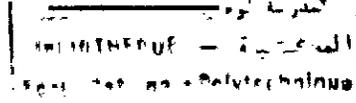


وزارة التربية الوطنية
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT

Genie Electrique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Modelisation et commande lineaire des
dynamique de mouvement
longitudinal et lateral d'un avion.*

Proposé par :

N. LOUAM

Etudié par :

A. GUETTOUCHE

M. CHIKH

Dirigé par

N. LOUAM

PROMOTION

1994

AVANT PROPOS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à remercier Mr le professeur N.LOUAM pour nous avoir proposé ce sujet et accepté d'être notre encadreur tout le long de ce laborieux travail.

Ses conseils "guides" et ses éclaircissements, nous ont permis d'arriver à ces résultats qui ne seraient ce qu'ils sont sans son apport scientifique et l'abnégation qu'il a montré au cours de l'encadrement de ce travail. Qu'il trouve en ces quelques lignes l'expression de notre profonde gratitude et entière reconnaissance.

Nous remercions aussi tous les enseignants du département de genie électrique pour le savoir qu'ils nous ont inculqué, ainsi que tous les membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail.

Nous tenons également à remercier Mr S.Iffersen, Mr R.Bara et Melle M.Benyettou pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportés.

Dans la même pensée nous remercions, le personnel de la bibliothèque de l'institut d'aéronautique de blida, les sociétés SI et Selectron, de nous avoir aidé matériellement.

D E D I C A C E S

Je Dédie ce mémoire:

A mes chère parents

A mes frères Samir et Kamel

A ma soeur Louiza

A mon ami Abdelmalek

Mourad

Je Dédie ce modeste travail:

A la mémoire de mon père pour son soutien et ses encouragements

A ma mère pour son Amour

A la mémoire de mon oncle Azzouz

A mes frères et à mes soeurs

A toute la famille CHIKH.

A tous mes amis.

A Redouane et Youcef

Abdelmalek

Préface:



Longtemps l'homme à envié les oiseaux pour leur merveilleux pouvoir de voler librement à travers les airs. Chacun connaît la légende d'Icare qui s'envola en fixant des ailes sous ses bras avec de la cire. Mais il vola trop près du soleil, la cire fondit et il tomba dans la mer.

C'est l'Anglais George Cayley qui, le premier, affirma qu'une machine devait être conçue comme un oiseau. En 1804, il mit au point un planeur qui fut le premier véritable aéroplane. En 1890, le Français Clément Ader construisit un moteur à vapeur et réussit pendant 50m à soulever de terre son appareil. En 1903, deux Américains, les frères Wright, font voler un avion mû par moteur à essence démontrant que le vol des plus lourds que l'air était possible.

Depuis cette date apparaissait, l'importance des études de stabilité dans le domaine aéronautique. C'était les Soviétiques qui ont donné naissance à des théories modernes de commande, avec l'événement de la réussite de SPUTNIK, dans les années 1957, ces commandes utilisent les théories de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité, et de Pontryaguine pour l'optimisation des performances, des systèmes.

C'était dans cet esprit de persévérance que nous avons fait ce manuscrit, qui traite de la stabilité du vol d'un avion.

INTRODUCTION	01
CHAPITRE I: Dynamique du Vol d'un Avion Rigide	
I.1 Equations générales du mouvement d'un avion rigide.....	05
I.2 Definition des systemes d'axes et les forces exterieures..	05
I.3 Formulation des equations de mouvement	07
I.4 Orientation de l'avion par rapport à un repère d'inertie..	11
I.5 Trajectoire de vol par rapport à la terre	13
I.6 Les composantes des forces de gravité	17
I.7 Analyse des équations du mouvement	18
CHAPITRE II: Modèle Mathématique Linéaire du Vol d'un Avion	
II.1 Introduction	19
II.1.1 Definition d'un vol stationnaire	19
II.1.2 Definition d'un vol perturbé	21
II.2 Equations lineaires d'un mouvement perturbé	21
II.3 Developpement des forces intervenant dans les	24
equations de mouvement par rapport au repère fixe	
A: Equations de la dynamique du mouvement longitudinale...	27
B: Equations de la dynamique du mouvement lateral	28
CHAPITRE III: Modeles Numeriques et Analyses des deux Dynamiques du Mouvement d'un Avion	
III.1 Introduction et modeles numeriques	29
III.1.1 La dynamique du mouvement longitudinal	29
III.1.2 La dynamique du mouvement lateral	29
III.1.3 Application numerique	30
III.2 Analyse et simulation des mouvements de l'avion	32
en boucle ouverte	
III.2.1 La dynamique du mouvement longitudinal	32
III.2.2 La dynamique du mouvement lateral	36
III.3 Conclusion	40

CHAPITRE IV: Synthèse d'une Commande Classique

IV.1 Introduction	41
IV.2 Simulation numérique	41
IV.2.1 Pilotage manuel	42
IV.2.2 Pilotage automatique	47

CHAPITRE V: Application de la Commande Optimale Lineaire Quadratique au Probleme de l'Avion

V.1 Introduction	51
V.2 Rappels sur la theorie de la commande optimale lineaire quadratique	51
V.3 Elaboration d'un critere de performance quadratique	53
V.4 Application de la commande optimale aux problemes de la dynamique des deux mouvements de l'avion	55
V.4.1 La dynamique du mouvement longitudinal	55
a: Pilotage manuel.....	56
b: Pilotage automatique	58
V.4.2 La dynamique du mouvement lateral	60
a: Pilotage manuel	61
b: Pilotage automatique	63
Conclusion Générale	65
Annexes	

INTRODUCTION:

Tous les types d'avions, depuis les premiers qui aient réellement volé, ont été conçu avec des structures plus au moins similaires.

Des ailes pour créer les forces aérodynamiques sustentatrices, un fuselage pour l'équipage et la charge à transporter, un empennage pour assurer l'équilibre longitudinal et transversal de l'appareil, un système de propulsion destiné à s'opposer à la traînée aérodynamique et en fin des gouvernes pour assurer la direction et la stabilité.

Ces structures ont été énormément modifiées après la 1^{ère} et 2^{ème} guerre mondiale, grâce aux progrès de la technologie, et en particulier ceux des ordinateurs.

Ainsi, aujourd'hui les structures des avions sont mieux adaptées aux exigences et aux besoins des transports civils et militaires. Elles sont mieux performantes, économiques et légères.

En matière de contrôle et de la commande des avions, on emploie aujourd'hui d'avantage d'organes très fiables et efficaces. Les gouvernes sont conçues de sorte qu'elle concourent toutes à créer les forces et moments aérodynamiques nécessaire au contrôle des instabilités de l'appareil permettant ainsi un autopilotage souvent fiable et très réconfortant.

Les signaux de commandes aux gouvernes sont générés souvent par des micro-processeurs, d'une manière harmonieuse et très rapide, à partir des informations recueillies au niveau des capteurs et/ou des pilotes.

En réalité l'emploi de micro-processeurs ou calculateurs dans le pilotage des avions est d'une utilité multiple.

En particulier ils permettent de:

- Contrôler les instabilités de structure de façon à éviter les flottements.
- Assurer la stabilité de l'avion en l'absence d'ordre du pilote.
- Agir sur les gouvernes de façon à réaliser les modifications nécessaires sur la trajectoire ou l'attitude de l'avion.
- Rendre la trajectoire et l'attitude de l'appareil indépendantes des perturbations extérieures.

En vue de concevoir un système de commande pour un avion de type donné (de transport, de combat etc...), les ingénieurs dans les bureaux d'études peuvent recourir à l'emploi de divers modèles (théoriques) mis au point après plusieurs années de tests et d'expériences [1,4,5].

Ces modèles correspondent en général aux diverses attitudes que peut prendre l'avion durant son déplacement, du décollage à l'atterrissage.

Dans une attitude donnée et face aux phénomènes extérieurs le modèle le plus simple d'un avion est forttement non linéaire; souvent très difficile à élaborer et encore plus à commander. Il peut être soumis à plusieurs modes d'agitation et/ou de perturbations extérieures.

Pour approcher le problème, les concepteurs souvent ont recouru d'abord à des décompositions et simplifications linéarisantes des différents phénomènes physiques impliqués dans ce cas [4,8].

Ainsi, par exemple, lors d'un vol horizontal où l'appareil est soumis à des agitations ou mouvements de différentes directions, dans un contexte linéaire, l'approche de simplification du modèle consiste à identifier et à découpler autant que possible les modes

d'agitations prépondérantes sur le système, à savoir: le mode longitudinal et le mode latéral [4].

Le problème de l'analyse dynamique de ces modes et de leur contrôle a fait l'objet de plusieurs études et écrit au cours de la deuxième moitié de ce siècle [1,3,4,5,8].

Cependant, du point de vue de la commande et de la stabilité des avions très peu d'études ont été réalisées avec l'aide des techniques modernes de contrôle, telle la théorie de la commande optimale linéaire, qui a été introduite dans les années 60 [4].

En vue d'introduire ce sujet, pour la première fois à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger et le traiter par le moyen de la technique de la commande optimale linéaire quadratique, nous proposons essentiellement dans cette modeste contribution:

- 1- Une étude de synthèse détaillée sur la modélisation d'un avion en vol horizontal et les conditions à satisfaire pour aboutir à un modèle linéaire où les deux modes cités auparavant peuvent être étudiés séparément.
- 2- Une application d'une méthode d'abord classique puis moderne dans le cas d'une synthèse d'un système de commande pour chacun des deux modes retenus.
- 3- Une simulation numérique sur ordinateur avec comparaisons de tous les résultats générés pour le cas d'un appareil de type commerciale à turbo-réaction.

Ainsi, les chapitres I et II seraient consacrés aux modèles non-linéaires et linéaire de la dynamique des mouvements de l'avion en vol horizontal.

Dans l'élaboration de ces modèles les principes de la mécanique rationnelle classique seront utilisés avec certaines hypothèses simplificatrices souvent admises dans la littérature Ces hypothèses nous permettent en particulier de déduire des modèles linéaires où

les deux dynamiques régissant le mouvement longitudinal d'une part et le mouvement latéral de autre peuvent être étudiées séparément.

Le chapitre III traitera de l'analyse et la synthèse d'une commande par un retour d'état classique pour les deux dynamiques de l'avion.

Pour montrer comment le problème peut être traité lorsque certaines performances sont spécifiées à l'avance, pour un système, dans un critère de coût, nous utiliserons la technique de la commande optimale linéaire. Nous montrerons, en particulier, dans le chapitre IV, comment ceci peut être effectué si le critère est choisit quadratique et le système est linéaire.

La simulation numérique sur ordinateur de tous les résultats obtenus (avec ou sans commande, optimale ou non) fera l'objet de la dernière partie de notre mémoire.

En fin, nous clôturerons cette étude par une conclusion générale.

Chapitre I

DYNAMIQUE DU VOL D'UN AVION RIGIDE

I.1. EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT D'UN AVION RIGIDE:

L'objectif de ce chapitre est d'établir les équations du mouvement d'un avion rigide. Certaines hypothèses de simplification admises dans la littérature [5] en vue de l'élaboration d'un modèle théorique seront faites dans ce cas aussi. On discutera entre autres les conditions spécifiques du vol d'un avion.

I.2. DEFINITION DES SYSTEMES D'AXES ET LES FORCES EXTERIEURES:

Considérons le cas où l'avion est un corps rigide libre dans l'espace figure 1.

Pour étudier les différents mouvements de cet avion, on définit un système d'axes ($X'Y'Z'$), dans lequel la seconde loi de NEWTON reste valable, définissant un espace fixe (non rotatif).

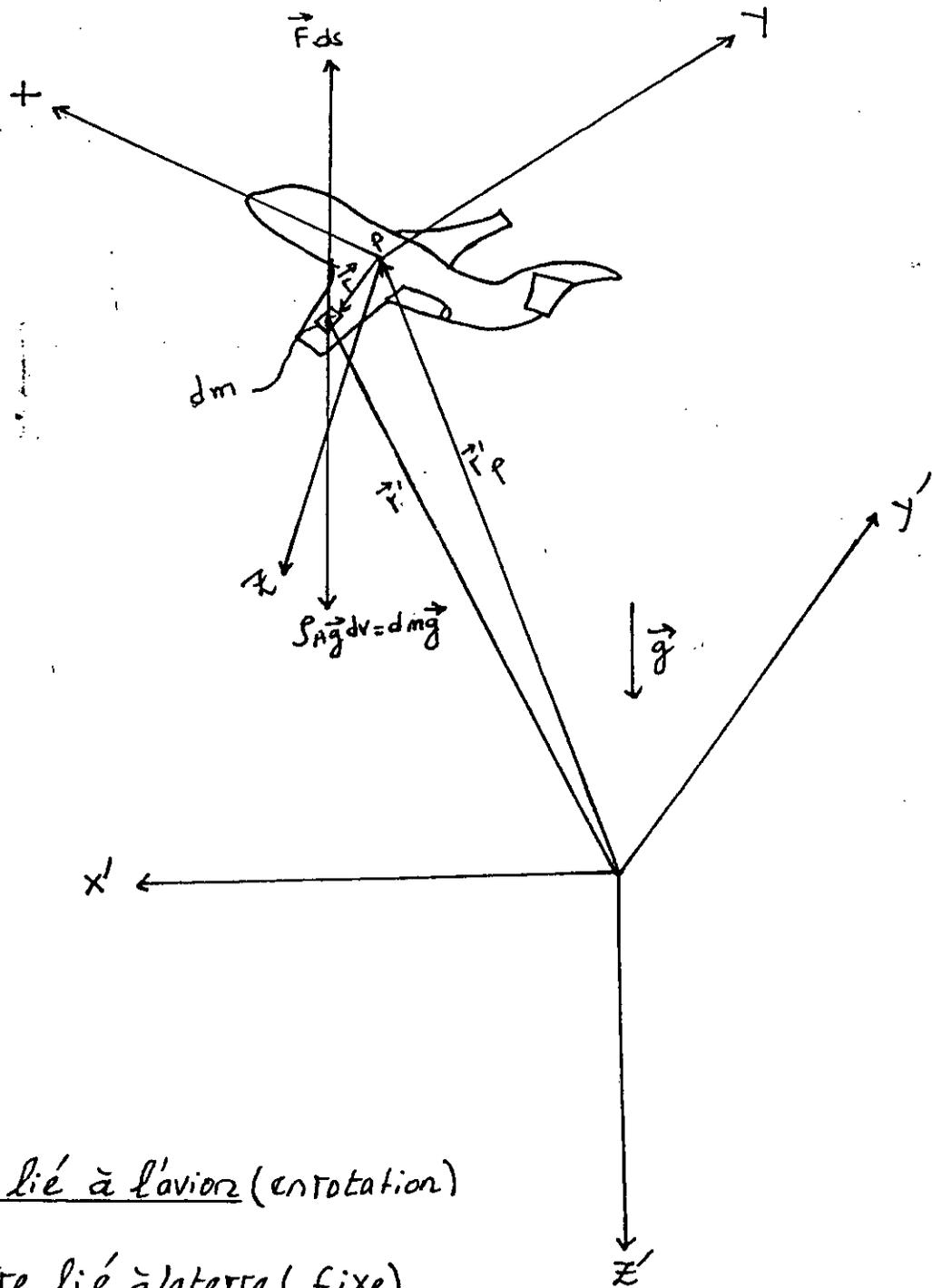
Ce système est considéré comme lié à la terre. Cette hypothèse dépend de la constatation pratique que la rotation de la terre est suffisamment lente pour être négligeable dans la plupart des études des dynamiques d'un avion [1].

Notez que l'avion peut être considéré comme un ensemble de particules de masse m_i ($i=1,2,\dots,n$) où m_i une particule de masse élémentaire continue (dm). Ces éléments de masse sont repérés par le vecteur de position \vec{r}' par rapport au système d'axe $X'Y'Z'$.

Dans le cas où l'avion est considéré comme un corps rigide, les particules de masse m_i sont à des distances constantes les unes des autres. Chaque particule est soumise à une force de gravité qui peut être définie, par unité de volume, telle que:

$$\vec{R} = \int_V \rho \vec{g} \quad (1.1)$$

Où ρ est la densité volumique de l'avion et \vec{g} est l'accélération de la gravité. Notez que l'accélération de la gravité (g) est toujours parallèle à l'axe de la terre OZ' , Figure 1.



$x y z$: Repère lié à l'avion (en rotation)

$x' y' z'$: Repère lié à la terre (fixe)

- Fig 1 -

Soit maintenant, un système d'axe mobile XYZ, ayant son origine le centre de masse p de l'avion. Le point p est repéré par rapport au repère fixe par le vecteur \vec{r}_p' . Chaque élément de masse m_i est repéré par rapport au système XYZ par le vecteur de position \vec{r} .

NB: Le système XYZ est rigidement lié à l'avion et de cette façon il est en mouvement avec l'avion. Son orientation par rapport à l'avion reste alors libre à choisir.

Les vecteurs positions \vec{r}' , \vec{r}_p' et \vec{r} sont liés par la relation:

$$\vec{r}' = \vec{r}_p' + \vec{r} \quad (1.6)$$

Si p est réellement le centre de masse alors [1]:

$$\int_V \vec{r}' \rho_A dv = 0 \quad (1.7)$$

Il est maintenant possible de réécrire le premier membre de l'équation (1.2) comme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho_A \frac{d\vec{r}'}{dt} dv &= \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \int_V \rho_A (\vec{r}'_p + \vec{r}) dv \\ &= \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} m \vec{r}'_p = m \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}'_p}{dt} = m \frac{d\vec{V}_p}{dt} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Où

$$\vec{V}_p = \frac{d\vec{r}'_p}{dt}$$

est définie comme étant la vitesse du centre de masse de l'avion.

Le second membre de l'équation (1.2) peut être écrit comme:

$$\int_V \rho_A \vec{g} dv + \int_S \vec{F} ds = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T$$

Où \vec{F}_A et \vec{F}_T sont respectivement les résultantes des forces aérodynamiques et de poussée. Ainsi, l'équation (1.2) peut être écrite

$$m \frac{d\vec{V}_p}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T \quad (1.9)$$

Cette équation exprime la variation de la quantité de mouvement. La transformation introduite par l'équation (1.2) pour \vec{v} et mVp , et elle est égale à la somme des forces extérieures appliquées maintenant appliquée aux deux équations vectorielles du mouvement sur l'avion. En substituant l'équation (1.6) dans l'équation (1.3) et (1.9) et (1.11).

en réarrangeant les termes nous obtenons:

Pour le premier membre de l'équation (1.9) on a:

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \, dm = \int_V \vec{r} \times \vec{F} \, dm \quad (1.10)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \, dm = \int_V \vec{r} \times \vec{F} \, dm + \vec{w} \times \int_V \vec{r} \, dm \quad (1.11)$$

Le second membre de l'équation (1.10) est maintenant réécrite comme:

$$\int_V \vec{r} \times \vec{F} \, dm = \vec{M}_a + \vec{M}_r$$

En fait, le premier membre de l'équation (1.11) peut être

écrit \vec{M}_a et \vec{M}_r sont respectivement les moments résultants aérodynamiques et de poussée.

L'équation (1.10) devient:

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \, dm = \vec{M}_a + \vec{M}_r + \vec{w} \times \int_V \vec{r} \, dm \quad (1.11)$$

Mais du fait que l'avion est supposé rigide, on a: Cette équation exprime que la variation de la quantité de mouvement angulaire est égale à la somme des moments extérieurs appliqués à l'avion.

NB: L'élément dm est dépendant du temps.

Ecrivons les équations (1.9) et (1.11) dans le repère $X'Y'Z'$, c-à-d. Les équations (1.14) et (1.15) qui sont écrites dans le repère XYZ représentent les équations $\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \, dm + \vec{w} \times \int_V \vec{r} \, dm$ écrites dans le repère $(X'Y'Z')$ et (XYZ) .

En utilisant les composantes des vecteurs dans l'équation (1.11) et où \vec{w} est la vitesse angulaire du système XYZ par rapport à $X'Y'Z'$. On voit annexé (1) l'équation (1.11) devient:

Cette vitesse est identifiée comme étant la vitesse angulaire de l'avion, (Ceci est vrai car le système XYZ est supposé lié à l'avion). et $\vec{w} = \dot{\alpha} \vec{e}_1 + \dot{\beta} \vec{e}_2 + \dot{\gamma} \vec{e}_3$ (1.17)

$$\vec{w} = \dot{\alpha} \vec{e}_1 + \dot{\beta} \vec{e}_2 + \dot{\gamma} \vec{e}_3$$

L'équation (1.16) est difficile à développer à cause de l'existence de l'élément dv . En utilisant les moments et les produits d'inerties (voir annexe B), et en introduisant l'hypothèse que l'avion possède un plan de symétrie [5], on aura $I_{xy} = I_{yz} = 0$ doit être satisfait.

