

7/02

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Département : *Génie civil*

# PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

***APPROCHE PROBABILISTE DE L'ETUDE  
DE LA STABILITE DES TALUS***

Proposé par :

Mr ZEGHLACHE

Etudié par :

HIMOUN Ferhat  
HEBA Redouane

Dirigé par :

Mr ZEGHLACHE

Promotion Juin 2002

ENP, 10 Avenue Hacén Badi- El Harrach- ALGER

التقريب الاحتمالي لأمن المنشآت و بالأخص للمنحدرات, طريقة حديثة و تعرف تطورات كثيرة في هذه السنوات الأخيرة.

حاولنا من خلال هذه الدراسة تطبيق هذه الطريقة على المنحدرات في حالة انزلاق دوشكل دائري أو مسطح, بالإضافة الى مناقشة للنتائج المتحصل عليها.

### Résumé :

L'approche probabiliste de la sécurité des ouvrages et en particulier pour les talus, est une méthode qui n'arrête pas de se développer, surtout ces dernières années. Son importance réside dans le fait qu'elle fournit à l'ingénieur un outil pour évaluer la possibilité de ruine et donc l'évaluation de la sécurité des talus d'une manière rationnelle.

L'élaboration des méthodes d'approche probabiliste de la stabilité des talus et encore loin de son terme, c'est pourquoi, on s'intéresse à cette approche.

Une approche déterministe et probabiliste de la stabilité des talus pour un glissement circulaire et en suite pour un glissement plan, avec discussion des résultats, sont exposées dans la présente étude.

### Abstract :

The aim of this subject is to present an approach probabilistic of slopes reliability. This method have received considerable attention in recent years.

This study presents the main results of a numerical investigation using the first order reliability method, for two classes of problems. At the first, the slope is considered circular, for the second application, the slope is considered plan. Finally, the results of these applications were be discuted .

### Mots clés :

Talus-approche probabiliste- approche déterministe- glissements- stabilité- pente- coefficient de sécurité-fiabilité-probabilité de rupture.

## Dédicaces



-Je dédie ce travail à :

- Mes parents en signe de reconnaissance pour tout les sacrifices consentis à mon égard, et pour leurs soutien moral et matériel, notamment pendant les durs épreuves et leurs encouragement tout le long de mes études.
- Mes frères et sœurs.
- Mes beaux-frères.
- Mes amis.

Ferhat

-Je dédie ce travail à :

- Mes parents
- Mes sœurs
- Mes amis(e)
- Lila

Redouane

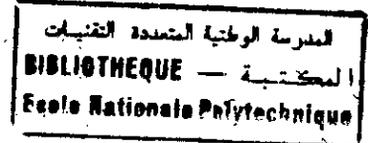
## *REMERCIEMENTS*

Il ne sera jamais trop fait de remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Pour ne citer que ceux là, nous remercions vivement notre promoteur Mr Zeghlache, qui a mis sa compétence à notre disposition.

Nos remerciements vont aux travailleurs de la bibliothèque, du centre de calcul, sans oublier l'ensemble de nos enseignants.

## Sommaire



Chapitre1 : Introduction générale.....	
1.1 Introduction.....	1
1.2 Intérêt de l'approche probabiliste de l'étude de stabilité des talus.....	1
1.3 Organisation du travail.....	3
Chapitre2 : Glissement de terrain.	
2.1 Description des glissements.....	4
2.2 Principales causes de glissements de terrain.....	4
2.2.1 La nature des terrains constituant le versant.....	5
2.2.1.a Les terrains aux glissements.....	5
2.2.1.b Perte de résistance par remaniement.....	5
2.2.2 Les diverses formes de l'action de l'eau.....	6
2.2.2.a Action rhéologique de l'eau.....	6
2.2.2.b Effets de la pression interstitielle.....	7
2.2.2.c Action de la pression courante.....	8
2.2.3 Les facteurs mécaniques externes.....	9
2.2.4 L'effet de déboisement.....	9
2.2.5 Les séismes et les vibrations.....	9
2.3 Glissements plans.....	9
2.4 Glissements rotationnels.....	10
2.4.1 développement d'un glissement rotationnel.....	11
2.5 Les surfaces de glissement de forme quelconque.....	11
Chapitre3 : Processus d'une étude de glissement de terrain.	
3.1 Généralités.....	12
3.2 Repérage topographique d'une zone instable.....	12
3.3 Etude géologique ou géomorphologique du site.....	13
3.4 Etude hydrologique et hydrogéologie du site.....	13
3.5 Campagne d'investigation par sondages et essais géotechniques.....	14
3.6 Calcul de stabilité.....	18
Chapitre4 : Diverses approches déterministes de l'étude de la stabilité des talus	
4.1 Définition du coefficient de sécurité.....	19
4.1.1 Définition de Fröhlich.....	19
4.1.2 Définition de Bishop.....	19
4.1.3 Définition de Fellenius.....	20
4.2 Choix de la valeur de F dans le calcul de stabilité d'un ouvrage ou d'un versant.....	20
4.3 Méthode globale.....	21
4.3.1 Equilibre d'une masse sujette au glissement.....	21
4.3.2 Méthode de Biarez – Borne inférieure et supérieure du coefficient de.....	23
sécurité	
4.3.3 Méthode de Taylor et de Caquot.....	25

4.4	Méthode des tranches.....	27
4.4.1	Généralités et principes de la méthode.....	27
4.4.2	Equilibre d'une tranche.....	28
4.4.3	Méthode suédoise(dite aussi de Fellenuis).....	29
4.4.4	Méthode de Bishop.....	30
Chapitre5 Méthodes de calcul probabiliste du comportement des ouvrages		
5.1	Approximation par la série de Taylor.....	31
5.2	Approximation par une loi normal ou Log-normal.....	33
5.3	Approximation par intégration numérique.....	34
5.4	Simulation :méthode de Monte-Carlo.....	34
Chapitre6 : Analyse probabiliste de la stabilité des pentes		
6.1	Principes généraux des méthodes d'analyse probabiliste de la stabilité des pentes...36	
6.2	La fonction d'état limite.....	37
6.3	Indice de fiabilité de Cornell.....	38
6.3.1	Définition de l'indice de fiabilité dans ce cas de variables normales indépendantes.....	39
6.4	Indice de fiabilité de Hasofer-Lind.....	41
6.5	Les méthodes de résolutions numériques.....	42
6.5.1	Définition du problème de résolution numérique.....	42
6.5.2	Méthode de simulation de Monte-Carlo.....	43
6.5.3	Les méthodes d'approximation FORM et SORM.....	44
Chapitre7 : Application des méthodes étudiées et étude paramétrique.		
7.1	Introduction.....	46
I/ Cas de la rupture circulaire :		
7.2	Présentation du talus.....	46
7.3	Détermination du cercle de rupture le plus probable.....	47
7.4	Etude de la stabilité du talus par la méthode déterministe globale.....	49
7.5	Approche probabiliste de la stabilité d'un talus par la méthode de 1 <sup>er</sup> ordre (FORM)	50
7.5.1	détermination de la fonction d'état limite.....	50
7.5.2	Principe de la méthode et calcul de l'indice de fiabilité $\beta_{HL}$ .....	52
7.5.3	Etude paramétrique de l'indice de fiabilité $\beta_{HL}$ en fonction des variables de base(c, $\gamma$ , $\phi$ ).....	54
II/ Glissement plan		
7.6	Présentation du problème.....	70
7.7	Approche déterministe de la stabilité du versant.....	71

7.8 Approche probabiliste du versant.....	75
Chapitre 8 : Conclusions.....	79
Annexes	
Bibliographie	



*CHAPITRE 1*

*INTRODUCTION GENERALE*

## 1.1 Introduction

Depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle, les analyses mécaniques de dimensionnement des structures sont fondées sur une démarche réglementaire et codifiée essentiellement déterministe. Dans cette démarche, une valeur enveloppe maximale est attribuée aux différents chargements postulés et comparés à la plus faible valeur potentielle de la résistance mécanique des matériaux considérés, on applique ensuite à ces valeurs un coefficient de sécurité afin d'anticiper un fonctionnement futur très peu probable et afin de se protéger contre la méconnaissance des propriétés réelles des matériaux et des simplifications adoptées dans le modèle de dégradation mécanique. Ref.[8]

Plusieurs méthodes de calcul probabiliste ont été publiées jusqu'à présent pour l'analyse de la stabilité des talus. Pourtant, ces méthodes restent pour l'instant des produits de recherche sans applications pratiques dans les bureaux d'études, où les coefficients de sécurité traditionnels restent le seul outil du projeteur. Cette situation, à priori étonnante, est certainement due, d'une part, pour partie à la lenteur habituelle du transfert des innovations des chercheurs aux praticiens, et d'autre part, à l'insuffisance de banque de données principalement pour les sols. Ref [6]

## 1.2 Intérêt de l'approche probabiliste de l'étude de la stabilité des talus

L'approche déterministe, ne permet de prendre en compte les incertitudes qu'à travers l'utilisation d'un coefficient de sécurité. Cette méthode ne permet pas d'évaluer le risque où la fiabilité qui est généralement estimée qu'à travers une probabilité de ruine. Ref[6]

Principalement les incertitudes sont de trois natures :

Les incertitudes physiques dépendent, d'une part, des propriétés des matériaux et des caractéristiques géométriques, qui définissent la résistance de la structure, et d'autre part, des chargements dépendant de processus stochastiques, de caractéristiques dimensionnelles, et des différents modes de défaillance possible.

Les incertitudes statistiques concernent la caractérisation des variables aléatoires. Elles dépendent des inférences déduites à partir de l'observation d'échantillons, qui vont permettre d'établir une distribution de probabilité censée représenter l'ensemble de la population dans laquelle a été prélevé l'échantillon testé, et d'évaluer les valeurs numériques des paramètres de cette distribution.

L'incertitude sur le modèle de dégradation va dépendre du degré de simplification que l'on va imposer au modèle mécanique afin de représenter les phénomènes physiques et afin de résoudre les difficultés mathématiques associées à la combinaison d'un ensemble de variables aléatoires, elles mêmes déterminées avec un certain degré d'incertitude.

En effet la démarche déterministe jusqu'à présent, a généralement été couronnée de succès, mais elle ne permet pas d'appréhender la valeur réelle de la fiabilité d'une structure, et donne tout au plus une marge volontairement pessimiste vis-à-vis de ses différents modes de ruine. Elle conduit souvent dans ces conditions, à des surdimensionnements difficilement compatibles avec l'optimum économique. Ref[8]

## Chapitre 1 : Introduction générale

Par contre dans la démarche probabiliste, le risque est évalué sous forme d'une probabilité et non plus sous forme d'un jugement de type binaire : le dimensionnement est acceptable ou non. Cette démarche s'appuie sur un modèle de dégradation déterministe dans lequel les différentes sources d'incertitude sont modélisées sous forme de variables aléatoires. Elle constitue donc un prolongement rationnel de l'approche déterministe. Ref [8]

L'utilisation de ces nouveaux concepts permet, d'une part, un traitement clair des incertitudes et présente, d'autre part, l'intérêt d'évaluer une probabilité quantifiée de la ruine, tout en démontrant la liaison implicite qui peut exister entre marges, coefficient de sécurité et niveau de fiabilité. Ref [6]

Le problème des talus complexes est beaucoup plus gênant en pratique. Les tentatives à unifier la définition et le calcul des coefficients de sécurité, ont été sans grand succès. Les espoirs de solution de ce problème délicat reposent aujourd'hui sur la notion de l'approche probabiliste Ref [6].

En résumé, l'évaluation de la fiabilité des structures consiste à déterminer la probabilité d'atteindre un état limite sur ces structures. Cet état peut être le dépassement d'une valeur de consigne, ou la ruine de la structure concernée.

La méthode probabiliste ignore les facteurs de sécurité, mais considère les paramètres mécaniques comme des variables aléatoires, on peut donc considérer plusieurs degrés de sophistication dans l'évaluation de la fiabilité de structures :

- Les études de niveau un, où chaque paramètre incertain est caractérisé par une valeur unique enveloppe, une marge conservative est ensuite introduite par l'intermédiaire de coefficients de sécurité partiel. Ces études correspondent à la démarche déterministe traditionnelle.
- Les études de niveau deux sont basées sur des méthodes fiabilistes où chaque paramètre est caractérisé par les deux premiers moments de sa distribution, l'espérance et la variance : cette méthode est fréquemment utilisée dans les codes de calcul de génie civil car elle permet de déterminer des indices de fiabilité que l'on va pouvoir comparer à des objectifs de sûreté ou de disponibilité. Les variables de base comprennent les chargements de la structure, sa résistance, la géométrie, le matériau. Leur distribution est en générale supposée de type normal.
- Les études de niveau trois supposent que les variables sont quelconques. Elle font appel à la connaissance de leurs lois réelles de distribution de probabilité. Afin d'évaluer la probabilité de survie ou de défaillance, on utilise les méthodes de linéarisation et de transformation de variables multidimensionnelles dans l'espace normal standard, puis les méthodes de simulations (méthode de Monte Carlo, ou les méthodes d'approximation FORM (first Order Reliability Method) ou SORM (Second Order Reliability Method).  
Et donc notre travail consistera à mettre en évidence ces méthode de calcul en particulier la méthode FORM exposée plus loin.

# Chapitre 1 : Introduction générale

## 1.3 Organisation du travail

L'approche déterministe de l'étude de la stabilité des talus a été contestée, pour ses insuffisances, au niveau de la définition de l'état limite de rupture et la considération des incertitudes sur les paramètres de base du problème. C'est pourquoi nous nous intéressons dans ce qui suit aussi à l'approche probabiliste en particulier de niveau deux, puisque qu'elle permet d'une part de prendre en compte les incertitudes sur les différents paramètres de base du problème, et d'autre part de déterminer la fiabilité ou la probabilité de rupture du talus en question. Pour cela nous verrons successivement :

- La description des glissements et leurs principales causes soit les différents types de glissements dans le chapitre 2.
- La présentation du processus et les étapes par ordre de l'étude d'un glissement de terrain dans le chapitre 3.
- Les diverses approches déterministes de l'étude de la stabilité des talus entre autre, la méthode globale et la méthode des Tranches dans le chapitre 4.
- Les méthodes d'analyse probabiliste de la stabilité des ouvrages dans le chapitre 5.
- Les différentes méthodes de l'approche probabiliste de la stabilité de talus dans le chapitre 6.

De plus, pour une meilleure illustration une investigation numérique sur une étude de cas suivi d'une analyse paramétrique fera l'objet du chapitre 7 dans lequel les résultats obtenus seront discutés.

Une conclusion de notre travail fera l'objet du chapitre 8.

*CHAPITRE 2*

*GLISSEMENT DE TERRAIN*

## 2.1 Description des glissements

Les glissements de terrain sont des mouvements de masse qui se développent dans des matériaux meubles et en général, argileux. Ils se produisent dans des circonstances très variées. Ils affectent des ouvrages construits par l'homme ou des pentes naturelles; ils se produisent soudainement ou durent plusieurs mois, voir parfois plusieurs années; la rupture affecte une forme vaguement circulaire ou bien au contraire ne présente aucune caractéristique géométrique particulière; les causes de glissement paraissent évidentes ou l'on ne peut déceler de raison apparente; la rupture se produit sous l'action mécanique d'un écoulement d'eau ou parce que le terrain a été progressivement lessivé par une eau pauvre en cations.

Le volume des glissements de terrain est très variable : de quelques mètres cubes (loupes) à plusieurs millions de mètres cubes (versant entiers).

## 2.2 Principales causes des glissements de terrain

Un glissement de terrain a rarement une cause unique. C'est le plus souvent l'action conjointe de plusieurs facteurs négatifs qui déclenchent un glissement; l'un de ces facteurs intervenant seul n'aurait en général rien produit.

Pour analyser le mécanisme d'une rupture, il convient de bien répéter les divers facteurs susceptibles d'être intervenus et de créer une hiérarchie entre eux.

C'est seulement lorsque les causes d'un glissement sont clairement établies qu'il devient possible d'examiner, avec quelque chance de succès, les dispositions confortatives capables de redonner au site sa stabilité.

Les causes envisageables dans l'étude d'un glissement de terrain peuvent se rattacher à trois catégories :

- La nature des terrains constituant le site, et plus aisément, l'ensemble des données géologiques et géotechniques qui caractérisent ces terrains.
- Les diverses formes de l'action de l'eau :
  - Actions rhéologiques sur le milieu .
  - Pression intersticielle
  - Pression de courant
- Les actions mécaniques externes :
  - Pente du versant
  - Fouille et affouillement de pied.
  - Surcharge de pente ou de crête.
  - effets de déboisement.
- Séisme, et plus généralement, vibrations.

### 2.2.1 La nature des terrains constituant le versant

La nature des terrains représente la donnée de base imposée par la géologie du site.

#### 2.2.1.a Les terrains prédisposés aux glissements

Par leur nature propre, certains terrains sont prédisposés au glissement, il s'agit :

- Des terrains à granulométrie fine: silts et limons .
- Des argiles, surtout celles constituées par de la montmorillonite.

La très grande majorité des glissements apparaissent dans des terrains argileux, ou dans des formations grenues suffisamment chargées en argile pour que ce matériau impose son comportement.

Les glissements affectent des matériaux, soit lorsqu'ils sont en place, soit, plus fréquemment, lorsqu'ils constituent des couvertures meubles plaquées sur un substratum compact en place et en pente.

La topographie souterraine du substratum résistant prend parfois la forme de gouttières où se concentrent les eaux souterraines, et au droit desquelles se localisent alors fréquemment les axes des glissements de la couverture.

Il faut rappeler que les formations de couvertures sont fréquemment constituées de matériaux d'altération en place, parfois de moraines ; souvent d'un mélange à dominante argileuse d'origine imprécise .Elles sont donc particulièrement vulnérables au glissement.

#### 2.2.1.b Perte de résistance par remaniement

Rappelons qu'on caractérise la perte de résistance par remaniement d'un milieu cohérent, par sensibilité  $S_1$  :

$$S_1 = \frac{R_c \text{ (sur échantillon intact)}}{R_c \text{ (sur échantillon remanié)}} \quad (1)$$

$R_c$  : résistance à la compression simple .

Pour les argiles courantes  $S_1$  est toujours  $> 1$  et fréquemment de l'ordre de 2 ou 3. Pour certaines argiles, dites sensibles ou extrasensibles,  $S_1$  prend des valeurs qui se situent entre 3 et 10 .

Ce phénomène est important à considérer. En effet, l'amorce d'un mouvement constitue nécessairement un ramaniement du milieu, dès lors le phénomène a de fortes chances de devenir endémique et d'aller en s'aggravant, complémentairement, les apports d'eau dans la masse remaniée vont d'ailleurs – sous un autre angle – aggraver la situation.

Avec les argiles thixotropiques, la perte de la résistance du milieu sous l'effet d'une vibration – pouvant aller jusqu'à la liquéfaction totale – n'est que momentanée, la vibration cessant, l'argile reprend progressivement sa consistance initiale.

Certains milieux sont également, pour d'autres raisons prédisposés au remaniement :

- Les argiles surconsolidées, qui sont compactes mais très souvent finement fissurées dans la masse.
- Les argiles gonflantes qui se désorganisent complètement dès qu'elles sont pénétrées par de l'eau.
- Les silts et limons à structure lâche, laquelle peut aisément s'effondrer sous l'effet d'une action extérieure.

## 2.2.2 Les diverses formes de l'action de l'eau

Les diverses formes de l'action de l'eau sont :

### 2.2.2.a Actions rhéologiques de l'eau

Pour beaucoup de sols, mais surtout pour les sols fins et argileux, l'apport d'eau entraîne une baisse de résistance du milieu.

- Réduction des caractéristiques mécaniques :

La valeur de l'angle de frottement d'un milieu pulvérulent n'est pratiquement pas modifiée par l'accroissement de la teneur en eau .

Par contre, pour les milieux argileux, cet accroissement entraîne systématiquement une réduction des caractéristiques  $c$  et  $\phi$ , et donc de la résistance au cisaillement.

Ainsi, l'accroissement de  $W$  peut faire passer la valeur de  $\phi$ , de  $30^\circ$  à quelques degrés.

Un accroissement de  $W$  de quelques pourcents peut entraîner une réduction de moitié de la valeur de  $c$

- Réduction de la consistance :

L'accroissement de la teneur en eau d'une argile entraîne son ramollissement continu, c'est-à-dire un accroissement progressif de sa déformabilité sous charge.

Lorsque la teneur en eau du milieu se rapproche de la limite de liquidité  $\omega_L$ , celui-ci passe de l'état plastique à l'état liquide.

- Ramollissement d'origine chimique :

Selon sa composition chimique, une eau d'imbibition peut, par action électrolytique, modifier la structure de certaines argiles par floculation ou défloculation du milieu colloïdal; ce dernier phénomène correspond à un ramollissement .

Cette action est bien connue des potiers qui utilisent, pour ramollir leur pâte en cours de modelage, quelques gouttes d'une solution défloculante .

Par ailleurs, une eau minéralisée est susceptible de favoriser un échange des cations qui sont associés dans le complexe d'absorption de l'argile.

Ainsi, le passage d'une montmorillonite Na à une montmorillonite Ca s'accompagne d'un accroissement de consistance du milieu; l'échange inverse, d'une réduction.

Il est important d'observer que les ramollissements d'origine chimique évoqués ici, s'effectuent sans modification de la teneur en eau du milieu. Bien entendu, un accroissement de  $\omega$  peut aussi ajouter ses effets à ceux de l'action chimique.

Certaines eaux vannes (savons, détergents, etc...) déversées dans des puisards peuvent aussi défoculer l'argile et y déclencher des glissement de terrain. Rappelons l'exemple classique du glissement déclenché sur le chantier du barrage de Bouhanifia par le rejet des eaux vannes de la cuisine du chantier.

Dans l'étude des glissements, ces phénomènes chimiques complexes qui ne peuvent être élucidés que par des recherches longues et difficiles, sont le plus souvent passés sous silence.

### 2.2.2.b Effets de la pression intersticielle

Comme l'a souligné TERZAGHI, la résistance au cisaillement d'un sol dépend de la contrainte normale effective  $\sigma'$ . C'est-à-dire de la contrainte normale totale  $\sigma$  de laquelle on déduit la pression intersticielle  $u$  de l'eau qui sature le milieu. Ainsi la loi de coulomb doit s'écrire :

$$\tau = (\sigma - u) \operatorname{tg}\varphi \quad \text{pour les sols pulvérulents.} \quad (2)$$

$$\tau = c + (\sigma - u) \operatorname{tg}\varphi \quad \text{Pour les sols cohérents.} \quad (3)$$

La pression intersticielle peut trouver son origine :

- Dans une simple accumulation d'eau à l'arrière d'une structure imperméable.
- Dans une nappe aquifère qui filtre dans le terrain.
- Dans l'application brutale d'une surcharge ou l'effet d'un choc sur un milieu saturé (vibration, seisme).

Dans le premier cas, il s'agit d'un phénomène purement hydrostatique. Au plan pratique, il est important d'observer que l'intensité de  $u$  ne dépend pas du volume d'eau accumulé, mais uniquement de la hauteur de charge. Ce phénomène est classique derrière un mur de soutènement non drainé (rideau de palplanches par exemple). L'ouvrage fonctionne alors, parfois pendant un très court instant, comme un véritable barrage. Il suffit, pour que la mise en charge ait lieu, qu'un simple film d'eau s'établisse, entre le terrain et l'ouvrage étanche. Ce phénomène est à l'origine de fréquents accidents, notamment en période pluvieuse.

Par le simple jeu hydrostatique, une pression d'eau peut également s'établir dans une discontinuité du milieu (faille, joint de stratification ...etc) ou au contact de deux milieux imperméables; par exemple à la base d'une couverture argileuse imperméable plaquée sur un substratum imperméable lui aussi. L'eau qui s'infiltré dans cette discontinuité se met en charge, et agit comme un verrou pour décoller la couverture de son soubassement. La pression d'eau disparaît au moment du décollement mais elle a suffi à déclencher la rupture. Ce mode de glissement est particulièrement dangereux car souvent très brutal.

Dans le cas d'une nappe aquifère circulante « l'action hydrostatique » de l'eau (pression  $u$ ) est sensiblement analogue à la précédente. Toutefois, la définition précise de  $u$  suppose la connaissance des équipotentielles de l'écoulement.

Selon le mode de calcul adopté pour écrire l'équation d'équilibre limite de la masse instable, il peut être nécessaire de connaître la valeur de  $u$  en tous les points de la courbe de glissement et d'en déduire la résultante  $u$  qui agit sur la masse instable.

La présence, dans un soubassement d'une nappe en charge, peut faciliter le déclenchement de ruptures, soit par soulèvement d'une formation imperméable, soit par mise en bouillonnement hydraulique d'une formation fine.

La pression intersticielle peut naître de l'application brutale d'une surcharge sur un milieu saturé (saturation statique ou liée à une nappe filtrante) ou voisin de la saturation.

A la pression intersticielle initiale  $u$ , le choc ajoute une surpression  $\Delta u$  qui peut être plusieurs fois supérieure à  $u$ . Il faut observer que la transmission de  $\Delta u$  dans un milieu saturé est instantanée.

Dans un sol pulvérulent fin, la contrainte normale effective peut s'annuler si  $u + \Delta u = \sigma$

Pour que ceci ait lieu, il faut que la surcharge soit appliquée suffisamment brutalement (par rapport à la perméabilité du milieu) pour être « encaissée » intégralement par l'eau intersticielle (il y a liquifaction du milieu). Ce phénomène représente l'une des formes de boulangement des sols fins.

Cette liquifaction peut apparaître lors du passage d'une locomotive ou de l'atterrissage d'un avion lourd, sous l'effet de tirs de mines ou de tremblement de terre, lors du passage du bang d'un avion supersonique, lors d'un battage de pieux ou de palpanches, sous l'action des vibrations provoquées par une machine ou un gros engin de chantier.

Il ne faut jamais perdre de vue que la création de la surpression intersticielle  $\Delta u$  dépend à la fois de la vitesse d'application de la surcharge et de la perméabilité du milieu.

Pour une même surcharge et même vitesse d'application, un milieu fin peu perméable est donc plus vulnérable à l'effet d'un choc, qu'un milieu très ouvert.

