

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**  
**Département de génie civil**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'étude

**THEME**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU  
PHENOMENE DE LA CONSOLIDATION PAR  
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS Q4 ET  
LE COUPLAGE D'ELEMENTS FINIS-INFINIS**

*Proposé par :*

**Mr. M. DEMIDEM**

*Etudié par :*

**Mr. LARIBI MOHAMED  
Mr. FERNANE MOUNIR**



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

*Promotion 1998-1999*

10, Avenue Hassen Badi El Harrach Alger

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**  
**Département de génie civil**

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique  
Projet de fin d'étude

## THEME

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU  
PHENOMENE DE LA CONSOLIDATION PAR  
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS Q4 ET  
LE COUPLAGE D'ELEMENTS FINIS-INFINIS**

*Proposé par :*

**Mr. M. DEMIDEM**

*Etudié par :*

**Mr. LARIBI MOHAMED  
Mr. FERNANE MOUNIR**



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
Ecole Nationale Polytechnique

*Promotion 1998-1999*

10, Avenue Hassen Badi El Harrach Alger

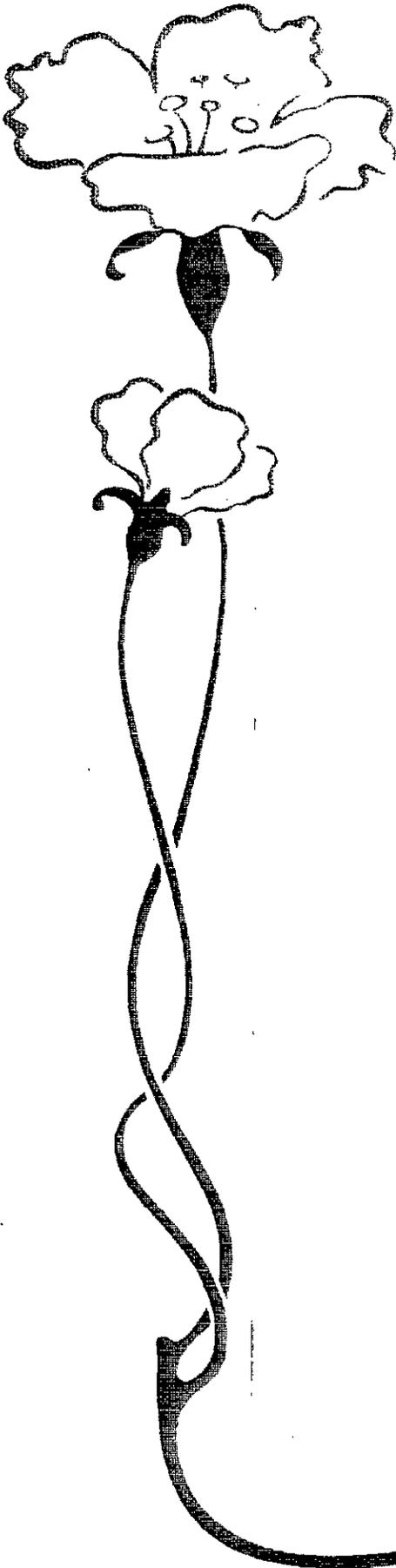


## PROLOGUE

*A tous ceux qui dont l'ombre est partout dans le  
monde,  
œuvrent pour que  
la lumière de vérité jaillisse*

*à tous ceux qui me sont très chers*

M. LARBI



## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

*A ma très chère mère.*

*A mon très cher père.*

*A mes frères et sœurs.*

*A toute ma grande famille.*

*A tous mes amis.*

*A tous ceux qui m'aiment.*

ALFERNANE

## *Remerciements*

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

*Nous remercions Dieu de nous avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver de faire ce modeste travail.*

*Nous tenons à exprimer vivement notre profonde gratitude à notre promoteur **M.DEMIDEM** pour son confiance, ses encouragements, son suivi et pour les conseils qu'il a apportés pour l'achèvement de ce projet de fin d'étude.*

*Nous remercions également tous les enseignants, et particulièrement ceux du département de Génie Civil, qui ont contribué de près ou de loin à notre formation durant nos cinq ans d'étude.*

*Nous tenons également à remercier l'ensemble des membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.*

*Nous voudrions associer nos remerciements à toute l'équipe de la bibliothèque, ainsi qu'à tout le personnel pour leur entière disponibilité.*

# SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## *INTRODUCTION*

### *CHAPITRE I ELASTICITE LINEAIRE*

I-1 Introduction.....	3
I-2 Hypothèses fondamentales.....	3
I-3 Hypothèses simplificatrices.....	4
I-4 Equations gouvernantes de l'élasticité.....	5
I-4-1 Equation différentielles de l'équilibre.....	5
I-4-2 Equations déformations-déplacements.....	6
I-4-3 Equations contraintes-déformations.....	7
I-5 Elasticité plane en coordonnées cartésiennes.....	8
I-5-1 Etat de déformations planes.....	8
I-5-2 Etat de contraintes planes.....	10

### *CHAPITRE II CONSOLIDATION CLASSIQUE*

II-1 introduction.....	12
II-2 compressibilité.....	13
II-2-1 Essai oedométrique.....	13
II-2-2 pression de préconsolidation.....	14
II-3 La consolidation unidimensionnelle.....	15
II-3-1 Définition.....	15
II-3-2 Analogie mécanique.....	16
II-3-3 Théorie de la consolidation de TERZAGHI.....	17
II-3-4 Cas des sols stratifiés (multicouches).....	26
II-3-5 Cas des chargements linéaires.....	26
II-4 consolidation bidimensionnelle plane.....	28
II-5 Conclusion.....	29

### *CHAPITRE III LA METHODE DES ELEMENTS FINIS*

III-1 Introduction.....	30
III-2 Historique.....	31
III-3 Formulation de la M.E.F.....	31
III-4 Détermination de la matrice de rigidité.....	33
III-4-1 Choix de la fonction déplacement.....	33
III-4-2 Calcul de la matrice de rigidité.....	33
III-4-3 propriété de la matrice de rigidité.....	35

III-4-4 Règle d'assemblage.....	35
III-5 Conditions de convergence.....	
III-5-1 convergence monotone.....	36
III-5-2 Convergence non monotone.....	36
III-6 Elément isoparametrique.....	36
III-6-1 Avantage de l'élément isoparametrique.....	37
III-6-2 Elément isoparametrique à huit ddl.....	37
III-7 Classification des méthodes de résolution.....	39
III-7-1 Méthodes directes.....	40
III-7-2 Méthodes indirectes ( itératives ).....	40

## CHAPITRE IV LA METHODE DES ELEMENTS INFINIS

IV-1 Introduction.....	41
IV-2 Historique.....	42
IV-3 Formulation des éléments infinis .....	42
IV-3-1 Approche directe .....	42
IV-3-2 Approche inverse.....	44
IV- 4 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément infini.....	48

## CHAPITRE V SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONSOLIDATION

V-1 Introduction.....	51
V-2 Formulation de la consolidation en utilisant la M.E.F.....	51

## CHPITRE VI APPLICATIONS

VI-1 Fichier de données.....	58
VI-2 Etude de la consolidation unidimensionnelle.....	58
VI-2-1 Application (1).....	58
VI-2-2 Application (2) .....	67
VI-3 Etude de la consolidation bidimensionnelle.....	71
VI-3-1 Application.....	71

## CONCLUSION

## ANNEXES

# Notation



- E : Module de déformation.
- $E'$  : Module oedométrique
- $\nu$  : Coefficient de poisson
- G : Module de cisaillement
- $\lambda, \mu$  Coefficients de LAME
- $S_r$  : Degré de saturation
- e : Indice des vides
- $C_c$  : Indice de compression
- $C_s$  : Indice de gonflement
- $C_v$  : Coefficient consolidation
- $T_v$  : Facteur temps
- $K_v$  : Coefficient de perméabilité verticale
- $K_h$  : Coefficient de perméabilité horizontale
- $a_v$  : Coefficient de compressibilité
- $C_h$  : Coefficient de consolidation horizontale
- V : Volume total
- $\rho$  : Masse volumique totale
- $\gamma$  : Poids volumique total
- $V_l$  : Volume liquide
- $\rho_l$  : Masse volumique liquide
- $\gamma_l$  : Poids volumique liquide
- $V_s$  : Volume solide
- $\rho_s$  : Masse volumique solide
- $\gamma_s$  : Poids volumique solide
- $\gamma_a$  : Poids apparent à la phase solide

- H : Hauteur de la couche  
 i : Gradient hydraulique  
 u : Surpression interstitielle  
 $\sigma'$  : Contrainte effective  
 $\sigma$  : Contrainte totale  
 $U_c$  : Degré de consolidation  
 $\pi$  : Energie potentielle totale  
 $\varphi$  : Charge hydraulique  
 $N_i$  : Fonctions d'interpolation  
 $P_i$  : Base polynomiale  
 $M_i$  : Fonction de forme de l'élément infini  
 $F_i$  : Fonctions décroissantes  
 $\{U\}$  : Vecteur déplacement  
 $\{\alpha\}$  : Vecteur des variables généralisées  
 $\{F\}$  : Vecteur des forces  
 $[A]$  : Matrice reliant déplacement nodaux aux variables généralisées  
 $[L]$  : Matrice opérateur différentiel  
 $[B]$  : Matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux  
 $[D]$  : Matrice d'élasticité  
 $[K]$  : Matrice de rigidité  
 $[J]$  : Matrice de JACOBI  
 $[C]$  : Matrice de couplage  
 $[K_p]$  : Matrice de rigidité de la phase fluide  
 $\{\hat{R}\}$  : Vecteur forces totales  
 $\{f\}$  : Vecteur forces surfacique



## Liste des figures



- Fig(I-1) Etat de contrainte dans un élément
- Fig(II-1) Déformation verticale en fonction du  $(\log t)$
- Fig(II-2) Courbe oedométrique
- Fig(II-3) Schématisation de la courbe oedométrique
- Fig(II-4) Analogie mécanique de la consolidation
- Fig(II-5) Volume élémentaire du sol
- Fig(II-6) Conditions aux limites d'une couche doublement drainée
- Fig(II-7) Conditions aux limites d'une couche simplement drainée
- Fig(II-8) Distribution possible des surpressions initiales
- Fig(II-9) Loi de chargement linéaire
- Fig(III-1) Convergence monotone
- Fig(III-2) Convergence non monotone
- Fig(III-3) Elément isoparamétrique quadrilatérale
- Fig(IV-1) Géométrie de l'élément infini
- Fig(IV-2) Elément infini unidimensionnel
- Fig(IV-3) Elément infini suivant x
- Fig(IV-4) Elément infini suivant y
- Fig(IV-5) Elément infini dans les directions x et y
- Fig(IV-1) Loi du chargement variable
- Fig(VI-2) Loi du chargement constant
- Fig(VI-3) Contraintes effectives sous charge variable (drainage simple, 21 él<sup>ts</sup>)
- Fig(VI-4) Contraintes effectives sous charge variable (drainage double, 21 él<sup>ts</sup>)
- Fig(VI-5) Contraintes effectives sous charge variable (drainage simple, 27 él<sup>ts</sup>)
- Fig(VI-6) Contraintes effectives sous charge variable (drainage double, 27 él<sup>ts</sup>)
- Fig(VI-7) Tassements temporaires sous charge variable (drainage simple)
- Fig(VI-8) Surpressions temporaires sous charge variable (drainage simple)
- Fig(VI-9) Tassements temporaires sous charge constante (drainage simple)
- Fig(VI-10) Surpressions temporaires sous charge constante (drainage simple)

- Fig(VI-11)** Tassements temporaires sous charge variable (drainage simple)
- Fig(VI-12)** Surpressions temporaires sous charge variable (drainage simple)
- Fig(VI-13)** Tassements temporaires sous charge constant (drainage simple)
- Fig(VI-14)** Surpressions sous charge constante (drainage simple)
- Fig(VI-15)** Tassements temporaires sous charge variable (Tti-couches 1)
- Fig(VI-16)** Surpressions temporaires sous charge variable (Tti-couches 1)
- Fig(VI-17)** Tassements temporaires sous charge variable (Tti-couches 2)
- Fig(VI-18)** Surpressions temporaires sous charge variable (Tti-couches 2)
- Fig(IV-19)** Variation des tassements temporaires en profondeurs sur l'axe de symétrie
- Fig(IV-20)** Variation des tassements temporaires à la surface du sol
- Fig(IV-21)** Variation des tassements en profondeurs sur différentes distances horizontales
- Fig(IV-22)** Variation des tassements en distances horizontales sur différents profondeurs
- Fig(IV-23)** Variation temporaire des déplacements horizontaux à la surface du sol
- Fig(IV-24)** Variation des déplacements horizontaux en distances horizontales sur différentes profondeurs
- Fig(IV-25)** Variation temporaires des contraintes effectives verticales en Profondeurs
- Fig(IV-26)** Variation des contraintes effectives verticales en profondeurs sur différentes distances horizontales
- Fig(IV-27)** Variation des contraintes effectives en distances horizontales sur différents profondeurs
- Fig(IV-28)** Variation des surpressions en profondeurs sur l'axe de symétrie

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION GENERALE

## INTRODUCTION GENERALE

Les coûts élevés que requiert la construction des projets stratégiques, notamment ceux concernant les ouvrages d'arts, impliquent une étude particulière de ces ouvrages et surtout leurs infrastructures (sol).

En effet, la protection de tels ouvrages des tassements - surtout ceux qui sont différentielles- demande une étude intensive du processus de variation des tassements et des surpressions d'une profondeur à une autre. Cette étude s'impose d'avantage si le sol est saturé d'eau.

La consolidation est considérée parmi les phénomènes les plus importants survenant dans les sols saturés ou partiellement saturés, car conduisant – dans le cas où elle est négligée – à des résultats catastrophiques.

C'est à TERZAGHI que revient le mérite de jeter les premières bases de ce phénomène dans un cadre d'hypothèses, quoi que ces dernières laissent le sol loin de son comportement réel, elles étaient –néanmoins- inévitables au moment de TERZAGHI.

En effet, la prise en considération de la majorité des variables conduirait à des formules très complexes et difficilement résolues par les méthodes connues en cette époque, c'est à dire les méthodes théoriques.

Mais l'évolution de l'informatique accompagnée de l'évolution des différents domaines scientifiques ainsi que l'apparition des méthodes numériques ont permis d'obtenir des résultats très satisfaisants d'autant plus que ces méthodes s'adaptent parfaitement à la nature complexe et non homogène qui caractérise les sols ainsi, on peut prendre en considération la majorité des facteurs affectant le phénomène étudié.

La méthode des éléments finis est considérée parmi les plus importantes de ces nouvelles méthodes, en occupant un grand intérêt dans la dernière décennie eu égard sa rigueur et l'exactitude de ses résultats néanmoins, son inconvénient réside dans l'étude des régions infinies ou semi-infinies où l'on remplace les conditions aux limites à l'infini par les conditions aux limites à une frontière finie située à une certaine distance de la charge.

Cependant, la question qui se pose est de savoir comment déterminer cette dimension sachant qu'elle fait augmenter énormément le nombre d'éléments qui servent à la modélisation du milieu et par conséquent le temps et l'effort qui y sont consacrés tout en perdant une certaine précision.