D'où on peut écrire l'équation (1.16) devient:

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + (I_{zz} - I_{yy})RQ &= L_a + L_r \\ I_{yy}\dot{Q} + (I_{xx} - I_{zz})PR + I_{xz}(P^2 - R^2) &= M_a + M_r \\ I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + (I_{yy} - I_{xx})PQ + I_{xz}QR &= N_a + N_r \end{aligned} \quad (1.18)$$

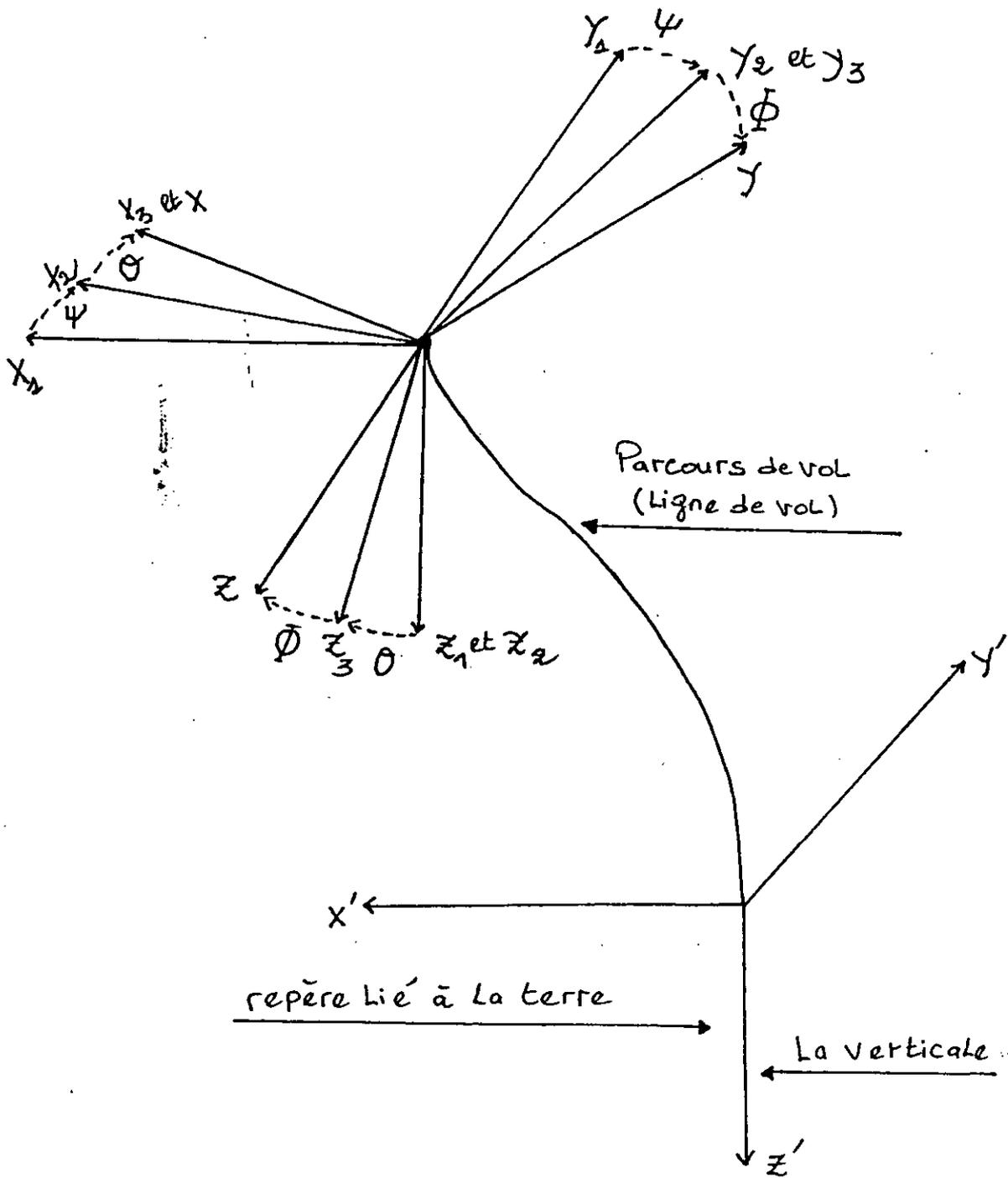
1.4. ORIENTATION DE L'AVION PAR RAPPORT A UN REPERE D'INERTIE:

Pour décrire l'orientation de l'avion relative à la terre, il suffit de décrire l'orientation du système d'axe XYZ lié à l'avion par rapport à la terre. Pour réaliser cette description on fait translater $X'Y'Z'$ parallèlement à lui même jusqu'à ce que son origine coïncide avec le centre de gravité P (centre de masse) de l'avion, figure 2. Le résultat de la translation du système $X'Y'Z'$ a été noté $X_1Y_1Z_1$.

Conventionnellement l'orientation de l'avion est donnée par une suite de trois rotations consécutives (figure 2), dont l'ordre est important car les angles ne sont pas orthogonaux [1].

Ces rotations sont:

- 1) Une rotation du système d'axe $X_1Y_1Z_1$ autour de l'axe Z avec un angle positif ψ . Celui-ci fournit les coordonnées du système d'axe $X_2Y_2Z_2$. L'angle ψ est désigné: angle de lacet.
- 2) Une rotation du système d'axe $X_2Y_2Z_2$ autour de l'axe Y_2 avec un angle positif θ . Celui-ci donne les coordonnées du système d'axe $X_3Y_3Z_3$. L'angle θ est désigné: angle de tangage.



-fig 2- Orientation de l'avion

3) Une rotation du système d'axe $X_3 Y_3 Z_3$ autour de l'axe X_3 avec un angle positif Φ . Celui-ci donne les coordonnées du système d'axe XYZ. L'angle Φ est désigné: angle de roulis.

Les angles Ψ , θ et Φ sont fréquemment désignés angles d'EULER [1].

I.5. TRAJECTOIRE DE VOL PAR RAPPORT A LA TERRE:

Il est possible aussi de décrire la trajectoire du vol d'un avion par les composantes des vitesses U, V et W [1][4]. Pour cela il faut établir une relation entre U, V et W (les composantes de la vitesse V_p dans XYZ) et les composantes de la vitesse V_p dans le repère $X'Y'Z'$, soit:

$$U_1 = \dot{x}' , \quad V_1 = \dot{y}' , \quad W_1 = \dot{z}' \quad (1.19)$$

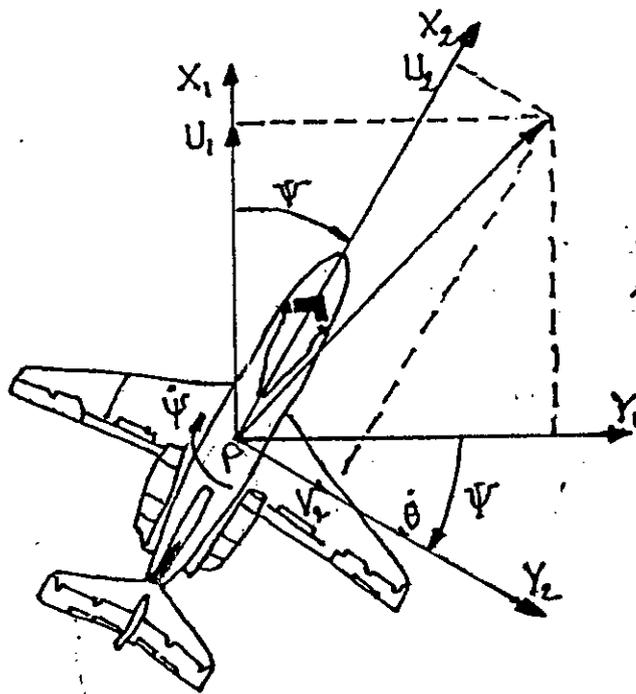
Il possible aussi de relier U_1 , V_1 et W_1 à U_2 , V_2 et W_2 (les composantes de la vitesse V_p dans $X_2 Y_2 Z_2$) par le moyen de la transformation d'orthogonalité exprimer comme [1]:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

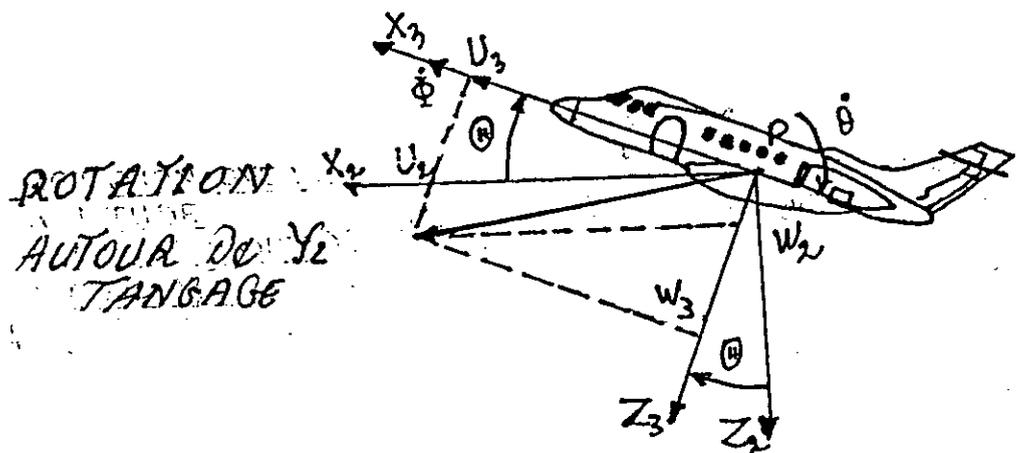
Cette relation peut être vérifiée par référence à la figure 3.

De même, il est possible de relier U_2 , V_2 et W_2 à U_3 , V_3 et W_3 (les composantes de la vitesse V_p dans $X_3 Y_3 Z_3$) par le moyen de la transformation d'orthogonalité suivante [1]:

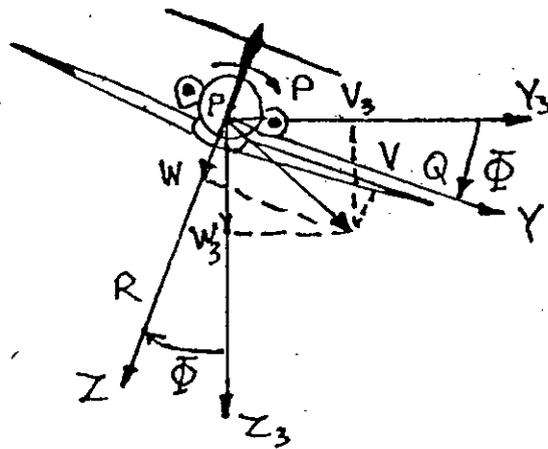
$$\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ W_3 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$



ROTATION
AUTOUR DE X_1
LACET



ROTATION
AUTOUR DE X_2
TANGAGE



ROTATION
AUTOUR DE X_3
ROLIS

- Fig 5 -

Cette relation peut être aussi vérifiée par référence à la figure 3

Finalement, il est possible aussi de relier U_3 , V_3 et W_3 à U , V et W (les composantes de la vitesse V_p dans XYZ) par le moyen d'une dernière transformation orthogonale [1]:

$$\begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Cette relation peut être aussi vérifiée par référence à la figure 3.

Par substitution de l'équation de (1.22) dans (1.21) suivie de la substitution de l'équation (1.21) dans (1.20) on obtient:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}' \\ \dot{Y}' \\ \dot{Z}' \end{bmatrix} = \quad (1.23)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

L'équation (1.23) fournit aussi la relation désirée entre les composantes de la vitesse dans le repère fixe $X'Y'Z'$ et les composantes de la vitesse dans le repère avion (XYZ). Par des permutations propres à des transformations matricielles il est possible d'inverser l'équation (1.23) [1].

Les trajectoires du vol $[x'(t), y'(t), z'(t)]$ peuvent être déterminées par intégration de l'équation (1.23) par rapport au temps t .

Cette intégration ne peut pas être faite explicitement à cause de la rotation. Les angles d'EULER sont des fonctions temporelles compliquées. En pratique ces intégrations sont faites numériquement à l'aide des ordinateurs analogiques [1].

Les variables U, V et W trouvées sont calculées par intégrations de l'équation (1.17) par rapport au temps t.

NB: Notre problème maintenant est l'identification des angles ψ , θ et ϕ comme étant des fonctions du temps. Pour cela nous développons une relation entre les dérivées par rapport au temps des angles ψ , θ et ϕ et des composantes des vitesses de rotation P, Q et R. Ces relations sont aisément tirées moyennant un certain nombre de considérations (voir annexe C).

$$\begin{aligned} P &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin\theta \\ Q &= \dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \cos\theta \sin\phi \\ R &= \dot{\psi} \cos\theta \cos\phi - \dot{\theta} \sin\phi \end{aligned} \quad (1.24)$$

Où, sous une forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Cette dernière relation peut être inversée pour donner:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= P + Q \sin\phi \tan\theta + R \cos\phi \tan\theta \\ \dot{\theta} &= Q \cos\phi - R \sin\phi \\ \dot{\psi} &= (Q \sin\phi + R \cos\phi) \sec\theta \end{aligned} \quad (1.27)$$

Enfin, pour définir la trajectoire du vol de l'avion on doit ajouter à l'ensemble d'équations (1.27), l'ensemble d'équations (1.23). Notez que l'équation (1.27) est générale.

I.6. LES COMPOSANTES DES FORCES DE GRAVITE:

Il est indiqué dans l'équation (1.17) qu'il y a trois composantes de la force gravitationnelle (mg).

Dans le système d'axe lié au corps de l'avion (XYZ), ces composantes sont respectivement mg_x , mg_y et mg_z .

Avec l'utilisation de la figure 1, il suit que:

$$k'g = k_1g \equiv i g_x + j g_y + k g_z. \quad (1.28)$$

Il est préférable d'exprimer g_x , g_y et g_z en fonction de g et des angles d'EULER θ et Φ . On note que:

$$k_3 = k \cos\Phi + j \sin\Phi \quad (1.29)$$

Posons $i_3=i$, et comme $k_1 = k_3$, l'équation (1.28) s'écrit comme:

$$-i g \sin\theta + j g \sin\Phi \cos\theta + k g \cos\Phi \cos\theta \equiv i g_x + j g_y + k g_z \quad (1.30)$$

De l'identité (1.30) il découle que:

$$\begin{aligned} g_x &= -g \sin\theta \\ g_y &= -g \sin\Phi \cos\theta \\ g_z &= g \cos\Phi \cos\theta \end{aligned} \quad (1.30)$$

Les équations de forces (1.17) peuvent être écrites comme:

$$\begin{aligned} m (\dot{U} + VR + WQ) &= -mg \sin\theta + F_{Ax} + F_{Tx} \\ m (\dot{V} + UR - WP) &= mg \sin\Phi \cos\theta + F_{Ay} + F_{Ty} \\ m (\dot{W} + UQ + VP) &= mg \sin\Phi \cos\theta + F_{Az} + F_{Tz} \end{aligned} \quad (1.31)$$

La relation qui lie les forces et les moments aérodynamiques et de poussée aux variables $u, v, w, p, q,$ et r sera vue dans le chapitre 2.

I.7. ANALYSE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT:

Les équations de mouvement obtenues précédemment peuvent être réparties en deux groupes:

- Les équations de forces et de moments.
- Les équations cinématiques.

Les équations de forces et de moments sont représentées respectivement par les équations (1.31) et (1.18)

Ces équations forment simultanément six équations différentielles nonlinéaires et couplées. Elles sont du premier ordre en termes de six variables U, V, W, P, Q et R . Les équations (1.31) contiennent les variables θ et ϕ . Ces variables sont reliées à P, Q et R par le moyen des équations cinématiques (1.24):

Il est possible en ce moment de réécrire les équations (1.31) et (1.18) en termes des variables du mouvement U, V, W, θ, ψ et ϕ .

Pour trouver la trajectoire complète de l'avion il est nécessaire aussi d'utiliser l'équation cinématique (1.24).

La résolution des systèmes d'équations (1.18) et (1.31) permet de déterminer en général les conditions d'un vol quelconque. C'est un problème fortement nonlinéaire et dépasse le cadre de notre étude.

Dans ce qui suit nous envisagerons le cas linéaire.

Chapitre II

MODELE MATHEMATIQUE LINEAIRE DU VOL D'UN AVION

II.1 INTRODUCTION:

Dans un contexte linéaire, l'avion durant son vol est supposé soumis uniquement à des mouvements faibles ou petits autour des états d'équilibre de l'appareil en régime permanent. ainsi, durant de tels mouvements, les divers paramètres ou états du système gardent des valeurs très voisines des valeurs précédentes. Un vol se déroulant sous de telles conditions est un vol dit stationnaire [4]. Ainsi, le mouvement de l'avion peut être considéré comme le résultat d'une perturbation à partir des conditions d'un vol stationnaire.

II.1.1 Vol stationnaire:

Def: Un vol stationnaire est une condition de vol dans laquelle toutes les variables du mouvement restent constantes dans le temps relativement à un système d'axe lié à l'avion.

Mathématiquement parlant, le vol stationnaire est donné par:

$$\vec{v}_p = 0 \quad \text{et} \quad \vec{w} = 0 \quad (2.1)$$

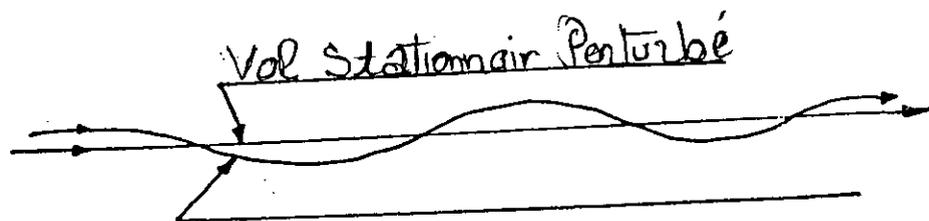
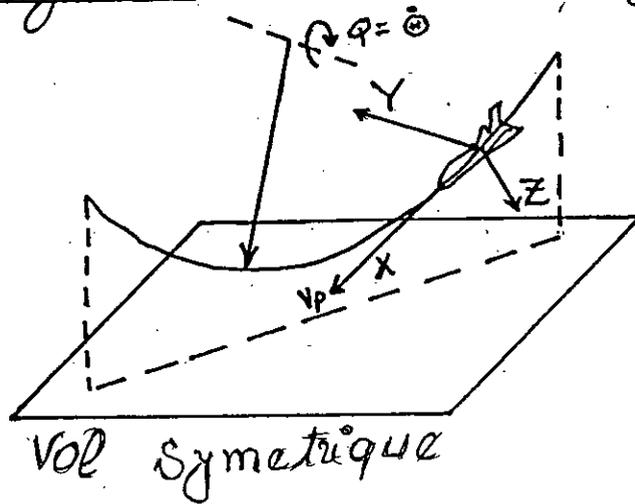
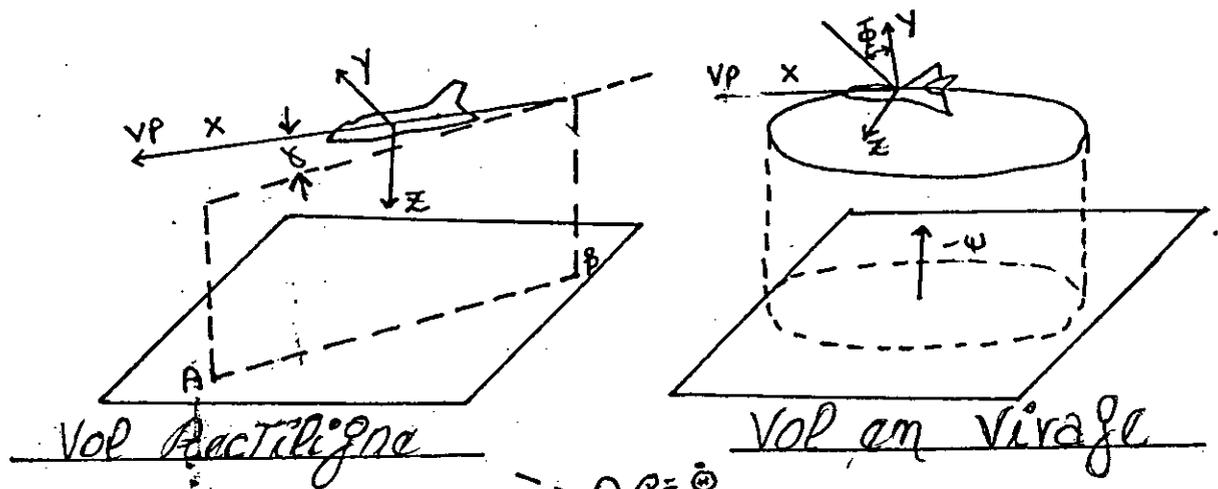
Cette relation implique que v_p et w sont constantes dans le temps dans le repère lié à l'avion.

La figure 4 illustre les trois exemples d'un vol stationnaire.

On note que la définition précédente est valable seulement dans une atmosphère homogène.

En réalité l'atmosphère n'est pas homogène (càd la densité varie selon l'altitude). Ainsi une condition supplémentaire doit être imposée: v_p est horizontal [1].

Le mouvement qui sera considéré dans la suite est le vol d'un avion en présence de petites perturbations à partir des conditions initiales.



- Fig 4 -

II.1.2 Vol perturbé:

Def: Un vol perturbé est une condition de vol dans laquelle toutes les variables du mouvement sont définies relativement à une condition du vol stationnaire.

II.2. EQUATIONS LINEAIRES D'UN MOUVEMENT PERTURBE:

Des considérations précédentes, pour obtenir les équations linéaire d'état perturbé, les relations suivantes sont appliquées à toutes les variables de mouvement.

$$\begin{aligned} U &= U_1 + u & V &= V_1 + v & W &= W_1 + w \\ P &= P_1 + p & Q &= Q_1 + q & R &= R_1 + r \\ \Psi &= \Psi_1 + \psi & \theta &= \theta_1 + \theta & \Phi &= \Phi_1 + \phi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Où l'indice (1) identifie les valeurs des vitesses du vol stationnaire et les lettres en minuscules représentent les vitesses dues à la perturbation.