Autre forme de boulangement issue de l'accroissement brutale, de la pression intersticielle. La liquifaction d'un milieu fin saturé, peut également prendre naissance par effondrement de son squelette granulaire instable (sable fin ou silt à structure lâche) sous l'effet d'un choc ou d'une vibration. Si le milieu est voisin de la saturation, cet effondrement entraîne le serrage des grains et donc un accroissement brutal de la pression intersticielle qui déclenche la liquifaction du milieu.

C'est sur ce principe qu'est basé le compactage par « vibroflotation », cette technique a permis de vérifier que la fréquence de la vibration appliquée joue un rôle important dans la destruction d'un squelette solide instable.

### 2.2.2.C Action de la pression de courant

Rappelons que lorsqu'une nappe aquifère filtre dans les vides d'un terrain meuble, les particules solides du milieu sont soumises à deux forces de volume, la poussée d'Archimède et la pression de courant.

La poussée d'Archimède agit vers le haut et est égale au volume d'eau « déplacé » par les grains. Elle intervient que l'eau soit immobile ou en mouvement, cette force peut être prise en compte dans un calcul de stabilité en remplaçant, pour la partie immergée du sol, le poids spécifique total  $\gamma_{sat}$  par le poids spécifique immergé :

$$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w \quad (4)$$

La pression de courant n'existe que si l'eau intersticielle est en mouvement, ce qui correspond au cas d'une nappe. C'est en quelque sorte la « force d'entraînement » à laquelle des grains solides sont soumis de la part des particules liquides en mouvement.

Sur un grain de volume  $dV$ , cette force de volume vaut :

$$dR_U = i \cdot \gamma_w \cdot dV \quad (5)$$

$i$  : gradient hydraulique de l'écoulement au droit du grain considéré.

$\gamma_w$  : poids spécifique de l'eau.

Pour un volume  $V$  de terrain sollicité c'est-à-dire immergé dans la nappe, et donc pour l'ensemble des particules solides comprises entre la surface de la nappe et la surface de glissement : la force de courant globale vaut :

$$\vec{R}_U = \gamma_w \cdot \sum i \cdot dV \quad (6)$$

Sur un versant, la force  $R_U$  crée globalement un moment moteur. Au pied d'un versant, à l'émergence d'une nappe, la pression de courant crée un soutirage localisé des fines du terrain. Ceci s'explique par le fait qu'il y a, dans cette zone, concentration des lignes de courant et accroissement du gradient hydraulique, d'où forte sollicitation des particules solides.

En règle générale les particules fines sont plus aisément entraînées que les grosses pour lesquelles le poids oppose une résistance efficace à l'entraînement.

Nous allons signaler qu'il peut être à l'origine d'un affaissement général de la surface topographique dont l'effet est catastrophique pour les constructions qui y sont construites. Il faut ainsi rappeler que le soutirage qui se manifeste au pied d'un versant, en ameublant le terrain de cette zone, réduit progressivement la butée de pied.

### 2.2.3 Les facteurs mécaniques externes

- rôle de la pente des talus et des versants.
- suppression de la butée de pied d'un versant.
- Implantations de surcharges sur un versant.

### 2.2.4 L'effet du déboisement

Le déboisement d'un versant entraîne fréquemment, et dans un délai généralement assez court, l'apparition du glissement de terrain. Le risque associé au déboisement est grandement accru lorsque celui-ci est accompagné d'un dessouchage qui désorganise le terrain en profondeur et favorise en suite la pénétration des eaux dans la masse.

Le rôle stabilisateur des arbres tient à plusieurs facteurs :

- L'ancrage par les racines
- Le drainage par évapo – transpiration
- La rétention des eaux de pluie
- La protection contre l'érosion

### 2.2.5 Les séismes et les vibrations

Les tremblements de terre sont souvent à l'origine de glissements de terrain, comme d'ailleurs pour les éboulements rocheux.

L'effet d'un séisme peut être d'ordre purement mécanique (apparition d'une surface de cisaillement par dépassement de la résistance du milieu). Nous avons vu également que dans les milieux meubles saturés, un séisme – comme toute vibration donne aussi naissance à une pression interstitielle qui peut entraîner la liquéfaction instantanée, partielle ou totale, du milieu. Lorsqu'on recherche les causes d'un glissement de terrain, il est toujours nécessaire de vérifier l'état de la sismicité régionale au regard de la chronologie de l'accident. Également l'intervention éventuelle de vibrations d'autres origines : machine vibrante, engin de terrassement, battage de pieux, passage d'un train, ... etc.

## 2.3 Glissements plans :

Le mouvement d'un glissement plan est une translation sur un plan incliné plus ou moins régulier; en générale ce plan est prolongé vers le haut par une fissure de traction.

Le plan de glissement (on dit aussi plan de ripage ou plan de décollement) s'établit, dans la majorité des cas, sur une discontinuité du milieu :

- joint de stratification dans le cas d'une série sédimentaire (on dit aussi un « monteau » et le substratum constitué par les terrains en place).
- Plan de clivage schisteux.
- Plan de faille ou de diaclasage

La rupture peut alors correspondre au cisaillement d'une couche de faible résistance, ou encore au glissement sur un joint séparant deux formations de nature différente. Ce type de glissement est donc avant tout conditionné par la structure des formations qui constituent le site et notamment par la présence d'une discontinuité à pendage aval.

Le glissement peut être déclenché par un terrassement. Ainsi si une fouille est ouverte en pied de versant, la position du plan de glissement dépend en partie de la profondeur de la fouille.

Les joints argileux sont particulièrement favorables au déclenchement de glissements plans. Lorsque les terrains qui les surmontent sont perméables (calcaire, grès), les eaux d'infiltration sont arrêtées par ces joints qui s'imbibent, se ramollissent, et jouent un rôle de « couches-savons » pour les formations sus-jacentes. Un phénomène analogue peut intervenir dans le cas d'un « manteau » reposant sur un substratum argileux en place.

Il arrive aussi que le futur plan de glissement à pendage aval soit mis en charge par les eaux infiltrées à l'amont, l'effet de verrou qui intervient favorise alors le déclenchement, puis le ripage des terrains sus-jacents.

Ces phénomènes permettent de comprendre que les glissements plans peuvent se manifester de façon brutale, si la masse mise en mouvement est constituée de bancs durs, la rupture devient alors un véritable éboulement.

#### 2.4 Glissements rotationnels

Ils se développent en principe dans un milieu homogène et isotrope, c'est-à-dire non affecté par la présence de discontinuités géologiques conditionnant a priori la forme et la position de la surface de glissement.

Allure générale d'un glissement rotationnel :

La surface de rupture est concave et a l'allure générale d'une cuillère. Sa coupe, selon la ligne de plus grande pente du versant, a une forme circulaire plus ou moins nette, ce qui a permis à de nombreux calculateurs d'admettre que le mouvement s'apparente à une rotation de la masse instable autour du centre du « cercle de glissement ».

Dans la plupart des calculs de stabilité on admet, pour la commodité mathématique, que la surface de rupture est un cylindre de section droite circulaire, le calcul se ramène alors à l'étude de l'équilibre de rotation d'une surface à deux dimensions.

Avec un peu d'habitude le repérage direct des limites approximatives d'un glissement est relativement aisé. Par contre, la position en profondeur de la surface de glissement reste inconnue et toute estimation en jugé à son propos est hasardeuse. Son repérage précis est pourtant essentiel puisqu'elle délimite le volume en mouvement et permet donc d'apprécier son ampleur et le mécanisme auquel on est confronté.

Seule une campagne de sondages et d'essais très soignée peut permettre de connaître la position exacte de la surface de glissement.

### 2.4.1 Développement d'un glissement rotationnel

Abandonné à lui-même, un glissement rotationnel a de fortes chances de se développer par reprise de la rotation sur la même surface de glissement, et souvent par apparition de surfaces de ruptures nouvelles, plus profondes et plus ou moins emboîtées avec la première. L'aggravation peut également prendre les formes ci-après :

- les glissements en chaîne
- les glissements régressifs.

### 2.5 Les surfaces de glissement de forme quelconque

Les ruptures plans et rupture d'allure rotationnelle sont fréquemment rencontrées. Il existe aussi beaucoup de glissements dont la surface de rupture a une forme nettement moins géométrique et parfois même tout à fait quelconque. C'est le cas par exemple des glissement d'éboulis de pente et de moraines. D'ailleurs, le décollement d'une « couverture » s'effectue le plus souvent au contact du substratum lequel peut avoir une géométrie quelconque puisque conditionnée par la structure géologique du site.

En dehors du repérage direct par sondage et essais géotechniques, l'existence de surfaces de rupture de forme irrégulière a été démontrée par les calculs de stabilité, notamment ceux effectués par la méthode des éléments finis. On a en effet constaté que l'hypothèse de ruptures circulaires conduisait parfois à des coefficients de sécurité très supérieurs à 1 alors qu'on était en présence d'un glissement bien réel.

Il est d'ailleurs logique que les glissements qui affectent les versants naturels s'effectuent sur des surfaces de rupture irrégulières. En effet, nous avons vu que les glissements plans s'expliquent par l'existence, dans les structures géologiques, de discontinuités qui sont en général des plans, mais les ruptures circulaires impliquent elles pour se développer, un milieu homogène et isotrope qui reste l'exception dans les milieux naturels.

Rappelons d'ailleurs que l'anisotropie et l'hétérogénéité de ces milieux se situent à plusieurs niveaux :

- Nature pétrographique et géotechnique des matériaux.
- Discontinuités de la structure : stratification, schistosité, diaclases, failles, zones tectonisées ou remaniées, zone d'altération
- Infiltrations d'eau qui réduisent les caractéristiques mécaniques de certains terrains et préparent l'établissement des ruptures dans les zones affaiblies.

*CHAPITRE 3*

*PROCESSUS D'UNE ETUDE DE  
GLISSEMENT DE TERRAIN*

### 3.0 Processus d'une étude de glissement de terrain

#### 3.1 Généralités

Le processus proposé ci- après concerne l'étude d'un glissement effectif de terrain. Mais en dehors du repérage géométrique de la surface de rupture, l'étude de la stabilité d'un versant avant apparition de tout glissement obéit pratiquement aux mêmes règles.

Il faut d'abord remarquer que l'approche du géologue, purement naturaliste et descriptive, est nécessaire mais insuffisante pour une analyse mécanique du phénomène qui permettra la définition des travaux confortatifs à mettre en œuvre sur un site instable. De même façon une approche trop mécanique par « mise en équation » d'un versant naturel de structure géologique nécessairement complexe à priori inconnue, représente une approche naïve qui ne conduit à rien.

Une étude efficace doit nécessairement combiner l'approche géologique et l'approche mécanique ; ceci est possible grâce notamment aux moyens technologiques dont on dispose actuellement.

Le repérage des causes d'un glissement n'est généralement pas évident. On est parfois aidé dans cette recherche par la chronologie. Si un versant est resté stable jusqu'à telle date il faut rechercher le fait nouveau qui, peu de temps avant l'apparition des désordres, a modifié l'équilibre antérieur. On peut découvrir ainsi des travaux de terrassement ou de construction, un déboisement intense, une pluviométrie exceptionnelle, un séisme.

Mais le plus souvent, le fait nouveau n'a servi que de catalyseur. C'est le cas lorsque l'équilibre antérieur n'était qu'apparent et en fait précaire, ou encore lorsque la nature particulière du site le prédisposait au glissement.

On doit parfois, faute de mieux faire, estimer le degré de stabilité d'un site par comparaison avec d'autres versants de la région situés dans les mêmes formations géologiques. Si tout ces versants sont stables, on a quelque chance que le site étudié le soit aussi. C'est évidemment une approche aléatoire, qui est le plus souvent insuffisante.

#### 3-2 Repérage topographique d'une zone instable

##### a) Etablissement d'un plan topographique à grande échelle

Généralement, les cartes topographiques à petite échelle disponibles sont insuffisantes pour repérer un accident localisé. Il en est de même des plans cadastraux sans côtes altimétriques. Il convient donc d'entreprendre par priorité un levé topographique à grande échelle (1/1000<sup>e</sup> ou 1/500<sup>e</sup>) du secteur dans lequel se situe la zone glissée, d'en tirer un plan en courbes de niveau, et des profils jalonnés. Le levé peut être réalisé à partir des techniques topographiques classiques, ou de plus en plus souvent, à partir des prises de vue aérophotogrammétriques.

### **b) Piquetage du site**

Il doit concerner la zone glissée et son environnement stable. Les piquets, disposés en quadrillage sont numérotés et repérés sur le plan topographique. Les levés géométriques (directs ou par aérophotogrammétrie), périodiquement réalisés sur ces repères, permettent de suivre l'évolution du glissement et de localiser exactement la zone en mouvement.

Lorsqu'un glissement est actif, il conviendra d'établir les courbes de déplacement (horizontal et vertical) des repères; la vitesse d'évolution permet alors de définir le risque, si besoin et, les mesures de sécurité à envisager.

Les repères permettent, ultérieurement, de vérifier l'efficacité de travaux confortatifs mis en œuvre.

### **3-3 Etude géologique ou géomorphologique du site**

A partir des données propres à la région, il est possible de préciser le contexte géologique dans lequel se situe la zone glissée. On peut ainsi préciser la nature des formations rencontrées, leur épaisseur, leur pendage, la nature et l'épaisseur des terrains de couverture masquant les formations en place.

Il convient que cette étude géologique intéresse l'ensemble du versant, puis qu'un levé de détail soit exécuté sur la zone glissée proprement dite. La réalisation d'une série de coupes géologiques selon les lignes de plus grande pente peut permettre ensuite de formuler une première hypothèse sur la position en profondeur de la surface de glissement.

La forme géométrique du substratum rocheux peut jouer un rôle important dans la localisation des glissements.

Le levé géologique ne représente que la première phase de l'étude géologique complète qui suppose l'exécution de sondages et autres investigations profondes. Mais il faut souligner que c'est ce travail de base qui permet ensuite une implantation efficace des sondages et essais géotechniques qui sont à réaliser.

### **3-4 Etude hydrologique et hydrogéologique du site**

Elle représente, compte tenu du rôle déterminant joué par l'eau, le complément indispensable de l'étude géologique. Dès que la géologie d'un site est compliquée, il en est généralement de même du régime hydrogéologique qui y règne; dès lors, il n'est pas toujours aisé de définir l'origine des arrivés d'eau.

On peut proposer dans ce domaine, d'examiner les trois points suivants.

#### **a) Pluviométrie de la région**

La stations météorologiques les plus proches fournissent les renseignements nécessaires, on peut repérer les concentrations anormales, voire exceptionnelles, qui peuvent coïncider avec les déclenchement ou la reprise des glissements étudiés.

Rappelons que des précipitations moyennes mais persistantes sont beaucoup plus dangereuses pour la stabilité d'un versant que les fortes averses de courte durées. Les premières favorises en effet une infiltration poussée et donc une imprégnation importante et profonde des terrains. Les secondes se dissipent en grande partie par ruissellement, sans modifier beaucoup la teneur en eau des terrains profonds.

### **b) Hydrologie de surface**

Il s'agit :

- de définir les conditions d'écoulement des eaux sauvages, et de repérer les zones d'écoulement préférentiel.
- d'estimer l'importance relative d'infiltration et du ruissellement .
- de repérer les principales zones d'infiltration des eaux de surface dans la masse de terrain : zone à forte perméabilité, fissures ouvertures, etc...

Il convient également de prêter attention au rôle des rivières qui coulent au pied d'un versant..

### **c) Hydrologie du site**

Une partie souvent importante des eaux qui viennent imprégner les terrains d'une zone instable, provient d'aquifères profonds ou semi-profonds qui affleurent dans le versant et s'y vident.

Contrairement aux eaux de surface, cet apport profond est souvent sous-estimé voire même ignoré, en raison des difficultés de son repérage. Cette imprégnation profonde joue pourtant un rôle négatif majeur puisqu'elle se fait au cœur même du terrain instable.

Mais on doit souvent hélas se contenter d'une définition hydrogéologique sommaire, des résultats précis nécessitant des moyens financiers importants et plusieurs années d'observations.

### **d) Les apports d'eau artificiels**

Complémentairement on doit toujours envisager les apports artificiels suivants : canaux fuyards, réseaux d'irrigation et de drainage disloqués et abandonnés, canalisations d'eau potable fuyardes, puits perdus... etc.

## **3-5 Campagne d'investigation par sondages et essais géotechniques**

Sa raison d'être est :

- de fournir une définition géologique précise du site étudié ;
- notamment de mesurer l'épaisseur des divers formations rencontrées ainsi que leurs pendages .
- de définir la forme géométrique de la masse en mouvement et donc la position de la surface de glissement .
- de mesurer les caractéristiques mécaniques des divers terrains concernés .
- de repérer le niveau piézométrique des formations aquifères.

a) Les sondages

Leurs implantation doit souvent tenir compte des possibilités d'accès du matériel de forage dans la zone instable. Quelques-uns seront implantés à la périphérie du glissement, dans la zone en principe stable pour permettre l'étalonnage géologique du site.

La longueur et l'orientation des forages doivent être choisies de façon à permettre de recouper la surface (ou la zone) de rupture, et de pénétrer de quelques mètres dans les soubassements en place.

La surface de rupture n'étant pas connue au départ, on en est réduit pour ce choix, à s'appuyer sur les observations de surface qui ont été faites. Il faut d'ailleurs savoir que le repérage d'une surface de rupture par sondage n'est pas aisé, surtout en milieu argileux ; le foreur la traverse souvent sans la repérer.

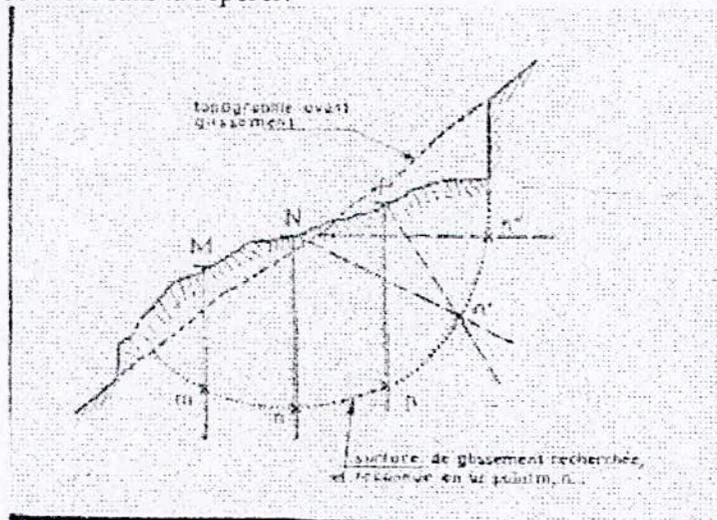


Figure 3.5.1- Choix de l'orientation des sondages

Dans les formations sédimentaires, il est toujours souhaitable que les sondages soient, autant que possible, orientés normalement au pendage des couches.

a) Valorisation des sondages

On doit s'efforcer de valoriser les sondages carottés ou destructifs, qui sont des travaux onéreux, par les techniques complémentaires suivantes :

- Reconnaissance diagraphique au moyen de sondes descendues dans les trous des forages.

Cette technique facilite les corrélations lithologiques et permet parfois de faire apparaître nettement la surface de glissement (zone à forte teneur en eau) (fig 3.5.2)

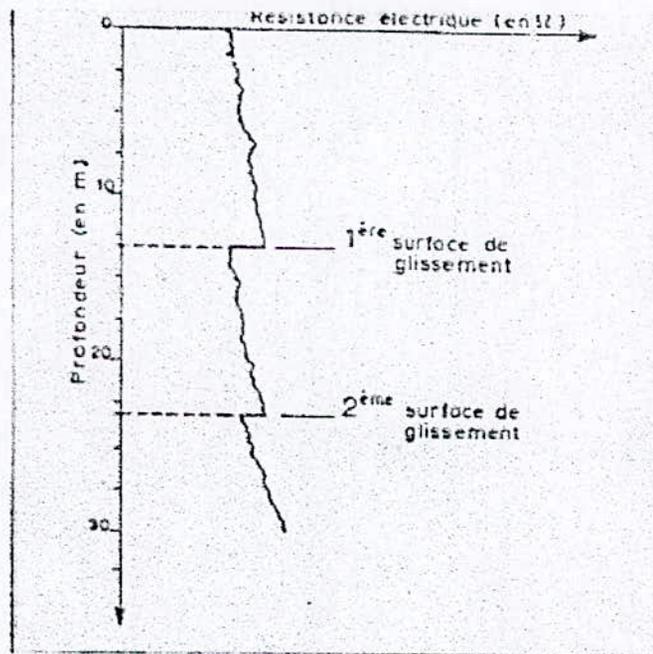


figure 3.5.2. Diagraphie électrique exécutée dans un sondage.  
Repérage de deux surfaces de glissement

- Essais pressiométriques , réalisés de proche en proche, et sur toute la hauteur de certains forages, avec concentration au voisinage de la surface de rupture lorsqu'on a une première idée de la position de celle-ci.
- Mise en place de tubes piézométriques dans les sondages verticaux : tubes crépinés de petit diamètre dans les horizons perméables .
- Mise en place, dans un certains nombre de forages verticaux, des tubes de déformation permettant de suivre l'évolution du glissement, et de repérer avec précision la surface de rupture (fig 3.5.3) . Ces tubes doivent pouvoir subir des efforts et des déplacements sans s'écraser pour permettre par la suite le passage périodique d'une sonde inclinométrique.

Ils doivent être scellés à la paroi des forages et leur pied doit en principe être scellé dans le substratum stable ; les têtes doivent faire l'objet de levés géométriques périodiques très précis.

Les mesures inclinométriques périodiques permettent aussi de vérifier si l'assise de certains bâtiments est concernée par un glissement d'ensemble repéré dans le voisinage.

Pour certains glissements, dangereusement évolutifs, il est d'ailleurs possible d'équiper les tubes de déformation de dispositifs d'alarme (à fil conducteur par exemple). Une aggravation brutale et dangereuse peut ainsi être décelée à temps, et permettre l'évacuation des habitants ou l'interruption de la circulation.

- Mise en place de drains dans les sondages horizontaux. La mesure des débits, en fonction des saisons, fournit de précieux renseignements sur l'hydrologie profonde, ainsi qu'une contribution appréciable au drainage du site.

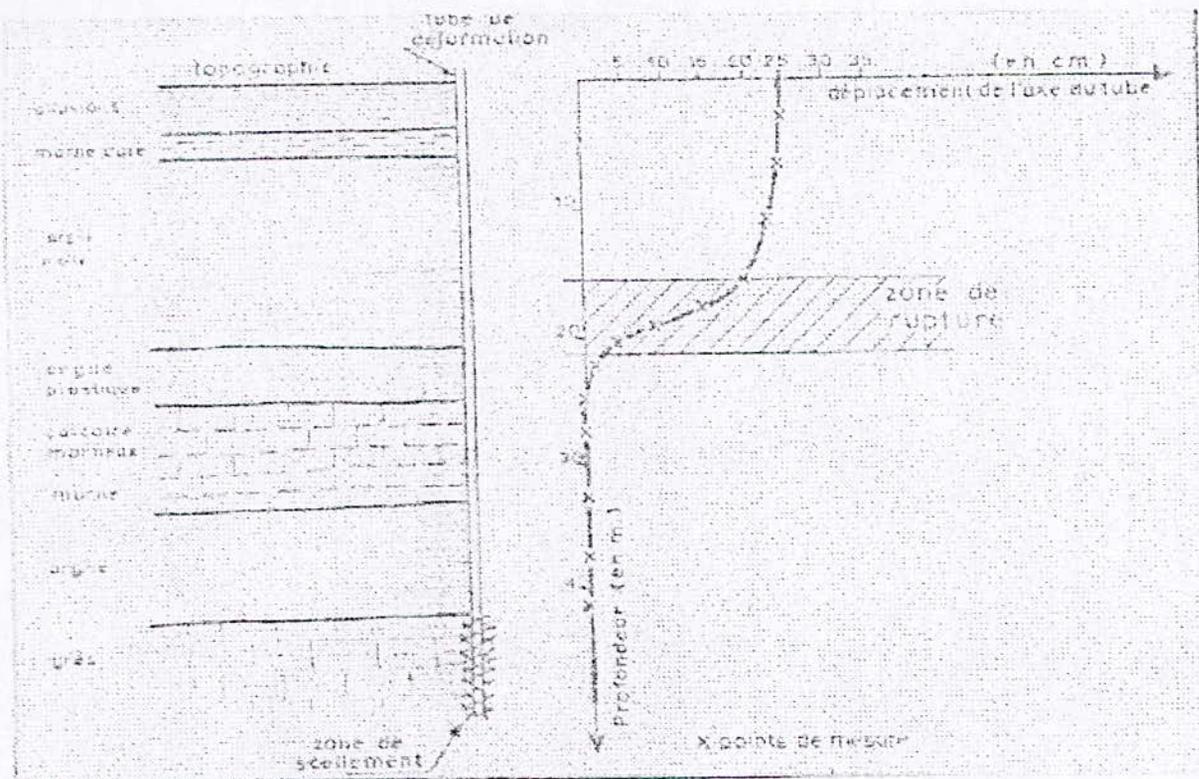


Figure 3.5.3- Diagramme clinométrique d'un forage

### c) les essais géotechniques

Il s'agit de caractériser, sous l'angle mécanique, les terrains constituant la zone instable, et plus précisément la zone de faiblesse au droit de laquelle passe la rupture.

Compte tenu de l'hétérogénéité fréquente des terrains rencontrés dans une zone de glissement, il est toujours difficile d'attribuer des caractéristiques mécaniques précises aux formations inventoriées.

On s'efforce donc, grâce à des essais variés et en nombre suffisant, de définir des fourchettes de valeurs qui fourniront une définition statistique acceptable de ces caractéristiques. Rappelons que la bonne connaissance des caractéristiques géotechniques des terrains conditionne la validité des calculs de stabilité qu'on tentera de réaliser ensuite.

Par ailleurs, le repérage géométrique de la surface de glissement peut être souvent corroboré par les caractéristiques mécaniques du milieu; ainsi on assiste généralement à une chute de résistance, et à une augmentation de la teneur en eau, au voisinage de la surface de rupture.

Et donc pour conclure nous dirons qu'on dispose donc, pour la reconnaissance d'un site instable d'une gamme suffisante de moyens d'investigation. Mais il n'existe pas de technique miracle et universelle; il convient dans chaque cas de choisir celle qui s'avère la mieux adaptée aux données imposées par le site. C'est d'ailleurs souvent la mise en œuvre conjointes de plusieurs techniques, avec confrontation des résultats obtenus, qui s'avère l'approche la plus sûre par les regroupements qu'elle permet.

