

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
Département de Génie Electrique  
Laboratoire de Recherche en électrotechnique (LRE)

Thèse de Doctorat En Sciences en Génie Electrique  
Option : Electrotechnique

Présentée par

**Youcef BOUTORA**

Magister en électrotechnique  
de l'UMMTO (Tizi-Ouzou)

**Thème**

Elaboration de nouvelles méthodes de renumérotation des maillages en vue d'une modélisation électromagnétique de machines synchrones à aimants permanents avec la méthode des éléments finis

Soutenue publiquement le 04 / 07 / 2007 devant le jury composé de :

Président	Pr O. TOUHAMI	Professeur, ENP Alger
Directeur de thèse	Pr R. IBTIOUEN	Professeur, ENP Alger
Examineurs	Pr. N. BENAMROUCHE Pr. S.HADDAD Dr. A. KHELOUI	Professeur, UMMTO (Tizi-Ouzou) Professeur, UMMTO (Tizi-Ouzou) Maître de Conférences, EMP (Bordj El Bahri)
Invités	Dr. L. HADJOUT Dr. Y. OUAZIR	Maître de Conférences, USTHB Maître de Conférences, USTHB



*A mes parents, que Dieu les bénisse et les protège de tout mal*

*A mon épouse et à mon fils*

*A tous ceux qui me sont chers,*

*je dédie ce travail ...*



## *Remerciements*

Il m'est tout particulièrement difficile de trouver des mots adéquats afin d'exprimer toute ma gratitude envers le professeur Rachid Ibtouen pour sa patience, ses encouragements, son suivi, ses conseils et ses remarques très pertinentes. Ce travail de recherche n'aurait pu se faire sans son soutien. Je l'en remercie donc doublement : d'abord pour la confiance qu'il m'a témoigné en me confiant ce travail, et j'espère en avoir été digne, ensuite pour m'avoir dirigé durant toute ma formation post-graduante, magister et doctorat.

Je tiens à remercier également le professeur Omar Touhami pour avoir présidé le jury. Je n'oublierai pas l'accueil qu'il m'a toujours réservé lors de mes multiples sauts au laboratoire de recherche en électrotechnique (LRE) sis à l'ENP.

Que le Professeur Haddad Salah soit assuré de mes plus sincères remerciements pour avoir accepté de figurer dans le jury de soutenance de cette thèse. Il a pleinement participé à ma formation d'ingénieur, et il a ancré en moi les bases de la programmation Fortran. Je l'en remercie du fond du cœur.

Une autre personne qui m'a beaucoup inspiré dans ma formation d'ingénieur est le professeur Nacereddine Benamrouche. Je le remercie d'avoir accepté de figurer dans le jury de soutenance, tout en notant qu'il m'a orienté lors de ma formation de magister vers la modélisation électromagnétique des machines tournantes avec la méthode des éléments finis.

Que le docteur Abdelaziz Kheloui, Maître de conférences à l'EMP Bordj El Bahri soit assuré de ma sincère gratitude d'avoir accepté de figurer dans le jury de soutenance de cette thèse de doctorat.

Je ne puis oublier mes compagnons de fortune dans le périple de la recherche que sont les docteurs Ouazir Youcef et Larbi Hadjout. Le contact amical et scientifique que nous avons entretenu durant cette formation est un plus à ma formation. Je les en remercie vivement.

Je tiens également à remercier Smaïl Mezani et Nouredine Takorabet, Maîtres de conférences, chercheurs au sein du GREEN – INPL – UHP de Nancy (France), ainsi que le professeur Bernard Laporte, pour l'accueil qu'ils m'ont toujours réservé. Une collaboration fructueuse et amicale ont permis la concrétisation de ce travail.

Je tiens ici à remercier Docteur Said Harmim pour toute l'aide documentaire et précieuse qu'il a mise à ma disposition durant toute ma formation doctorale et les discussions intéressantes que nous avons eues ensemble.

Je n'oublierai pas de remercier le rayonnant docteur Mekhtoub Said, Maître de conférences à l'ENP Alger, pour son accueil chaleureux et pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant ma soutenance.

Une mention spéciale pour Slimane Bouazzabia, Ali Nesba, et toute l'équipe de recherche dirigée par les professeurs R. Ibtouen et O. Touhami, ainsi qu'à tous les doctorants et enseignants de l'UMMTO pour leur soutien.

Enfin, à tous ceux qui m'ont apporté de la lumière du savoir, sans exception, je tiens à les en remercier.



**ملخص** ان نمذجة الماكينات ذوات المغناطيس الدائم باستعمال طريقة العناصر المتناهية تؤدي إلى قالب كبير. و إذا أخذنا بعين الاعتبار الحركة باستعمال تقنيات إعادة التحريك الموضعي أو الشامل فإن هذا القالب يتغير باستمرار. إن تقنيات تقليل عرض الزمرة وتصغير الغلاف تسمح بتخفيض مدة حل هذا القالب. و بما أن التقنيات الموجودة لا تأخذ الحركة بعين الاعتبار فقد اعدنا تقنيتين جديتين لإعادة التقييم و قارناهما بالتقنية المرجعية المستعملة في احدث البحوث المنجزة في مجال تقليل عرض الزمرة. و تقوم هاتين الطريقتين على إعادة ترقيم عُقد التحريك بأسلوب مميز و تسمح بأداء متزايد مقارنة بالطريقة الموجودة. أما بالنسبة للماكينات ذوات المغناطيس الدائم فإن هاتين التقنيتين تحد بشكل ملموس من مدة الحل بالطرق المباشرة وهذا لكل خطوة تنقل، مما يؤدي إلى استنتاج الطابع التطوري لهاتين الطريقتين.

**الكلمات الرئيسية** الماكينة المتزامنة ذات المغناطيس الدائم، طريقة العناصر المتناهية، تقليل عرض الزمرة، تصغير الغلاف، طريقة زمرة الدوران.

**Résumé** – La modélisation électromagnétique des machines à aimants permanents avec la méthode des éléments finis introduit des systèmes matriciels larges. Dans la prise en compte du mouvement avec des techniques de remaillage local ou global, ces systèmes sont modifiés en permanence. Les techniques de minimisation de largeur de bande et de réduction du profil permettent de réduire les temps de résolution de ces systèmes. Les techniques existantes n'étant pas prévues pour tenir en compte du mouvement, nous avons élaboré deux nouvelles techniques de renumérotation que nous avons comparée à la technique de référence dans les plus récents travaux portant sur la minimisation de largeur de bande. Elles consistent à renuméroter de façon spéciale les nœuds du maillage. Les deux méthodes présentent des performances accrues par rapport à la méthode comparée, et leur application à la machine à aimants permet de réduire sensiblement pour chaque pas de déplacement les temps de résolution avec les méthodes directes. Ces techniques élaborées sont évolutives.

**Mots clés:** Machines synchrones à aimants permanents, méthode des éléments finis, minimisation de la largeur de bande, réduction du profil, méthode de la bande de roulement.

**Abstract** – Finite Element models of permanent magnet machines, introduce large sparse matrix systems. For movement consideration with local or global remeshing techniques, this matrix is modified at each step. Bandwidth minimization and profile reduction techniques makes possible to reduce time of direct resolution of these systems. The existing techniques are not designed to take into account the movement. We conceived thus, two new renumbering methods which are compared with a reference method for several and recent renumbering methods studies. They consist in renumbering in a special way the nodes of the mesh. The two methods present better results compared to the reference method, and their application to the magnet machine makes possible to reduce appreciably for each displacement step, resolution time, when using direct methods. These proposed techniques are evolutionary.

**Keywords:** Permanent Magnets Synchronous Machines, Finite elements method, bandwidth minimization, profile reduction, moving band method.



## Sommaire

Introduction générale .....	1
Chapitre I :	
Modélisation électromagnétique des machines synchrones à aimants permanents	
<b>I.1. INTRODUCTION .....</b>	<b>3</b>
<b>I.2. CALCUL DU CHAMP APPLIQUE AUX STRUCTURES ELECTROMAGNETIQUES.....</b>	<b>3</b>
<b>I.3. APPLICATION AUX MACHINES A AIMANTS PERMANENTS : .....</b>	<b>4</b>
I. 3. 1. CONDITIONS AUX LIMITES : .....	4
I. 3. 2. SOURCES DE COURANTS : .....	5
I. 3. 3 HYPOTHESES D'ETUDE : .....	5
<b>I.4. RESOLUTION AVEC LA METHODE DES ELEMENTS FINIS : .....</b>	<b>6</b>
I. 4. 1 DISCRETISATION SPATIALE PAR ELEMENTS FINIS .....	6
I. 4. 2. METHODE DES RESIDUS PONDERES : .....	8
<b>I.5. MODELISATION DES MACHINES A AIMANTS PERMANENTS : .....</b>	<b>10</b>
I. 5. 1. MODELE DES AIMANTS PERMANENTS .....	10
I. 5. 2. MODELISATION COMPLETE AVEC LA PRISE EN COMPTE DU CIRCUIT ELECTRIQUE : .....	10
I. 5. 3. CONSTRUCTION ET STOCKAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE .....	12
<b>I.6. DISCRETISATION DE L'EQUATION DE DIFFUSION .....</b>	<b>13</b>
I. 6. 1. METHODE D'INTEGRATION D'EULER : .....	13
I. 6. 2. RESOLUTION DU SYSTEME ALGEBRIQUE : .....	14
<b>I.7. MODELISATION DU MOUVEMENT DANS LES MACHINES TOURNANTES .....</b>	<b>14</b>
I. 7.1. LA LIGNE DE GLISSEMENT.....	15
I. 7. 2. LE MACRO-ELEMENT .....	15
I. 7. 3. METHODE DU DOUBLE ENTREFER .....	16
I. 7. 4. METHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE .....	17
<b>I.8. METHODE DE LA BANDE DE ROULEMENT : ETAT DE L'ART.....</b>	<b>18</b>
I. 8. 1. CONDITIONS AUX LIMITES : .....	20
I. 8. 2. MODIFICATION DES ELEMENTS DE LA BANDE DE ROULEMENT : .....	21
I. 8. 3. PRINCIPE DU PAS DE DEPLACEMENT FIXE.....	22
I. 8. 4. AUTRES METHODES .....	22
I. 8. 5. RESOLUTION NUMERIQUE DES SYSTEMES DERIVANT DE LA METHODE. ....	23
<b>I.9. CONCLUSION.....</b>	<b>23</b>
Chapitre II	
De la renumérotation à la résolution : état de l'art	
<b>II.1. INTRODUCTION .....</b>	<b>24</b>
<b>II.2. GRAPHES ASSOCIES AUX MATRICES CREUSES .....</b>	<b>24</b>
<b>II.3. LA METHODE BANDE : .....</b>	<b>25</b>
II. 3. 1. LARGEUR DE BANDE : .....	25
II. 3. 2. STOCKAGE SEMI BANDE : .....	26
II. 3. 3. RESOLUTION EN SEMIE-BANDE : .....	26
<b>II.4. LA METHODE ENVELOPPE (LIGNE DE CIEL) : .....</b>	<b>27</b>
<b>II.5. METHODES DE RENUMEROTATION DES GRAPHES : .....</b>	<b>28</b>
II. 5. 1. METHODE DE CUTHILL MAC KEE : .....	29
II. 5. 2. METHODE GPS : .....	30
II. 5. 3. AUTRES METHODES DE RENUMEROTATION DES GRAPHES : .....	33

<b>II.6. RENUMEROTATION DES MAILLAGES :</b> .....	<b>34</b>
<b>II.7. RESOLUTION DES SYSTEMES DECOULANT DES PROBLEMES MEF :</b> .....	<b>38</b>
II. 7. 1. METHODES DIRECTES :	38
II. 7. 2. METHODES ITERATIVES .....	40
II. 7. 2. 1. Méthodes de relaxation :	40
II. 7. 2. 2. Méthodes projectives :	41
II. 7. 2. 3. Préconditionnement :	41
II. 7. 2. 4. Les méthodes de Factorisation incomplète :	42
<b>II.8. CONCLUSION :</b> .....	<b>42</b>

### Chapitre III

#### Elaboration de nouvelles méthodes de renumérotation de maillages MEF

<b>III.1. INTRODUCTION</b> .....	<b>44</b>
<b>III.2. DESCRIPTION D'UN MAILLAGE :</b> .....	<b>44</b>
III. 2. 1. TABLES DE CONNECTIVITE ET DE COORDONNEES GENERALISEES :	44
III. 2. 2. TABLES ADDITIVES .....	45
<b>III.3. PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE DEDUITES DU MAILLAGE</b> .....	<b>46</b>
III. 3. 1. ELEMENTS NON NULS :	46
III. 3. 2. DEFINITIONS .....	46
III. 3. 3. LARGEUR DE BANDE ET PROFIL :	47
<b>III.4. GRAPHE ASSOCIE A LA MATRICE DE RIGIDITE</b> .....	<b>47</b>
<b>III.5. STOCKAGE EN PROFIL (OU LIGNE DE CIEL OU STOCKAGE ENVELOPPE)</b> .....	<b>48</b>
<b>III.6. METHODES DE RENUMEROTATION PROPOSEES :</b> .....	<b>48</b>
III. 6. 1. METHODE DES CONNECTIVITES :	48
III. 6. 3. METHODE DES POSITIONS GEOMETRIQUES .....	55
<b>III.7. CONCLUSION</b> .....	<b>62</b>

### Chapitre IV :

#### Application aux machines à aimants et perspectives

<b>IV.1. INTRODUCTION</b> .....	<b>64</b>
<b>IV.2. STRUCTURES DE MACHINES ETUDIEES</b> .....	<b>64</b>
<b>IV.3. POSITION DU PROBLEME.</b> .....	<b>65</b>
<b>IV.4. APPLICATION DE LA METHODE DES CONNECTIVITES</b> .....	<b>66</b>
<b>IV.5. METHODE DES POSITIONS GEOMETRIQUES</b> .....	<b>69</b>
<b>IV.6. PERSPECTIVES.</b> .....	<b>72</b>
IV. 6. 1. AMELIORATION DES PERFORMANCES DES DEUX METHODES .....	73
IV. 6. 2. ACCELERATION DES PROCESSUS DE RESOLUTION .....	74
IV. 6. 3. MODIFICATION DES MAILLAGES .....	76
<b>IV.7. CONCLUSION</b> .....	<b>77</b>

Conclusion générale.....79

Bibliographie

# INTRODUCTION GÉNÉRALE



La machine à aimants permanents a connu une évolution fulgurante depuis le début des années 80. Ce succès est essentiellement dû à la découverte d'aimants performants à haut rendement [1]. Les principales caractéristiques de ce type de machines sont représentées par sa compacité et son haut rendement. Elles représentent donc une alternative de choix dans des applications industrielles exigeantes en encombrement et en puissance. Des critères de plus en plus sévères régissent le choix de ces machines, tels les comportements vibratoires (niveaux de bruits) [2, 3, 4,5].

De par sa construction, la machine à aimants permanents se présente sous diverses formes. Ainsi, les aimants peuvent se présenter sous forme de tuiles ou de barreaux [1], ils peuvent être collés à la surface [4], insérés entre deux pièces ou tout simplement enterrés dans le rotor [7, 8]. Leur aimantation peut être tangentielle, radiale, parallèle ou tournante [9]. Leur ouverture s'étale des 2/3 du pas polaire jusqu'à occuper pratiquement tout le pôle, selon le mode d'alimentation (BDCM ou PMSM) [10]. Ils présentent des perméabilités diverses et interagissent différemment avec le milieu extérieur (corrosion) et la température. Les rotors de ces machines sont parfois équipés de cages d'écureuil pour démarrage direct sur réseau [8]. Ils peuvent aussi se présenter sous forme cylindrique (machine classique), linéaire ou discoïde. Les stators peuvent être une adaptation de stators de machines asynchrones ou synchrones. Ils peuvent être lisses (sans encoches) [11] ou à encoches spéciales (avec fausses encoches). Les enroulements peuvent se présenter sous diverses formes et les aimants peuvent se présenter sur le stator ou sur le rotor. [1]

Cette multiplicité de structures fait que la modélisation de ces machines n'est pas chose aisée. On a recours à une modélisation électromagnétique. Cette dernière repose en général sur des méthodes de discrétisation numérique [6, 12-16]. L'une des méthodes les plus utilisées en ce sens est la méthode des éléments finis [17-19]. C'est une méthode puissante qui permet d'intégrer pratiquement tous les phénomènes inhérents au fonctionnement de ces machines. Le développement de l'outil informatique est aussi une des raisons qui ont projeté les méthodes numériques au devant de la modélisation.

L'efficacité de cette méthode et la précision des résultats escomptés dépend des méthodes de discrétisation (maillage) et de résolution adoptées. Dans le cas des méthodes de résolution, des méthodes directes (Gauss, Cholesky, méthodes frontales ...) peuvent être adoptées ; des méthodes indirectes (méthodes de relaxation, gradient conjugué, méthodes de projection...) sont également adoptées. La taille des systèmes à résoudre est un critère important dans l'adoption de la méthode à utiliser [20 – 24].

Les méthodes directes présentent l'avantage certain de l'exactitude de la solution proposée. De même, les risques de divergence sont complètement éliminés. De plus, lors des résolutions, contrairement à certaines méthodes itératives, le recours à des vecteurs initiaux est inutile. Cependant, ils présentent l'inconvénient dans la lenteur de résolution des processus et dans la taille des processus de stockage [14].

Les matrices découlant de la méthode des éléments finis étant creuses, il a été proposé comme solution de réduire la largeur de bande de ces systèmes en vue d'optimiser les processus de stockage et de résolution, les nombres d'opérations requis dépendant de façon quadratique de ces données (largeur de bande) [22]. Nombre de méthodes ont été élaborées et adaptées aux maillages [25-28].

La plupart de ces méthodes découlent de la théorie des graphes. Ces méthodes sont rapides et couramment utilisées, à l'exemple de la méthode de Cuthill Mac Kee inverse (Reverse Cuthill Mac-Kee, RCM [29]). Développées depuis le milieu des années 60, ces méthodes n'ont

eu cesse de s'améliorer, et divers nouveaux algorithmes sont apparus. A l'exception de la méthode GPS (de ses auteurs, Gibbs, Poole et Stockmeyer [30]), qui a accru les performances de la méthode RCM par l'efficacité et la rapidité, les autres méthodes présentent l'inconvénient de la lenteur dans l'exécution. Elles sont plus destinées aux systèmes de faibles dimensions (<100).

Par rapport à la méthode des éléments finis, ces méthodes sont trop coûteuses. De plus, les méthodes classiques telles RCM et GPS sont plus destinées aux graphes liés aux matrices creuses quelconques. Des méthodes de renumérotation des maillages existent également, mais sont souvent destinés à des maillages particuliers, et leurs auteurs ne font aucune indication quant au coût de ces méthodes [21, 25-27, 31, 32].

Notre travail consiste donc à élaborer des nouvelles méthodes de renumérotation des maillages induits par des structures de machines à aimants permanents (structures cylindriques) pouvant inclure avec un moindre coût des méthodes de prise en considération du mouvement (telles les méthodes de remaillage, de la bande de mouvement ou encore de la ligne de glissement). Ces méthodes sont appliquées à deux types de structures de machines à aimants (structure à aimants permanents collés à la surface et structure de machine à aimants enterrés dans le rotor avec cage d'écureuil). Dans un premier temps, une évaluation des performances de ces méthodes comparées avec la méthode de référence (méthode GPS) est faite. L'application de la méthode de la bande de roulement avec remaillage local de l'entrefer et renumérotation globale à chaque pas est également étudiée.

Nous avons donc jugé utile de présenter cette étude sous quatre chapitres :

Le chapitre premier porte sur les fondements de la modélisation des machines à aimants avec la méthode des éléments finis. Un intérêt particulier est porté aux méthodes de prise en considération du mouvement, et spécialement avec la méthode de la bande de roulement.

En chapitre II, une étude de l'art sur les méthodes de renumérotation est présentée. Le lien entre les coûts des méthodes de résolution et les largeurs de bande et du profil est donné. Des méthodes de renumérotation des graphes y sont explicitement présentées, à l'exemple de la méthode RCM et de la méthode GPS. Des travaux sur la renumérotation des graphes sont également présentés. Le chapitre se termine par un résumé sommaire sur les méthodes de résolution directes et indirectes et l'influence de la renumérotation sur leurs performances.

Le troisième chapitre porte sur l'étude des maillages. Nous avons élaboré deux méthodes de renumérotation originales : une méthode basée exclusivement sur les connectivités des nœuds (que nous avons appelée méthode des connectivités) et une autre exclusivement sur les positions géométriques des nœuds (appelée méthode des positions géométriques). Des comparaisons avec les résultats de la méthode GPS sur des formes arbitraires est présentée (performances, rapidité).

Le quatrième et dernier chapitre porte sur l'application de ces méthodes sur deux types de machines à aimants : une machine à pôles lisses et une machine à aimants enterrés. Deux types de maillage sont également étudiés : un maillage type Delaunay et un maillage régulier. Dans le cas des deux machines, nous appliquons la méthode de la bande de roulement pour une rotation complète afin de déterminer les coûts et la stabilité de ces méthodes. Une comparaison des temps de résolution Cholesky entre les trois méthodes (les deux proposées et la méthode GPS) est également faite. Ce chapitre se termine par une projection sur l'évolutivité de ces méthodes puisqu'elles ne sont qu'à leur état primaire.

Une conclusion générale clôt notre étude.

## *Chapitre I*

# MODÉLISATION ELECTROMAGNÉTIQUE DES MACHINES SYNCHRONES A AIMANTS PERMANENTS AVEC LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



## I.1. Introduction

La méthode des éléments fins représente l'une des méthodes les plus utilisées dans la modélisation électromagnétique des machines électriques tournantes. C'est une méthode qui permet d'intégrer diverses méthodes de prise en compte de phénomènes inhérents au fonctionnement de ces machines, telles la structure réelle (non simplifiée), le phénomène de saturation magnétique, les couples pulsatoires dus à un entrefer variable, le mouvement relatif des parties statoriques et rotoriques.

Cependant, la méthode est tributaire pour la précision des résultats escomptés de la finesse de la discrétisation et du type d'éléments utilisés. Le coût dans l'exécution des calculs est aussi un paramètre important dans la réalisation des programmes.

Dans ce qui suit nous présentons de façon brève la méthode des éléments finis, son application à la modélisation couplée des équations des circuits électriques et magnétiques. Un bref aperçu sur les méthodes de prise en compte du mouvement est également donné. Nous nous arrêterons sur la méthode de la bande de roulement, ainsi que les divers problèmes numériques qu'elle induit.

## I.2. Calcul du champ appliqué aux structures électromagnétiques

La représentation du champ magnétique dans une machine électrique est un problème qui ne peut être posé qu'en 3-D. Cependant, considérant l'hypothèse d'une longueur longue du rotor par rapport au diamètre, le problème peut être ramené en 2-D, avec effets d'extrémités négligés. Cela suppose donc que le champ magnétique ne varie que suivant le plan (x,y) perpendiculaire à l'axe de l'arbre et que les courants sont suivant l'axe oz.

Partant de l'équation de conservation de flux :

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0 \quad (\text{I-1})$$

Il existe donc au moins un vecteur  $\vec{A}$ , appelé vecteur potentiel magnétique tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{I-2})$$

Ce vecteur est unique en posant une condition de Jauge, comme la jauge de Coulomb :

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{A} = 0 \quad (\text{I-3})$$

Les vecteurs induction magnétique  $\vec{B}$  et champ magnétique  $\vec{H}$  étant contenus dans le plan de l'étude, on peut choisir alors un vecteur  $\vec{A}$  n'ayant qu'une seule composante suivant l'axe de la machine. Cette composante ne dépend que des coordonnées x, y et du temps t.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-4})$$

De l'équation (I-2), on tire :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial y} \\ -\frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-5})$$

En absence de courants de déplacement, le champ magnétique est régi par le théorème d'Ampère comme suit :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_0 \quad (\text{I-6})$$

Avec l'équation de milieu magnétique  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , nous obtenons :

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J}_0 \quad (\text{I-7})$$

Considérant la loi de Lenz-Faraday avec la loi d'Ohm (I-8) et (I-9)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) \quad (\text{I-8})$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad (\text{I-9})$$

Associée à la condition de Jauge (I-3), (I-7) devient :

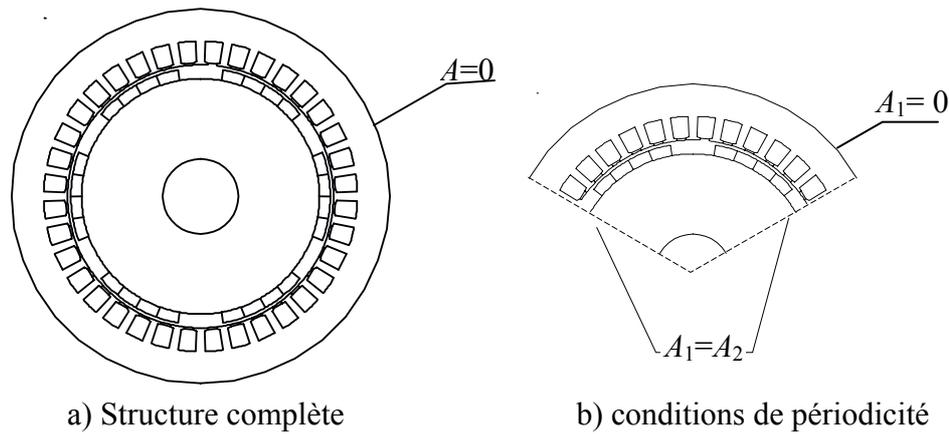
$$\Delta A - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} A = -\mu J_0 \quad (\text{I-10})$$

Les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{J}_0$  (courant de source) n'étant représentés que par une seule composante (selon oz), ils sont dès lors assimilés à des scalaires.

### I.3. Application aux machines à aimants permanents

#### I. 3. 1. Conditions aux limites

Un problème de calcul de champ magnétique n'est entièrement posé que si les conditions aux contours du domaine d'étude sont complètement définies. Dans le cas des machines tournantes, deux cas peuvent se présenter selon le domaine d'étude (fig. I. 1.) :



a) Structure complète

b) conditions de périodicité

**Fig. I. 1.** Conditions aux limites sur une machine tournante.*a) l'étude se fait sur une partie de la machine*

Dans ce cas deux types de conditions aux limites se présentent :

- Condition de Dirichlet : Appliquée à la limite externe de la machine ( $A = 0$ ). On suppose dans ce cas que nous n'avons aucune ligne de fuite à la surface externe de la machine (tout le flux magnétique se concentre dans le noyau magnétique de la machine)

- Condition de périodicité ou d'anti-périodicité : la machine est généralement coupée sur un pôle ou deux. Dans le premier cas, sur le premier plan de coupe, on trouve le même potentiel que dans le second plan de coupe ajouté du signe. La même chose se présente dans le cas de l'étude sur deux pôles (une période) sauf que les valeurs aux deux plans de coupe doivent présenter l'égalité (voir figure I.1.2), ceci dans le cas des machines synchrones. Cependant pour certains types de machines ou il y a une certaine dissymétrie de construction (nombre de pôles au stator différent de celui du rotor, cas des MRV, ou bien différence de nombre de dents stator et rotor, comme la machine asynchrone, ou bien encore dans le cas des enroulements fractionnaires), les plans de coupe sont difficiles à envisager. L'étude de la construction complète est envisagée.

*b) l'étude se fait sur toute la machine*

Dans ce cas, le domaine d'étude est plus important ce qui engendre un temps de résolution plus important. Cependant, il présente pour avantage de poser des conditions aux limites simples : condition  $A = 0$  sur le contour externe de la machine (figure I.1.b).

**I. 3. 2. Sources de courants**

Ils se présentent sous deux formes : des courants directement appliqués avec une source de courant, où résultant d'une alimentation avec une source de tension à partir d'un circuit électrique, localisés dans les conducteurs de l'inducteur, et les courants équivalents des aimants placés dans les machines à aimants permanents.

**I. 3. 3 Hypothèses d'étude**

Dans la modélisation des machines synchrones à aimants, des hypothèses simplificatrices sont souvent introduites et sont comme suit :

1 - Les effets d'extrémités sont négligés (le problème est en 2-D). Il est à noter toutefois que dans le circuit électrique, l'inductance des extrémités des bobines sont prises en compte.

2 - Le stator des moteurs étudiés est généralement constitué de tôles feuilletées qui empêchent la circulation de courants induits suivant l'axe de la machine. La conductivité électrique est donc considérée nulle au niveau de la culasse statorique.

3 - La densité de courant  $J_s$  dans les enroulements de l'induit est supposée uniformément répartie. Cette densité est imposée par l'onduleur de tension contrôlé en courants alimentant la structure étudiée. Elle est déterminée par les caractéristiques de la structure étudiée (bobinage, courants, forme des encoches...). Pour une encoche de section  $S$  comportant  $N$  conducteurs et traversée par un courant instantané de valeur  $i(t)$ , elle s'écrit ainsi :

$$J_s = \frac{Ni(t)}{S} \quad (\text{I-11})$$

Dans la pratique, afin d'uniformiser la répartition spatiale de la densité de courant sur la section, les bobines statoriques sont constituées de conducteurs finement subdivisés. De plus, pour éviter les éventuels déséquilibres des forces électromotrices induites dans les différents conducteurs, ceux-ci sont transposés de manière à occuper toutes les positions dans les encoches.

4 – Les pertes dues au phénomène hystérésis sont négligées.

#### **I.4. Résolution avec la méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis est actuellement l'une des méthodes de résolution numérique les plus utilisées dans le calcul du champ dans les structures électromagnétiques [14]. Développée depuis le début des années quarante [33], elle est devenue avec le développement de l'outil informatique l'un des outils les plus puissants dans la conception assistée par ordinateur des structures électromagnétiques [19]. Les premières applications dans ce domaine reviennent à P. Silvester et M.V.K. Chari [18, 34].

La méthode consiste à transformer une équation aux dérivées partielles en un système d'équations linéaires. Cela se fait par discrétisation du domaine d'étude. L'équation aux dérivées partielles (EDP) est résolue dans chaque sous domaine afin de générer des équations liées à chacun de ces sous domaines. Un assemblage de ces équations, prenant compte des conditions aux limites ainsi que des caractéristiques des milieux considérés et des sources de courants est réalisé. Le système algébrique final est résolu avec des méthodes numériques.

La plupart des premiers codes MEF utilisaient des méthodes directes [19]. Ces méthodes offrent pour avantage certain la robustesse et la stabilité. Aucune erreur d'arrondi ou d'estimation n'existe et la solution proposée est exacte.

Cependant, avec les systèmes de grande taille tels les problèmes 3D, ou le stockage réservé aux méthodes directes est insuffisant, ces méthodes sont de plus en plus supplantées par des méthodes itératives particulièrement adaptées aux problèmes éléments finis, découlant presque toutes des méthodes projectives des espaces de Krylov.

##### **I. 4. 1 Discrétisation spatiale par éléments finis**

Le domaine d'étude est subdivisé en un nombre déterminé d'éléments dits finis de formes prédéfinies [17]. Dans le cas du calcul du champ dans les structures électromagnétiques, les éléments de forme triangulaire sont les plus utilisés. Cette subdivision exclusivement triangulaire du premier ordre a l'avantage de s'adapter à toute configuration géométrique et permet de traiter des expressions simples.

Chaque triangle est repéré par ses trois sommets. Une fonction d'approximation liée à ces éléments est construite et représente la valeur du potentiel  $A$  dans tout l'élément. A chaque élément, une fonction d'interpolation est construite de même forme mais qui ne dépend que des coordonnées géométriques des nœuds de l'élément. Dans chaque élément, le potentiel vecteur magnétique est approché par un polynôme du premier degré en  $x$  et  $y$  sous la forme :

$$A(x, y, t) = a + b x + c y \quad (\text{I-16})$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des coefficients qui dépendent des coordonnées des sommets du triangle et des potentiels correspondants. Cette interpolation est dite polynomiale.

De l'équation (I. 16), nous constatons que l'induction est constante à l'intérieur de chaque élément et par conséquent, la perméabilité magnétique l'est également, ce qui facilite l'intégration analytique.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = c \vec{i} - b \vec{j} \quad (\text{I-17})$$

Le potentiel en tout point de l'élément est parfaitement défini à partir des valeurs des potentiels en ses trois sommets, la relation (I. 16) peut s'écrire ainsi :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (\text{I-18})$$

Ce système devient, avec  $S_e$  section de l'élément triangulaire:

$$A(x, y, t) = \frac{1}{2S_e} \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_2 - x_3) & (x_3 - x_1) & (x_1 - x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I-19})$$

Nous avons ainsi défini une approximation nodale du potentiel  $A$ . l'approximation s'écrit désormais :

$$\tilde{A}(x, y, t) = \sum_1^3 N_i(x, y) A_i(t) \quad (\text{I-20})$$

En écriture matricielle, cette relation peut se mettre sous la forme:  $\tilde{A} = \langle N \rangle \{ A_e \}$  où  $\langle N \rangle$  est un vecteur ligne dont les composantes sont les fonctions d'interpolation (fonctions de forme)  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et  $\{ A_e \}$  est un vecteur colonne dont les composantes sont les potentiels vecteurs magnétiques aux nœuds  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Afin d'assurer la continuité de la variable d'étude, qui est dans notre cas le potentiel vecteur magnétique, entre éléments adjacents, les fonctions de forme doivent vérifier les conditions suivantes [20] :

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i=j) \\ 0 & \text{si } (i \neq j) \end{cases} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{I-21})$$

Tous calculs faits et en désignant par  $i, k, l$  toute permutation circulaire des indices 1, 2, 3 assignés dans le sens trigonométrique, ces fonctions s'écrivent sous la forme suivante [35] :

$$N_i = \frac{P_i + Q_i x + R_i y}{2S_e} \quad (\text{I-22})$$

Les paramètres  $P_i$ ,  $Q_i$ ,  $R_i$  et  $S_e$ , intervenant dans l'équation (I-22) sont des fonctions des coordonnées des nœuds :

$$P_i = x_k y_l - x_l y_k$$

$$Q_i = y_k - y_l \quad (\text{I-23})$$

$$R_i = x_l - x_k$$

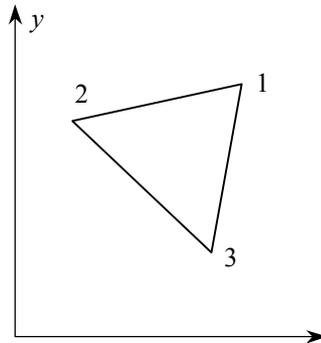
$$S_e = \frac{1}{2}(P_i + P_k + P_l) \quad (\text{I-24})$$

Les composantes du gradient du potentiel vecteur magnétique sont obtenues comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I-25})$$

Avec la matrice  $[D]$  comme opérateur de dérivation et définie comme suit :

$$[D] = \frac{1}{2S_e} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-26})$$



**Fig. I. 2** Élément fini à 3 nœuds

L'opérateur dérivation est donc assimilé directement à une matrice. Tout le problème réside maintenant dans la transformation de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre en une intégrale du premier ordre. Certains auteurs [17] utilisent la formulation intégration par parties dite faible.

