)	5	100	40.29	21.86	12.49	7.25	4.14	1.57		0
ERREUR	%	0.00	1.59	4.76	8.97	15.03	23.91	-	-	0.0

TAB V -13

d) Cas de chargement B100 : $y=5m$

MEF	X y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q4	5	100	95.09	90.54	86.43	82.37	77.23	68.29	42.24	0
Q46 (3m)	5	100	95.12	90.62	86.62	82.83	79.22	56.39		0
ERREUR	%	0.00	0.03	0.09	0.22	0.56	2.51	-	-	0.0

TAB V -13

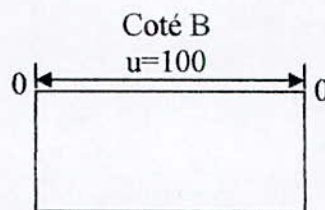
Interprétation des résultats

Les différentes applications de la résolution de l'équation de Laplace nous ont permis de constater ce qui suit :

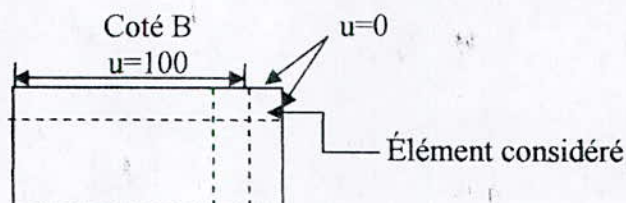
- Nous avons traité les deux cas du maillage $u4 \times 3$ ($2m \times 2m$) et $u8 \times 6$ ($1m \times 1m$) et on a constaté que le raffinement du maillage donne des résultats plus précis et converge rapidement vers la solution exacte ; Et ce pour les deux cas de chargement (A100 et B100). ceci nous confirme les avantages de la MEF (précités.).

- L'analyse des erreurs sur les résultats trouvés en utilisant la MEF nous conduit à constater que ces erreurs (qui peuvent atteindre 17%) ne sont pas dues seulement à la dimension du maillage mais aussi au problème du coin de la plaque qui peut être présenté de la manière suivante :

Lors de la solution analytique, les conditions aux limites sont prises le long de chaque coté de plaque (par exemple coté B), excepté les coins où la température doit être égale à zéro



Tandis que dans le cas de la solution par MEF les conditions aux limites du chargement sont nodales. Cette différence est due au problème de continuité rencontré dans le nœud qui doit avoir la même valeur qu'il soit considéré d'un coté ou d'un autre



Cette erreur peut être minimisée en réduisant la taille des derniers éléments finis au voisinage des coins de la plaque étudiée. Les résultats trouvés ont montré qu'on peut aboutir à des bons résultats en utilisant la MEF. L'erreur dans certains cas de chargement peut avoir des valeurs très faibles (0.1%) (cas B)

- En associant les deux éléments Q4 et Q6 (pour 2m et 3m) et en comparant les résultats avec ceux obtenus avec Q4, on a trouvé que la solution de l'association est

presque la même trouvée dans le cas simple Q4 surtout pour le chargement B100 tel que l'erreur reste toujours inférieur à 3.1%.

- En plus de la conformité des résultats obtenus par la MEF dans le cas de l'association des éléments Q4 et Q6 ce cas de maillage nous a permis de simplifier les calculs en diminuant le nombre des éléments. par exemple dans le cas d'un maillage Q4 le nombre d'élément est égale 48 tandis que dans le cas de l'association des éléments (2m et 3m) on a 42 et 36 éléments respectivement.
- Cette association d'élément finis permet une souplesse considérable dans l'établissement des fichiers input pour des problèmes dont les dimensions sont très importantes.
- Le choix du maillage est très important car il influe directement sur l'erreur commise et ce ci revient à l'expérience de l'ingénieur qui va choisir le modèle selon ses exigences économiques.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

L'objectif de ce travail, consiste en l'étude des problèmes de conduction thermique en régime stationnaire appliqués a des parois rectangulaires et en adoptant des conditions aux limites du type Dirichlet. Ensuite, on a procédé à une comparaison des résultats obtenus par la méthode des éléments finis (en utilisant un élément rectangulaire à quatre nœuds) et ceux obtenus analytiquement.

Enfin, un modèle numérique d'association d'éléments finis à 4 nœuds (Q4) et à 6 nœuds (Q6) a été proposé. Les performances de ce modèle sont très satisfaisantes.

Pour la résolution analytique, on a utilisé la méthode de séparation des variables qui est probablement la plus systématique méthode de résolution des E.D.P, utilisée par D'Alembert, D.Bernoulli, et Euler à environ 1750 lord de leur traitements de l'équation des ondes .Son application a été généralisée sur plusieurs domaines et elle reste une méthode très répandue dans les problèmes physiques.

Cependant, son emploi reste limité à des cas relativement simples ce qui a obligé les chercheurs à envisager d'autres méthodes plus puissantes notamment les méthodes de résolution numérique -telle que la méthode des éléments finis –dans le traitement des problèmes complexes.