### 3-6 Calcul de stabilité

Dés lors que l'on dispose d'une bonne définition de la géométrie du glissement, ainsi que des caractéristique mécaniques des terrains concernés, un calcul de stabilité devient possible.

Le principal intérêt de ce calcul réside dans l'estimation, à partir de la valeur du coefficient de sécurité  $F$  qui sera obtenu du « degré d'instabilité » du site accidenté et , à partir de là, dans l'étude des diverses dispositions confortatives envisageables.

## CHAPITRE 4

# ***DIVERSES APPROCHES DETERMINISTES DE L'ETUDE DE LA STABILITE DES TALUS***

#### 4.1 Définition du coefficient de sécurité :

Il existe plusieurs définitions possibles du coefficient  $F$ . Chacune présentant des avantages et des inconvénients.

##### 4.1.1 Définition de Fröhlich :

Soit  $M$  la somme des moments sollicitant le corps (I) à la rotation (voir la figure 4.1). Les moments étant, selon le sens de rotation, affectés d'un signe (+) ou d'un signe (-). Soit  $M'_{max}$ . Le moment résistant maximum qui peut être mobilisé par cisaillement du terrain le long de l'arc CMD.

Fröhlich appelle coefficient de sécurité le rapport :

$$F = \frac{M'_{max}}{M} \quad (7)$$

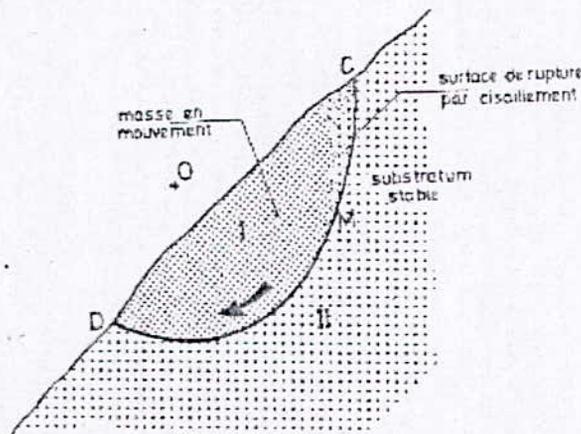


Fig 4.1 Schéma d'un glissement rotationnel

Il faut observer qu'à chaque valeur du moment  $M$  correspond une valeur du moment résistant  $M'$  mobilisé sur la courbe CMD. Tant que  $\mu$  reste inférieur à  $M'_{max}$ ; la rupture ne peut se produire, la sollicitation ne mobilisant qu'une partie de la résistance totale disponible sur CMD. Cette définition, qui suppose une rupture rotationnelle, offre l'avantage de faire apparaître les moments antagonistes en présence.

##### 4.1.2 Définition de Bishop :

Soit la valeur maximale de la contrainte de cisaillement  $\tau$  sur la courbe de glissement potentielle CMD et la résistance au cisaillement  $\tau_f$ . Avant la rupture, le système de forces extérieures appliquées au corps (I) n'entraîne que la mobilisation de la valeur  $\tau$  inférieur à  $\tau_f$ . Bishop définit le coefficient de sécurité par le rapport :

$$F = \tau_f / \tau \quad (8)$$

A noter que les valeurs de  $\tau$  et de  $\tau_f$  varient en fonction du point  $M$  considéré le long de la courbe de rupture CMD.

### 4.1.3 Définition de FELLENIUS :

Elle est voisine de la définition de Bishop. Fellenius propose en effet de considérer que la limite du corps (I) sur la courbe de glissement CMD est atteinte lorsque le système des forces extérieures qui lui appliqué mobilise les fractions  $\text{tg}(\varphi)/F$  et  $C/F$  des valeurs réelles du frottement et de la cohésion du milieu.

L'objectif du calcul de stabilité est, à partir des équations d'équilibre de la statique, d'obtenir une expression de  $F$  en fonction des divers paramètres définissant le site étudié. Dès lors, la donnée - ou le choix - de ces paramètres définit entièrement la valeur de  $F$ . Mais à l'inverse. La valeur de  $F > 1$  étant choisie a priori, cette expression permet de définir les valeurs qu'il faut adopter pour certains paramètres du site (angle de talutage, forces extérieures, ou même valeurs de  $\varphi$  et  $C$  modifiées par un drainage du versant).

Les trois définitions ci-dessus se valent sensiblement mais aucune n'est satisfaisante.

La définition de Fellenius est la plus couramment adoptée en raison de sa commodité d'utilisation. Certains auteurs ont tenté de la perfectionner en prenant des coefficients de sécurité  $F\varphi$  et  $Fc$  différents pour  $\text{tg} \varphi$  et  $c$ .

Il reste que la valeur des caractéristiques varient le long de CMD (milieux naturels hétérogènes) ce qui est particulièrement gênant pour une définition réellement représentative de  $F$ . Lorsqu'on dispose de nombre suffisant d'essais géotechniques représentatifs de la zone de terrain voisine de la courbe CMD (courbe réelle de glissement ou courbe la plus probable), on s'efforce de tourner la difficulté en adoptant des valeurs moyennes de  $\text{tg} \varphi$  et  $c$  acceptable pour l'ensemble de la courbe CMD.

### 4.2 Choix de la valeur de $F$ dans le calcul de stabilité d'un ouvrage ou d'un versant:

Il faut d'abord rappeler que l'application de ce coefficient réducteur a pour raison d'être fondamentale de se tenir "raisonnablement" éloigné de la rupture.

Dans cette optique générale, on peut distinguer deux rôles principaux joués par  $F$ :

- 1er rôle : se tenir plus au moins éloigné de la rupture selon la valeur que l'on attribue au site à protéger, ou encore selon l'importance du risque humain qui est associé à une éventuelle rupture dans cette optique,  $F$  apparaît donc comme un "coefficient d'assurance".

Il ne faut jamais perdre de vue que plus  $F$  est élevé plus le projet sera cher ; l'assurance se paie.

L'application de ce "coefficient d'assurance" suppose que la valeur de la résistance limite qui définit la rupture est connue

- 2ème rôle : prendre en compte et "digérer" les différentes causes d'imprécisions et d'erreurs qui peuvent fausser le résultat d'un calcul. Rappelons les deux causes principales d'erreurs, lesquelles peuvent d'ailleurs se combiner, voire s'additionner.

Incertitude sur la valeur réelle - qui peut d'ailleurs changer avec le temps - des paramètres pris en compte dans le calcul. ( $\varphi, c, u, \gamma$ ). Cette certitude est d'autant plus grande que les investigations sur le site sont plus réduites.

Hypothèse et simplifications adoptées dans le développement d'un calcul de stabilité ; leur importance se trouve sensiblement réduite par l'introduction des calculs sur ordinateur qui permettent de serrer de plus en plus près la complexité des données réelles du site.

Dans ce dernier rôle, le coefficient  $F$  apparaît comme un "coefficient d'ignorance".

Finalement, la valeur de  $F$  qu'on adopte dans un projet implique l'examen et la prise en compte des deux fonctions distinguées ci-dessus, lesquelles se trouvent ensuite confondues dans le chiffre retenu.

Il n'y a donc, en la matière, que des cas d'espèces, et un choix correct de  $F$  suppose une bonne pratique de ces problèmes.

A titre d'orientation, on peut dire qu'en règle générale, la valeur adoptée pour  $F$  est assez rarement inférieur à 1,5.

Elle peut quelque fois être de 2, voire de 2,5 pour des ouvrages dont la stabilité doit être garantie à tout prix (grand risque pour les personnes, site exceptionnel).

Pour certains sites sans valeur particulière ou pour certains ouvrages courants, et lors qu'il n'y a pas risque pour les personnes, on peut accepter des valeurs faibles : 1,2 voir 1,1.

Mais pour pouvoir se rapprocher ainsi de 1, c'est à dire de la rupture, il faut être très sûr de la validité des hypothèses et des paramètre adoptés - ce qui est rare et sans doute illusoire-, et être bien conscient des conséquences possibles de ce choix tendu.

### 4.3 Méthode globale:

#### 4.3.1 Equilibre d'une masse sujette au glissement:

La méthode de calcul dite globale suppose en principe un milieu homogène et isotrope défini par  $(\gamma, \phi, c)$  et  $u$  si le milieu est aquifère elle consiste à étudier l'équilibre du corps sujet au glissement, considéré comme un solide indéformable, sous l'action du système de forces qui lui est appliqué.

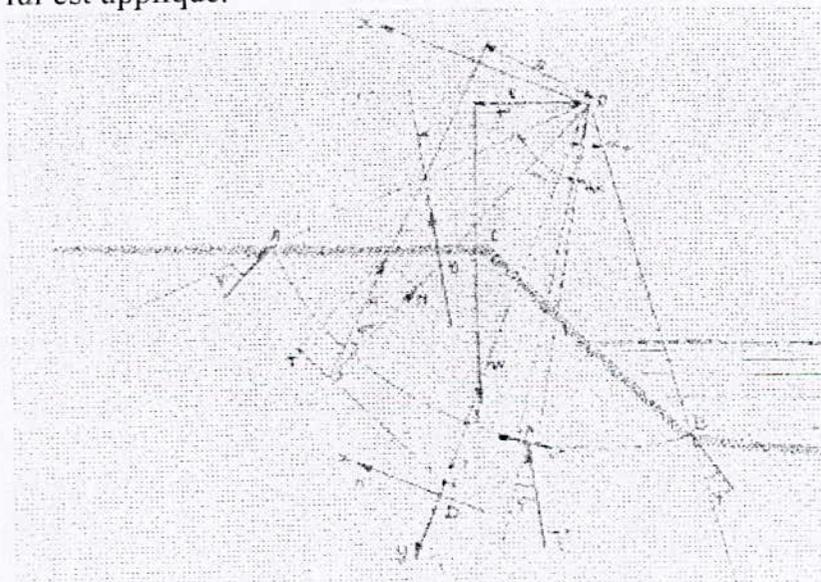


Fig 4.2 équilibre globale du massif.

La figure (4-2) représente le talus ACB, dont on étudie la stabilité, comme on l'a souligné ci-dessus, ce massif est homogène, mais il peut renfermer une nappe phréatique ou même être le siège d'un écoulement, on suppose que la rupture du massif va se produire le long d'un arc de cercle, de centre  $o$  et de rayon  $OA = r$  et on se propose d'évaluer le coefficient de sécurité correspondant, c'est à dire la fraction de la cohésion et de frottement interne réel du terrain qu'il convient de mobiliser, pour assurer strictement l'équilibre de la zone ACBMA du massif.

Les moments qui interviennent dans cette rotation peuvent se diviser en deux catégories:

- Agissant en sens inverse, les moments stabilisateurs (encore appelés moments résistants ou positifs) s'opposant à la rotation.

Les forces qui donnent naissance à des moments positifs appartiennent à deux familles bien distinctes:

Certaines forces extérieures appliquées à la masse instable, elles jouent un rôle stabilisateur actif.

Les forces de résistance au cisaillement du terrain le long de la ligne AMB, elles jouent un rôle stabilisateur passif

Pour le talus ACB, les forces qui agissent sur lui sont :

Tout d'abord, le poids W des terres et de l'eau situées dans la zone, sur le contour CBMA, ensuite, les efforts transmis par l'eau de la nappe; ces efforts admettent une résultante U que l'on supposera complètement connue.

En fin, il faut prendre en compte les contraintes effectives le long de la ligne de glissement AMB. la contrainte critique en M est la somme:

- D'une contrainte de cohésion  $C''$  porter par la tangente et d'intensité  $C'' = \frac{C}{F}$ . (9)

- D'une contrainte de frottement  $f''$  ayant une intensité inconnue et une obliquité  $\varphi''$  telle que  $\text{tg}\varphi'' = \text{tg}\varphi/F$  (10)

F: est précisément le coefficient de sécurité recherché).

La résultante des forces élémentaires correspondantes agissant le long de la ligne de glissement peut aussi se décomposer en deux forces :

- Une force  $K''$  pour l'effet de la cohésion (elle est parallèle à AB, passe par le point D tel que  $OD = r \frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0}$  et à pour intensité  $K'' = 2r \sin \alpha_0 C''$ ). (11)

- Une force R pour l'effet des contraintes de frottement.

On écrit que la zone ABMA est en équilibre, c'est-à-dire que l'ensemble des forces mentionnées ci dessus a une résultante et un moment par rapport à O nuls.

$$\vec{W} + \vec{U} + \vec{K}'' + \vec{R} = 0 \quad (12)$$

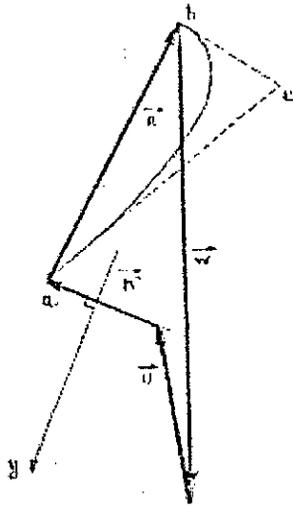


Fig 4.3 polygone des forces

Le polygone des forces est indiqué sur la figure 4-3 et :  $W.l - U.m - R.n - 2 \cdot \alpha_0 r^2 \frac{C}{F} = 0$

On donne naturellement aux produits  $W.l$ ,  $U.m$  et  $R.n$ , les signes appropriés.

Dans ces équations, les forces  $W$  et  $U$  sont parfaitement connues la force  $K''$  l'est aussi au coefficient de sécurité prés.

Mais à priori, on ne sait rien sur la distribution des contraintes le long de l'arc  $AMB$  ni, donc, sur l'intensité ou la direction de la force  $R$ . c'est bien la ce qui fait la difficulté du problème. Les différentes méthodes mises au point pour l'étude de la stabilité des talus se distinguent les unes des autres, par la manière dont elles viennent à bout - avec plus au moins de rigueur - de cette difficulté.

#### 4.3.2 Méthode de Biarez – Bornes inférieure et supérieure du coefficient de sécurité :

sur le polygone des forces figure 4-3, on a représenté, non seulement la force  $\vec{R}$ , mais aussi le funiculaire des contraintes  $f''$  bien entendu, ce funiculaire a mêmes extrémités  $a$  et  $b$  que  $R$  puisque

$$\vec{R} = \sum \vec{f}'' \cdot r \cdot d\alpha \quad (14)$$

On connaît d'autre part, la direction de ses tangentes aux deux extrémités, ce sont les directions des contraintes de frottement en  $A$  et en  $B$ .

$$L'' = r \int_{ab} f'' \cdot d\alpha \quad (15)$$

cette longueur  $L''$  dépend de la distribution des contraintes le long de l'arc  $AB$ , mais pour toutes les distributions imaginables,  $L''$  est toujours supérieur à  $R$ , qui est la courte distance entre les deux extrémités du funiculaire. Par ailleurs, si on admet que les contraintes  $\vec{f}''$  sont toujours de même signe, le funiculaire n'a pas de point d'inflexion et pas conséquent  $L''$  est toujours inférieur à  $ae + eb$ .

Le moment  $R.n$  de la résultante  $R$  par rapport à  $O$  a pour expression :

$$R.n = r \int_{ab} f'' \cdot \sin\varphi'' \cdot r \cdot d\alpha = r \cdot \sin\varphi'' \cdot L'' \quad (16)$$

l'équation des moments devient :

$$r \sin \varphi'' L'' + 2 \alpha_0 r^2 c/F = W.l - U.m. \quad (17)$$

Dans cette équation, seuls F et L'' sont inconnus .on peut vérifier que pour les valeurs positives de F et L'' (les seules qui présente ici un intérêt pratique ) cette équation définit F comme une fonction univoque et croissante de L''.

Si donc, on introduit dans la relation ci-dessus, les deux bornes R et (ae + eb) de la longueur funiculaire, on trouvera deux bornes inférieure et supérieure du coefficient de sécurité F.

La borne inférieure permet sans hypothèse complémentaire sur la distribution de f'', d'avoir une première indication sur la plus ou moins grande stabilité du talus .

Il faut donc introduire l'intensité R de la résultante à la place de la longueur du funiculaire, dans l'équation des moments mais on notera que pour les milieux doués de cohésion, que R dépend du coefficient de sécurité F (par l'intermédiaire de K'')

On doit donc procéder par approximation successives. Pour cela, il faut écrire l'équation des moments sous une forme pratique qui permet une convergence rapide des approximations .Dans cette équation, on remplace  $\sin \varphi''$  par  $\cos \varphi'' \operatorname{tg} \varphi/F$ , et il vient :

$$R \cdot \cos \varphi'' \cdot (\operatorname{tg} \varphi/F) \cdot L'' + 2 \cdot \alpha_0 \cdot r^2 \cdot c/F = W.l - U.m. \quad (18)$$

c'est à dire:

$$F = 2 \cdot \alpha_0 \cdot r^2 \cdot c + r \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi'' \cdot L'' / (W.l - U.m) \quad (19)$$

dans cette expression  $\cos \varphi''$  est le seul terme qui dépend de F (mis a part L'' évidemment ) comme une légère erreur sur F et donc sur  $\varphi''$  a peu d'influence sur  $\cos \varphi''$ , on peut être assuré que cette formule converge rapidement (il vaut mieux faire apparaître  $\cos \varphi''$  que  $\sin \varphi''$  qui s'introduit naturellement , car  $\sin \varphi''$  est plus sensible  $\cos \varphi''$  aux variations de F , puisque  $\varphi'' < \varphi < \pi/4$  )

le processus est alors le suivant :

On choisit une valeur pour F, on en déduit  $\varphi''$  et R et on porte ces valeurs dans la second membre de l'équation ci-dessus d'une nouvelle valeur de F .  
l'expérience a montré que la convergence est très rapide , deux ou trois opérations suffisent en général .

on a ainsi déterminé la borne inférieure du coefficient de sécurité correspondant à un cercle donné parmi tous les cercles possibles on choisira en définitive celui qui correspond à la borne inférieure la plus basse .

Biarez, auquel on doit cette utilisation de la longueur du funiculaire, a même montré qu'on pouvait améliorer la précision du calcul en déterminant un nouveau couple de bornes inférieure et supérieure de F situé à l'intérieur du couple précédemment définie et présentant donc une fourchette plus étroite ,sans faire aucune autre hypothèse sur les contraintes f' que celle de la constance de leur signe, en l'absence d'eau il a montré que la nouvelle borne inférieure ne différait que 2 a 3 % avec le coefficient de sécurité correspondant à un funiculaire rectiligne et que la borne supérieure s'en écartait de 10 % au maximum .

L'influence de la distribution de contraintes le long de l'arc AB sur la valeur du coefficient de sécurité est donc assez faible .C'est une constatation générale qu'on retrouve dans toutes les méthodes .

### 4.3.3 Méthode de Taylor et de Caquot :

La méthode de Taylor consiste à décomposer la résultante R des forces de frottement le long de l'arc AMB, en ses deux composantes normales N et tangentielle T. La ligne d'action de T coupe la bissectrice OI de l'angle AÔB en un point E.

En étudiant les différentes formes possibles de répartition de contraintes. Caquot a montré que E est obligatoirement situé sur le petit segment JD, D est le point d'intersection de la force de cohésion K'', il correspond à une répartition uniforme de contraintes. le point J correspond lui à une distribution paire s'annulant en A et B, la longueur IJ est sensiblement égale à 0,6 ID.

La longueur OE est donc connue avec une erreur relative égale environ à  $0,4 \left( \frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0} - 1 \right)$

Cette valeur très faible, sauf lorsque  $\alpha_0$  est très grand, c'est à dire lorsque le cercle est profond.

Caquot tire parti de cette remarque pour proposer une méthode de calcul du coefficient de sécurité. L'ensemble des cinq forces W, K'', N et T forme un système équivalent à zéro ; on va l'écrire dans le système d'axe xoy de la figure 4-2. Les forces W et U sont connues en grandeur et direction soient  $W_x$  et  $W_y$  et  $W_m$  les coordonnées de leur somme et de leur moment résultant par rapport à o.

La force K'' a pour coordonnées :

$$\frac{2cr \sin \alpha_0}{F} \text{ et } 0$$

son moment par rapport à o est à  $\frac{2cr^2 \alpha_0}{F}$

la force N passe par o, ses coordonnées sont  $N_x$  et  $N_y$ .

La force T est perpendiculaire à N, son intensité est égale à  $N \operatorname{tg} \varphi / F$ , elle passe par le point E (0,t) ses coordonnées sont donc  $(-N_y \operatorname{tg} \varphi / F, N_x \operatorname{tg} \varphi / F)$  son moment  $-t N_y \operatorname{tg} \varphi / F$ .

Le problème comporte trois inconnues F,  $N_x$  et  $N_y$  et on doit respecter trois équations d'équilibre.

$$W_x + N_x - N_y \operatorname{tg} \varphi / F + 2 C R \sin \alpha_0 / F = 0 \quad (20)$$

$$W_x + N_y + N_x \operatorname{tg} \varphi / F = 0 \quad (21)$$

$$-M_w - t N_y \operatorname{tg} \varphi / F + 2 c r^2 \alpha_0 / F = 0 \quad (22)$$

Il est donc possible d'éliminer  $N_x$  et  $N_y$  et de calculer F, donnée par une équation du troisième degré qui, tous calculs faits s'écrit :

$$-F^3 M_w + F^2 (t W_y \operatorname{tg} \varphi + 2 c r^2 \alpha_0) - F \operatorname{tg} \varphi (M_w + t W_x) + 2 c r \operatorname{tg} \varphi (r \alpha_0 / \sin \alpha_0) = 0 \quad (23)$$

On remarque aussitôt que le terme constant est pratiquement nul puisque  $t = OE$  ne diffère de

$$\frac{r \alpha_0}{\sin \alpha_0} = OD \text{ que d'une quantité minime comme on l'a précisé.}$$

De même, Caquot constate que le coefficient  $(M_w + t W_x)$  du terme en  $F$  est très petit devant les coefficients des termes en  $F^2$  et  $F^3$ , on le vérifie aisément lorsque  $U = 0$  et que  $W_x$  et  $M_w$  correspondent au seul poids du milieu.

On peut donc, en première approximation, ne conserver que les termes en  $F^3$  et  $F^2$  - on en titre aussitôt :

$$F = t W_y \operatorname{tg} \varphi + 2 c r^2 \alpha_0 / M_w. \quad (24)$$

Soit en remplaçant  $t$  par  $\frac{r \alpha_0}{\sin \alpha_0}$

$M_w$  par  $W.l - U.m$  (pour reprendre les notations du début du paragraphe) et en posant  $W_y = (W+U)_y$  (pour bien rappeler la définition de  $W_y$ ).

$$F = \frac{2 \alpha_0 r^2 c + r \operatorname{tg} \varphi \frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0} (W + U)_y}{W.l - U.m} \quad (25)$$

on comparera avec intérêt cette formule à celle qui a été trouvée précédemment par la méthode de Biarez. Les deux expressions ont la même structure et ne diffèrent que par le deuxième terme du numérateur.

$$r \operatorname{tg} \varphi \frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0} (W + U)_y \text{ Pour Caquot.}$$

$$r \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi'' l'' \text{ pour Biarez}$$

En appelant  $\theta$  l'angle aigu que la direction de  $N$  fait avec  $OY$ , on voit sur le polygone de la figure 4-3 que :

$$(W + U)_y = R \cos(\varphi'' + \theta). \quad (26)$$

Dans la méthode de Biarez, on remplace  $l''$  par  $R$ , pour obtenir la borne inférieure de  $F$ .

Finalement, on trouve au numérateur des deux formules, le terme multiplié dans un cas par  $\cos \varphi''$  (Biarez) et dans l'autre par  $\frac{\alpha_0}{\sin \alpha_0} \cos(\varphi'' + \theta)$  (Caquot).

Ces deux expressions sont très voisines et l'expérience confirme bien que les deux méthodes donnent des résultats pratiquement identiques, il en va de même d'ailleurs pour la méthode de Taylor.

On dispose pour l'étude globale de la rupture circulaire d'un massif homogène d'un certain nombre de méthodes tout à fait concordantes, dans le cas particulier où  $U = 0$ , c'est à dire en l'absence de nappe phréatique et de tout écoulement d'eau, il est possible de donner des indications plus précises car le problème dépend alors d'un petit nombre de paramètres.

#### 4.4 Méthodes des tranches :

##### 4.4.1 Généralité et principes de la méthode :

cette méthode de calcul , imaginée par pettersson , a subi , au fil des ans , de nombreuses adaptations. Schématiquement, elle consiste à diviser le volume instable en un certain nombre de tranches verticales ( voire figure 4.4) et à écrire que chaque tranche , considérée comme un solide indépendant , est en équilibre limite sur la ligne de rupture , sous l'action des forces et des moments qui la sollicitent

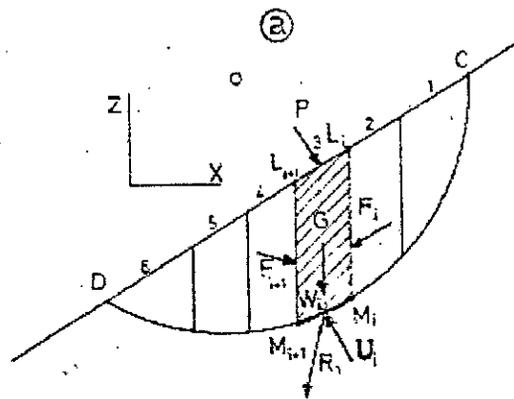


Fig 4.4 schéma général pour la méthode des tranches.

Le mode de division et le nombre de tranches adoptés sont arbitraires , leur choix tient toute fois compte des données géométriques , géologique et géotechnique du site (nature des terrains , présence des nappes , position des ouvrages construits , etc ....)

Dans sa version la plus générale, la méthode des tranches peut, en principe, prendre en compte un maximum de complexité : surface topographique de forme quelconque , surface de rupture non circulaire , terrains hétérogènes , et notamment ouvrage construit sur le versant .elle est donc particulièrement adopté à l'étude des cas complexes que sont généralement les versants naturels .

Il faut d'ailleurs observer que la division en tranches verticales correspond bien aux techniques d'investigation classique (sondages verticaux, essais in situ.).