#### I. 4. 2. Méthode des résidus pondérés

On appelle résidu la quantité :

$$R(A) = \mathcal{L}(A) + f_v \quad (\text{I-27})$$

où  $\mathcal{L}$  est l'équation aux dérivées partielles à résoudre, et  $f_v$  la valeur de  $A$  aux limites du domaine d'étude. La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher les fonctions  $(A)$  qui

annulent la forme intégrale pour toute fonction de pondération  $\psi$  dans tout le domaine d'étude ( $\Omega$ ). Nous reproduisons ici la formulation intégrale de l'équation de diffusion :

$$W(A) = \int_{\Omega} \psi R(A) d\Omega = \int_{\Omega} \psi(x, y) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} A + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} A + \mu J_0 \right) d\Omega = 0 \quad (I-28)$$

Cette équation comporte trois termes : un Laplacien, un terme de diffusion et un terme source. Le Laplacien est intégré avec une forme faible qui permet d'éliminer la dérivée seconde et de la remplacer par une dérivée première plus simple à développer.

$$W_1(A) = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) d\Omega + \int_s \psi(x, y) \frac{\partial A}{\partial n} ds \quad (I-29)$$

La condition de NEUMANN implicite permet d'éliminer le deuxième terme

$$W_2(A) = \int_{\Omega} \psi(x, y) \left( - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} A \right) d\Omega \quad (I-30)$$

Le terme source est comme suit :

$$W_3(A) = \int_{\Omega} \psi(x, y) \mu J_0 d\Omega \quad (I-31)$$

La forme intégrale finale est donnée comme suit :

$$W(A) = W_1(A) + W_2(A) + W_3(A) \quad (I-32)$$

Le choix de la fonction de pondération  $\psi$  est crucial pour la suite du raisonnement. La méthode de Galerkin propose d'assimiler cette fonction à la fonction d'approximation de  $A$  dans l'élément fini.

L'intégration des trois termes sur un élément donne ce qui suit :

$$W_1^e = -[K_e] \{A(t)\}_e \quad (I-33)$$

où  $[K_e]$  est la matrice rigidité (stiffness matrix), dont les termes sont donnés comme suit :

$$[K_e] = S_e [D]^T [D] \quad (I-34)$$

Le terme de diffusion devient :

$$W_2^e = -\mu_e \sigma_e [T_e] \left\{ \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\}_e$$

Avec :

$$[T_e] = \frac{S_e}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (I-35)$$

Et enfin le vecteur sollicitation

$$W_3 = \mu_e [Q_e] J_e \quad (I-36)$$

$$[Q_e] = \frac{S_e}{3} (1 \ 1 \ 1)^t \quad (I-37)$$

La forme finale est donnée comme suit :

$$W_e = - \sum_{i=1}^3 \frac{W_i^e}{\mu_e} = 0 \quad (I-38)$$

## I.5. Application à la modélisation des machines à aimants permanents

### I. 5. 1. Modèle des aimants permanents

Le terme (I-36) n'est valable que dans le cas des courants appliqués constants, tels les courants statoriques. Dans le cas des aimants permanents, les courants appliqués sont des courants équivalents à la magnétisation des aimants, et dépendront donc de l'intensité de l'aimantation de ces aimants ainsi que de leur orientation.

$$I_{i,j,k} = \frac{1}{2} H_c (c_{i,j,k} \cos \theta - b_{i,j,k} \sin \theta) \quad (I-39)$$

Où  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  désignent progressivement la projection du vecteur aimantation rémanente  $M$  sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ .

Avec  $M = -\nu_r H_c \quad (I-39)$

Les valeurs  $I_i$  sont directement injectées sur les nœuds du triangle. De même, nous avons :

$$c_{\substack{i \\ j \\ k}} = x_{\substack{k \\ i \\ j}} - x_{\substack{j \\ k \\ i}} \quad \text{et} \quad b_{\substack{i \\ j \\ k}} = y_{\substack{k \\ j \\ i}} - y_{\substack{j \\ k \\ i}} \quad (I-40)$$

et on procède par circulation pour les autres facteurs.

### I. 5. 2. Modélisation avec prise en compte du circuit électrique

Nombre de travaux traitent de la modélisation électromagnétique des machines synchrones à aimants permanents en vue d'une résolution par éléments finis [4, 36-38] et faisant intervenir un couplage fort des équations magnétique et électrique.

Les trois enroulements d'une machine synchrone sont assimilés à un circuit RL et l'équation qui les régit est de la forme suivante :

$$V_s = R i_s + L \frac{d i_s}{dt} + e \quad (I-41)$$

$R$  représente la résistance d'une phase de l'induit,  
 $L$  l'inductance d'extrémités de bobine et  
 $e$  la f.e.m induite au niveau de chaque enroulement.  
 $i_s$  représente le courant statorique relatif à une phase.

La f.e.m peut être représentée comme suit :

$$e = \frac{\ell}{S} \left( \iint_{\Omega^+} \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega - \iint_{\Omega^-} \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega \right) \quad (\text{I-42})$$

Avec  $\ell$  la longueur d'induit,  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  les encoches aller et retour des enroulements, et  $S$  la surface de ces encoches.

Pour des courants imposés, la densité de courant est celle définie en (I-11). L'équation matricielle dans ce cas s'écrit :

$$v [K] \{A\} - J_0 \{Q\} = 0 \quad (\text{I-43})$$

où  $v$  est la réductivité magnétique ( $1/\mu$ )

Dans le cas des matériaux laminés et des régions de l'entrefer (absence de courants), nous avons :

$$v [K] \{A\} = 0 \quad (\text{I-44})$$

Pour les aimants permanents, nous avons :

$$v [K] \{A\} = \frac{1}{2} \{c_{i,j,k} M_x - b_{i,j,k} M_y\} \quad (\text{I-45})$$

Pour les parties conductrices (cage d'écureuil, par exemple), l'équation à construire est de la forme suivante :

$$v[K]\{A\} + \sigma[T] \frac{\partial}{\partial t} \{A\} = 0 \quad (\text{I-46})$$

Et enfin pour le circuit électrique, nous avons :

$$V_s = \frac{\ell}{S} \left( \iint_{\Omega^+} N_i \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega - \iint_{\Omega^-} N_i \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega \right) + R i_s + L_\sigma \frac{di_s}{dt} \quad (\text{I-47})$$

Qui se traduit par :

$$V_s = \frac{\ell}{S} \left( \left( \{Q\} \frac{\partial}{\partial t} \{A\} \right)_{\Omega^+} - \left( \{Q\} \frac{\partial}{\partial t} \{A\} \right)_{\Omega^-} \right) + R i_s + L_\sigma \frac{di_s}{dt} \quad (\text{I-48})$$

Nous pouvons tout regrouper dans une même équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} v[K] & \left( \frac{\{Q\}}{S} \right) \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{A\} \\ i_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell \left( \frac{\{Q\}}{S} \right) & 0 \\ \sigma[T] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial t} \\ \frac{\partial i_s}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_s \\ 0 \\ \frac{v}{2} (M_x c_i - M_y b_i) \end{pmatrix} \quad (\text{I-49})$$

Le système global devient donc pour l'ensemble de la machine :

$$\begin{pmatrix} v[K] & \left( \frac{\{Q\}}{S} \right) \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{A\} \\ i_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell \left( \frac{\{Q\}}{S} \right) & 0 \\ \sigma[T] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial t} \\ \frac{\partial i_s}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2} (M_x c_i - M_y b_i) \\ V_s \end{pmatrix} \quad (\text{I-50})$$

Dans un régime magnétostatique, le système peut être résumé simplement par cette équation (on suppose que les courants sont constants) :

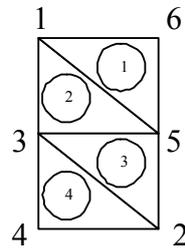
$$v[K]\{A\} = -\left(\frac{\{Q\}}{S}\right) i_s + \frac{v}{2}(M_x c_i - M_y b_i) \quad (\text{I-51})$$

Qu'on peut résumer par :

$$[G]\{A\} = \{F\} \quad (\text{I-52})$$

### I. 5. 3. Construction et stockage de la matrice de rigidité

La nature de la matrice de rigidité est liée à la numérotation des nœuds du maillage. Chaque matrice élémentaire est stockée dans la matrice globale selon le numéro des nœuds et l'ordre de ces nœuds. Soit l'exemple développé ci-après :



**Fig. I. 3.** Exemple de maillage

La matrice élémentaire de chaque élément est stockée par ajout à la matrice globale qui est dans ce cas de dimension  $6 \times 6$ . Définissons la matrice élémentaire liée à l'élément 1 de circulation des nœuds (connectivité) :  $6 - 1 - 5$ .

$$k^e = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{I-53})$$

Le stockage de l'élément 1 dans la matrice globale est donc comme suit :

$$[K] = \begin{pmatrix} k_{22}^1 & & & & k_{23}^1 & k_{21}^1 \\ & \times & & & & \\ & & \times & & & \\ & & & \times & & \\ k_{32}^1 & & & & k_{33}^1 & k_{31}^1 \\ k_{12}^1 & & & & k_{13}^1 & k_{11}^1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-54})$$

La distance maximale sur une ligne entre un élément diagonal et le dernier élément est donc celui donné par l'écart maximal des numéros des nœuds liés aux éléments. Cette particularité est intéressante pour l'étude de l'optimisation des maillages.

La matrice  $[G] = v[K]$  est dite matrice globale ou matrice de rigidité (stiffness matrix). Elle a la particularité d'être largement creuse, symétrique et définie positive. La résolution de ce type de systèmes d'équations a induit une branche de la méthode qui s'occupe exclusivement du développement d'outils de résolution des équations dérivant de la méthode des éléments finis.

## I.6. Discrétisation de l'équation de diffusion

### I. 6. 1. Méthode d'intégration d'Euler

Pour un régime dynamique, et pour une alimentation de la machine avec des tensions imposées, l'équation se résout dans le cas du couplage fort, et dans le cas d'une discrétisation temporelle, avec la méthode d'intégration d'Euler qui se formule comme suit :

$$\beta \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t} + (1-\beta) \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^t = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (\text{I-55})$$

La valeur du paramètre  $\beta$  détermine la nature du schéma de discrétisation :

1. Schéma d'Euler explicite ou de différences finies décentrées à gauche correspond à  $\beta=0$ .
2. Schéma d'Euler implicite  $\beta=1$  ou de différences finies décentrées à droite correspond à  $\beta=1$ .
3. Schéma d'Euler semi-implicite correspond à  $0 < \beta < 1$ . La valeur particulière  $\beta=1/2$  correspond au schéma de Crank- Nicholson ou de différences finies centrales.

Le schéma d'Euler implicite est le schéma le plus utilisé, étant celui qui converge le mieux [36].

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t} = \frac{\{u\}^{t+\Delta t} - \{u\}^t}{\Delta t} \quad (\text{I-56})$$

Dans ce cas le système (I-50) devient :

$$\left( \begin{array}{c} \nu[K] \\ 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \\ R \end{array} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left( \begin{array}{cc} \sigma[T] & 0 \\ \ell \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \end{array} \right) & L_\sigma \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} A \\ i_s \end{array} \right)^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \begin{array}{cc} \sigma[T] & 0 \\ \ell \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \end{array} \right) & L_\sigma \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} A \\ i_s \end{array} \right)^t + \left( \begin{array}{c} \frac{\nu}{2} (M_x c_i - M_y b_i) \\ V_s \end{array} \right)^t \quad (\text{I-57})$$

d'où :

$$\left( \begin{array}{cc} \nu[K] + \frac{\sigma[T]}{\Delta t} & \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \end{array} \right) \\ \frac{\ell}{\Delta t} \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \end{array} \right) & R + \frac{L_\sigma}{\Delta t} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} A \\ i_s \end{array} \right)^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \begin{array}{cc} \sigma[T] & 0 \\ \ell \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \end{array} \right) & L_\sigma \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} A \\ i_s \end{array} \right)^t + \left( \begin{array}{c} \frac{\nu}{2} (M_x c_i - M_y b_i) \\ V_s \end{array} \right)^t \quad (\text{I-58})$$

Pour obtenir une symétrie de la matrice de gauche, on multiplie les termes de la deuxième ligne par le terme  $\frac{\Delta t}{\ell}$

$$\left( \begin{array}{cc} \nu[K] + \frac{\sigma[T]}{\Delta t} & \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \end{array} \right) & \frac{\Delta t}{\ell} \left( R + \frac{L_\sigma}{\Delta t} \right) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} A \\ i_s \end{array} \right)^{t+\Delta t} = \left( \begin{array}{cc} \frac{\sigma[T]}{\Delta t} & 0 \\ \left( \begin{array}{c} \{Q\} \\ S \end{array} \right) & \frac{1}{\ell} L_\sigma \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} A \\ i_s \end{array} \right)^t + \left( \begin{array}{c} \frac{\nu}{2} (M_x c_i - M_y b_i) \\ \frac{\Delta t}{\ell} V_s \end{array} \right)^t \quad (\text{I-59})$$

Cette équation, dans le cas où toutes les conductivités dans la machine sont supposées nulles, ce qui est un cas spécial pour le fonctionnement des machines synchrones à aimants, donne :

$$\begin{pmatrix} (v[K]) & \left(\frac{\{Q\}}{S}\right) \\ \left(\frac{\{Q\}}{S}\right) & \frac{\Delta t}{\ell} \left(R + \frac{L_\sigma}{\Delta t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A)^{t+\Delta t} \\ (i_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \left(\frac{\{Q\}}{S}\right) & \frac{1}{\ell} L_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A)^t \\ (i_s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{v}{2} (M_x c_i - M_y b_i) \\ \frac{\Delta t}{\ell} V_s \end{pmatrix} \quad (\text{I-60})$$

La matrice  $[G]$  se retrouve sur la matrice de gauche de l'équation

### I. 6. 2. Résolution du système algébrique :

La résolution du système donné en (I-60) se fait généralement par décomposition en blocs[14, 22]. A chaque pas de calcul, les termes de droite sont connus avant chaque itération :

$$\begin{pmatrix} B & V \\ V^T & \bar{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{I-61})$$

$B$  est une matrice creuse alors que les autres matrices ( $V$  et  $\bar{C}$ ) sont des matrices pleines. La factorisation de ce type de matrice est comme suit :

$$[L] = \begin{pmatrix} L_B & 0 \\ W^T & L_C \end{pmatrix} \quad (\text{I-62})$$

Où  $L$  est la triangulaire inférieure découlant de la factorisation.

$L_B$  résulte de la factorisation de la matrice  $B$  et  $L_C$  de la factorisation de la matrice suivante :

$$C = \bar{C} - V^T B^{-1} V$$

Et 
$$W = L_B^{-1} V$$

La méthode suivante est adoptée :

- 1 – Factoriser la matrice  $B$  en  $L_B L_B^T$
- 2 – Résoudre le système triangulaire suivant :  $L_B W = V$
- 3 – Construire le système  $C = \bar{C} - W^T W$
- 4 – Factoriser  $C$  en  $L_C L_C^T$

La matrice de rigidité ( $B$  dans ce système) est le système le plus important. Nous voyons que pour la factorisation, les étapes 1 et 2 sont les plus importantes et les plus coûteuses. L'étape 3 est un produit matriciel, et l'étape 4 est une factorisation d'une matrice (3 x 3) dans le cas d'un enroulement triphasé.

La renumérotation de la matrice de rigidité qui dépend exclusivement de la numérotation du maillage est donc un facteur important dans le coût de la résolution.

## I.7. Modélisation du mouvement dans les machines tournantes

Plusieurs techniques ont été mises au point afin de tenir compte du mouvement dans le cas de problèmes dynamiques. Ces techniques diffèrent selon qu'il s'agisse de modéliser l'entrefer par la méthode des éléments finis ou enfin par les méthodes hybrides (MDF – MEF).

Parmi les tentatives de prise en compte du mouvement dans le cas d'une modélisation par éléments finis, nous retenons :

- La ligne de glissement;
- Le macro-élément;
- La méthode du double entrefer
- La continuité par les multiplicateurs de Lagrange.
- Et enfin la bande de roulement;

### I. 7.1. La Ligne de glissement

La ligne de glissement est une technique à topologie variable. Dans cette topologie (Fig. I. 4), les maillages du rotor et du stator sont réalisés indépendamment l'un de l'autre. Ils sont liés par l'intermédiaire de la ligne de rotation. Ainsi, le mouvement du rotor ne provoque pas la distorsion des éléments discrétisant l'entrefer. Cette technique est donc de mise en œuvre aisée. Cependant, pour faire coïncider les nœuds des subdivisions des régions, rotor et stator, au niveau de la ligne de rotation pour chacune des positions relatives du stator et du rotor, le déplacement de ce dernier doit se faire par pas fixe de valeur  $\theta = \pi/n$  (avec  $n$  nombre de nœuds sur la ligne de glissement). Les pas d'intégration doivent donc être faits sur des déplacements multiples de  $\theta$ . Cette méthode présente donc l'inconvénient de donner lieu à un déplacement discontinu du rotor.

L'inconvénient majeur de la méthode se trouve pour les simulations à vitesse variable où la méthode ne peut être appliquée [39]. A vitesse constante, le nombre de nœuds de la surface de glissement décide du pas de simulation  $\Delta t$ , et varie avec la vitesse, ce qui induit des contraintes numériques importantes. La méthode est donc limitée pour un fonctionnement à vitesse constante ou faiblement variable pour les grandes vitesses.

Une méthode hybride ligne de glissement – bande de roulement est proposée en [40] pour pallier aux problèmes de vitesse. Pour les faibles vitesses, la méthode de la bande de roulement est utilisée, et pour les grandes vitesses la méthode de la ligne de glissement est adoptée.

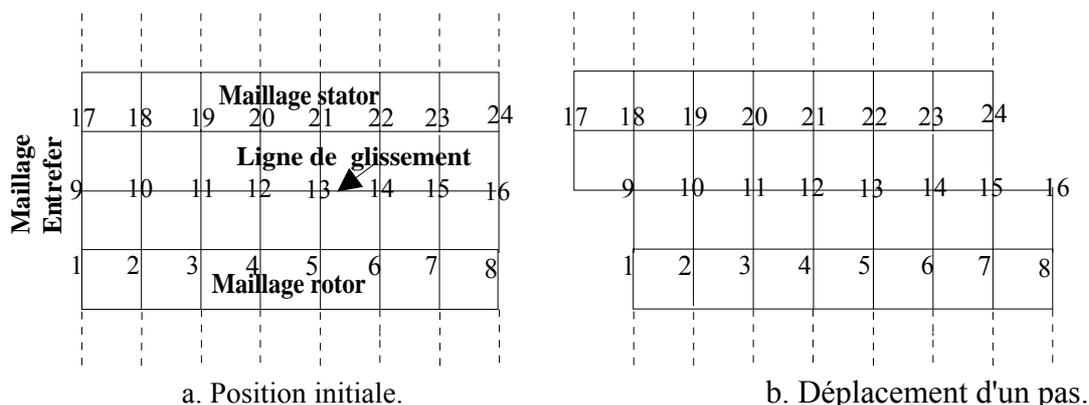


Fig. I. 4 Topologie variable.

### I. 7. 2. Le Macro-Elément

Dans [41], les auteurs ont conçu un élément fini particulier intitulé Macro-Elément (ME). Celui-ci est constitué de la partie de largeur uniforme de l'entrefer (PLUE) et permet de tenir compte automatiquement du mouvement du rotor. Dans cette méthode, l'entrefer n'est pas maillé et la solution y est déterminée analytiquement en résolvant l'équation de Laplace par la méthode de séparation des variables. Ainsi, la solution est représentée par une série de Fourier. Le ME est représenté par sa matrice de raideur qu'il faut assembler avec les matrices issues des éléments finis classiques subdivisant les régions rotor et stator. Cette méthode donne de très bons résultats. Toutefois, le temps de calcul utilisé dans la résolution du système algébrique est approximativement deux fois plus élevé dans le cas d'utilisation du ME que dans celui de la subdivision de la PLUE en éléments finis classiques. Ceci est dû à l'augmentation de la taille de la matrice du système car la matrice de raideur du ME est pleine.

Une version analogue au ME, consiste à coupler, sur les bords de l'entrefer, la solution analytique avec la résolution par éléments finis, [42]. La contrainte de couplage est le champ tangentiel. Cela permet un gain appréciable en temps de résolution. En effet, le système d'équations final, dont la dimension est égale au nombre de nœuds plus quatre fois le rang de l'harmonique supérieur de la série de Fourier utilisée pour la solution analytique, conduit à une matrice bande et symétrique. Ce procédé ne peut être généralisé car il est pratiquement impossible de trouver une solution analytique de l'équation de Laplace pour des géométries complexes de l'entrefer.

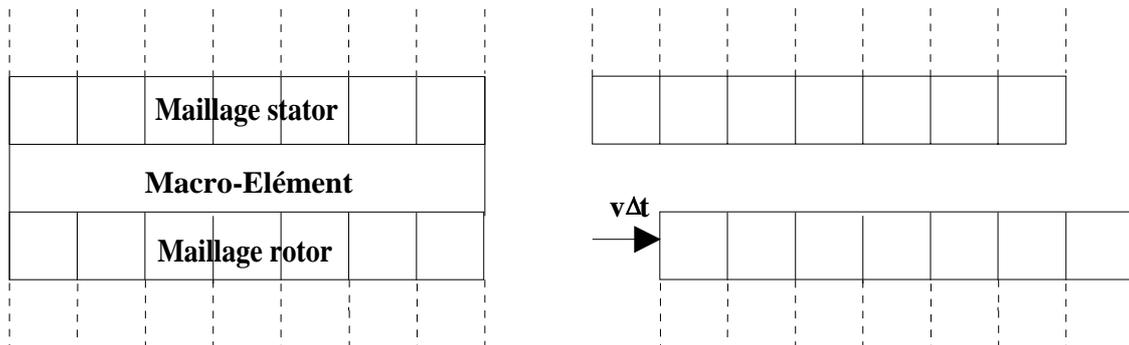
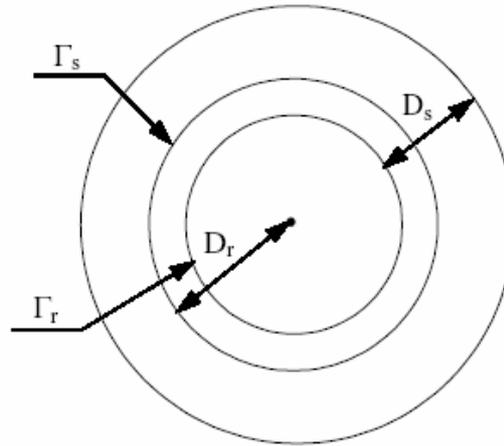


Fig. I. 5. Méthode du Macro-Elément

### I. 7. 3. Méthode du double entrefer

Dans les différentes techniques vues jusqu'ici, le champ électromagnétique est déterminé à chaque étape pour l'ensemble de la machine. Les maillages étant attachés séparément à chacun des domaines, la connexion des potentiels vecteurs dans l'entrefer fait appel à différentes techniques. Ces méthodes qualifiées de méthodes temporelles par opposition aux méthodes fréquentielles sont très performantes mais présentent l'inconvénient d'imposer des pas de temps très courts pour prendre en compte les effets de dentures ; les temps de calculs sont donc très longs. La méthode du double entrefer avec approximation du premier harmonique d'espace proposée par B. Laporte et développée au GREEN, est une alternative fort intéressante car elle conduit à des temps de calculs moins importants [43-46].



**Fig. I. 6.** Domaine d'étude: méthode du double entrefer

Dans cette méthode, seul l'harmonique principal du champ calculé dans le domaine du stator sert de source au calcul rotorique et réciproquement. Dans la pratique, on utilise deux domaines de résolution séparés (stator  $D_s$  et rotor  $D_r$ ), chacun d'entre eux comprend l'entrefer, Fig.I.6. Le procédé alterné de Schwartz consiste à utiliser de manière itérative la solution dans  $D_s$  sur  $G_s$  pour obtenir la solution dans  $D_r$  puis la solution dans  $D_r$  sur  $G_r$  pour obtenir la solution dans  $D_s$  ; la méthode imaginée tronque les solutions sur les bords de l'entrefer en les remplaçant par leur harmonique d'espace principal pour servir de source au problème faisant face. Dans le cas linéaire, il suffit de calculer trois problèmes élémentaires pour obtenir le champ total dans la machine. Ainsi, le suivi instantané du seul premier harmonique d'espace permet des pas de temps beaucoup plus importants que dans les méthodes habituelles qui introduisent l'effet de la denture.

Afin de traiter les problèmes non linéaires, des travaux récents ont proposé une approche qui permet d'introduire des réductivités équivalentes [43-46], en supposant que la saturation est due au seul premier harmonique d'espace. Pour ce faire, différentes définitions de la réductivité équivalente ont été adoptées.

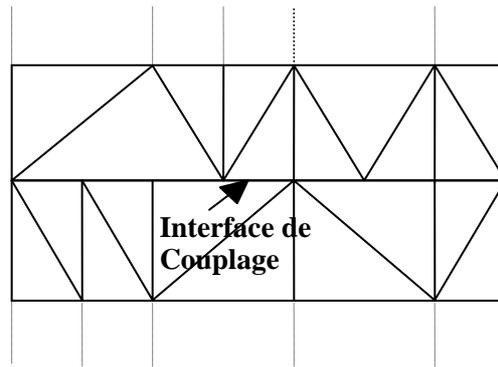
#### I. 7. 4. Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Afin d'assurer la continuité naturelle des grandeurs physiques sur l'interface de couplage où la position et le nombre de nœuds sont différents de chaque côté de celle-ci, une méthode basée sur la modification de la fonctionnelle à minimiser est utilisée.

Une première méthode pour modifier la fonctionnelle originale  $\Pi$  consiste à 'introduire les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  [11, 47 – 49]. Cette méthode, générale, peut être appliquée à n'importe quel type de formulation. La fonctionnelle modifiée  $\Pi'$  s'écrit ainsi :

$$\Pi' = \Pi + \int_{\Gamma} \lambda^T C d\Omega \quad (I-63)$$

où  $C$  représente les contraintes de couplage.



**Fig. I. 7.** Couplage d'interface

L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange dans la pratique présente des inconvénients. Ces multiplicateurs doivent être discrétisés ce qui augmente le nombre d'inconnues dans le système final sans oublier que le calcul numérique des intégrales de couplage est assez complexe [48]. Si la fonctionnelle  $\Pi$  est une forme quadratique et si  $C$  est un ensemble d'équations linéaires, le système d'équations obtenu est mal conditionné à cause de la présence de termes nuls sur sa diagonale.

La méthode indirecte de résolution telle que la méthode du gradient conjugué avec factorisation incomplète de Cholesky peut diverger dans certains cas [48] et converger dans d'autres [64]. Une méthode directe de résolution telle que la méthode de Cholesky est nécessaire mais celle-ci exige un grand espace mémoire.

$$\Pi' = \Pi + \alpha \int_{\Gamma} C^T C d\Omega \quad (I-64)$$

Où  $\alpha$  est un nombre positif relativement grand de pénalisation.

Comme toute procédure, cette démarche présente un inconvénient d'ordre purement numérique. En effet, si  $\alpha$  est trop grand, le système d'équations a tendance à devenir mal conditionné.

En dépit de cela, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est une alternative intéressante à envisager lors de la prise en compte du mouvement. En effet, dans ce cas précis, les maillages indépendants du stator et du rotor libres de translater ou de tourner sont couplés ensemble. Ce qui autorise un suivi continu du mouvement sans avoir à remailler. Dans les différentes positions, seuls les termes de la matrice  $C$  sont altérés.

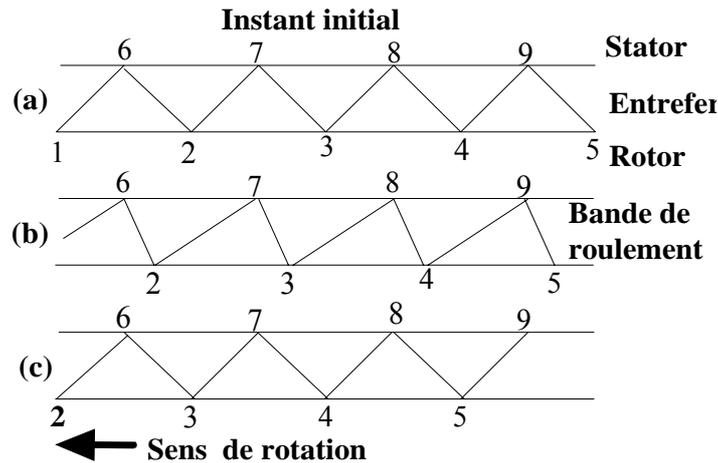
Des travaux récents ont permis de faire l'étude d'une machine à induction avec prise en compte des harmoniques d'espace et d'une façon analogue aux travaux sur la méthode du double entrefer, de prendre en considération la saturation des matériaux [15, 50, 51]. La méthode a été récemment proposée comme alternative à la méthode de la bande de roulement dans le calcul du couple d'interaction dans les machines synchrones [52].

### **I.8. Méthode de la bande de roulement : Etat de l'art**

La bande de roulement est l'une des premières techniques de prise en compte du mouvement dans les structures électromagnétiques [53]. Une bande est créée dans l'entrefer et un mouvement relatif est entamé. Lors des mouvements, seuls les éléments de la bande sont

déformés et, lorsque la limite de distorsion des éléments modélisant l'entrefer est atteinte à cause du mouvement du rotor, on modifie le découpage de l'entrefer Fig. I. 7. C'est une méthode utilisée en 2-D et en 3-D [4].

La structure globale du maillage est ainsi modifiée, et la matrice globale voit sa largeur de bande et son profil augmenter à chaque pas de mouvement [15]. Pour conserver la largeur de bande quasi-constante au niveau des matrices du système d'équations tout au long des calculs, on doit renuméroter les nœuds grâce à un algorithme d'optimisation topologique de la largeur de bande et du profil (Cuthill-Mac Kee [29], par exemple). Le temps de remaillage est plus long mais celui de la résolution est conservé.



**Fig. I. 7.** Méthode de la bande de roulement

((a) Position initiale, (b) Distorsion des éléments, (c) Modification du découpage)

La méthode est toujours d'actualité comme le montrent des travaux récents où tous les phénomènes sont couplés et bouclés à travers des convertisseurs statiques [54]. La plupart des travaux ont toutefois trait à leur application à la machine synchrone à aimants permanents. La méthode est également appliquée pour des études harmoniques [5, 55].

La méthode est simple à appliquer et assure une continuité naturelle des champs entre les deux parties. De plus, elle est très utilisée dans l'étude des régimes transitoires des machines électriques. Certains auteurs la préconisent par rapport à d'autres méthodes du moment que l'entrefer est discrétisé. Comme autre avantage est qu'elle n'affecte pas la nature creuse de la matrice de rigidité [56], ce qui est très important pour la résolution de ce type de systèmes avec les méthodes directes ou indirectes. Par rapport à la technique de remaillage, la méthode de la bande de roulement présente comme avantage certain la rapidité de l'exécution [3].

Cependant, elle présente nombre de problèmes d'ordre numérique. A chaque remaillage de la bande, le système doit être complètement restructuré, ce qui induit des temps importants. En plus de l'augmentation de la largeur de bande et du profil après chaque remaillage de la bande, des erreurs ou bruits numériques dus à la déformation relative des éléments de la bande sont induits pour le calcul de la force électromotrice et du couple magnétique [2]. Un autre problème surgit lors de l'application de la méthode dans le cas d'une modélisation sur un découpage du domaine sur un ou deux pôles. Le mouvement fait apparaître des nœuds supplémentaires sur un des contours latéraux du domaine. La matrice augmente de taille et les conditions aux limites deviennent plus difficiles à appliquer (conditions de périodicité ou d'anti-périodicité).

Les erreurs introduites par la distorsion [56] dépendent de :

- Le type de mouvement simulé (lent, rapide, saccadé...)

- La géométrie des éléments utilisés dans la bande de mouvement ;
- Le type d'éléments finis utilisés dans la résolution ;
- L'ordre des fonctions d'interpolation ;
- La finesse du maillage.
- La méthode de résolution adoptée.

Différentes études ont proposé des solutions à ces problèmes numériques.

### I. 8. 1. Conditions aux limites

Nous voyons dans la figure suivante comment un nœud supplémentaire est créé sur le contour  $\Gamma_1$  [54]. Ce nœud vient s'ajouter sur l'une des parties où s'applique la condition binaire.

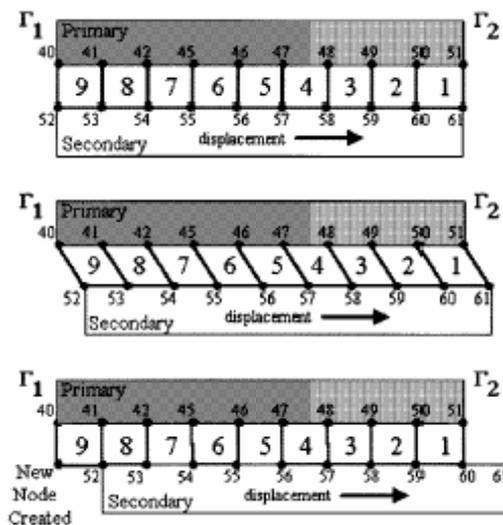


Fig. 1. 8. Création de nouveaux nœuds dus au mouvement avec la bande de mouvement.

L'allocation dynamique des conditions aux limites permet de garder une matrice constante lors du mouvement. En fait, de nouveaux éléments viennent se superposer au maillage au fur et à mesure du mouvement (voir figure I.8.) et les conditions sont à chaque fois redéfinies [56]. L'étude se fait sur une machine linéaire. Les auteurs [34, 54, 56] proposent une allocation dynamique des conditions aux limites telles que décrite par [3] (voir figure I.9. ):

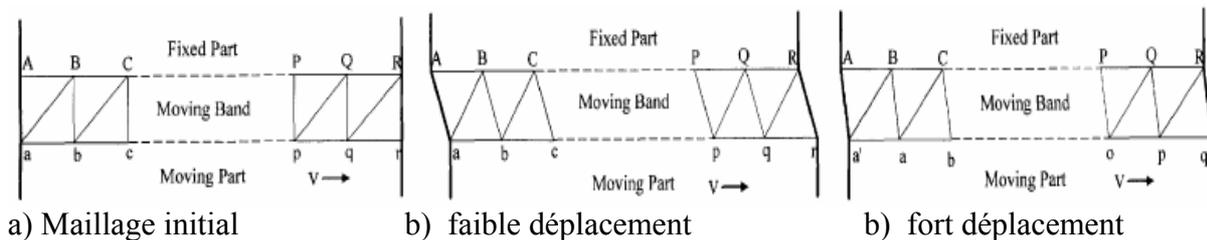


Fig. 1. 9.. Processus de renumérotation des nœuds de la bande de glissement.

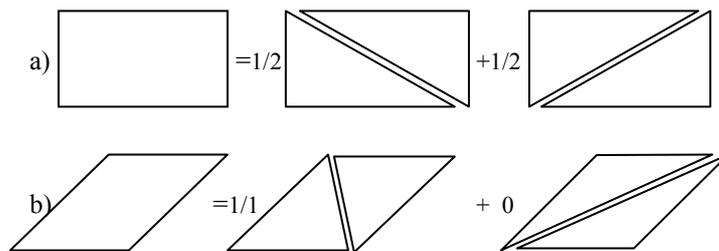
Les éléments des extrémités de la bande de glissement sont réactualisés et les conditions aux limites redéfinies. Cela permet de garder le nombre de nœuds et d'éléments fixe. La technique essayée sur une machine linéaire est la même que celle utilisée dans la plupart des travaux ayant trait à la méthode de la bande de roulement. Les travaux [54] et [56] affirment que cette méthode permet de garder la nature creuse de la matrice et maintient une taille de la matrice constante.

Il faut noter qu'une prise en compte de la structure complète représente une solution robuste, puisqu'elle élimine toutes les contraintes de conditions aux limites. Cependant, dans ce type de structures, le système à résoudre et la largeur de bande est plus important que dans le premier cas. Seules des méthodes de renumérotation efficaces et rapides sont à même de pallier à ce problème [57 - 61].

Dans ces travaux, nous avons élaboré et proposé de nouveaux algorithmes de renumérotation applicables à tout maillage et particulièrement adaptés à la méthode de la bande de mouvement, plus performant que les méthodes de renumérotation classiques. De plus, une étude des caractéristiques des maillages nous a permis de passer directement du maillage à la structure de stockage en ligne de ciel en vue d'une résolution par méthode directe. En effet, les méthodes indirectes sont également source d'erreur qui peut s'amplifier avec les déformations de ces éléments et lors de la précision de calcul des couples. Ce sujet sera traité dans les prochains chapitres.