Des substitutions similaires sont utilisées dans le cas des forces et les moments aérodynamiques et de poussé, à savoir:

$$\begin{aligned} F_{ax} &= F_{ax1} + f_{ax} & F_{Tx} &= F_{Tx1} + f_{Tx} \\ F_{ay} &= F_{ay1} + f_{ay} & F_{Ty} &= F_{Ty1} + f_{Ty} \\ F_{az} &= F_{az1} + f_{az} & F_{Tz} &= F_{Tz1} + f_{Tz} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} L &= L_{o1} + l_o & L_T &= L_{T1} + l_T \\ M &= M_{o1} + m_o & M_T &= M_{T1} + m_T \\ N &= N_{o1} + n_o & N_T &= N_{T1} + n_T \end{aligned} \quad (2.4)$$

Considérons dans la suite l'hypothèse suivante:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\phi = 1.0 \\ \sin\theta &= \theta \quad \text{et} \quad \sin\phi = \phi \end{aligned} \quad (2.5)$$

Avec cette hypothèse nous limitons ainsi l'angle de tangage et les perturbations de l'angle de roulis approximativement à 15 degrés. Cette hypothèse ne constitue aucune restriction sérieuse du point de vue pratique [1].

Dans ce qui suit nous supposons que les perturbations sont suffisamment petites pour que les produits et les double produits des perturbations peuvent être négligés.

Avec cette hypothèse, les termes nonlinéaire (voir annexe D) deviennent négligeables et les équations du mouvement perturbé se simplifient à :

$$m(\dot{u} - V_1 r - R_1 v + W_1 q + Q_1 w) = - mg \cos \theta_1 + f_{Ax} + f_{Tx}$$

$$m(\dot{v} + U_1 r + R_1 u + W_1 p - P_1 w) = - mg \theta \sin \Phi_1 \sin \theta_1 + mg \Phi \cos \Phi_1 \cos \theta_1 + f_{Ay} + f_{Ty}$$

$$m(\dot{w} + U_1 q + Q_1 u + V_1 p - P_1 v) = - mg \theta \sin \Phi_1 \sin \theta_1 - mg \Phi \cos \Phi_1 \cos \theta_1 + f_{Az} + f_{Tz} \quad (2.6)$$

$$I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} - I_{xz}(P_1 q + Q_1 p) + (I_{zz} - I_{yy})(R_1 q + Q_1 r) = l_A + l_T$$

$$I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})(P_1 r + R_1 p) + I_{xz}(2P_1 p - 2R_1 r) = m_A + m_T$$

$$I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})(P_1 q + Q_1 p) + I_{xz}(Q_1 r + R_1 q) = n_A + n_T \quad (2.7)$$

Du fait que les perturbations des forces et des moments (1) aérodynamiques et de poussé sont petites, par rapport aux valeurs des variables de mouvement, il est clair que les équations du mouvement ~~des~~ perturbé (2.6) et (2.7) sont linéaires.

On remarque qu'il y a seulement six équations pour décrire ces huit variables. Cela est due à la non introduction des relations cinématique.

La substitution des conditions du vol perturbé dans les équations cinématiques (voir annexe D), et l'introduction de l'hypothèse de la petite perturbation nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 p &= \dot{\Phi} - \dot{\Psi}_1 \theta \cos \theta_1 - \dot{\psi} \sin \theta_1 \\
 q &= -\dot{\theta}_1 \Phi \sin \Phi_1 + \dot{\theta} \cos \Phi_1 + \dot{\Psi}_1 \Phi \cos \theta_1 \cos \Phi_1 \\
 &\quad - \dot{\Psi}_1 \theta \sin \theta_1 \sin \Phi_1 + \dot{\psi} \cos \theta_1 \sin \Phi_1 \\
 r &= -\dot{\Psi}_1 \Phi \cos \theta_1 \sin \Phi_1 - \dot{\Psi}_1 \theta \sin \theta_1 \cos \Phi_1 \\
 &\quad + \dot{\psi} \cos \theta_1 \cos \Phi_1 - \dot{\theta}_1 \Phi \cos \Phi_1 - \dot{\theta} \sin \Phi_1
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Les équations (2.8) doivent être utilisées en conjonction avec les équations (2.6) et (2.7), ce qui donnera neuf équations de neuf variables.

Nous notons que ces équations sont relatives à un état stationnaire général, c'est à dire un état dans lequel toutes les variables du mouvement ont des valeurs d'état stationnaire non nulles [1,3].

Pour la majorité des problèmes dynamiques de l'avion les considérations suivantes sont souvent faites [1,3,4]:

- a) La vitesse initiale latérale est nul: $V_1=0$
 - b) L'angle initial de roulis n'existe pas: $\Phi=0$ (2.9)
 - c) Les vitesses initiales angulaires sont tous nulles, c'ad
- $$P_1 = Q_1 = R_1 = \dot{\Psi}_1 = \dot{\theta}_1 = \dot{\Phi}_1 = 0$$

En introduisant les restrictions ci-dessus (2.9) dans les équations (2.6) à (2.8) nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 m (\dot{u} + qw_1) &= -mg\theta \cos \theta_1 + f_{Ax} + f_{Tx} \\
 m (\dot{v} + rU_1 - pW_1) &= mg\Phi \cos \theta_1 + f_{Ay} + f_{Ty} \\
 m (\dot{w} - qU_1) &= -mg\theta \sin \theta_1 + f_{Az} + f_{Tz}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\dot{p}I_{xz} - rI_{xz} = l_a + l_r \quad (2.11)$$

$$\dot{q}I_{yy} = m_a + m_r$$

$$\dot{r}I_{zz} - pI_{xz} = n_a + n_r$$

$$p = \dot{\Phi} - \sin\theta_1 \quad (2.12)$$

$$q = \dot{\theta}$$

$$r = \dot{\Psi} \cos\theta_1$$

II.3. DEVELOPPEMENT DES FORCES INTERVENANT DANS LES EQUATIONS DE MOUVEMENT PAR RAPPORT AU REPERE FIXE:

Les différentes forces aérodynamiques et de poussée, considérées sur l'avion dépendent en générale des caractéristiques de l'atmosphère, de l'altitude, des vitesses angulaires (P,Q,R), des vitesses (U,V,W) et des positions des gouvernes [3].

Il est à noter que le moteur est supposé placé dans le plan de symétrie. De ce fait, la poussée contribue aux les forces f_{Tx} , f_{Ty} et m_x [3].

Chaque'une des composantes de forces et de moments considérés, sera exprimée dans la suite par un développement en série de Taylor.

En négligeant les termes d'ordre supérieure, les forces et les moments aérodynamiques et de poussée agissant sur un avion, pour une petite perturbation, peuvent alors être exprimés par:

$$f_{Tx} = f_{Tx0} + \frac{\delta f_x}{\delta u} u + \frac{\delta f_x}{\delta u} u + \frac{\delta f_x}{\delta q} q + \frac{\delta f_x}{\delta q} q + \frac{\delta f_x}{\delta w} w + \frac{\delta f_x}{\delta w} w + \frac{\delta f_x}{\delta \delta e} \delta e + \frac{\delta f_x}{\delta \delta e} \delta e$$

$$+ \frac{\delta f_x}{\delta \delta e} \delta e + \frac{\delta f_x}{\delta \delta f} \delta f + \frac{\delta f_x}{\delta \delta f} \delta f$$

En divisant les équations des forces par la masse m et les équations des moments par les moments d'inertie appropriés on obtient des termes de la forme:

$$(1/m) \times (\delta f_{Ax} / \delta u) u \quad \text{et} \quad (1/I_{xx}) \times (\delta l_m / \delta r) r$$

Pour simplifier la notation on pose:

$$X_u = (1/m) \times (\delta f_{Ax} / \delta u) u \quad \text{et} \quad L_r = (1/I_{xx}) \times (\delta l_m / \delta r)$$

Ces quantités sont appelées **COEFFICIENTS DE STABILITE** [1].

NB: Les nombreux essais et études aérodynamiques en soufflerie ont montré que l'écoulement dans ce cas peut être considéré comme étant quasi-stationnaire [1]. Ainsi, on peut supposer que tous les coefficients de stabilité dépendant des rapports de changement des composantes de la vitesse et toutes les dérivées partielles des coefficients aérodynamiques relativement aux taux de changement des déflexions des surfaces de contrôle, sont nuls [1,4].

En utilisant les considérations et notations précédentes les équations (2.10) à (2.12) s'écrivent:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -W_1 q + g \theta \cos \theta_1 + X_u u + X_q q + X_w w + X_{\delta e} \delta e + X_{\delta f} \delta f \\ & + \cos \epsilon T_u u + \cos \epsilon T_{\delta r p m} \delta r p m \end{aligned}$$

$$\dot{v} = -r U_1 + g \dot{\theta} \cos \theta_1 + Y_r r + Y_v v + Y_p p + Y_{\delta \alpha} \delta \alpha + Y_{\delta r} \delta r$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = & q U_1 - g \theta \sin \theta_1 + Z_u u + Z_q q + Z_w w + Z_{\delta e} \delta e + Z_{\delta f} \delta f - \\ & - \sin \epsilon T_u u - \sin \epsilon T_{\delta r p m} \delta r p m \end{aligned}$$

$$\dot{p} = \dot{r} (I_{xz} / I_{xx}) + L_r r + L_v v + L_p p + L_{\delta \alpha} \delta \alpha + L_{\delta r} \delta r$$

$$\begin{aligned} \dot{q} = & M_u u + M_q q + M_w w + M_{\delta e} \delta e + M_{\delta f} \delta f + (Z_{jm} / I_{yy}) T_{\delta r p m} \delta r p m + \\ & + (Z_{jm} / I_{yy}) T_u u \end{aligned}$$

$$\dot{r} = \dot{p} (I_{xz} / I_{zz}) + N_r r + N_v v + N_p p + N_{\delta \alpha} \delta \alpha + N_{\delta r} \delta r$$

$$\dot{\Phi} - \dot{\theta} \sin \theta_1 = p$$

$$\dot{\theta} = q$$

$$\dot{\Psi} \cos \theta_1 = r$$

(2.16)

Remarque importante:

L'utilisation des axes de stabilité ($W_1=0$) élimine les termes contenant W_1 . L'inclinaison de l'axe de stabilité par rapport à l'horizontal qui est représentée par l'angle θ_1 est considérée nul.

On pose:

$\alpha = w/U1$ (angle d'attaque) et $\beta = v/U1$ (angle de dérapage).

NB: Le produit d'inertie I_{xz} est négligé pour plusieurs types d'avion [3].

Si de plus nous prenons le cas d'un avion à turbo-réaction on aura $df_T/du=0$ et $\epsilon=0$ [3].

Tenant compte de la remarque précédente, les deux dynamiques suivantes peuvent être dégagées à partir des équations (2.16).

A - Dynamique longitudinale

$$\dot{u} = g\theta + X_u u + X_q q + X_w w + X_{\delta_w} \delta e + X_{\delta_r} \delta f$$

$$\dot{\alpha} = (Z_u/U1) u + (Z_q/U1+1) q + (Z_w/U1) \alpha + (Z_{\delta_w}/U1) \delta e + (Z_{\delta_r}/U1) \delta f$$

$$\dot{q} = M_u u + M_q q + M_w w + M_{\delta_w} \delta e + M_{\delta_r} \delta f$$

$$\dot{\theta} = q$$

(2.18)

B - Dynamique latérale

$$\dot{\beta} = (g/U1)\Phi + (Y_r/U1-1)r + (Y_v/U1)\beta + (Y_p/U1)p + (Y_{\delta\alpha}/U1)\delta\alpha \\ + (Y_{\delta r}/U1)\delta r$$

$$\dot{p} = L_r r + L_v v + L_p p + L_{\delta\alpha}\delta\alpha + L_{\delta r}\delta r$$

$$\dot{r} = N_r r + N_v v + N_p p + N_{\delta\alpha}\delta\alpha + N_{\delta r}\delta r$$

$$\dot{\Phi} = p$$

$$\dot{\Psi} = r$$

(2.19)

Ainsi, moyennant certaines hypothèses d'approximation, bien admises dans la littérature, dans le cadre d'une étude théorique, les équations linéaires décrivant les mouvements longitudinal et latérale d'un avion en vol perturbé sont établies [1,4,6].

Nous rappelons que ces hypothèses supposent en particulier:

- Petits mouvements autour d'un régime de vol rectiligne symétrique
- Symétrie mécanique et aérodynamique complète de l'avion.

Les modèles identifiés par les équations (2.17) et (2.18) seront utilisés dans la suite pour l'analyse de la stabilité du système et la synthèse de stratégies de commande pour ce dernier.

Chapitre III

MODELE NUMERIQUES ET ANALYSES DES DEUX DYNAMIQUES DU MOUVEMENT D'UN AVION

III.1. INTRODUCTION ET MODELES NUMERIQUES:

Dans le présent chapitre nous procédons à l'analyse de la stabilité dynamique, de la commandabilité et de l'observabilité du système de l'avion représenté par les deux modèles linéaires découplés qui décrivent les dynamiques longitudinale et latérale de l'appareil lors d'un vol rectiligne horizontal et symétrique.

Nous rappelons d'après les résultats du chapitre II que les modèles linéaires pour les deux dynamiques découplées de l'appareil et pour des mouvements relativement faibles autour des positions d'équilibre sont:

III.1.1. La Dynamique du Mouvement Longitudinal:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_\alpha & X_q & g \\ Z_u/U1 & Z_\alpha/U1 & ((Z_q/U1)+1) & 0 \\ M_u & M_\alpha & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X\delta e \\ Z\delta e/U1 \\ M\delta e \\ 0 \end{bmatrix} \delta e \quad (3.1)$$

Où \dot{u} , $\dot{\alpha}$, \dot{q} , et $\dot{\theta}$ représentent les variations d'états du système linéarisés autour de leur positions d'équilibres.

Elles correspondent respectivement à la variation de vitesse de déplacement de l'avion, de l'angle d'attaque, de la vitesse et de l'angle de tangage. La commande δe représente la variation d'angle de l'élévateur.

III.1.2. La Dynamique du Mouvement Latéral:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\beta/U1 & Y_p/U1 & ((Y_r/U1)-1) & g/U1 & 0 \\ L_\beta & L_p & L_r & 0 & 0 \\ N_\beta & N_p & N_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y\delta\alpha/U1 & Y\delta r/U1 \\ L\delta\alpha & L\delta r \\ N\delta\alpha & N\delta r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta r \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Où $\dot{\beta}$, \dot{p} , \dot{r} , $\dot{\Phi}$ et $\dot{\Psi}$ représentent les variations des états du système linéarisés autour de leur positions d'équilibre. Elles correspondent respectivement à la variation d'angle de dérapage, des vitesses angulaires de roulis et de lacet, et des angles de roulis et de lacet.

Les commandes $\delta\alpha$ et δr représentent respectivement les variations d'angles de la gouverne et des ailerons.

III.1.3 Application Numériques:

En vue de procéder directement à une analyse quantitative de la stabilité, de la commandabilité et de l'observabilité du système linéaire de l'avion, à travers une simulation sur ordinateur les données numériques trouvées dans [1] qui correspondent à un avion commercial à turbo-réaction, à savoir:

$$\begin{array}{ll}
 U_1 = 205 \text{ m sec}^{-1} & \mathcal{J} = 0.0281 \text{ Kg m}^{-2} \\
 \theta = 0^\circ \text{ (Axe de Stabilité)} & S = 70 \text{ m (corde)} \\
 M = & h = 12\,192 \text{ m}
 \end{array}$$

III.1.3A. Dynamique du Mouvement Longitudinal:

Moment d'inertie:

$$I_{yy} = 83.60 \text{ Kg m}^2$$

Coefficients aérodynamiques:

$$\begin{array}{ll}
 X_u = -0.0075 \text{ (sec}^{-1}\text{)} & Z_q = -0.575 \text{ (m sec}^{-1}\text{)} \\
 X_q = 0 & Z\delta e = -0.227 \text{ (m sec}^{-2}\text{)} \\
 X_\alpha = +2.57 \text{ (m sec}^{-2}\text{)} & M_u = 0.0003 \text{ (m sec}^{-1}\text{)} \\
 X\delta\alpha = 0 \text{ (m sec}^{-1}\text{)} & M_\alpha = -7.448 \text{ (sec}^{-2}\text{)} \\
 Z_u = -0.139 \text{ (sec}^{-1}\text{)} & M_q = -0.941 \text{ (sec}^{-1}\text{)} \\
 Z_\alpha = -137.6 \text{ (m sec}^{-2}\text{)} & M\delta e = -0.308 \text{ (sec}^{-2}\text{)}
 \end{array}$$

Tenant compte de ces données numériques, l'équation (3.1) devient

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (3.3)$$

Où

$$x = \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -0.0507 & -3.861 & 0 & -10 \\ -0.0012 & -0.516 & 1 & 0 \\ -0.0001 & 1.416 & -0.493 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0717 \\ -1.645 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$u = \delta e.$$

III.1.3B. Dynamique du Mouvement Latérale:

Moment d'inertie :

$$I_{xx} = 124.5 \quad \text{Kg m}^2$$

$$I_{zz} = 209 \quad \text{Kg m}^2$$

$$I_{xz} = 4.44 \quad \text{Kg m}^2$$

Coefficients aérodynamiques:

$$Y_{\beta} = -56.1 (\text{sec}^{-1}) \quad L_{\beta} = -4.188 (\text{m sec}^{-1}) \quad N_{\beta} = +2.627 (\text{m sec}^{-1})$$

$$Y_p = 0 \quad L_p = -0.437 (\text{m sec}^{-1}) \quad N_p = +0.0042 (\text{m sec}^{-1})$$

$$Y_r = +0.779 (\text{m sec}^{-2}) \quad L_r = +0.157 (\text{m sec}^{-1}) \quad N_r = -0.105 (\text{m sec}^{-2})$$

$$Y_{\delta\alpha} = 0 \quad L_{\delta\alpha} = +6.77 (\text{m sec}^{-2}) \quad N_{\delta\alpha} = -0.0414 (\text{m sec}^{-2})$$

$$Y_{\delta r} = +10.65 (\text{m sec}^{-2}) \quad L_{\delta r} = +0.747 (\text{m sec}^{-2}) \quad N_{\delta r} = -1.55 (\text{m sec}^{-2})$$

Tenant compte de ces données numériques, l'équation (3.2) devient:

$$\dot{z}(t) = F z(t) + D v(t) \quad (3.4)$$

Où

$$z = \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \Phi \\ \Psi \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta r \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -0.746 & 0.006 & -0.998 & 0.037 & 0 \\ -12.90 & -0.746 & 0.387 & 0 & 0 \\ 4.310 & 0.024 & -0.174 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0092 \\ 6.05 & 0.952 \\ -0.416 & -1.76 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III.2. ANALYSE ET SIMULATION DES MOUVEMENTS DE L'AVION EN BOUCLE OUVERTE

III.2.1. LA DYNAMIQUE DU MOUVEMENT LONGITUDINAL:

a) commandabilité du système:

Dans le cas du mouvement longitudinal la commandabilité du système sera analysée par rapport à l'action de l'élevateur, c.à.d (δe).

La matrice du test de la commandabilité d'un système linéaire et invariant dans le temps est donnée par la relation suivante: [2]

$$Q_1 = [B, AB, \dots, A^{k-1}B] \text{ est } k \text{ et l'ordre du système}$$

L'ordre du système est égale au nombre des variables d'état, c.à.d $k=4$.

En effet, nous avons vérifié à l'aide du logiciel MATLAB que la matrice Q_1 est aussi de rang 4. Par conséquent le système décrit par le modèle linéaire et invariant ci-dessus est commandable par l'élevateur (c.à.d l'input δe).

b) L'observabilité du système:

Dans le cas de la présente étude nous supposons que tous les états (ou variations d'état) sont observables. Donc, notre équation d'observabilité est de type $y(t) = C x(t)$

où

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme le système est considéré linéaire et invariant, le test de son observabilité peut être effectué à travers la détermination du rang de la matrice

$$Ob_1 = [C, A^*C, \dots, (A^*)^{k-1}C] \text{ où } k \text{ est l'ordre du système}$$

Le rang de cette matrice, calculé à l'aide du logiciel MATLAB sur ordinateur PC386, est trouvé égale à 4. Comme le système est d'ordre 4 aussi, alors d'après [2] le système décrit par le modèle ci-dessus est observable.

c) Modes du système:

Les modes dynamiques d'un système linéaire et invariant peuvent être déterminés par les termes additifs qui forment la solution générale de l'équation différentielle linéaire de son modèle. Dans le cas de la dynamique du mouvement longitudinal c'est l'équation (3.3) [9].

Ces modes peuvent être déterminés à l'aide des valeurs propres de la matrice dynamique du système (c.à.d A). Ces valeurs correspondent aussi aux pôles du système et sont solutions de l'équation caractéristique suivante:

$$\det(sI-A) = |sI-A| = 0$$

$$\text{càd } D(s) = |sI-A| = s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s^1 + a_0$$

où I est une matrice identité de même dimension que A et s c'est le paramètre de Laplace; Ici, on trouve,

$$D(s) = s^4 + 1,060 s^3 - 1,115 s^2 - 0,0629 s - 0,0172. \quad (3.4)$$

Les racines de cette équation sont trouvées à l'aide du logiciel MATLAB comme étant:

$$P_1 = -1,6987$$

$$P_2 = +0,7031$$

$$P_{3,4} = -0,0324 \pm j 0,1157$$

Ainsi, l'équation (3.4) peut se mettre sous la forme

$$D(s) = (s + 1,6987) (s - 0,7031) (s^2 + 0,0675s + 0,014)$$

Les premiers termes correspondant aux pôles P_1 et P_2 caractérisent une oscillation de tangage fortement amortie et de période courte, leur parties imaginaires sont nulles. Ils définissent ainsi un mode appelé "oscillation d'incidence" ou "mouvement de courte période" [3,4].