C'est pour cette raison qu'est apparue la méthode des éléments infinis qui a favorisé le débarrasement du problème précédent et l'épargne de l'effort et du temps tout en gardant l'exactitude des calculs.

Notre modeste étude vise à l'utilisation du couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode des éléments infinis dans l'étude du phénomène de la consolidation des sols saturés. Elle se divise en deux parties :

- La première est consacrée à l'étude de la consolidation classique par les mêmes hypothèses émises par TERZAGHI.
- La deuxième est dédiée à l'étude de la consolidation bidimensionnelle.

Pour ce faire, nous avons utilisé un programme fortran qui se base sur le couplage entre les éléments fluides et les éléments solides, et ce pour refléter le mieux possible le comportement du sol.

En fin voici les différents chapitres entamés :

- Etant donné que notre étude s'effectue dans le domaine élastique, nous avons convenu de consacrer le premier chapitre pour l'élasticité et les différentes relations qui lient les contraintes aux déformations.
- Le deuxième chapitre : est consacré à l'étude du phénomène de la consolidation classique avec les différentes hypothèses émises par TERZAGHI.
- Dans le troisième chapitre nous montrons les concepts de la méthode des éléments finis et la manière de la formuler.
- Le quatrième chapitre : contient un exposé de la méthode des éléments infinis, son objectif et la manière de la formuler
- Le cinquième chapitre : s'intéresse à la formulation numérique du phénomène de la consolidation dans le cas général
- Le sixième chapitre : est consacré pour l'étude de quelques applications liées au phénomène de la consolidation.

Enfin nous terminons par une conclusion contenant un résumé des résultats et des recommandations et perspectives.

# CHAPITRE I

# ELASTICITE LINEAIRE

# CHAPITRE I

## ELASTICITE LINEAIRE

### I-1 INTRODUCTION

C'est au début du XIX<sup>ème</sup> siècle qu'est née la théorie de l'élasticité, qui a bien vite attiré l'attention de nombreux mathématiciens de tout premier plan.

Cette théorie n'est pas une théorie mathématique, mais une branche de la mécanique, et la mécanique elle-même est l'une des sciences fondamentales de la nature, dont l'étude ne coïncide point avec l'étude mathématique.

En général la notion d'élasticité est très liée à la réversibilité des déformations d'un matériau soumis à une charge quelconque, en d'autre terme, c'est la possibilité de reprendre la forme et la taille initiales après que les forces qui provoquent le chargement, que se soit sur le plan taille ou forme cessent d'agir, c'est le cas éventuellement des chargements non importants.

Dans la théorie de l'élasticité, en plus de l'hypothèse de l'élasticité, le matériau est supposé continu, homogène et isotrope, ainsi que les composantes du vecteur déplacement sont très petites pour rester dans le contexte de petite déformation.

### I-2 HYPOTHESES FONDAMENTALES

Parmi les hypothèses fondamentales, qui doivent caractériser le modèle du corps élastique on cite :

#### *a- Hypothèse de l'espace – temps - Newtonien*

L'espace est Euclidien (à trois dimensions), le temps est indépendant des coordonnées spatiales, les lois de NEWTON sont valables. Cette hypothèse situe la mécanique des milieux déformables dans la mécanique classique.

#### *b- Hypothèse du milieu continu*

Chaque domaine élémentaire contient de la matière. Ce point de vue trouve sa justification dans la petitesse des particules élémentaires par rapport aux dimensions des corps usuels. Il peut être utilisé même pour des corps composés de particules de propriétés différentes (ciment et gravier dans le béton) pourvu que les dimensions des corps soient très grandes par rapport à celles des composantes.

***c- Hypothèse de la solidification***

Un corps se trouve en équilibre si, et seulement si, les forces agissant sur chacune de ses parties forme un système de tenseur nul. Cette hypothèse permet de séparer (par la pensée) une partie arbitraire du corps, de remplacer l'action du reste par certaines forces, et de déterminer ces dernières par la condition d'équilibre.

***d- Hypothèse de la dépendance locale***

Les forces intérieures (tensions) sont des fonctions de point, de la déformation, de la température, etc..., mais ne dépendent pas des dérivées spatiales de ces grandeurs.

***e- Hypothèse de l'élasticité idéale***

Il existe une correspondance biunivoque entre les déformations et les tensions. Cette hypothèse implique le caractère réversible de la déformation, et se trouve en concordance avec la manière courante de définir un corps élastique : un corps qui revient à son état initial, la charge une fois supprimée.

**I-3 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES**

Le modèle considéré correspond généralement à des problèmes mathématiques d'une formidable complexité, souvent, on peut aux cinq hypothèses déjà considérées, en ajouter cinq autres qui bien que restreignant encore le cadre de la recherche.

***a- Hypothèse d'hyperélasticité***

Le travail mécanique nécessaire pour déformer le corps dépend seulement de son état initial et de son état final.

***b- Hypothèse de linéarité géométrique***

Les déformations sont des fonctions linéaires des dérivées de déplacement.

***c- Hypothèse de linéarité physique***

Les tensions sont des fonctions linéaires des déformations.

**d- Hypothèse d'isotropie**

Les propriétés mécaniques des matériaux ne changent pas avec la direction autour du point.

**e- Hypothèse d'homogénéité**

Les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec le point dans le corps.

**I-4 EQUATIONS GOUVERNANTES DE L'ELASTICITE**

La théorie de l'élasticité consiste à formuler trois(3) types d'équations qui sont :

- Les équations différentielles de l'équilibre
- Les équations différentielles de déformations-déplacements
- Les équations contraintes-déformations

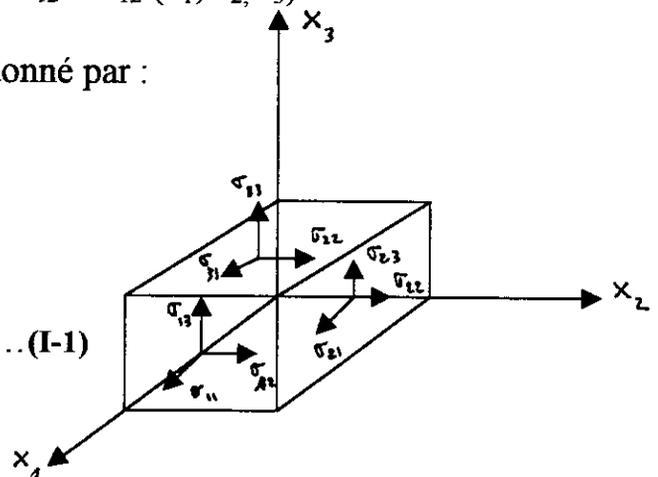
**I-4-1 Equations différentielles de l'équilibre**

On considère un cube élémentaire de dimension  $dx_1, dx_2, dx_3$  alors l'état de contrainte dans le corps chargé varie d'un point à un autre et les composantes des contraintes sont donc des fonctions des coordonnées du point :

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) , \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3)$$

le tenseur de contrainte d'un point est donné par :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (I-1)$$



**Fig I-1 Etat de contrainte en un point**

Ce tenseur est symétrique, c'est à dire :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Soit  $x, y, z$  les composantes de forces volumiques par unité de volume, les équations d'équilibres obtenues en faisant le bilan des forces élastiques agissant

sur l'élément prennent la formes suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{13} + X = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{23} + Y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{33} + Z = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(I-2)$$

tel que :

$\sigma_{ii}$  : contraintes normales suivant les directions principales

$\sigma_{ji}$  avec  $i \neq j$  : contraintes tangentielles dans les plans  $x_i x_j$

**I-4-2 Equations déformations-déplacements**

L'état de déformation en un point est caractérisé par le tenseur de déformation  $[\epsilon]$  suivant :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I-3)$$

Ce tenseur est aussi symétrique, c'est à dire :  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$

Les équations reliant déformation déplacement pour la théorie linéaire sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} & \epsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2} & \epsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial x_3} \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} & \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} & \dots\dots & (I-4) \end{aligned}$$

avec :  $u, v, w$  : les composantes du vecteur déplacement

**I-4-3 Equations contraintes-déformations**

Ces équations caractérisent les propriétés mécaniques du matériau. Soit un élément soumis à des contraintes normales  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , la contrainte  $\sigma_{11}$  provoque une déformation suivant l'axe  $x_1$  qui est égale à  $(\sigma_{11}/E)$  ; ainsi les contraintes  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  provoquent chacune d'elles une déformation suivant l'axe  $x_1$  donnée en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$  et qui est égale à  $\left(\frac{-\nu\sigma_{22}}{E}\right)$  et  $\left(\frac{-\nu\sigma_{33}}{E}\right)$ . Donc les déformations selon les trois (3) directions s'expriment en fonction des contraintes de la façon suivante :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) \\ \epsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) \\ \epsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) \end{cases} \dots\dots\dots(I-5)$$

Pour ce qui est des déformations angulaires, celles-ci sont causées par les contraintes tangentielles ( $\tau$ ) telles que :

$$\begin{cases} \gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} \\ \gamma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G} \\ \gamma_{31} = \frac{\sigma_{31}}{G} \end{cases} \dots\dots\dots(I-6)$$

Avec G : représente le module de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2 * (1 + \nu)}$$

En exprimant les contraintes en fonctions des déformations, sous formes matricielles on trouve :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2*\nu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2*\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2*\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} \dots\dots(I-7)$$

avec :

$\lambda, \nu$  : coefficients de LAME définis par les expressions suivantes

$$\lambda = \frac{\nu * E}{(1-2*\nu)*(1+\nu)}, \quad \nu = \frac{E}{2 * (1 + \nu)}$$

avec :

E : module de déformation

$\nu$  : module de Poisson

## I-5 ELASTICITE PLANE EN COORDONNEES CARTESIENNES

Il existe deux problèmes d'élasticité plane :

- problème de déformations planes
- problème de contraintes planes

### I-5-1 Etat de déformations planes

Dans un état de déformation plane, une des dimensions de la structure est supposée très grand par rapport aux deux autres directions, c'est le cas par exemple des barrages, sol, murs de soutènement, ...

#### a- Equations déformations -déplacements

dans un état de déformation plane le vecteur déplacement est défini par :

$$u = u(x_1, x_2)$$

$$v = v(x_1, x_2)$$

$$w = 0$$

ainsi le tenseur de déformation  $[\varepsilon]$  devient :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I-8)$$

Tq :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \gamma_{21} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{aligned}$$

**b- Equations contraintes - déformations**

La relation matricielle qui liée les contraintes aux déformations dans le cas d'un état plan de déformation sera :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu) * (1 - 2 * \nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2 * \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (I-9)$$

avec :

$\sigma_{33} = \nu * (\sigma_{11} + \sigma_{22})$  est indépendant de la direction  $x_3$ , la relation inverse sera :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{(1 + \nu)}{E} ((1 - \nu) \sigma_{11} - \nu * \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{(1 + \nu)}{E} ((1 - \nu) \sigma_{22} - \nu * \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2 * G} \end{cases} \dots\dots\dots (I-10)$$

**c- Equations d'équilibre**

Dans le cas de l'état de déformations planes les équations d'équilibres se réduisent à deux(2) équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + y = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(I-11)$$

avec :

x, y : les forces de volume

**Remarque :** L'état de déformation plane n'implique pas un état de contrainte plane car pour une déformation nulle suivant  $x_3$  on a une contrainte suivant cette même direction qui égale :

$$\sigma_{33} = \nu^*(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

**I-5-2 Etat de contraintes planes**

Dans cet état de contrainte, une des dimensions de la structure est supposée très petite ou négligeable devant les deux autres directions.

**a- Equation déformations-déplacements**

Le tenseur de déformation dans cet état devient :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I-12)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} & \epsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2} & \epsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial x_3} \\ \epsilon_{21} &= \frac{1}{2} \gamma_{21} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{aligned}$$

u, v, w : Composantes du vecteur déplacement.

**b- Equation contrainte - déformation**

La relation entre les déformations et les contraintes dans un état plane de contrainte est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu * \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu * \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2 * G} \end{cases} \dots\dots\dots(I-13)$$

ces trois équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \dots\dots(I-14)$$

**Remarque :** la déformation de la structure suivant la direction privilégiée (x<sub>3</sub>) est donnée en fonction des deux autres déformations par la formule :

$$\varepsilon_{33} = \frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

**c- Equations d'équilibres :**

Les équations d'équilibres dans ce cas sont identiques à celles obtenues dans l'état de déformation plane, c'est à d

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + y = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(I-15)$$

avec

x, y : les forces de volumes selon les directions x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>

**Remarque :** les méthodes de résolution des problèmes ainsi formulées sont de deux types :

- Analytique
- Numérique tel que : la méthode des éléments finis, et des différences finis

**CHAPITRE II**  
**LA CONSOLIDATION**  
**CLASSIQUE**

## CHPITRE II CONSOLIDATION CLASSIQUE

### II-1 INTRODUCTION

Lorsqu'un sol est soumis à des charges (fondations, remblais, barrages ...) il se produit des déformations dans le milieu. Comme ces charges sont le plus souvent verticales, ces déformations sont particulièrement marquées dans la direction même des forces appliquées, elles prennent alors le nom tassement. Or le phénomène du tassement et loin d'être instantané, il peut parfois durer des années si la couche compressible est épaisse et sa perméabilité faible.

En milieu complètement saturé, après un chargement rapide, c'est l'eau même qui prend tout l'effort, cette eau se met en mouvement conformément à la loi de «DARCY » et, dans la transmission des charges, les grains se substituant progressivement à l'eau qui s'écoule à une vitesse fonction de la perméabilité du milieu.

Au bout d'un certain temps, toutes les charges se transmettent directement de grain à grain, l'eau interstitielle repris en chaque point la pression initiale qui existait avant la mise en charge du milieu. On dit alors que le milieu est «consolidé » sous l'action des charges ou forces extérieures.

Ce problème de consolidation dans les sols saturés a été traité dans la bibliographie par de très nombreux auteurs qui se sont servis de différentes approches selon la nature du problème posé.

La consolidation linéaire est généralement traitée sur la base d'une des deux théories suivantes :

- a- La théorie non couplée de TERZAGHI (1923) RENDULIC (1936) qui traite la variation des pressions interstitielles en supposant en tout point une contrainte totale moyenne constante dans le temps.
- b- La théorie couplée de BIOT (1941) où la contrainte totale moyenne peut varier dans le temps, sa variation étant liée à la variation des pressions interstitielles.

## II-2 COMPRESSIBILITE

### II-2-1 L'essai oedométrique

#### a- L'oedomètre

L'oedomètre est un appareil qui permet de réaliser sur un échantillon de sol saturé un essai de consolidation unidimensionnelle. L'écoulement de l'eau au cours de la consolidation est uniquement vertical.

#### b- l'essai oedométrique

On place un échantillon de sol dans une enveloppe rigide, on exerce à sa partie supérieure une pression variable à l'aide d'un piston et l'on mesure les affaissements observés, pour cela il faut :

- La hauteur de l'échantillon soit grande vis-à-vis de la dimension des Grains pour puisse admettre que la répartition des charges est homogène.
- Le diamètre de l'échantillon soit grand vis-à-vis de sa hauteur pour que l'effort de frottement des parois puisse être négligé.
- L'échantillon ne soit pas trop épais pour que les tassements soit rapidement stabilisés.