### I. 8. 2. Modification des éléments de la bande de roulement :

Une méthode [2] consiste à utiliser des éléments quadrilatéraux dans la bande de roulement, alors que le maillage doit être effectué avec des éléments triangulaires linéaires (figure I.10) :



**Fig. 1. 10.** Eléments de bande de roulement quadrilatéraux et intégration en éléments triangulaires

- a) cas où le déplacement se fait sur pas d'intégration  
 b) cas où le déplacement est différent du pas d'intégration.

Quand le déplacement effectué égale au pas de discrétisation de la bande de mouvement, l'élément quadrilatéral est divisé en 4 éléments triangulaires, chaque élément contribuant du quart de la valeur de l'intégration en sa surface. Dans le cas où le déplacement ne vaut pas le pas de déplacement, l'élément quadrilatéral est divisé en deux éléments triangulaires, chaque élément contribuant de moitié dans l'intégration. Dans l'autre cas, l'élément est subdivisé en quatre éléments triangulaires, chaque élément contribuant du quart dans l'intégration.

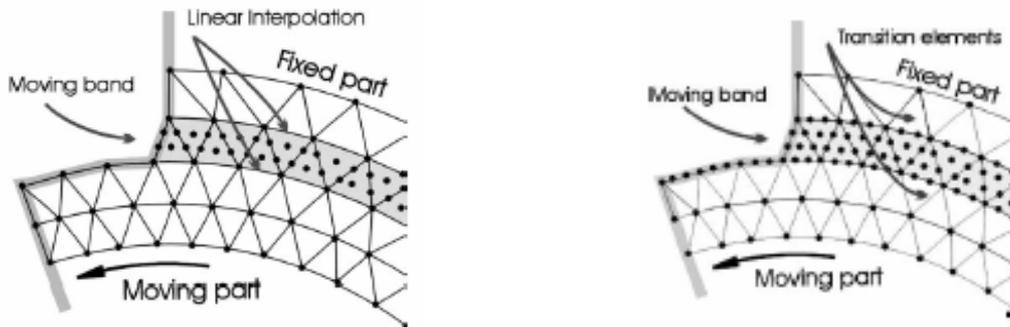
Cette méthode a été appliquée pour le calcul du couple pour une machine synchrone à aimants permanents et une machine synchrone à pôles saillants. Les auteurs concluent que pour un pas fixe égal au pas de discrétisation des contours de la bande de roulement, (éléments non distordus), les méthodes de calcul de couple convergent vers le même résultat, mais dans le cas d'un pas différent, les différentes méthodes de calcul de couple sont divergentes, et une préférence est accordée à la méthode du tenseur de Maxwell dans le calcul du couple électromagnétique.

Le choix de la méthode de calcul du couple est très important puisque les équations magnétique et électrique sont couplées à l'équation mécanique à travers le couple

électromagnétique, ce qui représente, dans le cas où la résolution de toutes ces équations est simultanément un problème de taille [39,62].

Une autre méthode consiste à placer des éléments d'ordre élevé dans la bande, comme le préconisent les études [52, 63, 64]. Si la première méthode convient pour corriger le couple, les auteurs n'ont pas fait mention de la f.e.m.

Dans ces études, des éléments d'ordre élevé sont placés dans la bande de roulement, et une adaptation pour la connexion des éléments de la bande et ceux des deux parties de la structure est réalisée aux contours de la bande (figure I.11).



a) éléments de la bande modifiés      b) éléments des contours de la bande modifiés

**Fig. I. 11.** Application d'éléments cubiques modifiés au maillage de la bande de mouvement [56].

L'étude a montré que l'utilisation des éléments d'ordre élevé permet de réduire sensiblement l'erreur de calcul. La méthode proposée a été appliquée au calcul d'une BDCM tétrapolaire, et l'étude se fait sur seulement un quart de la machine (conditions de polarité). Un pas de déplacement a été réglé de façon à déformer au maximum les éléments de la bande de roulement. Cela permet de gagner en temps de reconnexion ainsi qu'en reconstruction de la matrice. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle présente une matrice plus remplie que pour la méthode conventionnelle. De plus, le nombre de nœuds pour les conditions aux limites est plus important.

### I. 8. 3. Principe du pas de déplacement fixe

Des auteurs [65] notent que si le déplacement égale le pas de discrétisation de la bande de roulement, les bruits numériques disparaissent, ce qui est évident, vu que le phénomène de distorsion est éliminé. D'autre part, une étude très récente [52] a montré qu'un affinement du maillage de la bande de mouvement permet d'obtenir des précisions comparables à ceux obtenus avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, du fait que la distorsion est plus faible à chaque déplacement. Le problème de cette méthode est qu'elle impose un pas de déplacement très fin. De plus les temps de renumérotation effectués sur les matrices (ou sur les maillages) sont plus importants.

### I. 8. 4. Autres méthodes

Le problème numérique majeur de la méthode de la bande de roulement est la discontinuité de la matrice de rigidité en fonction de la position relative du rotor. Pour y pallier, une étude [39] propose une méthode de résolution en effectuant une interpolation trigonométrique de la matrice. La matrice de rigidité est découpée en trois matrices : une matrice  $[R]$  et  $[S]$  pour le rotor et le stator, qui sont fixes, et une matrice  $[S_b]$  pour la bande de roulement. La rotation n'affecte en fait que la nature de la matrice de la bande de roulement. A chaque déplacement, les éléments non nuls de la matrice  $[S_b]$  changent de position. L'ensemble des

matrices  $[S_b(\alpha)]$  obtenu à chaque déplacement peut être retrouvé à chaque déplacement à partir de la matrice initiale en utilisant une matrice de permutation  $[K]$ .

$$[S_b(\alpha)] = [K(\alpha)] [S_{b_0}]$$

La matrice obtenue est dense, et chaque nœud est connecté (dans le cas d'un déplacement différent du pas de maillage de la bande) avec tous les autres nœuds de la bande de roulement, ce qui particularise la méthode du macro-élément. Cependant, la matrice  $S_b$  est moins creuse que la matrice obtenue avec le macro-élément. L'intérêt de cette méthode est la continuité de la matrice liée à la bande de roulement en fonction de la position, et de la possibilité de la dériver par rapport à cette dernière grandeur, ce qui est intéressant pour le calcul du couple avec le principe des travaux virtuels.

Une technique alternative à la bande de mouvement concerne la technique du déplacement des milieux [38]. Les auteurs notent que pour le calcul du couple de détente, on a besoin de beaucoup de positions relatives du stator par rapport au rotor. Les auteurs proposent pour les structures présentant une certaine symétrie, d'utiliser la méthode des « matériaux mobiles », ou toute la structure du maillage reste constante, mais on doit juste déplacer les perméabilités des matériaux. Cette méthode limitée à certaines géométries, permet de réduire les temps de calcul des deux tiers. La nature de la matrice reste figée et seuls les paramètres de la matrice sont recalculés. Aucun algorithme de renumérotation n'est exigé pour les déplacements. Quand les éléments arrivent à la limite de leur déformation, les différents éléments de la partie mobile sont redéfinis par déplacement, et le maillage reprend sa position initiale, sans avoir à reconnecter.

### **I. 8. 5. Résolution numérique des systèmes dérivant de la méthode**

Peu d'indications ont trait aux méthodes de résolution des équations dérivant de la bande de roulement. Il est à noter que les méthodes directes (Gauss pour [62]) et indirectes (la résolution des équations a été faite après un préconditionnement ILU et une renumérotation Cuthill Mac Kee avec GMRES [55]) sont appliquées. Nous n'avons recensé aucune étude permettant de préférer telle méthode à telle autre dans le cas de la bande de roulement. Cependant, il est à noter que dans tous les cas, une technique de renumérotation efficace est recommandée. La technique la plus utilisée à ce jour reste la technique RCM (Reverse Cuthill Mac Kee [29], et sa variante améliorée, la méthode GPS [30]). Il y a lieu aussi de noter le nombre important de pas de calcul que prend une simulation du mouvement et des équations couplées [55].

## **I.9. Conclusion**

La modélisation électromagnétique des machines synchrones à aimants permanents avec la méthode des éléments finis implique des systèmes algébriques larges. Les méthodes de résolution appliquées à ces méthodes dépendent de la structure de maillage adopté pour ces structures. Une renumérotation efficace assure le moindre coût de ces méthodes.

Dans le chapitre suivant, nous passerons en revue certaines méthodes de résolution de ces systèmes ainsi que des méthodes de numérotation des graphes associés aux maillages et les renumérotations des maillages.



## *Chapitre II*

# DE LA RENUMÉROTATION A LA RESOLUTION : ETAT DE L'ART



## II.1. Introduction

La performance des modèles mathématiques d'un système se mesure par leur complexité, leur précision et leur coût. Les modèles analytiques des machines synchrones à aimants permanents développés durant les dernières années ont vite montré leurs limites quant à la prise en considération effective des phénomènes inhérents au fonctionnement de ces machines. Ils ne sont possibles que moyennant bon nombre d'hypothèses simplificatrices liées à la linéarité des milieux, simplicité des géométries...

Le développement constant de l'outil informatique a mis en avant les techniques numériques de modélisation. Ces techniques permettent de tenir compte de la plupart des phénomènes. Cependant, le coût de ces techniques dépendent fortement des méthodes de résolution adoptées.

Les méthodes utilisées dans les premiers codes de calcul numérique étaient essentiellement des méthodes directes (en majorité méthode de Cholesky et méthode frontale) [19]. Ces mêmes méthodes utilisent des méthodes de renumérotation tirées essentiellement des méthodes de renumérotation des graphes.

Avec l'augmentation de la taille des systèmes, essentiellement pour les résolutions en 3D, les méthodes projectives ont supplanté les méthodes directes [23]. Il est toutefois à noter qu'un préconditionnement des matrices est effectué, et que ce dernier est optimisé avec les mêmes techniques de renumérotation utilisées avec les méthodes directes.

Dans ce qui suit, nous présentons une étude bibliographique sur les diverses méthodes de renumérotation existantes et qui sont pour l'essentiel des méthodes de renumérotation des graphes. Quelques méthodes de renumérotation des maillages sont également passées en revue. Enfin, nous verrons l'influence de ces méthodes sur le coût de résolution en pas-à-pas dans le temps de programmes de simulation des machines synchrones.

## II.2. Graphes associés aux matrices creuses

Soit une matrice  $A$  quelconque de dimension  $(n \times n)$  symétrique définie positive. A chaque ligne est associé un élément diagonal non nul, qu'on appellera nœud. A tout élément non nul de chaque ligne sera associé un couplet (ligne – colonne) représenté par un segment liant les nœuds de la ligne et de la colonne du couplet.

Cette combinaison de nœuds et de segments forme un graphe dit graphe  $G$  associé à la matrice  $A$  et noté :

$$G^A = (X^A, E^A) \quad (\text{II-1})$$

Où  $X^A$  représente l'ensemble des nœuds de la matrice  $A$ , et  $E^A$  l'ensemble des segments de la matrice  $A$ . Le graphe est valide si et seulement si

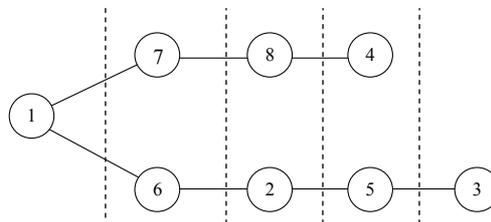
$$\forall \{x_i, x_j\} \in E^A, a_{ij} = a_{ji} \neq 0, i \neq j \quad (\text{II-2})$$

où  $x_i$  et  $x_j$  représentent les nœuds de  $X^A$ , et les couples  $\{x_i, x_j\}$  les segments de  $E^A$ .

Dans l'exemple suivant, nous avons une matrice A dont les éléments non nuls sont représentés par le symbole  $\otimes$ . Les éléments diagonaux représentent les nœuds et les éléments non nuls représentent les segments. Le graphe contient donc 08 nœuds et 07 segments.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \otimes & \otimes \\ & 2 & & & & & \otimes & \otimes \\ & & 3 & \otimes & & & & \otimes \\ & & \otimes & 4 & & & & \\ & \otimes & & & 5 & & & \otimes \\ \otimes & \otimes & & & & 6 & & \\ \otimes & & & \otimes & & & 7 & \\ & & & & \otimes & & & 8 \end{pmatrix} \quad (\text{II-3})$$

Le graphe associé à cette matrice est donné dans la figure suivante.



**Fig. II. 1.** Graphe à niveaux associé à la matrice A.

Le graphe construit ci-dessus (Fig. II. 1.) est dit un graphe à niveaux. Ce dernier en contient cinq. Le diamètre D du graphe (ou excentricité) est le nombre maximal de niveaux que possède le graphe. L'épaisseur d'un niveau se compte en la "distance numérique" maximale entre les numéros des nœuds d'un même niveau.

Deux nœuds  $x$  et  $y$  sont dits adjacents s'ils forment un segment du graphe.

$$Adj(y) = \{x \in X | \{x, y\} \in E \quad \forall y \in Y\} \quad (\text{II-4})$$

Le degré d'un nœud est donné par le nombre de nœuds qui lui sont adjacents.

$$deg(y) = \{i | x_i \in Adj(y) \quad \forall x \in X\} \quad (\text{II-5})$$

George et Liu ont donné en [22] différentes définitions intéressantes du profil, de largeur de bande et de l'épaisseur de front (frontwidth).

### II.3. La méthode bande

C'est une méthode très adaptée pour les résolutions avec la méthode de Gauss. Elle est également utilisée pour une résolution Cholesky. Elle permet d'effectuer un stockage en matrice bande dans le cas des systèmes non symétriques, et ou semi bandes dans le cas des systèmes symétriques, comme c'est généralement le cas avec la méthode des éléments finis.

#### II. 3. 1. Largeur de bande

On considère que pour toute matrice  $A$  est associée une largeur de bande pour chaque ligne notée  $\beta_i$ . Il s'agit de la distance maximale entre l'élément diagonal et le dernier élément non nul de la ligne correspondant à cet élément.

$$\beta_i(\mathbf{A}) = i - \min \{j \mid a_{ij} \neq 0\} \quad (\text{II-6})$$

$\beta_i(A)$  est appelé la largeur de bande de la ligne  $i$  de  $A$ .

Dans le cas de la matrice présentée en (II-3), le tableau suivant nous donne les largeurs de bande liées à chaque ligne  $i$  :

Ligne $i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Largeur de bande $\beta_i(A)$	0	0	0	1	3	5	6	3

**Tab. II. 1.** Tableau des largeurs de bande par ligne pour la matrice (II-3)

La largeur de bande de  $A$  est définie par :

$$\begin{aligned} \beta = \beta(\mathbf{A}) &= \max \{ \beta_i(\mathbf{A}) \mid 1 \leq i \leq N \} \\ &= \max \{ |i - j| \mid a_{ij} \neq 0 \} \end{aligned} \quad (\text{II-7})$$

Dans le cas considéré en (II-3), la largeur de bande maximale du système vaut 6.

### II. 3. 2. Stockage semi bande

Le stockage en matrice semie bande permet de réduire le système carré de dimension  $(N \times N)$  en un système de dimension  $(N \times (\beta+1))$ . La réduction de la largeur de bande permet donc de réduire la taille de la matrice. Ce stockage est efficace quand la largeur de bande par ligne est relativement constante. La matrice (II-3) devient donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & a_{52} & 0 & 0 & a_{55} \\ 0 & a_{61} & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} \\ a_{71} & 0 & 0 & a_{74} & 0 & 0 & a_{77} \\ 0 & 0 & 0 & a_{85} & 0 & 0 & a_{88} \end{pmatrix} \quad (\text{II-8})$$

### II. 3. 3. Résolution en semie-bande

La factorisation de ce type de systèmes requiert un nombre d'opérations tel que :

$$N_{op} = \beta^2 \left( \frac{N}{2} - \frac{\beta}{3} - 1 \right) + \beta \left( \frac{3}{2} N - \frac{2}{3} \right) \quad (\text{II-9})$$

Dans le cas des systèmes de grande taille, nous avons :

$$N_{op} = \beta^2 \left( \frac{N}{2} - \frac{\beta}{3} \right) + \beta \left( \frac{3}{2} N \right) \quad (\text{II-10})$$

La minimisation de la largeur de bande nous donne  $(\beta \ll N)$ , d'où :

$$N_{op} = N \left( \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2} \beta \right) \approx N \frac{\beta^2}{2} \quad (\text{II-11})$$

La réduction de la largeur de bande maximale de la matrice du système permet donc de réduire son coût de factorisation de façon quadratique.

De même, la résolution par remontée de ces systèmes d'équations (Gauss, Cholesky) donne lieu à un nombre d'opérations tel que :

$$N'_{op} = \beta (2N - \beta - 1) + 2N \quad (\text{II-12})$$

Dans le cas des systèmes larges et où ( $\beta \ll N$ ), nous avons :

$$N'_{op} = 2(\beta+1)N \approx 2\beta N \quad (\text{II-13})$$

#### II.4. La méthode enveloppe (ligne de ciel)

Le stockage en ligne de ciel (skyline) ou en profil (profile) est apparu vers le début des années 60 [26]. Cette technique de stockage est très utilisée pour les résolutions Cholesky. Alors que la méthode de Gauss modifie tous les éléments compris dans la bande de la matrice, le méthode Cholesky ne transforme que ceux compris dans le profil (enveloppe de la matrice).

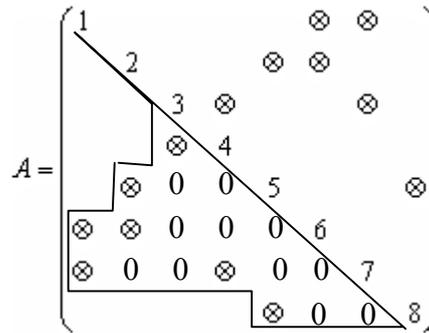


Fig. II. 2. Stockage en profil ou ligne de ciel

L'enveloppe de  $A$  est définie par :

$$Env(A) = \{i, j\} / 0 < i - j \leq \beta_i(A) \quad (\text{II-14})$$

Cette quantité est appelée profil ou enveloppe de  $A$ . Une autre définition du profil ou enveloppe est donnée par la « largeur de front », très utilisée dans les méthodes dites frontales. Celle-ci, dénommée également frontwidth est donné par l'intersection des colonnes avec le profil (nombre d'éléments contenus dans le profil).

$$\omega_i = \left| \{k \mid k > i \text{ et } a_{ki} \neq 0 \forall l < i\} \right| \quad (\text{II-15})$$

$$|Env(A)| = \sum_{i=1}^N \omega_i(A) \quad (\text{II-16})$$

La référence [66] indique que la résolution complète par la méthode de Cholesky d'un système est proportionnel au profil de la matrice :

$$N_{op} = 2 \times (|Env(A)| + N) \quad (\text{II-17})$$

Le tableau suivant donne les largeurs de front par colonne de la matrice décrite en (II-3)

Colonne $i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Largeur de front $\omega_i(A)$	2	3	4	3	3	2	1	0

**Tab. II. 2.** Tableau des largeurs de front par colonne pour la matrice (II-3)

Le nombre d'opérations nécessaires à la factorisation Cholesky en  $LL^t$  est donné par :

$$N_{op} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i(A) (\omega_i(A) + 3) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i^2(A) \quad (\text{II-18})$$

et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution est donné par :

$$N'_{op} = 2 \sum_{i=1}^N (\omega_i(A) + 1) \quad (\text{II-19})$$

Ce nombre peut s'exprimer comme suit : [66]

$$N'_{op} = 2 (Env(A) + N) \quad (\text{II-20})$$

Il faut noter que les largeurs de front  $\omega_i$  représentent les nombres de lignes actives à la  $i^{\text{ème}}$  itération dans la factorisation. Une notation très utilisée dans les méthodes frontales est la largeur de front du système définie par :

$$\omega = \max \{ \omega_i(A) \mid 1 \leq i \leq N \} \quad (\text{II-21})$$

Il est difficile de départager les méthodes bande et enveloppe quant au coût résultant de la résolution. D'autres méthodes de stockage existent, mais sont plus dédiées aux méthodes itératives, tels le stockage vectoriel (CRS, Compressed Row Storage [67] ; coordinate format [68]...)

## II.5. Méthodes de renumérotation des graphes

Afin de tirer un avantage maximal de ces méthodes (profil et semi bande), il est nécessaire de numéroter de façon adéquate les nœuds du maillage obtenu. Les premiers travaux ayant trait aux méthodes de renumérotation ont commencé à paraître depuis le milieu des années soixante [26]. La plupart de ces travaux, cependant ont porté sur la théorie des graphes, et sont difficilement assimilables pour les ingénieurs. Ces méthodes sont implémentées dans la plupart des logiciels éléments finis depuis les années 80 [83].

Les problèmes de minimisation de largeur bande associées aux graphes (BMPG : Bandwidth Minimization Problems for Graphs) ont trouvé leur origine en 1962 au laboratoire de propulsion des avions de Pasadena (USA). Cela consiste à trouver une renumérotation adéquate du graphe associé à la matrice à conditionner afin d'obtenir la largeur de bande minimale. Ce type de problème est également connu sous le nom de minimisation de largeur de bande des matrices (MPBM : Matrix Bandwidth Minimization Problem) du fait que l'on peut associer des matrices symétriques à ces graphes (les éléments diagonaux représentant les nœuds du graphe et les segments sont représentés par les éléments non nuls) [69].

La complexité de ce type de problème vient du fait qu'il existe  $n!$  (avec  $n$  taille de la matrice) façons de renuméroter les graphes associées aux matrices, et de plus, il a été montré que les temps de résolution des algorithmes de minimisation sont des fonctions polynomiales de la taille de ces systèmes.

Le premier avantage de la minimisation de la largeur de bande réside dans l'accélération des processus de résolution des systèmes linéaires avec les méthodes linéaires, particulièrement

la factorisation de Gauss. Le temps de résolution d'un système normal est une fonction  $O(N^3)$ , qui est ramené à un temps fonction  $O(N\beta^2)$  (voir eqt II-11). Ainsi, une largeur de bande qui représente 10% de la taille du système permet une réduction du nombre d'opérations de l'ordre de 99% par rapport au système ( $N \times N$ ).

Les applications sont diversifiées : les systèmes à matrice creuse sont courants. On peut citer les matrices de rigidité découlant des problèmes éléments finis, des lignes de transmissions d'énergie, en chimie, dans les simulations numériques de problèmes de géophysique, et tout récemment, dans les traitements d'informations hypertexte (internet) et traitement d'images.

On recense deux types d'algorithmes qui résolvent ce type de problèmes : des algorithmes exacts et des algorithmes heuristiques. Le premier type permet de déterminer la numérotation adéquate qui assure à 100% une largeur de bande minimale, en utilisant un nombre de pas qui est fonction  $O(N^\beta)$ , ce qui est très coûteux en temps de calcul [69]. C'est d'ailleurs le constat fait en 1976 par Papadimitriou [70] qui a exclu la possibilité de déterminer de façon exacte la numérotation optimale d'un graphe en un temps acceptable [26].

Les algorithmes heuristiques permettent de minimiser la largeur de bande, sans pour autant assurer une solution optimale, le souci majeur étant la réduction du temps d'exécution. Les auteurs de [34] ont classifié les méthodes heuristiques en cinq catégories, et conclut que celles qui sont basées sur un graphe nivelé sont les plus populaires. De ces méthodes, l'algorithme proposé par Cuthill et Mac-Kee [29] en 1969 reste le plus connu. Des variantes de cette méthode ont été proposées depuis (méthodes de Gibbs, Poole et Stockmeyer (GPS) [30], méthode de Putonnen [27], méthode de King [22]...).

### II. 5. 1. Méthode de Cuthill Mac Kee

Cette méthode initialement proposée pour réduire la largeur de bande, fut ensuite appliquée à la réduction du profil. En 1971, J. George [22] remarqua que la renumérotation inverse du graphe proposé par la méthode CM permettait de réduire davantage le profil du graphe ainsi obtenu. La méthode fut renommée en RCM (Reverse Cuthill- Mac kee).

La méthode RCM se propose de construire un graphe à niveaux à partir d'un nœud de départ donné, et de numéroter ainsi les nœuds de chaque niveau suivant leur degré. Le nœud de départ est pris aléatoirement [71].

La méthode RCM a connu un développement récent [19]. En 1999, Esposito et Al ont amélioré la méthode originale dans la construction du graphe et de la numérotation des niveaux.

C'est une méthode utilisée aussi bien pour la renumérotation des systèmes en vue d'une résolution avec des méthodes directes que pour une résolution avec des méthodes itératives pour une factorisation incomplète ILU. [22]

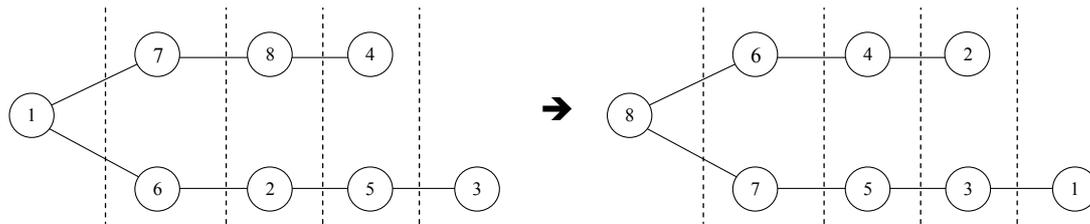
La méthode se présente sous cet algorithme simplifié :

- 1 – Choisir un nœud  $r$  et l'affecter en  $x_1$
- 2 – pour  $i = 1, \dots, N$  recenser tous les nœuds adjacents à  $x_1$  et les numéroter dans l'ordre croissant de leur degré ;
- 3 – Effectuer une numérotation inverse de ces nœuds avec  $y_i = x_{N-i+1}$

Dans le cas de la figure II. 1. nous obtenons en appliquant l'algorithme :

$r=1$  ;  $x_1 = 1$   
 $Adj(x_1) = \{6,7\}$ , avec  $deg(6) = deg(7) = 2$ .  
 $x_2 = 6$  ;  $x_3 = 7$   
 $Adj(x_2) = \{2\}$  ;  $x_4 = 2$  ;  $Adj(x_3) = \{8\}$  ;  $x_5 = 8$  ;  
 $Adj(x_4) = \{5\}$  ;  $x_6 = 5$  ;  $Adj(x_5) = \{4\}$  ;  $x_7 = 4$  ;  
 $Adj(x_6) = \{3\}$  ;  $x_8 = 3$  ;  $Adj(x_7) = \Phi$

Tous les nœuds ont été renumérotés. On applique une renumérotation inverse et on obtient la renumérotation de la figure II. 3.



**Fig. II. 3.** Graphe initial et graphe renuméroté

La matrice devient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \otimes & & & & & & & & \\ & 0 & 2 & 0 & \otimes & & & & & & \\ \otimes & 0 & 3 & 0 & \otimes & & & & & & \\ & \otimes & 0 & 4 & 0 & \otimes & & & & & \\ & & \otimes & 0 & 5 & 0 & \otimes & & & & \\ & & & \otimes & 0 & 6 & 0 & \otimes & & & \\ & & & & \otimes & 0 & 7 & \otimes & & & \\ & & & & & \otimes & \otimes & 8 & & & \end{pmatrix} \quad (\text{II-22})$$

La largeur de bande passe donc de 6 à 2 et la taille du profil passe de 17 à 13. Nous observons en Fig. II. 3. que les nœuds sont renumérotés selon les niveaux.

Le choix du nœud de départ est crucial pour l'efficacité de la méthode. Parmi les méthodes qui assurent un bon nœud de départ, la méthode GPS est la plus référenciée.

### II. 5. 2. Méthode GPS

Gibbs, Poole et Stockmeyer [30] introduisirent en 1975 les notions d'excentricité maximale des graphes. Ils proposèrent une méthode qui permette de déterminer un nœud de départ assurant une excentricité maximale. Le nœud que la méthode GPS (du nom de leurs auteurs) propose est un nœud pseudo-périphérique.

La méthode GPS a été testée sur 19 matrices symétriques creuses de taille comprises entre 68 et 918 provenant de divers problèmes de physique appliquée résolus avec la méthode des éléments finis. Les comparaisons ont été effectuées avec la méthode RCM développée en 1969, et ont montré une certaine réduction de la largeur de bande. Actuellement (depuis la

nouvelle formulation RCM [72]), sur ces 19 matrices, la méthode GPS ne réduit la largeur de bande que pour 9 matrices, mais est huit fois plus rapide [73].

La méthode GPS a connu une amélioration en 1992 par Luo[66]. La méthode est dans ce cas plus complexe et n'est adaptée que pour des structures de graphes spéciales. Elle est difficilement étendue pour des graphes quelconques. De plus, le coût de ces améliorations n'est pas négligeable.

De toutes les méthodes de renumérotation des graphes par niveaux, la méthode GPS reste une méthode de référence alliant efficacité et rapidité. Elle reste à l'heure actuelle la plus rapide des méthodes de renumérotation des graphes. Des tests standard sur des matrices creuses fournies par Harwell-Boeing<sup>1</sup> servent de critères de comparaison des nouvelles méthodes parues au courant de ce troisième millénaire.

La méthode décrit un graphe comme étant une succession de niveaux, et affecte une excentricité ou diamètre aux graphes. De même, la notion d'épaisseur de niveau est introduite pour décrire le nombre de nœuds contenus dans chaque niveau. La distance  $d(x,y)$  entre deux nœuds est décrite comme étant le plus court chemin pouvant relier ces deux nœuds.

L'excentricité d'un nœud est définie comme étant la distance maximale pouvant le relier à un autre nœud :

$$\ell(x) = \max \{d(x,y) \mid y \in X\} \quad (\text{II-23})$$

Le diamètre du graphe est défini comme étant l'excentricité maximale :

$$\delta(G) = \max \{\ell(x) \mid x \in X\} \quad (\text{II-24})$$

Un nœud est dit périphérique si son excentricité égale le diamètre du graphe. Pour la méthode GPS, ce nœud est le meilleur « starting node » (nœud de départ). Les auteurs de la méthode ne garantissent cependant pas que le résultat de leur algorithme soit le nœud optimal, et ont préféré l'appellation de nœud pseudo-périphérique.

Luo [66] considère quant à lui que le nœud de départ fourni par la méthode GPS comme étant le nœud optimal pour la plupart des graphes. Il considère qu'une méthode de renumérotation doit remplir les conditions suivantes :

- 1 – Le graphe doit posséder un diamètre  $\ell$  qui soit maximal ;
- 2 – Les niveaux  $\mathcal{M}_i$  doivent tous être d'épaisseur équivalente ;
- 3 – Les nœuds sont renumérotés suivant l'ordre des niveaux de  $\mathcal{M}_0$  à  $\mathcal{M}_D$ .

La troisième condition est bien remplie par la méthode RCM. La méthode GPS permet de déterminer le nœud de la première condition. Luo propose une méthode permettant de réduire l'épaisseur des niveaux. L'auteur reconnaît que sa méthode, même si elle réduit légèrement la largeur de bande fournie par GPS, affecte négativement le profil fourni par la même méthode.

Un graphe se structure en niveaux  $\mathcal{M}_i$  à partir d'un nœud de départ  $x$  comme suit :

$$\mathcal{M}(x) = \{ \mathcal{M}_0(x), \mathcal{M}_1(x), \mathcal{M}_2(x), \dots, \mathcal{M}_\ell(x) \} \quad (\text{II-25})$$

Avec  $\mathcal{M}_0(x) = \{x\}$  et  $\mathcal{M}_1(x) = \text{Adj}(\mathcal{M}_0(x))$

et  $\mathcal{M}_i(x) = \text{Adj}(\mathcal{M}_{i-1}(x)) - \mathcal{M}_{i-2}(x), \forall i = 1, \dots, \ell(x)$

<sup>1</sup> < <http://math.nist.gov/MatrixMarket/data/Harwell-Boeing> >.

et l'épaisseur du graphe est donnée par le nombre maximal d'éléments dans les niveaux :  

$$w(x) = \max \{ |\mathcal{M}_i(x)| \} \tag{II-26}$$

L'algorithme GPS présenté par [George Liu] est résumé comme suit :

- 1 – Choisir un nœud de départ arbitraire ;
- 2 – Construire la structure de niveaux du graphe à partir de  $r$  :  

$$\mathcal{M}(r) = \{ \mathcal{M}_0(r), \mathcal{M}_1(r), \mathcal{M}_2(r), \dots, \mathcal{M}_{\ell(r)}(r) \}$$
- 3 – Choisir un nœud dans le dernier niveau  $\mathcal{M}_{\ell(r)}(r)$  et qui soit de moindre degré ;
- 4 – Construire la structure de niveaux à partir de  $x$   

$$\mathcal{M}(x) = \{ \mathcal{M}_0(x), \mathcal{M}_1(x), \mathcal{M}_2(x), \dots, \mathcal{M}_{\ell(x)}(x) \}$$
- 5 – Si  $\ell(x) > \ell(r)$  alors  $r = x$  et reprendre à partir de 3
- 6 – fin. Le nœud  $x$  est le nœud pseudo-périphérique.

En appliquant l'algorithme sur le graphe de la fig. II. 1. on a :

- 1 – Nœud de départ arbitraire  $r = 1$
- 2 – La figure est donnée sous forme de graphe à niveaux :  

$$\mathcal{M}(r) = \{ \mathcal{M}_2(r), \dots, \mathcal{M}_{\ell(r)}(r) \}$$

$$\mathcal{M}_0(r) = \{1\} ; \mathcal{M}_1(r) = \{6, 7\} ; \mathcal{M}_2(r) = \{2, 8\} ; \mathcal{M}_3(r) = \{4, 5\} ; \mathcal{M}_4(r) = \{3\}$$

On remarque que  $\ell(r) = 4$
- 3 – Le nœud du dernier niveau est le nœud 3.  $x = 3$
- 4 – On construit un graphe à niveaux à partir de  $x$  :  

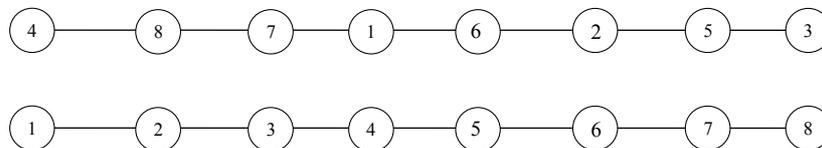
$$\mathcal{M}_0(x) = \{3\} ; \mathcal{M}_1(x) = \{5\} ; \mathcal{M}_2(x) = \{2\} ; \mathcal{M}_3(x) = \{6\} ; \mathcal{M}_4(x) = \{1\} ; \mathcal{M}_5(x) = \{7\} ;$$

$$\mathcal{M}_6(x) = \{8\} ; \mathcal{M}_7(x) = \{4\}$$

L'excentricité du graphe obtenue avec  $x$  est  $\ell(x) = 7$
- 5 – Comme  $\ell(x) > \ell(r)$ , on reprend 3 avec  $r = 3$  et  $x = 4$   

On obtient un graphe  $\ell(x) = 7$  et  $\mathcal{M}_7(x) = \{3\}$
- 6 – Le nœud de départ est le nœud 3

En figure II. 4., nous avons la forme du graphe ainsi obtenu en appliquant une renumérotation RCM avec le nœud de départ fourni par la méthode GPS. Dans ce cas précis, il est optimal et le nœud est réellement périphérique.



**Fig. II. 4.** Graphe renuméroté selon la méthode GPS.

La matrice résultant de cette renumérotation est donnée en (II-27). La matrice ainsi obtenue possède une largeur de bande de largeur minimale ( $\beta=1$ ) et un profil optimal ne contenant aucun élément nul.



D'autres travaux récents publiés en 2006 ([69], [76] et [77]) montrent l'intérêt des chercheurs pour la minimisation de la largeur de bande des graphes associés aux matrices symétriques creuses.