Le terme régi par la paire de pôles complexes conjugués $P_{3,4} = -0,0324 \pm j 0,1157$,

(avec une fréquence naturelle $\omega_n = 0.1201$ rad et un coefficient d'amortissement $\zeta = 0.269$) caractérise une oscillation faiblement amortie et de grande période. Ce mode est appelé mouvement phugoïde et se manifeste par des faibles oscillations en altitude.

On peut considérer alors que le mouvement longitudinal global résulte de la superposition de deux mouvements différents et simultanés: mouvement de courte période et mouvement de longue période (phugoïde). Sous dynamiques correspondantes à ces modes étant variables suivant la nature de la perturbation, ou la fréquence d'excitation [3].

Des résultats numériques d'analyses, nous constatons que la dynamique du mouvement longitudinal est commandable et observable, mais présente une certaine instabilité causée par la présence du pôle réel positif $P_2 = 0.7031$, du mouvement de courte période.

Cette instabilité affecte toutes les sorties: (u, α, q, θ) , comme le montre les fonctions de transfert suivantes.

$$U(s)/\delta e = \frac{(s - 9 \times 10^{-3}) (s + 82.44) (s + 0.4167)}{(s + 1.6987) (s - 0.7031) (s^2 + 0.067s + 0.014)}$$

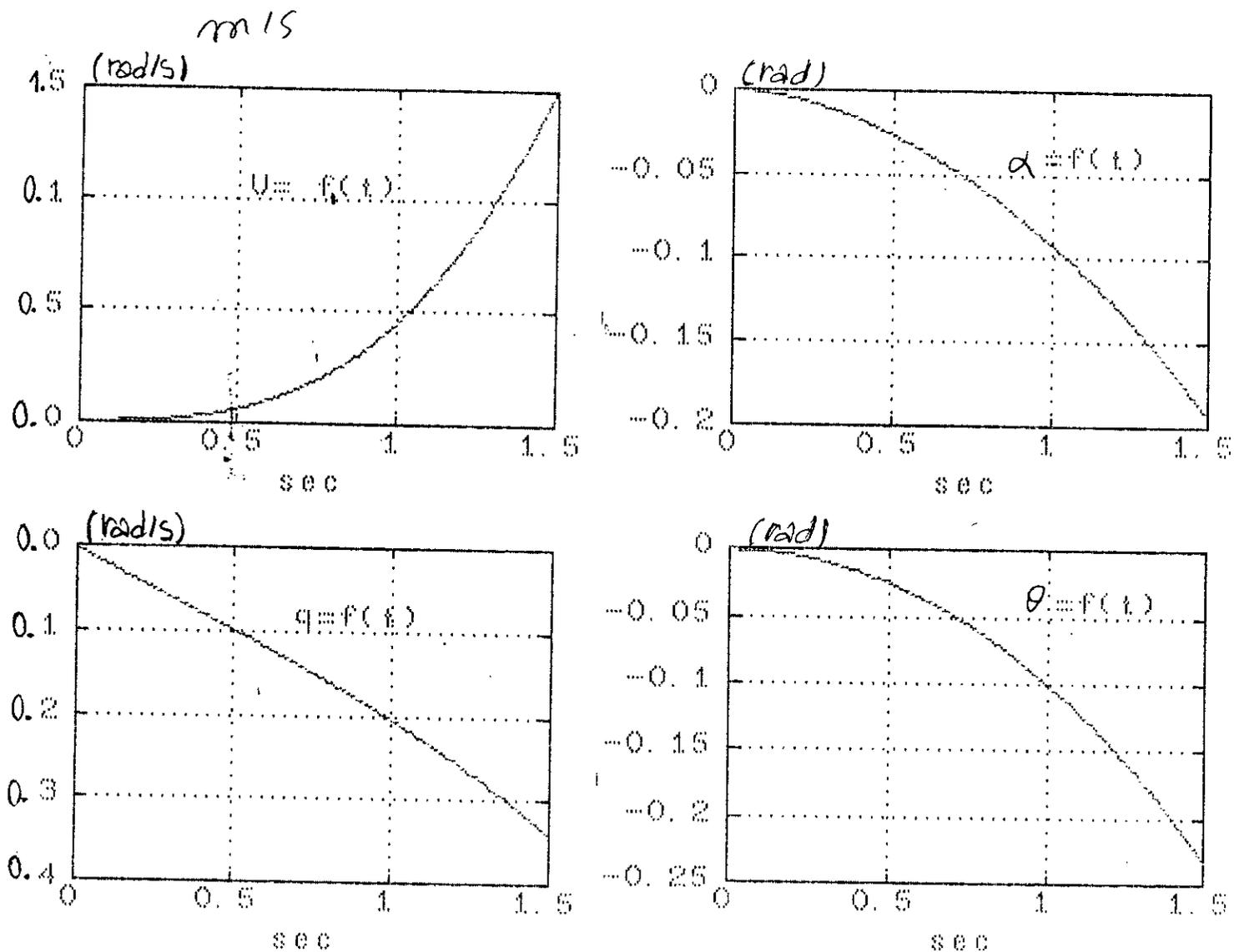
$$\alpha(s)/\delta e = \frac{(s + 23.43) (s^2 + 5 \times 10^{-2}s + 0.018)}{(s + 1.6987) (s - 0.7031) (s^2 + 0.067s + 0.014)}$$

$$Q(s)/\delta e = \frac{(s + 0.586) (s + 0.0423) (s - 1.7 \times 10^{-14})}{(s + 1.6987) (s - 0.7031) (s^2 + 0.067s + 0.014)}$$

$$\theta(s)/\delta e = \frac{(s + 0.586) (s + 0.0423)}{(s + 1.6987) (s - 0.7031) (s^2 + 0.067s + 0.014)}$$

En effet on voit bien que le pôle $P_2 = 0.7031$ impose sa dynamique sur toutes les sorties du système.

Ce fait est confirmé par les résultats de la figure 1 produite d'une simulation numérique sur ordinateur effectuée avec une entrée échelon, $\delta e = 0.25 \text{ rad}$, par rapport à la position d'équilibre de l'élevateur.



- Fig. 1 -

III.2.2. LA DYNAMIQUE DU MOUVEMENT LATERAL:

a) La commandabilité du système:

Dans le cas du mouvement latéral la commandabilité du système sera analysée par rapport à l'action de l'aileron (δr) et la gouverne ($\delta \alpha$)

D'après l'équation d'état (3.4) l'ordre du système est égal à 5, c.à.d le nombre des variables d'état; comme le calcul, à l'aide du logiciel MATLAB, montre que le rang de la matrice de commandabilité est égal aussi à 5, alors d'après [2] le système décrit par le modèle linéaire et invariant ci-dessus est commandable par les ailerons et la gouverne (c.à.d par les inputs δr et $\delta \alpha$).

b) L'observabilité du système:

Comme pour le cas précédent III.2.1b nous supposons que tous les états (ou variation d'état) sont observables. Donc, notre équation d'observabilité et de type $y(t) = R x(t)$

où

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi le système linéaire et invariant considéré est observable.

c) Modes du système:

De la même manière que précédemment les différents modes de la dynamique du mouvement latéral sont déterminés à l'aide des valeurs propres de la matrice d'évolution du système (c.à.d F). Ces valeurs sont solution de l'équation caractéristique suivante.

$$D(s) = s^5 + 1.666 s^4 + 5.189 s^3 - 3.472 s^2 - 0.0213 s. \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) peut se mettre sous la forme:

$$D(s) = s (s + 0.765) (s + 0.0062) (s^2 - 0.894s + 4.495)$$

Le terme $(s + 0.765)$ représente le mouvement de roulis, c'est un mode rapidement convergent vers l'état d'équilibre.

Il a une période $T_1=1.306$ s [5].

Le terme $(s + 0.0062)$ représente le mouvement spirale, c'est un mouvement lentement convergent vers l'état d'équilibre. Il a une longue période $T_2=161.3$ s. Alors c'est un mouvement apériodique qui caractérise l'attitude de l'avion lors d'une certaine inclinaison [5].

Le dernier terme $(s^2 - 0.894s + 4.495)$ représente un mouvement oscillatoire faiblement amorti (de fréquence naturelle $\omega_n=2.12$ rad/s et un coefficient d'amortissement $\xi=0.21$) Ce mouvement est dénomé le roulis-hollandais [1], c'est un phénomène due au couplage roulis-lacet.

Le terme (s) représente un intégrateur pur. Il correspond à l'angle de lacet qui est une intégration directe de la vitesse de lacet.

On peut considérer que la dynamique du mouvement latéral globale résulte de la superposition de trois dynamiques de mouvements élémentaires simultanées.

Dans la littérature, la dynamique latérale est souvent étudiée à l'aide de trois ou quatre variables d'état [1,4,3], la présente étude a été faite avec cinq pour mieux se rapprocher du cas pratique [6].

D'après les éléments de l'analyse nous constatons que la dynamique du mouvement latérale est commandable, observable et marginalement stable [10]. La presque instabilité est due au pôle situé sur l'axe des imaginaires. Pour mieux mettre en évidence, l'effet de ce pôle sur la réponse du système nous considérons les fonctions de transferts suivantes:

$$\beta(s)/\delta\alpha = \frac{s (s + 376.61) (s + 0.7770) (s + 0.0937)}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

$$\beta(s)/\delta r = \frac{s (s + 191.90) (s + 0.7620) (s - 0.0141)}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

$$p(s)/\delta \alpha = \frac{s^2 (s^2 + 0.890 s - 3.13)}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

$$p(s)/\delta r = \frac{s (s + 4.50) (s - 4.4240) (s - 2.32 \times 10^{-17})}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

$$r(s)/\delta \alpha = \frac{s (s - 0.9437) (s^2 + 2.074 s - 0.02)}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

$$r(s)/\delta r = \frac{s (s + 1.230) (s^2 + 0.226 s - 0.30)}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

$$\Phi(s)/\delta \alpha = \frac{s (s + 1.36 \times 10^{16}) (s^2 + 0.890 s - 332.86)}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

$$\Phi(s)/\delta r = \frac{s (s + 4.504) (s - 4.4240) (s - 2.14 \times 10^{15})}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

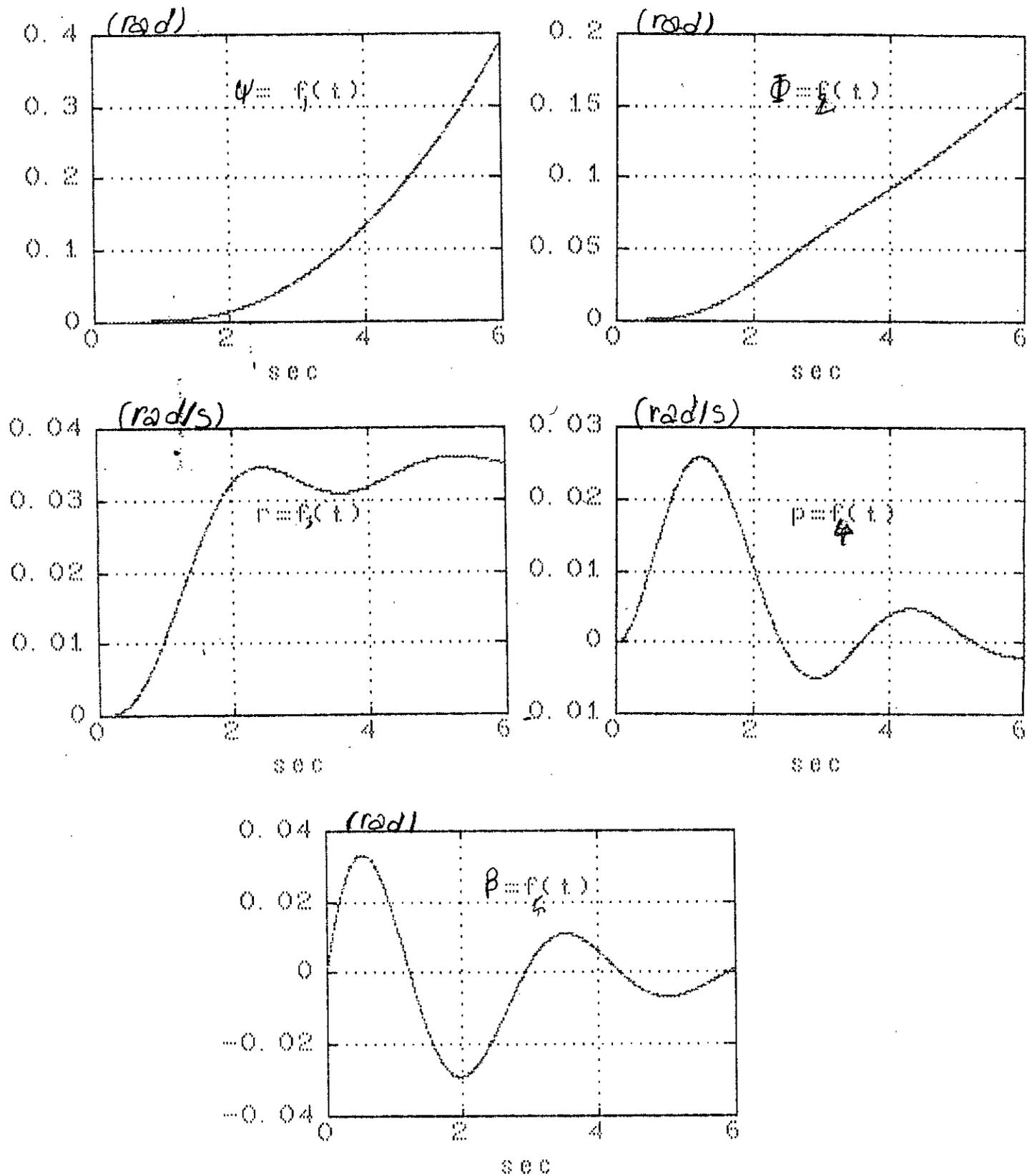
$$\Psi(s)/\delta \alpha = \frac{(s - 0.9430) (s - 6.24 \times 10^{14}) (s^2 + 2.074 s + 0.20)}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

$$\Psi(s)/\delta r = \frac{(s + 1.23) (s - 3.96 \times 10^{15}) (s^2 + 0.013 s - 0.30)}{s (s + 0.7653) (s + 0.0062) (s^2 + 0.8940 s + 4.495)}$$

En effet, on voit bien que le pôle $s=0$ impose sa dynamique uniquement sur une sortie qui représente l'angle de lacet.

Cette constatation est confirmée par les résultats de la figur2 dans le cadre d'une simulation numérique sur ordinateur effectuée sous l'effet de 0.25 rad de variation sur les angles de l'aileron

et de la gouverne.



- Fig 2 -

III.3. CONCLUSION:

En conclusion, nous constatons d'après les résultats de l'analyse effectuée dans le cadre du présent chapitre et pour les données numériques retenues pour notre système que les dynamiques des deux mouvements considérés ne sont pas suffisamment stables est que par conséquent un besoin d'augmenter leur stabilité se fait particulièrement sentir.

Du fait que les deux modèles linéaire étudiier sont commandables une solution au problème soulevé peut être trouvée soit par l'utilisation d'une technique classique (lieux des racines, placement des pôles) ou par le recours à une approche moderne comme celle de la commande optimale linéaire quadratique.

Dans le chapitre IV suivant, nous montrerons à l'aide d'une simulation numérique comment par exemple la technique classique de placement de pôles peut améliorer les resultat du présent chapitre (du système en boucle ouverte), par une structure de retour d'état ou feedback. Le chapitre V sera consacré aux traitement du problème posé à l'aide de la commande optimale linéaire quadratique.

Chapitre IV

SYNTHESE D'UNE COMMANDE CLASSIQUE

IV.1 INTRODUCTION:

La comande par placement des pôles et retour d'état est une technique temporelle connue depuis la 2^{ème} guerre mondiale. Elle a été bien appréciée par beaucoup d'automaticiens et plusieurs problèmes de stabilité et de commande de systèmes dynamiques ont été résolus avec succès grâce à ses résultats [5,11].

Dans le présent chapitre elle sera appliquée pour augmenter en particulier la stabilité de la dynamique des deux mouvements de l'avion, analysée dans le précédent chapitre.

Nous rappelons que l'application de cette technique ne peut être validée que si d'abord le système sous considération est au moins commandable. Ceci a été vérifié dans le chapitre précédent.

IV.2. SIMULATION NUMERIQUE:

Dans le cadre d'une simulation numérique sur ordinateur et en vue d'examiner les performances du système de commande en boucle fermée de l'avion nous considérons le cas de deux situations pratiques habituelles [14].

D'abord on suppose que l'avion est en vol rectiligne horizontal et non perturbé, c.à.d stable.

Dans la première situation on suppose l'apparition soudaine d'une action intentionnelle de la part du pilote sur les systèmes de commande et on étudiera la réponse du système à cette action, pilotage manuel.

Dans la seconde situation on suppose que l'action est due à une perturbation extérieure passagère (secousse) de faible intensité et on examinera comment l'appareil, grâce à son système de commande, revient à sa première position d'équilibre, pilotage automatique.

IV.2.1 Pilotage Manuel:

A) Dans le cas de la dynamique du mouvement horizontal on suppose que le pilote provoque un certaine input δe sur l'élévateur du système de commande et on étudier la réponse du système à cet input [14]. L'input δe est une action constante et continue dans le temps, c.à.d un input de type échelon. Cette action est souvent entreprise par le pilote lors de l'orientation de l'appareil vers le haut ou vers le bas.

L'application de la technique de placement des pôles nécessite en premier lieu que les pôles du système en boucle fermée souhaités soient connus [4]. Pour cela, l'approche expérimentale par essai et erreur est souvent employée.

Dans la littérature de l'aéronautique [4] et pour notre cas nous avons trouvé qu'il est souhaitable d'avoir une fréquence propre $\omega_{p1}=2.5$ rad/s et un coefficient d'amortissement $\zeta=0.5$ pour le mouvement de courte période, et une pulsation $\omega_{p2}=0.1$ rad/s et un coefficient d'amortissement $\zeta=0.1$ pour le mode phugoïde. Ceci correspondent respectivement aux pôles suivants, du système en boucle fermée:

$$P_{1,2} = -1.236 \pm j 2.1589$$

$$P_{3,4} = -0.0236 \pm j 0.0520$$

Maintenant, pour le calcul des coefficients de la contre-réaction, il existe plusieurs techniques [4].

Nous utilisons pour notre cas la formule de Bass-Gurra [4].

Avec cette méthode les gains de la boucle de retour sont donnés par:

$$K_0 = [(Q_1 W)^T]^{-1} (\hat{a} - a) \quad (4.1)$$

Où, Q_1 est La matrice de commandabilité trouvée dans le chapitre précédent.

et

$$W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k-1} \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

qui est la transposée de la matrice triangulaire de toplitz et où k est l'ordre du système considéré (ici 4).

a: vecteur colonne contenant Les coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle ouverte.

â: matrice colonne contenant Les coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle fermée.