La consolidation de l'échantillon dans l'oedomètre peut se résumer par le tableau suivant :

Temps	Pression interstitielle	Contrainte effective	Contrainte totale	tassement
T=0	$u=\sigma$	$\sigma'=0$	$\sigma$	0
Fin de l'essai	$u=0$	$\sigma'=\sigma$	$\sigma$	$\Delta h$

La courbe des déformations verticales en fonction du logarithme du temps à l'allure indiquée ci-après. Elle permet de distinguer les deux phases de la consolidation : primaire et secondaire.

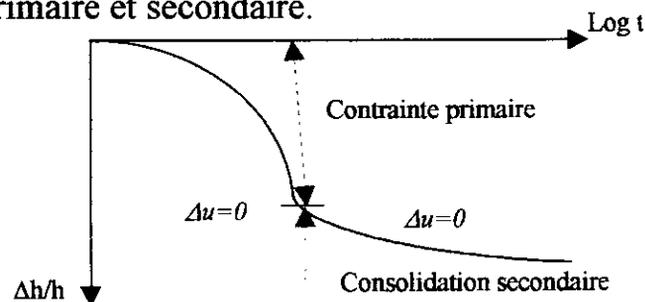


Fig II-1 Déformations verticales en fonction du ( $\log t$ )

**c- la courbe oedométrique**

Sur un échantillon donné, on fait plusieurs essais, on applique d'abord une première charge et on attend la fin de la consolidation sous cette charge, puis on applique une deuxième (2) charge double de la précédente et on attend qu'il y ait eu consolidation, ect... En calculant pour chaque charge l'indice des vides en fin de consolidation, on peut ainsi tracer la courbe ( $e - \log \sigma'$ ) appelé : « courbe oedométrique »

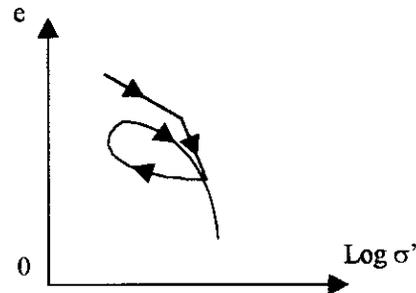


Fig II-2 Courbe oedométrique

**II-2-2 Pression de préconsolidation :****a- Schématisation de la courbe oedométrique**

D'une manière générale, la courbe oedométrique peut être schématiser de la manière suivante :

- Une première partie AB à pente très faible
- Une deuxième partie CB à pente forte, cette pente est appelée « indice de compression » et notée «  $C_c$  ».

Si l'on effectue un cycle de chargement (partie DE), la pente est la même que celle de la partie AB.

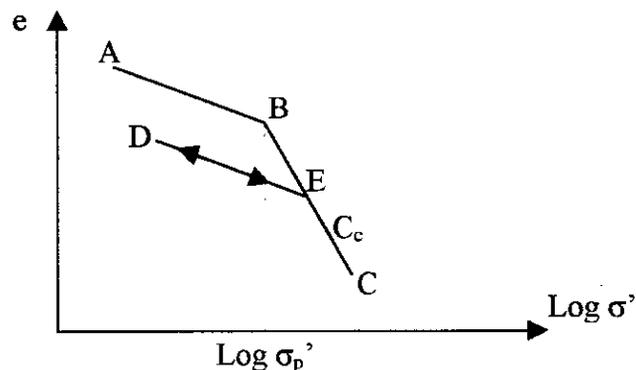


Fig II-3 Schématisation de la courbe oedométrique

**Remarque :**

Dans le cas d'un sol vierge, la courbe oedométrique présente la particularité de ne pas avoir la partie initiale à pente faible.

**b-Pression de préconsolidation**

L'étude du diagramme ( $e - \log \sigma'$ ) met en évidence une valeur de la contrainte effective, correspondant à un seuil dans la loi de comportement que l'on désigne par : « pression de préconsolidation  $\sigma'_p$  ».

La pression  $\sigma'_p$  peut correspondre :  
à la plus grande contrainte effective verticale supportée par l'échantillon au cours de son histoire.

Il est intéressant de comparer cette valeur de la contrainte maximale  $\sigma'_p$  à la contrainte effective réelle  $\sigma'_0$  ( $\sigma'_0 = \sum \gamma' h_i$ ) due au poids des terres déjaugés.

On distingue :

- Les sols surconsolidés dans lesquels  $\sigma'_p > \sigma'_0$  : c'est le cas des sols anciens qui supportait des glaciers.
- Les sols normalement consolidés dans lesquels  $\sigma'_p = \sigma'_0$ .
- Les sols sousconsolidés dans lesquels  $\sigma'_p < \sigma'_0$  : c'est le cas des vases récentes qui n'ait pas encore terminé de se consolidés.

Il est à noter qu'il existe plusieurs méthodes pour la détermination de  $\sigma'_p$ , on cite la méthode de CASAGRAND, la méthode de SCHMERTMAN, etc...

**II-3 LA CONSOLIDATION UNIDIMENSIONNELLE****II-3-1 Définition**

La consolidation est le phénomène de réduction du volume d'une couche de sol saturée sous l'action d'une contrainte normale.

Ce phénomène est lui-même partagé en deux parties qui se succèdent dans le temps et qui se surpassent selon l'importance du danger qu'elles provoquent respectivement.

Elles sont communément connues sous le nom : compression primaire et secondaire.

**a- Consolidation primaire**

Elle correspond au phénomène de dissipation de la surpression interstitielle, donc ce phénomène ne peut avoir lieu sans qu'il y ait écoulement de l'eau dans le sol, ce qui entraînera évidemment la création d'un gradient hydraulique au niveau de ce dernier.

Il est nécessaire de noter que les surpressions interstitielles sont profondément influençables par la nature du sol, son degré de saturation et la vitesse d'application de la charge.

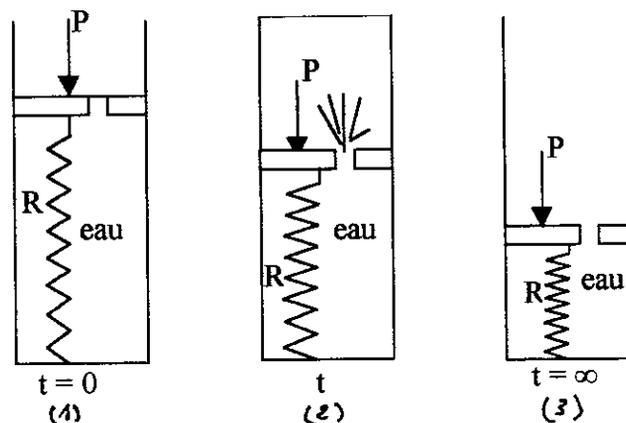
### **b- Consolidation secondaire**

Dans cette phase le squelette solide du sol continue à tasser bien que la surpression interstitielle soit nulle ( $\Delta u=0$ ), donc cette phase est le résultat d'un arrangement progressif de la structure du sol, lié aux déformations des couches adsorbées, c'est un écoulement visqueux, dans lequel le tassement augmente aussi longtemps que la surcharge s'exerce.

**Remarque :** En général la consolidation primaire est la plus dangereuse comparée à la consolidation secondaire (cas des sols ne contenant ni de la tourbe, ni des vases).

### **II-3-2 Analogie mécanique**

Pour mieux comprendre la consolidation d'un sol, nous allons faire appel à une analogie mécanique.



**Fig II-4 Analogie mécanique de la consolidation**

Le sol est schématisé par un cylindre rempli d'eau, muni d'un piston avec un robinet et d'un ressort R figurant le squelette sol.

- On charge le piston par p, le robinet étant fermé, le piston ne bouge pas, donc le ressort ne supporte aucune charge (1), toute la charge est supportée par l'eau.
- On ouvre le robinet, l'eau jaillit et le ressort se comprime au temps t, il encaisse une partie de la charge p, l'autre étant encaissée par l'eau. Dans le sol l'eau en pression s'écoule vers les surfaces drainantes ou  $\Delta u=0$ .

- Au bout d'un certain temps, le ressort R encaisse toute la charge  $p$ , l'eau n'est plus en pression et ne s'écoule plus. Dans le sol, ceci correspond au temps où toute la surcharge  $\Delta\sigma$  est encaissée par le squelette solide.

Il faut noter que plus la perméabilité est faible et plus le temps de la consolidation est important.

### II-3-3 Théorie de la consolidation de TERZAGHI

La théorie de la consolidation unidimensionnelle développée par TERZAGHI traite la consolidation d'une couche de sol dans laquelle les déformations et les écoulements sont uniquement verticaux et où la charge est appliquée instantanément à l'instant initial, elle correspond aux conditions de l'essai oedométrique, sous chaque palier de chargement et au schéma des couches de sols compressibles horizontales sans déplacements horizontaux.

#### *a- Les hypothèses de TERZAGHI*

- 1- Les phénomènes décrits sont unidimensionnels, c'est à dire que l'on s'intéresse au comportement d'une couche d'épaisseur finie, infinie dans les deux autres directions et chargée uniformément.
- 2- Le sol est constitué d'un squelette aux déformations élastiques linéaire saturé de liquide interstitiel incompressible.
- 3- Le sol est homogène et ses caractéristiques de perméabilité et de compressibilité restent constantes au cours de la consolidation.
- 4- La circulation de l'eau dans les pores du sol est décrite par la loi de DARCY (la vitesse d'écoulement de l'eau dans les pores par rapport au squelette est proportionnelle au gradient de la charge hydraulique).
- 5- Relation linéaire entre la contrainte effective et l'indice des vides.
- 6- Pas de viscosité structurale du sol, c'est à dire pas de compression secondaire.

#### *b- Degré de consolidation*

le degré de consolidation est défini comme le rapport de l'augmentation moyenne de la contrainte effective dans la couche au temps  $t$  à sa valeur finale, qui est égale à la valeur de la charge appliquée  $\Delta\sigma_v$  :

$$U_c = \frac{\overline{\Delta\sigma_v}}{\Delta\sigma_v} = \frac{\Delta\sigma_v - \Delta u}{\Delta\sigma_v} = 1 - \frac{\Delta u}{\Delta\sigma_v} \dots\dots\dots(\text{II-1})$$

**c- Coefficient de consolidation**

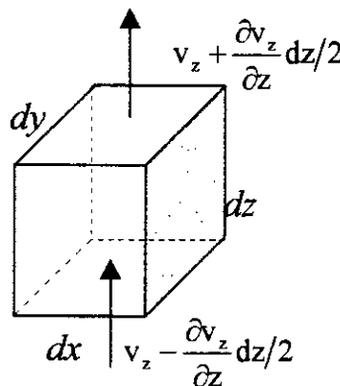
Le coefficient de consolidation  $C_v$  n'est pas un paramètre indépendant, dans la mesure où il dépend à la fois de l'indice des vides, du coefficient de perméabilité  $K$ , et du coefficient de compressibilité verticale  $a_v$ .

Comme chacun de ces paramètres varie au cours de la consolidation, le coefficient de consolidation n'est pas constant, non plus néanmoins, pour pouvoir utiliser la théorie de la consolidation unidimensionnelle, on est conduit à adopter une valeur moyenne du coefficient  $C_v$  dans l'intervalle de contrainte effective correspondant à la charge appliquée. Les valeurs du coefficient de consolidation de la plupart des sols fins sont comprises entre  $10^{-6}$  et  $10^{-9}$  m/s, ce coefficient est donné par la formule suivante :

$$C_v = \frac{K(1+e)}{a_v \gamma_w} \dots\dots\dots(\text{II-2})$$

**d- Formulation de l'équation gouvernant le problème de la consolidation unidimensionnelle**

Soit un volume élémentaire de dimension  $dx$   $dy$   $dz$  dans cet élément, la variation de volume équivaut à la différence entre la quantité d'eau entrant et celle sortant.



**Fig II-5 Volume élémentaire du sol**

Dans ces conditions, et puisque la consolidation est directement liée à l'eau interstitielle qui s'échappe des vides, on peut formuler une équation qui tient compte de l'écoulement continu.

Sachant que l'écoulement est uniquement unidimensionnel, alors la composante de la vitesse d'écoulement ( $v_z$ ) dans la direction  $z$  est donnée sur la (fig II-5).

Le volume d'eau entrant «  $q_{int}$  » par unité de temps vaut :

$$q_{int} = (v_z - \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{2}) dx dy \dots\dots\dots(\text{II-3})$$

Le volume d'eau sortant «  $q_{sort}$  » vaut :

$$q_{sort} = (v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{2}) dx dy \dots\dots\dots(\text{II-4})$$

Donc la variation de volume  $v$  d'eau par unité de temps c'est :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = q_{sort} - q_{int} = \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz \dots\dots\dots(1)$$

Si  $v_s$  est le volume des grains et 'e' est l'indice des vides, alors :

$$V = V_s(1 + e) = dx dy dz \Rightarrow V_s = \frac{dx dy dz}{1 + e}$$

d'où :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V_s \frac{\partial e}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dx dy dz}{1 + e} \frac{\partial e}{\partial t} \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial t} = (1 + e) \frac{\partial v_z}{\partial z} \dots\dots\dots(3)$$

Puisque la variation de la hauteur totale « h » ne peut être due qu'à la variation de l'excès de pression  $u$  dans l'eau interstitielle, alors :

$$\partial h = \frac{1}{\gamma_w} \partial u$$

Selon DARCY (  $q = VA = K_v i A = K_v \frac{\Delta h}{L} A$  ) alors :

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{K_v}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{K_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

$$(4) \text{ dans } (3) \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1 + e}{\gamma_w} K_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots(5)$$

On définit ainsi le coefficient de compressibilité  $a_v$  comme suit :

$$a_v = -\frac{\partial e}{\partial \sigma} = Cte \quad (\text{d'après l'hypothèse 5 de TERZAGHI})$$

D'après la théorie de TERZAGHI :

$$\sigma = Cte \Rightarrow du = -d\bar{\sigma}$$

et :

$$de = -a_v d\bar{\sigma} = a_v du$$

On remplace dans l'équation (5), on trouve :

$$\left[ \frac{K(1 + e)}{a_v \gamma_w} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \dots\dots\dots(\text{II-5})$$

La quantité entre crochets est appelée coefficient de consolidation et notée  $c_v$  tel que :

$$c_v = \frac{K(1 + e)}{a_v \gamma_w}$$

L'équation au-dessus devient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots(\text{II-6})$$

Cette équation est l'équation de consolidation unidimensionnelle de TERZAGHI.

Par ailleurs, on suppose que le coefficient de consolidation «  $c_v$  » est un coefficient constant dans le temps et dans l'espace.

Il existe plusieurs façons de résoudre une équation de ce genre certaines sont mathématiques exactes, alors que d'autres ne sont que des approximations.