Une méthode parue en 1995 et améliorée en 2006 [69] du nom de Search Annealing est une méthode performante. Les améliorations apportées par les auteurs ont cependant permis à la méthode d'être plus performante que la méthode TS avec un gain évident en temps d'exécution. Les auteurs montrent qu'elle pouvait rivaliser avec la méthode GPS pour les petits systèmes (<100) en temps d'exécution, mais reste prohibitif pour les grands systèmes.

Un tableau comparatif des résultats obtenus avec diverses méthodes (Tab. II. 3.) montre que ces méthodes, si elles assurent une réduction appréciable de la largeur de bande fournie par la méthode GPS, restent trop coûteuses, en particulier s'il s'agit d'un problème éléments finis. Les rapports en temps d'exécution vis-à-vis de la méthode restent trop fastidieuses, et ne sont pas recommandées pour un calcul répété comme pour le pas à pas dans le temps avec remaillage (local ou global) des maillages.

	GPS	TS	GRASP_PR	ACO-HC
33 matrices avec n = 30, . . . , 199				
Largeur de Bande moyenne	31.42	23.33	22.52	23.18
Temps CPU secondes	0.003	2.36	4.21	7.3
80 matrices avec n = 200, . . . , 1000				
Largeur de Bande moyenne	156.38	100.78	99.43	102.58
Temps CPU secondes	0.11	121.66	323.19	192.31

**Tab. II. 3.** Résultats des comparaisons sur des matrices creuses fournies par Hertwell-Boeing des méthodes GPS, TS (Tabu Search), GRASP-PR (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure with Path Relinking strategy) et ACO-HC (Ant Colony Optimisation with Hill Climbing procedure) avec un PC K7 1.2 GHz pour GPS et un PC PIV 1.6 GHz pour les autres méthodes.

Les méthodes basées sur la renumérotation des graphes représentent également un obstacle de taille pour la résolution des problèmes découlant de la méthode des éléments finis : en effet, il faut d'abord construire les éléments de la matrice à réduire, construire à partir de cette matrice le graphe associé, appliquer l'algorithme de renumérotation, puis reconstruire la matrice en stockage semi-bande ou en profil suivant la méthode de résolution préconisée. Un problème de stockage primaire de la matrice se pose donc.

O'Leary [80] décrit dans une étude récente (2005) une méthode utilisée par le logiciel MATLAB pour le stockage primaire de la matrice à réordonner. La méthode consiste à ne stocker que les éléments non nuls avec les index des lignes et colonnes correspondants à ces éléments non nuls, ce qui ne nécessite qu'un stockage en  $3nz$  éléments (éléments non nuls). Par rapport à la théorie des graphes, cela revient à ne stocker que les segments du graphe, avec leur valeur matricielle. Cette méthode est pratique en première approche souligne l'auteur, sauf qu'une fois renumérotée, la matrice soumise à une méthode de résolution est modifiée, et d'autres éléments apparaissent, ce qui complique la procédure de stockage.

Une autre solution consiste à renuméroter directement les nœuds des maillages. Cela permet de dépénaliser et de construire directement une matrice réduite en largeur de bande et en profil.

## II.6. Renumerotation des maillages

Peu de travaux ont porté sur la renumérotation des maillages, et ceux que nous avons trouvés remontent aux années 80-90. La première étude très descriptive que nous avons rencontrée remonte à 1986 et est réalisée par Kaveh [25].

L'auteur (Kaveh) a présenté deux méthodes de numérotation des nœuds d'un maillage donné : la première utilise les propriétés des connectivités des éléments du maillage, et la seconde renumérote le graphe associé à la matrice de rigidité (stiffness matrix).

Méthode de renumérotation des nœuds du maillage :

L'ensemble des nœuds est d'abord décomposé en sous-ensembles formant des contours. Un graphe à niveaux formé des segments du maillage (SRT : Shortest Route Tree) est ainsi généré. L'ordonnancement des nœuds est obtenu en générant un chemin ne contenant qu'un seul nœud par contour. Ces nœuds constituent alors un ensemble de nœuds de départ pour chacun des sous-ensembles (ou contours).

L'algorithme est donc comme suit :

- 1 – Choisir un nœud de départ adéquat ;
- 2 – Décomposer l'ensemble des nœuds en sous-ensembles formant des contours ;
- 3 – Créer un chemin à travers ces sous-ensembles ce qui formera un ensemble de nœuds de départ pour chaque sous-ensemble ;
- 4 – Renumeroter les nœuds de chaque sous-ensemble.

L'auteur présente ensuite six différentes méthodes pour déterminer le nœud de départ.

*Algorithme a :*

Pour chaque nœud, construire le graphe correspondant, et choisir ensuite le graphe le plus étroit (d'épaisseur minimale).

Cette méthode si elle est valable pour un nombre de nœuds très réduit ne peut être utilisée pour les maillages de grand ordre, en plus particulièrement ceux qui nous intéressent, les maillages des machines tournantes.

*Algorithme b :*

Construire un graphe à partir du nœud de plus faible degré, puis repérer les nœuds du dernier contour. A partir de chacun de ces nœuds, construire un graphe et choisir le graphe de moindre épaisseur.

Le nombre de tests est réduit pour les nœuds de départ, mais reste toutefois élevé, et dépend de l'épaisseur des graphes.

*Algorithme c :*

Construire un graphe à partir d'un nœud quelconque, puis à partir du dernier contour, prendre le nœud de plus faible degré comme nœud de départ. Reprendre à partir de ce point l'algorithme *b*.

*Algorithme d :*

Il s'agit de l'algorithme *a*, sauf que la construction des graphes s'arrête dès qu'on s'aperçoit que l'épaisseur est plus forte que la minimale retenue.

*Algorithme e :*

Construire le graphe à partir d'un nœud quelconque, puis mettre de côté tous les nœuds voisins. Refaire le même travail avec un autre nœud (hormis les nœuds éliminés) et éliminer les

nœuds adjacents, puis choisir le nœud de départ qui donne le graphe de moindre épaisseur. Le processus de construction de ces graphes s'arrête dès que l'épaisseur du graphe dépasse la minimale retenue. Construire ensuite les graphes pour le nœud de départ retenu ainsi que pour les nœuds adjacents, et choisir le graphe de moindre épaisseur.

*Algorithme f :*

Cet algorithme est un peu plus élaboré que les cinq précédents.

1 – Générer un graphe, et à partir du dernier contour, sélectionner un nœud  $X_1$  de degré minimal. Relever la valeur de l'épaisseur du graphe ainsi obtenu ;

2 – Avec  $X_1$ , générer un graphe et sélectionner le nœud  $X_2$  de moindre degré du dernier contour ;

3 – Construire à partir de  $X_2$  un graphe et déterminer le nœud  $X_3$  lequel est le dernier nœud du graphe, et construire à partir de  $X_3$  un autre graphe et relever son épaisseur. Les nœuds  $X_1$  et  $X_2$  sont appelés les nœuds générateurs de  $X_3$ .

4 – Utiliser les couples de nœuds  $(X_1, X_2)$  et  $(X_1, X_3)$  comme générateurs des nœuds  $X_4$  et  $X_5$ . construire des graphes à partir de ces nœuds et relever leurs épaisseurs.

5 – Répéter (3) avec des nœuds  $X_i$  avec  $i = 4, 5, \dots$  jusqu'à ce qu'il n'y ait plus réduction de l'épaisseur du graphe.

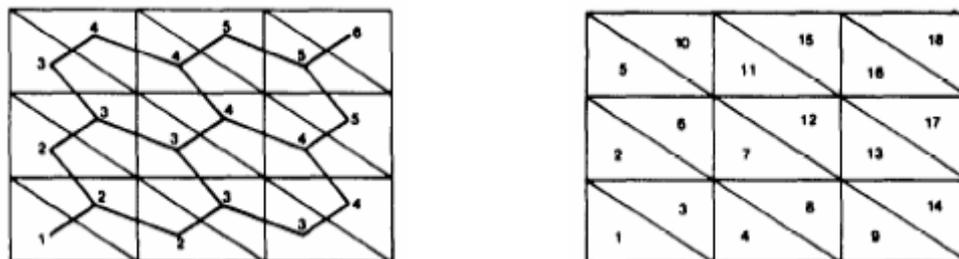
6 – Comparer les épaisseurs des graphes obtenus à partir des graphes initiés à partir des nœuds  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) et choisir celui dont l'épaisseur est minimale.

Les nœuds des contours obtenus sont numérotés selon la proximité avec le nœud de départ. Une renumérotation inverse est finalement appliquée au graphe final.

Les résultats sur cette méthode ont montré que les algorithmes (e) et (f) sont les plus gourmands en temps d'exécution. Cependant, vu les moyens de l'époque, ces algorithmes n'ont été appliqués que sur des maillages allant de 20 à 66 nœuds, pour des temps de numérotation variant dans ce dernier cas de 6,5 à 187,54 secondes. L'algorithme (c) est considéré par l'auteur comme étant le plus efficace.

Cette méthode est une version modifiée de la méthode GPS comme l'affirme l'auteur lui-même dans un travail ultérieur [21] et appliquée aux graphes découlant des maillages. L'auteur s'intéresse plus à réduire l'épaisseur du graphe sans s'intéresser à l'excentricité qui favorise un meilleur profil pour la matrice associée. De plus, l'auteur parle de contours, sans savoir si cela est équivalent aux niveaux (levels) définis dans les graphes. Enfin, l'auteur doit s'employer à chaque pas à construire le graphe associé à la matrice, ce qui induit un temps supplémentaire.

L'auteur présente également deux autres méthodes de renumérotation se basant sur le nivellement des éléments.



**Fig. II. 5.** Renumerotation des éléments d'un maillage donné

Par rapport à cette méthode, l'auteur propose de disposer d'abord des éléments selon des niveaux, les renuméroter, puis renuméroter les nœuds correspondants. La fig. II. 5. montre un exemple simple de renumérotation des éléments du maillage.

Les deux algorithmes proposés par Kaveh à cet effet sont complexes, l'un se basant sur un graphe associé au maillage et l'autre sur la structure des connectivités du maillage, ou l'on recherche les éléments voisins par comparaison des segments. Il est à noter que l'auteur n'a effectué aucune comparaison de ces deux méthodes avec la méthode de renumérotation des graphes proposé dans le même article.

Livesley et Sabin ont présenté [26] un certain nombre d'hypothèses dont certaines ont été appliquées par Kaveh quant à la façon de renuméroter les maillages. Ils font remarquer d'emblée que les méthodes GPS et RCM sont inefficaces pour la renumérotation de graphes provenant d'un maillage 3-D, ce que confirme Kaveh [21] en notant que dans ce cas, la taille des matrices semi bande ou des profils excèdent largement la capacité mémoire des ordinateurs. Ils font remarquer également que les stockages en profil (ligne de ciel) peuvent tolérer une renumérotation qui induit (localement) des « sauts » dans les largeurs de bande, sans pour autant affecter, parfois tout au contraire, la taille des profils. Certaines renumérotations peuvent donc augmenter la largeur de bande et réduire le profil. C'est le cas des méthodes de renumérotation dites de degré minimum et nested dissection présentées par George et Liu [22].

Les auteurs [26] remplacent le concept d'excentricité ou de diamètre ou de longueur maximale parfois par un concept d'épaisseur minimale. S'inspirant de la méthode GPS qui prend le nœud de départ comme nœud de moindre degré, ils font remarquer que ce nœud ne peut se situer dans le cas d'un maillage éléments finis que sur le contour externe du maillage, et plus particulièrement dans les angles des formes discrétisées. Ce constat est également fait par Sloan [81], mais qui précise que c'est dans le cas des éléments de grand ordre. Kaveh [21] a également estimé un bon nœud de départ comme étant les coins des systèmes maillés car susceptibles de présenter une plus grande excentricité. Livesley et Sabin estiment enfin que pour une bonne résolution avec les méthodes directes, il est plus intéressant d'obtenir une certaine régularité dans les largeurs de bande par ligne  $\beta_i$ .

Les auteurs ont présenté une méthode qui aborde le problème dans ce sens. Testé sur deux types de maillages en éléments cubiques (3D) et carrés (2D) pour des formes simples, les algorithmes ont montré une largeur de bande plus réduite et pratiquement constante. Les auteurs n'ont cependant pas fait une comparaison des temps d'exécution, et les comparaisons n'ont pas porté sur des structures complexes.

Les auteurs ont tenu à préciser que leur algorithme n'a pas la prétention d'être supérieur à celui de GPS, et qu'il n'est performant que pour une certaine classe de problèmes, la ou les nœuds ont pratiquement tous un degré constant.

Kaveh [21] note que les méthodes de renumérotation des maillages sont soit directes, c'est-à-dire une renumérotation des nœuds du maillage même, soit indirectes, c'est-à-dire un passage par le graphe de la matrice à réordonner. Il note également que les travaux les plus récents dans la renumérotation des maillages concerne plus la réduction du profil et de la largeur de front que de la largeur de bande. L'auteur note toutefois que les méthodes de minimisation de la largeur de bande sont les plus adaptées pour la réduction de la largeur de front. Ceci s'explique par le fait que la méthode frontale, s'appuyant sur la méthode de Gauss, est plus adaptée à la résolution des problèmes éléments finis. En effet, cette méthode introduite par Irons en 1970 [20] reste d'actualité, et a évolué vers le début des années 80 pour s'adapter aux matrices. Les méthodes multifrontales font actuellement l'objet d'intenses études.

Le choix du nœud de départ tel que fourni par la méthode GPS est amélioré par de nouveaux algorithmes adaptés aux éléments finis. Kaveh [21] note qu'un maillage éléments finis peut présenter plusieurs nœuds répondant au critère de pseudo périphérique tel que défini par la méthode GPS. Un choix arbitraire de ces nœuds peut influencer sur l'efficacité de la méthode. Des algorithmes tels celui de Sloan [81] ou celui de Souza et Murray [82]. Le premier a ajouté une procédure de tri des nœuds pseudopériphériques éligibles, et les derniers ont amélioré la méthode en introduisant une procédure dans la recherche du deuxième nœud pseudopériphérique. L'auteur remarque toutefois que les deux méthodes induisent un temps de recherche supplémentaire.

Kaveh [21] a donné deux algorithmes de réduction des largeurs de front basés sur la renumérotation des graphes où le choix de la priorité des nœuds dans un niveau n'est plus donnée par le degré, mais par des fonctions établissant l'appartenance aux niveaux inférieur et supérieur. Koo et Chai [32] ont également donné deux algorithmes de même type. Les auteurs de cette étude proposent d'abord de numéroter les éléments puis de renuméroter les nœuds selon le nivellement des éléments et par degré les nœuds du maillage. Les auteurs comparent leurs résultats avec la méthode GPS et font observer que leur méthode est plus performante et plus rapide. Il est à noter toutefois que dans cette étude, l'application de la méthode GPS passe d'abord par la construction du graphe associé au maillage, lequel temps est comptabilisé dans les comparaisons.

Certains auteurs proposent d'adjoindre des algorithmes de renumérotation des nœuds des maillages avec le générateur, comme c'est le cas de l'étude proposée en [27]. Cette opération permet de réduire les contraintes sur le processeur.

## II.7. Méthodes de résolution des systèmes linéaires découlant des problèmes MEF

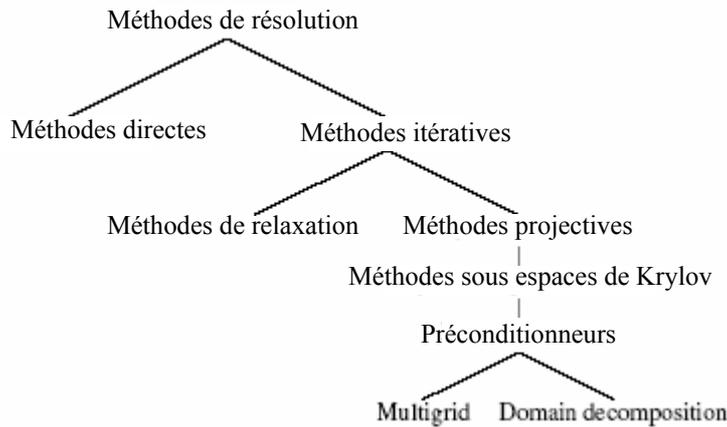
Le système à résoudre dans un problème éléments finis est du type :

$$[A](x) = (b) \quad (\text{II-28})$$

Où  $[A]$  représente une matrice à  $n \times n$  éléments, appelée également matrice globale ou matrice de rigidité (stiffness matrix),  $(x)$  un vecteur inconnu à  $n$  éléments représentant le potentiel à déterminer, et  $(b)$  un vecteur connu à  $n$  éléments qui représente le vecteur des contraintes ou sollicitations.

La matrice  $[A]$  est dans le cas général une matrice creuse, symétrique, non singulière (admet une matrice inverse) définie positive et à diagonale dominante.

Divers types de méthodes ont été mises au point pour la résolution de ce système d'équations : des méthodes directes dont la solution est exacte, et le nombre d'opérations requis est un nombre fini, n'exigeant aucunement aucun test de convergence [14], et des méthodes indirectes qui sont en plein essor de développement, puisque l'espace mémoire requis pour ces méthodes est très réduit par rapport aux premières méthodes.



**Fig. II. 6.** Méthodes de résolution

### II. 7. 1. Méthodes directes

Les plus populaires des méthodes directes sont celles qui se basent sur une décomposition  $LU$  de la matrice  $A$  qui consiste en deux matrices triangulaires (matrice  $L$  pour la triangulaire inférieure et  $U$  pour la triangulaire supérieure) dont nous citerons les méthodes de Gauss et la méthode de Cholesky. Il est à noter que cette dernière est deux fois plus rapide que la méthode de Gauss [80], qui tire avantage de la symétrie de ces matrices, et de leur caractéristique définie positive. Ces dernières méthodes sont les plus utilisées dans la résolution de ces systèmes éléments finis, quoique d'autres systèmes existent, mais sont évités vu leur coût. Parmi ces méthodes, on peut citer les méthodes de Jordan, HousHolder et de Crout [24, 17]

La méthode d'élimination de Gauss exploite les caractéristiques de la matrice  $[A]$  puisque ces matrices ne demandent nullement un changement de pivot [38].

L'équation devient donc comme suit :

$$[A] (x) = [L] [U] (x) \quad (\text{II-29})$$

On détermine un nouveau vecteur  $(y)$  tel que :

$$(y) = [U] (x) \quad (\text{II-30})$$

En résolvant l'équation :

$$[L] (y) = (b) \quad (\text{II-31})$$

On résout ensuite :

$$[U] (x) = (y) \quad (\text{II-32})$$

Dans le cas de la méthode de Gauss,  $[L]$  est une matrice triangulaire inférieure à termes unité, et  $[U]$  la matrice triangulaire supérieure trouvée par élimination de Gauss. La décomposition dans ce cas est dite de Doolittle [17, 24].

Pour la méthode de Cholesky, on cherche une décomposition telle que

$$[U] = [L]^t \quad (\text{II-33})$$

La méthode frontale basée sur la méthode d'élimination de Gauss et initialement adaptée à la méthode des éléments finis, puis étendue vers les autres systèmes matriciels se présente comme suit [21, 84]:

La matrice  $[A]$  et le vecteur  $(b)$  est construite à partir de matrices élémentaires et s'écrit comme suit :

$$[A] = \sum_{e=1}^{Ne} A^e \quad (b) = \sum_{e=1}^{Ne} b^e \quad (\text{II-34})$$

Où  $Ne$  est le nombre total d'éléments du maillage

Le système peut s'écrire comme suit :

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (\text{II-35})$$

Autrement formulée :

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^* x_j = b_i^* \quad (\text{II-36})$$

$$a_{kj}^* = a_{kj} - a_{ki} a_{ij}^* \quad \text{et} \quad b_k = b_k - a_{ki} b_i^* \quad (\text{II-37})$$

$$\sum_{j=1}^N a_{kj}^* x_j = b_k^* \quad (\text{résolution par remontée}). \quad (\text{II-38})$$

Cette méthode nécessite un nombre d'opérations égal à [21,31] :

$$N_{op} = O\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i^2\right) \quad (\text{II-39})$$

Les méthodes directes sont très utilisées et représentent les solutionneurs dans beaucoup de logiciels informatiques liés aux éléments finis [19, 23]. En effet, ce sont des méthodes qui sont très robustes, et dont le temps de résolution est souvent prévisible. Il est possible de résoudre avec ces méthodes des problèmes de dimensions relativement importantes, spécialement pour des problèmes en 2D, ce qui n'est pas le cas pour les problèmes 3D, où les matrices de rigidité sont généralement moins creuses. Dans ce dernier cas, le recours aux méthodes indirectes est inévitable.

Ces méthodes qui présentent un avantage certain dans le stockage, présentent cependant des temps de résolution qui dépendent fortement des coefficients des matrices, de la précision désirée et autres facteurs liés à la nature du pré conditionnement utilisé. Ces méthodes, dans le cas des systèmes larges, prennent progressivement le relais des méthodes directes [23].

## II. 7. 2. Méthodes itératives

On distingue deux classes de méthodes de résolution itératives : les méthodes dites de relaxation et les méthodes projectives. Ces méthodes génèrent une suite de vecteurs  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$  avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$  avec  $x^*$  solution exacte du système d'équations.

### II. 7. 2. 1. Méthodes de relaxation

Ce sont des méthodes qui reposent sur une décomposition de la matrice  $[A]$  comme suit :

$$A = D - L - U \quad (\text{II-40})$$

Où  $D$  est une matrice diagonale,  $L$  et  $U$  des matrices strictement triangulaires inférieure et supérieure. Parmi ces méthodes on cite les méthodes de Jacobi, de Gauss Seidel et les méthodes de relaxation propres (SOR : Successive Over Relaxation) sur relaxation et sous relaxation et les méthodes SSOR, avec les méthodes d'accélération de Chebychev. Ce sont les ancêtres des méthodes itératives. [23, 68].

La convergence de ces méthodes est garantie si la matrice  $A$  est à diagonale dominante. Les méthodes de relaxation ont été les premières méthodes itératives utilisées pour la résolution des systèmes éléments finis.

### II. 7. 2. Méthodes projectives

Le principe des sous espaces est d'extraire une solution approchée d'un sous-espace de  $\mathcal{R}^n$ . Si  $\mathcal{K}$  est le sous espace recherché de dimension  $m$  on doit imposer  $m$  contraintes. Cela se fait en contraignant le vecteur  $b - Ax$  à être orthogonal à  $m$  vecteurs linéairement indépendants. On définit un autre espace  $\mathcal{L}$  de dimension  $m$  appelé sous-espace des contraintes auquel le vecteur résiduel est orthogonal.

On définit ainsi deux classes de méthodes projectives : la classe orthogonale quand  $\mathcal{K}=\mathcal{L}$  et la classe oblique pour  $\mathcal{K}\neq\mathcal{L}$ . La solution cherchée par les méthodes projectives  $\tilde{x} \in \mathcal{K}$  doit être telle que le vecteur résiduel soit orthogonal à  $\mathcal{L}$ .

Un type de méthodes projectives est la méthode du sous-espace de Krylov. Dans ce cas,  $\mathcal{K}$  est le sous espace de Krylov, défini comme suit :

$$\mathcal{K}_m(A, r^0) = \{ r^0, Ar^0, A^2 r^0, \dots, A^{m-1} r^0 \} \text{ espace de dimension } m.$$

$r^0$  est le vecteur résidu  $b - Ax^0$

L'approximation obtenue pour le sous espace de Krylov est comme suit :

$$A^{-1}b \approx x^m = x^0 + q_{m-1}(A) r^0$$

Avec  $q_{m-1}$  polynôme de degré  $m-1$ .

Dans le choix de  $\mathcal{L}_m$ , deux types de méthodes se présentent : les méthodes d'Arnoldi où l'on considère  $\mathcal{L}_m = \mathcal{K}_m$  et les méthodes du résidu minimum où  $\mathcal{L}_m = A \mathcal{K}_m$ .

L'une des plus performantes et des plus populaires méthodes des espaces de Krylov type Arnoldi est la méthode du gradient conjugué.

### II. 7. 2. 3. Préconditionnement :

C'est une opération qui consiste à transformer un système d'équations en un autre équivalent mais plus adapté aux méthodes itératives. Un preconditionneur ou matrice de preconditionnement est une matrice qui assure l'opération.

Si  $M$  est une matrice non singulière approximant  $A$  dans un sens, le système linéaire suivant possède la même solution que le système initial :

$$M^{-1}A x = M^{-1}b \tag{II-42}$$

Le système précédent est preconditionné par la gauche. Il peut également l'être par la droite :

$$A M^{-1} y = b \quad x = M^{-1} y \tag{II-43}$$

Dans le cas des sous-espaces de Krylov, il n'est pas nécessaire de construire les matrices  $M^{-1}A$  et  $A M^{-1}$ . Cela mène à perdre l'avantage de la nature creuse des matrices, et ces matrices consomment un temps pour leur construction. Dans ce cas, un produit de vecteurs menant à la matrice  $M$  est utilisé comme suit :

$$\begin{aligned} M &= M_1 \times M_2 & (II-44) \\ M_1 A M_2^{-1} y &= M_1^{-1} b & x = M_2^{-1} y \end{aligned}$$

Si les matrices  $A$  et  $M$  sont symétriques définies positives, la convergence de la méthode du gradient conjugué est la même dans tous les cas.

Un bon préconditionneur doit :

- assurer une résolution aisée du système préconditionné : la convergence doit être assurée en un nombre d'itérations minimal ;
- assurer un moindre coût dans l'opération de préconditionnement : chaque itération doit être rapide.

Un compromis est généralement requis entre ces deux exigences.

Il y a deux approches pour la construction des préconditionneurs : la première, très utilisée dans la résolution MEF, consiste à construire des algorithmes spéciaux qui prennent en compte des conditions aux limites, de la nature des éléments finis utilisés, des régions où l'on recherche la solution exacte...etc. Les préconditionneurs multigrille (Algebraic Multigrid Method, AMG method, Geometric Multigrid method GMG method...) font partie de ces préconditionneurs. Les AMG sont des méthodes souvent plus faciles à développer et plus adaptés aux problèmes MEF.

La méthode du gradient conjugué considérée à sa naissance (1952) comme étant une méthode directe, a été délaissée durant près de deux décennies, avant d'être réhabilitée. Ce fut la première des méthodes dites projectives ou méthodes de projection d'espace de Krylov.

La méthode fut étendue ensuite pour donner naissance aux méthodes MINRES et SYMMLQ pour les systèmes matriciels symétriques non définis positifs, dont les dernières nées sont la méthode dite GMRES de Saad et Schultz, la méthode BI-CGSTAB de Van Der Vost. [23, 68]

#### II. 7. 2. 4. Les méthodes de Factorisation incomplète

Appelé également factorisation incomplète de Cholesky, ou ILU factorisation. La renumérotation des lignes et colonnes des matrices affecte positivement les factorisations ILU et augmente la stabilité des méthodes issues des espaces de Krylov (méthodes projectives). Les méthodes de renumérotation utilisées sont les méthodes classiques : méthodes RCM, GPS et algorithme de Sloan, qui sont des méthodes de minimisation de largeur de bande et de profil, propres aux méthodes directes telles la méthode de Cholesky et les méthodes frontales ainsi que les méthodes de réduction du profil telles la méthode du degré minimum et la méthode Nested Dissection. Les deux dernières méthodes citées sont peu efficaces par rapport aux méthodes de réduction de largeur de bande et de profil. Les auteurs préconisent l'utilisation de la méthode RCM dans ce cas. Cette renumérotation induit une meilleure stabilité aux méthodes itératives dites projectives, et accélère leur convergence [23,76,85].

### II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une étude bibliographique partant de la théorie des graphes, à leur renumérotation en vue d'une minimisation de largeur de bande et de profil, des renumérotations des maillages et enfin des diverses méthodes de résolution des systèmes linéaires découlant des problèmes éléments finis ainsi en insistant sur les stockages requis pour les résolutions avec les méthodes directes.

Les méthodes basées sur la renumérotation des graphes s'enrichissent de plus en plus. Cependant, elles restent coûteuses par rapport à leurs ancêtres, à savoir les méthodes RCM et GPS. Cette dernière constitue une méthode de référence pour établir les performances d'une méthode de renumérotation.

Pour les méthodes de renumérotation des maillages, deux types de méthodes se distinguent : les méthodes de renumérotation directe, appliquées généralement pour les maillages de formes simples, et les méthodes de renumérotation basées sur la renumérotation des graphes. Il faut souligner que ce procédé induit un temps supplémentaire et une complexité due à la construction du graphe associé au maillage. Cela est contraignant pour les méthodes qui imposent un remaillage local (méthode de la bande de roulement) ou global (remeshing method). La méthode de la ligne de glissement est une méthode qui induit une modification de la matrice à chaque pas, ce qui induit une renumérotation.

La renumérotation influe sur la largeur de bande et sur le profil, donc sur le coût des résolutions avec les méthodes directes et indirectes. Pour accélérer les processus de résolution en pas et pas dans le temps avec prise en compte du mouvement, nous avons été amenés à proposer deux méthodes plus rapides et plus efficaces que la méthode GPS. Ces deux méthodes renumérotent directement les maillages et sont très adaptées au calcul des machines tournantes. C'est l'objet du chapitre suivant.

## *Chapitre III*

# ELABORATION DE NOUVELLES MÉTHODES DE RENUMÉROTATION DE MAILLAGES MEF



### III.1.Introduction

L'étude du régime transitoire des machines à aimants permanents est une tâche qui requiert des méthodes numériques performantes, notamment lorsque l'étude se fait avec la méthode des éléments finis avec la prise en compte des mouvements relatifs des deux parties. Dans le cas d'un fonctionnement synchrone à vitesse constante, le problème ne se pose pas, du moment que l'étude peut se faire avec un maillage fixe. Mais, pour les régimes à vitesse variable, pour une prise en compte avec la méthode de la bande de roulement, le maillage reconnaît des reconstructions locales susceptibles de modifier la largeur de bande et le profil de la matrice de rigidité du système, ce qui affecte le coût en résolution.

L'application de méthodes classiques telles les méthodes GPS et RCM remédient à ce problème, sauf qu'ils induisent des temps supplémentaires lors de la construction des graphes. A chaque déplacement des arêtes de la bande de roulement, l'algorithme doit être appliqué, ce qui implique un coût évident.

Dans ce chapitre, nous présentons deux méthodes de renumérotation des nœuds du maillage des machines tournantes à aimants permanents. Ces deux méthodes sont extrêmement rapides et plus performantes pour la minimisation de la largeur de bande et du profil pour la première et pour la réduction du seul profil pour la deuxième.

Nous donnons également dans ce qui suit une procédure d'écriture de la matrice dans les vecteurs stockage directement à partir des maillages, ce qui nous permet de dépénaliser les contraintes de restructuration des matrices et ainsi d'optimiser les temps de résolution.

La première méthode repose sur la connectivité des nœuds [57, 58, 61] et la deuxième sur la position géométrique des nœuds [58, 59, 60]. Les algorithmes de résolution et de stockage sont fournis par [22], ainsi que le programme de comparaison, la méthode GPS appliquée aux graphes. On verra donc comment passer d'un maillage à un graphe tel que décrit en [22]

### III.2.Description d'un maillage

Ce chapitre n'a pas la prétention de donner les méthodes de génération des maillages, mais celui de les décrire et de compléter cette description par de nouveaux concepts qui permettront de mieux les manipuler. Tous les maillages réalisés (à l'exception des maillages réguliers) proviennent d'un logiciel freeware disponible sur le réseau Web développé par David Meeker, du nom de Femm (Finite Element Magnetics Method).

#### III. 2. 1. Tables de connectivité et de coordonnées généralisées

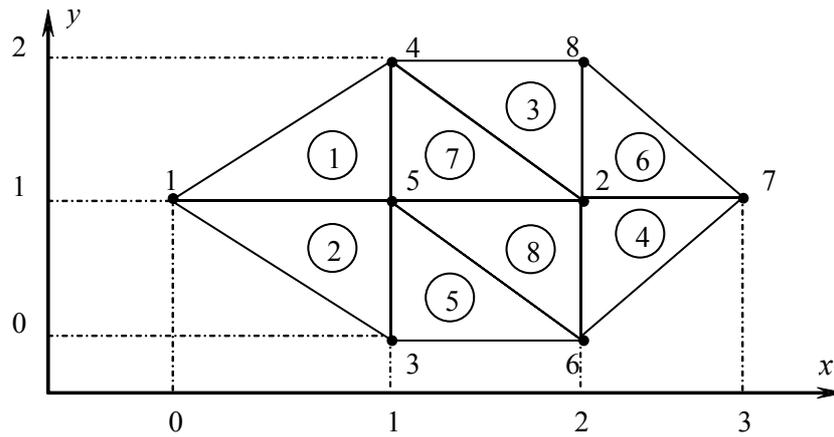
Un maillage éléments finis est souvent décrit par deux tables [12, 17] : une table de coordonnées généralisées décrivant les positions géométriques de chaque nœud, et des connectivités de ces nœuds, c'est-à-dire l'ordre de formation des éléments de ces maillages. Notre étude se limite aux maillages 2-D.

Soit le maillage de la figure III.1. composé de 08 nœuds et 08 éléments triangulaires. Ce maillage peut être représenté simplement par les tables Tab. III. 1. et Tab. III. 2.

La table de connectivités est comme suit :

Elément	1	2	3	4	5	6	7	8
Nœud 1	1	1	4	7	6	8	5	5
Nœud 2	5	3	2	2	5	2	2	6
Nœud 3	4	5	8	6	3	7	4	2

**Tab III. 1.** Table des connectivités



**Fig. III. 1.** Maillage en éléments Triangulaires

Nœud N°	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>x</i>	0	2	1	1	1	2	3	2
<i>y</i>	1	1	0	2	1	0	1	2

**Tab III. 2.** Table des coordonnées généralisées

Ces deux tables seront simplement représentées par des matrices

$cnc(Ne,3)$  représentera la table des connectivités

$crg(N,2)$  représentera la table des coordonnées généralisées

ainsi  $cnc(3,2) = 2$  et  $crg(4,2) = 2$

### III. 2. 2. Tables additives

Pour la représentation des maillages et une meilleure manipulation des éléments, on a jugé nécessaire d'introduire deux tables supplémentaires :

Une table qui représente le degré de chaque nœud, c'est-à-dire le nombre d'éléments qui lui sont liés, et une table qui lie les éléments associés à chaque nœud.

Nœud N°	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	3	5	3	2	2

**Tab. III. 3.** Table des degrés des nœuds.

Élément	1	2	3	4	6	7	8	2	5	1	3	7	1	2	5	7	8	4	5	8	4	6	3	6
Noeud	1	2		3		4		5		6		7		8		8		8		8		8		

**Tab. III. 4.** Table des éléments liés aux nœuds.

Comme pour les connectivités, à chacune de ces deux tables on associera un vecteur :

$deg(N)$  pour la table des degrés des nœuds et

$elen(Nx)$  pour les éléments liés aux nœuds.

Avec

$$Nx = \sum_{i=1}^N deg(i) \tag{III-1}$$

Une autre définition de  $Nx$

$$Nx = 3 \times Ne \tag{III-2}$$

Il y a  $Np$  nœuds périphériques et  $Ni$  nœuds internes, avec  $N = Np + Ni$ .

### III.3. Propriétés de la matrice de rigidité déduites du maillage

La matrice de rigidité dépend fortement du maillage. La seule connaissance du maillage permet d'en déduire ses caractéristiques, la position des éléments non nuls, les largeurs de bande par ligne  $\beta_i$ , la largeur de bande du système, ainsi que le profil de la matrice et le nombre d'éléments non nuls de la matrice.

#### III. 3. 1. Éléments non nuls

Le nombre d'éléments non nuls de la matrice, qui correspond au nombre de segments du graphe peut être déduit à partir de ces principes :

Le degré des nœuds internes représente le nombre de segments qui leur sont liés. En comptant tous les nœuds internes, on trouve tous les segments internes en double. Le degré des nœuds périphériques représente le nombre de segments qui leur sont liés +1.