#### 4.4.2 Equilibre d'une tranche :

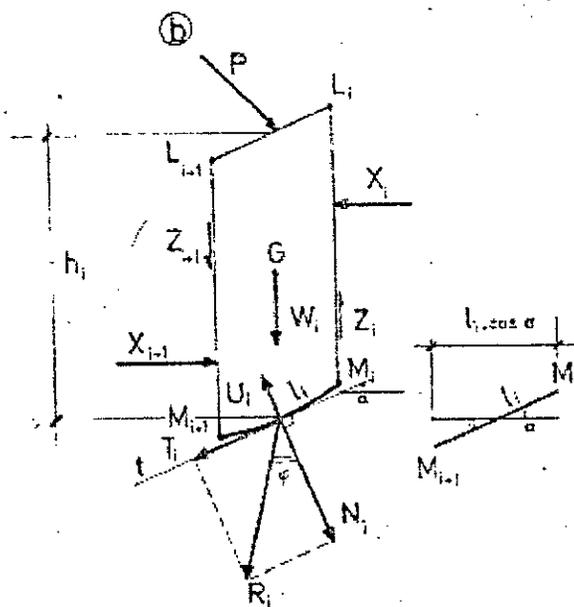


Fig4.5 équilibre d'une tranche.

Considérons la tranche  $L_i M_i L_{i+1} M_{i+1}$  supposée en équilibre limite (figure 4-5).

Elle est soumise aux forces suivantes :

- Le poids  $W_i$  de la tranche :  $W_i \gamma \cdot h_i \cdot l_i \cdot \cos \alpha_i$
- Les forces extérieures  $W_i$  apportées par des ouvrages agissant sur la section  $L_i L_{i+1}$  du profil (remblais, murs de soutènement, etc ...).
- La résistance au cisaillement  $R_i$ , calculée en contraintes effectives, disponible le long l'arc  $M_i M_{i+1}$  de longueur  $l_i$ , cette résistance se décompose en une composante normale  $N_i$  et en une composante tangentielle  $T_i$ .
- La sous - pression  $U_i$  issue de l'action de la pression interstitielle  $u$  agissant sur l'arc  $M_i M_{i+1}$ .

Le long de  $M_i M_{i+1}$ , on suppose connues et constantes les valeurs de  $c$  et  $\varphi$ , ce qui permet de définir  $N_i$  et  $T_i$  par l'application de la loi de coulombes .

$$\begin{cases} N_i = (\sigma - u) \cdot l_i & (27) \\ T_i = C \cdot l_i + (\sigma - u) \cdot l_i \cdot \tan \varphi & (28) \end{cases}$$

L'introduction du coefficient de sécurité  $F$  dans le calcul se fait , selon la définition de

Fellenius , en remplaçant  $c$  et  $\tan \varphi$  par  $\frac{C}{F}$  et  $\frac{\tan \varphi}{F}$  .

Ainsi, on peut considérer que les forces qui viennent d'être énumérées sont connues. Reste à examiner l'action des forces appliquée sur les deux faces latérales verticales de la tranche considérée par le terrain amont qui exerce une force  $F_i$  de composantes  $(X_i, Z_i)$ .

- sur  $L_{i+1} M_{i+1}$  le terrain aval exerce une force  $F_{i+1}$  de composantes  $(X_{i+1}, Z_{i+1})$  .

La difficulté essentielle de la méthode des tranches réside dans l'application des forces  $F_i$  et  $F_{i+1}$ . La stricte observation de la réalité conduit à admettre que la force amont et la force aval sont différentes ,il en résulte .

- une composante horizontale  $X_i - X_{i+1}$  désignée par  $\Delta X_i$  qui n'est pas nulle.
- Une composante verticale  $Z_i - Z_{i+1}$  désignée par  $\Delta Z_i$  qui n'est pas nulle
- Un couple qui tente à faire tourner la tranche sur elle - même.

L'écriture de l'équilibre de la tranche considérée, par rapport aux deux axes (OX.OZ) conduit, sous sa forme générale, à 4 équations différentielles auxquelles s'ajoute l'équation de coulomb Or ce système de 5 équations contient 4 fonctions inconnues, le coefficient F étant a priori, également inconnu.

La solution ne peut donc être acquise que par le choix d'une hypothèse complémentaire, c'est elle qui sert de base et différencie les divers modes de calcul qui ont été proposé à partir du schéma général décrit ci - dessus.

Selon les auteurs, cette hypothèse porte :

- Soit sur les forces latérales  $F_i$  et  $F_{i+1}$
- Soit sur la ligne d'action  $e(x, Z)$  de ces forces.
- soit sur la répartition de la contrainte normale  $\tau$  sur l'arc  $M_i M_{i+1}$

#### 4.4.3 Méthode suédoise (dite aussi de Fellenius):.

L'hypothèse la plus couramment utilisée, a été faite par Fellenius en 1927. Elle consiste à admettre, en même temps qu'une ligne de rupture circulaire, que pour chaque tranche les forces  $F_i$  et  $F_{i+1}$  sont égales et opposées..

On donc selon cette hypothèse :  $\Delta X_i = \Delta Z_i = 0$ , le couple de rotation est donc nul, Il en résulte une simplification radicale du calcul et l'on peut utiliser, comme l'a fait Taylor, la construction graphique dite "cercle de frottement".

Cette méthode permet de prendre en compte une surface topographique de forme quelconque, des forces extérieures appliquées a cette surface, plusieurs couches de terrains stratifiées, et une nappe filtrant dans ces terrains.

Si la seul force extérieure agissant sur le versant et la pesanteur, le coefficient de sécurité prend la forme très simple suivante :

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n (C \cdot l_i + N_i \tan \varphi)}{\sum_{i=1}^n T_i} \quad (29)$$

Sa simplicité explique que, malgré ses insuffisances la méthodes suédoise ait encore de nombreux adeptes .

#### 4.4.4 Méthode de Bishop :

Bishop a apporté une amélioration à la méthode précédente en considérant que  $\Delta X_i$  n'est pas nécessairement nul, et en l'éliminant par un artifice de calcul, Bishop conserve la rupture circulaire et l'hypothèse  $\Delta Z_i = 0$ . Il a toutefois montré que le fait d'admettre que  $\Delta Z_i = 0$  n'avait que peu d'influence (10 à 15%) sur la précision des résultats de calcul.

La méthode de Bishop est actuellement très utilisée, Elle a donné lieu à l'établissement de plusieurs programmes de calcul sur ordinateur.

*CHAPITRE 5*

*METHODES DE CALCUL PROBABILISTE  
DU COMPORTEMENT DES OUVRAGES*

## 5.0 Méthodes de calcul probabiliste du comportement des ouvrages

Les calculs de mécanique des sols nécessaires au dimensionnement des ouvrages (ouvrages de soutènement, ouvrages en terre, fondations, etc.) ont tous pour objectif de déterminer la valeur de paramètres (coefficient de sécurité, temps de consolidation, amplitude de tassements, etc.) qui dépendent des propriétés physiques et mécaniques des sols, de la géométrie des problèmes et des conditions initiales et aux limites imposées.

Si l'on traite les variations dans l'espace des propriétés des sols, les variations dans le temps des conditions aux limites et les fluctuations de la géométrie des sols et des ouvrages comme des phénomènes aléatoires  $X_i$ , les résultats des calculs nécessaires au dimensionnement des ouvrages sont eux mêmes des variables aléatoires  $Y$ , fonctions des variables aléatoires  $X_i$ .

Chacune des variables aléatoires  $Y$  a sa propre fonction des répartition  $G(y)$  et sa densité de probabilité  $g(y)$ , qu'il s'agit d'évaluer.

Le calcul probabiliste des ouvrages de mécanique des sols est donc simplement un problème de calcul de fonctions de variables aléatoires :  $Y=f(X_i)$

Par ailleurs, il n'existe pas toujours de relation explicite entre les paramètres physiques, mécaniques et géométriques des ouvrages et les résultats qu'il s'agit d'évaluer. La plupart des méthodes de calcul utilisées pour le dimensionnement des ouvrages ne sont qu'approchées, ce qui introduit à la fois un biais et une incertitude supplémentaire qu'il faut incorporer dans l'analyse de la fonction  $Y=f(X_i)$ .

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour déterminer de façon approchée la densité de probabilité  $g(y)$  à partir des lois de distribution des paramètres  $X_i$  du modèle de calcul. Nous décrivons ci-après quatre d'entre elles :

- Approximation par les séries de Taylor
- Approximation par intégration numérique
- Approximation par une loi normale ou lognormale
- Simulation par la méthode de Monte-Carlo

### 5.1 Approximation par les séries de Taylor

Si la fonction  $y = f(x_i)$  est différentiable par rapport aux  $x_i$ , analytiquement ou numériquement, elle peut être développée en série de Taylor autour de la valeur moyenne  $f(m_1, m_2, \dots, m_n)$ ,  $m_i$  désignant l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X_i$ . En limitant le développement au premier ou second ordre, ou plus, on obtient une expression approchée de  $y$ , qui permet de déterminer plus simplement les valeurs des paramètres de la densité de probabilité de  $Y$ .

Ainsi (Benjamin et Cornell, 1970), l'espérance mathématique a pour expression approchée au second ordre :

$$E[Y]=f(m_1, m_2, \dots, m_n) + \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \Bigg|_{(m_1, m_2, \dots, m_n)} * Cov[X_i, X_j] \quad (30)$$

La variance a pour expression approchée au premier ordre :

$$V[Y] \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \bigg|_{(m_1, \dots, m_n)} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} * Cov[X_i, X_j] \quad (31)$$

Dans le cas où les variables aléatoires  $X_i$  sont indépendantes, on a  $Cov[X_i, X_j]=0$  pour  $i \neq j$

$$\text{et } Cov[X_i, X_j] = \sigma^2 X_i = V[X_i] \quad (32)$$

d'où

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \bigg|_{(m_1, \dots, m_n)} \right]^2 * V[X_i] \quad (33)$$

Les moments d'ordre 3 et 4 sont donnés par les expressions suivantes :

$$\mu_3[Y] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \bigg|_{(m_1, \dots, m_n)} \right]^3 * \mu_3[X_i] \quad (34)$$

$$\mu_4[Y] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \bigg|_{(m_1, \dots, m_n)} \right]^4 * \mu_4[X_i] + 6 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \left[ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \bigg|_{(m_1, \dots, m_n)} \right]^2 *$$

$$\left[ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \bigg|_{(m_1, \dots, m_n)} \right]^2 * (\sigma_{X_i}^2 * \sigma_{X_j}^2 + 2 * \sigma_{X_i X_j}^2) \quad (35)$$

La connaissance des moments d'ordre 1, 2, 3 et 4 ( $E[Y]$ ,  $V[Y]$ ,  $\mu_3[Y]$  et  $\mu_4[Y]$ ) permet d'estimer la densité de probabilité de Y dans le système de Pearson.

### 5.2 Approximation par une loi normale ou lognormal (Lumb 1974)

Si Y est la somme de n variables aléatoires indépendantes,  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  et d'après le théorème de la limite centrale, quand le nombre n devient grand, la densité de probabilité de Y tend asymptotiquement vers une loi normale, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(y - \bar{y})^2}{2\sigma^2} \right] \quad (36)$$

à la condition que tous les moments de  $X_i$  aient des valeurs finies. n  
De même, si Y est le produit de n variables aléatoires indépendantes,  $Y = \prod_{i=1}^n X_i$ , la densité de probabilité de Y tend asymptotiquement vers une distribution lognormale.

Par conséquent, pour les sommes et les produits de variables aléatoires indépendantes, on n'a pas besoin de connaître que l'espérance mathématique et la variance de

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad Z = \sum_{i=1}^n \lg X_i$$

pour les combinaisons linéaires de variables indépendantes  $X_i$ , on a :

$$Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot X_i \quad (37)$$

$$E[Y] = \sum_{i=1}^n \beta_i E[X_i] \quad (38)$$

$$V[Y] = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \cdot V[X_i] \quad (39)$$

pour les produits de la forme  $Y = \prod_{i=1}^n (X_i)^{\alpha_i}$ , on peut écrire :

$$Z = \lg Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \lg X_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot W_i \quad (40)$$

il vient

$$E[Z] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot E[W_i] \quad (41)$$

$$V[Z] = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 \cdot V[W_i] \quad (42)$$

pour obtenir les expressions de  $E[W_i]$  en fonctions des  $E[X_i]$ , on peut utiliser par exemple la méthode du développement en série de Taylor.

Il vient, après mise de la variable  $X_i$  sous forme réduite  $[X_i = x_i \cdot (1 + C_i \cdot U_i)]$  :

$$W_i = \lg \bar{x}_i + 0.434 \ln(1 + C_i \cdot U_i) = \lg \bar{x}_i + 0.434 \left[ C_i \cdot U_i - (C_i^2 \cdot U_i^2) / 2 + (C_i^3 \cdot U_i^3) / 2 + \dots \right] \quad (43)$$

d'où :

$$E[W_i] = \lg \bar{x}_i - (0.434/2) \cdot C_i^2 \quad (44)$$

$$V[W_i] = (0.434 C_i)^2 \quad (45)$$

### 5.3 Approximation par intégration numérique

Lorsque l'expression de  $Y = f(X_i)$  n'est pas connue sous forme analytique, mais peut être déterminée sous forme numérique ou expérimentale, le calcul des dérivées partielles précédentes pratiquement impossible mais les moments de  $Y$  peuvent cependant être déterminés de façon précise par intégration numérique.

### 5.4 Simulation : méthode de Monte-Carlo

Il est toujours possible de déterminer empiriquement la densité de probabilité d'une variable  $Y = f(X_i)$  en calculant les valeurs de  $y$  correspondant à des ensembles de valeurs des  $x_i$  générées de façon aléatoire conformément aux densités de probabilité de chacune des variables aléatoires  $x_i$  et en déterminant la densité de probabilité de  $Y$  d'après la distribution des fréquences  $y$  obtenus. La précision de cette simulation augmente avec la racine carrée de la taille de l'échantillon et de ce fait il faut disposer d'un échantillon très important pour obtenir des résultats utiles. Ceci nécessite en pratique l'utilisation d'un ordinateur.

Un des aspects importants de la méthode de Monte-Carlo est qu'elle nécessite la génération de séries de valeurs aléatoires de chacun des paramètres des modèles de calcul. Il existe dans les bibliothèques de sous programmes statistiques des programmes capables de générer des suites de nombres aléatoires en suivant des lois de distribution simples (densité uniforme sur un intervalle donné, loi normal, loi log-normal, ... etc)

Pour les lois de distribution uniformes, les programmes de calcul utilisent des algorithmes tels que :

$$X_{n+1} = (A \cdot X_n) \text{ mod } M \quad (46)$$

$$X_{n+1} = (A \cdot X_n + B) \text{ mod } M \quad (47)$$

Les relations ci-dessus permettent de calculer une série de nombres  $x_n$  à partir d'une valeur initiale  $x_0$  quelconque. La notation «  $x=(y)\text{Mod } M$  » indique que  $x$  est le reste de la division du nombre entier  $y$  par le nombre entier  $M$ . le nombre  $M$  est la période de la séquence aléatoire générée. On le choisit très grand. Le nombre  $A$  est compris entre 0 et  $m-1$ , ainsi que le nombre  $B$ . les nombres générés sont uniformément répartis entre 0 et  $m-1$ .  
On ajuste la série  $\{x_n\}$  à l'intervalle  $[a, b]$  désiré en utilisant la formule :

$$x_{n'} = \frac{b - a}{M} x_n + a \quad (48)$$

*Chapitre 6*

*Analyse probabiliste de la stabilité des pentes*

## 6.1 Principes généraux des méthodes d'analyse probabiliste de la stabilité des pentes

L'analyse probabiliste de la stabilité d'une pente fait intervenir trois éléments d'importance égale :

- La description des variations naturelles des propriétés physiques et mécaniques des sols et des conditions géométriques du problème traité.
- Une méthode de calcul déterministe de la stabilité des pentes
- Et une méthode de traitement analytique ou numérique des fonctions de variables aléatoires.

Le choix des paramètres de calcul est lié à celui de la méthode de calcul déterministe utilisée. Sur ce plan, les méthodes de calcul en contraintes totales, qui caractérisent la résistance du sol par une cohésion non drainée, sont évidemment plus simples que les méthodes de calcul en contraintes effectives, pour lesquelles il faut connaître la cohésion, l'angle de frottement interne et la pression interstitielle en tout point.

Lorsque l'on développe une méthode d'analyse probabiliste, il faut choisir parmi tous les paramètres du problème ceux que l'on considérera comme déterministes et ceux que l'on traitera comme des variables aléatoires, ce choix n'est pas simple car le traitement analytique ou numérique des équations de la méthode de calcul adaptée devient très complexe quand le nombre des variables aléatoires augmente.

Une fois que l'on a choisi les variables aléatoires du calcul, il faut en déterminer les caractéristiques statistiques. Ce que l'on peut faire d'après des résultats de mesures ou d'essais ou en utilisant des valeurs publiées dans la littérature.

Outre la moyenne et l'écart type, il est indispensable de déterminer la dérive éventuelle des variables aléatoire dans l'espace et leur fonction d'autocorrélation, ainsi que les corrélations multiples entre ces variables. Faute de tenir compte de ces caractéristiques de la variabilité naturelle des sols, on risque d'obtenir des résultats d'intérêt pratique à peu près nul.

La méthode de calcul déterministe qui constitue l'intermédiaire obligatoire entre les hypothèses du calcul et la probabilité de rupture que l'on cherche à déterminer doit être choisie avec soin. Les méthodes de calcul « explicites », dans lesquelles le résultat est une fonction explicite des hypothèses du calcul, sont en général plus simples à traiter que les méthodes de calcul dans lesquelles le résultat provient d'un calcul itératif.

Deux critères peuvent être utilisés pour caractériser la stabilité (ou l'instabilité) des pentes :

- La marge de sécurité  $M_s$ , égale à la différence entre le moment résistant et le moment moteur, peut être comparée à 0 (ou à une valeur aléatoire représentant l'incertitude sur le modèle de calcul)
- Le coefficient de sécurité  $F$ , égal au rapport du moment résistant au moment moteur, peut être comparé à 1 (ou à une valeur aléatoire représentant l'incertitude sur le modèle de calcul)

Les deux méthodes peuvent être utilisées et sont en pratique équivalentes, ils semble toutefois que le coefficient de sécurité  $F$  soit d'un emploi plus fréquent.

Pour déterminer la distribution statistique du résultat du calcul déterministe, qu'il s'agisse de la marge de sécurité ou du coefficient de sécurité, on peut utiliser l'une des quatre méthodes :

(FORM, SORM, méthode de Monte- Carlo ou méthode d'Alonso)

la méthode de Monte-Carlo est fréquemment utilisée parce qu'elle est simple, mais elle nécessite un volume de calculs très important et nécessite une procédure adaptée pour la génération des ensembles des ensembles de valeurs aléatoires des paramètres. son grand mérite est d'être utilisable même quand le problème analysé n'admet pas de solution explicite.

On a toutefois toujours intérêt à examiner s'il n'est pas possible d'utiliser en priorité les autres méthodes.

## 6.2 La fonction d'état limite :

Durant sa vie, une pente est soumise à des chargements qui vont progressivement ou brutalement modifier son état physique d'une façon générale, on suppose qu'il existe un nombre fini de modes de dégradation qui vont altérer la pente, pour chaque mode dominant de dégradation  $i$ , on considère par simplification, qu'il existe deux étapes possibles : l'état de défaillance pour le mode (i), et l'état de sécurité, ou sûr, défini par un domaine de sécurité. Ces deux états sont séparés par une surface de transition appelée l'état limite (figure 6.1)

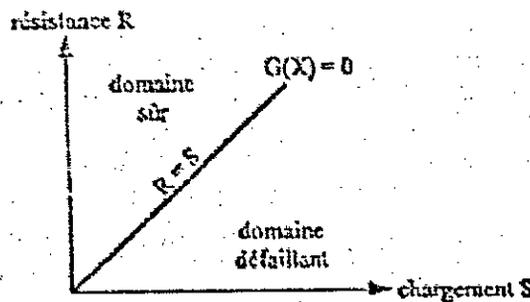


Fig 6.1 Fonction d'état limite (R=S) et domaine sûr ou défaillant

Pour chaque mode de défaillance possible (i), l'état de la pente à un moment donné, va être caractérisé par ses paramètres de conceptions,  $d$ , et par un jeu de chargements aléatoires qui peuvent varier dans le temps et l'espace ( $t, x, y, z$ ). La surface d'état limite de la pente qui se situe entre le domaine sécurité et le domaine défaillant est donc aussi une variable aléatoire, conditionnée par les variables précédentes.

La fonction d'état limite pour le mode (i),  $g_i = G_i(d, x, t)$ ; dépend donc des paramètres de conception  $d$ , de variables aléatoires,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  caractérisant les chargements subis  $S_i$  et la résistance mécanique du matériau constituant la pente pour le mode défaillance (i),  $R_i$ , de paramètres, géométriques  $L_i$ , et enfin du temps.

La première étape vers l'évaluation de la fiabilité d'une pente va constituer à établir la relation fonctionnelle liant les variables caractéristiques  $X_i$ , du problème afin d'obtenir une fonction d'état (50)

$$Z = G(x) = G(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (49)$$

A un moment donné, cette fonction d'état pour un mode de défaillance (i),  $G_i(x)$  est supposée continue entre l'état sûr,  $S_i$ , et l'état défaillance  $F_i$

La fonction  $G_i(x) = 0$  définit la frontière de l'état limite. Elle peut être une fonction implicite ou explicite des variables de base. La fiabilité de la pente  $P_f$  est la probabilité pour que la réalisation du point  $x$ , représentatif de l'état de la pente à une moment donné, se situe dans la zone sûre. Complémentairement, la probabilité de défaillance  $P_f$  est.

$$P_f = 1 - P_r \quad (50)$$

De façon conventionnelle, la fonction  $G_i(x) < 0$  représente la fonction de défaillance de la pente pour le mode (i).

### 6.3 Indice de fiabilité de Cornell :

Si le vecteur  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  représente l'ensemble des variables intervenant dans la fraction résistances / efforts moteurs d'une pente, on a vu que la fonction  $G(x)$ , (appelée fonction de défaillance), permet de diviser l'espace en deux domaines : le domaine de sécurité ou domaine fiable,  $S$ , où, par définition,  $G(x) > 0$ , et le domaine défaillance  $F$ , où  $G(x) < 0$ , la fonction  $G(x) = 0$  définissant la surface d'état limite  $L$ .

$x$  : correspond à un vecteur aléatoire dont une des réalisations possible est caractérisée par un point dans un espace vectoriel à une dimension (figure 6.2)

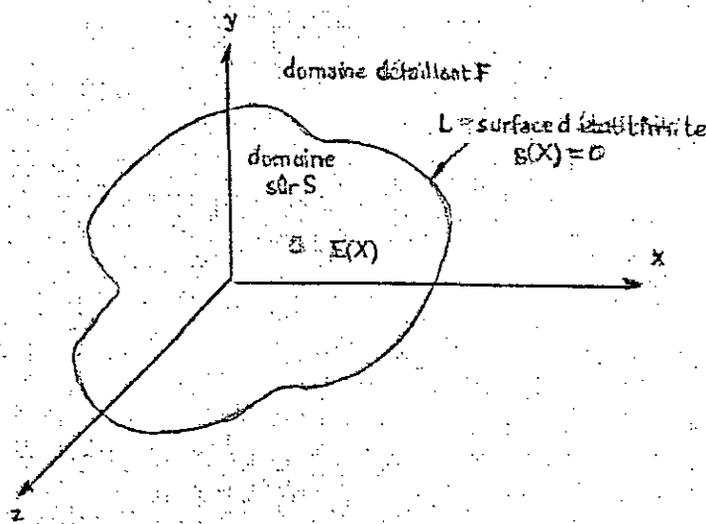


Fig 6.2 Définition de l'espace vectoriel et de la surface d'état limite

On a donc les différentes situations possibles pour le point de fonctionnement  $x$

$$G(x) > 0, x \in S$$

$$G(x) = 0, x \in L$$

$$G(x) < 0, x \in F$$

Considérons à nouveau les deux variables de base :

La résistance mécanique  $R$  et le chargement  $S$ .

La fonction d'état est  $G(S,R) = R - S$ , et on définit, la marge de sécurité correspondante  $M$

$$M = R - S \quad (51)$$

En terme de sûreté, la fiabilité de la pente  $P_r$  est représentée par la probabilité

$$P_r = P(M > 0) \quad (52)$$

### 6.3.1 Définition de l'indice de fiabilité dans le cas de variables normales indépendantes

Si R et S sont des variables normales indépendantes  $N(\mu_r, \sigma_r)$  et  $N(\mu_s, \sigma_s)$ , l'espérance de la marge M est simplement égale à :

$$\mu_m = E[M] = \mu_r - \mu_s$$

Et sa variance :

$$\sigma_m^2 = \text{var}[M] = \sigma_r^2 + \sigma_s^2$$

La probabilité de défaillance définie par la différence de deux variables normales jointes P ( $M = R - S < 0$ ), est aussi une variable normale :  $N[E(M), D(M)]$

Cornell en 1969 a défini un indice de fiabilité  $\beta_c$  caractérisé par le rapport entre l'espérance mathématique de la distribution de la marge de sécurité E [M] d'une pente, et la dispersion D [M] de cette distribution

$$\beta_c = E[M] / D[M]$$

Puisque par hypothèse, les variables R et S sont indépendantes, on peut écrire :

$$\beta_c = E[R] - E[S] / \sqrt{\text{var}[R] + \text{var}[S]}$$

Cette définition est illustrée géométriquement sur la figure 6.3, dans ce cas bidimensionnel, la surface d'état limite est représentée simplement par le point  $M=0$ . Dans ces conditions, la valeur de l'indice de fiabilité correspond à la distance entre l'espérance de la marge, et l'origine, exprimée en multiples d'écart types, soit :

$$E(M) = \beta_c \cdot D(M) = \beta_c \cdot \sqrt{\text{var}[R] + \text{var}[S]}$$

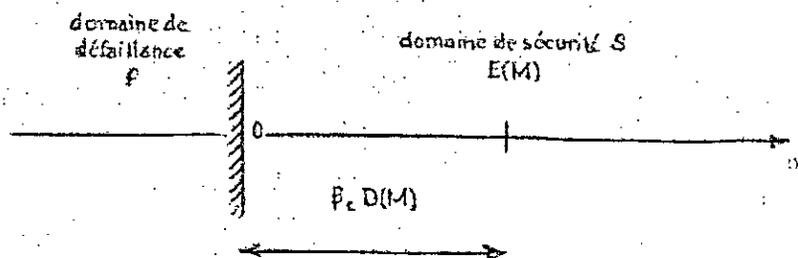


Fig 6. 3 Définition géométrique de l'indice de fiabilité de Cornell

Compte tenu des hypothèses précédentes,  $\beta_c$  s'écrit.

$$\beta_c = \mu_R - \mu_s / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_s^2} \quad (58)$$

Et la probabilité de défaillance est

$$P_f = P_{\text{rob}} [M < 0] = \Phi [\mu_s - \mu_R / \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_R^2}] = \Phi [-\beta_c] \quad (59)$$

D'où l'on déduit la valeur de l'espérance de la marge en fonction de l'indice de fiabilité

$$E[M] = \beta_c \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_s^2} \quad (60)$$

L'indice de fiabilité de Cornell est utilisé dans les codes de génie civil. Il permet en particulier de comparer la fiabilité entre différents choix de conception, le principal inconvénient de cet indice est qu'il n'est pas invariant, car sa valeur dépend de l'expression choisie pour définir la fonction d'état limite.