Le calcul de la matrice des gains (4.1) et (4.2) par ordinateur, utilisant le software MATLAB donne:

$$K_o = \begin{bmatrix} -0.00429 & -3.8770 & -0.7186 & -0.0987 \end{bmatrix}$$

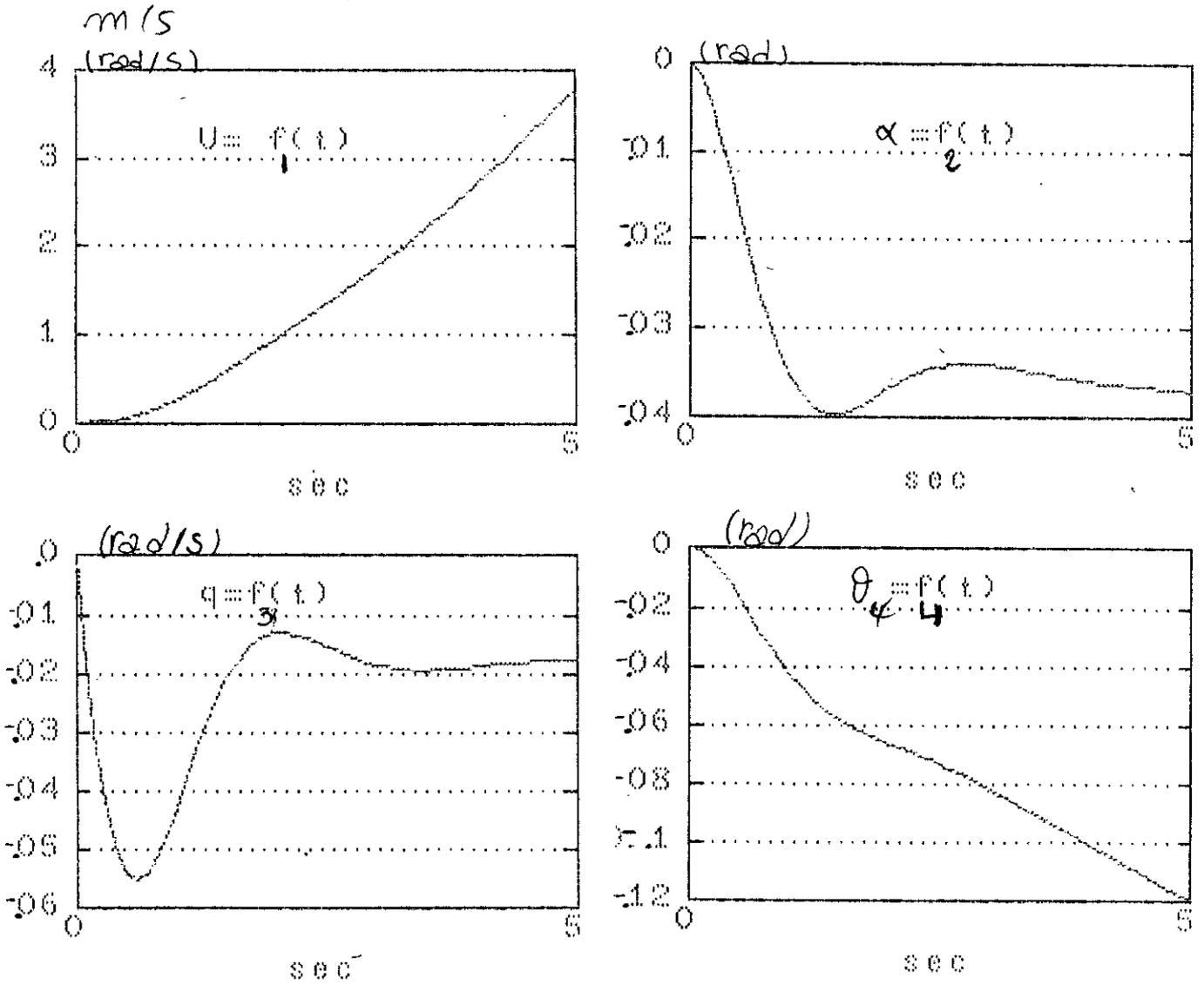
La matrice du système en boucle fermé est alors:

$$A_c = A - B K_o$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -0.00507 & -3.861 & 0 & -10 \\ -0.00147 & -0.794 & 0.9484 & -0.0070 \\ -0.0071 & -4.9526 & -1.6753 & -0.1624 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La simulation numérique des résultats obtenus ci-dessus pour les mêmes conditions de travail choisies dans le chapitre 3 c.à.d une entrée échelon d'une variation fixe de 0.25 rad de l'angle de l'élevateur (δe) dans le sens des aiguilles d'une montre), montre dans la figure 3 une amélioration considérable dans la stabilité de la dynamique longitudinale. L'angle d'attaque ($\alpha=f_1(t)$) et la vitesse de tangage ($q=f_2(t)$) tendent à se stabiliser pour un temps égal à 5s avec des erreurs permanentes de l'ordre de -0.035 rad et -0.018 rad, respectivement. La variation de vitesse ($U=f_3(t)$) et

l'angle de tangage ($\theta = f_4(t)$) restent croissant.



- Fig 3 -

B) Dans le cas de la dynamique du mouvement latéral on suppose que le pilote provoque une certaine action δx_0 ou δr_0 (ou les deux à la fois) sur le gouvernail et l'aileron et on étudie la réponse du système à ces actions comme précédemment on retient le cas d'une entrée échelon.

En vue d'appliquer la technique de placement des pôles pour la détermination des gains de la boucle de retour, les pôles du système en boucle fermée recherchés sont pris dans [4].

$$P_1 = -1$$

$$P_2 = -5$$

$$P_{3,4} = -1 \pm j 3$$

$$P_5 = 0$$

A ces pôles correspondent les caractéristiques suivantes: Un période de 1s et 0.2s respectivement pour le mode oscillatoire et le mode de roulis, une fréquence naturelle $\omega_n = 3.16$ rad/s et un coefficient d'amortissement $\zeta = 0.31$ pour le mode dénommé roulis hollandais.

Pour le calcul des coefficients de la contre-réaction, nous utilisons la technique des systèmes multivariables [7].

Le calcul de la matrice des gains par ordinateur, utilisant MATLAB donne:

$$K_a = \begin{bmatrix} -1.3411 & 0.8012 & 0.2351 & 0.62655 & -1.6717 \\ -3.3772 & -0.4115 & -1.1413 & -2.71260 & -7.1471 \end{bmatrix}$$

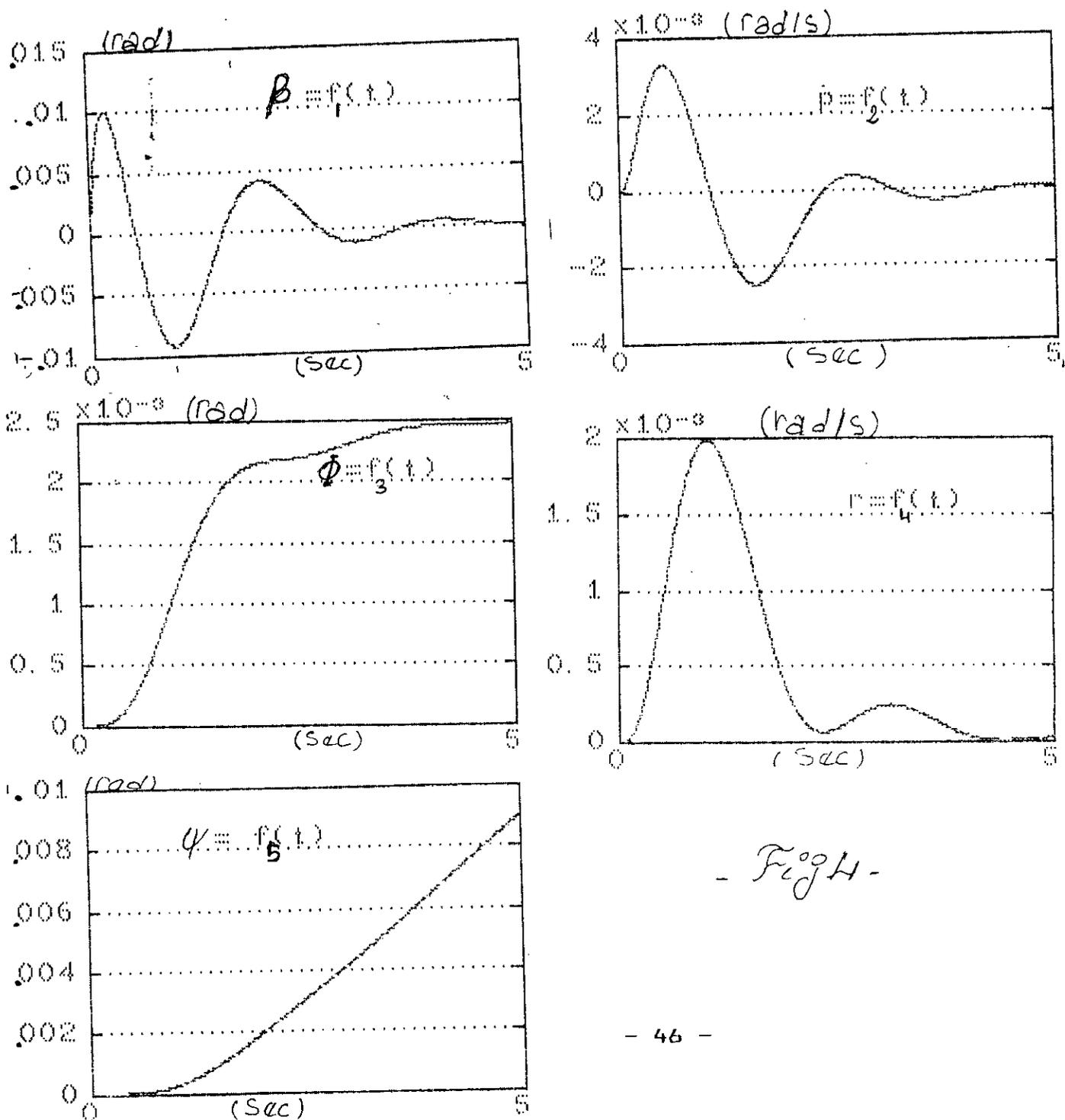
La matrice du système en boucle fermée est alors:

$$F_c = \begin{bmatrix} -0.7133 & -0.0088 & -0.9887 & 0.0611 & 0.0637 \\ -1.5714 & -5.2018 & 0.5099 & -1.2082 & -3.3096 \\ -2.1917 & -3.6690 & -2.0849 & -4.5136 & -1.1883 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La simulation numérique des résultats obtenus ci-dessus pour les mêmes conditions de travail choisies dans le chapitre 3 pour le cas

du mouvement latéral, montre dans la figure 4 une amélioration considérable dans la stabilité du mouvement latéral.

Les vitesses angulaires de lacet $r(t)$ et de roulis $p(t)$ se stabilisent au bout d'un temps de l'ordre de 5s avec une erreur permanente nulle. Les mouvements de dérapage $\beta(t)$ et de roulis $\Phi(t)$ se stabilisent en un temps égal à 5s avec une erreur permanente de l'ordre de 0.0025rad pour l'angle de roulis. La réponse $\psi=f_5(t)$, représente une intégration de la vitesse de lacet (r), cette réponse possède une allure d'un intégrateur pur.



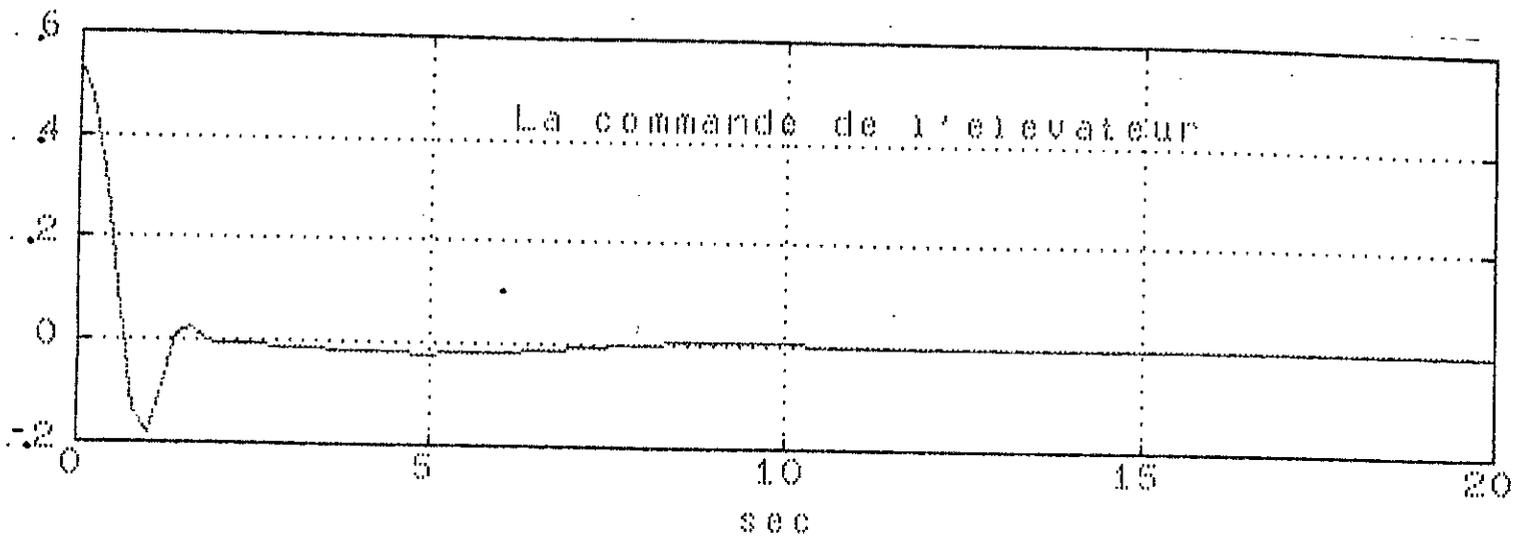
IV.2.2 Pilotage automatique:

A) Dans le cas de la dynamique du mouvement longitudinal on suppose que la perturbation extérieure est de type impulsion puisqu'elle est passagère. Dans ce cas il revient à étudier la réponse du système (en boucle fermée) avec une condition d'état initiale ayant la même intensité x_0 que la perturbation à laquelle est soumis l'état x de l'appareil à l'instant t_0 [14].

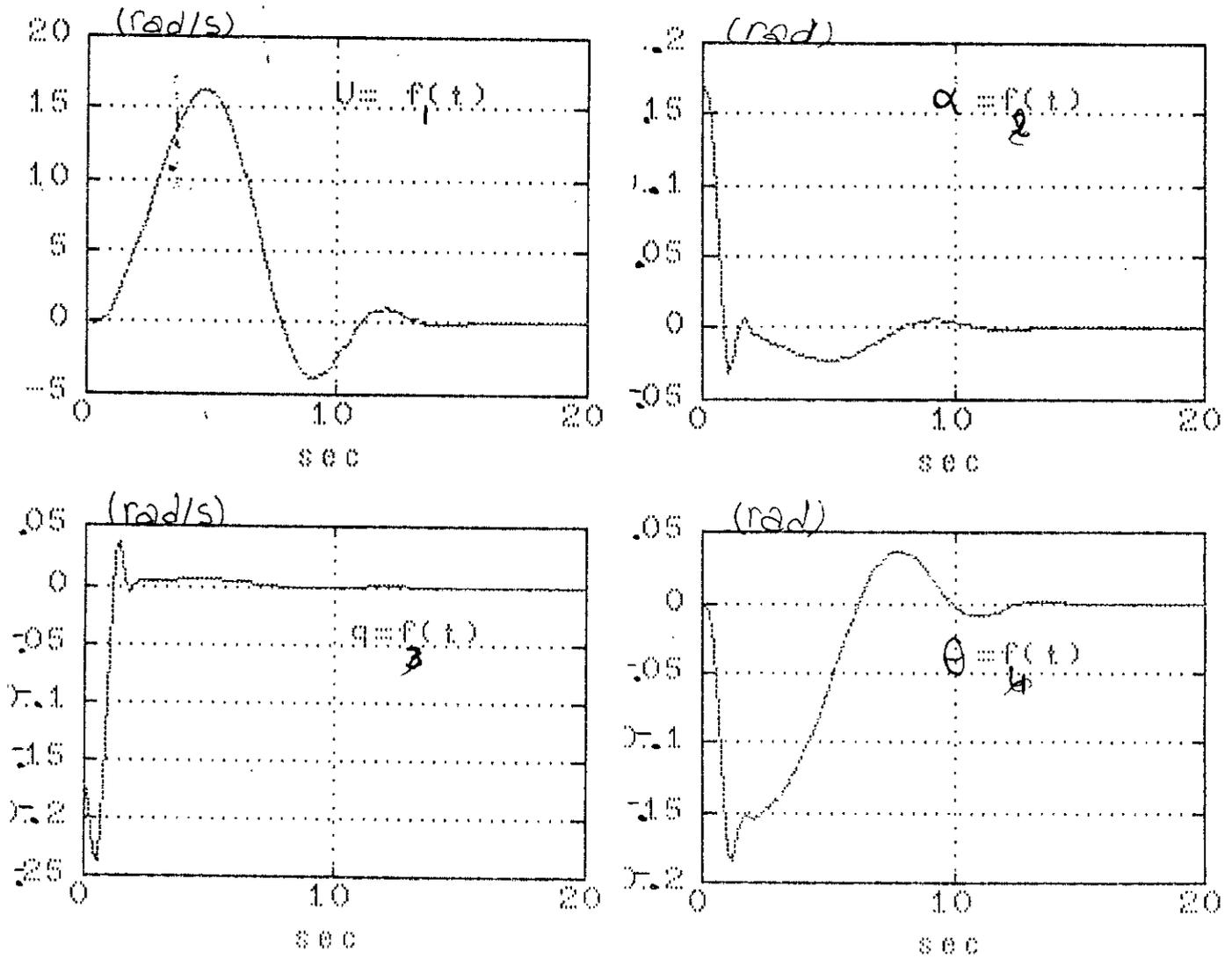
Le système de régulation ainsi conçu produit la commande représentée par la figure 5.a, pour un $x_0 = [0 \ 0.17 \ -0.17 \ 0]$, perturbation maximale. Cette commande fait varier l'angle de l'aileron d'une manière oscillatoire, de 0.55 rad à -0.17 rad pour aboutir à la position zéro au bout d'un temps de 10s.
l'élevateur

Les réponses temporelles des différents états de la dynamique de ce mouvement sont illustrées par la figure 5.b. Les angles d'attaque et de tangage, respectivement présentent des piques de l'ordre de -0.045 rad et -0.17 rad et atteignent le régime d'équilibre en un temps de l'ordre de 12s; les vitesses d'attaque et de tangage, respectivement atteignent la position d'équilibre au bout des intervalles de temps de 12s et 3s.
de Lacet

En conclusion la dynamique du mouvement longitudinal se stabilise (stabilités dynamique et statique) au bout d'un temps de 12s.



- Fig 5.a -



- Fig 5.b -

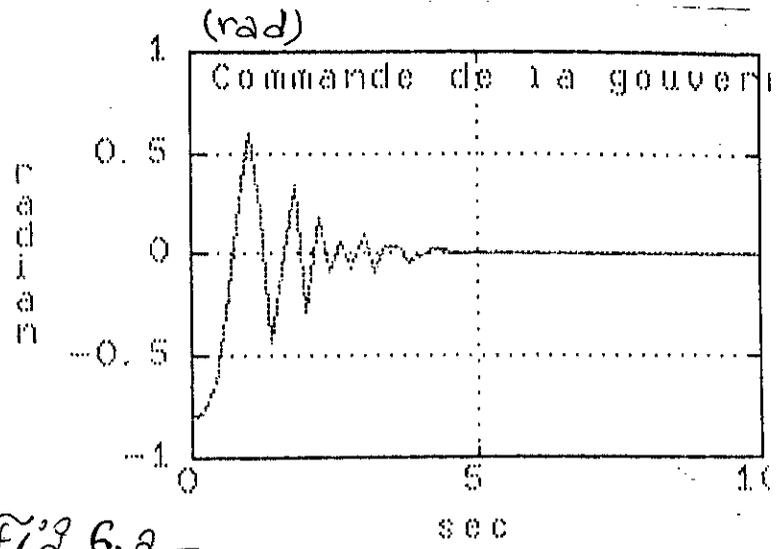
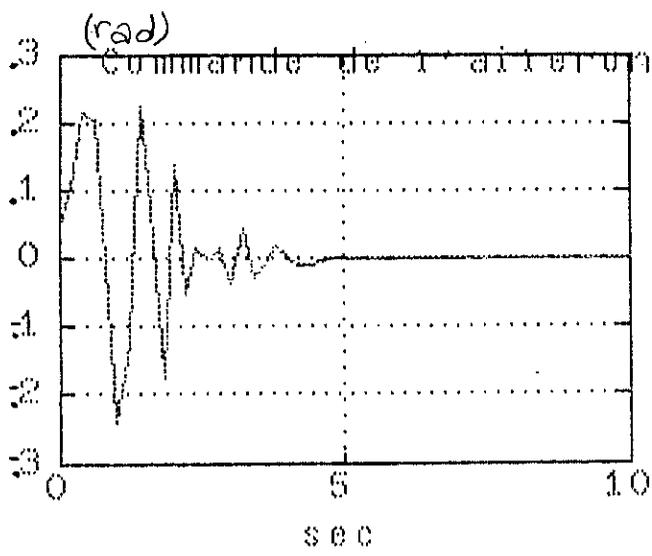
B) Comme précédemment, dans le cas de la dynamique du mouvement latéral il revient à étudier la réponse du système avec une condition d'état ayant la même intensité z_0 que la perturbation extérieure à laquelle est soumis l'état z de l'appareil à l'instant t_0 .

Dans ce cas, le système de régulation calcule automatiquement deux commandes, commandes de la gouverne et de l'aileron.