La somme des degrés de tous les nœuds du maillage donne donc le double du nombre de segments du maillage augmenté du nombre de nœuds périphériques.

$$N_{seg} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \text{deg}(i) + Np \right) \quad (\text{III-3})$$

Cela peut être résumé par rapport à l'équation (III-1)

$$N_{seg} = (Nx + Np)/2 \quad (\text{III-4})$$

Ou directement à partir des propriétés du maillage même :

$$N_{seg} = (3 \times Ne + Np) / 2 \quad (\text{III-5})$$

Le nombre d'éléments non nuls dans la matrice de rigidité vaut alors :

$$N_{nz} = 2 \times N_{seg} + N = 3 \times Ne + Np + N \quad (\text{III-6})$$

Dans le cas du maillage de la fig. III. 1., le nombre de segments vaut 15, le nombre de nœuds périphériques vaut 6 et la somme de tous les degrés vaut 24 (voir Tab. III. 3.).

$$15 = (24 + 6) / 2$$

#### III. 3. 2. Définitions

Afin de mener à bien notre " identification " des maillages, nous avons introduit de nouvelles définitions [60, 61] :

Un élément triangulaire linéaire  $K$  est défini comme un ensemble formé d'un nœud appelé sommet  $x_K$  et d'une base  $B_K$ .

$$K = \{x_k, B_k\} \quad (\text{III-7})$$

La base  $B_K$  est un segment formé par une paire de nœuds  $y_K$  et  $z_K$  telle que  $B_k = (y_k, z_k)$ . Par circulation, chacun des nœuds de l'élément triangulaire peut constituer le sommet et les deux autres nœuds la base de l'élément.

Deux éléments adjacents sont définis comme deux éléments possédant le même sommet  $x$ :

$$\forall i, j \Big|_{i \neq j} \text{ si } x_i = x_j \text{ alors } Adj(K_i) = K_j \quad (\text{III-8})$$

On définit également deux éléments voisins comme deux éléments adjacents possédant un segment commun :

$$\forall i, j \Big|_{i \neq j} \text{ si } z_i = y_j \text{ et } Adj(K_i) = K_j \text{ alors } Vos(K_i) = K_j \quad (\text{III-9})$$

en faisant remarquer que dans le cas de III-8,  $Vos(K_j) \neq K_i$

On appellera structure un ensemble d'éléments adjacents :

$$Struc(x) = \{K_i \mid K_i = Adj(K(x))\} \quad (\text{III-10})$$

Enfin, la base d'une structure est donnée comme étant l'ensemble des nœuds formant les bases des éléments de la structure :

$$B(Struc(r_i)) = \{B_1, B_2, \dots\} = \{y_1, z_1, y_2, z_2, \dots\} \quad (\text{III-11})$$

### III. 3. 3. Largeur de bande et profil

La largeur de bande par ligne telle que définie en (II-6) peut être ramenée dans le cas d'un maillage éléments finis en considérant d'abord un élément isolé (voir exemple de § I. 4. 3.). La largeur de bande induite par chaque élément  $K$  de sommet  $x$  est donc comme suit :

$$\beta_{Kx} = \max \{ |cnc(K, i) - cnc(K, j)| \mid i = 1, 3 \text{ et } j = i + 1, 3 \}$$

La largeur de bande peut alors être étendu aux lignes qui correspondent à chaque nœud du maillage. A chaque nœud  $x$  peut être associée une structure d'éléments. La largeur de bande correspondant à la ligne du numéro de ce nœud peut donc être donnée comme suit :

$$\beta_x = \max \{ |cnc(K, i) - cnc(K, j)| \mid \forall K \in Struc(x) \mid i = 1, 3 \text{ et } j = i + 1, 3 \} \quad (\text{III-12})$$

La largeur de bande est donnée comme suit, si l'on considère  $i = x$ :

$$\beta = \max (\beta_i) \quad (\text{III-13})$$

et le profil est défini par [22]

$$Env(A) = \sum_{i=1}^N \beta_i \quad (\text{III-14})$$

### III.4. Graphe associé à la matrice de rigidité

Sera donnée dans ce qui suit la procédure de stockage des graphes tel que proposée par George et Liu [22]. Les auteurs notent que la procédure de stockage des graphes influe sensiblement sur les performances des méthodes de renumérotation.

Le stockage proposé consiste en deux vecteurs : une liste des nœuds adjacents ADJNCY pour  $x$  et une structure agencée XADJ (voir l'exemple proposé).

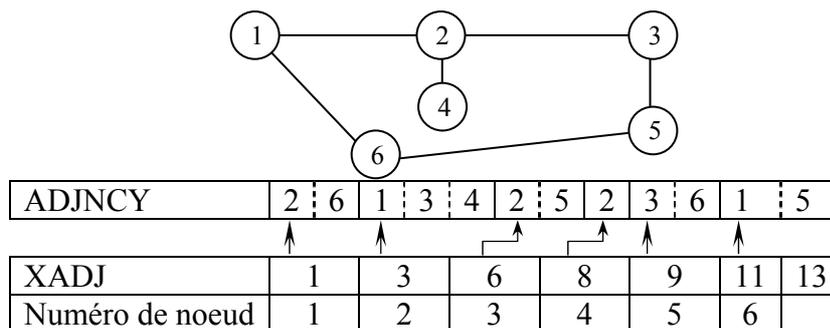


Fig. III. 2. Stockage des graphes selon [22]

Le vecteur ADJNCY est de dimension  $2 \times N_{seg}$  et le vecteur XADJ est de dimension  $N + 1$ .

La lecture de ces deux tables est aisée. Ainsi, le nœud 1 possède deux nœuds adjacents : les nœuds 2 et 6. Le nœud 3 possède deux adjacents : les nœuds 1,3 et 4.

On peut donc résumer comme suit :

$$Adj(x) = \{ADJNCY(i) / i = XADJ(x), XADJ(x+1) - 1\} \quad (III-15)$$

Pour tester la méthode GPS décrite par [22], nous avons du adapter ce stockage de graphe à nos maillages. Pour ce faire, il a été procédé comme suit :

- 1- Le nombre de segments liés aux nœuds internes est égal à leur degré
  - 2- Le nombre de segments liés aux nœuds périphériques est égal à leur degré + 1
- De ces deux propriétés, on a pu construire la table XADJ en utilisant l'algorithme suivant :

*Algorithme III-1 :*

```

XADJ(1) = 1
Pour x=1 à N faire
    Si x est périphérique alors XADJ(x+1) = XADJ(x) + deg(x) + 1
    Sinon XADJ(x+1) = XADJ(x) + deg(x)
Fin pour
    
```

Pour la table ADJNCY, le principe est un peu plus complexe.

*Algorithme III-2 :*

```

Pour i=1 à N faire :
    Si x est périphérique alors Dim = deg(i) + 1
    Sinon Dim = deg(i)
    Dimension mad (Dim)
    mad = B(Struc(i))
    ordonner les nœuds de mad selon le numéro croissant
    pour j=1 à Dim
        ADJNCY(XADJ(i) + j - 1) = mad (j)
    Fin pour j
Fin pour i
    
```

### **III.5. Stockage en profil (ou ligne de ciel ou stockage enveloppe)**

En vue d'une résolution Cholesky, George et Liu ont présenté une méthode de stockage en profil décrite par Jennings en 1966. Trois vecteurs sont utilisés :

- 1- Un vecteur des éléments diagonaux DIAG de dimension  $N$
- 2- Un vecteur ENV qui contient tous les éléments de l'enveloppe (éléments nuls et non nuls) de dimension égale au profil de la matrice
- 3- Un vecteur XENV de dimension  $N + 1$

### **III.6. Méthodes de renumérotation proposées**

#### **III. 6. 1. Méthode des connectivités**

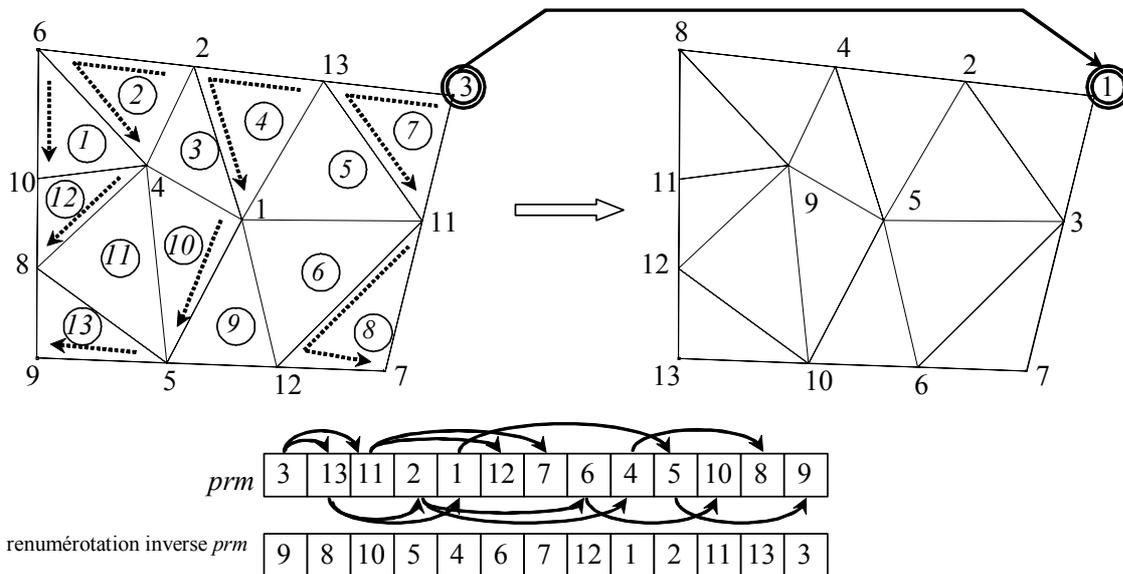
Cette méthode n'utilise que les connectivités du maillage pour être appliquée [60,61]. Elle consiste à construire des niveaux d'éléments et de renuméroter progressivement les nœuds du maillage.

L'algorithme de la méthode se présente comme suit :

*Algorithme III-3*

- 1- Choisir un nœud de départ. Celui-ci est pris sur la périphérie et est de moindre degré, comme suggéré au chapitre II. Ce nœud est noté  $r$
- 2- Construire la structure liée à ce nœud telle que définie en équation (III-10)
 
$$Struc(r_i) = \{K_1, K_2, \dots, K_i, \dots\}$$
- 3- Construire la base de la structure telle que définie en équation (III-11)
 
$$B(Struc(r_i)) = \{B_1, B_2, \dots\} = \{y_1, z_1, y_2, z_2, \dots\}$$
- 4- Stocker la base obtenue dans un vecteur permutation  $prm$
- 5- On pose  $r_{i+1} = y_1$  et
 
$$Struc(r_{i+1}) = Struc(r_{i+1}) - \{Struc(r_i) \cap Struc(r_{i+1})\}$$
- 6- Répéter l'étape 3 jusqu'à ce que tous les numéros des nœuds du maillage soient stockés dans le vecteur permutation  $prm$
- 7- Appliquer la renumérotation inverse au vecteur ainsi trouvé :
 
$$prm(i) = N - prm(i) + 1$$

Exemple d'application :



**Fig. III. 3.** Exemple d'application de la méthode basée sur les connectivités des éléments

Soit à considérer le maillage arbitraire de la figure Fig. III. 3. Sur la figure, la numérotation initiale est donnée sur le maillage de gauche. A droite, on a la renumérotation directe de ce maillage. Une renumérotation inverse doit être effectuée.

Le nœud de départ est choisi sur la périphérie, et représente un nœud de moindre degré. Dans le cas de ce maillage, ce nœud ne peut se situer que sur l'un des trois coins (nœuds 3, 7 ou 9). La procédure de recherche du nœud a été simplifiée pour signaler le premier nœud de moindre degré rencontré à la périphérie du domaine maillé.

$$r_1 = 3$$

$$prm(1) = 3$$

$$Struc(r_1) = \{k_7\} \text{ et } B(K_7) = (13, 11)$$

$$prm(2) = 13 \text{ et } prm(3) = 11$$

$$r_2 = 13 \text{ et } Struc(r_2) = \{K_4, K_5, K_7\} - \{K_7\} = \{K_4, K_5\}$$

$$B(\{K_5, K_7\}) = (2, 1) \text{ (le nœud 11 est déjà stocké dans } prm)$$

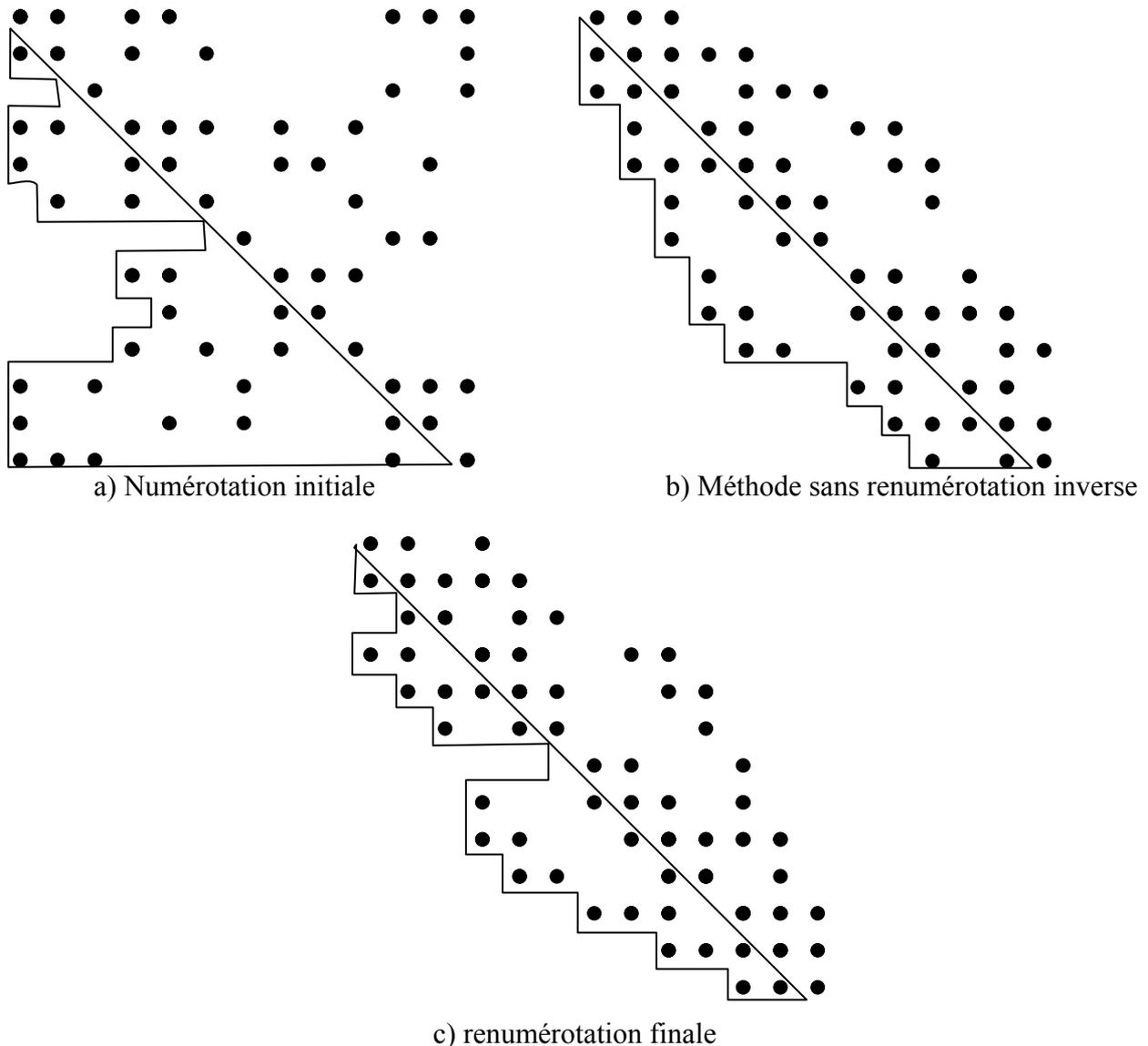
On prend alors  $prm(4) = 2$  et  $prm(5) = 1$

On reprend les opérations avec  $r_{i+1} = prm(3) = 11$

...etc,

Une renumérotation inverse est effectuée en fin de processus.

Dans les figures suivantes, nous avons relevé les éléments non nuls de la matrice de rigidité avant et après renumérotation, selon les maillages numérotés de la (fig III-3). Une certaine réduction de la largeur de bande est constatée : elle est ramenée de 12 à 5, et la valeur du profil de 59 à 38. Dans la table Tab. III-5 sont données les largeurs de bande par ligne avant et après renumérotation telle qu'apparaît sur la figure de gauche de la figure III-3. Il est à noter que la renumérotation inverse n'est pas appliquée dans ce premier cas de renumérotation.



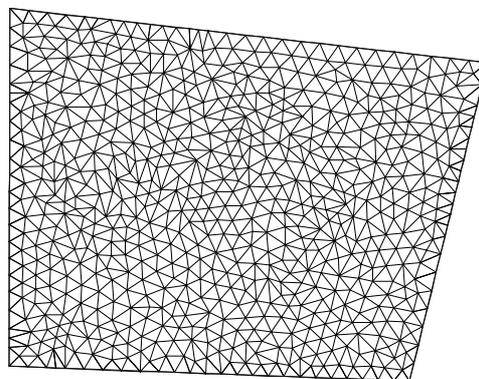
**Fig. III-4.** Eléments non nuls de la matrice de rigidité provenant du maillage (fig. III-3)

Numéro de ligne $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\beta$	$Env(A)$
$\beta_i$ cas a)	0	1	0	3	4	4	0	4	4	6	10	11	12	12	59
$\beta_i$ cas b)	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	3	3	3	5	38
$\beta_i$ cas c)	0	1	1	3	3	3	0	4	5	5	4	3	2	5	34

**Tab. III-5.** Largeurs de bande par ligne des matrices provenant des maillages initial et renuméroté (fig III. 4.).

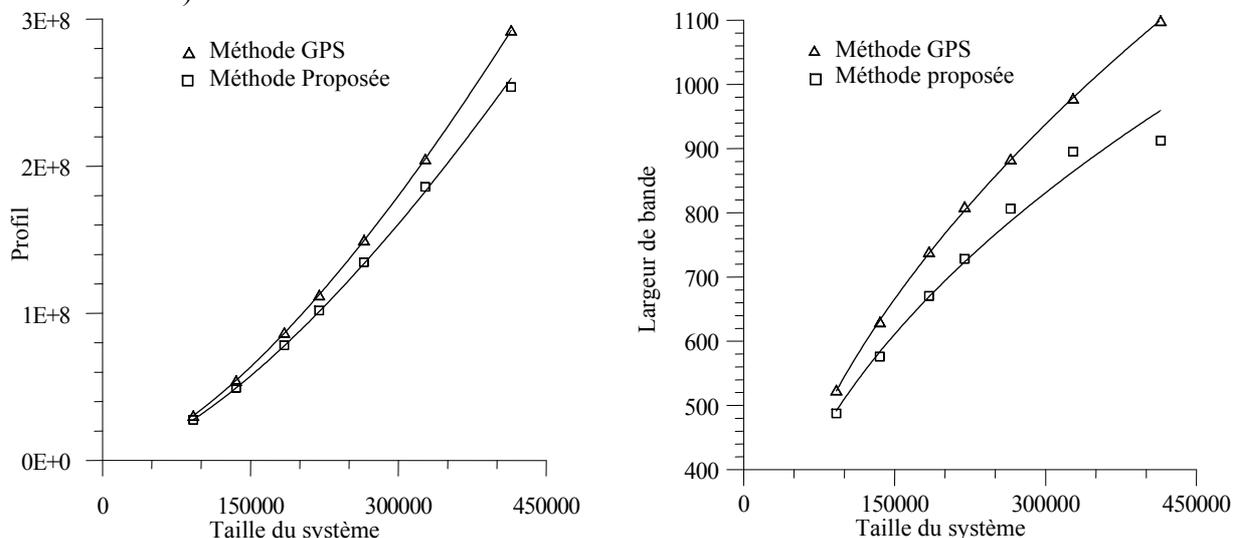
On constate suivant les résultats présentés dans le tableau Tab. III-5 que la renumérotation inverse ne permet de modifier nullement la largeur de bande du système, mais réduit le profil de la matrice du système.

L'efficacité d'une méthode ne peut être établie sur un seul exemple. Nous avons donc repris la même structure à laquelle il a été appliqué un maillage de plus en plus raffiné (voir fig. III.5). Le calcul des profils et des largeurs de bande se sont faites sur la base des formules développées précédemment (équations III-13 et III-14). On a appliqué la méthode proposée et la méthode de référence GPS à la renumérotation des différents maillages obtenus et nous avons relevé les différents profils et largeurs de bande que nous avons comparés en fig. III.6.

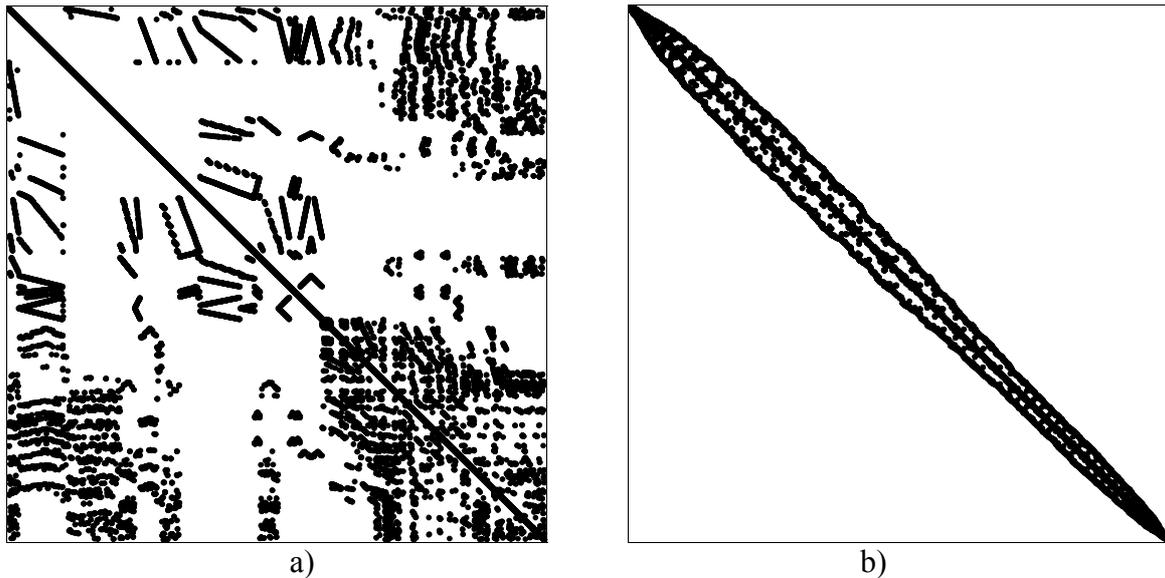


**Fig. III. 5.** Exemple de Maillage affiné de l'exemple développé.

Pour cela, nous avons directement utilisé le programme écrit en Langage Fortran fourni par [22] et celui que nous avons développé pour la méthode proposé qui est en langage fortran90. Les tables XADJ et ADJNCY sont déterminées à partir des algorithmes préalablement développés (*Algorithmes* III-1 et III-2). Dans la comparaison de la rapidité, nous avons poussé le maillage à des dimensions très grandes par rapport aux maillages 2-D (jusqu'à 430 000 nœuds).



**Fig. III. 6.** Profil et largeur de bande du système en fonction de la taille du système.



**Fig. III. 7.** Profil des matrices obtenues avec les deux méthodes  
 a) Avant renumérotation  
 b) Après renumérotation avec la méthode proposée

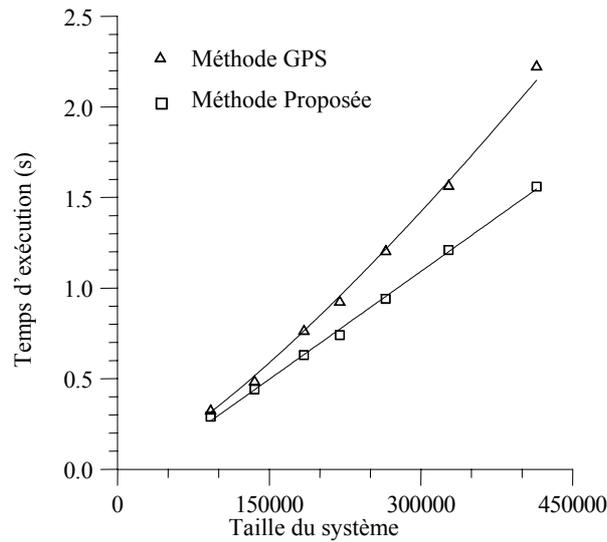
Le programme de renumérotation développé a été réalisé en Langage Fortran90. Les différentes simulations ont été faites sur un micro PC AMD Duron 750 MHz, 128 Mo de RAM. Nous avons retenu les temps de renumérotation, par rapport à la méthode GPS, **uniquement les temps de renumérotation du graphe**, sans tenir compte du temps mis pour la conversion du maillage en graphe.

La méthode élaborée permet ainsi de réduire de façon sensible la largeur de bande et le profil obtenus en appliquant la méthode GPS au graphe associé à la matrice du système. Cette réduction est de l'ordre de 10% pour le profil et de 15 à 25% pour la largeur de bande. L'algorithme de renumérotation développé est plus rapide que celui qui met en œuvre la méthode GPS. Ce dernier algorithme a été appliqué au graphe découlant de la matrice liée au maillage. Une réduction du temps d'exécution de l'ordre de 25 – 30% a été constatée.

En fig. III. 7. sont donnés les formes des matrices (éléments non nuls) de la structure prise en exemple d'abord dans sa forme brute telle que le maillage initial fourni par F.e.m.m et dans sa forme élaborée après renumérotation avec la méthode proposée. Les éléments non nuls se concentrent pratiquement au niveau de la diagonale et les largeurs de bande et le profil sont ainsi visiblement réduites.

A travers cet exemple, il a été montré que notre méthode est plus performante que la méthode GPS, et au vu de l'état de l'art, nous pensons que nous sommes en présence de la plus performante des méthodes de renumérotation des maillages basées sur l'excentricité maximale. Elle s'adapte à tous les types de structures maillées avec des éléments triangulaires.

Cette méthode peut encore être améliorée en effectuant une recherche du nœud de départ optimal. Kaveh [21, 28] a proposé d'effectuer des tests sur tous les nœuds du maillage. Certes, c'est la méthode la plus sûre pour trouver le nœud de départ, mais ce n'est néanmoins pas la plus rapide.



**Fig. III. 8.** Temps d'exécution pour les deux méthodes : la méthode proposée et la méthode GPS

La méthode proposée peut être améliorée de deux façons :

- 1- Le choix d'un meilleur nœud de départ ;
- 2- La réduction des largeurs de bande par ligne ;
- 3- La combinaison de 1- et 2-

Pour le choix du nœud de départ, nous proposons d'effectuer une recherche sur les nœuds du contour externe de la structure. Une procédure de construction de niveaux est introduite au niveau de l'algorithme et un rapport épaisseur du graphe (nombre de lignes maximal par niveau) à l'excentricité maximale du graphe est établie (nombre maximal de niveaux établi par le nœud ainsi choisi).

$$\alpha = \frac{\text{excentricité du graphe}}{\text{épaisseur du graphe}}$$

Le nœud optimal est obtenu pour une valeur minimale de  $\alpha$ . Cette procédure de recherche, est appliquée nœud par nœud sur tous les nœuds du contour. Dans la construction des niveaux, dès que la valeur de l'épaisseur du graphe est augmentée, le test est effectué sur le nœud suivant.

C'est une procédure de recherche qui reste très lente. Mais elle a permis de vérifier que le nœud choisi est un bon nœud de départ, mais pas le meilleur.

On peut adjoindre les algorithmes de Sloan pour la recherche du nœud de départ, ou bien adapter la méthode GPS à la méthode.

Pour la minimisation de la largeur de bande par ligne, nous proposons une optimisation de l'algorithme III-3 en insérant l'étape suivante entre les étapes 3 et 4. En effet, la largeur de bande dépend fortement de la manière avec laquelle les nœuds de chaque structure sont numérotés. Pour assurer une succession à même de réaliser le schéma proposé en fig. III-4, nous proposons de faire un rangement des éléments par voisinage, tels que défini en équation III-9.

L'algorithme modifié est donc le suivant :

*Algorithme III. 4*

- 1- Choisir un nœud de départ. Celui-ci est pris sur la périphérie et est de moindre degré, comme suggéré au chapitre II. Ce nœud est noté  $r$

- 2- Construire la structure liée à ce nœud telle que définie en équation (III-10)
 
$$Struc(r_i) = \{K_1, K_2, \dots, K_i, \dots\}$$
- 3- Construire la base de la structure telle que définie en équation (III-11)
 
$$B(Struc(r_i)) = \{B_1, B_2, \dots\} = \{y_1, z_1, y_2, z_2, \dots\}$$
  - 3.1. – Chercher l'élément  $K_i$  tel que  $y(K_i)$  soit unique dans  $B(Struc(r_i))$ 

$$K'_1 = K_i$$
  - 3.2. – Déterminer l'élément  $K'_2$  tel que
 
$$K'_2 = Vos(K'_1)$$
  - 3.3. –  $K'_1 = K'_2$
  - 3.4. – Refaire 3.2. jusqu'à avoir  $z(K'_2)$  unique dans la base  $B(Struc(r_i))$
- 4- Stocker la base obtenue dans un vecteur permutation  $prm$
- 5- On pose  $r_{i+1} = y_1$  et
 
$$Struc(r_{i+1}) = Struc(r_{i+1}) - \{Struc(r_i) \cap Struc(r_{i+1})\}$$
- 6- Répéter 3 jusqu'à ce que tous les numéros des nœuds du maillage soient stockés dans le vecteur permutation  $prm$
- 7- Appliquer la renumérotation inverse au vecteur ainsi trouvé :
 
$$prm(i) = N - prm(i) + 1$$

On reprendra l'exemple de maillage donné en fig.III.1.

Le premier nœud de moindre degré rencontré est le nœud 1 :  $r_1 = 1$  et  $prm(1) = 1$

Les éléments dont le sommet est  $r_1$  sont les éléments  $K_1$  et  $K_2$

$$Struc(r_1) = \{K_1, K_2\}$$

La base liée à la structure est comme suit :

$$B(Struc(r_1)) = \{B_1, B_2\} = \{y_1, z_1, y_2, z_2\} = \{5, 4, 3, 5\}$$

3. 1. le nœud  $y_2$  apparaît une seule fois dans la base.

On a donc  $K'_1 = K_2$

3. 2. la structure réagencée par voisinage devient :

$$Struc(r_1) = \{K_2, K_1\}$$

La base devient donc  $B = \{3, 5, 4\}$  (algorithme initial :  $\{5, 4, 3\}$ )

$$prm(2) = 3, prm(3) = 5, prm(4) = 4$$

$r_2 = prm(2) = 3$  ;  $Struc(3) = \{K_5\}$  ;  $B(K_5) = \{6, 5\}$  ;  $prm(5) = 6$  (le nœud 5 est déjà compris dans  $prm$ )

$r_3 = prm(3) = 5$  ;  $Struc(5) = \{K_7, K_8\}$  ; la structure devient  $Struc(5) = \{K_8, K_7\}$  ;

$$B(Struc(5)) = \{6\}$$
 (2 déjà dans  $prm$ )  $prm(6) = 2$  ;

$r_4 = prm(4) = 4$  ;  $Struc(4) = \{K_3\}$  ;  $B(Struc(4)) = \{8\}$  ;  $prm(7) = 8$

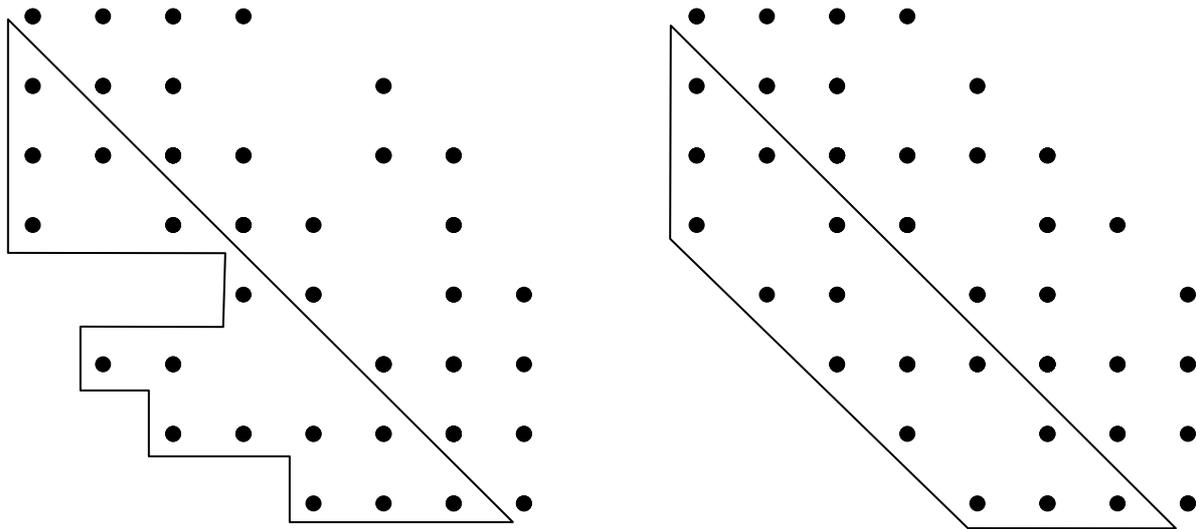
Enfin le nœud 8 est le dernier nœud  $prm(8) = 7$  ;

La renumérotation inverse est appliquée.

Les vecteurs  $prm$  donnés par la méthode initiale et la méthode modifiée sont donnés par la table Tab.III. 7

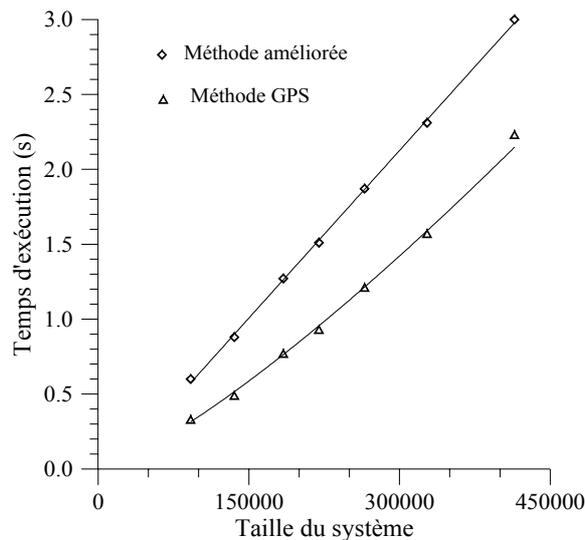
Méthode initiale	7	8	2	6	4	5	3	1
Méthode modifiée	7	8	2	6	3	4	5	1

**Tab. III. 7.** Vecteurs permutation pour le maillage de fig. III. 1.



**Fig. III. 9.** Profil et largeur de bande obtenus avec la méthode initiale et la version améliorée

Sur l'exemple de la figure III. 8, on constate une réduction de la largeur de bande en utilisant la méthode modifiée. Le profil est demeuré constant. En fait, ces résultats ne concernent que cette géométrie. L'amélioration peut amener soit une réduction du profil soit celle de la largeur de bande. Dans certains cas de figures, l'amélioration est insignifiante.