Pour mettre cette équation sous une forme adimensionnelle, on définit une nouvelle variable  $T_v$  appelée facteur temps.

$$T_v = \frac{C_v}{H^2} t \quad H : \text{représente le chemin de drainage.}$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial T_v} \dots\dots\dots(\text{II-7})$$

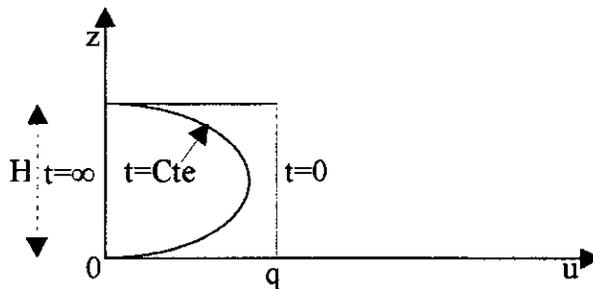
**e- Les conditions aux limites**

**e.1 Cas d'une couche drainée par les deux faces**

Soit H l'épaisseur de la couche, alors la moitié d'eau s'évacue par le drain supérieur et l'autre moitié par le drain du bas.

On aura dans ce cas :

$$T_v = \frac{4C_v}{H^2} t$$



**Fig II-6 conditions aux limites d'une couche doublement drainée**

q : la charge appliquée.

Sur les deux surfaces limitant la couche compressible, la surpression u est nulle puisque le matériau adjacent est parfaitement perméable.

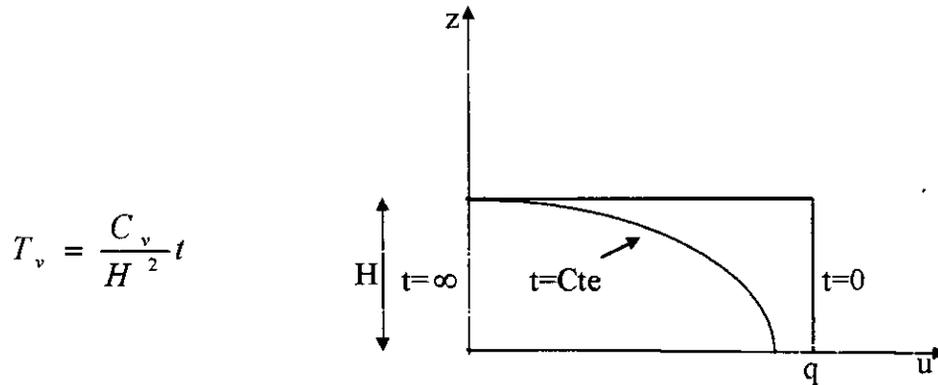
Les conditions aux limites s'écrivent alors :

- $u(t,0) = u(t,H) = 0.$
- à  $t = 0 : u(0,z) = q.$
- à  $t = \infty : u(\infty,z)=0$

**e.2 Cas d'une couche drainée par une seule face**

On trouve fréquemment des couches demi-ouvertes, la couche compressible repose sur une couche imperméable, du rocher par exemple, elle est surmontée à son tour par une couche perméable, c'est la même équation aux dérivées partielles qui règle le problème, mais les conditions aux limites sont modifiées sur la surface de contact argile-roche  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$  qui exprime que le débit qui traverse cette surface est nul.

q: la charge appliquée.



$$T_v = \frac{C_v}{H^2} t$$

**Fig II-7 Conditions aux limites d'une couche simplement drainée**

Les conditions aux limites deviennent :

- pour  $t = 0$  :  $u(0,z) = q$
- pour  $t$  quelconque, la vitesse de l'eau à la base imperméable est nulle.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (\text{à la base imperméable})$$

- pour  $t = \infty$  :  $u(\infty,z) = 0$ .

**f- Solution de l'équation de consolidation de TERZAGHI :**

Pour résoudre l'équation de consolidation, il faut associer à cette équation :

- les conditions initiales (CI)
- les conditions aux limites (CAL).

Dans le cas d'un chargement uniforme d'une couche drainée à ces deux faces et d'épaisseur  $2H$ , les conditions aux limites sont données au-dessus (partie e.1).

**Remarque:** On va faire seulement la résolution de l'équation de TERZAGHI pour le cas d'une couche d'épaisseur  $2H$ , drainée des 2 côtés (faces).

**- Méthode de séparation des variables**

Cette méthode consiste à chercher des solutions sous la forme :

$$u(z,t) = E(z).T(t) \dots \dots \dots \text{(II-8)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{C_v} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow T(t)E''(z) - \frac{1}{C_v} E(z)T'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E''(z)}{E(z)} = \frac{1}{C_v} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

$\lambda = Cte$  (elle doit ne dépendre ni de  $z$  ni de  $t$ ) d'où :  
 $E''(z) + \lambda^2 E(z) = 0$  et  $T'(t) + \lambda^2 C_v T(t) = 0$

Donc:

$T(t) = C_\lambda \exp(-C_v \lambda^2 t)$  avec:  $C_\lambda = Cte$  .....(II-9)

$E(z) = A_\lambda \cos(\lambda z) + B_\lambda \sin(\lambda z)$  avec :  $A_\lambda, B_\lambda : Cte$  .....(II-10)

Donc la solution de l'équation de consolidation sera :

$u(z, t) = [A_\lambda \cos(\lambda z) + B_\lambda \sin(\lambda z)] \exp(-C_v \lambda^2 t)$  .....(II-11)

Les conditions aux limites sont :

- $u(0, t) = u(2H, t) = 0$
- $u(z, 0) = u_i$  (pression interstitielle initiale)

La solution de l'équation devient :

$u_n(z, t) = B_n \sin \frac{(2n + 1)\pi z}{2H} \exp(-C_v (2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4H^2} t), n \in N$

Sachant que :

$u(z, t) = \sum_{N=0}^{\omega} u_n(z, t)$  et  $T_v = \frac{C_v t}{H^2}$

alors:

$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin((2n + 1) \frac{\pi}{2H} z) \exp(-\frac{(2n + 1)^2 \pi^2}{4} T_v)$

Mais à l'instant  $t = t_0 = 0$  on a :

$u(z, 0) = u_i = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin((2n + 1) \frac{\pi}{2H} z)$  .....(II-12)

Pour déterminer le coefficient, il faut développer  $u_i$  en série de Fourier en utilisant la propriété suivante :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(py)\sin (qy)dy = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ 1 & \text{si } p = q \end{cases} \dots\dots\dots(\text{II-13})$$

On trouve :

$$\frac{1}{H} \int_0^{2H} \sin(2n+1) \frac{\pi z}{2H} \sin(2m+1) \frac{\pi z}{2H} dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

alors:

$$\frac{1}{H} \int_0^{2H} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(2n+1) \frac{\pi z}{2H} \sin(2m+1) \frac{\pi z}{2H} dz = \frac{1}{H} \int_0^{2H} u_i \sin(2m+1) \frac{\pi z}{2H} dz$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{u_i}{H} \int_0^{2H} \sin(2n+1) \frac{\pi z}{2H} dz \dots\dots(\text{II-14})$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4}{(2n+1)\pi} u_i$$

donc: si on a une distribution initiale uniforme de la pression interstitielle, alors la distribution des pressions interstitielles en fonction de « z » et « t » sont :

$$u(z,t) = \frac{4u_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2H} \dots\dots\dots(\text{II-15})$$

On définit ainsi le degré de consolidation moyen comme étant le rapport du chargement de l'indice des vides « e » à un temps « t », sur le changement ultime de l'indice des vides.

Donc:

$$U_{c \text{ moy}}(t) = 1 - \frac{\int_0^{2H} u(z,t) dz}{\int_0^{2H} u_i dz}$$

$$U_c = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}} \dots\dots\dots(\text{II-16})$$

On peut aussi calculer la formule du tassement d'un point M situé à la profondeur z d'une couche d'épaisseur 2H comme suit :

$$S(z, t) = \int_z^{2H} \frac{\sigma'}{E'} dz = \int_z^{2H} \frac{\sigma - u}{E'} dz = \int_z^{2H} \frac{\sigma}{E'} dz - \int_z^{2H} \frac{u}{E'} dz \dots\dots\dots(\text{II-17})$$

$$= \left[ \frac{u_i z}{E'} \right]_z^{2H} - \frac{1}{E'} \int_z^{2H} \frac{4u_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2H} dz$$

$$= \left[ \frac{u_i z}{E'} \right]_z^{2H} + \frac{1}{E'} \left[ \frac{4u_i}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2H} \right]_z^{2H}$$

$$= \frac{u_i}{E'} [2H - z] + \frac{1}{E'} \left[ \frac{8u_i}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}} (-1 - \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2H}) \right]$$

$$S(t, z) = \frac{u_i}{E'} [2H - z] - \frac{8u_i}{E' \pi^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}} (1 + \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2H}) \right] \dots\dots\dots(\text{II-18})$$

Avec :  $E'$  :  $c'$  est le module oedométrique.

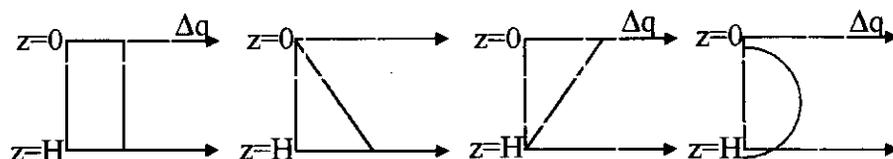
Ce module oedométrique est lié au module de déformation par la formule

suivante:  $E' = (1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu})E$  avec :  $\nu$ : coefficient de poisson.

**Remarques:**

1- les formules précédentes ( $u(z, t)$ ,  $U$ ,  $S(t, z)$ ) sont données pour une couche doublement drainée (par les deux côtés) et dans le cas d'un chargement uniformément réparti.

2- l'équation de consolidation :  $C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$  a été résolue par TERZAGHI pour plusieurs types de distribution de charges initiales (fig II-8) dans le cas d'une couche d'épaisseur  $H$  limitée en haut par une surface drainante et en bas par une surface imperméable.



**Fig II-8 Distribution possible des surpressions initiales**

**II-3-4 Cas des sols stratifiés (multicouches) :**

La solution de TERZAGHI pour la consolidation unidimensionnelle se rapporte uniquement aux sols monocouches. Dans le cas des sols stratifiés où le coefficient de consolidation équivalent et l'en traite le sol comme un monocouche.

Diverses formules ont été proposées pour calculer la valeur moyenne de  $C_v$  dans le sol : TERZAGHI (1939) propose de calculer séparément les valeurs moyennes des coefficients de perméabilité  $K_m$  et de compressibilité

$$m_{vm} (m_v = \frac{a_v}{1+e}) \quad \text{à l'aide des formules :}$$

$$K_m = \frac{\sum_i h_i}{\sum_i \frac{h_i}{K_{v_i}}} \dots\dots\dots(\text{II-19})$$

$$m_{v_m} = \frac{\sum_i m_{v_i} h_i}{\sum_i h_i} \dots\dots\dots(\text{II-20})$$

Et d'en déduire le coefficient de consolidation  $C_{v_m}$  par la formule

classique :  $C_{v_m} = \frac{K_m}{m_{v_m} \gamma_w} \dots\dots\dots(\text{II-21})$

ABSI (1965) propose par sa part de calculer la valeur du  $C_v$  équivalent

par la formule :  $C_{v_m} = \frac{(\sum_i h_i)^2}{(\sum_i \frac{h_i}{\sqrt{C_{v_i}}})^2} \dots\dots\dots(\text{II-22})$

En pratique, ces formules ne sont valables que dans le cas de couches de sol de caractéristiques voisines.

**II-3-5 Cas des chargements linéaires (charge en fonction du temps) :**

Diverses méthodes ont été proposées pour tenir compte de la vitesse d'application de la charge à la surface du sol, c'est à dire du temps de la construction de l'ouvrage.

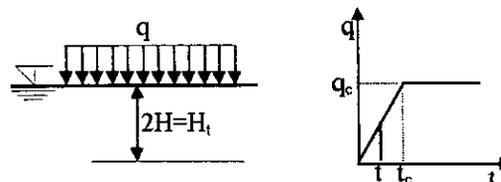


Fig II-9 Loi de chargement linéaire

OLSON (1977) a présenté une solution mathématique pour la consolidation unidimensionnelle (en fonction du temps), voir (fig II-9).

On note :

$q$ : charge en fonction du temps tel que :

$q = f(t_a)$ , avec  $t_a$  : le temps d'application de la charge  $q$  dans le

cas ou :

$$u_i = u_0 \Rightarrow u(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2u_0}{M} \sin \frac{Mz}{H} \exp(-M^2 T_v)$$

avec:

$$M = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

Pour une variation de charge de «dq» appliquée au temps « $t_a$ », la pression instantanée devient, à l'instant  $t$  : la relation de pression «du» à la profondeur «z» peut être s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} du &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2du_i}{M} \sin \frac{Mz}{H} \exp \left[ \frac{-M^2 C_v (t - t_a)}{H^2} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2dq}{M} \sin \frac{Mz}{H} \exp \left[ \frac{-M^2 C_v (t - t_a)}{H^2} \right] \dots \dots \dots (\text{II-23}) \end{aligned}$$

Le degré de consolidation moyen peut être défini comme suit :

$$U_c = \frac{\alpha q_c - \frac{1}{H} \int_0^{H_t} u dz}{q_c} = \frac{\text{Tassement à l'instant (t = 0)}}{\text{Tassement à l'instant (t = \infty)}} \dots \dots \dots (\text{II-24})$$

$\alpha q_c = \frac{t}{t_c} q_c$  : la charge appliquée à l'instant «t»

L'intégration des équations (1) et (2) nous donne :

si :  $T_v \leq T_c$  :

$$u(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2q_c}{M^3 T_c} \sin \frac{Mz}{H} [1 - \exp(-M^2 T_v)] \dots \dots \dots (\text{II-25})$$

$$U_c = \frac{T_v}{T_c} \left[ 1 - \frac{2}{T_v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M^4} [1 - \exp(-M^2 T_v)] \right] \dots \dots \dots (\text{II-26})$$

avec:

$$T_v = \frac{C_v t}{H^2}, T_c = \frac{C_v t_c}{H^2}, M = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

Si :  $T_v \geq T_c$  :

$$u(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2q_c}{M^3 T_c} [\exp(M^2 T_c) - 1] \sin \frac{Mz}{H} \exp(-M^2 T_v) \dots \dots \dots \text{(II-27)}$$

$$U_c = 1 - \frac{2}{T_c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M^4} [\exp(M^2 T_c) - 1] \exp(-M^2 T_v) \dots \dots \dots \text{(II-28)}$$

**Remarque:** Parmi les équations proposées pour tenir compte de la vitesse d'application de la charge ou bien du temps de la construction de l'ouvrage on a

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{q_c}{t_c} = \frac{\partial u}{\partial t} \dots \dots \dots \text{(II-29)}$$

Cette équation à été résolue par SCHIFFMAN (1960) et LAMB (1963) en fonction de deux paramètres adimensionnels de temps :

$$T_v = \frac{C_v t}{H^2}, \text{ et : } T_c = \frac{C_v t_c}{H^2} \text{ (facteur temps final).}$$

### II.4 CONSOLIDATION BIDIMENSIONNELLE PLANE

Les premières applications de la méthode des différences finis au traitement des problèmes de consolidation plane datent de la même époque que pour la consolidation unidimensionnelle. On a d'abord cherché à résoudre l'équation différentielle :

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \dots \dots \dots \text{(II-30)}$$

Qui contrôle la diffusion des surpressions interstitielles dans un sol où les contraintes totales restent constantes au cours de la consolidation.