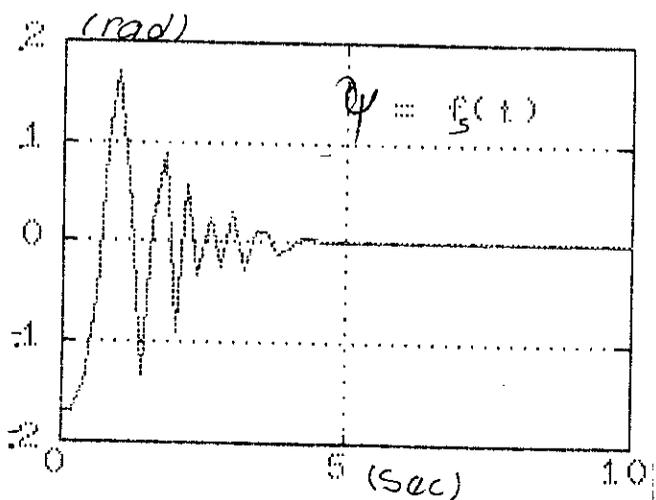
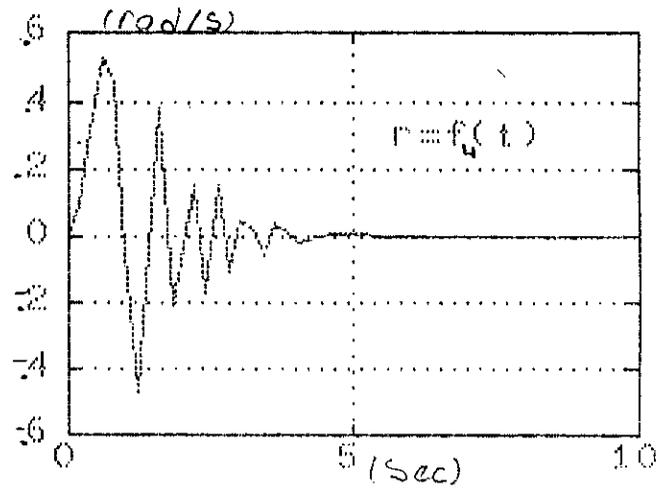
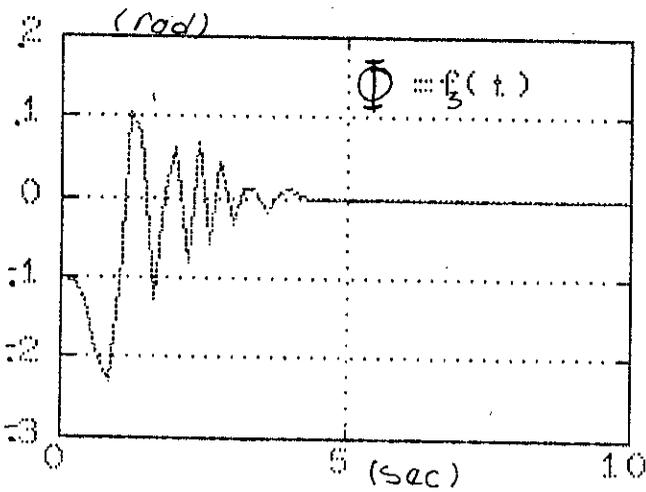
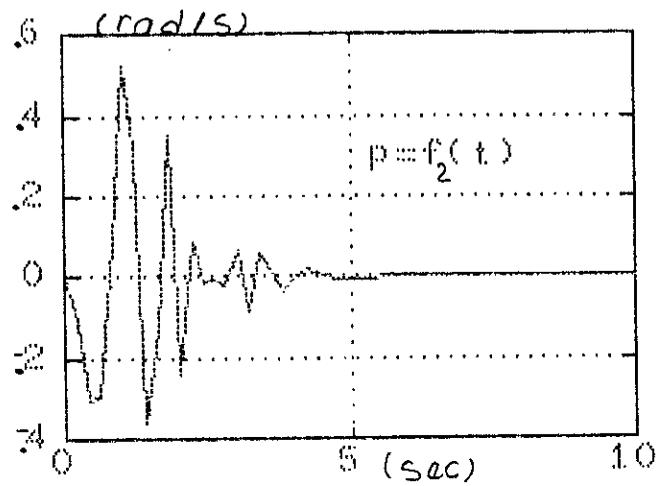
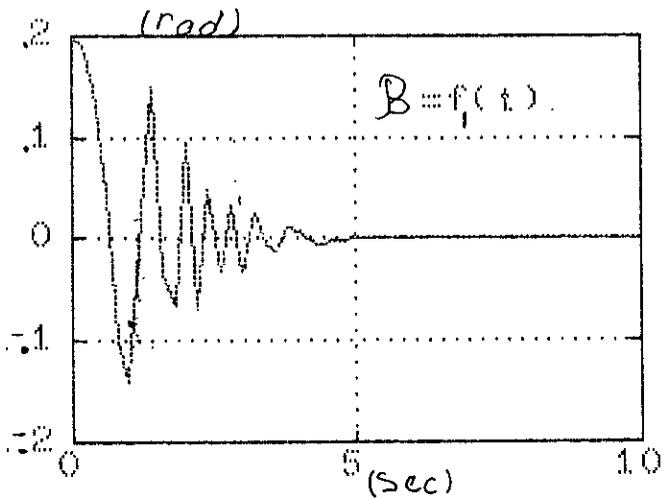
Ces commandes sont calculées pour une condition initiale d'état $z_0 = [0.2 \ 0 \ 0 \ -0.1-0.17]$, leur allures sont illustrées par la figure 6.a. La commande de l'aileron, possède deux piques de l'ordre de 0.2 rad et -0.2 rad et elles atteignent le régime statique avec une erreur permanente nulle au bout d'un temps de 5s. La commande de la gouverne passe de -0.17 rad à 0.5 rad pour puis se stabilise avec une erreur permanente nulle, au bout d'un temps de 5s.

Ces deux commandes nous permettent d'obtenir les réponses temporelle des cinq états qui définissent la dynamique du mouvement latérale, leur allures sont illustrées par la figure 6.b.

Les angles de dérapage, de roulis et de lacet ainsi obtenues présentent des oscillations fortement amorties et atteignent le régime d'équilibre avec une erreur statique nulle au bout d'un temps de 5s. La vitesse de roulis et de lacet s'annule au bout d'un temps de 5s.



- Fig 6.2 -



- Fig 6. b -

Chapitre V

APPLICATION DE LA COMMANDE OPTIMAL LINEAIRE QUADRATIQUE
AU PROBLEME DE L'AVION

V.1 INTRODUCTION:

Dans le présent chapitre l'application de la technique de la commande optimale linéaire quadratique au problème de la stabilité et la commande de la dynamique des deux mouvements considérés dans les deux derniers chapitre (3 et 4) est considérée.

Dans une première section nous rappelons les notions de base de cette technique et nous donnons quelques idées sur l'approche de Bryson pour l'élaboration d'un critère de performance quadratique

Le reste des sections du chapitre sera consacré à l'application de la commande optimale linéaire aux problèmes considérés et à la simulation numérique des résultats.

V.2. Rappels sur la théorie de la commande optimale linéaire quadratique:

La commande optimale est une technique de synthèse moderne. Sa force repose essentiellement sur l'efficacité et la flexibilité de la méthode des variables d'états pour ce qui est de la description et le traitement dynamique des systèmes multivariables.

Depuis les années soixantes, l'application de la commande optimale dans la synthèse des systèmes de commande s'est généralisée à plusieurs domaines: économique, sociale, technologique etc.....

En aéronautique son succès éclatant dans le projet américain: APOLLO est inoubliable [4]. Cependant pour pouvoir être appliquée, la méthode de la commande optimale nécessite au préalable qu'un objectif ou cahier de charges à satisfaire pour le système considéré soit d'abord établi, sous la forme d'un indice ou critère appelé critère de performance ou de coût....

Ainsi, pour un système dynamique décrit par exemple par une équation différentielle généralement non linéaire de la forme:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.1)$$

où $x(t)$ est le vecteur des états du système, d'ordre n , le problème

consiste à déterminer le vecteur $u(t)$ des commandes, d'ordre m , qui minimise ou maximise un critère de performance, de la forme:

$$J(t) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (5.2)$$

ou t_0 et t_f sont les temps initial et final à considérer durant le processus d'optimisation. Si le problème posé a une solution alors l'input $u^*(t)$ est une commande optimale pour le cas traité [12].

Dans la détermination d'une solution optimale pour un problème non linéaire la méthode du principe du maximum (ou du minimum de PONTRYAGUINE) ou la technique de la programmation dynamique de BELLMAN peuvent être utilisées [6,13]. Du fait de la non linéarité du problème d'énormes difficultés peuvent être rencontrées et qui peuvent rendre la dérivation pratique de la solution parfois impossible. Si maintenant le système est linéaire tel que (3.1), c.à.d :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)U(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.3)$$

et le critère est quadratique et donné sous la forme :

$$J = (1/2) \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q x(t) + u^T(t)R u(t)] dt \quad (5.4)$$

avec Q et R des matrices symétriques supposées positives et définies, la solution du problème est standard et donnée par [12] comme suit:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T K(t) x(t) \quad (5.5)$$

ou $K(t)$ est une matrice symétrique positive définie solution de l'équation différentielle non linéaire de RICATTI suivante:

$$-\dot{K}(t) = KA + A^T K(t) - K(t)BR^{-1}B^T K(t) + Q \quad (5.6)$$

avec la condition au limite pour ce cas :

$K(t_f) = 0$ car le coût final dans (5.4) est pris égal à zéro.

NB: Le problème exprimé par les équations (5.3) et (5.4) est un problème de régulation car la consigne à poursuivre ici est la trajectoire d'équilibre pour tous les états du système c.à.d les

zéros. Ce cas correspond bien au problème des deux mouvements de l'avion considérés dans le chapitre 3. Dans le cas où nous intéressons seulement au régime permanent c.à.d quand t_r tend vers l'infini pour un temps initial t_0 fixe, il est établi dans la littérature [12] que si le système est asymptotiquement stable ou bien le système est à la fois commandable et observable, la solution optimale existe et donnée par :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{K}x(t) \quad (5.7)$$

où \bar{K} est une matrice symétrique positive définie.

Si de plus le problème est invariant, alors la matrice \bar{K} est constante solution de l'équation algébrique suivante :

$$0 = \bar{K}A^T + A\bar{K} - \bar{K}B R^{-1}B^T\bar{K} + Q \quad (5.8)$$

avec $K(\infty) = 0$ et le système en boucle fermée est donnée à partir de (4.3) par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) \text{ pour } x(t_0) = x_0 \quad (5.9)$$

où A_c est la matrice dynamique du système en boucle fermée, c.à.d

$$A_c = A - BG \quad (5.10)$$

où $G = R^{-1}B\bar{K}$ (5.11) la matrice des gains constants des boucles de retour.

V.3. Elaboration d'un critère de performance quadratique :

Il existe dans la littérature de la commande optimale quadratique plusieurs approches et méthodes pour la détermination des éléments des matrices de pondération Q et R [6]. Parmi ces méthodes on trouve la technique adoptée par BRYSON, explicitée dans ce qui suit [12]

Pour le critère de la forme :

$$J = (1/2) \int_{t_0}^{t_f} [r_1^2 u_1^2 + r_2^2 u_2^2 + q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_2^2 + \dots] dt \text{ Où :}$$

Où :

- Les u_i sont les éléments du vecteur commande $u(t)$ à déterminer.
- Les x_i " " " " " " état $x(t)$.
- Les r_i et les q_i sont les coefficients de pondération qui

composent respectivement les matrices symétriques Q et R, souvent exprimées comme suit:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

La technique de BRYSON qui est une méthode hermetique consiste à choisir les éléments r_i et q_i selon:

$$\max(u_i) = 1/r_i \quad , i = 1, \dots, m.$$

$$\max(x_i) = 1/q_i \quad , i = 1, \dots, n.$$

En d'autres termes les poids r_i et q_i fixent les valeurs maximales admissibles dans les variations des paramètres des vecteurs de commande (u) et d'état (x). Ces poids sont ainsi toujours des valeurs positives qui permettent d'avoir un critère sans dimension (ou unité).

V.4. Application de la commande optimale aux problèmes de la dynamique des deux mouvements de l'avion:

V.4.1 La dynamique du Mouvement longitudinal:

Pour ce problème linéaire, l'équation du système à considérer est donné par l'équation (3.1).

En vue de l'établissement du critère quadratique, fixant les performances à atteindre pour notre système, les considérations pratiques suivantes sont retenues:

Pour le mouvement longitudinale, il est souhaité [3,6] que Le mode phugoïde soit stable pour avoir une bonne précision de la trajectoire, c.à.d n'admettre à la limite que de très petites accélérations verticales pour le système.

Pour le mode de courte période (oscillatoire) on souhaite [3,6] un amortissement assez fort. Un amortissement petit ou faible dans ce cas serait désagréable pour les passagers et rendrait toute visée pour les pilotes ou stabilisation de l'appareil très compliquées ou impossibles. Ici, il faut chercher à garder en général et à chaque instant un vol horizontal sans secousses.

De ces spécifications (ou cahier des charges), nous retenons le critère suivant [6]:

$$J = \int_0^{t_f} [q_1 u^2 + q_2 (\theta - \alpha)^2 + \sigma^2 \delta e^2] dt$$

Où, selon la technique de [6].

$$q_1 = 1/\max(U).$$

$$q_2 = 1/\max(\theta - \alpha).$$

$$\sigma = 1/\max(\delta e).$$

Ainsi, ces coefficients de pondération ont pour rôle de bornée les variations des variables d'état et de la commande.

Tenant compte des considérations pratiques faites ci-dessus il est retenu dans [4] les valeurs approximatives suivantes:

$$q_1 = 6.57 ; \quad q_2 = 2.44 ; \quad \sigma = 5 .$$

d'où on tire:

$$Q = \begin{bmatrix} 43.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14.6 & 0 & -14.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14.6 & 0 & -14.6 \end{bmatrix} ; \quad R = 25$$

D'après les données numérique ci-dessus, la solution de l'équation de Riccati (5.6) en régime stationnaire est:

$$K = [1.2731 \quad -3.5397 \quad -3.4353 \quad -8.4051]$$

d'où la matrice du système en boucle fermé (5.10) est:

$$A_c = \begin{bmatrix} -0.0507 & -3.8610 & 0 & -10 \\ -0.0901 & -0.7702 & 0.7537 & -0.6026 \\ 2.0942 & -4.4060 & -6.1443 & -13.826 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrices qui sont aussi les pôles du système en boucle fermée sont calculés à l'aide du logiciel MATLAB, et trouvés:

$$P_1 = -0.4166$$

$$P_2 = -3.2870$$

$$P_{3,4} = -1.6308 \pm j 2.5435$$

Ces pôles peuvent être interprétés comme suit:

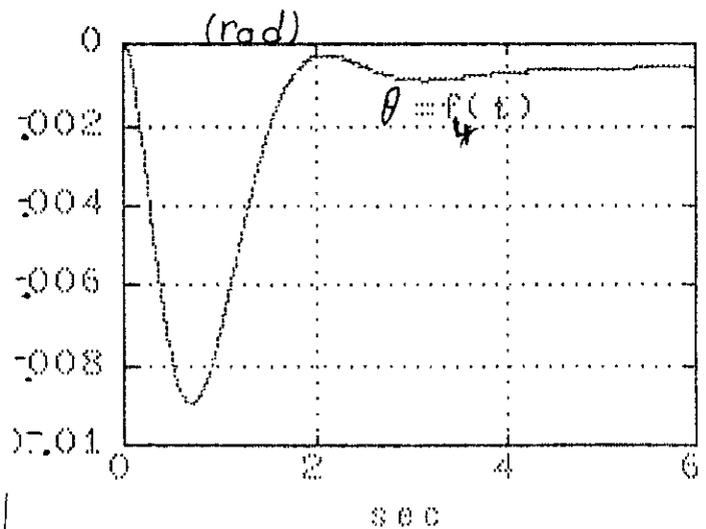
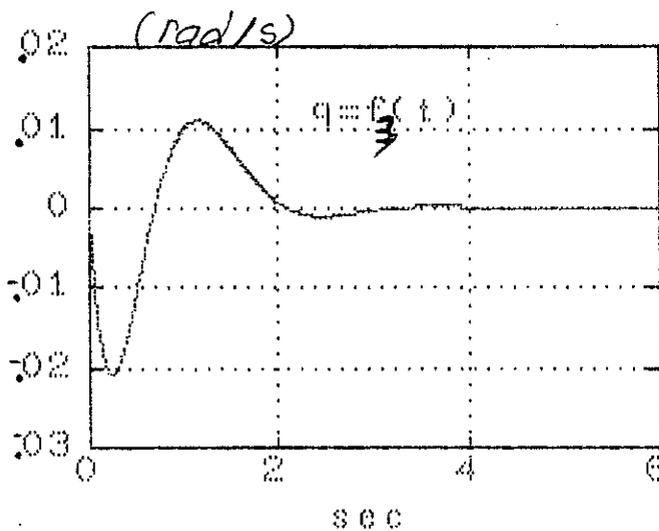
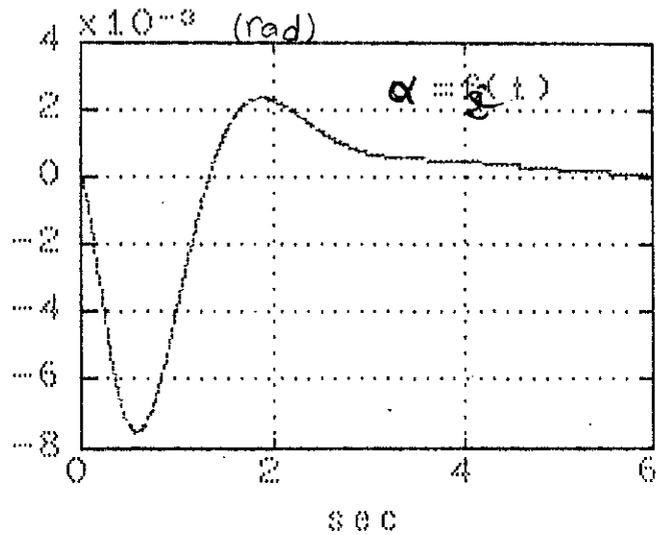
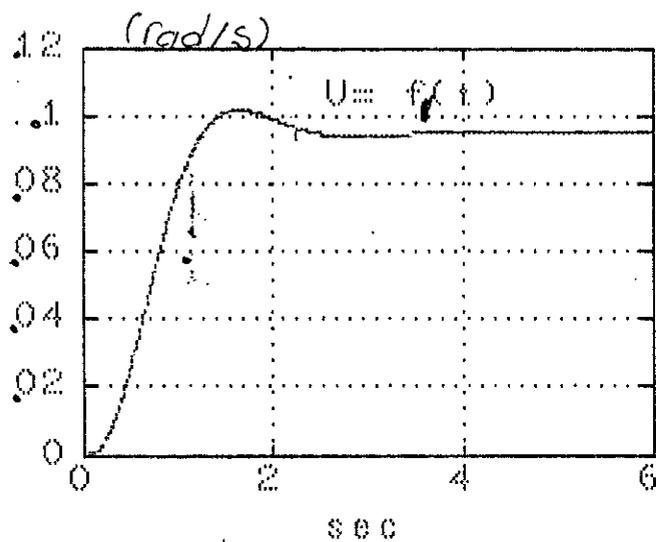
Les pôles P_1 et P_2 correspondent au nouveau mode phugoidé et Les pôles P_3 et P_4 au nouveau mode oscillatoire.

A) Pilotage manuel:

Dans ce cas de pilotage et pour les même conditions de travail choisies dans les chapitres précédents (3 et 4), c.à.d pour une entrée échelon $\delta e = 0.25$ rad, la simulation des résultats numériques obtenus ci-dessus, montre dans la figure 7. une bon stabilité de la dynamique du mouvement longitudinal.

La vitesse d'attaque $U=f_1(t)$ se stabilise au bout d'un temps égale à 3s pour atteindre une valeur de 0.76rad/s.

Respectivement les angles d'attaque et de tangage se stabilisent au bout d'un temps de 3s avec une erreur permanente de 0.28° et -0.28° , nous notons que la déférence des sens de ces erreurs permet à l'avion de maintenir son cap, autrement dit, la dynamique longitudinale est statiquement stable.