Ainsi, la marge aurait pu aussi bien être définie par la fonction  $M = R/S - 1$

La probabilité de défaillance dans ces conditions est :

$$P_f = \text{Prob} (E/S \leq 1) \quad (61)$$

L'indice de fiabilité correspondant (calculé par approximation autour des valeurs moyennes) n'est plus le même, on trouve en effet.

$$\beta_c = \mu_R - \mu_s / \sqrt{\sigma_R^2 + (\mu_R / \mu_s)^2 \sigma_s^2} \quad (62)$$

L'indice de fiabilité dépend donc du choix fait pour définir la fonction de défaillance

Lorsque la fonction d'état limite  $G(x)$  est une fonction linéaire des variables de bases  $x$ , on calcule facilement l'indice de fiabilité à partir des deux premières moments de  $x$ .

Dans le cas où  $G(x)$  est une fonction non linéaire, Cornell a suggéré d'approximer l'équation de la surface d'état limite par un développement en série de Taylor du 1<sup>er</sup> ordre autour de la valeur moyenne de  $x, \mu$

$$G(x)_\mu = M_\mu = g(\mu) + \sum_i g_i(\mu) [x_i - E[x_i]] \quad (63)$$

Dans ces conditions, on obtient une approximation raisonnable de l'indice de fiabilité.

$$B_\mu = g(\mu) / \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_i(\mu) g_j(\mu) \text{cov} [x_i, x_j] \right]^{1/2} \quad (64)$$

La surface d'état limite est représentée par un hyperplan

#### 6.4 Indice de fiabilité de Hasofer-Lind :

L'indice de fiabilité de Hasofer-Lind permet de calculer directement la probabilité de défaillance lorsque toutes les variables ont des distributions normales et que la surface d'état limite est linéaire. Si ce n'est pas le cas, on estime la probabilité de défaillance

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (65)$$

( $\Phi$  est la fonction de répartition de la variable normale réduite. Les valeurs  $\Phi(x)$  peuvent être obtenues sous forme tabulaire (voir annexe))

En effectuant une approximation linéaire de la surface d'état limite (méthode FORM : First order reliability method.) Mais comme en général les variables physiques ne sont pas normales, l'expression de  $\beta_{HL}$  dans le cas où elle représente une mesure de la marge par rapport à la position de la surface d'état limite ( $M=0$ ) c à d

$$\beta_{HL} = E[M] / D[M] = a'_1 E[y] + b_1 / a'_1 \sqrt{\text{cov}[y,y]_{a_1}} \quad (66)$$

N'est pas correcte. Rackwitz et Fiessler ont donc proposé de résoudre ce problème grâce à une transformation des variables de base dans l'espace standard.

Compte tenu de ce qui précède, dans l'espace normal, on définit l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind,  $\beta_{HL}$  comme la plus petite distance entre l'origine et la surface d'état limite. Le point  $u^*$  le plus proche de l'origine situé sur cette surface est, comme on l'a vu, le point de défaillance le plus probable, appelé aussi le point de conception ou « design point ». Pour déterminer la position de  $u^*$ , il faut donc résoudre un problème de minimisation de distance, avec pour condition supplémentaire une contrainte d'égalité traduisant l'appartenance de ce point à la surface d'état limite.

On remarque que l'indice de Hasofer-Lind ayant une définition géométrique ne dépend que la formulation choisie pour déterminer la surface d'état limite.

En fin, le paramètre d'échelle utilisé pour son dimensionnement est généralement l'écart type de la marge sécurité.

L'indice de fiabilité est donc représenté dans l'espace normal par la distance minimal entre l'origine et la surface de défaillance, et il est mesuré en multiples d'écart types (figure 6.4).

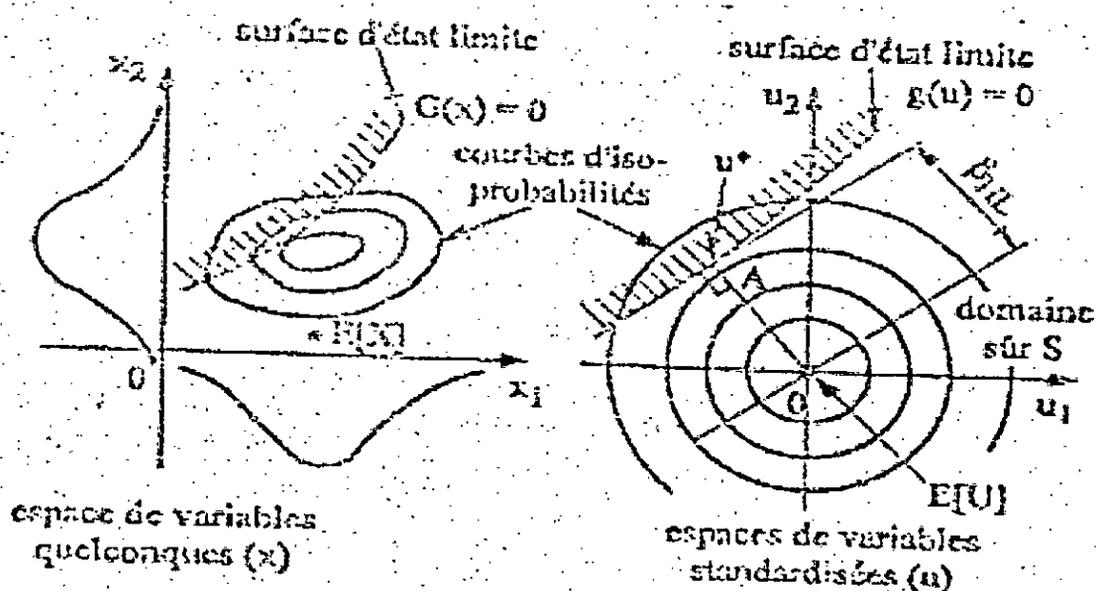


Fig6.4 Transformation dans l'espace normal réduit.

Indice de fiabilité d'Hasofer-Lind( $\beta_{HL}$ )

### 6.5 Les méthodes de résolutions numériques :

Dans toute étude de fiabilité, et en particulier pour la fiabilité d'un talus ou d'une pente, l'étape d'analyse numérique intervient juste après le travail de modélisation mécanique et probabiliste du problème et de sa résolution mathématique. Ces études ont permis de formuler l'expression de la probabilité de défaillance  $P_f$  qu'il s'agit alors d'évaluer numériquement. C'est un des points qui se révèle souvent le plus délicat dans la réalisation d'un code, et cette évaluation doit faire face à de nombreuses difficultés opératoires qui ne sont pas sans imposer certaines contraintes. Les méthodes numériques de résolution doivent permettre en effet de prendre en compte un nombre important de facteurs d'influence, avec des temps de calcul modérés pour estimer des probabilités souvent très faibles ( $10^{-6}$  est une valeur courante) avec une bonne précision. Il est essentiel de pouvoir réaliser également sans trop de difficultés des études de sensibilité sur les paramètres clés du modèle.

#### 6.5.1 Définition du problème de résolution numérique :

On a vu que la plupart des problèmes mécaniques peuvent être formulés par un ensemble de variables aléatoires  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  caractérisant les incertitudes et les variabilités des paramètres pris en compte ainsi que par une fonction d'état limite  $G(x)$  qui correspond au « modèle déterministe » décrivant le critère de défaillance de la pente.

La fonction d'état limite permet de définir dans l'espace à  $n$  dimensions des variables de base :

- un domaine de sécurité pour  $G(x) > 0$
- un domaine de défaillance pour  $G(x) < 0$

- une hyper surface d'état limite pour  $G(x) = 0$ , frontière entre les deux domaines précédents

La probabilité de défaillance de la pente est alors la probabilité pour qu'une réalisation des variables  $X_i$  « tombe » à l'intérieur du domaine de défaillance. Elle a pour expression :

$$P_f = P[(G(x) \leq 0)] = \int_{G(x) \leq 0} f_x(x) dx \quad (67)$$

où  $f_x(x) dx$  représente la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires de base  $x = (x_1, \dots, x_n)$

$P_f$  peut s'interpréter comme le poids probabiliste de la partie de l'espace appartenant au domaine de défaillance

Le calcul de cette intégrale multiple à  $n$  dimensions peut se faire :

- De manière exacte (ce qui est rarement possible)
- Par des techniques d'intégration numérique (qui sont généralement mal adaptées à ce type de problème, et coûteuse en temps de calcul)
- Par des techniques de simulation (monte Carlo)
- Par des méthodes analytiques d'approximation (FORM, SORM, first order and second order reliability methods)

### 6.5.2 Méthode de simulation de monte Carlo :

La simulation de type Monte Carlo, qui est une méthode relativement ancienne (les premières applications datent de 1944), peut se révéler intéressante lorsque la probabilité de défaillance  $P_f$  n'est pas trop faible. Elle reste souvent le seul moyen de prendre en compte certains comportements non linéaires (aucune contrainte n'est imposée à la fonction  $G$ ). Elle est en effet facile à mettre en œuvre même pour des systèmes complexes. C'est enfin, un outil de vérification de la pertinence des méthodes d'approximation car les estimations sont non basées. Son principal inconvénient est de nécessiter des temps de calculs très longs, souvent prohibitifs, et de ne pouvoir être utilisée lorsque le nombre de paramètres aléatoires est trop important, ou lorsque l'on cherche à évaluer la probabilité d'événements très rares. Cette technique ne fournit pas ailleurs que des estimations de probabilité, et pour réaliser des études de sensibilités, il est nécessaires d'effectuer de nouveaux calculs de simulation.

Le principe général de la méthode est le suivant :

On simule le comportement de la structure considérée en sélectionnant une valeur pour chaque variable aléatoire d'entrée  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , tirée au hasard en fonction de sa distribution de probabilités, de façon à obtenir une valeur d'échantillon  $x_i$ . Ces valeurs sont ensuite utilisées dans le modèle de dégradation « déterministe » afin de calculer la variable de sortie  $G(x)$  et vérifier si le résultat tombe à l'intérieur (ou à l'extérieure) du domaine de défaillance.

$$G(x) \leq 0 \quad (68)$$

Après avoir répété l'opération d'échantillonnage de variables un grand nombre de fois, on obtient une estimation de la probabilité de défaillance  $P_f$  en dénombrant l'ensemble des réalisations conduisant à la défaillance de la structure.

$P_f$  = nombre de réalisations de défaillance / nombre total de simulation =  $n (G \leq 0) / N$

C'est la méthode classique de simulation appelée « hit or miss » (réussite ou on échec).

Le tirage au hasard selon les lois de probabilité est basé sur la génération de nombreuses aléatoires distribués uniformément entre 0 et 1. A chacune de ces réalisations, on associe une valeur de la variable aléatoire par inversion de la fonction de répartition de la loi de probabilité considérée.

### 6.5.3 Les méthodes d'approximation FORM ET SORM

Ces méthodes consistent à calculer l'indice de fiabilité dans l'espace normal réduit. Pour cela, la surface d'état limite est approximée par un hyper plan (FORM) ou par une surface quadratique (SORM)

L'application des méthodes d'approximation FORM et SORM s'effectue en trois étapes :

- les variables de base  $x_i$  sont transformées en variables aléatoires normales centrées réduites, et statiquement indépendantes  $U_i$ , à partir de la relation de transformation

$$T : x = R[U] \tag{69}$$

La fonction d'état limite dans l'espace standard s'exprime dans ces conditions, sous la forme :

$$G[\mu] = G[T(U)] \tag{70}$$

D'où l'on déduit la probabilité de défaillance

$$P_f = P[g(\mu)] \leq 0. \tag{71}$$

L'indice de fiabilité  $B_{HL}$ , qui définit la plus petite distance de l'origine à la surface d'état limite dans cet espace  $\mu$ , est calculé ainsi que la position du point de conception  $\mu^*$ , grâce à un algorithme qui résout

$$\begin{cases} \text{Min } d^2 = U^t U \\ \text{Sachant } g(U) = 0 \end{cases}$$

L'algorithme d'optimisation est :

1. Définir l'équation d'état limite adéquate.
2. Supposer des valeurs initiales pour le « design point »  $x_i^*$
3. Transformer ces valeurs initialises vers le domaine standard  
 $x^{*'}_i = (x^* - \mu x_i) / \sigma x_i$
4. Evaluer  $(\partial G / \partial x_i)^* / x^{*'}_i$ , puis déduire  $\alpha_i = (\partial G / \partial x_i)^* / \sqrt{\sum (\partial G / \partial x_i)^*}$
5. Obtenir un nouveau « design point » en terme de  $B_{HL}$   
 $x^{*'}_i = \alpha_i \beta_{HL} \dots \dots \dots (I)$
6. Injecter la valeur  $x^{*'}_i$  dans l'équation d'état .  $G(x^{*'}_i) = 0$  et tirer  $B_{HL}$ .
7. Injecter ainsi la valeur obtenue de  $B_{HL}$  dans (I) pour réévaluer  $(x^{*'}_i)$ .
8. répéter le étapes de 3 à 6 jusqu'à convergence

la surface d'état limite  $g(u) = 0$ , exprimée dans ce nouvel espace, est approximée soit par un hyper plan tangent (FORM) au point de conception  $u^*$ , soit par une surface quadratique pour SORM. La raison du choix de ce point de linéarisation est que la surface d'intégration donnant la plus grande contribution à la probabilité de défaillance se trouve située proche du point  $u^*$ , le plus proche de l'origine. En effet, les densités de probabilités des

variables de base décroissant très rapidement, comme  $\exp(-r^2/2)$ ,  $r$  étant la distance à l'origine.

On obtient ensuite une approximation de la probabilité de défaillance par la relation

$$P_f = \Phi(-\beta) \Leftrightarrow -\Phi^{-1}(P_f)$$

Pour obtenir une meilleure approximation, la surface d'état limite  $G_U(u) = 0$  peut être approximée par une surface quadratique (SORAM) au point  $u^*$ .

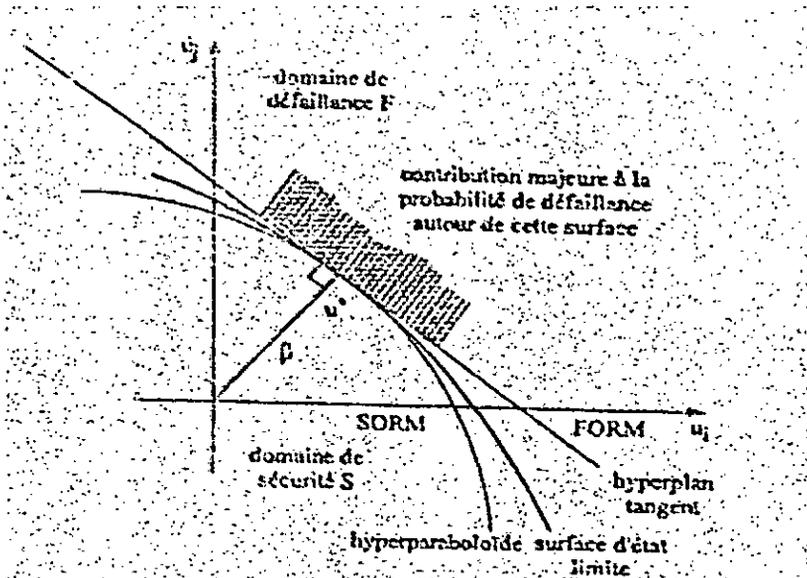


Fig6.5 Illustration du calcul d'approximation de la probabilité de défaillance

Outre l'indice  $\beta$ , une information particulièrement intéressante est fournie par les cosinus directeurs  $\alpha_i$  des coordonnées du point de conception,  $u^*$

$$\begin{aligned} \text{Ou } u^* &= \beta \alpha \\ \beta &= |U^*| \end{aligned} \tag{72}$$

et  $\alpha$  est le vecteur normal unitaire à la surface d'état limite au point de conception, orienté vers le domaine de défaillance

$$\alpha = -\nabla g(u^*) / |\nabla g(u^*)| \tag{73}$$

$\nabla g$  étant le gradient de  $g$  par rapport à  $u$ .

l'approximation du premier ordre de la marge  $M$  est

$$M_1 = \beta - \alpha^T U$$

Et la variance de  $M_1$  est :

$$\text{Var} [M_1] = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x_i = 1 \tag{74}$$

La quantité  $\alpha_i^2$  s'interprète donc comme la fraction de l'incertitude totale, qui est due à la variable  $x_i$ . De plus, le signe renseigne sur le sens de cette influence sur l'indice  $\beta$  (type solliciter ou résistance).

$\alpha$  est aussi appelé vecteur des facteurs de sensibilité, et  $100 \times \alpha_i^2$  (exprimé en pourcentage) les facteurs d'importance.

*Chapitre 7*

*Application des méthodes étudiées et  
étude paramétrique*

## 7.1 Introduction

Au cours des précédents chapitres, nous avons pu voir le processus d'une étude de glissement de terrain, les différentes méthodes d'approche déterministes et probabilistes de la stabilité des talus.

A travers ce chapitre (étude paramétrique et étude des cas), on se propose d'étudier la stabilité d'un talus, dans l'hypothèse d'une rupture circulaire, où le cercle de glissement passe par le pied du talus, nous verrons aussi dans ce chapitre le cas du glissement plan (glissement d'une couverture sur un substratum).

### *I Cas de la rupture circulaire*

#### 7.2 Présentation du talus

On étudiera dans le cadre d'une rupture circulaire, le cas particulier d'un massif homogène (remblai ou argile...) reposant sur un substratum (sol incompressible), ce massif est caractérisé par un poids volumique  $\gamma$ , ainsi que par une cohésion  $c$  et un angle de frottement interne  $\phi$ . Ce talus est incliné d'un angle  $\beta$  par rapport à l'horizontale et de hauteur verticale  $H$ , il n'y a ni nappe phréatique, ni écoulement d'eau, le massif n'est soumis à aucune force extérieure.

Comme on l'a souligné ci-dessus, le glissement se fait selon un cercle de rupture au pied de talus, c'est-à-dire que le cercle coupe le talus à son pied « C » et le point le plus bas du cercle et se situe au dessus du niveau du pied, mais il faut bien souligner que dans la pratique le cercle de rupture ne passe pas forcément par le pied de talus.

La grandeur et la position de ce cercle de rupture est défini par une série de paramètres, dont la signification apparaît sur la figure 7.1. les paramètres du cercle sont  $\beta$ ,  $\beta_0$ ,  $H$ ,  $r$ ,  $\alpha_0$ .

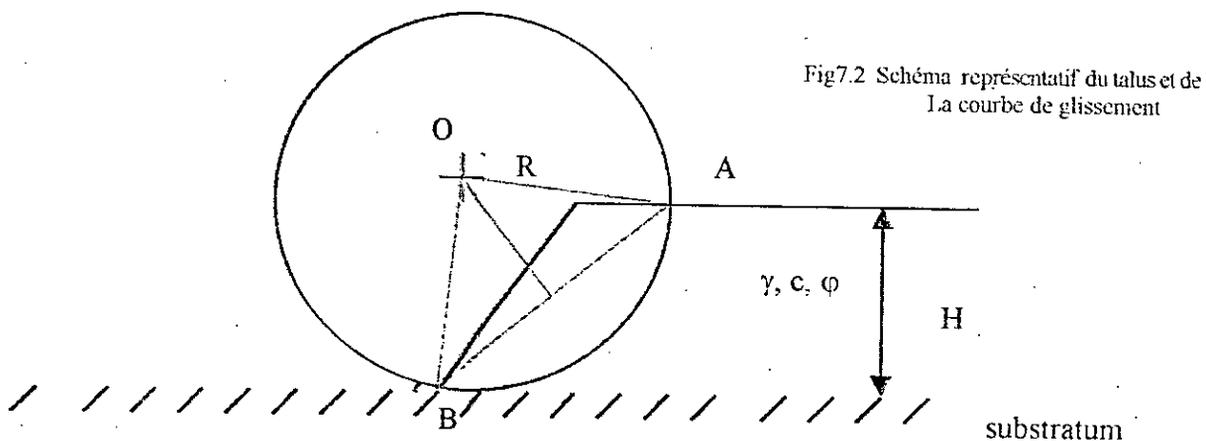
$\beta$  : angle d'inclinaison du versant du talus par rapport à l'horizontale.

$H$  : hauteur verticale du talus.

$R$  : rayon du cercle de rupture

$\alpha_0$  : l'angle formé entre la bissectrice de l'angle AOB et le rayon OB.

$\beta_0$  : angle par rapport à l'horizontale du segment de droite AB.



Caractéristiques du matériau constituant notre sol :

$\gamma$  : poids volumique

$c$  : cohésion

$\varphi$  : angle de frottement interne.

Pour notre exemple nous prenons comme valeurs pour les grandeurs ci-dessus exposées ce qui suit :

$$\gamma = 1.6 \text{ t/m}^2 \quad H = 5\text{m}$$

$$c = 1 \text{ t/m}^2 \quad \beta = 45^\circ$$

$$\varphi = 25^\circ$$

### 7.3 détermination du cercle de rupture le plus probable

La recherche du cercle de rupture le plus probable s'effectue à partir d'un quadrillage choisi par l'opérateur, les nœuds de ce dernier définissent les centres des cercles soumis au calcul (fig. 7.3)

Le principe de détermination du centre de cercle le plus probable est simple, et il consiste à déterminer pour chaque centre du quadrillage une famille de cercle de rayons croissant, et à chaque cercle correspond un coefficient de sécurité, et donc le cercle le plus probable sera celui donnant le coefficient de sécurité le plus faible.

Vu que le travail risque d'être laborieux à la main, plusieurs programmes informatiques de calculs ont été établis afin d'être plus efficace à savoir réaliser un maximum d'itération.

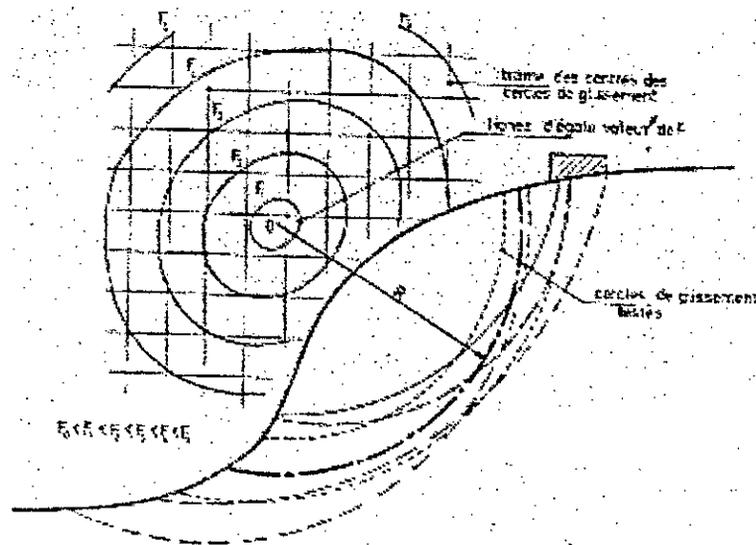


Fig7. 3 Recherche du cercle de glissement le plus probable

## Chapitre 7 : Application des méthodes étudiées et étude paramétriques

Nous avons choisi comme début du quadrillage un point inférieur gauche de coordonnées : (14, 6)

nous avons aussi choisi un pas de « un » (1) pour les deux directions X et Y .

notre choix s'est aussi porté sur le nombre de case de notre quadrillage, qui est de deux.

Après calcul sur un logiciel de calcul, nous obtenons les résultats suivant :

X	Y	Rayon (r)	Coefficient de sécurité (F)
14.00	6.00	8.00	2.711
15.00	6.00	8.00	3.266
16.00	6.00	8.00	4.008
14.00	7.00	9.00	2.507
15.00	7.00	9.00	2.946
16.00	7.00	9.00	3.512
14.00	8.00	10.00	2.370
15.00	8.00	10.00	2.739
16.00	8.00	10.00	3.193

Et donc le centre de cercle associé au coefficient de sécurité le plus petit sera C(14.00, 8.00) et de  $R=10.00$  pour un  $F= 2.370$

### 7.4 Etude de la stabilité du talus par la méthode déterministe globale

Equilibre d'une masse sujette au glissement :

On étudiera d'abord la stabilité d'un massif homogène de caractéristiques mécaniques  $c$  et  $\varphi$  . Il s'agit là, au moins d'une première approximation, et bien entendu, on se placera délibérément dans l'hypothèse d'un équilibre à deux dimensions.

La figure ci-dessous représente un talus ACB de hauteur  $H=5$  m , on suppose que la rupture du massif va se produire le long d'un arc de cercle, de centre « O » et de rayon  $OA = r$  , et on se propose d'évaluer le coefficient de sécurité correspondant.