L'étude de la consolidation bidimensionnelle par différences finis est beaucoup plus rare que celle étudiée dans le cas de consolidation unidimensionnelle, pour essentiellement deux raisons :

- le coût des calculs est beaucoup plus important pour les problèmes bidimensionnels que pour les problèmes unidimensionnels.

- la concurrence de la méthode des éléments finis, dont les premières applications au traitement des problèmes de consolidation datent de 1969, a beaucoup limité le développement des calculs en différences finis.

## II.5 CONCLUSION

IL est important de dire que les travaux de TERZAGHI sont à l'origine de la création de la mécanique des sols moderne, car c'est grâce aux succès remarquables de ses procédés qu'on a pu établir les tassements dans le cas de plusieurs types de sols.

Cependant, il restait beaucoup à faire, vu les restrictions imposées par les différentes hypothèses que TERZAGHI a émit, notamment en ce qui concerne la dimension suivant laquelle il a imposé son tassement.

Pour cela, de nombreuses études ont été consacrées à la consolidation des sols fins, on modifiant tout ou partie des hypothèses de la théorie unidimensionnelle de TERZAGHI, on citera à titre d'exemple :

- Consolidation bi ou tridimensionnelle.
- Sol constitué d'une succession de couche de caractéristiques différentes.
- Chargement progressif et non instantané.
- Calcul en grandes déformations.

Aujourd'hui, le développement des méthodes d'analyse numérique, en différence finis ou en éléments finis ainsi que les éléments infinis, a permis de lever la plupart des hypothèses restrictives de la théorie initiale de TERZAGHI et de modéliser de façon plus précise le comportement au cours du temps des sols fins.

**CHAPITRE III**  
**LA METHODE DES**  
**ELEMENTS FINIS**

## CHAPITRE III LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### III-1 INTRODUCTION

Les techniques de calcul des structures ont connu ces vingt dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries et soutenu par les progrès affectés dans le domaine des ordinateurs. Ainsi la méthode des éléments finis est-elle communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatiale, Génie civil nucléaire, etc...

La méthode des éléments finis est une méthode universelle et puissante applicable pour des structures de formes diverses avec des conditions très variées. Elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques simple à résoudre.

Le système continu est discrétisé par une subdivision du domaine en un grand nombre d'éléments de forme arbitraire (généralement rectangulaire ou triangulaire) liés entre eux par des nœuds.

Pour une structure quelconque, il y a des régions qui demandent une étude plus détaillée, c'est le cas où on peut avoir une grande concentration de contraintes, par exemple autour des ouvertures, et près des charges concentrées, dans ce cas on peut utiliser une subdivision graduelle en éléments, une telle distribution sélective d'éléments est efficace et peut économiser le temps de calcul sans perte de précision.

Il est intéressant de remarquer que la méthode des éléments finis est une technique à caractère pluridisciplinaire car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- La mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, etc...
- L'analyse numérique : méthode d'approximation, résolution des systèmes linéaires, ...
- L'informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance des grands logiciels.

## III-2 HISTORIQUE

Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximations.

Concernant les théorèmes énergétiques de l'élasticité, leur formulation a été effectuée aux siècles derniers grâce aux travaux de NAVIER (1919) et CASTIGLIANO (1878) qui établissent de façon complète les théorèmes de l'énergie. H.CROSS représente en 1932 une méthode rendant possible l'analyse de poutres avec les moyens de calcul de l'époque. Cependant ces techniques ne permettaient pas jusqu'alors la résolution de problèmes de milieux continus rendus possible uniquement par la discrétisation du problème continu à l'aide de méthodes d'approximation adéquates.

Après la deuxième guerre mondiale on assiste, dans l'industrie aéronautique, au développement de méthodes matricielles permettant de traiter des problèmes de structures assez complexes avec les calculatrices de bureaux disponibles. Alors, parmi les contributions les plus importantes, citons celle de LEVY en 1947, et GARVEY E en 1951 pour la méthode des forces.

Dans les années soixante fut utilisé la notion d'énergie par ARGYRIS et KELSY et ils firent appel à des méthodes mathématiques. La méthode est ensuite formulée à partir des considérations énergétiques et variationnelles dans les années 70 (ZIENKIWICZ) d'où, le modèle mathématique des éléments finis.

Dès les années soixante la M.E.F subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- Création d'éléments de haute précision.
- Construction d'une base mathématique de la M.E.F.
- Utilisation de la M.E.F pour la résolution de problèmes non linéaires, non stationnaires.

## III-3 FORMULATION DE LA M.E.F

Le principe de base de la M.E.F consiste à subdiviser la structure en sous-domaines de formes relativement simples appelés «éléments finis ». on va alors définir une approximation de la solution (déplacement et/ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la structure mais pour chacun de ses éléments constitutifs.

Il y a plusieurs sortes de formulations d'élément finis en mécanique des structures.

**1- Formulation contrainte**

Dans laquelle on se donne une approximation soit sous forme d'un champ de contrainte en équilibre ou soit sous forme d'une fonction de contrainte. Elle se base sur la théorie de l'énergie complémentaire.

**2- Formulation mixte**

Dans laquelle on considère le champ de déplacement et de contrainte comme inconnus primaires de problème, d'où le nom mixte.

**3- Formulation déplacement**

Elle a pour principe la stationnarité de l'énergie potentielle ( $\pi$ ) de la structure (elle atteint le minimum)

On a :

$$\pi = 1/2 \int_v (\epsilon)^T (\sigma) dv - \int_v (U)^T (F_v) dv - \int_s (U)^T (F_s) ds \dots\dots\dots \text{(III-1)}$$

Où {U} vecteur déplacement inconnu, dont on propose une approximation.

En posant  $d\pi = 0$  avec la loi de HOOK :

$$\sigma = [D] \{\epsilon\}$$

on a alors :

$$\int_v (\epsilon)^T [D] (\epsilon) dv = \int_v \delta (U)^T (F_v) dv + \int_s \delta (U)^T (F_s) ds \dots\dots\dots \text{(III-2)}$$

La discrétisation en élément finis du domaine (v) et de son contour (s) ramène l'équation de stationnarité de ( $\pi$ ) au système classique suivant :

$$[K] \{U\} = \{F\} \dots\dots\dots \text{(III-3)}$$

ou :

- [K] est la matrice de rigidité
- {U} vecteur champ déplacement

**Remarque :** on considère seulement la formulation déplacement, car c'est le modèle le plus utilisé.

**III-4 DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE**

**III-4-1 Choix de la fonction déplacement**

Comme la formulation choisie est une formulation déplacement, on doit donc imposer un champ de déplacement qui remplit les conditions suivantes :

- Les fonctions choisies doivent être continues au sein de l'élément, ainsi qu'au passage des frontières entre les éléments.
- Les équations forces-déplacements découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement de corps rigide.
- Le nombre de termes indépendants dans le polynôme doit être égale au nombre de composantes des déplacements qui sont à calculer.

**III-4-2 Calcul de la matrice de rigidité**

Pour calculer la matrice de rigidité on suit les étapes suivantes (version déplacement) :

**a- construction des fonctions d'interpolations N :**

Dans la version déplacement, la manière de construire les fonctions d'interpolations suit :

1- Choix de la base polynomiale (interpolation non nodale)

$$\{U\} = \langle P(x, y, z) \rangle \{\alpha\} \dots\dots\dots \text{(III-4)}$$

ou :

- {U} vecteur champ déplacement
- P(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>, z<sub>i</sub>) base polynomiale
- {α} vecteur des variables généralisées

2- La relation entre variable nodale {U<sub>i</sub>} et variable généralisée {α}

$$\{U_i\} = [A] \{\alpha\} \dots\dots\dots \text{(III-5)}$$

ou :

$$[A] = \langle P(x_i, y_i, z_i) \rangle$$

Si l'élément n'est pas dégénéré (volume non nul) alors :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{U_i\} \dots\dots\dots \text{(III-6)}$$

l'approximation nodale sera alors

$$\{U\} = \langle P(x, y, z) \rangle [A]^{-1} \{U_i\} \dots \dots \dots \text{(III-7)}$$

$$\{U\} = [N(x, y, z)] \{U_i\} \dots \dots \dots \text{(III-8)}$$

donc :

$$[N(x, y, z)] = \langle P(x,y,z) \rangle [A]^{-1} \dots \dots \dots \text{(III-9)}$$

**b- Relation déformation-déplacement.**

En raison de l'élasticité du corps, la déformation peut s'écrire sous la forme :

$$\{\epsilon\} = [L] \{U\} \dots \dots \dots \text{(III-10)}$$

- avec :  $\{\epsilon\}$  vecteur déformation
- $[L]$  matrice opérateur différentiel.
- $\{U\}$  vecteur champ déplacements.

On peut écrire ainsi

$$\{\epsilon\} = [L] [N] \{U_i\} \dots \dots \dots \text{(III-11)}$$

$$\{\epsilon\} = [B(x, y, z)] \{U_i\}$$

alors

$$[B(x, y, z)] = [L] [N(x, y, z)] \dots \dots \dots \text{(III-12)}$$

**c- Relation contraintes - déformations**

Pour un matériau isotrope, homogène et en absence de tout champ thermique on a :

$$[\sigma] = [D] \{\epsilon\} \dots \dots \dots \text{(III-13)}$$

avec :

- $[\sigma]$  vecteur contrainte
- $[D]$  matrice d'élasticité (fonction de la matrice seulement)

En injectant : (III-11), (III-13) dans (III-2) on obtient

$$\{F\}^T \{\partial U\} = \int_v \{U\}^T [B]^T [D] [B] dv \{\partial U\} \dots \dots \dots \text{(III-14)}$$

Or les équations d'équilibres sont définies par :

$$\{F\} = [K] \{U\} \dots \dots \dots \text{(III-15)}$$

$$\{F\}^T = \{U\}^T [K] = \{U\}^T \int_v [B]^T [D] [B] dv \dots \dots \dots \text{(III-16)}$$

D'où :

$$[K] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \dots \dots \dots \text{(III-17)}$$

**III-4-3 Propriétés de la matrice de rigidité :**

- La matrice de rigidité [K] est symétrique à cause du théorème de réciprocité, qui est une conséquence de l'invariance de l'énergie de déformation par rapport au chemin suivi.

- Cette matrice est définie positive, ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle.

**III-4-4 Règle d'assemblage :**

L'opération d'assemblage consiste à construire à partir des matrices élémentaires de rigidité [K<sup>e</sup>] et de forces {F<sup>e</sup>}, les matrices globales de rigidité [K] et force {F}. En utilisant l'approche énergétique, on peut définir la méthode d'assemblage.

Si π l'énergie potentielle totale de l'élément (e) :

$$\pi^e = 1/2 \{U^e\}^T [K^e] \{U^e\} - \{U^e\}^T \{F^e\} \dots \dots \dots \text{(III-18)}$$

Alors l'énergie totale de la structure sera la somme des énergies élémentaires

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{\text{éléments}} \pi^e = \sum_{\text{éléments}} \left\{ 1/2 \{U^e\}^T [K^e] \{U^e\} - \{U^e\}^T \{F^e\} \right\} \\ &= 1/2 \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\} \{F\} \dots \dots \dots \text{(III-19)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{\text{éléments}} [K^e] \\ \{F\} &= \sum_{\text{éléments}} \{F^e\} \end{aligned}$$

Ainsi l'équation exprimant la statique de la structure sera :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

**III-5 CONDITIONS DE CONVERGENCE**

Etant donné que nous proposons dès le début de la formulation une approximation de l'inconnu déplacement, la M.E.F reste une méthode approximative.

Sa puissance est dans le fait que nous avons les moyens de réduire selon nos besoins l'erreur, et améliorer ainsi la précision.

La convergence de la solution n'est pas toutefois monotone c'est pourquoi nous rencontrons deux types de convergences : monotone et non monotone

### III-5-1 Convergence monotone

Pour qu'elle soit ainsi, deux critères sont à satisfaire : la complétude et la compatibilité.

#### a- la complétude

complète signifie que les déplacements du corps rigide doivent être effectués par l'élément sans se déformer ni développer des contraintes à l'intérieur.

#### b- La compatibilité

Compatible assure la continuité de la fonction dans l'élément et entre éléments. C'est à dire une continuité des déplacements aux seins des éléments et aux frontières de ces derniers. Physiquement la compatibilité s'explique par le fait qu'aucun vide n'apparaît entre les éléments lorsque l'assemblage est chargé.

### III-5-2 Convergence non monotone

Certains éléments ne satisfont pas toutes les conditions de complétude comme condition essentielle, mais on la remplaçant par un autre critère de complétude sur un groupe d'élément. Le teste de complétude collective est appelé « Patch-test ».

On constate que les éléments compatibles et incompatibles qui satisfont se teste convergent.

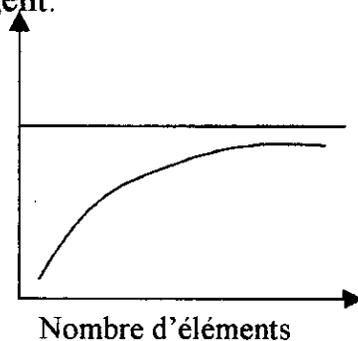


Fig III-1 convergence monotone

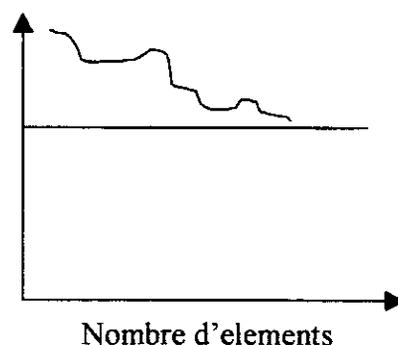


Fig III-2 convergence non monotone

### III-6 ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES

Le système continu est discrétisé par une subdivision du domaine en un grand nombre d'éléments de formes arbitraires, cela nous conduit à des éléments

de formes irrégulières, donc nous avons recours à d'autres éléments qui peuvent mieux décrire le domaine, ces éléments sont de trois types.

### 1- *Eléments isoparamétriques*

Un élément est dit isoparamétrique si les fonctions de transformation géométrique (fonctions de formes) sont identiques aux fonctions d'interpolations. Ceci implique que les nœuds géométriques soient confondus avec les nœuds d'interpolations.

### 2- *Eléments super-paramétriques*

Un élément est dit super-paramétrique si les fonctions de transformations géométriques sont d'ordre supérieur aux fonctions d'interpolations (déplacements).

### 3- *Eléments sub-paramétriques*

Un élément est dit sub-paramétrique si les fonctions de forme sont d'ordre inférieur aux fonctions de déplacement.