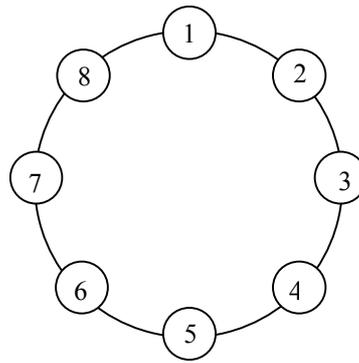


**Fig. III. 10.** Comparaison des temps d'exécution des algorithmes modifié et GPS.

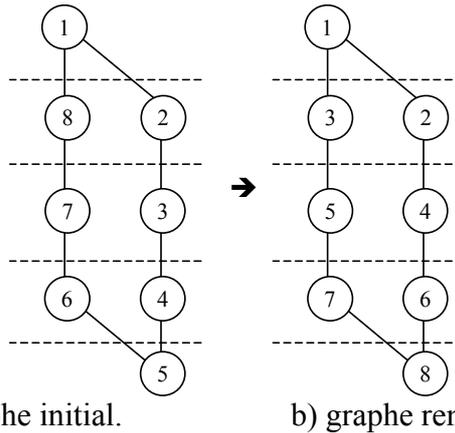
### III. 6. 3. Méthode des positions géométriques

Cette méthode est entièrement consacrée aux structures cylindriques creuses. Elle est donc spécialement adaptée aux machines électriques tournantes.

Soit le graphe de la figure III. 11. Elle représente une structure circulaire de base [60]. En appliquant le principe de l'excentricité maximale, et en numérotant niveau par niveau, on obtient la renumérotation de la figure (Fig.III. 12.) :



**Fig. III. 11.** Graphe fermé associé à une structure simple circulaire.



a) graphe initial.

b) graphe renuméroté.

**Fig. III. 12.** Excentricité maximale et renumérotation dans le cas de la structure circulaire.

On constate que la largeur de bande a été réduite. Une remarque est faite considérant que, sur le graphe (fig III. 12. b), on retrouve sur le côté gauche des nombres impairs, et sur la droite des nombres pairs. La matrice résultante de cette numérotation est comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \otimes & \otimes & & & & & \\ \otimes & 2 & & \otimes & & & & \\ \otimes & & 3 & & \otimes & & & \\ & \otimes & & 4 & & \otimes & & \\ & & \otimes & & 5 & & \otimes & \\ & & & \otimes & & 6 & & \otimes \\ & & & & \otimes & & 7 & \otimes \\ & & & & & \otimes & \otimes & 8 \end{pmatrix}$$

Ce principe est à la base de l'élaboration de la deuxième méthode de renumérotation des maillages proposée dans cette étude. Cette méthode est donc plus adaptée pour les maillages de structures circulaires. Cela consiste simplement à modifier la numérotation des nœuds en établissant un lien direct entre la position géométrique des nœuds  $(r, \theta)$  et leur renumérotation.

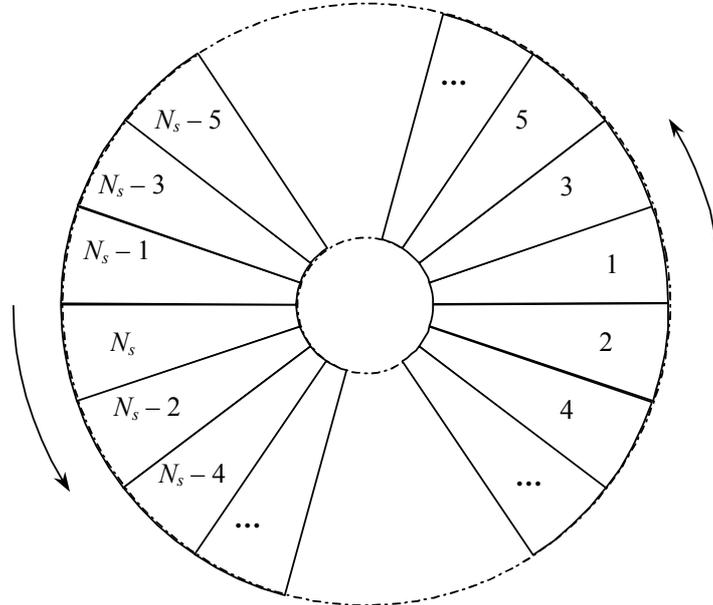
Considérons une structure cylindrique creuse quelconque. Effectuons une triangulation au sens de Delaunay. Il s'agit maintenant de numéroter ou de renuméroter les nœuds obtenus. Décomposons la structure en  $N_s$  secteurs ; où  $N_s$  est un nombre pair.

Chaque secteur porte alors sur une ouverture angulaire de  $2\pi/N_s$  (Fig. III. 13.). La numérotation de ces secteurs est particulière.

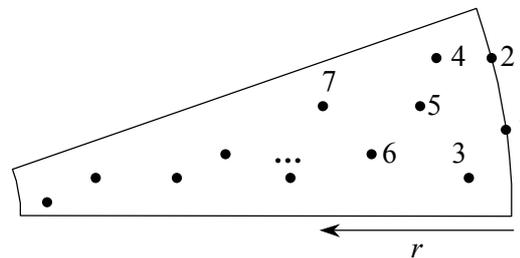
- On numérote en s'inspirant de la structure circulaire (figures III-11 et III-12) en progressant dans le sens trigonométrique avec des nombres impairs de 1 à  $N_s - 1$ , puis en numérotant de façon régressive avec les numéros pairs de  $N_s$  à 2.

- Les nœuds de chaque secteur sont comptés selon la valeur du rayon associé (Fig. III. 14.), comme pour le cas de la structure ouverte

L'algorithme nécessaire pour réaliser cette numérotation est de construction facile. La renumérotation selon la position géométrique des nœuds fournit un vecteur permutation appliqué directement à la numérotation des nœuds de chaque élément (connectivités).



**Fig. III. 13.** Décomposition et numérotation des secteurs



**Fig. III. 14.** Numérotation "radiale régressive" du nuage de points du secteur 1.

L'algorithme est de mise en œuvre très facile. Un rangement des nœuds se fait dans une matrice ayant  $N_s$  colonnes, chaque colonne correspondant à un secteur, et un nombre de lignes égal au maximum de nœuds présent dans les secteurs.

*Algorithme III-5*

$$\Delta\theta = 2\pi/N_s$$

Pour  $i$  allant de 1 à  $N_n$  faire

    Calculer  $\theta_i$

$k = \text{entière}(\theta_i/\Delta\theta)$

    si ( $k \leq N_s/2$ ) alors  $l_k = 2k + 1$

    sinon  $l_k = 2(N_s - k)$

    fin si

$P(l_k) = P(l_k + 1)$

$V(P(l_k), l_k) = i$

Fin pour  $i$

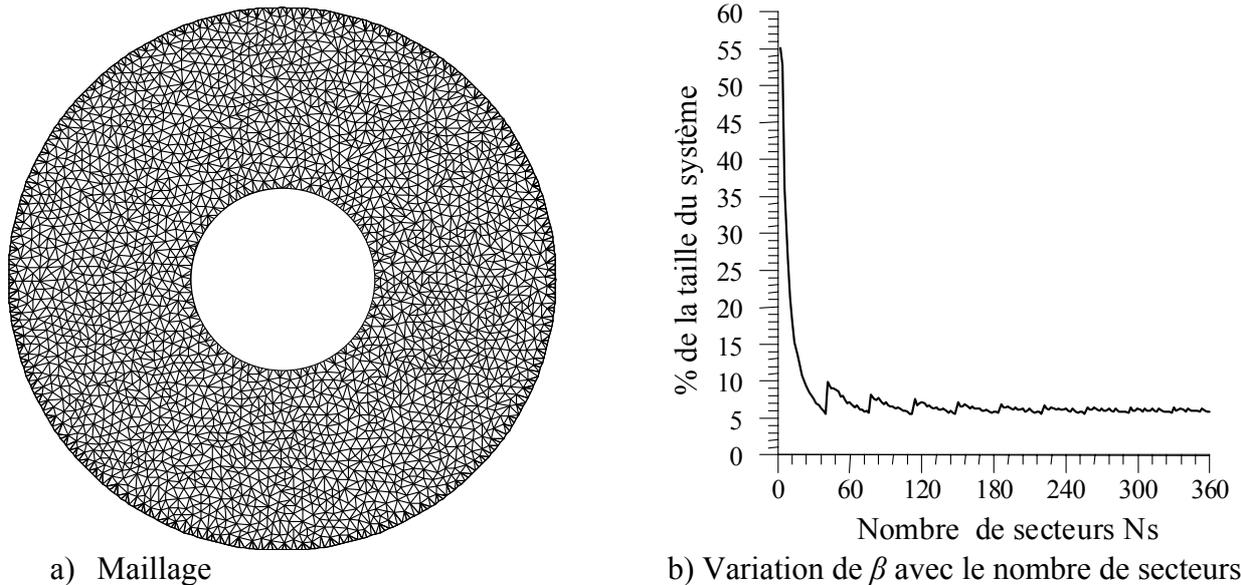
Pour  $i$  allant de 1 à  $N_s$  faire

```

Pour j allant de 1 à P(i)
  Pour k allant de j+1 à P(i)
    Si ( $R_{V(k,i)} > R_{V(j,i)}$ ) alors
      Permuter  $V(k,i)$  et  $V(j,i)$ 
    Fin si
  Fin pour k, j et i.
    
```

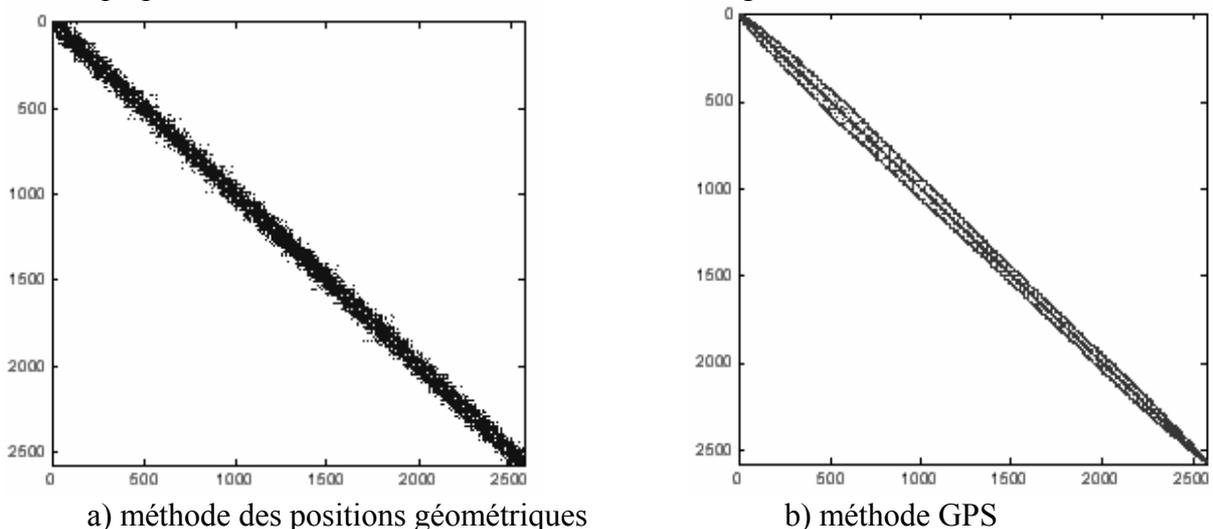
Fin pour k, j et i.

Le vecteur permutation *prm* est obtenu en y stockant progressivement la matrice  $V$ .  $R_{V(k,i)}$  est le rayon lié au nœud  $V(k,i)$ . L'algorithme est appliqué à une structure circulaire creuse simple (figure III-15)

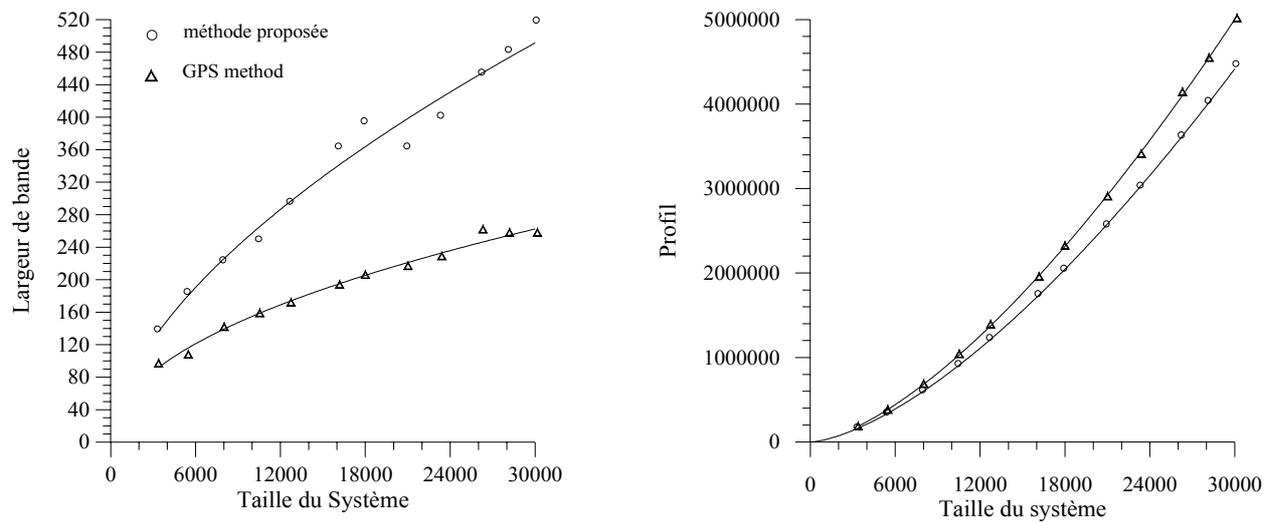


**Fig. III. 15.** Structure circulaire creuse simple (4925 éléments, 2548 nœuds).

Le choix du nombre de secteurs est crucial pour l'efficacité de la méthode. En effet, un grand nombre de secteurs implique un moindre nombre de nœuds par secteurs à ordonner, ce qui réduit le temps d'exécution de la méthode, mais cela peut entraîner des secteurs vides de nœuds, ce qui peut affecter négativement les performances de la méthode. En figure III-15-b, il a été relevé que pour la structure présentée, la largeur de bande est inversement proportionnelle au nombre de secteurs utilisé. Une certaine stabilité est relevée pour  $N_s$  élevé. Pour des raisons de commodité de programmation, et de rapidité d'exécution, le nombre de secteurs a été arrêté à 360, ce qui permet d'obtenir des secteurs d'ouverture 1 degré.



**Fig. III. 16.** Nature des matrices après renumérotation du maillage de la structure de Fig. III. 15.

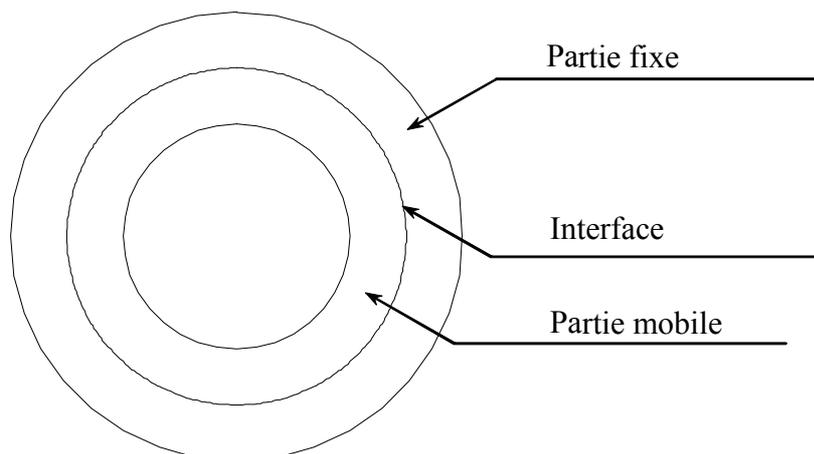


**Fig. III. 17.** Comparaison des largeur de bande et du profil obtenus avec la méthode des positions géométriques et la méthode GPS

Une comparaison des profil et largeur de bande obtenus avec la méthode des positions géométriques que nous avons proposé et la méthode GPS est faite en figure III-17. Le profil obtenu avec la méthode sur la structure déjà décrite est réduit par rapport à celui obtenu avec la méthode GPS, contrairement à la largeur de bande qui est pratiquement doublée dans certains cas.

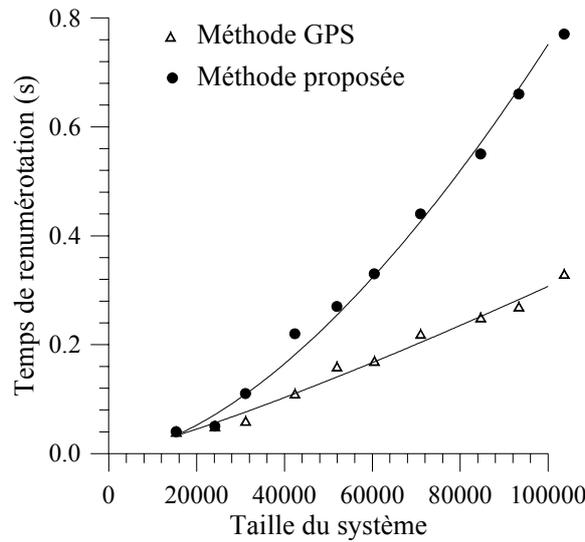
On pourra donc considérer cette méthode comme une méthode de réduction du profil. Les applications sur différentes structures de machines ont confirmé cette option. C'est l'objet du chapitre suivant.

Dans le cas du mouvement, cette méthode peut être assouplie en divisant la matrice  $V$  en deux matrices, l'une liée à la partie statique, que nous appellerons  $V_s$  et une matrice  $V_r$  liée à la partie tournante.



**Fig. III. 18.** Décomposition de la structure circulaire creuse en deux structures circulaires creuses.

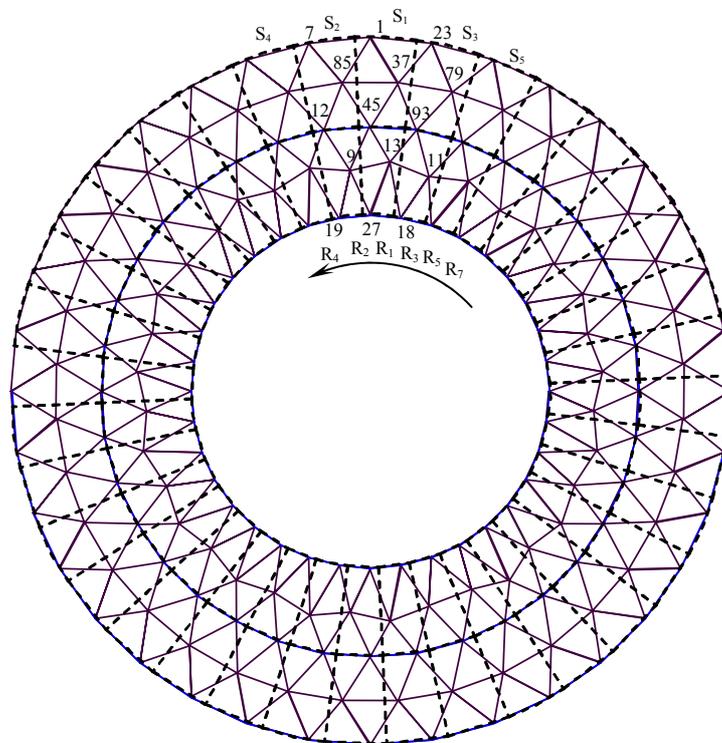
Cette décomposition permet d'accélérer les temps d'exécution de la méthode de façon à rendre son coût comparable à celui de la renumérotation des graphes avec la méthode GPS. (voir fig. III.19). La renumérotation d'une structure circulaire creuse dans ces conditions vaut  $8.10^{-6}$  secondes par nœud, et ceci pour un micro PC AMD Duron 750 Mhz, RAM 128 Mo. Ce temps peut être réduit en divisant la structure en plus de sous structures.



**Fig. III. 19.** Coûts comparés des méthodes GPS et proposée.

L'avantage dans le cas de la prise en compte du mouvement, est que la subdivision en secteurs ne s'effectue qu'une seule fois. Une fois les matrices  $V_s$  et  $V_r$  sont construites, le vecteur  $prm$  est directement construit à partir de ces matrices. Il faut noter qu'à partir de ces matrices, on peut scinder le système et renumérotter séparément les nœuds des deux parties en les considérant comme des parties à part.

On présente dans ce qui suit un exemple pour illustrer la méthode. Le maillage de la figure est fait en 128 nœuds. Il a été subdivisé en deux parties creuses, l'une contenant l'autre. L'ensemble a été subdivisé en 36 secteurs. Nous avons représenté uniquement les nœuds de trois secteurs.



**Fig. III. 20.** Découpage en secteurs d'une structure circulaire creuse.

1<sup>er</sup> cas : on renumérote toute la structure :

Dans ce cas, une seule matrice suffit. Elle sera nommée  $V$ . Elle contient 36 colonnes représentant chacune un secteur distinct. On a relevé que les secteurs contiennent au plus cinq nœuds. La matrice contient donc 5 lignes.

Les trois premières colonnes de la matrice sont comme suit (voir table suivante) :

$V(1, i) = S_1$	1	37	45	13	27
$V(2, i) = S_2$	7	85	12	9	19
$V(3, i) = S_3$	23	79	93	11	18

Le vecteur permutation se construit par assemblage des colonnes de  $V$  :

$prm$	1	37	45	13	27	7	85	12	9	19	23	79	93	11	18	...
-------	---	----	----	----	----	---	----	----	---	----	----	----	----	----	----	-----

2<sup>ème</sup> cas : On distingue deux parties : une partie mobile et une partie fixe

Comme dans le cas de la ligne de glissement ou de la bande de roulement. Dans ce cas, le mouvement relatif des nœuds se fait d'une partie par rapport à une autre. On crée un vecteur  $V_s$  pour la partie fixe, comprenant ou non la l'interface et une matrice  $V_r$  pour la partie mobile.

Par rapport à notre exemple, les matrices sont données comme suit :

$V_s(1, i) = S_1$	$V_s(1, i)$	1	37	45	$V_r(1, i) = R_1$	13	27
$V_s(2, i) = S_2$	$V_s(2, i)$	7	85	12	$V_r(2, i) = R_2$	9	19
$V_s(3, i) = S_3$	$V_s(3, i)$	23	79	93	$V_r(3, i) = R_3$	11	18

Le vecteur  $prm$  est construit par superposition des colonnes alternées de  $V_s$  et  $V_r$ . Le même vecteur est obtenu que pour le premier cas.

$$prm = (S_1, R_1, S_2, R_2, S_3, R_3, \dots)$$

Lors du mouvement, on voit que les nœuds de la partie mobile se sont déplacés. Il faudra alors assurer le déplacement des colonnes de  $V_r$ . Celles de  $V_s$  restent inchangées tout au long du mouvement. Lors d'une rotation comme indiqué sur la figure III-20, le secteur  $S_1$  concorde avec le secteur  $R_3$ , le secteur  $S_2$  au secteur  $R_1$ ,  $S_3$  à  $R_5$ , ... etc.

De ce fait, pour une rotation de 1 secteur, la renumérotation est donc simplement réalisée en effectuant des permutations aux colonnes de  $V_r$  sans affecter la matrice  $V_s$ .

$$prm = (S_1, R_3, S_2, R_1, S_3, R_5, \dots)$$

$prm$ initial	1	37	45	13	27	7	85	12	9	19	23	79	93	11	18	...
$prm$ après rotation d'1 pas	1	37	45	11	18	7	85	12	13	27	23	79	93	...	...	...

3<sup>ème</sup> cas : Soit à scinder les deux parties du maillage et renuméroter chaque partie séparément (cas de la méthode d'interface).

Dans ce cas, les deux matrices contiennent la ligne d'interface en commun, et deux vecteurs permutations  $prm$  sont construits :  $prm_s$  et  $prm_r$  (pour le stator et le rotor).

$V_s(1, i) = S_1$	$V_s(1, i)$	1	37	45	$V_r(1, i) = R_1$	45	13	27
$V_s(2, i) = S_2$	$V_s(2, i)$	7	85	12	$V_r(2, i) = R_2$	12	9	19
$V_s(3, i) = S_3$	$V_s(3, i)$	23	79	93	$V_r(3, i) = R_3$	93	11	18

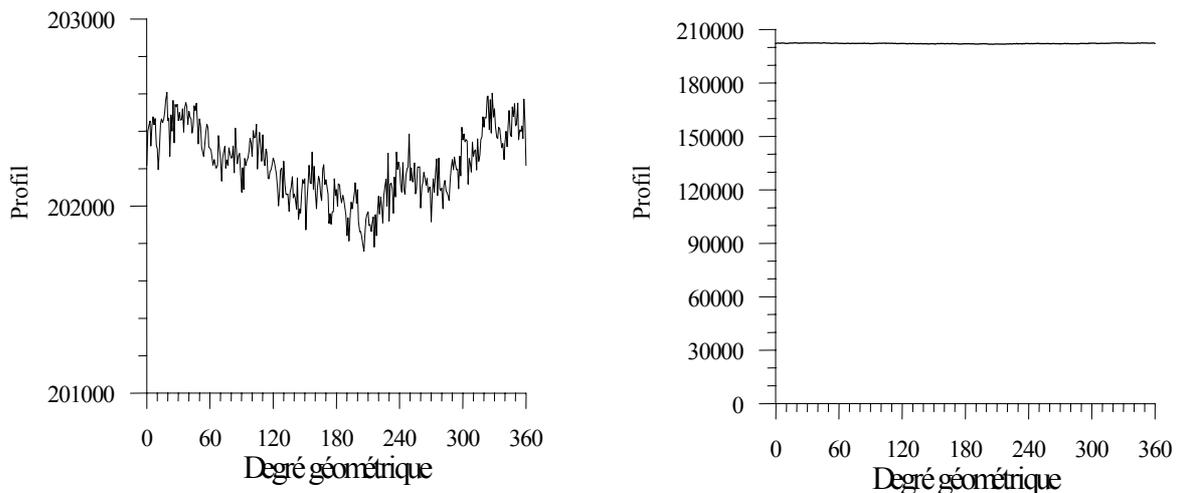
Les vecteurs permutation permettant de renuméroter les nœuds de chaque partie du maillage sont donc :

$$prm_s = (S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_{36})$$

$$prm_r = (R_1, R_2, R_3, R_4, \dots, R_{36})$$

Cette méthode présente l'avantage de n'être appliquée qu'une seule fois pour déterminer les éléments de la matrice  $V$ . Une restructuration de cette matrice suivant ses colonnes suffit pour générer des vecteurs permutation pour assurer une bonne renumérotation plus efficace pour le stockage en profil que la plus rapide des méthodes jusqu'à présent recensées. Cette méthode élimine pratiquement tous les temps de renumérotation lors du mouvement. Elle est donc parfaitement adaptée à la prise en considération du mouvement dans les machines électriques tournantes.

On a testé la méthode dans le cas de la bande de roulement. Nous avons donc créé une bande entre les deux partie de la structure pour un maillage suivant : 8431 éléments et 4422 nœuds. La bande de roulement contient 720 éléments, avec 360 nœuds sur chacun de ses deux contours. Le pas de rotation est de 1 degré.



**Fig. III. 21.** Variation du profil avec la rotation avec la méthode de la bande de roulement

Le programme développé effectue une renumérotation complète des nœuds avec prise en compte du mouvement (redéfinition des tables de coordonnées généralisées pour les nœuds du rotor, et des connectivités avec la renumérotation locale dans la bande de mouvement, sur 360 positions en rotation d'un tour complet).

On constate en figure III-21 que le profil de la matrice  $A$  demeure pratiquement constant (variation de l'ordre de 0,4%), ce qui confirme de la stabilité de notre méthode. La procédure complète de rotation (redéfinition des coordonnées des nœuds du rotor, redéfinition des connectivités de la bande de roulement, renumérotation des nœuds de toute la structure) n'a duré que 2,14 secondes pour 360 pas de rotation (sur un PC AMD Duron 750 Mhz, 128 Mo de RAM). Chaque pas de déplacement aura coûté moins de 6 millièmes de seconde avec redéfinition complète du maillage à chaque pas, et  $7.10^{-7}$  par nœud. Ces temps sont largement réduits pour les PC équipés des processeurs actuels.

### III.7. Conclusion

A travers ce chapitre, on a introduit des tables qui permettent de mieux définir les maillages, ainsi que des outils nous permettant de reconstituer la nature de la matrice à partir de la table des connectivités sans avoir à la construire.

Partant de la, nous avons développé deux méthodes de renumérotation des maillages plus rapides et plus efficaces que la méthode de référence, à savoir la méthode GPS. La première

méthode se généralise à toutes les formes de structures maillées, et la seconde est réservée aux structures circulaires creuses, ce qui est le cas des machines électriques tournantes.

La première méthode permet de réduire le profil et la largeur de bande fournis par la méthode GPS, qui, il faut le rappeler, est une méthode de renumérotation des graphes associés aux matrices symétriques. Nous avons introduit une procédure de réduction des largeurs de bande par ligne, sans induire un coût conséquent. Une procédure de recherche du nœud de départ est également proposée, mais dont le coût est prohibitif, et demeure valable sauf dans le cas des structures statiques.

La seconde méthode réduit uniquement le profil obtenu avec la méthode GPS. Elle présente l'avantage de la souplesse. Elle s'adapte bien pour dissocier les maillages des structures circulaires présentant des parties concentriques en mouvement relatif (interne pour le rotor et externe pour le stator) et procéder à une renumérotation séparée des deux parties ; elle peut également être exploitée pour prendre en compte le mouvement avec les méthodes de la ligne de glissement et de la bande de roulement. Dans ces cas, les temps d'exploitation sont négligeables au vu des résultats que nous avons présenté.

Dans le chapitre suivant, nous appliquons les méthodes que nous avons élaborées à la renumérotation des maillages de deux types de machines à aimants: une machine à aimants insérés avec cage d'écureuil et une machine à aimants collés à la surface. Dans ce dernier cas de figure, nous avons à considérer deux cas de maillages : un maillage au sens de Delaunay, et un maillage régulier. Enfin, une résolution Cholesky sera appliquée sur les structures renumérotées avec les méthodes proposées et la méthode GPS.

## *Chapitre IV*

APPLICATION  
AUX MACHINES  
À AIMANTS  
PERMANENTS  
ET PERSPECTIVES.



## IV.1. Introduction

La précision des résultats obtenus dans une simulation numérique quelconque dépend des outils mis en œuvre ainsi que des hypothèses adoptées. Dans le cas des systèmes d'équations algébriques linéaires, l'usage des méthodes directes est souvent recommandé pour leur précision. Cependant, elles sont parfois évitées pour leur stockage qui est prohibitif pour une certaine classe de problèmes, et remplacée par des méthodes itératives. Celles-ci présentent parfois des problèmes de divergence quand la précision exigée est trop importante. La préférence qu'on leur accorde est liée à leur rapidité.

Des méthodes de renumérotation des éléments des matrices de rigidité découlant des problèmes finis en vue de la réduction de la largeur de bande, du profil et de la largeur de front [14, 20, 21, 22, 25, 26, 32] ont été appliquées en vue de réduire les coûts induits par les méthodes directes. Ces méthodes étant plus adaptées aux graphes des matrices, il en découle des coûts supplémentaires lors de leur application.

Les méthodes que nous avons élaborées sont de mise en œuvre très simple, et s'adaptent beaucoup aux problèmes éléments finis avec prise en compte des mouvements. Leur rapidité et leur efficacité en font un outil efficace dans la modélisation des machines tournantes.

Ce chapitre traite donc de l'application de ces méthodes à deux types de machines à aimants pris comme exemple. Ce chapitre se termine par des perspectives offertes par les méthodes développées tant pour leur optimisation que pour des applications spéciales.

## IV.2. Structures de machines étudiées

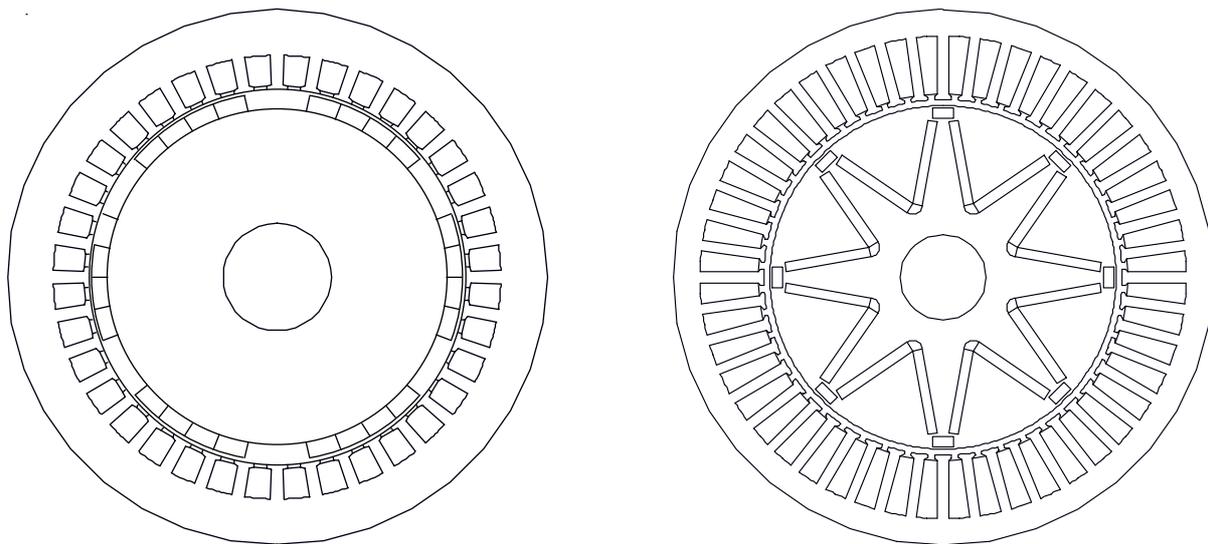
La première machine est un prototype développé à l'institut royal de technologie de Stockholm (Suède). Cette machine à aimants enterrés, destinée pour fonctionner à faibles vitesses ( $< 3000$  tr/min), possède 4 paires de pôles et une puissance de 15 kW. Sa longueur d'induit est de 110 mm ; son diamètre extérieur et sa largeur d'entrefer sont respectivement de 254 mm et de 2,9 mm. Le stator possède 48 encoches ayant une profondeur de 27 mm et une ouverture sur l'entrefer de 3mm. La densité de courants statoriques appliquée en régime nominal est de  $2,5$  A/mm<sup>2</sup>. Le rotor, équipé d'une cage d'écureuil de 8 barres de 5 x 10 mm située à 1 mm de l'entrefer, a un diamètre de 81 mm. Les aimants, de type Nd-Fe-B, ont une longueur de 50 mm et une épaisseur de 4,8 mm et présentent une ouverture de 75° électrique sous un pôle. Leurs aimantation, radiale, est de 1,22 T. [48,49].

La deuxième machine est une machine étudiée au laboratoire du GREEN (Nancy – France) [80]. Une machine hexapolaire de 60 kW dont l'entrefer mécanique vaut 0,3mm et le diamètre externe 35 cm. Les aimants d'épaisseur 1 cm présentent une aimantation rémanente de 1,2T et reposent sur un rotor de rayon de 11 cm. Le stator de longueur de 171mm comporte 36 encoches avec une densité de courants statoriques de  $1,77$  A/mm<sup>2</sup>. Son rayon d'alésage est de 12,3 cm

La troisième machine est une application particulière, car elle présente des symétries. Sa géométrie a été simplifiée en vue d'être facilement subdivisée en éléments de construction simple. Le maillage est donc régulier (les nœuds internes du maillage possèdent tous le même degré) [81].