La MEF présente une souplesse à adopter n'importe quelle forme géométrique d'élément et une variété de choix pour le type de maillage correspondant.

L'étude de la distribution de la chaleur sur un domaine défini fait partie des problèmes dont la solution analytique est relativement complexe. Il y a lieu, donc, d'utiliser la méthode des éléments finis qui, bien sur, doit être implantée sur un outil informatique.

Le type d'élément le plus utilisé dans ce genre de problèmes est l'éléments iso paramétrique à 4 nœuds (noté Q4) et qui présente une grande précision à condition de raffiner le maillage.

Néanmoins, les avantages d'utiliser une association entre les éléments à 4 nœuds avec ceux à 6 noeuds malgré la perte insignifiante dans la précision sont :

- la réduction du nombre d'éléments (par exemple de 48 à 36)
- la réduction du nombre de degrés de liberté actifs

-la simplicité du fichier de données qui constitue généralement une source d'erreurs.

Plusieurs applications ont été effectuées dans le cadre de cette étude afin de confirmer les avantages suscités :

> La première application concerne une plaque 8.m*6.m, le maillage choisit était des éléments rectangulaire à 4 nœuds de 1 m * 1m (soit 8*6=48 éléments).

Le nombre d'éléments diminue en utilisant l'association des éléments à Q4 et à Q6.

Cependant, on a remarquer que la précision a diminué de 2.1% au max) pour le cas de chargement B100, y=1m et (0 à 10.6%) pour chargement A100,y=5m

> La deuxième application concerne une plaque 8m*6m avec un maillage de 8*6 éléments.

On a constaté que le nombre d'éléments diminue en raison de l'association(12 éléments en moins) soit un taux de réduction = 25% et ceci en prenant le dernier élément de la plaque un élément à 6 nœuds de dimension 3m*1m. .

Les courbe présentées montrent des différences tout à fait acceptables.

Notons que les avantages de cette association seront plus apparentes et présentent plus d'intérêt si le problème étudié est de grande taille telle que l'étude des parois des grands fours industriels ou bien les problèmes de l'isolation thermique où le nombre d'éléments est important donc la réduction aura un effet sur la simplification des calculs.

Références

Bibliographiques:

BIBLIOGRAPHIE:

- [1]. Dhatt. G, Touzot. G, " Une Présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A, 2eme édition, 1984.
- [2]. DEMIDEM.M; "Notes de cours de la méthode des éléments finis et de la méthode des différences finies".ENP
- [3]. Rao .S. S , "The finite element method in engineering"
- [4]. Zienkiewics. O. C., Taylor. R. L., "The finite element Method: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity", volume 2. McGraw-Hill Book Company, 4th edition, 1989.
- [5]. Des article 'M.E.F'+ 'thermique'. Encyclopédie Universalis, CD ROM. version 9
- [6]. Des article 'M.E.F'+ 'thermique'. Collection Microsoft Encarta 2004, CD ROM.
- [7]. KACIMI EL HASSANI Ahmed Amine, HARKATI Mounir (2003) Analyse des problème de conduction de la chaleur en régime stationnaire par différentes méthodes numériques mémoire de fin d'étude, Juin 2003 E.N.P
- [8]. De Vriendt. A. B, "La transmission de la chaleur : la conduction,", Volume 1, Tome 2, 2eme édition.
- [9]. Bardos. C, " Analyse numérique des équations aux dérivées partielles", article. Encyclopédie Universalis, CD ROM. version 9.
- [10]. Mémoire de fin d'étude, Juin 2003 E.N.P Karali Rabee Et ABD Ellah El Hadj Mohamed Promoteur Silhadi.
- [11]. Zerer. M, "Equations aux dérivées partielles: sources et applications", article. Encyclopédie Universalis, CD ROM. version 9.
- [12]. Cours de transferts thermiques iup de génie des systèmes industriel 1 ère année université Joseph Fourier, Grenoble version 6 septembre 2001
- [13]. -Introduction a la méthode des élément finis C.Rockoy, H.R.Evans, D.W.Griffiths , Nerthercot édition EYROLLES 1979 traduit par Claude Gomez
- [14]- Sites web:

WWW.LIBRECOUR.ORG

WWW.IPS.U-PSUD.FR

Annexe

1. Tableau 1: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (Q4 maillage 4×3) chargement A100	II
2. Tableau 2: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (Q4 maillage 4×3) chargement B100	II
3. Tableau 3: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (Q4 maillage 8×6) chargement A100	III
4. Tableau 4: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (Q4 maillage 8×6) chargement B100	IV
5. Tableau 5: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (maillage Q4+Q6 '2m') chargement A100	V
6. Tableau 6: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (maillage Q4+Q6 '2m') chargement B100	VI
7. Tableau 7: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (maillage Q4+Q6 '3m') chargement A100	VII
8. Tableau 8: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (maillage Q4+Q6 '3m') chargement B100	VIII
9. Tableau 9: Solution analytique pour l'équation de Laplace (maillage 8×6) chargement A100	IX
10. Tableau 10: Solution analytique pour l'équation de Laplace (maillage 8×6) chargement B100	X