## III-6-1 Avantages de l'élément isoparamétrique

- diversité de la géométrie des éléments
- grande simplification des calculs
- facilité de cotés courbes

## III-6-2 Eléments isoparamétriques quadrilatéral à huit d.d.l

Les fonctions de déplacement sont données par :

$$U(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$V(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

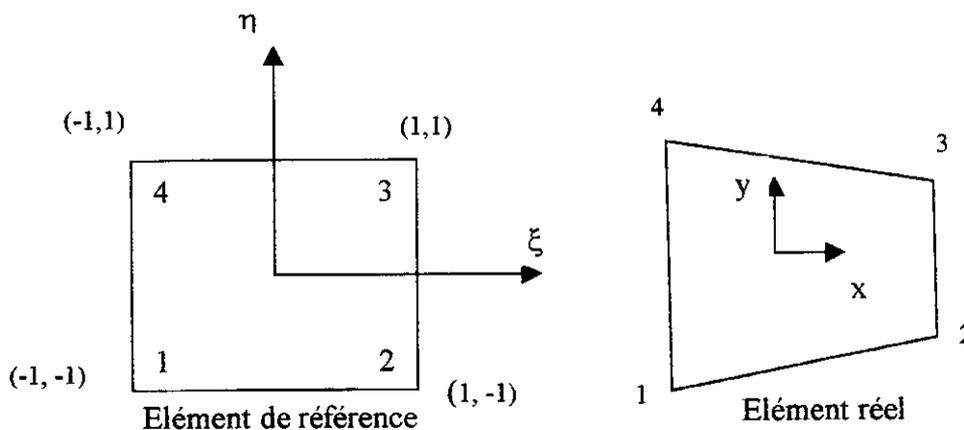


Fig III-3 Elément isoparamétrique quadrilatérale

Les déplacements internes  $\{U\}$  en fonction des déplacements nodaux  $\{U_i\}$

$$U = \sum_1^4 N_i(x,y)U_i = [N_1 N_2 N_3 N_4] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$$V = \sum_1^4 N_i(x,y)U_i = [N_1 N_2 N_3 N_4] \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

Les fonctions de formes sont données par :

$$N_1(\xi,\eta) = 1/4 (1-\xi) (1-\eta)$$

$$N_2(\xi,\eta) = 1/4 (1+\xi) (1-\eta)$$

$$N_3(\xi,\eta) = 1/4 (1+\xi) (1+\eta)$$

$$N_4(\xi,\eta) = 1/4 (1-\xi) (1+\eta)$$

La transformation du système de coordonnées se fait comme suit :

$$U = \sum_1^4 N_i(\xi,\eta)U_i$$

$$V = \sum_1^4 N_i(\xi,\eta)V_i$$

avec :  $N_i(x,y) = N_i(\xi,\eta)$

La fonction  $N_i$  prend la valeur (1) au point (i) et (0) ailleurs.

En utilisant le principe des travaux virtuels, on obtient la matrice de rigidité :

$$[K] = \iint [B]^T [D] [B] d\Omega$$

La matrice  $[D]$  est la matrice des rigidités physiques

$[B]$  est la matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux pour un problème à symétrie axiale on a :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ U/x \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ N_i/x & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\varepsilon\} = [B]\{U_i\}$$

puisque  $N_i$  est définie en fonction  $(\xi, \eta)$  on doit changer les dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} \text{ par } \frac{\partial}{\partial \xi} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \eta}$$

on obtient alors :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Avec [J] la matrice de JACOBI (2\*2)

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{Bmatrix}$$

$$[J] = 1/4 \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots \text{(III-20)}$$

La matrice de rigidité [K] devint alors :

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \text{de}[J] d\xi d\eta \dots\dots\dots \text{(III-21)}$$

Pour effectuer cette intégrale on utilise l'intégrale numérique.

### III-7 CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires sont classées en deux catégories.

### III-7-1 Méthodes directes :

Elles conduisent à la solution après un nombre d'opérations connu donc un temps de calcul bien déterminé : élimination de GAUSS

Elle se formule en deux étapes :

**a-Triangularisation** : Le système d'équations  $[K]\{U\} = \{F\}$  sera transformé pour aboutir à un autre système de type  $[S]\{U\} = \{F'\}$  avec la matrice  $[S]$  triangulaire supérieure.

La triangularisation consiste à éliminer successivement les inconnus  $U_s (s=1, \dots, n)$  dans les  $s+1$  à  $n$  équations, ceci en exprimant  $U_s$  en fonction de  $U_{s+1} \dots U_n$  et  $F_s$  en utilisant l'équation  $s$ , puis à reporter l'expression de  $U_s$  trouvée dans les  $s+1$  à  $n$  équations restantes, ainsi  $U_s$  n'apparaîtra plus dans ces équations, et on aura donc des zéros dans la colonne  $s$  sous la diagonale.

Les pivots successifs de  $[K]$  transformée ne risque pas d'être nuls si  $[K]$  est bien conditionnée.

**b- Résolution des systèmes triangulaire supérieure** : La résolution se fait en remontant : à partir de la dernière équation donnant  $U_n$  on calcul alors  $U_{n-1} \dots U_1$ .

### III-7-2 Méthode indirectes (itératives)

Elles ont des algorithmes plus simples et demandent moins d'espace en mémoire, mais il est pratiquement impossible de déterminer le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir une précision donnée, exemple : GAUSS-SEIDEL.

A partir d'un vecteur solution de départ et un critère de convergence, la résolution se fait par itération successive dans  $[K]\{U\} = \{F\}$ , la convergence dépend du choix du vecteur de départ et du conditionnement de  $[K]$ . En plus pour accélérer la convergence il existe des techniques adaptées (relaxation).

**CHAPITRE IV**  
**LA METHODE DES**  
**ELEMENTS INFINIS**

## CHAPITRE IV ELEMENTS INFINIS

### IV-1 INTRODUCTION

Dans la modélisation de n'importe quel problème d'interaction sol-structures, le milieu est représenté comme une région soit infinie soit semi-infinie

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour ce type de problème consiste à faire un maillage qui donne une infinité d'éléments finis. Le problème n'est donc pas adapté à une résolution numérique.

Pour surmonter ces difficultés, liés à la présence des domaines infinis il serait plus adéquat de considérer des éléments infinis qui à été initialement introduit par BETTESS. Ces éléments seront couplés à des éléments finis qui modélisent d'une façon très satisfaisante le comportement à l'infini du domaine étudié.

### IV-2 HISTORIQUE

A cause des problèmes trouvés dans la modélisation des domaines infinis ou semi-infinis par la méthode des éléments finis, plusieurs chercheurs ont commencé dès 1973 à proposer des formulations sur les éléments infinis.

UNGLESS et ANDERSON ont construit le premier élément infini, en se basant sur l'utilisation d'une fonction de décroissance de forme  $(1/1+r)$  dans la direction radiale.

Le premier travail publié sur ce type d'éléments était celui de ZIENKIEWICZ et BETTESS en 1975. Dans cette formulation, le domaine de l'élément est étendu jusqu'à l'infini. Les fonctions de forme sont multipliées par des fonctions décroissantes et qui sont choisies suivant le type de problème étudié.

En 1981, MEDINA utilise un terme de la forme  $(1/1+r)$  pour la résolution des problèmes d'axisymetrie. Dans la même année BEER et MEEK ont utilisé une transformation incluant un terme de la forme  $(1/1+\xi)$  et qui transforme le domaine  $\xi$  en un domaine  $x$  infini.

En 1983, BANDO a utilisé une nouvelle formulation des éléments infinis pour des excavations. Cette formulation est basée sur la transformation de l'élément infini à un domaine fini

En 1984, MARQUES et OWEN ont publié plusieurs articles sur ces éléments.

En 1984, RAJAPALSKA et KARASUDHI ont publié un article sur l'Utilisation des éléments infinis élastoplastiques pour les semi-infinis multicouches.

Jusqu'à présent des chercheurs et des publications se poursuivent afin de trouver des formulations qui solutionnent le mieux possible un tel problème.

### IV-3 FORMULATION DES ELEMENTS INFINIS

Dans la formulation des éléments finis, deux types de transformations sont utilisés : la première pour l'interpolation de la géométrie (des coordonnées) et la deuxième pour l'interpolation des déplacements.

Ces deux types de transformations sont encore utilisés pour la formulation des éléments infinis. Il existe deux approches pour la formulation des éléments infinis :

- Approche directe
- Approche inverse

#### IV-3-1 Approche directe

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est étendu à l'infini dans la direction considérée.

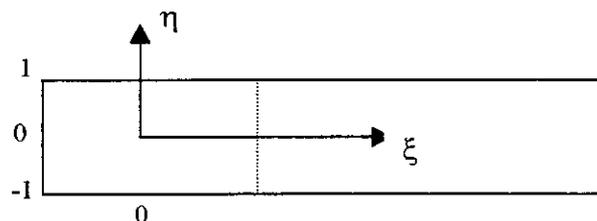


Fig IV-1 Géométrie de l'élément infini

Les variables inconnues sont exprimées en terme de fonctions de formes descendantes “*descent-shap functions*” et qui tendent vers zéro à l’infini. Les fonctions de forme de l’élément infini sont données par l’expression :

$$M_i(\xi, \eta) = F_i(\xi, \eta) N_i(\xi, \eta)$$

Avec:

$N_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de forme standard.

$F_i(\xi, \eta)$  : sont des fonctions décroissantes.

$M_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de forme de l’élément infini.

Le rôle de la fonction décroissante  $F_i(\xi, \eta)$  est d’assurer que le comportement de l’élément soit une bonne réflexion du sens physique du problème.

La fonction décroissante  $F_i(\xi, \eta)$  doit être égale à l’unité en chaque nœud.

$$F_i(\xi_i, \eta_i) = 1$$

Les dérivées des fonctions de forme de l’élément infini peuvent être facilement obtenues en utilisant la règle de la dérivation en chaîne :

$$\begin{cases} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} F_i + N_i \frac{\partial F_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} F_i \end{cases}$$

Généralement deux types de fonctions décroissantes  $F_i(\xi_i, \eta_i)$  sont utilisés

**a- Fonctions exponentielles décroissantes ( $\exp(-x)$ ) :**

Elle a l’avantage de tendre vers zéro à l’infini plus rapidement qu’un autre polynôme.

**b- Fractions rationnelles décroissantes.**

**Remarque:**

L’inconvénient principal de l’approche directe est qu’elle nécessite l’utilisation d’une intégration numérique sur un domaine semi-infini.

**IV-2-2 Approche inverse**

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est maintenu. Des fonctions de forme ascendantes sont utilisées pour la transformation géométrique et qui sont singulières à l'extrémité du plan  $\xi = 1$ .

Les valeurs des coordonnées physiques tendent vers l'infini à l'extrémité du plan naturel. Ainsi les éléments infinis représentent un milieu infini.

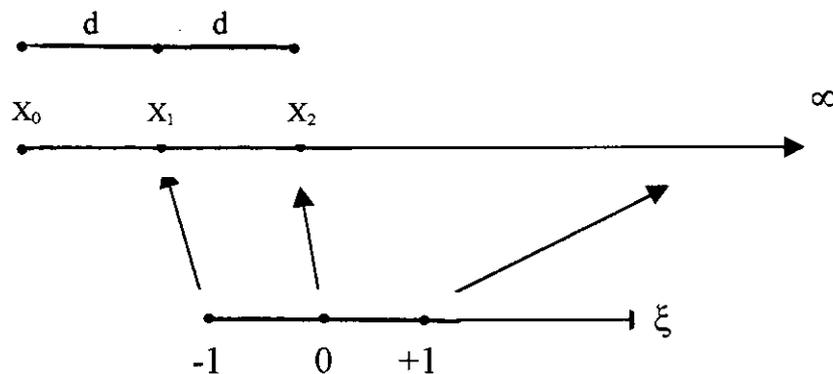
L'avantage principal de cette approche est qu'elle garde les points d'intégration originaux de GAUSS-LEGENDRE.

**IV-3-2-1 Construction de la fonction de transformation :**

*a- Cas unidimensionnel :*

Considérons la transformation unidimensionnelle, dans la quelle le point  $x_1$  est étendu à  $x_3$  ( $x_3$  tend vers l'infini) à travers un point  $x_2$ .  
Considérons la fonction suivante :

$$X = N_1 X_1 + N_2 X_2 = \left( \frac{-2\xi}{1-\xi} \right) X_1 + \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) X_2$$



**Fig IV-2 Elément infini unidimensionnel.**

dans cette formulation, on peut remarquer :

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\Rightarrow X = X_2 \\ \xi = -1 &\Rightarrow X = X_1 \\ \xi = 1 &\Rightarrow X = \infty \end{aligned}$$

De plus on a :

$$N_1 + N_2 = \sum_{i=1}^2 N_i = 1 \dots\dots\dots(\text{IV-1})$$

En résolvant l'équation (IV-1) en  $\xi$ , on trouve :

$$\xi = \frac{X - X_2}{X - 2X_1 + X_2} = 1 - \frac{2(X_2 - X_1)}{X - 2X_1 + X_2} \dots\dots\dots(\text{IV-2})$$

Avec une valeur :  $X_2 = 2X_1$ , l'équation (IV-2) devient:

$$\xi = 1 - \frac{2X_1}{X} \dots\dots\dots(\text{IV-3})$$

On a obtenu donc une transformation entre un domaine infini X et un domaine fini  $\xi$ .

La généralisation de cette interpolation pour n'importe quelle ligne droite dans l'espace (X, Y, Z) nous donne :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^2 N_i X_i \\ Y = \sum_{i=1}^2 N_i Y_i \\ Z = \sum_{i=1}^2 N_i Z_i \end{cases} \dots\dots\dots(\text{IV-4})$$

avec:

$N_i$  sont les transformations infinies à une dimension.

**b- Cas bidimensionnel :**

La généralisation de cette formulation pour le cas 2D se fait par le produit des transformations infinies à une dimension avec des fonctions de forme standard en  $\eta$  (direction finie).

Par conséquent les fonctions de forme sont données par :

$$M_i(\xi, \eta) = N_i(\xi) N_i(\eta)$$

Avec:

$N_i(\xi)$  : transformation infinie à une dimension.

$N_i(\eta)$  : fonction de forme standard en  $\eta$ .

$M_i(\xi, \eta)$ : fonction de forme de l'élément infini.