### IV.3. Position du problème.

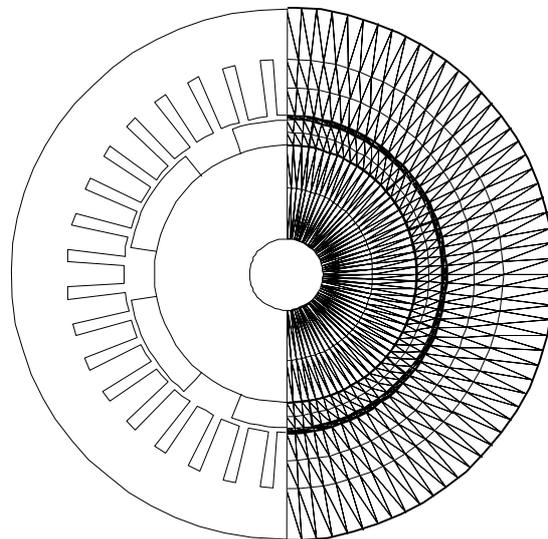
La prise en compte du mouvement dans les méthodes pas à pas requiert dans le cas de la méthode de la bande de roulement et de la ligne de glissement une redéfinition des numéros des nœuds, du moment que la largeur de bande et le profil de la matrice découlant de la formulation éléments finis augmentent. Ceci est très bien illustré par l'application faite à la machine (Fig. IV. 1. a.). Une première renumérotation des nœuds a permis de réduire la largeur de bande et de profil. Cependant, avec la rotation, ces dimensions fluctuent, et ceci de façon particulière pour la largeur de bande.



a) Machine à aimants collés à la surface

b) machine à aimants enterrés à cage

d'écureuil



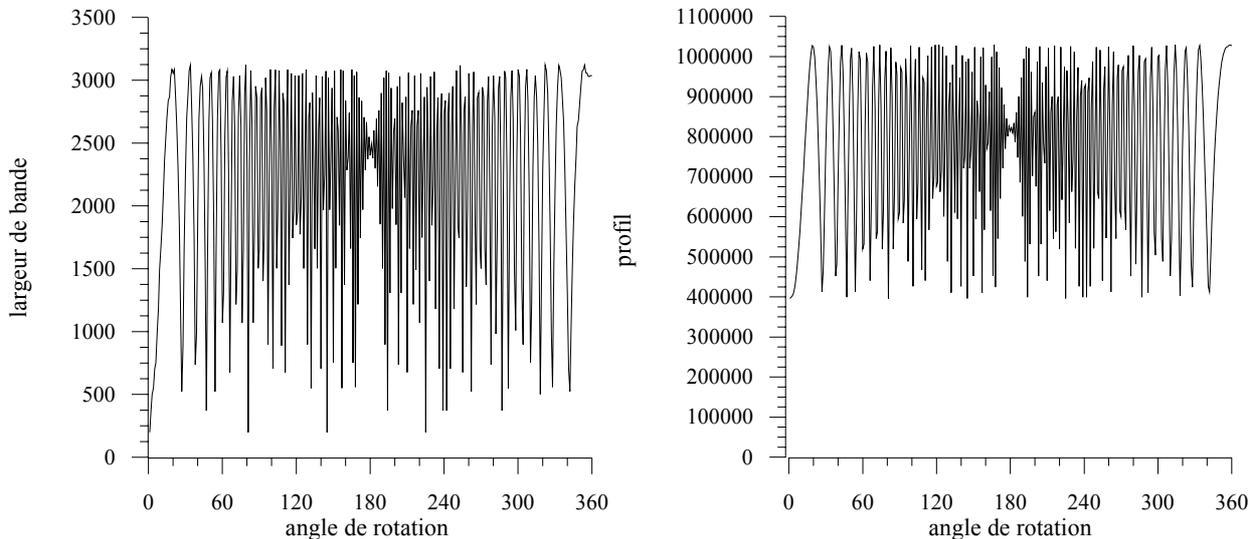
c) machine à aimants collés à la surface avec maillage régulier.

**Fig. IV. 1.** Machines étudiées

La figure IV. 2. montre les variations de la largeur de bande et du profil dans le cas d'une rotation complète ( $360^\circ$ ) avec un pas de rotation d'un degré géométrique. Les fluctuations qui apparaissent et qui sont relativement importantes font que le temps de résolution en mouvement sera mal estimé et important. De plus, la taille des vecteurs de stockage varie de façon très importante, ce qui influe très fortement sur les résolutions (certains pas seront lents et d'autres rapides). La largeur de bande évolue jusqu'à des valeurs de plus de 15 fois sa valeur initiale, et

le profil évolue jusqu'à des valeurs de près de 2,5 fois sa valeur initiale. Le maillage de la machine étudiée comporte dans ce cas 6958 Eléments et 3516 nœuds.

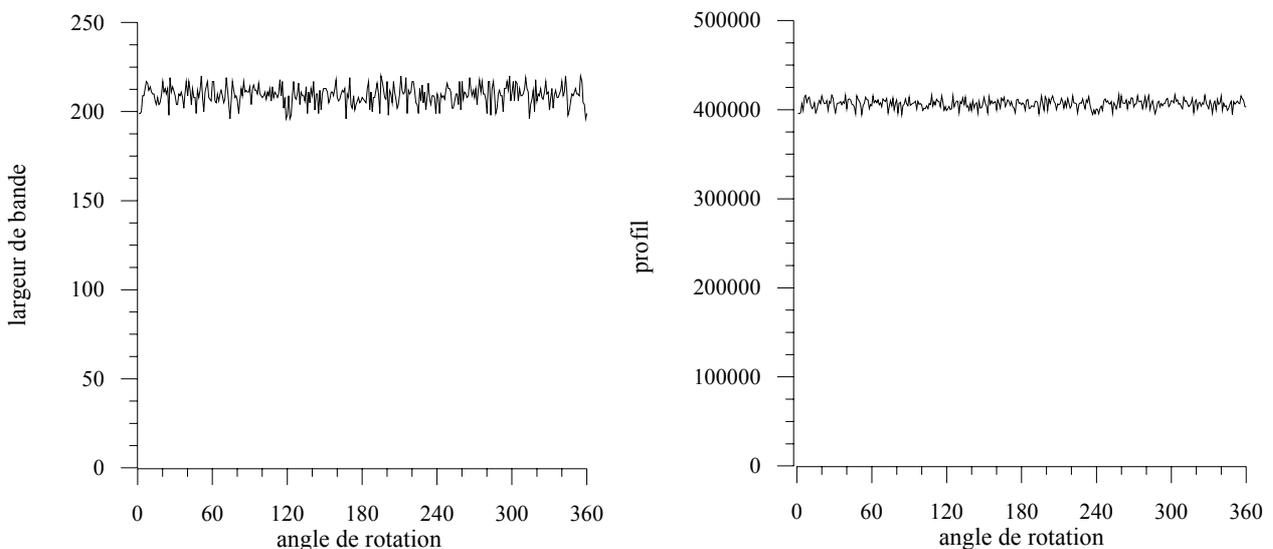
L'application d'algorithmes de renumérotation rapides et efficaces est donc requise pour accompagner les renumérotations locales des éléments de la bande de roulement. A chaque renumérotation locale, on devra effectuer une renumérotation globale. Les méthodes classiques (RCM, GPS ...) présentent l'inconvénient d'avoir constamment recours à un graphe, ce qui induit un coût trop important dans leur application.



**Fig. IV. 2.** Evolution de la largeur de bande et du profil dans le cas d'une rotation complète avec la méthode de la bande de roulement.

#### IV.4. Application de la méthode des connectivités

Cette méthode généralisable à toute géométrie en 2-D peut être également généralisée à des maillages 3-D effectués avec des éléments prismatiques. Dans le cas de la figure IV. 2. , nous avons appliqué une renumérotation globale de toute la structure avec la méthode des connectivités après chaque remaillage de la bande de roulement.

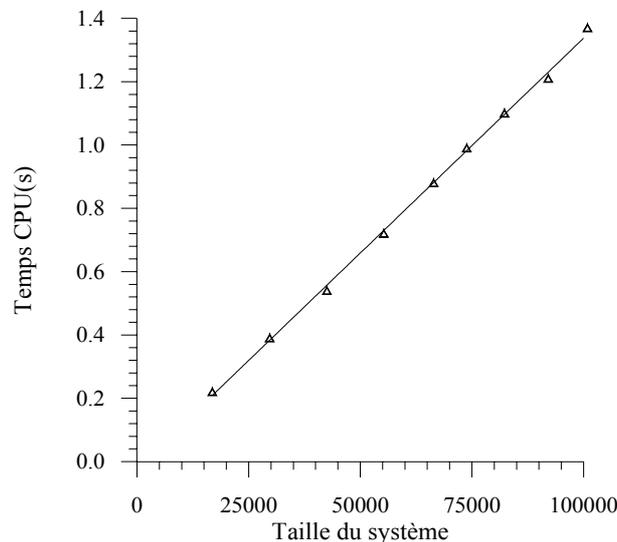


**Fig. IV. 3.** Evolution de la largeur de bande et du profil avec une rotation complète

Les résultats présentés en figure IV. 3. nous montrent une certaine stabilité dans les résultats de l'application de la méthode. Les largeur de bande et profil sont relativement constants durant toute la rotation, ce qui nous permet d'observer des pas de calcul presque identiques en coût. La méthode peut être considérée comme stable. Il est important de noter que dans ce cas de figure, la largeur de bande a été réduite de près de 13% alors que le profil a été réduit de près de 4% comparés aux réductions apportées par la méthode GPS [61].

Il est à noter que la rotation de 360° géométriques avec renumérotation globale du système (un tour complet) sur un pas d'1° (360 pas) s'est faite en 6,35 secondes, ce qui correspond à une renumérotation coûtant en moyenne 0,0175 secondes par pas de calcul pour la méthode proposée.

Par rapport à la méthode GPS, les temps de construction du graphe à partir de la table des connectivités coûte trois fois le temps de la renumérotation GPS, ce qui induit un temps supplémentaire dans l'application de la méthode. Un relevé du coût d'une renumérotation complète d'un pas avec la méthode GPS (comprenant le temps de construction du graphe et celui de sa renumérotation) est donné en figure IV.4.



**Fig. IV. 4.** Temps total d'exécution de la méthode GPS sur un maillage quelconque.

La méthode testée sur la machine à aimants enterrés a permis de réduire de façon considérable la largeur de bande du système, comparativement à celle trouvée par la méthode GPS. En effet, cette réduction atteint les 30% de la bande comparée (voir Table IV. 1.). Le profil par contre ne diminue pas avec les mêmes proportions que pour la largeur de bande. Il atteint tout juste les 8% du profil GPS [61]. Ces résultats sont comparables avec ceux donnés en figure III. 6. On peut donc généraliser en disant que la méthode des connectivités est une méthode efficace de réduction de la largeur de bande.

Maillage		Méthode GPS		Méthode Proposée		
$N_e$ (éléments)	$N$ (nœuds)	$\beta$	Env.	$\beta$	$\% \beta$	Envelope
8686	4400	164	$N_1$	154	6,09	0,997 $N_1$
11782	5948	243	$N_2$	199	18,10	0,953 $N_2$
14422	7268	305	$N_3$	242	20,65	0,940 $N_3$
20698	10306	435	$N_4$	325	25,28	0,923 $N_4$
28656	14385	597	$N_5$	428	28,30	0,922 $N_5$

**Table IV. 1.** Tableau comparatif des profil et largeur de bande pour différents maillages de la structure de la machines à aimants enterrés.

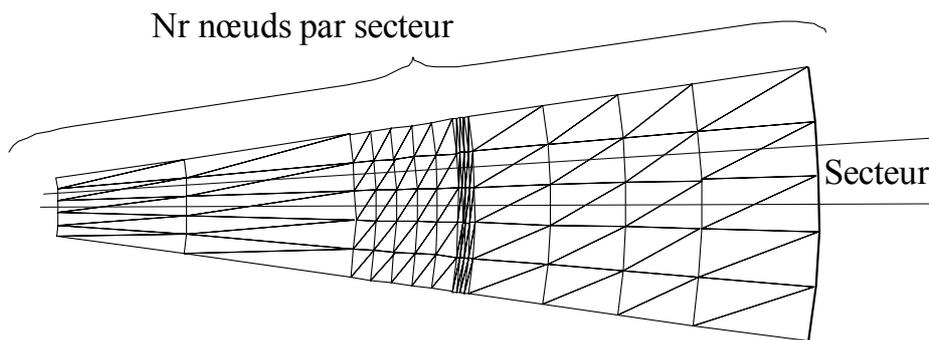
Un stockage en profil est donc réalisé, et une résolution avec la méthode de Cholesky est exécuté pour les divers maillages renumérotés avec les deux méthodes pour la machine à aimants enterrés. La procédure de stockage en profil et le programme de résolution Cholesky sont fournis par [22]. Les temps d'exécution sont donnés en table IV. 2.

System size	4400	5948	7268	10306	14385
Méthode GPS (s)	0,99	1,81	3,91	12,85	32,85
Méthode des connectivités (s)	0,88	1,70	3,10	10,22	26,71
Gain relatif (%) en temps	11,11	11,60	20,71	20,46	18.69

**Table IV. 2.** Tableau comparatif des temps d'exécution Cholesky

On constate un gain relatif en temps d'exécution qui va croissant avec l'importance des réductions des largeurs de bande et de profil. Cependant, cette croissance est freinée par les contraintes en matière de stockage induites par la mémoire de l'ordinateur utilisé.

Dans le cas de la méthode des maillages réguliers, les trois méthodes présentent une épaisseur régulière et pratiquement constante tout le long du graphe. Ce type de maillage présente des caractéristiques déductibles par raisonnement simpliste. Ainsi, connaissant le nombre de nœuds par secteur, ainsi que le nombre de secteurs (figure IV. 5.), on peut déduire les caractéristiques directes du maillage.



**Fig. IV. 5.** Structure de maillage régulier

Une structure cylindrique creuse en coupe circulaire comporte  $N_s$  secteurs contenant chacun  $N_r$  nœuds. Le nombre total d'éléments est donné par la relation suivante :

$$N_e = 2 \times N_s \times (N_r - 1)$$

Le nombre total de nœuds est donné par la relation suivante :

$$N = N_s \times N_r$$

Comme il existe  $2 \times N_s$  nœuds périphériques, le nombre de segments du maillage est donné en appliquant la relation (III-5) :

$$\begin{aligned} N_{seg} &= (3 \times N_e + N_p) / 2 \\ &= (6 \times N_s \times (N_r - 1) + 2 \times N_s) / 2 \\ &= 3 N - 2 N_s \end{aligned}$$

Et le nombre d'éléments non nuls dans la matrice est donné par (III-6)

$$\begin{aligned} N_{nz} &= 2 \times N_{seg} + N \\ &= 4 N - 2 N_s \end{aligned}$$

L'application des deux méthodes a donné les mêmes résultats tant que pour le profil que pour la largeur de bande. En effet cette dernière est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\beta &= 3Nr + 2 \text{ pour la méthode des connectivités et} \\ \beta &= 3Nr + 3 \text{ pour la méthode GPS.}\end{aligned}$$

L'avantage est bien sûr pour la méthode des connectivités pour sa rapidité.

#### IV.5. Méthode des positions géométriques

Cette méthode que nous avons décrite comme étant plutôt une méthode de réduction du profil, est une méthode extrêmement rapide. La structure de maillage régulier se prête bien à cette méthode puisque la méthode peut être directement appliquée en parallèle avec le maillage.

L'algorithme suivant permet de réaliser cette numérotation spéciale tout en créant la table des coordonnées généralisées ainsi que la table des connectivités.

Algorithme IV – 1.

Pour  $i$  allant de 0 à  $\frac{Ns}{2} - 1$  faire

$$\begin{aligned}\theta &= i \cdot \Delta\theta \\ m &= 2iNr + 1 \\ x(m) &= r \cdot \sin(\theta) \\ y(m) &= r \cdot \cos(\theta)\end{aligned}$$

fin pour  $i$

Pour  $i$  allant de  $\frac{Ns}{2}$  à  $Ns - 1$  faire

$$\begin{aligned}\theta &= i \cdot \Delta\theta \\ m &= (2(Ns - i) - 1) \cdot Nr + 1 \\ x(m) &= r \cdot \sin(\theta) \\ y(m) &= r \cdot \cos(\theta)\end{aligned}$$

fin pour  $i$

Cet algorithme est valable sur le contour externe de la machine. Pour l'adapter, il faudra introduire l'incrément de  $r$  en  $\Delta r$  adapté à chaque zone (aimants, entrefer, stator, rotor...). Pour la construction de la table des connectivités, l'algorithme suivant peut être mis en œuvre :

Algorithme IV – 2.

Pour  $i = 1$  à  $Nr$

Pour  $lm = 0$  à 1

Pour  $j = 0, \frac{Ns}{2} - 2$

Pour  $lx = 0$  à 1

$$\begin{aligned}lp &= lxNr(Ns - 4j - 1) + 2jNr + i + 1 \\ le &= Ns(2i + lx) + 2j - lm + 2 \\ cnc(le, 1) &= lp \\ cnc(le, 2) &= lp + (2 - 4lx)(1 - lm)Nr + 1\end{aligned}$$

$$cnc(le,3) = cnc(le,2) + lm - 1$$

fin pour  $i, lm, j, lx$

Pour  $lm = 0$  à 1

Pour  $i = 0$  à  $Nr - 1$

Pour  $lx = 0$  à 1

$$lp = (Nr + 1)[(1 - lx)(Nr - 3) + i + 2]$$

$$le = 2 \times (2i + lx + 1) - lm$$

$$cnc(le,1) = lp$$

$$cnc(le,2) = lp + (1 - 2lx)(1 - lm)(Nr + 1) + 1$$

$$cnc(le,3) = lp + (1 - 2lx)(Nr + 1) + lm$$

fin pour  $lx, i, lm,$

Pour ce type de maillage, le profil obtenu avec les deux autres méthodes est pratiquement le même. Cependant, le profil est réduit de 33% par rapport aux autres méthodes déjà décrites. La taille de cette dernière est donnée comme suit :

$$\beta = 2.Nr + 3$$

Remarquons d'emblée que dans tous les cas, la largeur de bande ne dépend que du nombre de nœuds par secteur, et non du nombre de secteurs. Le profil obtenu dans ce cas est donc directement proportionnel au nombre de secteurs.

La méthode des positions géométriques a été essayée sur la machine à aimants enterrés et a donné les résultats suivants :

Taille du système.		Méthode GPS		Méth. Position Geom.	
Ne	N	$\beta$	Profil.	$\beta$	Profil
8686	4400	164	N1	567	0,616 N1
11782	5948	243	N2	746	0,496 N2
14422	7268	305	N3	929	0,410 N3
20698	10306	435	N4	1324	0,310 N4
28656	14385	597	N5	1835	0,250 N5

**Table IV. 3.** Résultats comparés des deux méthodes de renumérotation pour la machine à aimants enterrés.

On constate à travers les résultats donnés par la table IV.3. que la largeur de bande connaît une importante augmentation par rapport à celle trouvée par GPS. Cette méthode connaît donc des sauts en largeur de bande qui sont relativement importants. Cependant, au vu des profils obtenus (une réduction de l'ordre de 40 à 75% des profils obtenus avec la méthode GPS), la méthode des positions géométriques est de loin meilleure que la méthode GPS. Les sauts de largeur de bande sont donc locaux et limités en nombre.

Ces résultats confirment notre appréciation pour cette méthode que c'est une méthode de réduction du profil. A travers la table IV.4., nous voyons que la méthode induit des temps de

résolution Cholesky très réduits comparativement à ceux de GPS. Une réduction des temps d'exécution variant de 50 à 95% est observée. Cette réduction est d'autant significative que la méthode proposée produit des temps inférieurs à ceux produits par le logiciel lui-même qui utilise une méthode itérative, à savoir la méthode du gradient conjugué. Cette méthode est plus performante pour le stockage en profil que les deux autres méthodes (GPS et Connectivités).

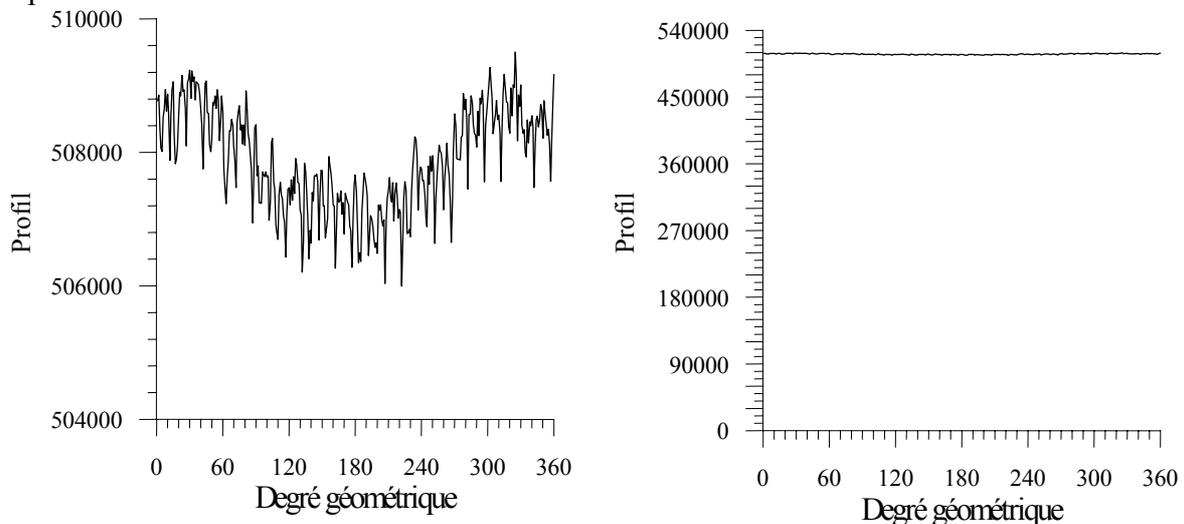
Il faut cependant préciser que la méthode Cholesky est plus adaptée pour des résolutions en profil. La méthode des connectivités est donc plutôt indiquée pour des méthodes bande, comme la méthode de Gauss, ou les méthodes frontales.

Taille des systèmes $N$	4400	5948	7268	10306	14385
Méthode GPS	0,99	1,81	3,91	12,85	32,85
Méthode Pos. Geom.	0,49	0,61	0,88	0,99	1,82

**Tableau IV. 4.** Résolution Cholesky comparée des systèmes renumérotés avec deux méthodes GPS et positions géométriques.

Notons enfin que la résolution s'est faite en supposant les milieux linéaires, et que le résultat numérique a primé sur le résultat physique (la machine est naturellement saturée).

La méthode a été essayée en mouvement avec la méthode de la bande de roulement sur les deux machines : machines synchrone à pôles lisses et machine à aimants enterrés. Nous avons déterminé le profil sur chaque pas de déplacement. Les résultats trouvés sont comparables à ceux montrés pour une structure quelconque (voir fig. III. 20). Les temps sont également comparables.

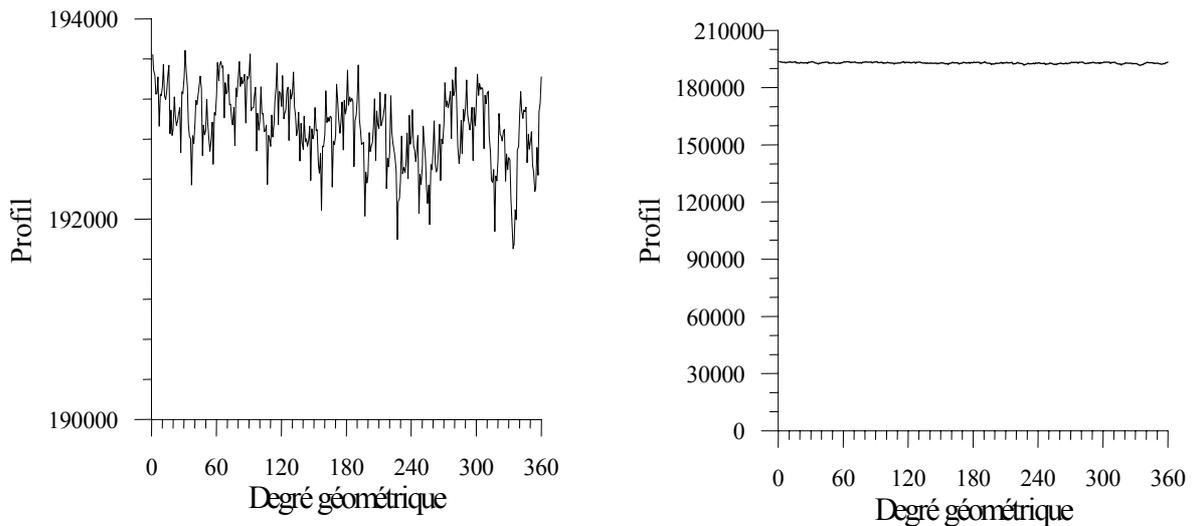


**Fig. IV. 6.** Evolution du profil de la matrice dans le cas de la machine à aimants enterrés

En figure IV.6., l'évolution de la taille du profil de la matrice de rigidité en fonction du pas de déplacement, que nous avons réglé à 1° degré géométrique par pas, est donnée. Le maillage utilisé pour la machine comporte 6203 nœuds pour 12224 éléments. Le profil est pratiquement constant comme le montre la figure de droite. Un agrandissement des axes nous montre une évolution qui ne varie que de 0,09% de la valeur maximale du profil obtenu. Les temps de simulation par pas sont donc sauvegardés, si l'on considère que seul le profil intervient dans le temps de résolution de l'équation linéaire.

Les opérations de renumérotation, de reconnexion des éléments de la bande de roulement et de redéfinition des coordonnées des nœuds de la partie mobile ont duré en tout 3,46 secondes pour une simulation sur AMD Duron 750 Mhz, (comparable au temps obtenu pour la structure

simple de taille équivalente). Le même programme sous les mêmes conditions a duré 1,50 secondes pour un PC Pentium IV 3 Ghz.



**Fig. IV. 7.** Evolution du profil de la matrice dans le cas de la machine à pôles lisses.

Des résultats similaires sont obtenus pour la machine à pôles lisses (figure IV. 7.). Le profil varie faiblement durant le déplacement (près de 1,02% du profil maximum obtenu) pour les mêmes conditions de simulation que précédemment. Le programme a duré 2,34 secondes sur un PC AMD Duron 750 Mhz. Sur un PC Pentium IV 3Ghz, le même programme a duré 1,02 secondes. Le maillage effectué comporte 4077 nœuds et 8046 éléments.

Chaque déplacement aura donc coûté dans les deux cas moins de  $1,6 \cdot 10^{-6}$  secondes par nœud dans le cas du PC Duron 750 MHz et moins de  $10^{-6}$  secondes dans le cas du Pentium IV 3Ghz. La méthode des positions géométriques présente donc un avantage évident dans la rapidité de la renumérotation.

#### IV.6. Perspectives.

Les méthodes élaborées et proposées sont dans leur forme primitive et sont évolutives. Elles présentent plusieurs points avantageux par rapport aux autres méthodes de renumérotation. Nous pouvons relever entre autres :

- Simplicité des algorithmes proposés et mise en œuvre très aisée par un programme;
- Rapidité dans l'exécution ;
- Performances accrues ;
- Adaptation particulière aux structures cylindriques, cas des machines électriques tournantes ;
- Accélèrent les processus de mise en œuvre et de l'exploitation de la méthode de la bande de roulement dans le cas des mouvements ;
- Sont généralisables à toute forme de structure maillée en éléments triangulaires, particulièrement pour la méthode des connectivités.

Etant des méthodes prévues principalement pour les problèmes éléments finis, il est possible de les faire évoluer ou de les adapter à des problèmes spécifiques, ou bien d'exploiter des particularités de la résolution éléments finis ou encore de les coupler avec d'autres méthodes afin d'accroître leurs performances.

Nous apportons ici des propositions à même d'améliorer les performances de ces méthodes ou d'étendre leur domaine d'utilisation.

#### IV. 6. 1. Amélioration des performances des deux méthodes

##### a) Recherche du nœud de départ optimal

Une procédure de recherche du nœud optimal a été proposée en chapitre III et n'a pu être exploitée vu les temps qu'elle induit. Elle nous a permis cependant de constater que le nœud de départ optimal n'est pas forcément comme défini par certains auteurs, à savoir aux nœuds de degré moindre à la périphérie de la structure géométrique, et particulièrement aux coins.

Cette méthode peut être reprise et adaptée à la méthode GPS pour trouver un meilleur nœud de départ spécialement adapté aux structures maillées avec des éléments triangulaires.

##### b) Couplage des deux méthodes

La méthode des connectivités et la méthode des positions géométriques des nœuds peuvent être couplées afin d'allier les performances des deux méthodes. Pour ce faire nous proposons simplement de définir un maillage avec des contours qui seront définis progressivement de l'extérieur vers l'intérieur (voir figure IV. 8), le contour initial étant le contour extérieur (périphérie) de la structure maillée en éléments triangulaires.

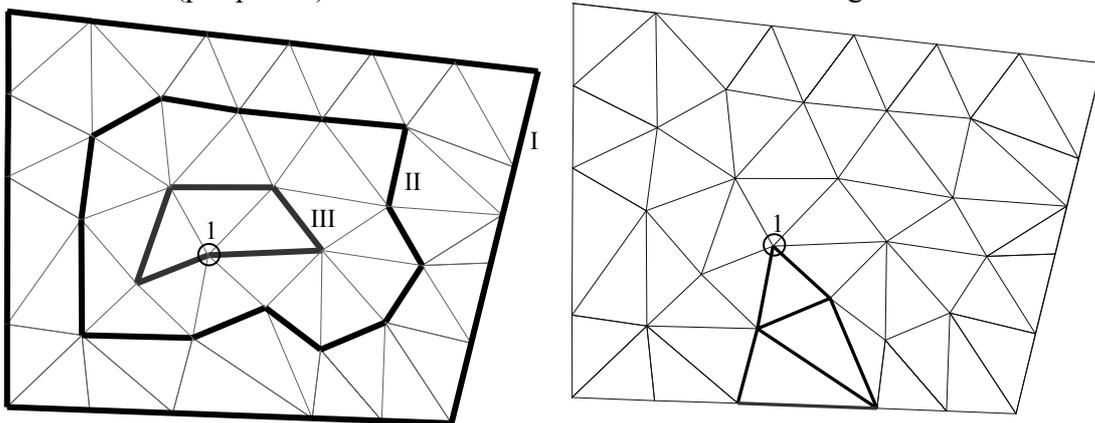


Fig. IV. 8. Subdivision en contours et branches

Dans le dernier contour (contour III), on choisit le nœud de moindre degré comme nœud de départ et on départage en branches liant les contours. On définit ainsi une branche liant le nœud de départ au premier contour (I) à travers les éléments associés aux nœuds qu'il rencontre en cascade. Cette branche sera considérée comme un secteur (méthode des positions géométriques) et sera numéroté selon le degré régressif du contour. Pour renuméroter cette branche, on applique l'algorithme propre à la méthode des connectivités.

Les branches suivantes seront construites avec les nœuds du contour III à la façon de la méthode des positions géométriques. Les nœuds de droite d'abord puis de gauche de façon alternée. Chaque branche ainsi construite sera numérotée selon la méthode des connectivités.

#### IV. 6. 2. Accélération des processus de résolution

##### a) Adaptation à la méthode frontale

La méthode des connectivités que nous avons élaborée est une méthode de réduction de la largeur de bande très efficace et spécialement dédiée aux maillages éléments finis. Elle est donc susceptible de s'accorder pleinement avec la méthode frontale. Cette dernière méthode assemble les équations élément par élément et fait une résolution avec un processus de Gauss

modifié. Cette procédure peut s'intégrer directement dans la méthode et procéder à un processus couplé directement de numérotation des nœuds, construction de la matrice et résolution.

Cette perspective est très intéressante du fait que ces opérations sont jusqu'à présent séparées selon deux schémas :

- 1 – on construit la matrice de rigidité, on la renumérote et on résout
- 2 – on renumérote les nœuds du maillage, on construit la matrice de rigidité et on résout.

L'option proposée permettra éventuellement de gagner en espace de stockage puisque toutes les opérations se font de façon simultanée, ligne par ligne.

#### b) Extension aux graphes

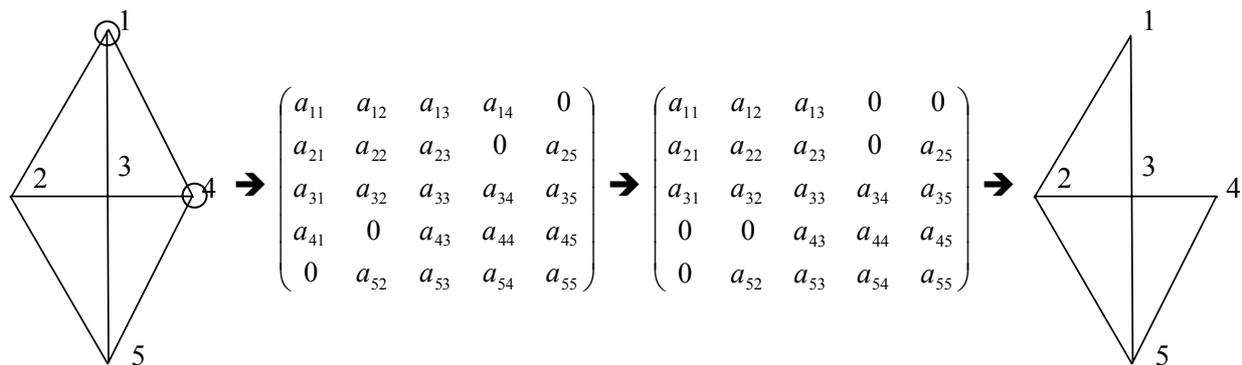
La méthode des connectivités est une méthode qui repose sur le maillage de la structure. Le maillage est en fait une représentation graphique de la matrice de rigidité, à l'exemple du graphe. Pour appliquer la méthode GPS à nos structures, nous avons du transformer des maillages en graphes. L'opération inverse est aussi possible. Elle est certes plus difficile à cause des segments isolés pouvant apparaître dans des matrices creuses, mais elle reste une option intéressante, au vu du regain d'intérêt pour les méthodes de renumérotation des graphes.

#### c) Prise en compte des conditions de Dirichlet

La méthode de l'élément diagonal dominant est une méthode très utilisée dans la prise en compte des conditions de Dirichlet dans les systèmes électromagnétiques. Dans les applications aux machines tournantes, ce type de condition est appliqué aux contours externe et interne si l'on considère un rotor creux ou que l'on supprime l'arbre mécanique.

Cette méthode peut être mise à profit pour réduire davantage le profil de la matrice en agissant directement sur les vecteurs de stockage en ligne de ciel. Le nœud lié à la condition de Dirichlet est augmenté d'un facteur très grand ce qui permettra de négliger tous les autres termes de la ligne liée à ce nœud.

Une façon spéciale de les renuméroter permettra de réduire le profil et éliminer ainsi des stockages d'éléments inutiles dans la résolution. Seules les modifications apportées au vecteur source et la valeur de ces nœuds dans la matrice de rigidité demeurent.



**Fig. IV. 9.** Elimination de segments par introduction de la condition de Dirichlet

Soit le maillage de la structure de la figure IV. 9. et la matrice correspondante (symétrique). L'application de la méthode Dirichlet au nœud  $i$  implique que  $a_{ii}$  est augmenté d'une valeur  $G$  très grand ( $10^{36}$ ) et le terme correspondant dans le vecteur source est remplacé par la valeur  $G.X_i$  où  $X_i$  est la valeur imposée au nœud  $i$  par Dirichlet. Dans l'exemple, on prend deux nœuds,  $i = 1$  et  $i = 4$ .

L'équation liée au noeud  $i$  devient avec application de la méthode du diagonal dominant

$$(G + a_{ii})x_i + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_j = GX_i$$

Comme  $G \gg a_{ii}$  et  $Gx_i \gg \sum_{i \neq j} a_{ij}x_j$

Donc  $Gx_i = GX_i$

Les éléments de la matrice  $a_{1j}$  et les éléments  $a_{4j}$  sont négligés dans la résolution. Les éléments en commun entre ces deux nœuds sont  $a_{14}$  et  $a_{41}$ . Ils peuvent de ce fait être supprimés sans affecter le résultat de la résolution. En termes de graphes, le segment (1-4) peut être supprimé.