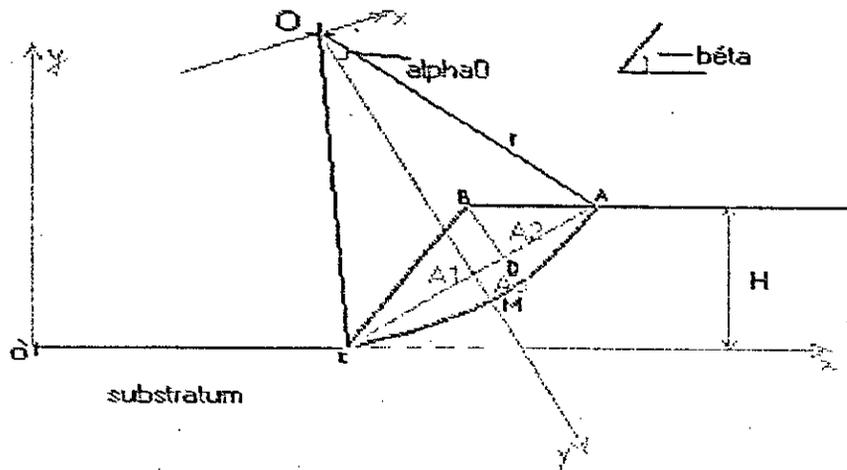


Fig 7.4

Taylor et Caquot (1937) ont étudié la stabilité du talus en s'appuyant sur le principe de l'équilibre des forces agissant sur la masse ABCMA (voir chap.....) et ont ainsi établi la relation qui suit :

$$F = \frac{2 \cdot \alpha_0 \cdot r^2 \cdot c + r \cdot \text{tg} \varphi \cdot (\alpha_0 / \sin(\alpha_0)) \cdot (W)_y}{W \cdot L} \quad (75)$$

L: bras de levier du poids « W »

Afin de simplifier le problème nous prendrons des valeurs fixes pour nos paramètres à savoir :

$$c, \gamma, \varphi, \beta, r$$

on prend donc :

$c=1\text{t/m}^2$      $\gamma=1.6\text{t/m}^3$      $\varphi=25^\circ$      $r=11\text{m}$      $\beta=45^\circ$  , le reste se déduit par de simples calculs trigonométriques comme :  $\alpha_0=30.6^\circ=0.534 \text{ rad}$  ,  $\beta_0=24.22^\circ$ .

il ne reste qu'à déterminer  $W=\gamma \cdot A$  où :

A : somme des aires {(triangle ABD, triangle BDC) + portion de cercle AMC}.

W: poids de la masse de sol circonscrit par l'arc AMC.

$G_1(-1.3, 8.6)$   $A_1=8.16 \text{ m}^2$  ,  $G_2(2.6, 8.6)$  ,  $A_2=5.52 \text{ m}^2$  ,  $G_3(0, 10.14)$   $A_3=9.84 \text{ m}^2$

Les points du talus sont définis par leurs coordonnées respectives:

$O'(0,0)$   $B(8,0)$   $C(13,5)$  A change en fonction du cercle choisi

$$\sum A_i \cdot x_i = A \cdot x_g \Rightarrow x_g = 0.16\text{m}$$

$$\sum A_i \cdot y_i = A \cdot y_g \Rightarrow y_g = 9.24\text{m}$$

$$W = \gamma \cdot A = 1.6 * 23.52 = 37.63 \text{ t/ml}$$

$$(W)_y = W \cdot \cos(\beta_0) = 37.63 * \cos(24.22^\circ) = 34.31 \text{ t/ml}$$

et donc :

$$F = \frac{2 * 0.534 * 11^2 * 1 + 11 * \text{tg}(25^\circ) * (0.534 / \sin(30.6^\circ)) * 34.31}{37.63 * 4.4}$$

$$F=1.895$$

$F > 1$  donc notre talus est stable d'après la théorie.

### 7.5 Approche probabiliste de la stabilité d'un talus par la méthode de 1er ordre (FORM) (Hasofer-lind method)

- étude de stabilité d'un talus dans l'hypothèse d'un cercle de glissement passant par le pied de ce dernier :

La méthode d'approche utilisée dans cette partie du chapitre est la méthode FORM (First Order Reliability Method), ou plutôt approche fiabiliste du 1<sup>er</sup> ordre.

Tout au long du problème on va considérer que les paramètres de base et donc  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  comme étant des variables aléatoires indépendantes de distribution normal.

$$f_{\gamma}(\gamma) = \frac{1}{\sigma_{\gamma} \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\gamma - \mu_{\gamma}}{\sigma_{\gamma}}\right)^2\right) \quad \sigma_{\gamma}, \mu_{\gamma} \text{ respectivement l'écart type et la moyenne de } \gamma \quad (76)$$

$$f_{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{\sigma_{\varphi} \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varphi - \mu_{\varphi}}{\sigma_{\varphi}}\right)^2\right) \quad \sigma_{\varphi}, \mu_{\varphi} \text{ respectivement écart-type et moyenne de } \varphi \quad (77)$$

$$f_c(c) = \frac{1}{\sigma_c \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c - \mu_c}{\sigma_c}\right)^2\right) \quad \sigma_c, \mu_c \text{ respectivement écart-type et moyenne de } c \quad (78)$$

#### 7.5.1 détermination de la fonction d'état limite

on choisit la fonction d'état limite pour notre cas, comme étant le rapport des efforts résistants et les efforts moteurs, les efforts résistants sont caractérisés par la cohésion ainsi que le frottement mobilisé tout au long de la surface de glissement ; alors que les efforts moteurs sont caractérisés par la composante tangentielle du poids  $W$ .

et donc notre fonction sera de la forme :

$$M = (R / S) - 1 \quad (79)$$

R : la résultante des efforts résistants.

S : la résultante des effort moteurs.

$$R = \int_{AB} c \cdot dl + \int_{AB} \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot dl \quad (80)$$

$$R = c.(2.\alpha_0.r) + \sigma_n.tg\varphi.2.\alpha_0.r \quad (81)$$

$$\sigma_n = \frac{W_n}{2.\alpha_0.r.l} = \frac{W.\cos(\beta_0)}{2.\alpha_0.r} \Rightarrow \sigma_n = \frac{\gamma.A.\cos(\beta_0).l}{2.\alpha_0.r} \quad \text{donc:}$$

$$R = 2.C.\alpha_0.r + \gamma.A.\cos(\beta_0).tg(\varphi) \quad (82)$$

$$S = W.\sin(\beta_0)$$

$$S = \gamma.A.\sin(\beta_0) \quad (83)$$

Les relations qui vont suivre sont établies à partir de la figure 7.4

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (84)$$

$$A_1 + A_2 = (1/2) * AC * BD \quad (85)$$

$$= (1/2) * \left[ H. \frac{\cos(\beta - \beta_0)}{\sin(\beta)} + H. \frac{\sin(\beta - \beta_0)}{\sin(\beta).tg(\beta_0)} \right] * H. \frac{\sin(\beta - \beta_0)}{\sin(\beta)}$$

$$= (1/2) \cdot \frac{H^2}{\sin^2(\beta)} \cdot \left[ \cos(\beta - \beta_0) + \frac{\sin(\beta - \beta_0)}{tg(\beta_0)} \right]$$

$$A_1 + A_2 = (1/2) \cdot \frac{H^2}{\sin^2(\beta)} \cdot \left[ (1/2).\sin(2.(\beta - \beta_0)) + \frac{\sin^2(\beta - \beta_0)}{tg(\beta_0)} \right]$$

$$A_3 = \alpha_0.r^2 - (1/2).(r.\cos(\alpha_0)).(r.\sin(\alpha_0)) \quad (86)$$

Et donc :

$$A = (1/2) \cdot \frac{H^2}{\sin^2(\beta)} \left[ (1/2) \cdot \sin(2 \cdot (\beta - \beta_0)) + \sin^2(\beta - \beta_0) \right] + \alpha_0 \cdot r^2 - (1/2) \cdot r^2 \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \sin(\alpha_0) \quad (87)$$

En remplaçant toutes les expressions dans les équations (82) et (83), on obtient:

$$M = \frac{R}{S} - 1 \quad (88)$$

$$M = \frac{2 \cdot c \cdot \alpha_0 \cdot r + \gamma \cdot A \cdot \cos(\beta_0) \cdot \text{tg}(\varphi)}{\gamma \cdot A \cdot \sin(\beta_0)} - 1 \quad (89)$$

et donc notre fonction d'état limite aura l'expression ci-dessous :

$$M = \frac{2 \cdot c \cdot \alpha_0 \cdot r}{\gamma \cdot \sin(\beta_0) \cdot [1/2 \cdot (H^2/\sin^2(\beta)) \cdot [0.5 \cdot \sin(2 \cdot (\beta - \beta_0)) + (\sin^2(\beta - \beta_0)/\text{tg}(\beta_0))] + \alpha_0 \cdot r^2 - r^2/4 \cdot \sin(2\alpha_0)]} + \text{tg}(\varphi)/\text{tg}(\beta_0) - 1 \quad (90)$$

### 7.5.2 Principe de la méthode et calcul de l'indice de fiabilité $\beta_{HL}$

La méthode Hasofer-Lind (H-L) est applicable pour les variables aléatoires normales, elle définit en premier les variables centrées réduites :

$$X_i' = \frac{X_i - \mu_{xi}}{\sigma_{xi}} \quad (i=1, \dots, n) \quad (91)$$

L'équation (91) est utilisée pour le passage du référentiel d'origine à celui du centré réduit.

L'indice de fiabilité  $\beta_{HL}$  est défini comme étant la distance minimale entre l'origine des coordonnées dans le nouveau repère (centré réduit) et la surface d'état limite.

Dans le cas général, et pour un nombre fini de variables aléatoires, représentées par un vecteur  $X = (X_1, \dots, X_N)$  dans le repère d'origine et  $X' = (X_1', \dots, X_N')$  dans le nouveau repère. La surface d'état limite  $g(X')$  n'est pas linéaire dans ce cas, et les  $X_i'$  sont

supposés indépendants.

Afin de déterminer ce  $\beta_{HL}$ , un algorithme de résolution a été formulé par Rackwitz en 1976 et qui se résume ainsi :

Etape1 : définir l'équation de la surface d'état limite adéquate

Etape2 : choisir des valeurs initiales pour les  $x_i^*$ ,  $i=1, n$  et déduire  $x_i^{*'} = \frac{(x_i^* - \mu_{xi})}{\sigma_{xi}}$

Etape3 : calculer

$$\alpha_i = \frac{\left( \frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^2}}$$

Etape4 : recalculer le nouveau point ( $x_i^{*''}$ ) en fonction de  $\beta_{HL}$ .  $x_i^{*''} = -\alpha_i \beta_{HL}$

Etape5 : remplacer le nouveau point  $x_i^{*''}$  dans l'équation de la surface limite  $g(x^{*''}) = 0$  et tirer  $\beta_{HL}$ .

Etape6 : avec la valeur de  $\beta_{HL}$ , obtenu dans l'étape 5, on recalcule le  $x_i^{*'''} = -\alpha_i \beta_{HL}$ .

Etape7 : répéter l'étape 3, ..., 6 jusqu'à que  $\beta_{HL}$  converge.

L'algorithme est certes clair, mais le calcul à la main risque d'être lent et laborieux, sans compter les risques d'erreurs involontaires, et donc pour y remédier, nous avons établi un petit programme en langage FORTRAN dont l'algorithme va suivre :

L'exécution de notre programme nous donnera  $\beta_{HL}$  avec une précision de 0.00001, ce dernier convergera après un certain nombre d'itérations, en se référant à la figure 7.4, nous pouvons remarquer, la multitude de cercles qui pourraient passer par le pied de talus, et donc afin d'illustrer la méthode FORM nous avons choisi trois cercles de centres ( $O_i$ ) et rayons ( $R_i$ ) différents, et pour chacun de ces cercles nous lui attribuerons un coefficient  $\beta_{HL}$  issu du programme de calcul.

\*Pour un cercle  $C_1(O_1, R_1)$  tel que  $O_1(7, 12.5)$ ,  $R=12.4m$  nous obtenons un  $\beta_{HL}=3.46840$

Et cela pour :

- une cohésion  $c = 20KN/m^2$
- un angle de frottement interne  $\phi = 25^\circ$
- un poids volumique  $\gamma = 16 KN/m^3$

- l'inclinaison du talus  $\beta = 45^\circ$

\* Pour un cercle  $C_2(O_2, R_2)$  tel que  $O_2(9, 11)$ ,  $R=11m$  nous obtenons un  $\beta_{HL} = 3.47690$

Et cela pour :

- une cohésion  $c = 20\text{KN/m}^2$
- un angle de frottement interne  $\varphi = 25^\circ$
- un poids volumique  $\gamma = 16\text{ KN/m}^3$
- l'inclinaison du talus  $\beta = 45^\circ$

\* Pour un cercle  $C_3(O_3, R_3)$  tel que  $O_3(9, 14)$ ,  $R=14m$  nous obtenons un  $\beta_{HL} = 3.43430$

Et cela pour :

- une cohésion  $c=20\text{KN/m}^2$
- un angle de frottement interne  $\varphi = 25^\circ$
- un poids volumique  $\gamma = 16\text{ KN/m}^3$
- l'inclinaison du talus  $\beta = 45^\circ$

et donc pour résumer le tout, en ce qui concerne ces trois exemples, vu les résultats obtenus, nous constatons que le deuxième cercle a le plus grand indice de fiabilité comparé aux deux autres et donc il aura une probabilité de rupture la plus petite.

$$P_f = 1 - \Phi(\beta_{HL})$$

Où  $P_f$  est la probabilité de rupture de notre talus

Et  $\Phi$  est la distribution normale standard, [ les  $\Phi(x)$  sont donnés par les tables, voir annexe)

### 7.5.3 Etude paramétrique de l'indice de fiabilité $\beta_{HL}$ en fonction des variables de base ( $c$ , $\varphi$ , $\gamma$ )

Comme nous le savons les seuls paramètres sur lesquels on peut jouer sont : la cohésion ( $c$ ), l'angle de frottement interne  $\varphi$  et le poids volumique  $\gamma$  du sol constituant notre talus, pour les caractéristiques mécaniques, et sur  $\beta$  qui est l'inclinaison de notre talus par rapport à l'horizontale, à ne pas confondre avec l'indice de fiabilité. En pratique il serait cependant intéressant de mettre en évidence les effets de variation des deux premières variables à savoir ( $c$ ) et  $\varphi$  ainsi que leurs variances associées et sans oublier l'influence de l'angle d'inclinaison ( $\beta$ ) de notre talus.

Nous allons exposer ci-dessous les résultats ainsi obtenus pour les trois centres de cercles précédemment décrits plus haut.

\* Pour un cercle  $C_1(O_1, R_1)$  tel que  $O_1(7, 12.5)$ ,  $R=12.4m$

Avec :

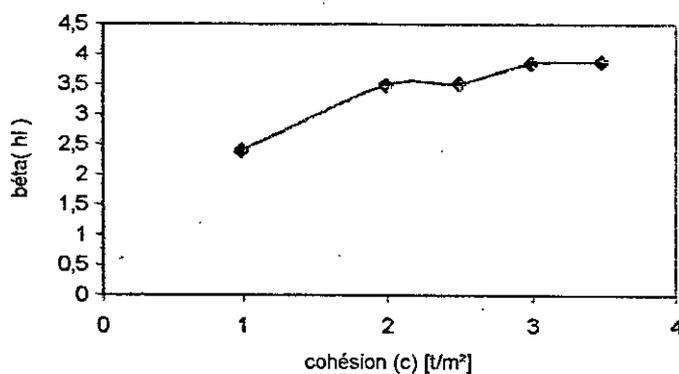
- une cohésion  $c=20\text{KN/m}^2$
- un angle de frottement interne  $\varphi = 25^\circ$
- un poids volumique  $\gamma = 16\text{ KN/m}^3$

- l'inclinaison du talus  $\beta = 45^\circ$

**Effet de variation de la cohésion sur l'indice de Fiabilité ( $\beta_{HL}$ )**

Cohésion (c) (t/m <sup>2</sup> )	1.0	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$\beta_{HL}$	2.3750	3.4684	3.4985	3.8366	3.8717	3.8960
$P_f$	0.00889	0.00027	0.00024	0.00006	0.00005	0.00005

**Fig7,5** courbe de variation de Béta(hl) en fonction de la cohésion(c)



L'analyse de la courbe permet de noter ce qui suit :

La courbe  $\beta_{HL}=f(c)$  est croissante, de pente moyenne faiblement non linéaire.

La variation de  $\beta_{HL}$  n'est pas vraiment importante pour la première partie de la courbe, mais va s'atténuer encore plus pour devenir faible dans la deuxième partie.

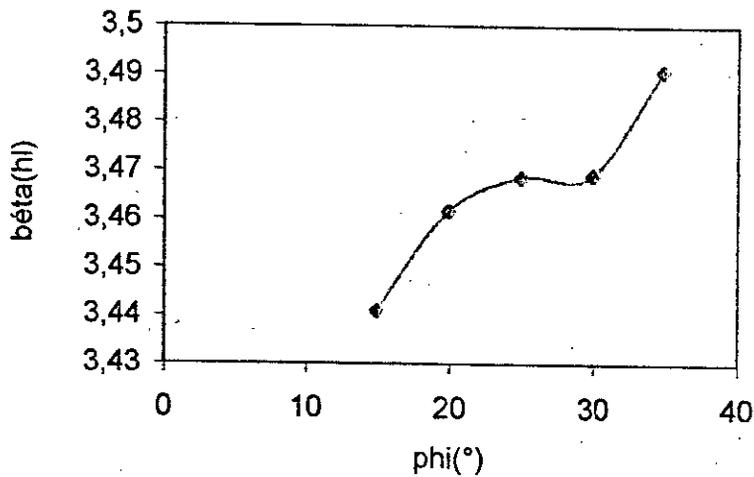
Dans la troisième partie cette variation va reprendre mais moins importante que la première.

Dans la quatrième partie de la courbe, la variation sera d'autant plus faible à nouveau

Effet de la variation de l'angle de frottement  $\varphi$  sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

$\varphi$ (°)	15	20	25	30	35
$\beta_{HL}$	3.4407	3.4615	3.4684	3.4690	3.4906
Pr	0.00029	0.00027	0.000265	0.00026	0.00024

Fig 7,6 variation de  $\beta_{HL}$  en fonction de  $\varphi$

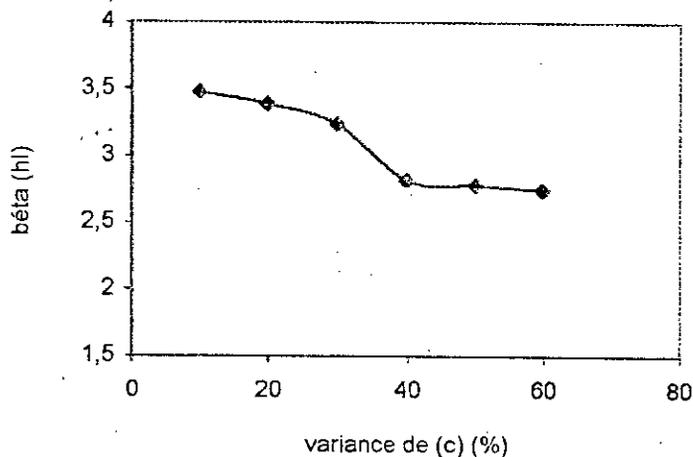


La courbe  $\beta_{HL} = g(\varphi)$  est croissante dans ce cas aussi, fortement non linéaire, nous constatons pour la première partie de la courbe une augmentation de  $\beta_{HL}$  pour un accroissement de  $\varphi$ . Pour la deuxième partie de la courbe cette augmentation décroît faiblement pour devenir moins importante pour la troisième partie de la courbe. Et enfin pour la quatrième partie, l'augmentation de  $\beta_{HL}$  va reprendre comme au tout début.

Effet de la variation de la variance de « c » ( V[c] ) sur l'indice de fiabilité (  $\beta_{HL}$  )

Variance de (c) V[c] (%)	10	20	30	40	50	60
$\beta_{HL}$	3.4684	3.3788	3.2311	2.8137	2.7732	2.7399
Pr	0.000265	0.000380	0.000620	0.002480	0.002800	0.003070

Fig7,7 effet de la variance de (c) sur béta (hl)

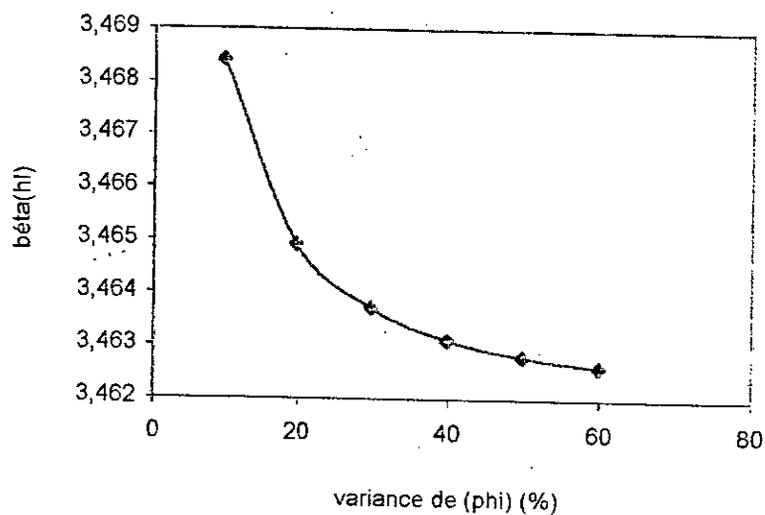


La courbe  $\beta_{HL} = h(V[c])$  est décroissante, faiblement non linéaire, à première vue on peut diviser notre courbe en trois parties principales, la première comporte les trois premiers points, et à ce stade, la courbe a une pente moyenne, qui s'accroît un peu plus loin dans la partie centrale de la courbe, et pour enfin regagner à peu près la même pente qu'à l'entrée.

Effet de la variation de la variance de «  $\phi$  » ( $V[\phi]$ ) sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

Variance de $\phi$ $V[\phi]$ (%)	10	20	30	40	50	60
$\beta_{HL}$	3.4684	3.4649	3.4637	3.4631	3.4628	3.4626
$Pr$	0.000265	0.000269	0.000272	0.000275	0.000278	0.000280

Fig7,8 effet de la variance de ( $\phi$ ) sur  $\beta_{HL}$

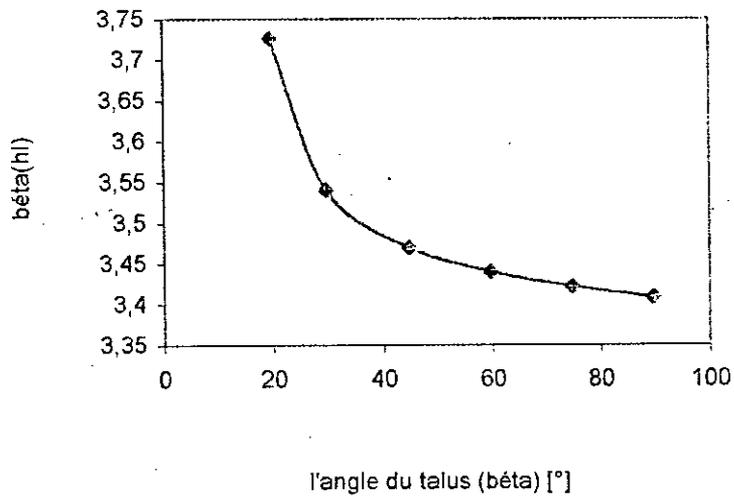


La courbe  $\beta_{HL} = f(V[\phi])$  est décroissante, fortement non linéaire, la variation de  $\beta_{HL}$  diminue chaque fois qu'on augmente la variance de  $\phi$  d'une façon presque régulière

Effet de la variation de l'angle d'inclinaison du talus ( $\beta$ ) sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

Inclinaison du Talus ' $\beta$ ' [°]	20	30	45	60	75	90
$\beta_{HL}$	3.7252	3.5392	3.4684	3.4391	3.4213	3.4078
Pr	0.000100	0.000210	0.000260	0.000290	0.000310	0.00034

Fig7,9 Effet de la variation de l'angle d'inclinaison du talus sur  $\beta_{HL}$



La courbe  $\beta_{HL} = h1(\beta)$  est aussi décroissante, fortement non linéaire, de même allure que la précédente ( $\beta_{HL}=f1(V[\phi])$ ) ce qui suppose que l'inclinaison du talus  $\beta$  et  $V[\phi]$  ont à peu près la même influence sur  $\beta_{HL}$ .

\*Pour un cercle C2(O<sub>2</sub>,R<sub>2</sub>) tel que O<sub>2</sub>(9, 11) , R=11 m

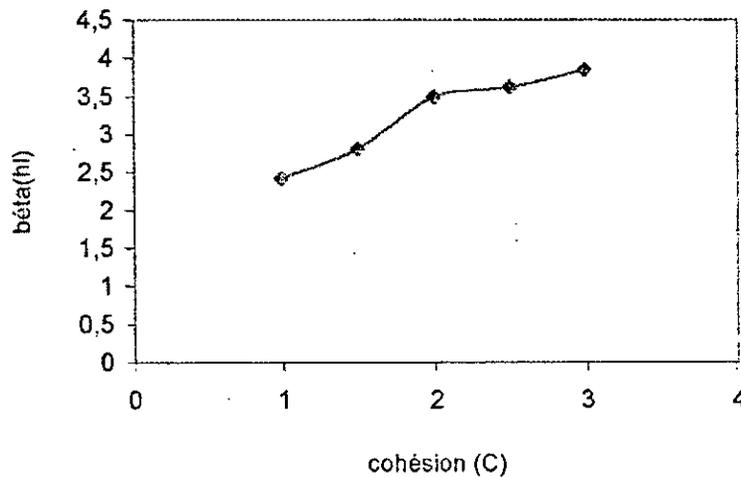
Avec :

- une cohésion  $c=20\text{KN/m}^2$
- un angle de frottement interne  $\varphi = 25^\circ$
- un poids volumique  $\gamma = 16 \text{ KN/m}^3$
- l'inclinaison du talus  $\beta = 45^\circ$

**Effet de variation de la cohésion sur l'indice de Fiabilité ( $\beta_{HL}$ )**

Cohésion (c) (t/m <sup>2</sup> )	1.0	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4.0
$\beta_{HL}$	2.3995	2.7932	3.4769	3.6137	3.8451	3.8848	3.9140
$P_f$	0.00820	0.00264	0.000260	0.000150	0.000060	0.000050	0.000050

Fig7,10 variation de béta(hl) en fonction de (C)

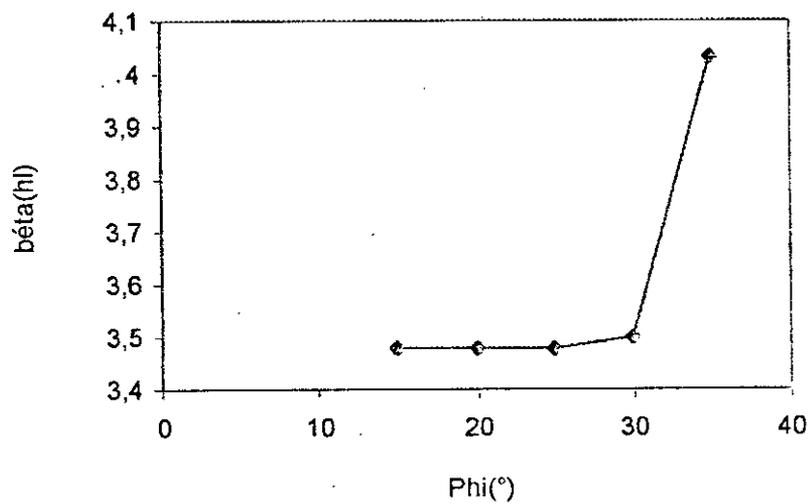


la courbe est croissante et faiblement non linéaire.