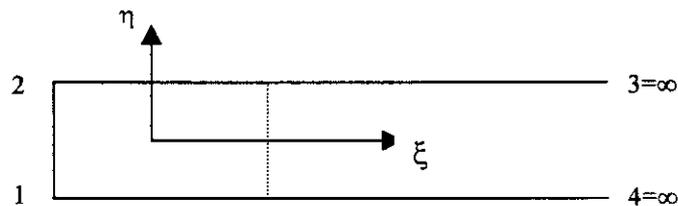
**b-1 Eléments infinis dans le sens X :**

La fonction de transformation pour le cas bidimensionnel suivant l'axe des X s'écrit sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^4 M_{ix}(\xi, \eta) X_i \dots \dots \dots (IV-5)$$

avec:

$$\sum_{i=1}^4 M_{ix}(\xi, \eta) = 1 \dots \dots \dots (IV-6)$$



**Fig IV-3 Elément infini suivant x**

Les fonctions de forme de l'élément infini dans le sens X pouvant être données par :

$$M_{1x} = \frac{-\xi(1-\eta)}{(1-\xi)} \dots \dots \dots (IV-7)$$

$$M_{2x} = \frac{-\xi(1+\eta)}{(1-\xi)} \dots \dots \dots (IV-8)$$

**b-2 Eléments infinis dans le sens Y**

La fonction de transformation pour le cas bidimensionnel suivant l'axe des Y s'écrit sous la forme :

$$Y = \sum_{i=1}^4 M_{iy}(\xi, \eta) Y_i \dots\dots\dots(IV-9)$$

avec:

$$\sum_{i=1}^4 M_{iy}(\xi, \eta) = 1 \dots\dots\dots(IV-10)$$

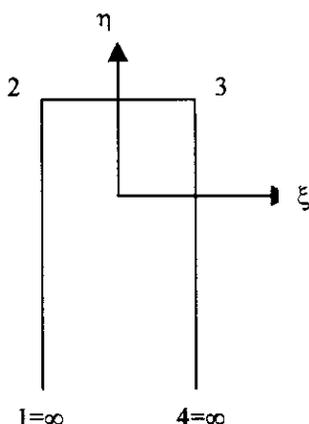


Fig IV-4 Elément infini suivant Y

Les fonctions de forme de l'élément infini dans le sens Y peuvent être données par :

$$M_{1y} = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{2(1 + \eta)} \dots\dots\dots(IV-11)$$

$$M_{2y} = \frac{(1 + \xi)\eta}{(1 + \eta)} \dots\dots\dots(IV-12)$$

⋮

**b-3 Eléments infinis dans les directions X et Y**

Dans ce cas les fonctions de forme de l'élément infini peuvent être données par :

$$M_{1xy} = \frac{-2\xi(1 - \eta)}{(1 - \xi)(1 + \eta)} \dots\dots\dots(IV-13)$$

$$M_{2xy} = \frac{-4\eta\xi}{(1-\xi)(1+\eta)} \dots\dots\dots(IV-14)$$

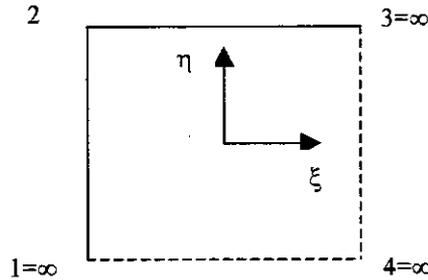


Fig IV-5 Élément infini dans les deux directions

**IV-3 CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE L'ELEMENT INFINI :**

La transformation géométrique qui permet le passage des coordonnées locales aux coordonnées globales. S'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) X_i \\ Y = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) Y_i \end{cases} \dots\dots\dots (VI-15)$$

avec:

$M_i(\xi, \eta)$ : sont les fonctions de transformations de l'élément infini donné précédemment.

L'interpolation du champ de déplacement des éléments infinis est donnée en termes des déplacements nodaux des nœuds situés à une distance finie.

En supposant que les déplacements tendent vers zéro à l'infini, l'élément infini peut être considéré comme un élément quadrilatère à 4 nœuds dont le champ de déplacement, sur la face ( $\xi = +1$ ) est nul.

Donc, les fonctions d'interpolation de l'élément infini sont obtenues directement à partir des celles correspondantes aux même nœuds de l'élément fini.

Le champ de déplacement en tout point de l'élément est donné par :

$$\begin{cases} U = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi, \eta) U_i \\ V = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi, \eta) V_i \end{cases} \dots\dots\dots(\text{VI-16})$$

avec:

$N_i(\xi, \eta)$ : fonction de forme standard de l'élément fini

La matrice de rigidité de l'élément infini est donnée par :

$$[K^e] = \int [B]^T [D][B] dV \dots\dots\dots(\text{VI-17})$$

Ou encore :

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] J |d\xi d\eta \dots\dots\dots(\text{VI-18})$$

avec

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(\text{VI-19})$$

mais pour un élément infini, les fonctions de transformation  $M_i(\xi, \eta)$  sont différentes des fonctions d'interpolation  $N_i(\xi, \eta)$  :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) X_i \\ Y = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) Y_i \end{cases}$$

D'où, la matrice Jacobienne [J] pour un élément infini est donnée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^4 \frac{\partial M_i X_i}{\partial \xi} & \sum_1^4 \frac{\partial M_i Y_i}{\partial \xi} \\ \sum_1^4 \frac{\partial M_i X_i}{\partial \eta} & \sum_1^4 \frac{\partial M_i y_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (VI-19)$$

**CHAPITRE V**  
**ETUDE NUMERIQUE**  
**DE LA CONSOLIDATION**

## CHAPITRE V

### SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONSOLIDATION

#### V-1 INTRODUCTION

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique, ...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Ces équations présentent souvent des difficultés majeures concernant la résolution. C'est pourquoi, plusieurs chercheurs ont tenté de résoudre ce problème par l'exploitation des méthodes dites numériques.

La méthode des éléments finis est l'une de ces méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur, c'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes rencontrés souvent dans la pratique par l'ingénieur.

#### IV-2 FORMULATION DE LA CONSOLIDATION EN UTILISANT LA METHODE DES ELEMENTS FINIS (MEF) :

L'élaboration de la formulation par la méthode des éléments finis (MEF) repose essentiellement sur deux types d'équations. En effet, les équations d'équilibre, et de continuité représentent les fondements de base de ce procédé. Il est important de développer ces équations par un procédé énergétique (ex : théorème des travaux virtuels).

##### *a- Equation de continuité :*

La théorie de la consolidation fait appel entre autres aux hypothèses suivantes :

- 1- L'écoulement de l'eau interstitielle obéit à la loi de *DARCY*, les coefficients de perméabilité sont supposés constants dans le temps.
- 2- L'eau et les éléments constituant la phase solide sont incompressibles c.à.d une compression correspond à une expulsion d'eau.

Les deux hypothèses ci-dessus, traduisent l'équation de continuité qui s'écrit :

$$divq = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \dots\dots\dots(V-1)$$

divq : variation du debit

$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$  : diminution de volume de l'élément solide.

$$divq = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \dots\dots\dots(V-2)$$

$$q_x = -K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} ; q_y = -K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} ; q_z = -K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(V-3)$$

avec :

$\phi$  : charge hydraulique

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial x}(-K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(-K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}) \dots\dots(V-4)$$

Cette équation doit être associée à des équations d'équilibre et des lois de comportement.

**b- Contraintes effectives dans un sol saturé :**

Il existe deux phases dans un milieu poreux entièrement saturé :

- 1- Une phase solide fermée de grains.
- 2- Une phase liquide remplissant tous les interstices.

Il est à remarquer que seules les charges appliquées directement à la phase solide provoquent des effets mécaniques dans le milieu poreux. D'où la nécessité de décomposer les contraintes totales  $\sigma_{ij}$  en :

$\sigma'_{ij}$  : contraintes effectives,  
 u : pression dans le liquide.

Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma'_{xx} + u \\ \sigma_{yy} &= \sigma'_{yy} + u \\ \sigma_{zz} &= \sigma'_{zz} + u \dots\dots\dots(V-5) \\ \sigma_{yz} &= \sigma'_{yz} \\ \sigma_{xy} &= \sigma'_{xy} \\ \sigma_{xz} &= \sigma'_{xz} \end{aligned}$$

**c- Equations d'équilibre dans un massif saturé :**

La masse volumique d'un massif saturé 'ρ', s'écrit :

$$\rho = \frac{V_s}{V} \rho_s + \frac{V_l}{V} \rho_l \dots\dots\dots(V-6)$$

$V_s$  : volume solide.

$V_l$  : volume liquide.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + 0 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + 0 &= 0 \dots\dots\dots(V-7) \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g &= 0 \end{aligned}$$

par ailleurs on a :

$$\varphi = z + \frac{u}{\rho_l g} = z + \frac{u}{\gamma_l} \Rightarrow u = \gamma_l(\varphi - z) \dots\dots\dots(V-8)$$

l'équilibre en contraintes effectives s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial z} + 0 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial z} + 0 &= 0 \dots\dots\dots(V-9) \\ \frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} + \gamma_l \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (\rho g - \rho_l g) &= 0 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho g &= \gamma \\ \rho_l g &= \gamma_l \end{aligned}$$

$(\gamma - \gamma_l) = \gamma_a$  : poids apparent à la phase solide souvent négligé dans les équations d'équilibre.

Sous forme matricielle on trouve :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} + \gamma_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \varphi + \{f\} = 0 \quad \dots\dots(V-10)$$

avec :  $\{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_a \end{Bmatrix}$

$$[L]^T \{\sigma'\} + \gamma_1 \{\nabla\} \varphi + \{f\} = \{0\}$$

$$\{\sigma'\} = [D]\{\varepsilon\}$$

[D] : matrice de comportement.

**d- Formulation par la méthode des éléments finis :**

Le principe de base sur lequel la MEF est basée, est l'interpolation des inconnus du problème traité.

Soit :

$$\{U\} = \{N\} \left\{ \hat{U} \right\} : \text{déplacement}$$

$$\gamma = \left\{ \dot{N} \right\} \left\{ \hat{\varphi} \right\} : \text{gradient fluide.}$$

En utilisant la formulation variationnelle du problème, l'équilibre s'obtient en posant :  $\delta\pi = 0$

$$\delta\pi = \iiint_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma'\} dv - \iiint_V \delta\{U\}^T (\gamma_1 \{\nabla\} \varphi + \{f\}) dv - \iint_S \delta\{U\}^T \{f\} ds = 0 \quad \dots\dots(V-11)$$

Avec :

$$\{\nabla\}^T = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_a \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (V-12)$$

Par ailleurs on a :

$$\delta\{U\} = [N]\{\delta\hat{U}\}, \{\epsilon\} = [L]\{U\} = [L][N]\{\hat{U}\} = [B]\{\hat{U}\}$$

$$\{\delta\epsilon\} = [B]\{\delta\hat{U}\}, \{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

$$\{\nabla\}\{\varphi\} = \{\nabla\}(\{N^*\}\{\hat{\varphi}\}) = (\{\nabla\}\{N^*\})\{\hat{\varphi}\} = [B_\varphi]\{\hat{\varphi}\}$$

$$[B_\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^*}{\partial x} & \frac{\partial N_2^*}{\partial x} & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial y} & \frac{\partial N_2^*}{\partial y} & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial z} & \frac{\partial N_2^*}{\partial z} & \dots & \dots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (V-13)$$

l'expression de  $\delta\pi = 0$ , devient :

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \iiint_v \{\delta\hat{U}\}^T [B]^T [D][B]\{\hat{U}\} dv - \iiint_v \{\delta\hat{U}\}^T \{N\}^T \gamma_a [B_\varphi]\{\hat{\varphi}\} dv - \iiint_v \{\delta\hat{U}\}^T [N]^T \{f\} dv \\ &- \iint_s \{\delta\hat{U}\}^T [N]^T \{f\} ds = 0 \end{aligned}$$

Si on prend :  $\gamma_a = 1$ , alors on a :

$$[K]\{\hat{U}\} + [C]\{\hat{\varphi}\} = \{\hat{R}\} \dots\dots\dots (V-14)$$

avec :

$$[K] = \iiint_v [B]^T [D][B] dv \quad \text{: Matrice de rigidité}$$

$$[C] = -\iiint_v [N]^T [B_\varphi] dv \quad \text{Matrice de couplage}$$

$$[\hat{R}] = \iiint_v [N]^T \{f\} dv + \iint_s [N]^T \{f\} ds \quad \text{: Vecteur forces totales.}$$

Pour compléter la formulation du problème, des relations analogues sont dérivées à partir de l'équation de continuité en utilisant la méthode de GALERKINE, on en trouve dans le cas ou  $(N = \dot{N})$  :

$$[K_p] \left\{ \hat{\varphi} \right\} = [C]^T \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \dots\dots\dots (V-15)$$

avec:

$$[K_p] = \iiint_v [B_\varphi]^T [K] [B_\varphi] dv : \text{matrice de rigidité de la phase fluide.}$$

Les équations (V-14) et (V-15) représentent les équations générales de la consolidation leur solution est très compliquée mais contribue d'une manière substantielle quant à la reproduction par modélisation numérique du phénomène réel de la consolidation.

***e- Intégration numérique des équations d'équilibre régissent la consolidation***

$$[K] \left\{ \hat{U} \right\} + [C] \left\{ \hat{\varphi} \right\} = \left\{ \hat{R} \right\} \dots\dots\dots (V-16)$$

$$[C]^T \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} = [K_p] \left\{ \hat{\varphi} \right\} \dots\dots\dots (V-17)$$

en différence finie la dérivée première d'une fonction peut être approximée par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_{t+\Delta t} - \varphi_t}{\Delta t} \Rightarrow \hat{\varphi} = \theta \varphi_{t+\Delta t} - (\theta - 1) \varphi_t \dots\dots\dots (V-18)$$

d'où :

$$\hat{\varphi} = \theta \varphi_{t+\Delta t} + (\theta - 1) \varphi_t$$

l'équation (V-16) devient (sous forme incrémentale )

$$\theta K \hat{U}_1 + \theta C \hat{\varphi}_1 = (\theta - 1) K U_0 + (\theta - 1) C \hat{\varphi}_0 + \hat{R} \dots\dots\dots (V-19)$$

l'équation (V-17) devient (sous forme incrémentale) :

$$[K_p] \left\{ \hat{\varphi} \right\} = \theta K_p \hat{\varphi}_1 - (\theta - 1) K_p \hat{\varphi}_0 \dots\dots\dots (V-20)$$

$$\theta C^T \hat{U}_1 - \theta^2 \Delta t K_p \hat{\varphi}_1 = \theta C^T \hat{U}_0 - \theta(\theta - 1) \Delta t K_p \hat{\varphi}_0 \dots\dots\dots (V-21)$$

Pour le schéma de *CRANK NICOLSON*, les équations (V-20) et (V-21) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} K & C \\ C^T & \frac{-\Delta t}{2} K_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{\varphi}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & -C \\ C^T & \frac{\Delta t}{2} K_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{U}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2R \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (V-22)$$

# CHAPITRE VI

# APPLIQUATIONS

## CHAPITRE VI APPLICATIONS

### VI-1 FICHER DE DONNEES

Comme tout problème numérique, celui-ci a besoin de certains nombres de données, ces derniers sont organisés dans (4) blocs.

Le bloc (1) renferme les données sur le maillage (nombre d'élément, nombre de nœuds, la demi-bande de la matrice, etc...) ainsi que des données sur le chargement.

Le bloc (2) contient les caractéristiques du sol c'est à dire la perméabilité, le module de déformation ainsi que le coefficient de POISSAN.

Le bloc (3) est réservé pour les données géométriques c'est à dire les positions horizontales et verticales des nœuds. En fin le dernier bloc est destiné à fixer les degrés de liberté des noeuds

### VI-2 ETUDE DE LA CONSOLIDATION UNIDIMENTIONNELLE

#### VI-2-1 Application (1)

##### *a- données du calcul*

cette première application est destinée à faire l'étude d'un sol monocouche de (14) mètres de profondeur soumis à deux types de chargement qui sont :

- le chargement variable
- le chargement constant

les données caractéristiques du sol sont énumères dans le tableau ci-dessous [9]

m				Mpa	M/j		
h	e	$c_s$	$c_c$	E	$k_y$	$\nu$	$S_r$
14	1.27	0.05	0.85	10	77.76 E-5	0	1

La loi de chargement pour le cas variable est représentée sur la (Fig VI-1), Ainsi le chargement constant est de (60 kpa) (Fig VI-2). La surcharge en question est uniformément répartie sur (3m).