Cela revient à supprimer tous les segments des contours externes de la machine ou la condition de Dirichlet est appliquée. La matrice obtenue est plus creuse puisque  $Np$  éléments non nuls sont supprimés et le nombre d'éléments non nuls dans la matrice de rigidité devient en appliquant l'équation III-6 :

$$Nnz = 3 \times Ne + N$$

#### d) Adaptation aux systèmes 3D

Les méthodes directes sont plus adaptées aux systèmes 2-D à cause des dimensions des matrices générées dans ces cas qui sont de loin inférieures à celles produites par les systèmes 3-D. Celles présentent de plus un aspect moins creux que pour les maillages 2-D, qui revient au fait que les nœuds possèdent un degré plus important que les nœuds du 2-D.

Les méthodes de résolution utilisées dans ce cas sont des méthodes itératives. Il a été constaté qu'une renumérotation RCM accélère les processus itératifs de certaines méthodes projectives. Une option intéressante est d'adapter la méthode des connectivités à un maillage 3-D et d'étudier l'influence de cette numérotation sur la résolution des systèmes 3-D.

#### e) Prise en compte des circuits électriques pour la renumérotation

Nous avons vu en §.I.6.1. que lors de la résolution de l'équation (I-60), une décomposition en blocs est effectuée (équation I-61). La matrice  $B$  est une matrice creuse et les autres matrices sont des matrices pleines, à l'exception de la matrice  $C$  qui est une matrice diagonale. Les matrices  $V$  et  $V^tr$  sont des matrices issues des connexions existant entre les nœuds des conducteurs que nous assimilons en général à ceux des encoches, et les trois courants de phase. Cela induit des éléments non nuls supplémentaires dans la matrice de rigidité.

$$\begin{pmatrix} B & V \\ V^tr & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Dans la méthode de décomposition en blocs, nous avons un temps supplémentaire de résolution du à la résolution par remontée qui s'effectue autant de fois qu'il y a de variables courant (opération 2 dans la méthode décomposition en blocs), et ceci en plus d'une résolution finale. Dans le cas de trois courants  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$ , nous aurons ainsi 04 résolutions par remontée, ce qui multiplie le temps Cholesky.

La renumérotation de la matrice globale n'est pas utilisée, car elle génère des largeurs de bande et des profils très importants, en plus des temps de construction des graphes associés à la matrice.

Une perspective s'offre avec les méthodes que nous avons développées : il s'agit de considérer non plus le circuit électrique complet pour chaque phase, mais de séparer. Ainsi, nous aurons autant de courants que d'encoches. A chacun de ces courants on associe un nœud. Les coordonnées de ce nœud seront le centre des encoches.

Dans le cas de la méthode des connectivités, des éléments virtuels supplémentaires sont créés en vue d'assurer les connexions courants – nœuds des encoches. Pour éviter de surcharger les degrés de ces courants, il est préférable de procéder à un maillage aussi grossier que possible des encoches.

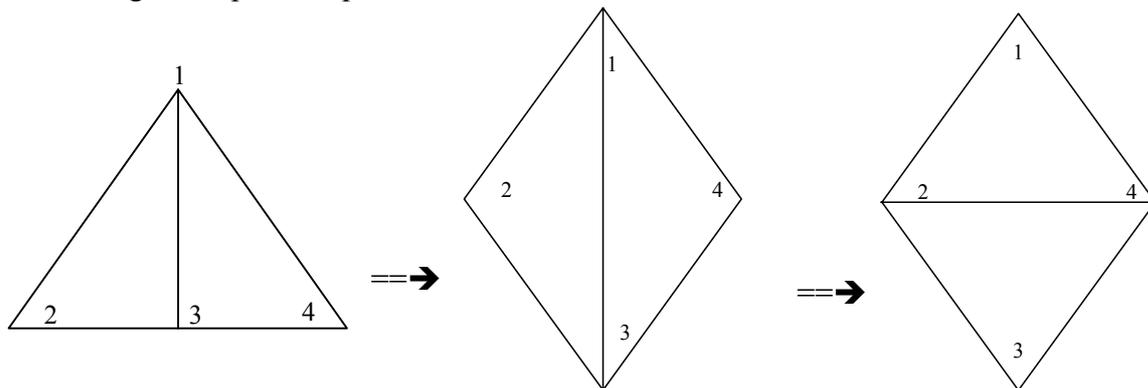
Dans le cas de la méthode des positions géométriques, il suffira d'ajouter les nœuds associés à chaque courant dans la table des coordonnées généralisées et d'appliquer la méthode de renumérotation directement.

Les matrices obtenues dans les deux cas sont susceptibles d'être de largeur de bande et de profil réduits. La méthode Cholesky peut donc être appliquée directement.

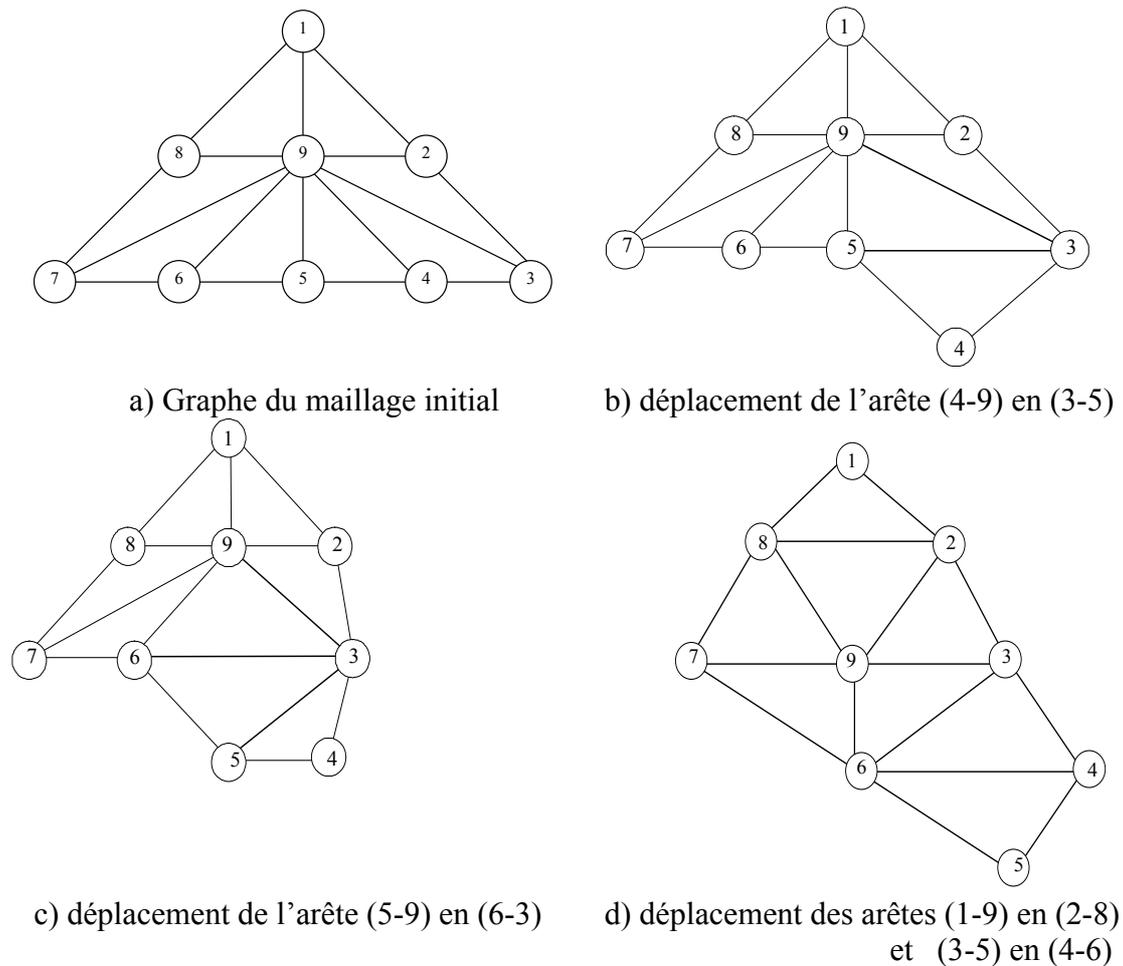
#### IV. 6. 3. Modification des maillages

Les méthodes telles que proposées sont des méthodes de renumérotation des maillages qui peuvent accompagner directement les programmes de génération de maillages. De plus, une perspective s'offre pour la réduction du profil et de la largeur de bande à travers les déplacements d'arêtes. P.L. George a déjà proposé une méthode de déplacement des segments mais pour d'autres objectifs [86].

En figure IV. 10, nous voyons comment « allonger » l'excentricité d'un graphe en déplaçant l'arête (1-3) vers (2-4). Ainsi, le graphe initial a vu son épaisseur réduite et son diamètre augmenté par le déplacement d'une arête.



**Fig. IV. 10.** Influence du déplacement d'une arête sur les caractéristiques d'un graphe simple



**Fig. IV. 11.** Processus d'application du déplacement d'arêtes en vue de la réduction de l'épaisseur et de l'augmentation du diamètre du graphe.

En figure IV.11 est donné un exemple d'application du déplacement d'arêtes sur un graphe arbitraire. Le graphe a été ramené de trois niveaux (fig. IV. 11. a) à cinq niveaux (fig IV. 11. b), et de même, l'épaisseur a été diminuée de cinq à trois simplement en déplaçant quatre arêtes.

Il faut toutefois préciser que le déplacement d'arêtes n'est permis que quand la déformation des éléments qu'il induit est acceptable. Il est également à noter que cette opération de déplacement d'arêtes n'est possible que pour les graphes associés aux matrices issues des problèmes éléments finis.

#### IV.7. Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons appliqué les deux méthodes proposées précédemment à deux types de machines : machine à aimants enterrés et à cage, et machine à aimants collés à la surface. Pour le deuxième type de machines, nous avons étudié deux types de maillages : maillage type triangulation de Delaunay et un maillage régulier (les nœuds internes possèdent tous le même degré de liberté). La méthode GPS a constitué pour cette étude une référence pour la comparaison.

La méthode des connectivités permet une renumérotation des maillages plus rapide et plus efficace que la méthode GPS qui, il faut le rappeler, est une méthode de renumérotation des graphes associés aux matrices. Cette méthode est une méthode de réduction de la largeur de

bande. Sur un maillage régulier, cette méthode présente les mêmes performances que la méthode GPS avec un certain avantage sur la vitesse.

La méthode des positions géométriques est une méthode très simple à élaborer. Elle est légèrement plus lente que la méthode GPS pour une première renumérotation, et la largeur de bande obtenue est largement supérieure à celle obtenue par la méthode GPS, sauf dans le cas des maillages réguliers, où la méthode réduit cette valeur trouvée par GPS de 33%. Dans le cas des maillages type Delaunay, la méthode réduit de façon considérable le profil, ce qui avantage la résolution Cholesky. Une résolution de ce type pour la machine à aimants enterrés a permis de réduire de 50 à 95% le temps de résolution GPS. De plus, nous avons constaté que la méthode est extrêmement rapide pour les déplacements et qu'elle s'adapte bien aux méthodes de la ligne de glissement et de la bande de roulement. De plus, cette méthode peut être exploitée pour numérotter séparément deux parties distinctes de la machine, à savoir, le stator et le rotor.

Ces méthodes ne sont qu'à leur stade primaire. Elles peuvent donc évoluer. Nous avons présenté dans ce chapitre des ébauches et des possibilités d'évolution offertes par ces deux méthodes, particulièrement dans les problèmes de modélisation électromagnétique des machines avec la méthode des éléments finis.



# CONCLUSION GÉNÉRALE



La résolution des problèmes électromagnétiques avec la méthode des éléments finis présente comme première contrainte la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires de larges dimensions. Les matrices à traiter sont des matrices symétriques définies positives. La résolution dans ce cas peut se faire avec des méthodes directes ou itératives. Dans les deux cas de figure, une renumérotation des nœuds s'avère nécessaire en vue de l'optimisation des temps de résolution.

Dans l'application à des systèmes statiques (inertes) ou le maillage n'est pas modifié, ou dans le cas des méthodes sans remaillage sont appliquées, des méthodes de renumérotation efficaces sont disponibles, où le critère de coût (temps d'exécution) n'est pas très influent. Cependant, pour des structures où le remaillage est exécuté soit de façon locale ou globale, des méthodes de renumérotation efficaces et rapides sont plus qu'indispensables.

Dans le cas des structures circulaires en général, et particulièrement dans le cas des machines tournantes, la prise en compte du mouvement se fait avec diverses méthodes avec et sans remaillage. Les méthodes avec remaillage sont particulièrement adaptées au mouvement transitoire, à l'exemple de la méthode la plus utilisée qui est la méthode de la bande de roulement.

La renumérotation étant une opération destinée à réduire les largeurs de bande ainsi que le profil des matrices, il existe  $n!$  façons de renuméroter un graphe ou un maillage constitué de  $n$  nœuds.

Les méthodes de renumérotation existantes à ce jour et qui sont encore en plein essor de développement sont efficaces mais coûteuses. La méthode de Cuthill MacKee Inverse (RCM) est l'une des premières méthodes de renumérotation ayant conquis ce domaine. La méthode GPS qui propose une méthode de recherche du nœud de départ optimal est devenue une méthode de référence pour ses rapports efficacité / temps de résolution. C'est l'une des méthodes de renumérotation les plus rapides relevées dans la littérature.

Ces méthodes sont appliquées particulièrement à la renumérotation des graphes associés aux matrices creuses. Ce sont des méthodes de renumérotation indirecte des maillages. Des méthodes directes existent également, mais sont généralement destinées à des maillages particuliers.

L'étude des maillages nous a permis de relever des propriétés intéressantes et établir des liens directs avec la nature des matrices engendrées. Cela nous a fait aboutir à l'élaboration de deux nouvelles méthodes de renumérotation des maillages dont le principal critère est la rapidité. Ce critère est important dans le cas d'une modélisation des machines tournantes, et en particulier des machines à aimants permanents, avec prise en compte du mouvement avec des techniques de remaillage global ou local (bande de roulement, ligne de glissement...).

La première méthode permet de réduire le profil et la largeur de bande fournis par la méthode GPS, qui, il faut le rappeler, est une méthode de renumérotation des graphes associés aux matrices symétriques. Nous avons introduit une procédure de réduction des largeurs de bande par ligne, sans induire un coût conséquent. Une procédure de recherche du nœud de départ est également proposée, mais dont le coût est prohibitif, et demeure valable sauf dans le cas des structures statiques. Cette méthode est généralisable à tout type de structure maillée avec des éléments triangulaires.

La seconde méthode réduit uniquement le profil obtenu avec la méthode GPS. Elle présente l'avantage de la souplesse. Elle joue sur la position des nœuds selon leur rayon et leur

angle pour établir un tri selon des secteurs définis et comptés de façon alternée. Elle peut être adaptée pour dissocier les maillages de deux structures (interne pour le rotor et externe pour le stator) et procéder à une renumérotation séparée des deux parties ; elle peut également être exploitée pour prendre en compte le mouvement avec les méthodes de la ligne de glissement et de la bande de roulement. Dans ces cas, les temps d'exploitation sont négligeables au vu des résultats que nous avons présenté dans le cas de structure circulaire quelconque.

Ces deux méthodes ont été appliquées pour la réduction des largeur de bande et de profil dans le cas de deux machines synchrones à aimants permanents dont l'une est à aimants enterrés et l'autre est à aimants collés à la surface. Les performances de ces méthodes ont été comparées aux résultats fournis par la méthode de référence (méthode GPS). Une résolution avec la méthode directe Cholesky est également effectuée pour le cas linéaire pour les trois types de renumérotation.

La première méthode que nous avons appelée méthode des connectivités s'avère être une méthode très performante. Elle permet une renumérotation des maillages plus rapide et plus efficace que la méthode GPS. Les temps de renumérotation sont réduits de près de 30% par rapport à la méthode comparée, et les profils et largeur obtenus sont réduits. Cette méthode est une méthode de réduction de la largeur de bande. Sur un maillage régulier, cette méthode présente les mêmes performances avec un certain avantage sur la vitesse d'exécution que la méthode GPS.

La seconde méthode que nous appelée méthode des positions géométriques est une méthode très simple à élaborer. Elle présente des temps d'exécution comparables avec ceux fournis par la méthode GPS pour une première renumérotation, et la largeur de bande obtenue est largement supérieure à celle obtenue par la méthode GPS, sauf dans le cas des maillages réguliers, où la méthode réduit cette valeur trouvée par GPS de 33%. Dans le cas des maillages type Delaunay, la méthode réduit de façon considérable le profil, ce qui avantage la résolution Cholesky. Une résolution de ce type pour la machine à aimants enterrés a permis de réduire de 50 à 95% le temps de résolution du système algébrique que dans le cas d'une renumérotation GPS. De plus, nous avons constaté que la méthode est extrêmement rapide pour les déplacements et qu'elle s'adapte bien aux méthodes de la ligne de glissement et de la bande de roulement. Les profils obtenus à chaque pas de déplacement du rotor par rapport au stator avec la méthode de la bande de roulement dans le cas d'un remaillage global à chaque pas sont pratiquement constants (une fluctuation inférieure à 1% est à chaque fois observée). Le temps de renumérotation de chaque nœud dans ces conditions vaut moins de  $10^{-6}$  secondes avec un PC AMD Duron 750 Mhz 128 Mo RAM. Ajoutés à tout ceci, cette méthode peut être exploitée pour numéroter séparément deux parties distinctes de la machine, à savoir, le stator et le rotor.

Il est enfin à noter à l'avantage des méthodes présentées que la transformation d'un maillage en un graphe coûte trois (03) fois le temps de la renumérotation, ce qui ralentit davantage l'application de la méthode GPS à la renumérotation des maillages.

Pour terminer, nous ferons remarquer que ces méthodes ne sont qu'à leur stade primaire. Elles peuvent donc évoluer. Nous avons présenté dans cette étude des ébauches des possibilités d'évolution offertes par ces deux méthodes, particulièrement dans les problèmes de modélisation électromagnétique des machines avec la méthode des éléments finis, telles que l'introduction des conditions aux limites et la prise en compte des circuits électriques...

# BIBLIOGRAPHIE



 *Bibliographie* 

- [1] G. LACROUX " *Les actionneurs électriques* " Editions Technique et Documentation, 1994
- [2] N.Sadowski, Y.Lefevre M.Lajoie-Mazenc J.Cros « *Finite Element Torque Calculation in Electrical Machines While Considering Movement* » IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 28, NO.2, MARCH 1992, pp. 1410 – 1413.
- [3] D-H. Im, C-E. Kim, "*Finite Element Force Calculation of a Linear Induction Motor Taking Account of the Movement*", IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS. VOL. 30, NO. 5, SEPTEMBER 1994, pp. 3495 – 3498.
- [4] M. V. Ferreira da Luz, P. Dular, N. Sadowski, C. Geuzaine, and J. P. A. Bastos "*Analysis of a Permanent Magnet Generator With Dual Formulations Using Periodicity Conditions and Moving Band*" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 38, NO. 2, MARCH 2002, pp. 961-964.
- [5] C. E. Kim, J. K. Sykulski, "*Harmonic Analysis of Output Voltage in Synchronous Generator Using Finite-Element Method Taking Account of the Movement*" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 38, NO. 2, MARCH 2002, pp. 1249-1252.
- [6] B.Laporte, P. Manfe " *Machines à aimants: de la conception aux prototypes* ". Firtech Univerdustry91, France 23-24 mai 1991, pp 173 – 187
- [7] P. Thelin and H. Nee "*Calculation of the air-gapflux density of PM Synchronous Motors with buried magnets including axial leakage and teeth saturation*" Electrical Machines and drives, Ninth International Conference on (Conf. Publ. N° 468) 1-3 Sept. 1999, pp.339 – 345.
- [8] P. Thelin and H. Nee "*Suggestions regarding the pole number of inverter-fed PM Synchronous Motors with buried magnets*" Power Electronics and variable speed drives, Seventh International Conference on (Conf. Publ. N° 456) 21-23 Sept. 1998, pp. 544 – 547.
- [9] Y. Boutora, R. Ibtouen, R. Kechroud "*Calcul de champ pour machines synchrones à poles lisses à aimants permanents à aimantation parallèle*" AJOT-COMAE'98 Béjaïa, Machines Electriques-Réseaux Electriques et Haute Tension, ISSN 1111-357X, Décembre 1998, pp. 232-235.
- [10] T.J.E.MILLER and J.R.HENDERSHOT Jr " *Design of Brushless P.M. motors* " Magma Publications and Clarendon Press, OXFORD, 1994
- [11] R. Kechroud R. Ibtouen S.Mezani, O. Touhami B. Laporte "*Modelling of a slotless permanent magnet machine with motion consideration*", Archives of Electrical Engineering, index, 351660, ISBN 0004-0746, Vol. XLIX, No. 3-4/2000, pp. 377-393.
- [12] J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière, "*CAO en électrotechnique*", Hermès Publishing, 1985.
- [13] R. Kechroud "*Contribution à la Modélisation des Machines Electriques par la Méthode des Eléments Finis Associée aux Multiplicateurs de Lagrange*" Thèse de docteur d'état, ENP Alger, Avril 2002.
- [14] K. Hameyer and R. Belmans "*Numerical Modelling and design of electrical machines and devices*", Boston MA, WIT-Press,1999
- [15] Y. Ouazir, " *Contribution à la modélisation électromagnétique des machines à induction*" Thèse de Docteur d'état, ENP Alger, Décembre 2006

- [16] F. Bouillault and A. Razek "Hybrid Numerical Methods for Movement Consideration in Electromagnetic Systems" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 24, No1, JANUARY 1988, pp 259 – 261
- [17] G. Dhatt et D.Touzot "Une présentation de la méthode des éléments finis" Editions Maloine, Paris, 1984.
- [18] P.Silvester and M.V.K. Chari "Finite element solution of saturable magnetic field problems" IEEE. Trans. On Power Apparatus and Systems, Vol PAS-89 N° 7, Sept/Oct 1970
- [19] A. FOGGIA "Computer Methods and Software Engineering for Magnetic Devices – A General Survey" Journal of Magnetism and Magnetic Materials N°26 (1982) pp.318-323
- [20] B. M. Irons, "A frontal solution program for finite element analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering 2, pp. 5-32 (1970).
- [21] A. Kaveh, G.R. Roosta " A graph theoretical method for frontwidth reduction" Advances in Engineering Software N° 30 pp.789–797 (1999)
- [22] A. George, J.W-H. Liu. "Computer solution of large sparse positive definite systems" Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [23] M. Benzi "Preconditioning Techniques for Large Linear Systems : A Survey" Journal of Computational Physics N°182 (2002) pp. 418 – 477.
- [24] M. Boumahrat et A. Gourdin "Méthodes numériques appliquées avec nombreux problèmes résolus en Fortran 77" OPU Editions, Alger, 1993.
- [25] A. Kaveh "Ordering for Bandwidth Reduction" Computers & Structures, 1986, Vol. 24, N°3, pp 413- 420.
- [26] R. K. LIVESLEY and M. A. SABIN "Algorithms for Numbering the Nodes of Finite-Element Meshes" Computing Systems in Engineering Vol. 2, No. 1, pp. 103-114, 1991
- [27] S. W. Chung, S. J. Kim "A remeshing algorithm based on bubble packing method and its application to large deformation problems" Finite Elements in Analysis and Design 39 (2003) pp301–324
- [28] A. Kaveh and H. A. R. Bondarabady "A multi-level finite element nodal ordering using algebraic graph theory" Finite Elements in Analysis and Design, Vol.38, Issue 3, January 2002, Pages 245-261.
- [29] E. Cuthill, J. McKee, "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices" Proceedings of the ACM National Conference, New York, 1969. pp. 157–172.
- [30] N. Gibbs, W. Poole, P. Stockmeyer, "An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix", SIAM Journal on Numerical Analysis 13 (1976) pp. 235–251.
- [31] I. L. Lim, I. W. Johnston and S. K. Choi "A Comparison of Algorithms for Profile Reduction of Sparse Matrices" Computers and Structures, Vol 57, N°2, pp. 297 – 302, 1995
- [32] Bon Ung Koo and Byung Chai Lee "An Efficient Profile Reduction Algorithm Based on the Frontal Ordering Scheme and the Graph Theory" Computers & Structures Vol. 44, No. 6. pp. 1339-1347, 1992.
- [33] M.N.O. Sadiku " A simple Introduction to Finite Element Analysis of Electromagnetic Problems" IEEE Trans On Education, Vol 32, N°2, May 1989, pp. 85 – 93.

- [34] P. Silvester, R. L. Ferrari, "*Finite element for electrical engineer*", Cambridge University Press, Second Edition, 1990.
- [35] S. J. Salon "*Finite element analysis of electrical machines*", Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [36] MA Jabbar, H.N. Phyu, Z. Liu and C. Bi " *Modeling and Numerical Simulation of a Brushless Permanent-Magnet DC Motor in Dynamic Conditions by Time-Stepping Technique*" IEEE Trans On Ind. Appl. Vol N°40 N°3 May/June 2004
- [37] A. M. Oliveira, P. Kuo-Peng, N. Sadowski, M. S. de Andrade, and J. P. A. Bastos "A *Non-a priori Approach to Analyze Electrical Machines Modeled by FEM Connected to Static Converters*" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 38, NO. 2, MARCH 2002, pp. 933-936.
- [38] S H Won, J. Lee "BLDC Spindle Motor Cogging Torque Calculation with the Moving Material Method in the Finite Element Method" Magnetics Conference, 2005. INTERMAG Asia 2005. 4-8 April 2005, pp: 739 – 740
- [39] A Demenko, "*Movement Simulation in Finite Element Analysis of Electric Machine Dynamics*" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL 32. NO 3, May 1996, pp. 1553-1556
- [40] D.Zhou, C.B. Rajanathan, A.T. Sapeluk and R.Egin "*Transient simulation of the Shaded Pole Motor Based upon a Multi-slice finite element Model*" 9<sup>th</sup> Intern. Conf. on Electrical Drives, IEE Conference Publ. no 468, 1998, pp. 30 – 35.
- [41] A. A. Abdelrazek, J. L. Coulomb, M. Féliachi, J. C. Sabonnadière, "*Conception of an airgap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 18, No. 2, March 1982, pp. 655-659.
- [42] K. Lee, M. J. De Bortoli, M. J. Lee, S. J. Salon, "*Coupling finite elements and analytical solution in the airgap of electrical machines*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No 5, September 1991, pp. 3955-3957.
- [43] S. Mezani " Modélisation électromagnétique et thermique des moteurs à induction, en tenant compte des harmoniques d'espace" Thèse de Docteur-Ingénieur de l'INPL Nancy, Juillet 2004.
- [44] S. Mezani, B. Laporte, N. Takorabet, "*Complex finite element computation of induction motors with consideration of space harmonics*", IEEE Transactions On Magnetics, vol. 41, no. 5, pp. 1460–1463, May 2005.
- [45] S. Mezani, B. Laporte, N. Takorabet, "Saturation and space harmonics in the complex finite element computation of induction motors", CEFC 2004, IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, Seoul (Korea), June 6-9, 2004, p. 266.
- [46] N. Takorabet, B. Laporte, S. Mezani, "An approach to compute saturated induction motors in steady state", IEMDC 2003, IEEE International Electrical Machines and Drives Conference, Madison WI (USA), 1-4 June, 2003, pp. 1646-1650.
- [47]R. Kechroud, R. Ibtouen, O. Touhami "*Coupled non-linear complex finite elements analysis of solid rotor induction motor*" International Compumag Society, Team Workshop and Application Forum, Evian, France, July 6, 2001, pp. 16-17.
- [48]Y. Maréchal, G. Meunier, J. L. Coulomb, H. Magnin," *A general purpose tool for restoring inter-element continuity*", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1728-1731.
- [49]D. Rodger, P. J. Lai, P. J. Leonard, "*Coupled elements for problems involving movement*", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 28, No. 2, March 1990, pp. 548-550.

- [50] Y. Ouazir, N. Takorabet, R. Ibtouen, and S. Mezani "Consideration of Space Harmonics in Complex Finite Element Analysis of Induction Motors With an Air-Gap Interface Coupling" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 42, NO. 4, APRIL 2006, pp. 1279 – 1283.
- [51] Y. Ouazir, N. Takorabet, R. Ibtouen, O. Touhami and S. Mezani "Phase-belt harmonics in complex finite-element analysis of induction motors with an airgap interface coupling" IEE Proc.-Electr. Power Appl., Vol. 153, No. 4, July 2006 pp. 530 – 534
- [52] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, and F. Rapetti "Torque Calculation With Conforming and Nonconforming Movement Interface" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 42, NO. 4, APRIL 2006, pp. 983 – 986.
- [53] S. Ratnajeevan and H. Hoole, "Rotor Motion in the Dynamic Finite Element Analysis of Rotating Electrical Machines" IEEE Trans. Magn. Vol. 21. no 6, pp. 2292 – 2295, Nov. 1985.
- [54] D. Deás, P. Kuo-Peng, N. Sadowski, A. M. Oliveira, J. L. Roel, and J. P. A. Bastos «2-D FEM Modeling of the Tubular Linear Induction Motor Taking Into Account the Movement » IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 38, NO. 2, MARCH 2002, pp. 1165-1168.
- [55] J. Gyselinck, L. Vandeveld, P. Dular, C. Geuzaine, Willy Legros "A General Method for the Frequency Domain FE Modeling of Rotating Electromagnetic Devices" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 39, NO. 3, MAY 2003, pp. 1147-1150.
- [56] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos and N. Sadowski, "Using Different Types of Finite Elements in Electrical Machines Thin Airgaps" Computation in Electromagnetics CEM 2002. The Fourth International Conference on (Ref. No. 2002/063) 8-11 April 2002 Page(s):2 pp
- [57] Y. Boutora, N. Takorabet, R. Ibtouen, S. Mezani "A new proposed method for minimizing the bandwidth and the skyline storage for triangular finite elements meshes" CEFC 2006, International Conference on Electromagnetic Field Computation, Miami (USA) April 30 – May 3, 2006, pp. 47.
- [58] Y. Boutora, R. Ibtouen, N. Takorabet, S. Mezani " Bandwidth and Profile Minimization of Sparse Matrices of Triangular Meshes of Cylindrical Geometries " EMF 2006, Aussois, 21-23 juin France
- [59] Y. Boutora, R. Ibtouen, N. Takorabet " « Maillage et minimisation de largeur de bande pour les structures cylindriques creuses » Worskshop sur la modélisation en électrotechnique et mécanique, AJOT – MEM'05, ISSN 1111-357X , ENP Alger, 13 – 14 Avril 2005, pp. 21-26.
- [60] Y. Boutora, R. Ibtouen, N. Takorabet "Development of a Nodes Numbering Method for the Minimization of the bandwidth in Triangular Meshes of Cylindrical Geometries" The Tenth Internl Middle East Power Conference MEPCON 2005, Port Said, Egypt, December 13-15 , pp 179 – 183.
- [61] Y. Boutora, N. Takorabet, R. Ibtouen, S. Mezani "A New Method for Minimizing the Bandwidth and Profile of Square Matrices for Triangular Finite Elements Mesh" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 43, NO. 4, APRIL 2007, pp. 1513 – 1516.
- [62] A. M. Oliveira, P. Kuo-Peng, N. Sadowski, F. Rünco, R. Carlson, and P. Dular "Finite-Element Analysis of a Double-Winding Induction Motor With a Special Rotor Bars Topology" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 40, NO. 2, MARCH 2004 pp. 770 – 773.
- [63] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, and N. Sadowski "Using High-Order Finite Elements in Problems With Movement" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 40, NO. 2, MARCH 2004, pp.529-532
- [64] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, and F. Rapetti "Using Hierarchic Interpolation With Mortar Element Method for Electrical Machines Analysis" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 41, NO. 5, MAY 2005 pp. 1472 – 1475.

- [65] O.Craiu, N.Dan, E. A. Badea "Numerical Analysis of Permanent Magnet DC Motor Performances" IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL 31, NO. 6, NOVEMBER 1995, pp. 3500- 3502.
- [66] Luo, J.C., "Algorithms for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix", Computers and Structures N°44, 1992 pp. 535–548.
- [67] A. Basermann "Conjugate Gradient and Lanczos Methods for Sparse Matrices on Distributed Memory Multiprocessors" Journal of Parallel and Distributed Computing Vol45, pp. 46–52 (1997)
- [68] Y. SAAD "Iterative methods for Sparse Linear Systems" PWS Publishing Company, Boston, 1996.
- [69] E. Rodriguez-Tello, J.-K. Hao and J. Torres-Jimenez "An improved simulated annealing algorithm for bandwidth minimization" European Journal of Operational Research, In Press, Corrected Proof, Available online 27 October 2006
- [70] Ch.H. Papadimitriou, "The NP-completeness of the bandwidth-minimization problem" Computing 16, pp 263-270 (1976).
- [71] A.Lim, J.Lin, B. Rodrigues and Fei Xiao "Ant colony optimization with hill climbing for the bandwidth minimization problem" Applied Soft Computing, Volume 6, Issue 2, January 2006, Pages 180-188
- [72] A. Esposito, M.F. Catalano, F. Malucelli, L. Tarricone, "A new matrix bandwidth reduction algorithm", Operations Research Letters" 23 (1999) pp. 99–107.
- [73] R. Martí, M. Laguna, F. Glover, V. Campos "Reducing the bandwidth of a sparse matrix with Tabu search", European Journal of Operational Research 135 (2) (2001) pp. 211–220.
- [74] A. Lim, B. Rodrigues, F. Xiao, "Integrated genetic algorithm with hill climbing for bandwidth minimization problem", Lecture Notes in Computer Science 2724 (2003) 1594-1595.
- [75] E. Pinana, I. Plana, V. Campos, R. Martí, "GRASP and path relinking for the matrix bandwidth minimization" European Journal of Operational Research N°153 (2004) pp.200–210.
- [76] M.Lin, Z.Lin and J.Xu "Graph bandwidth of weighted caterpillars" Theoretical Computer Science, Volume 363, Issue 3, 31 October 2006, Pages 266-277
- [77] A. Abdullah and 'A. Hussain "Heuristics and Meta-heuristics for Bandwidth minimization of Sparse Matrices" Engineering of Intelligent Systems, 2006 IEEE International Conference 22-23 Avril 2006 pp:1 – 6
- [78] A. Esposito, M.S.F. Catalano, F. Malucelli, L. Tarricone " Sparse matrix bandwidth reduction: algorithms, applications and real industrial cases in electromagnetics ", in: M. Paprzyky (Ed.), High Performance Algorithms for Structured Matrix Problems, 1999.
- [79] A.Lim, B. Rodrigues, F. Xiao "Heuristics for matrix bandwidth reduction" European Journal of Operational Research 174 (2006) pp. 69–91
- [80] D. P. O'Leary "Solving Sparse Linear Systems: Taking the Direct Approach" Computing in Science and Engineering, Vol.7, issue 5, Sept – Oct 2005, pp. 62 – 67.
- [81] S.W. Sloan "A Fortran program for profile and wavefront reduction" International Journal for Numerical Methods in Engineering 1989;vol 28; pp. 2651–2679.
- [82] L.T. Souza, D.W. Murray "An alternative pseudoperipheral node finder for resequencing schemes". International Journal for Numerical Methods in Engineering;vol 36 ; pp 3351-3379. (1993)

- [83] A. Lim, B. Rodrigues, F. Xiao, "*Using an evolutionary algorithm for bandwidth minimization evolutionary computation*" CEC 2003 December 8 -12; 2003, pp. 678 – 683.
- [84] Jennifer A. Scott "*Two-stage ordering for unsymmetric parallel row-by-row frontal solvers*" Computers and Chemical Engineering; vol 25 pp. 323–332 (2001)
- [85] P. S. Hou "*Nodal Reordering Strategies to Improve Preconditioning for Finite Element Systems*" Master of Science (M.Sc) Thesis in Mathematics, Virginia Polytechnic Institute, USA, April 2005
- [86] P. L. George "*Transformation d'un maillage en un maillage aigu*" Journal Physique Appliquée III, Janvier 1993, pp. 55 - 68