Effet de la variation de l'angle de frottement  $\varphi$  sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

$\varphi$ (°)	15	20	25	30	35
$\beta_{HL}$	3.4767	3.4769	3.4777	3.4995	4.0313
$P_f$	0.00027	0.00026	0.00025	0.00023	$2.56 \times 10^{-5}$

Fig7,11 variation de  $\beta_{HL}$  en fonction de  $\Phi$

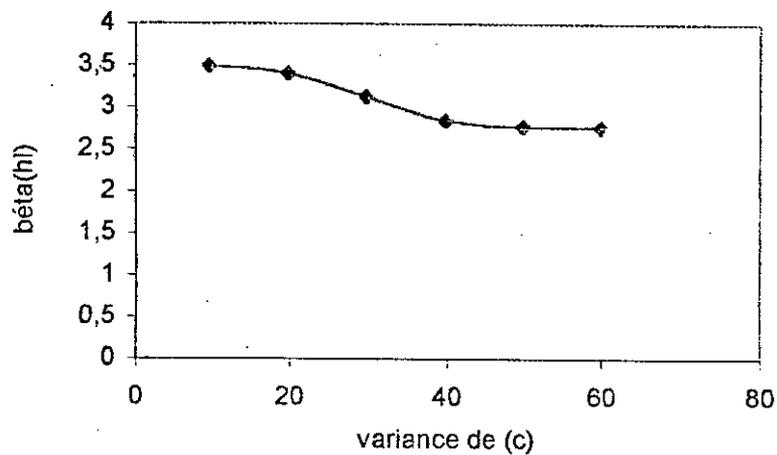


La courbe est croissante, fortement non linéaire

Effet de la variation de la variance de « c » ( V[c] ) sur l'indice de fiabilité (  $\beta_{HL}$  )

Variance de (c) V[c] (%)	10	20	30	40	50	60
$\beta_{HL}$	3.4769	3.3838	3.1132	2.8301	2.7625	2.7602
Pr	0.00027	0.00036	0.00094	0.00233	0.00288	0.00289

Fig7,12 variation de béta(hl) en fonction de la variance de (c)

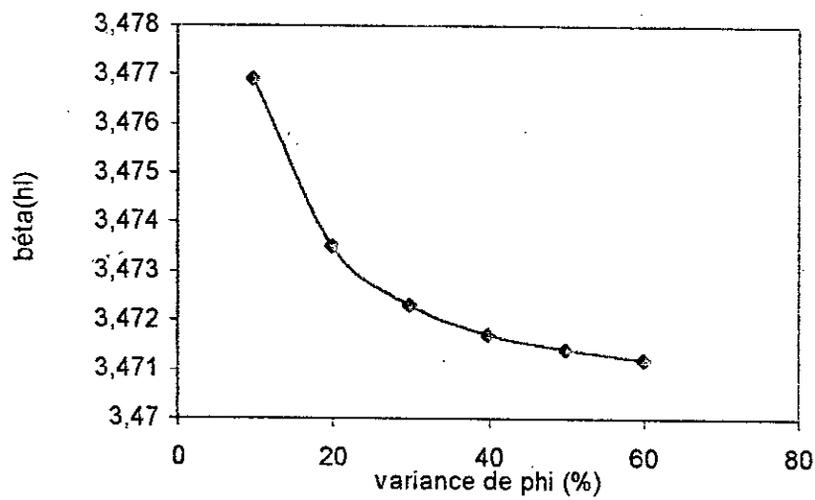


la courbe est décroissante, faiblement non linéaire

Effet de la variation de la variance de «  $\varphi$  » ( $V[\varphi]$ ) sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

Variance de $\varphi$ $V[\varphi]$ (%)	10	20	30	40	50	60
$\beta_{HL}$	3.4769	3.4737	3.4723	3.4717	3.4714	3.4712
$P_f$	0.00027	0.000271	0.000273	0.00074	0.00075	0.00076

Fig7,13 variation de  $\beta_{HL}$  en fonction de la variance de  $\varphi$

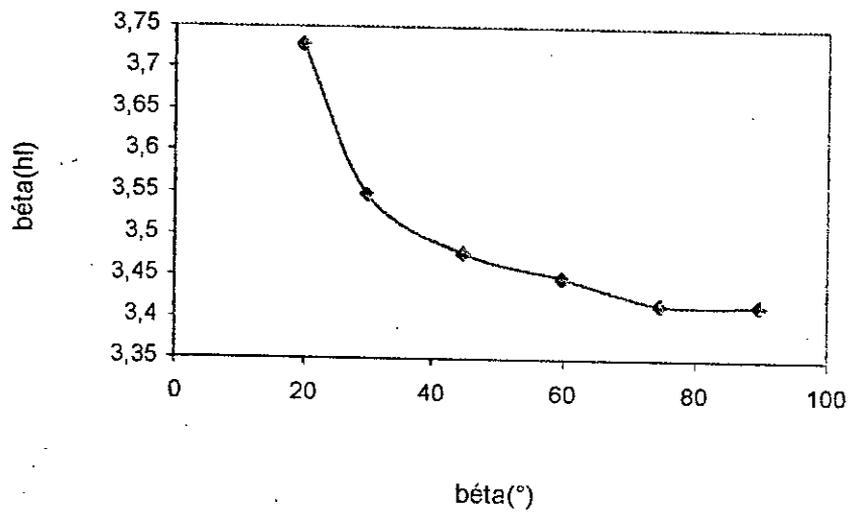


la courbe est décroissante, fortement non linéaire.

Effet de la variation de l'angle d'inclinaison du talus ( $\beta$ ) sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

Inclinaison du Talus ' $\beta$ ' [°]	20	30	45	60	75	90
$\beta_{HL}$	3.7265	3.547	3.4769	3.4476	3.4159	3.4149
Pr	0.000100	0.000190	0.000250	0.000280	0.000310	0.000320

Fig7,14 variation de  $\beta_{HL}$  en fonction de l'inclinaison du talus( $\beta$ )



la courbe est décroissante, fortement non linéaire.

\*Pour un cercle C3(O3,R3) tel que O3(9, 14) , R=14 m

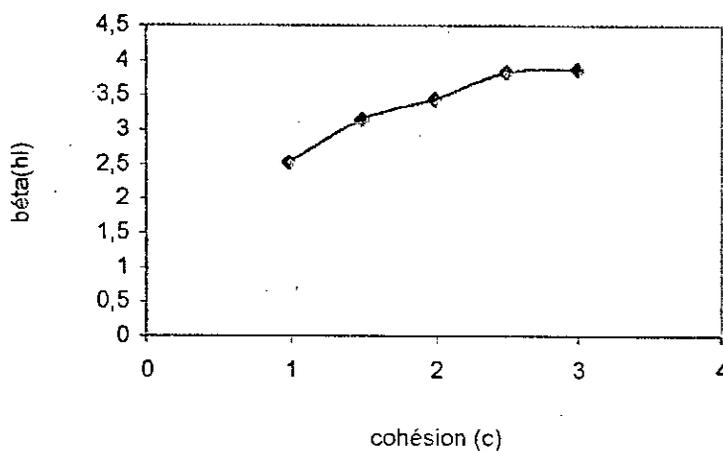
Avec :

- une cohésion  $c=20\text{KN/m}^2$
- un angle de frottement interne  $\varphi = 25^\circ$
- un poids volumique  $\gamma =16 \text{ KN/m}^3$
- l'inclinaison du talus  $\beta =45^\circ$

**Effet de variation de la cohésion sur l'indice de Fiabilité ( $\beta_{HL}$ )**

Cohésion (c) (t/m <sup>2</sup> )	1.0	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4.0
$\beta_{HL}$	2.519	3.1389	3.4343	3.8264	3.8665	3.8701	3.8951
Pr	0.00587	0.00084	0.00003	0.00007	0.00006	0.00005	0.00005

Fig7,15 variation de béta(hl) en fonction de la cohésion(c)

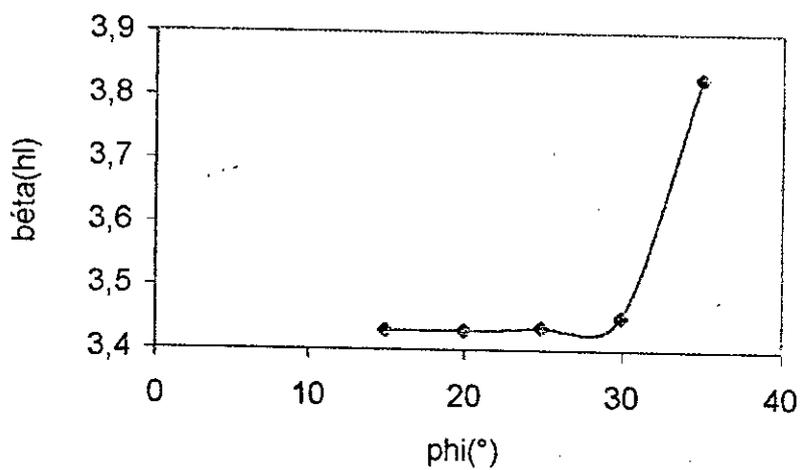


la courbe est croissante, faiblement non linéaire

Effet de la variation de l'angle de frottement  $\varphi$  sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

$\varphi$ (°)	15	20	25	30	35
$\beta_{HL}$	3.4289	3.4296	3.4343	3.4510	3.8288
Pr	0.00031	0.0003	0.00029	0.00028	0.00007

Fig7,16 variation de  $\beta_{HL}$  en fonction de ( $\varphi$ )

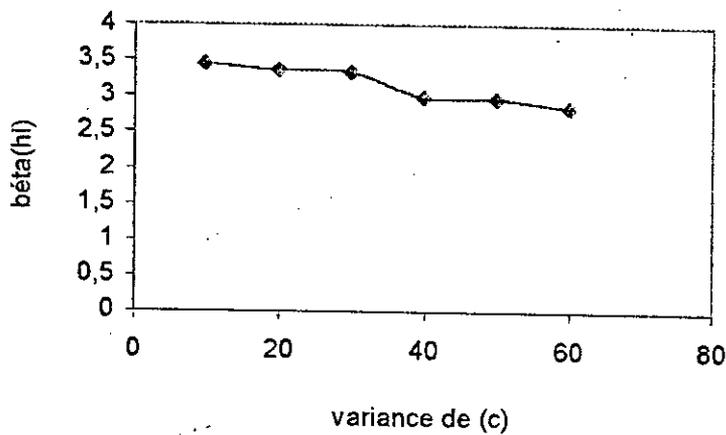


la courbe est croissante , fortement non linéaire.

Effet de la variation de la variance de « c » (  $V[c]$  ) sur l'indice de fiabilité (  $\beta_{HL}$  )

Variance de (c) $V[c]$ (%)	10	20	30	40	50	60
$\beta_{HL}$	3.4343	3.3461	3.3216	2.9779	2.9591	2.8442
$Pr$	0.00029	0.00042	0.00045	0.00135	0.00154	0.00226

Fig7,17 variation de  $\beta_{HL}$  en fonction de la variance de (c)

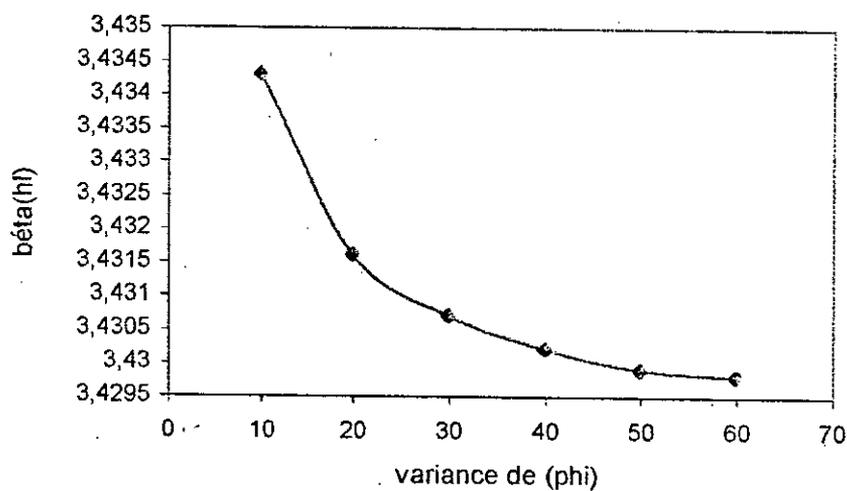


la courbe est décroissante, faiblement non linéaire

Effet de la variation de la variance de «  $\varphi$  » ( $V[\varphi]$ ) sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

Variance de $\varphi$ $V[\varphi]$ (%)	10	20	30	40	50	60
$\beta_{HL}$	3.4343	3.4316	3.4307	3.4302	3.4299	3.4298
Pf	0.00290	0.00296	0.00298	0.0003	0.00031	0.00031

Fig7,18 variation de  $\beta_{HL}$  en fonction de la variance de ( $\varphi$ )

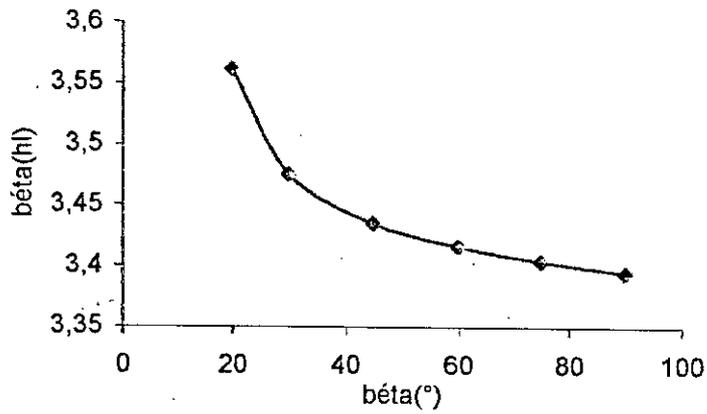


la courbe est décroissante et fortement non linéaire

Effet de la variation de l'angle d'inclinaison du talus ( $\beta$ ) sur l'indice de fiabilité ( $\beta_{HL}$ )

Inclinaison du Talus ' $\beta$ ' [°]	20	30	45	60	75	90
$\beta_{HL}$	3.5608	3.475	3.4343	3.4155	3.4034	3.3939
$P_f$	0.00019	0.00026	0.0003	0.00032	0.00034	0.00035

Fig7,19 variation de  $\beta_{HL}$  en fonction de l'inclinaison du talus( $\beta$ )



la courbe est décroissante, faiblement non linéaire

## II Cas du Glissement Plan

### 7.6 Présentation du problème

Soit une rupture qui s'établit sur un plan AB, incliné selon un angle  $\beta$  par rapport à l'horizontale. Ce plan est parallèle à la surface topographique, est situé à la profondeur  $h$  sous celle-ci.

Dans le glissement d'une couverture sur un substratum, le plan de glissement AB correspond sensiblement à la discontinuité couverture/substratum (voir fig7-3)

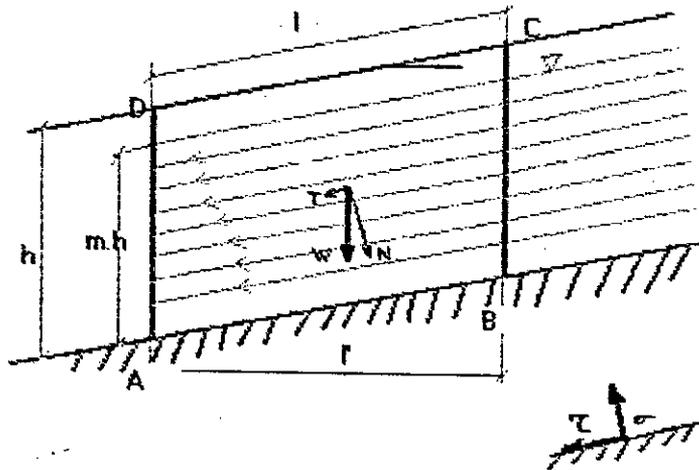


Fig 7-20 Calcul de la stabilité d'un glissement de terrain

Les caractéristiques géométriques de la masse sujette au glissement sont :

$$h = 12\text{m.}$$

$$l = 50\text{m.}$$

$$\beta = 25^\circ.$$

On considère que le niveau de la nappe phréatique est variable, cela nous permet de simuler la variation du niveau de la nappe pour les différentes saisons de l'année.

$$h_w = m.h$$

$m$  : coefficient variant de 0 à 1, selon la position de la surface de la nappe entre A et B.

Le poids volumique du matériau constituant le versant est :

$$\gamma = 20 \text{ kN/m}^3 \quad (\text{par prudence on a pris } \gamma = \gamma_{\text{sat}}).$$

Pour la cohésion ( $c$ ) et l'angle de frottement interne ( $\phi$ ), leurs valeurs seront données selon le cas étudié.

### 7.7 Approche déterministe de la stabilité du versant

Considérons l'équilibre du tronçon ABCD, de longueur horizontale  $l'$ , où  $l' = l \cdot \cos(\beta)$

Le poids de la masse instable de poids spécifique  $\gamma = \gamma_{sat}$  vaut :

$$W = \gamma \cdot h \cdot l' \quad (92)$$

Son action sur AB se décompose en :

$$N = \gamma \cdot h \cdot l' \cdot \cos(\beta) \quad ; \quad T = \gamma \cdot h \cdot l' \cdot \sin(\beta)$$

Il en résulte sur le segment AB, des contraintes  $\sigma$  et  $\tau$  telles que :

$$\sigma = \frac{N}{AB} = \frac{N \cdot \cos(\beta)}{l'} = \gamma \cdot h \cdot \cos^2(\beta) \quad (93)$$

$$\tau = \frac{T}{AB} = \frac{N \cdot \cos(\beta)}{l'} = \gamma \cdot h \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \quad (94)$$

Lorsque la masse instable est occupée par une nappe d'eau, il en résulte une pression interstitielle qui vaut :

$$u = m \cdot h \cdot \gamma_w \cdot \cos^2(\beta) \quad (95)$$

En contraintes effectives, on a :

$$\sigma' = \sigma - u = h \cdot \cos^2(\beta) \cdot (\gamma - m \cdot \gamma_w) \quad (96)$$

$$\tau' = \tau = \gamma \cdot h \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \quad (97)$$

soient  $\phi$  et  $c$  les caractéristiques effectives du sol constituant le versant, la résistance au cisaillement vaut :

$$\tau_r = c + \sigma' \cdot \text{tg}(\phi) \quad (98)$$

le coefficient selon la définition de Bishop est égale à:

$$F = \frac{\tau_r}{\tau} = \frac{c + h \cdot \cos^2(\beta) \cdot (\gamma - m \cdot \gamma_w) \cdot \text{tg}(\varphi)}{\gamma \cdot h \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta)} \quad (99)$$

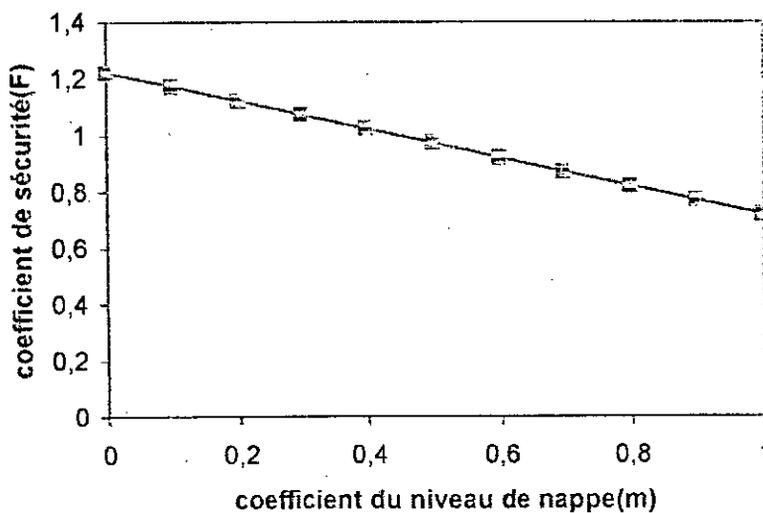
### Effet du niveau de la nappe phréatique sur le coefficient de sécurité F

Dans ce cas précis on choisit comme valeurs pour  $\varphi$  et  $c$  respectivement  $25^\circ$  et  $20\text{KN/m}^2$ , et on fait varier donc 'm' de 0 à 1.

m	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
F	1.22	1.17	1.12	1.07	1.02	0.97	0.92	0.87	0.82	0.77	0.72

Le graphe associé sera donc :

Fig 7,21 en fonction du niveau de la nappe phréatique



la courbe  $F=g_l(m)$  est une droite de pente négative qui vaut : - 0.5

et donc on peut écrire que  $F = -0.5 \cdot m + b$  où  $b=1.22$  d'après le graphe :

$$F = -0.5 \cdot m + 1.22 \quad (F \text{ et } m \text{ sont proportionnellement opposés}) \quad (100)$$

**Effet de la variation de l'angle de frottement interne sur le coefficient de sécurité F**

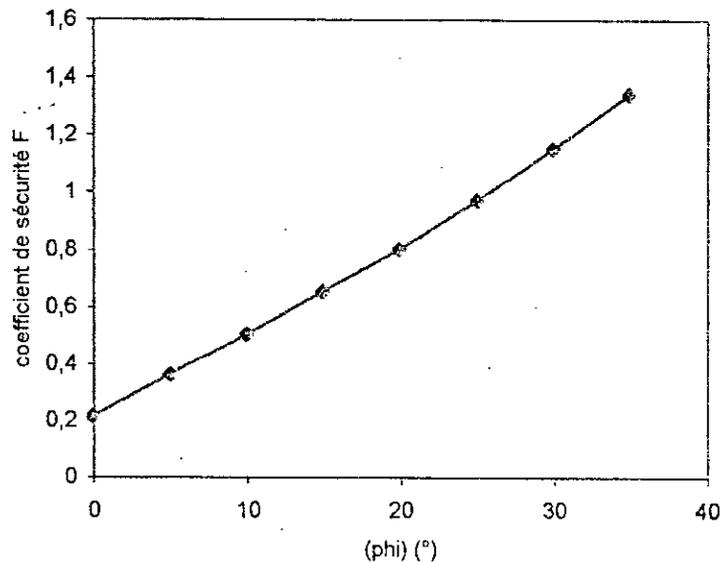
Considérons dans ce cas, la nappe d'eau à mi-hauteur de la masse instable, c'est à dire ( $m=0.5$ ) et prenons  $c=20 \text{ KN/m}^2$ .

Le principe est simple, faire varier l'angle de frottement interne  $\varphi$ , et noter les valeurs de F, associées.

On expose les résultats sous forme de tableau :

$\varphi$ (°)	0	5	10	15	20	25	30	35
F	0.21	0.36	0.50	0.65	0.80	0.97	1.15	1.34

Fig 7,22 Effet de variation de ( $\phi$ ) sur le coefficient de sécurité F



la courbe  $F=g_2(\varphi)$  est relativement une droite si on prend en considération les incertitudes

la pente est croissante et vaut : **0.03**

$$\text{et donc on peut écrire que } F=0.03 \cdot \varphi + b \quad \text{où } b=0.21 \Rightarrow F=0.03 \cdot \varphi + 0.21 \quad (101)$$

(F et  $\varphi$  sont proportionnellement en phase)

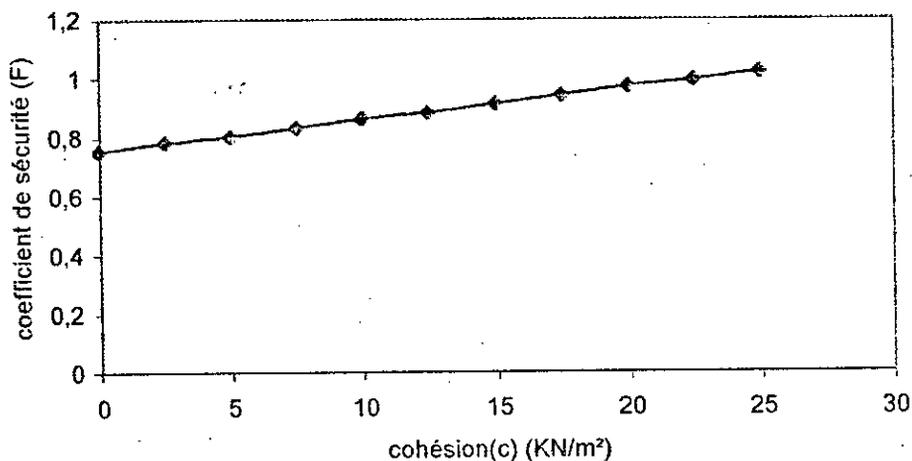
**Effet de la variation de la cohésion (c) sur le coefficient de sécurité F**

Pour un niveau fixé de la nappe, à mi-hauteur par exemple ( $m = 0.5$ ), avec un angle de frottement interne fixé aussi, et de valeur  $25^\circ$ , on fait varier la cohésion tout en notant les valeurs de F associées.