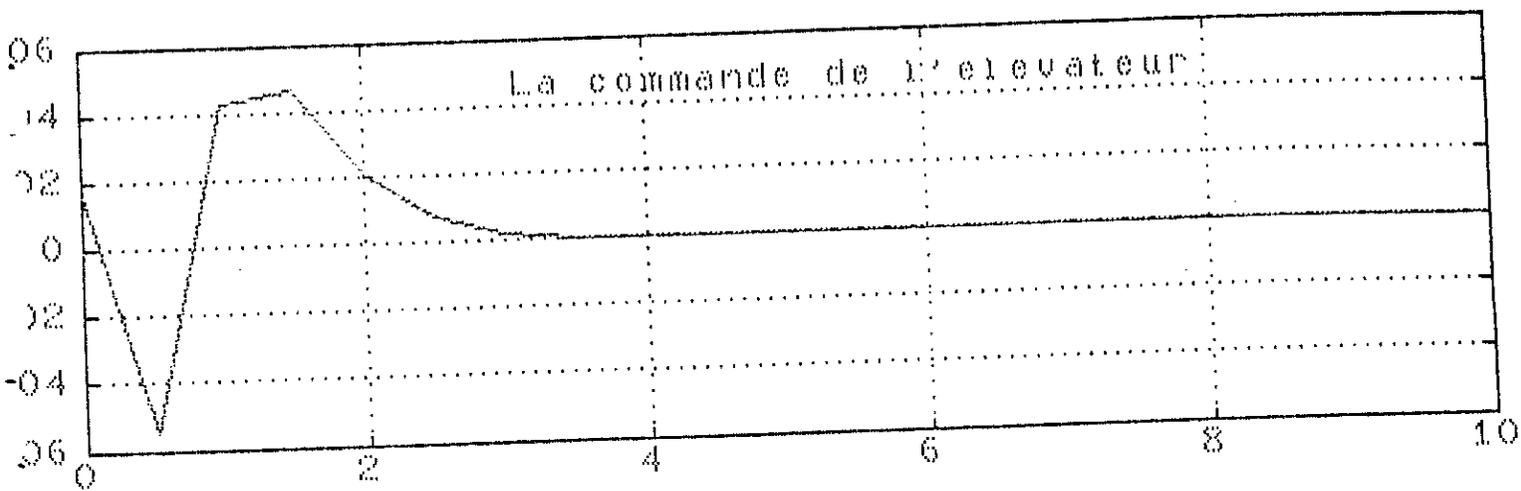
- Fig 7 -

B) Pilotage automatique

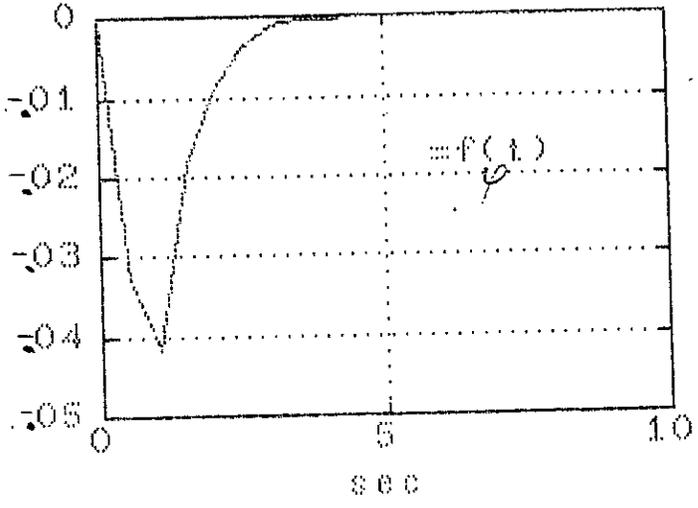
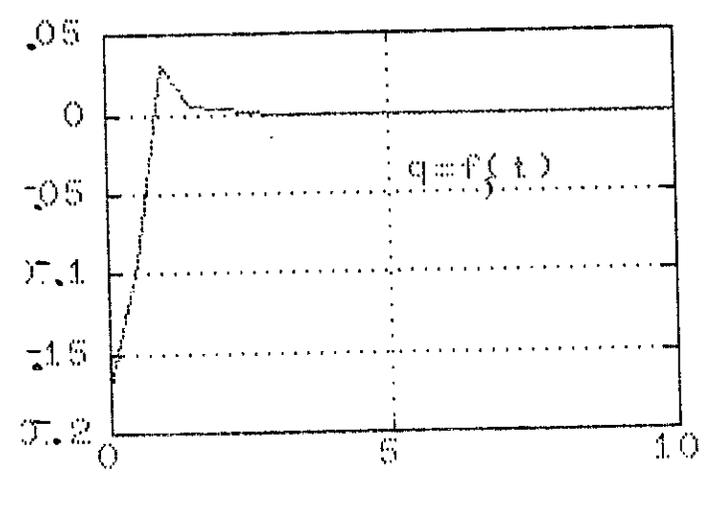
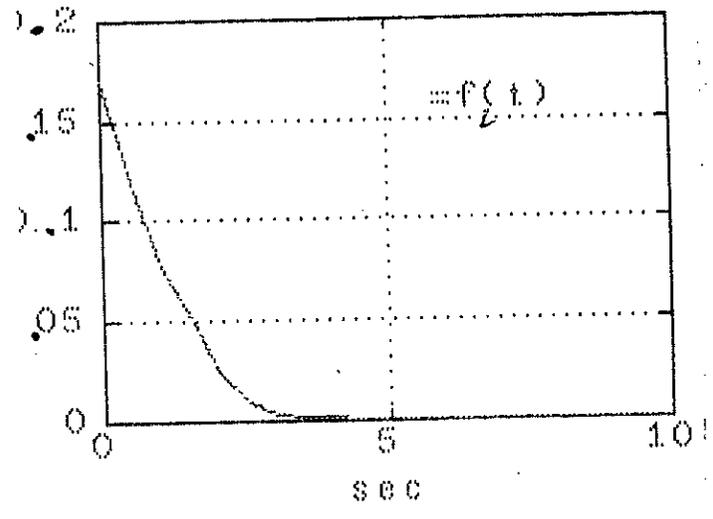
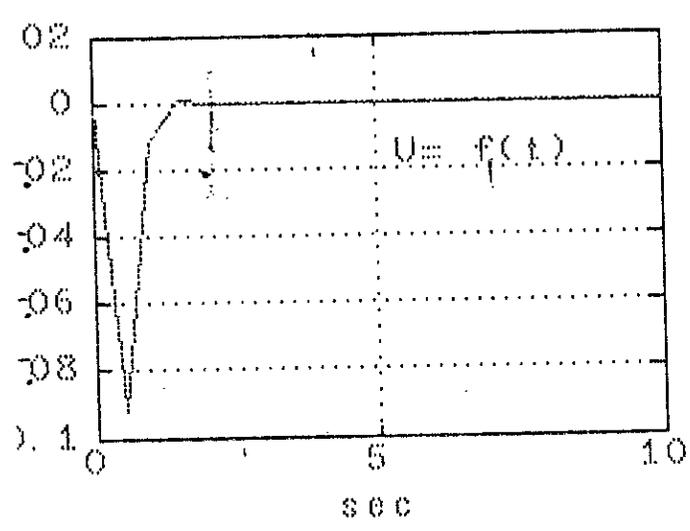
Dans ce type de pilotage l'avion doit se stabiliser sans l'intervention du pilote. Ainsi la commande qui réalise cette stabilité est calculée automatiquement.

La commande ainsi calculer est représenter par la figure 8.a. Pour le vecteur de perturbation $x_0 = [0 \ 0.17 \ -0.17 \ 0]$, cette commande fait varier l'angle de l'aileron d'une manière oscillatoire, de -0.65rad (-36°) à 0.42rad (25°) pour atteindre la position zéro pendant une durée de 2.5 s. Cette commande permet à l'avion de maintenir sa position d'équilibre en un temps de 3s avec une erreur statique pratiquement nulle; cela est illustré par les réponses temporelles des angles d'attaque $\alpha=f_2(t)$ et de tangage $\theta(t)=f_4(t)$.

Avec cette commande le vol stationnaire comme défini au chapitre 2 est réalisé. Les réponses de variation de vitesse $U=f_1(t)$ et de vitesse de roulis $q(t)=f_3(t)$ le montrent qu'au bout d'un temps de 2s, ces réponses atteignent le régime statique avec des erreurs permanentes nulles.



- Fig 8.a -



- Fig 8.b -

V.4.2 La dynamique du Mouvement latéral:

D'une manière similaire au cas précédent, pour appliquer la technique de la commande optimale linéaire au problème de la dynamique du mouvement latéral de l'avion nous considérons le système décrit par (3.2) et un critère de performance établi sur la base des considérations pratiques suivantes, tirées de la littérature [3,4,6].

En effet, pour le meilleur contrôle des 3 modes de la dynamique du mouvement latéral, identifiés dans le chapitre 3, les spécifications suivantes doivent souvent être satisfaites [3,4].

Le mode spiral doit être amorti d'une manière à avoir un engagement en virage lent.

L'exigence sur le mode de roulis suit la contrainte sur la maniabilité latérale, laquelle est prise en charge par l'exigence sur l'accélération angulaire.

Le mode oscillatoire doit avoir un amortissement d'autant plus grand que le rapport des vitesses angulaires correspondantes (roulis/lacet) à l'oscillation latérale est plus grand.

De ces spécifications ou cahier de charges, le critère de performance suivant est retenu [6]:

$$J = \int_0^T [q_1 \Phi + q_2 (\beta + \psi) + \sigma_1 \delta\alpha + \sigma_2 \delta r] dt$$

où selon encore la technique de [6]

$$q_1 = 1/\max(\Phi) ; q_2 = 1/\max(\beta + \psi) \text{ et } \sigma_1 = 1/\max(\delta\alpha) ; \sigma_2 = 1/\max(\delta r)$$

Numériquement on a d'après [4,6]

$$q_1 = q_2 = 3.16 \text{ et } \sigma_1 = \sigma_2 = 0.477$$

Et,

$$Q = \begin{bmatrix} f(q_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} ; R = \begin{bmatrix} f(\sigma_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .0227 & 0 \\ 0 & .0227 \end{bmatrix}$$

D'après les données numériques ci-dessus, la solution de l'équation de Riccati (5.6) en régime stationnaire, calculée à l'aide du logiciel MATLAB, est:

$$K = \begin{bmatrix} 20.3070 & 3.2534 & 0.8914 & 37.1577 & 20.9726 \\ -0.7750 & 0.0307 & -20.904 & 0.6444 & -0.8232 \end{bmatrix}$$

D'où la matrice du système en boucle fermé (5.10) est:

$$A_c = \begin{bmatrix} -0.8210 & -0.00 & -0.9729 & 9.9992 & 0.0010 \\ -141.0875 & -22.4857 & 9.4232 & -252.0389 & -141.369 \\ 2.2664 & 0.1864 & -32.4693 & 2.5371 & -0.4078 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrices qui sont aussi les pôles du système en boucle fermé, sont:

$$P_1 = -5.6220 \pm j 9.7347$$

$$P_2 = -32.4642$$

$$P_3 = -0.0827$$

$$P_4 = -11.2462$$

Ces pôles peuvent être interprétés comme suit:

Les pôles P_1 et P_2 caractérisent le nouveau mode de roulis Hollandais.

Le pôle P_3 correspond au nouveau mode de roulis, et le pôle P_4 caractérise le nouveau mode spiral.

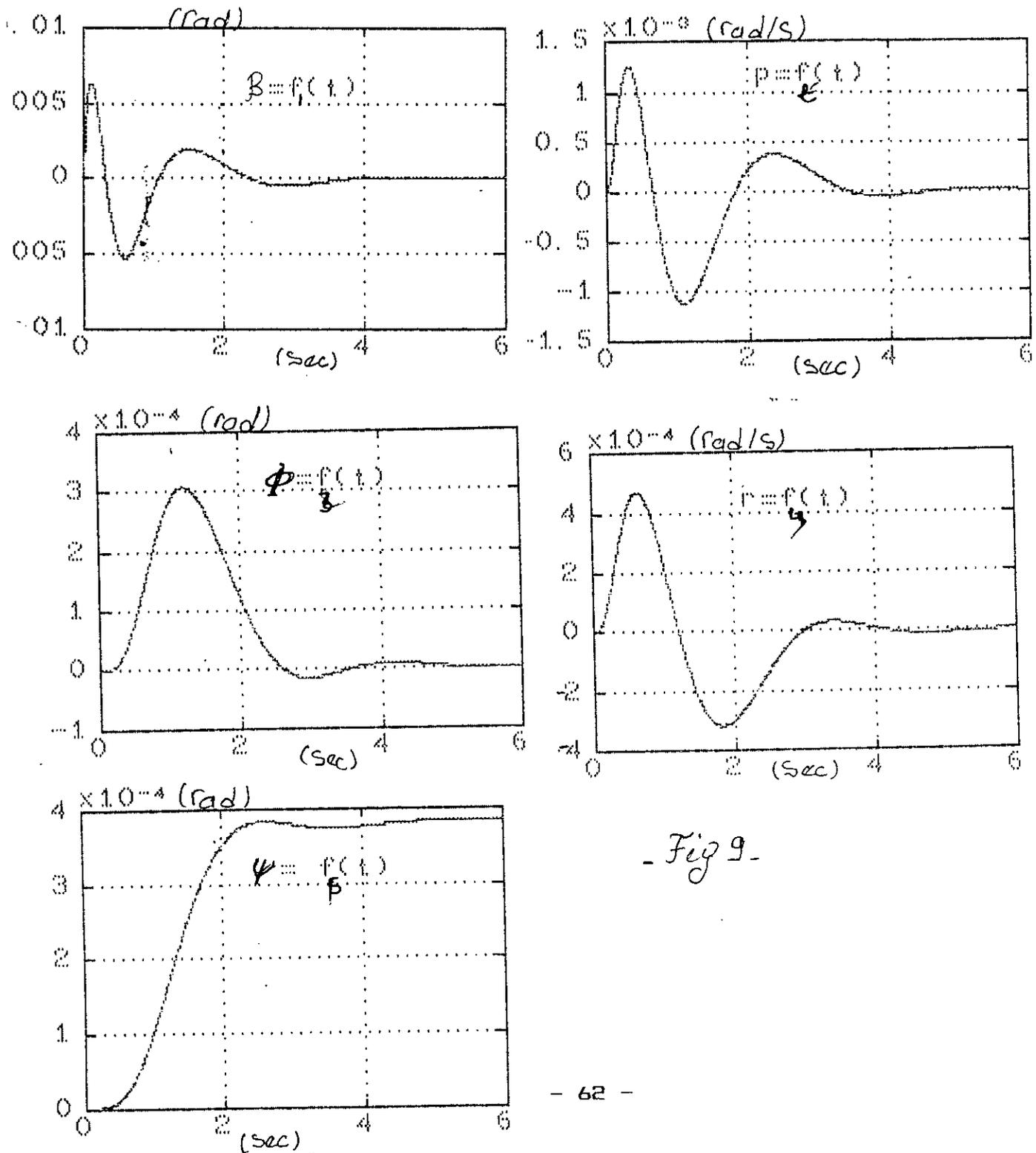
A) Pilotage manuel:

Les résultats de la simulation numérique obtenus ci-dessus pour des variations des angles de la gouverne ($\delta\alpha$) et de l'aileron (δr) de 0.25 rad sous forme d'échelon sont donnés dans la figure 9.1. Elle montre une stabilité optimal.

Nous remarquons en particulier que les vitesses angulaires de lacet $r(t)$ et de roulis $p(t)$, possèdent chacune un régime transitoire, de durée de l'ordre de 3.5s, caractérisé par de faible amplitude d'oscillation.

Les angles de roulis $\Phi(t)$ et de dérapage $\beta(t)$ eux aussi se stabilisent à peu près, après un temps de 3.5s avec des erreurs statiques nulles.

Notez que l'angle de lacet $\psi(t)$ atteint le régime statique avec une erreur permanente de 0.17°. Cette dernière valeur est suffisamment faible pour avoir un effet néfaste sur stabilité statique de la dynamique du mouvement latérale.



- Fig 9 -

B) Pilotage automatique:

Dans le pilotage automatique, les inputs sur la gouverne et l'aileron agissent librement pour remédier à une quelconque perturbation qui aura tendance à déstabiliser le vol latéral.

Ainsi, les inputs seront calculés automatiquement. leurs allure est illustré par la figure 10.a. Pour le même vecteur de perturbation $z_0 = [0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -0.1 \ -0.17]$, la commande de l'aileron passe de la position 56° pour s'annuler au bout d'un temps de 2s, pour ce même temps la commande de la gouverne s'annule en partant d'une position maximale qui est de -9° .

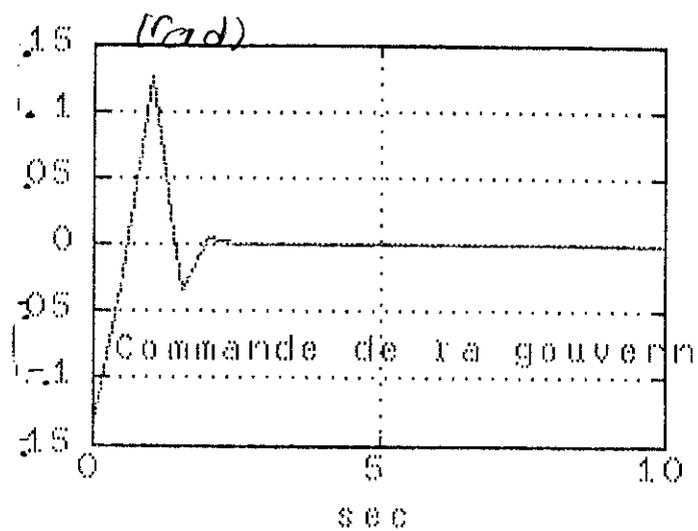
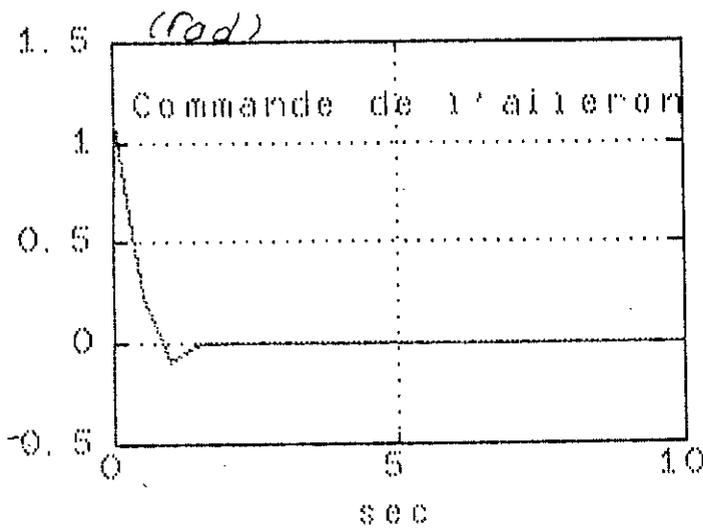
Ces commandes nous permettent d'obtenir pour la dynamique latérale les réponses illustrées par la figure 10.b.

Les réponses $\beta=f_1(t)$, $p=f_2(t)$, $r=f_3(t)$, $\Phi=f_4(t)$ et $\Psi=f_5(t)$, ainsi obtenues présentent des oscillations faiblement amorties, leurs valeurs initiales sont les valeurs du vecteur de perturbation.

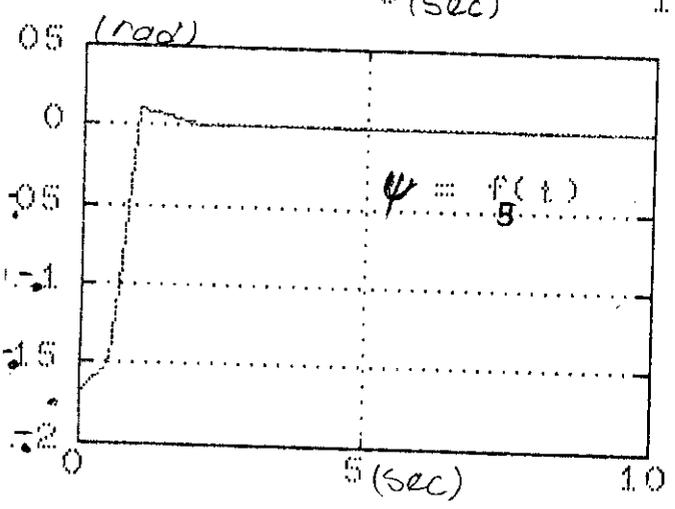
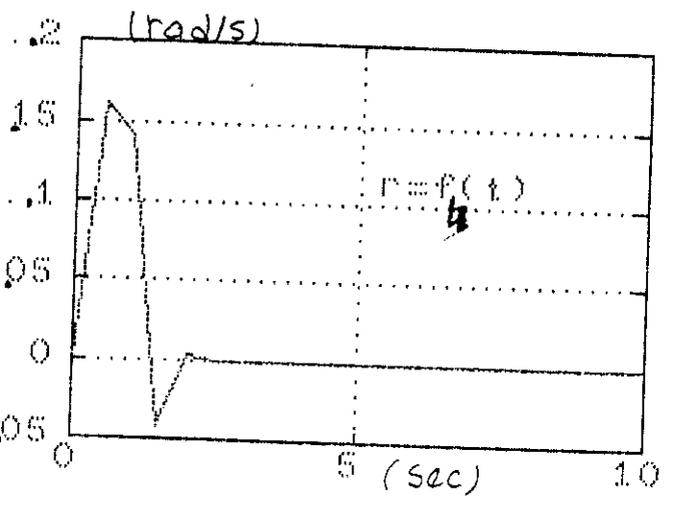
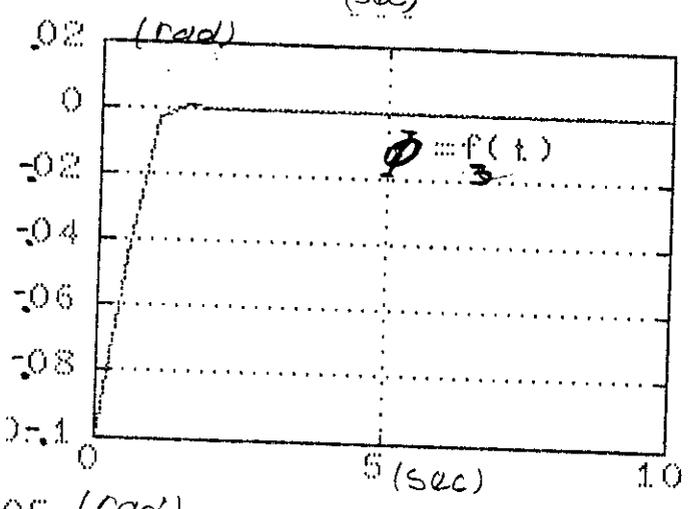
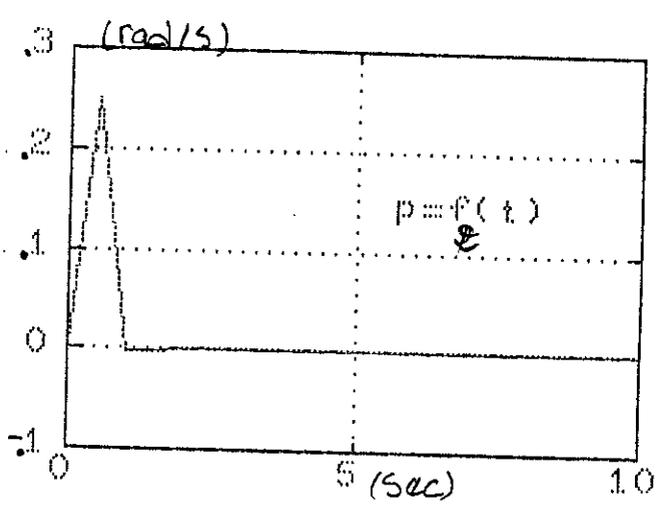
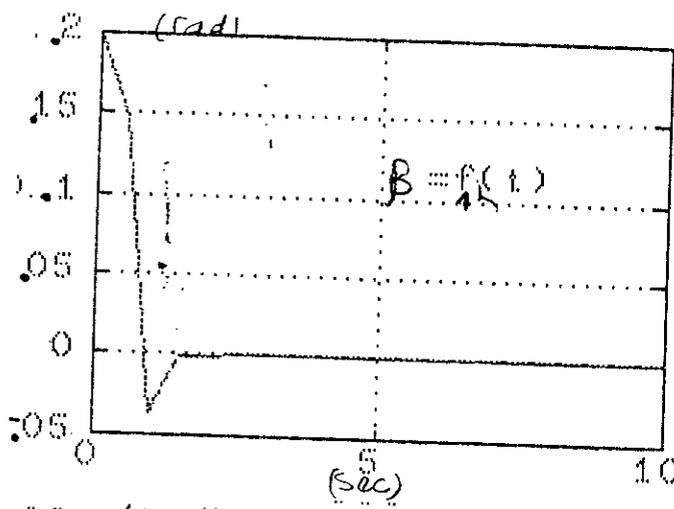
Respectivement ces réponses atteignent le régime statique avec une erreur permanente nulle au bout des temps suivants:

$$t_1=2 \text{ s}, t_2=1.35 \text{ s}, t_3=2.1 \text{ s}, t_4=1.6 \text{ s}, t_5=2.1 \text{ s}.$$

On voit bien que ce régulateur permet d'avoir une bonne stabilité de la dynamique latérale de l'avion.