Tableau 1: Solution de MEF pour l'equation de Laplace (Q4 maillage 4×3) chargement A100

X \ y	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2	100	31.36	9.76	2.79	0
4	100	31.36	9.76	2.79	0
6	0	0	0	0	0

Tableau 2: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (Q4 maillage 4×3) chargement B100

X \ y	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2	100	46.92	30.89	16.76	0
4	100	80.26	64.23	39	0
6	100	100	100	100	0

Tableau 3: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (Q4 maillage 8×6) chargement A100

X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	37.83	15.89	9.83	5.68	3	1.37	0.48	0
2	100	62	34.4	19.2	10.5	5.20	2.06	0.51	0
3	100	64	37.02	21.24	11.8	5.8	0.75	0	0
4	100	62	34.4	19.2	10.5	5.20	2.06	0.51	0
5	100	39.65	20.82	11.37	6.16	3.15	1.42	0.5	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 4: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (Q4 maillage 8×6) chargement B100

X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	44.13	28.87	21.54	16.91	13.03	9.06	4.69	0
2	100	72.08	52.13	41.07	33.33	26.33	18.65	9.77	0
3	100	82.87	68.6	57.87	49.3	40.57	29.77	15.98	0
4	100	89.7	80.47	72.63	65.45	57.19	44.55	25.1	0
5	100	95.09	90.54	86.43	82.37	77.23	68.29	42.24	0
6	100	100	100	100	100	100	100	100	0

Tableau 5: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (maillage Q4+Q6 '2m') chargement A100

X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	40.28	21.83	12.47	7.20	4.1	2.21	0.93	0
2	100	63.60	36.8	21.5	12.5	7.1	3.83	1.62	0
3	100	67.85	42.04	24.73	14.38	8.20	4.42	1.93	0
4	100	63.65	36.87	21.53	12.51	7.12	3.86	1.67	0
5	100	40.58	21.33	12.57	7.23	4.15	2.29	0.97	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 6: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (maillage Q4+Q6 '2m') chargement B100

X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	44.16	28.91	21.16	17.03	13.18	9.21	4.79	0
2	100	72.11	52.21	41.22	33.56	26.64	19.00	10.01	0
3	100	82.92	68.71	58.07	49.64	41.09	30.42	16.47	0
4	100	89.74	80.56	72.82	65.81	57.93	45.74	26.13	0
5	100	95.11	90.6	86.55	82.61	77.80	70.31	44.50	0
6	100	100	100	100	100	100	100	100	0

Tableau 7: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (maillage Q4+Q6 '3m') chargement A100

X \ y	0	1	2	3	4	5	6.5	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	40.25	21.83	12.47	7.20	4.11	1.53	0
2	100	63.60	36.8	21.5	12.46	7.11	2.66	0
3	100	67.85	42.04	24.74	14.38	8.20	3.06	0
4	100	63.63	36.77	21.45	12.44	7.13	2.67	0
5	100	40.29	21.86	12.49	7.25	4.14	1.57	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 8: Solution de MEF pour l'équation de Laplace (maillage Q4+Q6 '3m') chargement B100

X \ y	0	1	2	3	4	5	6.5	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	44.16	28.92	21.62	17.01	13.15	7	0
2	100	72.12	52.23	41.23	33.54	26.57	14.53	0
3	100	82.93	68.73	58.11	49.65	40.98	23.47	0
4	100	89.75	80.60	72.90	66.02	57.85	35.83	0
5	100	95.12	90.62	86.62	82.83	79.22	56.39	0
6	100	100	100	100	100	100	100	0

Tableau 9: Solution analytique pour l'équation de Laplace (maillage 8×6) chargement A100

X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	47.1	24.2	13.56	7.8	4.46	2.42	1.06	0
2	100	64.06	38.52	22.8	13.38	7.7	4.18	1.83	0
3	100	68.06	42.9	25.96	15.37	8.88	4.83	2.12	0
4	100	64.06	38.52	22.8	13.38	7.7	4.18	1.83	0
5	100	47.1	24.2	13.56	7.8	4.46	2.42	1.06	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 10: Solution analytique pour l'équation de Laplace (maillage 8×6) chargement B100

X \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	100	0	0	0	0	0	0	0	0
1	100	50.93	31.21	22.58	17.51	13.49	9.43	4.92	0
2	100	72.52	53.74	42.20	34.16	27.09	19.40	10.28	0
3	100	82.97	69.04	58.55	50.00	41.46	30.97	17.03	0
4	100	89.71	80.60	72.90	65.83	57.80	46.25	27.48	0
5	100	95.08	90.57	86.51	82.49	77.42	68.78	49.06	0
6	100	100	100	100	100	100	100	100	100