Les résultats sont présentés sous forme de tableau, ainsi qu'un graphique correspondant.

c(KN/m <sup>2</sup> )	0.0	2.50	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0	22.5	25.0
F	0.75	0.78	0.80	0.83	0.86	0.88	0.91	0.94	0.97	0.99	1.02

Fig7,23 Effet de la variation de (c) sur le coefficient de sécurité F



la courbe  $F=g_3(c)$  est une droite de pente positive qui vaut : 0.008

et donc :  $F=0.008*c+b$  où  $b=0.75 \Rightarrow F=0.008*c+0.75$  (102)

### 7.8 Approche probabiliste de la stabilité du versant dans l'hypothèse d'un glissement plan

On va étudier la stabilité de la masse sujette au glissement en analysant la probabilité de rupture du talus, à l'aide de la relation qui existe entre F (coefficient de sécurité) et le paramètre de base du problème, c'est-à-dire la cohésion (c).  
L'analyse consiste donc à :

- Estimer la loi de distribution des valeurs mesurées de (c), dans notre étude on suppose que ce dernier suit une loi de distribution normal.
- Déduire la relation qui lie F à (c).
- Evaluer la probabilité de rupture, qui sera alors :

$$P_f = \text{Prob}\{F < 1\} \quad (103)$$

**Evaluation de la probabilité de rupture:**

(c) suit une loi normal, et donc sa densité de probabilité sera :

$$f_c(c) = \frac{1}{\sigma_c \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c - \mu_c}{\sigma_c}\right)^2\right) \quad \sigma_c, \mu_c \text{ respectivement écart-type et } (104) \\ \text{moyenne de } c$$

$$\mu_c = 20 \text{ KN/m}^2 \\ \sigma_c = 1.41 \text{ KN/m}^2$$

Les caractéristiques du versant sont :

$$h = 12 \text{ m}, \quad \beta = 25^\circ, \quad l = 50 \text{ m}$$

Les caractéristiques géotechniques du sol constituant notre talus sont :

$$\gamma = 20 \text{ KN/m}^3 \quad (\text{Poids volumique du sol}) \\ \phi = 25^\circ \quad (\text{Angle de frottement interne})$$

On suppose que le niveau de la nappe d'eau est à demi-hauteur de la couverture (m=0.5).

La probabilité de rupture ou  $P_f$  (Probability of failure) est calculée ci-dessous :

$$P_f = \text{Prob}\{F < 1\} = \text{Prob}\left\{ \frac{F - \mu_F}{\sigma_F} < \frac{1 - \mu_F}{\sigma_F} \right\} \quad (105)$$

$$P_f = \text{Prob}\left\{ \frac{F - \mu_F}{\sigma_F} < 2.08 \right\}$$

$P_f = 0.89124$  soit 89.124% on note que dans ce cas la probabilité de ruine est élevée

La fiabilité du versant vaut donc  $P_R(\text{Reliability}) = 1 - P_f \Rightarrow P_R = 0.01876$  soit 1.7876%

**Effet de la variance de (c) sur la probabilité de rupture du versant :**

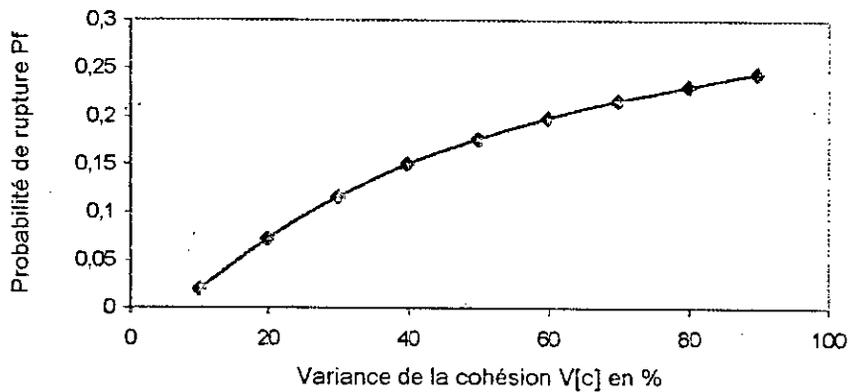
Les résultats sont résumés ci- dessous sous forme de tableau :

V[c] (%)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\sigma_c$ (KN/m <sup>2</sup> )	1.41	2.00	2.45	2.83	3.16	3.46	3.74	4.00	4.24
$\sigma_F$ (KN/m <sup>2</sup> )	0.0153	0.0218	0.0267	0.0308	0.0344	0.0377	0.0407	0.0436	0.0462
$P_R$	0.98124	0.92922	0.88490	0.85080	0.82380	0.80230	0.78375	0.76880	0.75490
$P_F$	0.01870	0.07078	0.11510	0.14920	0.17620	0.19770	0.21625	0.23120	0.24510

$$\mu_F = 0.0109 * \mu_c + 0.75 \tag{106}$$

$$\mu_F = 0.968$$

Fig7,24 Probabilité de rupture en fonction de la variance de la cohésion(c)



la courbe  $P_r = g_4(V[c])$  est croissante, faiblement non linéaire

**Effet du niveau de la nappe phréatique sur la probabilité de rupture (Pr) :**

La relation qui lie F et le niveau de la nappe d'eau est :

$$F = 0.0109 \cdot c - 0.5 \cdot m + 1 \quad (107)$$

En sachant que le poids volumique de l'eau  $\gamma_w = 10 \text{KN/m}^3$

**Définition de la relation qui lie F et c (cohésion)**

Le coefficient de sécurité vaut selon la définition de Bishop :

$$F = \frac{\tau_r}{\tau} = \frac{c + h \cdot \cos^2(\beta) \cdot (\gamma - m \cdot \gamma_w) \cdot \text{tg}(\varphi)}{\gamma \cdot h \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta)} \quad (108)$$

en remplaçant avec ce qu'on a comme données on trouve:

$$F = 0.0109 \cdot c + 0.75 \quad (109)$$

Par conséquent, le coefficient de sécurité a une loi de distribution de même nature que (c), c'est-à-dire une loi normale.

$$f_c(c) = \frac{1}{\sigma_c \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c - \mu_c}{\sigma_c}\right)^2\right) \quad \sigma_c, \mu_c \text{ respectivement écart-type et moyenne de } c \quad (110)$$

**Calcul de la Probabilité de rupture :**

Avec la relations qui lie F à (c), on déduit  $\mu_F$  et  $\sigma_F$ .

$$F = 0.0109 \cdot c + 0.75 \quad (111)$$

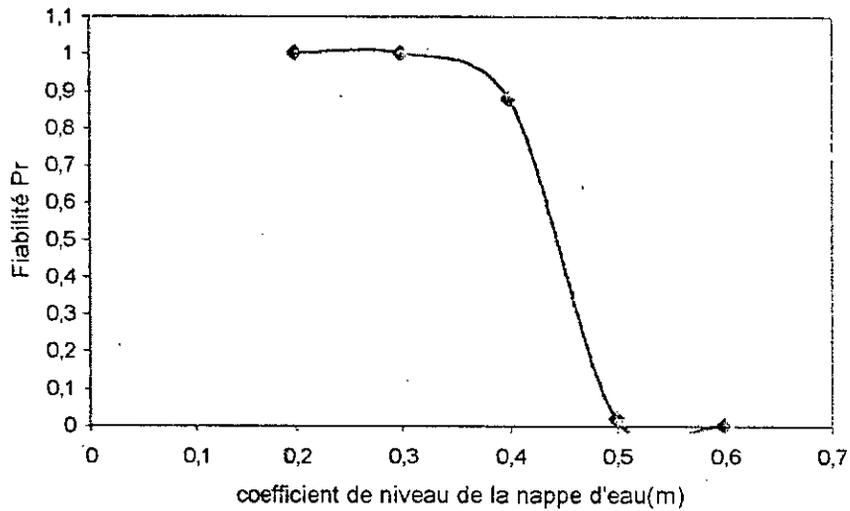
$$\mu_F = (0.0109) \cdot \mu_c + 0.75 \quad \Rightarrow \quad \mu_F = 0.968$$

$$\sigma_F = 0.0109 \cdot \sigma_c \quad \Rightarrow \quad \sigma_F = 0.015369$$

On transforme la loi de distribution de F en une loi normale centrée réduite.

m	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$P_F$	0.10543*E-13	0.48435*E-05	0.12100	0.98124	0.99999
$P_R$	0.99999	0.99999	0.87900	0.01876	5.0000E-08

Fig 7,25 la Fiabilité  $P_R$  en fonction du niveau de la nappe d'eau



la courbe ci dessus est décroissante et fortement non linéaire.

Pour  $m=0$  et  $m=0.1$   $P_F \rightarrow 0$  et  $P_R \rightarrow 1$

Pour  $m=0.7, 0.8, 0.9, 1$   $P_F \rightarrow 1$  et  $P_R \rightarrow 0$

## CHAPITRE 8

# CONCLUSIONS

## CONCLUSIONS

Ce travail concerne principalement l'approche probabiliste de l'étude de la stabilité des talus. Nous avons considérés que les principales variables aléatoires du problème sont les caractéristiques du sol ( $c$ ,  $\gamma$  et  $\varphi$ ). Ces dernières sont supposées suivre une loi normale et être indépendantes entre elles.

Dans ce cadre nous avons étudié la stabilité de talus pour des glissements rotationnels ou plans d'origine mécanique. Une étude de cas et une investigation paramétrique nous a permis de mieux appréhender ce type de problème.

Dans le cadre de notre étude, nous avons préféré l'indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) à celui de Cornell  $\beta_c$  pour les deux raisons suivantes :

\*L'indice de Cornell n'est pas invariant, car sa valeur dépend de l'expression choisie pour définir la fonction d'état limite.

\*La difficulté d'évaluer  $E[M]$  et  $D[M]$

Il en ressort que le principal avantage apporté par la démarche probabiliste optimal est que cette méthode permet de prendre en considération le degré d'incertitude sur les informations relatives aux actions et aux caractéristiques, étant bien entendu que la sécurité est estimée en terme de probabilité de ruine (ou de survie).

on constate ( voir chapitre 7) que ce degré d'incertitude sur les informations a une grande incidence sur la valeur de la stabilité . Effectivement, l'influence de la variance des paramètres considérés comme aléatoires sur la fiabilité n'est pas négligeable. L'effet de la variance de  $\Phi$  (angle de frottement interne) est plus important et fortement non linéaire comparativement aux effets de la variance de ' $c$ ' quasiment linéaire à faible pente (cohésion ) Il est regrettable, qu'actuellement, nous constatons un manque d'informations ou de données statistiques précises concernant les actions et les caractéristiques aléatoires des matériaux et des structures. C'est le facteur majeur qui constitue un obstacle au développement du dimensionnement probabiliste optimal. Les principaux résultats obtenus pour la stabilité des talus se résume comme suit :

- La relation liant l'indice de fiabilité  $\beta_{HL}$  à la variable aléatoire ( $c$ ) est faiblement non linéaire, croissante de sorte que quand ' $c$ ' augmente  $\beta_{HL}$  augmente aussi ( $P_r$  diminue) ; où  $P_r$  est la probabilité de ruine ou de rupture, c'est ce qui paraît le mieux logique.
- La relation liant l'indice de fiabilité  $\beta_{HL}$  à la variable aléatoire ( $\varphi$ ) est cependant moins linéaire que la précédente, on peut la qualifier par fortement non linéaire, croissante. Et donc l'influence de l'angle de frottement interne est plus importante comparée à l'influence de ' $c$ '.
- Passons à présent à l'influence de la variance de la cohésion  $V[c]$  sur l'indice de fiabilité , on remarque à premier coût, une courbe décroissante, faiblement non linéaire.

- La même remarque presque est attribuée à l'influence de la variance de  $\varphi$ ,  $V[\varphi]$  sauf que dans notre cas la courbe est fortement non linéaire.
- L'angle d'inclinaison du talus a aussi un rôle dans l'influence de l'indice de fiabilité puisque la courbe  $\beta_{HL}=f(\beta)$  à la même allure que celle de  $\beta_{HL}=g(V[\varphi])$ , et donc les mêmes remarques s'attribuent aussi dans cette analyse.

Pour les méthodes déterministes les résultats obtenus sont, de façon générale, proches de ceux attendus

Ce qui conclut notre étude de cas.

Il serait intéressant de poursuivre ce travail en prenant compte :

- \* effet de l'eau
- \* cas de glissement de forme quelconque
- \* prendre en considération l'incertitude géométrique sur la forme du glissement
- \* effet des corrélations entre paramètres
- \* cas de sols multicouches
- \* cas de sols chargés
- \* effets de la méthode de calculs utilisés

## *Annexes*

## Lois de distribution théoriques :

La loi de distribution des valeurs d'un paramètre physique ou mécanique dans un massif de sol ne peut naturellement pas être parfaitement connue, puisqu'il est impossible de mesurer ce paramètre en tous points.

La loi la plus connue est la loi normale ou « loi Gauss ».

La variable aléatoire peut être caractérisée par une densité de probabilité  $g(x)$  définie de la façon suivante :

$$g(x) = \text{Pro}\{x < X < x + dx\} \quad (\text{I})$$

on appelle fonction de répartition la fonction définie en tout point  $x$  comme la probabilité que la variable aléatoire  $X$  soit inférieure ou égale à  $x$  :

$$G(x) = \text{Prob}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x g(x) dx \quad (\text{II})$$

La variable aléatoire  $X$  peut être indifféremment définie par sa densité de probabilité  $g(x)$  ou sa fonction de répartition  $G(x)$ .

**Espérance et moments :** - l'espérance mathématique d'une variable aléatoire de densité  $g(x)$  est sa valeur moyenne, définie par :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x) dx \quad (\text{III})$$

le moment d'ordre ' $r$ ' de la variable aléatoire  $X$  est égale à :

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot g(x) dx \quad (\text{IV})$$

On note que l'espérance mathématique de  $X$  est égale au moment d'ordre 1 de  $X$ , noté ' $m_1$ ' ou plus généralement ' $m$ '

**Variance :**

$$V[X] = \sigma^2 = \mu^2 = E[(X - E[X])^2] \quad (\text{V})$$

Où  $\sigma$  est l'écart type.

**Distribution normale:**

Cette distribution est définie, sous forme réduite, par :

$$g(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \quad (\text{VI})$$

Distribution log-normal :

Cette distribution a une définition identique à la précédente, en remplaçant  $x$  par  $\lg x$  ; c'est-à-dire que la variable  $\lg X$  a une distribution normale.

A LA TABLE DE LA LOI NORMALE REDUITE

Table C.1

$\beta$	$\Phi(-\beta)$	$\beta$	$\Phi(-\beta)$	$\beta$	$\Phi(-\beta)$
0.00	0.50000	0.40	0.3446	0.80	0.2119
0.01	0.49600	0.41	0.3409	0.81	0.2068
0.02	0.49200	0.42	0.3372	0.82	0.2016
0.03	0.48800	0.43	0.3335	0.83	0.1963
0.04	0.4841	0.44	0.3298	0.84	0.1909
0.05	0.4801	0.45	0.3261	0.85	0.1855
0.06	0.4761	0.46	0.3223	0.86	0.1800
0.07	0.4721	0.47	0.3186	0.87	0.1745
0.08	0.4681	0.48	0.3148	0.88	0.1689
0.09	0.4642	0.49	0.3111	0.89	0.1633
0.10	0.4602	0.50	0.3073	0.90	0.1576
0.11	0.4562	0.51	0.3035	0.91	0.1519
0.12	0.4522	0.52	0.2997	0.92	0.1461
0.13	0.4483	0.53	0.2959	0.93	0.1403
0.14	0.4443	0.54	0.2921	0.94	0.1345
0.15	0.4404	0.55	0.2882	0.95	0.1286
0.16	0.4364	0.56	0.2844	0.96	0.1227
0.17	0.4325	0.57	0.2805	0.97	0.1167
0.18	0.4285	0.58	0.2767	0.98	0.1107
0.19	0.4247	0.59	0.2728	0.99	0.1047
0.20	0.4207	0.60	0.2689	1.00	0.1597
0.21	0.4168	0.61	0.2650	1.01	0.1536
0.22	0.4128	0.62	0.2611	1.02	0.1475
0.23	0.4089	0.63	0.2572	1.03	0.1413
0.24	0.4050	0.64	0.2533	1.04	0.1351
0.25	0.4011	0.65	0.2494	1.05	0.1289
0.26	0.3971	0.66	0.2455	1.06	0.1227
0.27	0.3932	0.67	0.2416	1.07	0.1164
0.28	0.3893	0.68	0.2377	1.08	0.1102
0.29	0.3854	0.69	0.2338	1.09	0.1039
0.30	0.3815	0.70	0.2299	1.10	0.1357
0.31	0.3776	0.71	0.2260	1.11	0.1295
0.32	0.3737	0.72	0.2221	1.12	0.1233
0.33	0.3698	0.73	0.2182	1.13	0.1171
0.34	0.3659	0.74	0.2143	1.14	0.1109
0.35	0.3620	0.75	0.2104	1.15	0.1047
0.36	0.3581	0.76	0.2065	1.16	0.0985
0.37	0.3542	0.77	0.2026	1.17	0.0923
0.38	0.3503	0.78	0.1987	1.18	0.0861
0.39	0.3464	0.79	0.1948	1.19	0.0799

$\beta$	$\Phi(-\beta)$	$\beta$	$\Phi(-\beta)$	$\beta$	$\Phi(-\beta)$
1.20	0.1151	1.86	0.3593E-01	2.40	0.8198E-02
1.21	0.1131	1.87	0.3515E-01	2.41	0.7978E-02
1.22	0.1112	1.88	0.3438E-01	2.42	0.7760E-02
1.23	0.1094	1.89	0.3363E-01	2.43	0.7550E-02
1.24	0.1076	1.90	0.3289E-01	2.44	0.7344E-02
1.25	0.1057	1.91	0.3216E-01	2.45	0.7143E-02
1.26	0.1039	1.92	0.3144E-01	2.46	0.6947E-02
1.27	0.1020	1.93	0.3074E-01	2.47	0.6756E-02
1.28	0.1003	1.94	0.3005E-01	2.48	0.6569E-02
1.29	0.9853E-01	1.95	0.2936E-01	2.49	0.6387E-02
1.30	0.9688E-01	1.96	0.2872E-01	2.50	0.6210E-02
1.31	0.9518E-01	1.97	0.2807E-01	2.51	0.6037E-02
1.32	0.9342E-01	1.98	0.2743E-01	2.52	0.5868E-02
1.33	0.9176E-01	1.99	0.2680E-01	2.53	0.5703E-02
1.34	0.9013E-01	2.00	0.2618E-01	2.54	0.5543E-02
1.35	0.8851E-01	2.01	0.2558E-01	2.55	0.5386E-02
1.36	0.8692E-01	2.02	0.2500E-01	2.56	0.5234E-02
1.37	0.8535E-01	2.03	0.2442E-01	2.57	0.5085E-02
1.38	0.8380E-01	2.04	0.2385E-01	2.58	0.4940E-02
1.39	0.8227E-01	2.05	0.2330E-01	2.59	0.4799E-02
1.40	0.8076E-01	2.06	0.2275E-01	2.60	0.4661E-02
1.41	0.7927E-01	2.07	0.2222E-01	2.61	0.4527E-02
1.42	0.7781E-01	2.08	0.2169E-01	2.62	0.4397E-02
1.43	0.7636E-01	2.09	0.2118E-01	2.63	0.4269E-02
1.44	0.7494E-01	2.10	0.2068E-01	2.64	0.4145E-02
1.45	0.7353E-01	2.11	0.2018E-01	2.65	0.4026E-02
1.46	0.7215E-01	2.12	0.1970E-01	2.66	0.3907E-02
1.47	0.7078E-01	2.13	0.1923E-01	2.67	0.3788E-02
1.48	0.6944E-01	2.14	0.1876E-01	2.68	0.3661E-02
1.49	0.6811E-01	2.15	0.1831E-01	2.69	0.3573E-02
1.50	0.6681E-01	2.16	0.1786E-01	2.70	0.3487E-02
1.51	0.6552E-01	2.17	0.1743E-01	2.71	0.3364E-02
1.52	0.6426E-01	2.18	0.1700E-01	2.72	0.3284E-02
1.53	0.6301E-01	2.19	0.1658E-01	2.73	0.3187E-02
1.54	0.6178E-01	2.20	0.1616E-01	2.74	0.3072E-02
1.55	0.6057E-01	2.21	0.1578E-01	2.75	0.2986E-02
1.56	0.5938E-01	2.22	0.1539E-01	2.76	0.2898E-02
1.57	0.5821E-01	2.23	0.1500E-01	2.77	0.2808E-02
1.58	0.5706E-01	2.24	0.1463E-01	2.78	0.2715E-02
1.59	0.5592E-01	2.25	0.1426E-01	2.79	0.2635E-02
1.60	0.5480E-01	2.26	0.1390E-01	2.80	0.2558E-02
1.61	0.5370E-01	2.27	0.1355E-01	2.81	0.2477E-02
1.62	0.5262E-01	2.28	0.1321E-01	2.82	0.2401E-02
1.63	0.5156E-01	2.29	0.1287E-01	2.83	0.2327E-02
1.64	0.5050E-01	2.30	0.1255E-01	2.84	0.2256E-02
1.65	0.4947E-01	2.31	0.1222E-01	2.85	0.2186E-02
1.66	0.4846E-01	2.32	0.1191E-01	2.86	0.2118E-02
1.67	0.4746E-01	2.33	0.1160E-01	2.87	0.2052E-02
1.68	0.4648E-01	2.34	0.1130E-01	2.88	0.1988E-02
1.69	0.4552E-01	2.35	0.1101E-01	2.89	0.1926E-02
1.70	0.4457E-01	2.36	0.1072E-01	2.90	0.1866E-02
1.71	0.4363E-01	2.37	0.1044E-01	2.91	0.1807E-02
1.72	0.4272E-01	2.38	0.1017E-01	2.92	0.1750E-02
1.73	0.4182E-01	2.39	0.9953E-02	2.93	0.1695E-02
1.74	0.4093E-01	2.40	0.9642E-02	2.94	0.1641E-02
1.75	0.4006E-01	2.41	0.9337E-02	2.95	0.1589E-02
1.76	0.3921E-01	2.42	0.9138E-02	2.96	0.1538E-02
1.77	0.3836E-01	2.43	0.8894E-02	2.97	0.1488E-02
1.78	0.3754E-01	2.44	0.8697E-02	2.98	0.1441E-02
1.79	0.3673E-01	2.45	0.8424E-02	2.99	0.1396E-02

```

program indifiab
dimension w(50),z(60)
real m1,m2,m3
write(*,*) 'Donner la valeur de (c),(Gamma),(Phi),(H),(Beta),
5(Beta0),(alpha0),(R)'
read(*,*) a,b,c,h,t,t0,g,r
write(*,*) 'donner la moyenne de (c),(Gamma),(Phi)'
read(*,*) m1,m2,m3
write(*,*) 'donner l ,cart type de (c),(Gamma),(Phi)'
read(*,*) s1,s2,s3
al=(a-m1)/s1
bl=(b-m2)/s2
z(1)=(c-m3)/s3
write(*,*) al,bl,z(1)
w(0)=0
w(1)=1
i=0
77 if(abs(w(i+1)-w(i)).le.0.00001) goto 66
if(bl.eq.0) goto 66
call fct1(bl,h,t,t0,g,r,y1)
write(*,*) 'y1=',y1
if(abs(y1).lt.0.0000000000000000001) then
write(*,*) 'capacite atteinte pour Y1'
goto 96
endif
call fct2(al,bl,h,t,t0,g,r,y2)
write(*,*) 'y2=',y2
if(abs(y2).lt.0.0000000000000000001) then
write(*,*) 'capacite Y2 atteinte'
goto 96
endif
write(*,*) 's',z(1)
call fct3(z(1),t0,y3)
write(*,*) 'y3=',y3
if(abs(y3).lt.0.0000000000000000001) then
write(*,*) 'capacite attente pour Y3'
goto 96
endif
som=sqrt(y1**2+y2**2+y3**2)
alph1=y1/som
alph2=y2/som
alph3=y3/som
alph=sqrt(alph1**2+alph2**2+alph3**2)
write(*,*) 'alph=',alph
i=i+1
write(*,*) 'i=',i
x1=(atan((2*alph1*g*r)/(alph2*cos(t0)*(((0.5*h**2)/(sin(t)**2)))*
4(0.5*sin(2*(t-t0))+(sin(t-t0)**2)/tan(t0))+g*r**2-(r**2/4)*sin(2
3*g))+tan(t0)))+3.14)/(+alph3)
w(i+1)=x1
write(*,*) 'beta hl=',w(i+1)
96 if((w(i+1).lt.(0)).or.(w(i+1).gt.10)) then
do 17 k=i,2,-1
if((w(k).lt.(0)).or.(w(k).gt.10)) then
goto 17
else
goto 97
endif
17 continue
97 w(i+1)=w(k)
goto 66

```

```

else
endif
al=-alph1*x1
bl=-alph2*x1
z(1)=-alph3*x1
goto 77
66 write(*,*) 'b,ta=',w(i+1)
write(*,*) 'i=',i
write(*,*) 'fin'
end
c *****
c * LES SUBROUTINES *
c *****
subroutine fct1(y,h0,tt,tt0,al,r1,y111)
y11(y,h0,tt,tt0,al,r1)=(2*al*r1)/(y*sin(tt0)*(((0.5*h0**2)/(sin(
4tt)**2))*0.5*sin(2*(tt-tt0))+(sin(tt-tt0)**2)/(tan(tt0)))+al*r1
5**2-((r1**2)/4)*sin(2*al))
y111=y11(y,h0,tt,tt0,al,r1)
return
end
subroutine fct2(x,y,h0,tt,tt0,al,r1,y222)
y22(x,y,h0,tt,tt0,al,r1)=(-2*x*al*r1)/(y**2*sin(tt0)*((0.5*(h0**
72)/(sin(tt)**2))*0.5*sin(2*(tt-tt0))+(sin(tt-tt0)**2/tan(tt0))
8+al*r1**2-((r1**2)/4)*sin(2*al))
y222=y22(x,y,h0,tt,tt0,al,r1)
return
end
subroutine fct3(z,tt0,y333)
y33(z,tt0)=1/((cos(z)**2)*tan(tt0))
y333=y33(z,tt0)
return
end

```

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.Costet et G.Sanglerat « Cours pratique de mécanique des sols » tome (2)  
Edition Dunod Paris 1975
- [2] Georges Filliat « La pratique des sols et fondations »  
Edition du Moniteur Paris 1981.
- [3] A.Haldar « Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis »  
John Wiley & Sons, Inc 2000 USA
- [4] Logiciel de calcul de stabilité de pente "Limit Equilibrium Slope stability analysis"  
version 3.23a Copyright© 1991 Mitre software corporation
- [5] T.William-Lamb and Robert whitman « Soil mechanics »  
Edition Dunod
- [6] R.Melchers « Structure Reliability Analysis »  
Edition John Wiley&Sons,Inc 1999 England
- [7] J.P Magnan « Les méthodes statistiques et probabiliste en mécanique des sols »  
Presse Ponts et chaussées Paris 1982
- [8] G.Philiponat et B.Hubert « Fondations et ouvrages en terre »
- [9] H.Procaccia et P.Morilhat « Fiabilité des structures des installations industrielles »  
Edition Eyrolles Paris1996
- [10] F.Schlosser « Eléments de mécanique des sols »  
Edition.Masson
- [11] Revue Française de Génie civil , volume 4, n° 6 /2000 .