- Fig 10.2 -



- Fig 10.6 -

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE:

Dans le présent travail une description mathématique d'un avion en vol rectiligne horizontal est soumis à des agitations extérieures est faite par l'utilisation de la méthode des variables d'états et sous l'hypothèse que l'avion est un corps rigide.

Ainsi, en considérant que les intensités des perturbations sur l'avion sont relativement faibles est sous l'hypothèse que l'appareil est symétrique nous avons montré que les équations régissant le comportement dynamique de l'avion peuvent être regroupées en deux systèmes d'équations linéaires à coefficients constants, correspondant à deux dynamiques linéaires de mouvements qui sont découplées, à savoir, dynamique du mouvement longitudinal et dynamique du mouvement latéral.

L'analyse, à l'aide d'une simulation numérique sur ordinateur a révélé en particulier que les deux dynamiques sont insuffisamment stables mais néanmoins commandables. Tout en les supposant observables aussi, nous avons synthésé pour augmenter en particulier leurs stabilités et diminuer leurs sensibilités aux perturbations extérieures, des systèmes de régulation avec des gains en boucle de retour constants. Les régulateurs ont été d'abord conçus par l'emploi d'une technique de placement des pôles (méthode classique), puis par la méthode de la commande linéaire optimale quadratique pour montrer comment on peut mieux se conformer aux contraintes, fixées à l'avance dans un cahier des charges et qui sont très souhaitées pour le confort et la sécurité des passagers et des charges transportées.

La simulation numérique sur ordinateur effectuée pour un avion de type commercial à turbo-réaction montre en particulier que les résultats de la régulation optimale, pour le contrôle et la stabilisation des deux dynamiques découplées de l'avion sont meilleurs à plusieurs égards par rapport à ceux tirés à l'aide de la technique classique de placement des pôles.

En particulier, nous avons obtenus des temps de réponse et de rétablissement plus courts avec l'emploi des régulateurs optimaux. En général, les réponses obtenues avec les régulateurs optimaux sont plus performantes que celles obtenues avec les régulateurs classiques.

Cependant, nous remarquons qu'ils sont dérivés sous l'hypothèse que l'intensité des perturbations extérieures sur l'avion est relativement faible et que tous les états du système sont mesurables. Il est important et certain, d'un point de vue pratique de savoir comment ces résultats seront modifiés ou confirmés si certains des états du système ne sont pas mesurables ou bien ils le sont mais avec beaucoup de bruits. Nous recommandons ainsi que ces aspects du problème soit pris en charge par exemple dans le cadre d'un autre PFE.

ANNEXE A:

Forces:

$$\vec{F}_a = i F_{ax} + j F_{ay} + k F_{az}$$

Les composantes des forces aérodynamiques suivant le repère d'axe XYZ.

$$\vec{F}_T = i F_{Tx} + j F_{Ty} + k F_{Tz}$$

Les composantes des forces de poussée.

$$\vec{g} = i g + j g + k g$$

Les composantes des accélérations gravitationnel.

Moments:

$$\vec{M}_a = i L_a + j M_a + k N_a$$

Les composantes des moments aérodynamique, respectivement moment aérodynamique de roulis de tangage et de lacet.

$$\vec{M}_T = i L_T + j M_T + k N_T$$

Les composantes des moments de poussée, respectivement moment aérodynamique de roulis de tangage et de lacet.

Vitesses:

$$\vec{\omega} = i P + j Q + k R$$

Les composantes de vitesse angulaire, respectivement vitesse de roumis, de tangage et de lacet.

$$\vec{V}_p = i U + j V + k W$$

Les composantes de vitesse linéaire, respectivement vitesse d'avancement, de dérapage et de descente.

Distances:

$$\vec{r} = i x + j y + k z$$

Les composantes du vecteur qui permet de repéré un particule de masse dm dans le repère XYZ.

ANNEXE B:

La figure 1 montre le sens positive et la signification de chaque une des composantes des vecteurs et des axes considérés.

Premièrement nous avons:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O + \vec{M}_R &= \int_V \vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})) \rho_A dv & (B.1) \\ &= \int_V \vec{w} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \rho_A dv - \int_V \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{w}) \rho_A dv + \int_V \vec{r} \times \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{r}) \rho_A dv - \int_V \vec{r} \times \vec{r} (\vec{w} \cdot \vec{w}) \rho_A dv \end{aligned}$$

Le développement du premier terme dans le membre de droite de l'équation (B.1) nous donne:

$$\int_V \vec{w} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \rho_A dv = (i\dot{P} + j\dot{Q} + k\dot{R}) \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho_A dv$$

Le développement du deuxième terme dans le membre de droite de l'équation (B.1) nous donne:

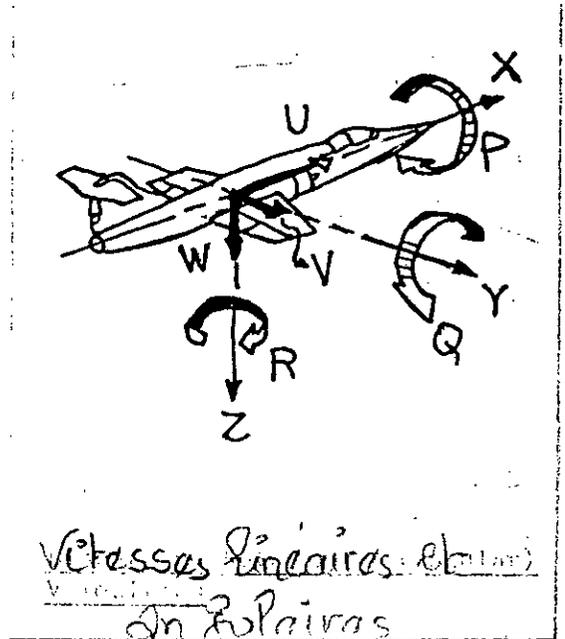
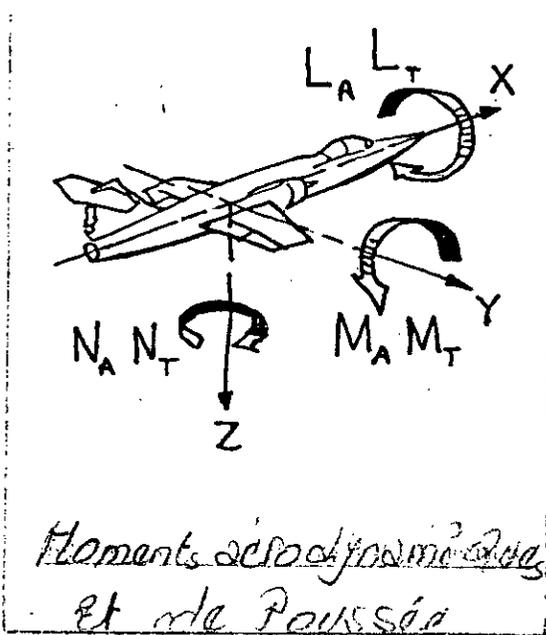
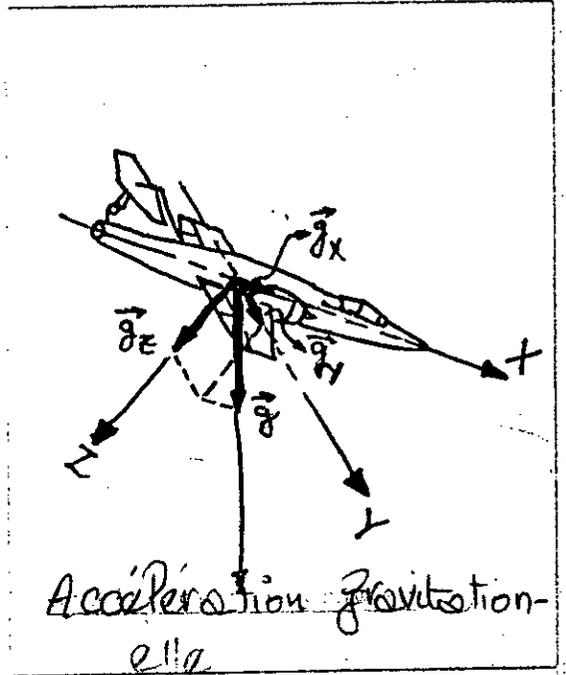
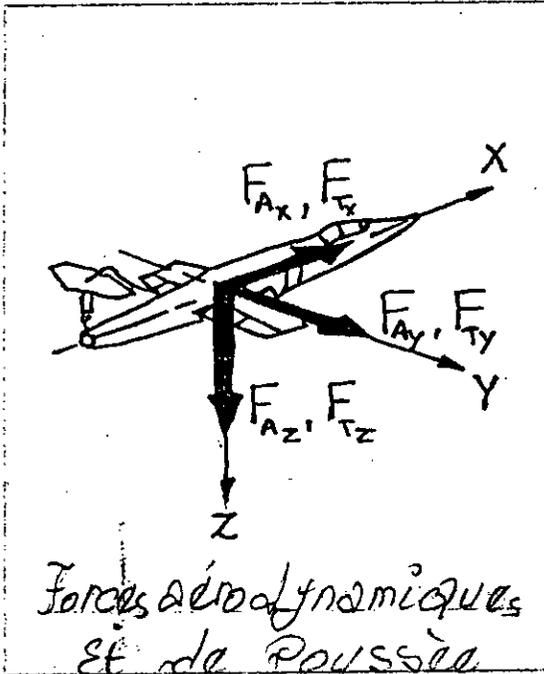
$$- \int_V \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{w}) \rho_A dv = - \int_V (ix + jy + kz) (x\dot{P} + y\dot{Q} + z\dot{R}) \rho_A dv$$

La combinaison des deux termes nous donne:

$$\begin{aligned} i & [\dot{P} \int_V (y^2 + z^2) \rho_A dv - \dot{Q} \int_V xy \rho_A dv - \dot{R} \int_V xz \rho_A dv] + \\ j & [\dot{Q} \int_V (x^2 + z^2) \rho_A dv - \dot{P} \int_V xy \rho_A dv - \dot{R} \int_V yz \rho_A dv] + & (B.2) \\ k & [\dot{R} \int_V (x^2 + y^2) \rho_A dv - \dot{P} \int_V xz \rho_A dv - \dot{Q} \int_V yz \rho_A dv] + \end{aligned}$$

Les intégrales sont maintenant identifiées comme étant les moments et les produits d'inertie d'un corps rigide. Les symboles communs utilisés pour ces intégrales sont les suivants:

$$\begin{aligned} \int_V (y^2 + z^2) \rho_A dv &= \text{moment d'inertie / à l'axe des } x = I_{xx} \\ \int_V (x^2 + z^2) \rho_A dv &= \text{moment d'inertie / à l'axe des } y = I_{yy} \\ \int_V (x^2 + y^2) \rho_A dv &= \text{moment d'inertie / à l'axe des } z = I_{zz} & (B.3) \\ \int_V xy \rho_A dv &= \text{produit d'inertie / aux axe } ox \text{ et } oy = I_{xy} \\ \int_V xz \rho_A dv &= \text{produit d'inertie / aux axe } ox \text{ et } oz = I_{xz} \\ \int_V yz \rho_A dv &= \text{produit d'inertie / aux axe } oy \text{ et } oz = I_{yz} \end{aligned}$$



- Fig 1 -

Notons que les moments et les produits d'énergies varient avec le poids et la configuration de l'avion.

En utilisant les symboles introduits dans les équations (B.2) il suit que les expressions (B.3) peuvent être écrites comme suit:

$$i(P_{Ixx} - Q_{Iyy} - R_{Ixz}) + j(Q_{Iyy} - P_{Ixy} - R_{Iyz}) + k(R_{Izz} - P_{Ixz} - Q_{Iyz}) \quad (B.4)$$

Le développement du troisième terme du membre de droite de l'équation (B.1) en utilisant les équations (B.3) nous donne:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{r} \times \vec{w}(\vec{w} \cdot \vec{r}) \int_A dv &= \int_V (ix + jy + kz) \times (iP + jQ + kR) (Px + Qy + Rz) \int_A dv \\ &= i [(I_{xy} PR + I_{yz} (P^2 - Q^2) - I_{xz} PQ + RQ (I_{zz} - I_{yy}))] + \\ &\quad j [(I_{xx} - I_{zz}) PR + I_{xz} (P^2 - R^2) - I_{xy} QR + I_{yz} PQ] + \quad (B.5) \\ &\quad k [(I_{yy} - I_{xx}) PQ + I_{xy} (Q^2 - P^2) + I_{xz} QR - I_{yz} PR] . \end{aligned}$$

ANNEXE C:

Nous avons d'après l'annexe A:

$$\vec{w} = i\vec{P} + j\vec{Q} + k\vec{R} \quad (C.1)$$

Mais comme w est aussi égale à la somme des vecteurs $(\)$, θ et Φ :

$$w = \Psi + \theta + \Phi \quad (C.2)$$

Avec $(\)$ associé à la rotation autour de l'axe Z_1 est ainsi:

$$(\Psi = k_1 \Psi \quad (= k_2 \Psi, \text{ voir fig.2.1) \quad (C.3)$$

Similairement θ est associé à la rotation autour de l'axe Y_2 :

d'où

$$\theta = j_2 \theta \quad (= j_3 \theta, \text{ fig.2.9) \quad (C.4)$$

Et, Φ est associé à la rotation autour de l'axe X_3 :

$$\Phi = i_3 \Phi \quad (= i \Phi, \text{ fig.2.9) \quad (C.5)$$

Substituons les équations (C.3) et (C.4) dans l'équation (C.2):

$$w = k_2 (\) + j_3 \theta + i \Phi \quad (C.6)$$

Par une transformation d'orthogonalité, nous obtenons:

$$k_2 = -i_3 \sin\theta + k \cos\theta \quad (C.7)$$

$$j_3 = -i \sin\theta + \cos\theta(j \sin\Phi + k \cos\Phi) \quad (C.8)$$

$$i = j \cos\Phi - k \sin\Phi \quad (C.9)$$

Par une substitution de l'équation (C.8) et (C.9) dans l'équation (C.6) nous obtenons:

$$w = \{-i \Psi \sin\theta + \Psi \cos\theta(j \sin\Phi + k \cos\Phi)\} + \Psi(j \cos\Phi - k \sin\Phi)\theta + i \Phi \quad (C.10)$$

En combinant les équations (C.1) et (C.10), nous obtenons:

$$\begin{aligned} w = iP + jQ + kR = i(-\Psi \sin\theta + \Phi) + \\ j(\Psi \cos\theta \sin\Phi + \theta \cos\Phi) + \\ k(\Psi \cos\theta \cos\Phi - \theta \sin\Phi). \end{aligned} \quad (C.11)$$

ANNEXE D:

La prise en considération des variations des paramètres du système dans les équations qui régissent le mouvement d'un avion nous donne:

$$m (\dot{u} - (V_1+v)(R_1+r) + (W_1+w)(Q_1+q)) = -mg \sin(\theta_1+\theta) + F_{ax1} + f_{ax} + F_{Tx1} + f_{Tx}$$

$$m (\dot{v} + (U_1+u)(R_1+r) - (W_1+w)(P_1+p)) = mg \sin(\Phi_1+\Phi) \cos(\theta_1+\theta) + F_{ay1} + f_{ay} + F_{Ty1} + f_{Ty}$$

$$m (\dot{w} + (U_1+u)(Q_1+q) - (V_1+v)(P_1+p)) = mg \sin(\Phi_1+\Phi) \cos(\theta_1+\theta) + F_{az1} + f_{az} + F_{Tz1} + f_{Tz}$$

$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}r - I_{xz}(P_1+p)(Q_1+q) + (I_{zz} - I_{yy})(R_1+r)(Q_1+q) = L_{ax} + l_{ax} + L_{Tx} + l_{Tx}$$

$$I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})(P_1+p)(R_1+r) + I_{xz}((P_1+p)^2 - (R_1+r)^2) = M_{ay} + m_{ay} + M_{Ty} + m_{Ty}$$

$$I_{zz}\dot{r} - I_{xz}p + (I_{yy} - I_{xx})(P_1+p)(Q_1+q) + I_{xz}(Q_1+q)(R_1+r) = N_{az} + n_{az} + N_{Tz} + n_{Tz}$$

Les équations cinématiques sont:

$$P_1 + p = (\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}) \sin(\theta_1 + \theta)$$

$$Q_1 + q = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}) \cos(\Phi_1 + \Phi) + (\dot{\Psi}_1 + \dot{\Psi}) \cos(\theta_1 + \theta) \sin(\Phi_1 + \Phi)$$

$$R_1 + r = (\dot{\Psi}_1 + \dot{\Psi}) \cos(\theta_1 + \theta) \cos(\Phi_1 + \Phi) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}) \sin(\Phi_1 + \Phi)$$

En développant ces équations nous obtenons:

$$P_1 + p = \dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin \theta_1 - \dot{\Psi} \theta \cos \theta_1 - \dot{\Psi} \sin \theta_1 - \dot{\Psi} \theta \cos \theta_1$$

$$\begin{aligned} Q_1 + q = & \dot{\theta}_1 \cos \Phi_1 - \dot{\theta}_1 \Phi \sin \Phi_1 + \dot{\theta} \cos \Phi_1 - \dot{\theta} \Phi \sin \Phi_1 + \\ & \dot{\Psi}_1 \cos \theta_1 \sin \Phi_1 + \dot{\Psi}_1 \Phi \cos \theta_1 \sin \Phi_1 - \dot{\Psi}_1 \theta \sin \theta_1 \sin \Phi_1 - \\ & \dot{\Psi}_1 \theta \Phi \sin \theta_1 \cos \Phi_1 + \dot{\Psi} \cos \theta_1 \sin \Phi_1 + \dot{\Psi} \Phi \cos \theta_1 \cos \Phi_1 - \\ & \dot{\Psi} \theta \sin \theta_1 \sin \Phi_1 - \dot{\Psi} \theta \Phi \sin \theta_1 \cos \Phi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 + r = & \dot{\Psi}_1 \cos \theta_1 \cos \Phi_1 - \dot{\Psi}_1 \Phi \cos \theta_1 \sin \Phi_1 - \dot{\Psi}_1 \theta \sin \theta_1 \cos \Phi_1 - \\ & \dot{\Psi}_1 \theta \Phi \sin \theta_1 \sin \Phi_1 + \dot{\Psi} \cos \theta_1 \cos \Phi_1 - \dot{\Psi} \Phi \cos \theta_1 \sin \Phi_1 - \\ & \dot{\Psi} \theta \sin \theta_1 \cos \Phi_1 + \dot{\Psi} \theta \Phi \sin \theta_1 \sin \Phi_1 - \dot{\theta}_1 \sin \Phi_1 - \\ & \dot{\theta}_1 \Phi \cos \Phi_1 - \dot{\theta} \sin \Phi_1 - \dot{\theta} \Phi \cos \Phi_1 \end{aligned}$$

Bibliographie:

- [1]: J.Roskam (1982). Dynamics and Automatic Flight Control. Publié par Roskam. Aviation and engineering corporation Box 274 Ottawa, Kansas, 66067.
- [2]: D.Fisher (1979). Multivariable Computer Control. A case study north Holland publishing co, Amsterdam.
- [3]: P.Lecomte (1962). Mecanique du Vol. Dunod, Paris.
- [4]: B.Freidland (1987). Control System Design. Mc Graw-Hill Book Company, New York.
- [5]: B.Etkin (1985). Dynamique of Flight Stability and Control. John wiley et Sons, New York.
- [6]: A.Bryson (1969). Applied Optimal Control. Blaisdell publishing co, Waltham, MA.
- [7]: A.Househoden (1964). The Theory of Matrices in Numerical Analysis. Blaisdell publishing co, Waltham, MA.
- [8]: Banks.S.P. (1986). Control Systems Engineering. Prentice Hall Inc, New York.
- [9]: Naslin .
- [10]: Automatique Appliqué .
- [11]: M.athans (1966). Optimal Control: An Introduction to the theory and its applications. Mc Graw-hill book co, New York.
- [12]: N.Louam (1994). Notes du cours de la commande optimal 5^{ème} année d'ingéniorat en automatique. ENP El Harrach.
- [13]: Hoopkins.
- [14]: N.Louam (1994). Notes personnelles.