Pour comparer les résultats théoriques avec celles de la méthode des éléments finis on a choisi les temps (40) et (100) jours, ainsi pour le cas du couplage on a choisi les même temps pour le cas variable et (40) jours pour le cas constant du chargement.

#### *a- Interprétation des résultats :*

Dans un premier temps, nous avons essayé de définir un modèle calé, pour cela nous avons fait une étude de la convergence avec deux maillages différents, le premier est de (21) éléments de (2m\*2m) et l'autre est de (27)éléments de (1.5m\*1.5m) (annexe), la comparaison des résultats obtenues par ces (2) maillages (Fig VI-3, Fig VI-4, Fig VI-5, Fig VI-6) nous a permet de fixer celle de (27) éléments qui est le plus proche de la théorie de TERZAGHI [6] qui est la référence.

Les pressions et les tassements temporaires tels que représentés par les (Fig VI-7, Fig VI-8, Fig VI-9, Fig VI-10) montrent une comparaison entre les résultats obtenus par la M.E.F (modèle calé ) et ceux obtenues par la formule classique de TERZAGHI [6]. Ces résultats sont plus précis dans le cas d'un chargement variable (taux d'erreur de (0.4%) pour les valeurs max des pressions) que dans le cas d'un chargement constant (un taux d'erreur de (2.5%) pour la valeur max des pressions).

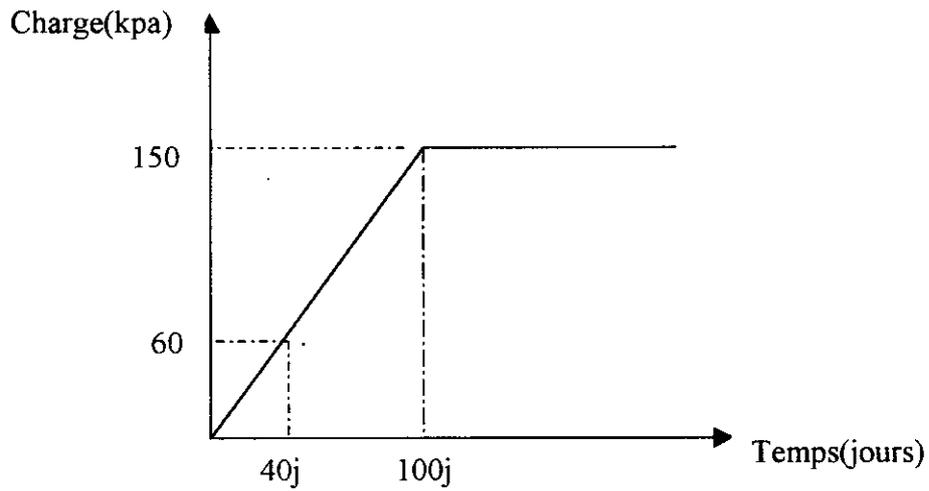
Il faut noter que les résultats théoriques (TERZAGHI )sont calculés par l'utilisation d'un petit programme fortran qui calcul la somme de la série de fourier établie par TERZAGHI [6]

Ainsi, les fig (VI-11, VI-12) représentent aussi une comparaison entre les pressions et les tassements obtenus par la formule de TERZAGHI (obtenues par un traitement en série de fourier )et ceux obtenues par le couplage.

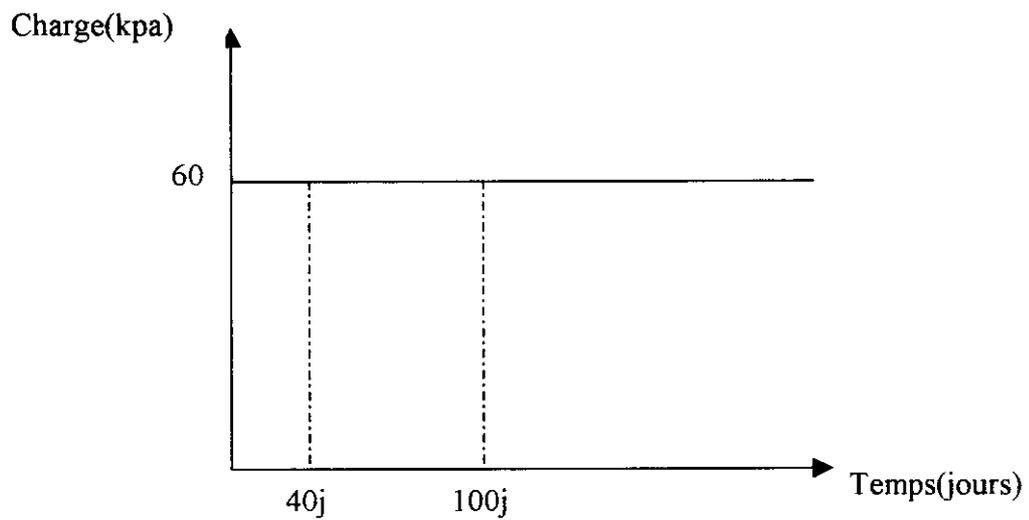
Ces résultats sont intéressants, car à l'aide d'un maillage de (50) ddl par rapport à celui des éléments finis qui est de (90) ddl, on a trouvé pour la valeur max des tassements (surface du sol) un taux d'erreur à (100) jours de (5.6%) ainsi pour la pression max (substram) on a trouvé un taux à (100) jours de (11.36%)

En fin, les deux figures (Fig VI-13, Fig VI-14) représentent la variation des pressions et de tassements dans le cas d'un chargement constant en fonction de la profondeur. Cette variation est déterminée par deux méthodes, la méthode analytique (TERZAGHI ) et l'autre c'est le couplage qui nous a permis de trouver des résultats avec un taux d'erreur pour la pression max à (40) jours de

(16.8%), ainsi pour les tassements max à (40) jours nous avons trouvé un taux d'erreur de 2.3%.



**Fig VI-1 Loi du chargement variable**



**Fig VI-2 Loi de chargement constant**

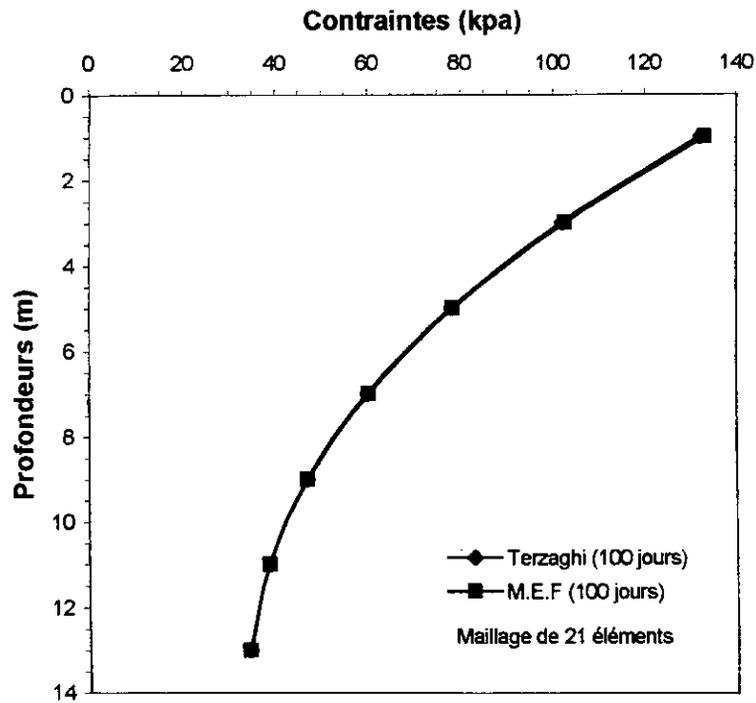


Fig VI-3 Contraintes effectives sous charge variable(drainage simple)

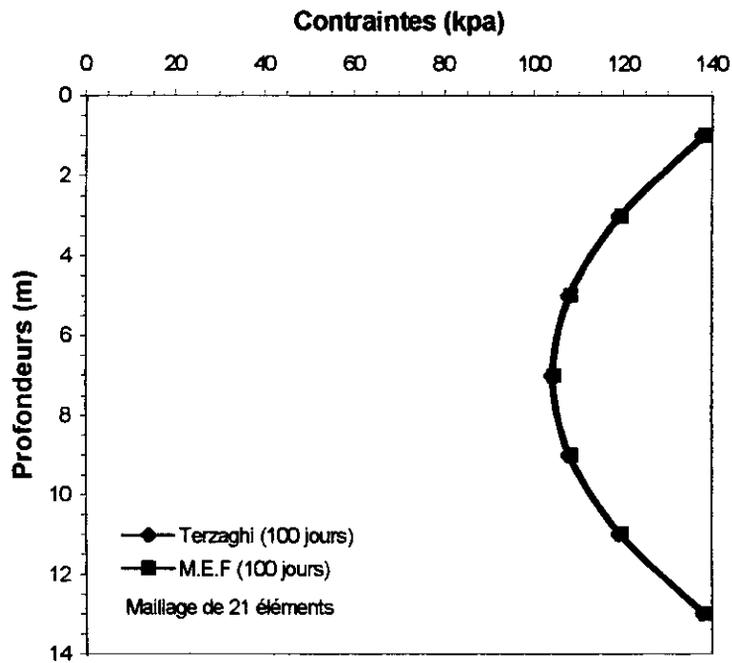


Fig VI-4 Contraintes effectives sous charge variable(drainage double)

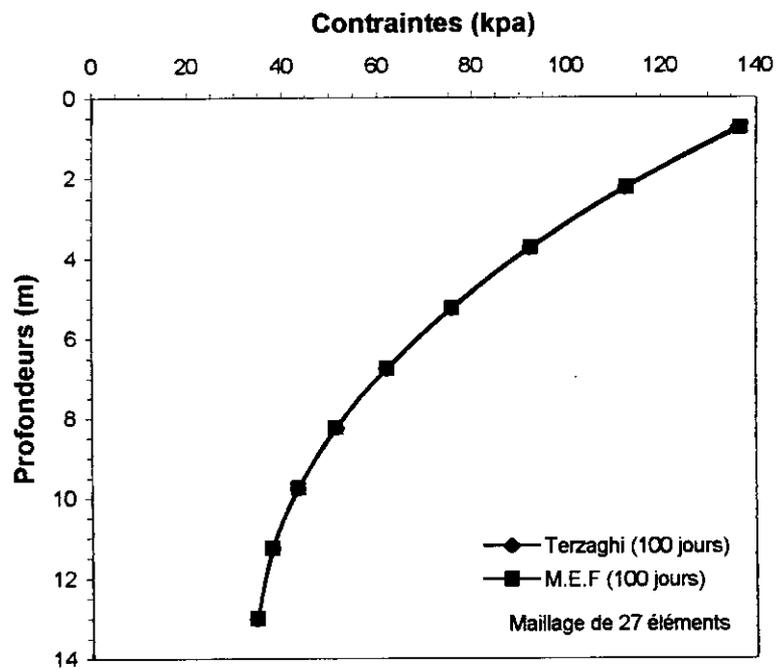


Fig VI-5 Contraintes effectives sous charge variable(drainage simple)

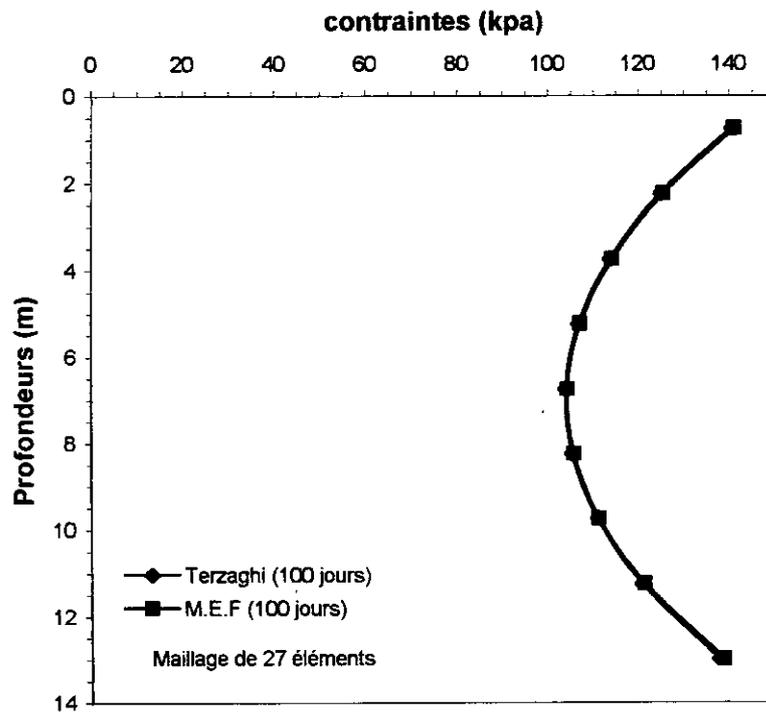
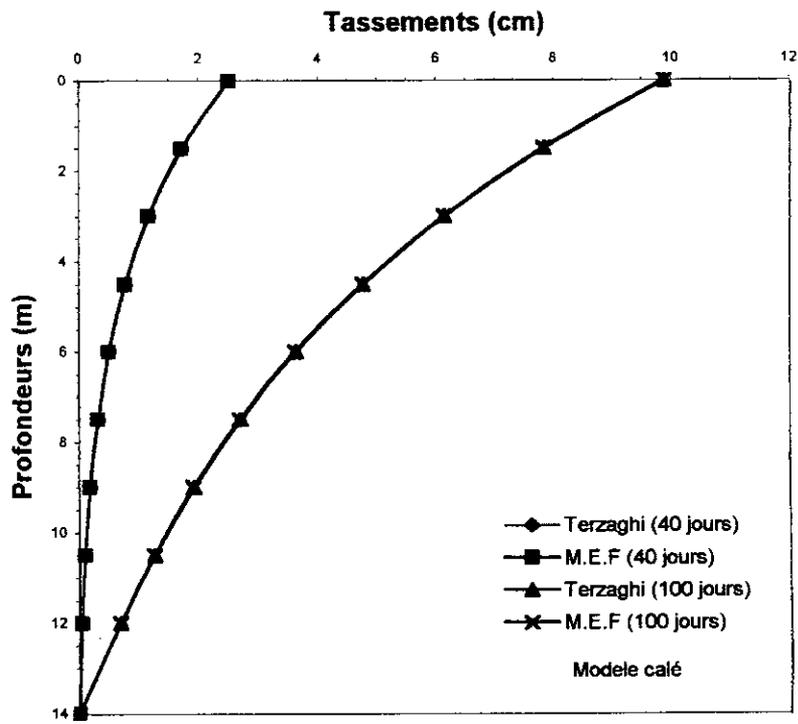
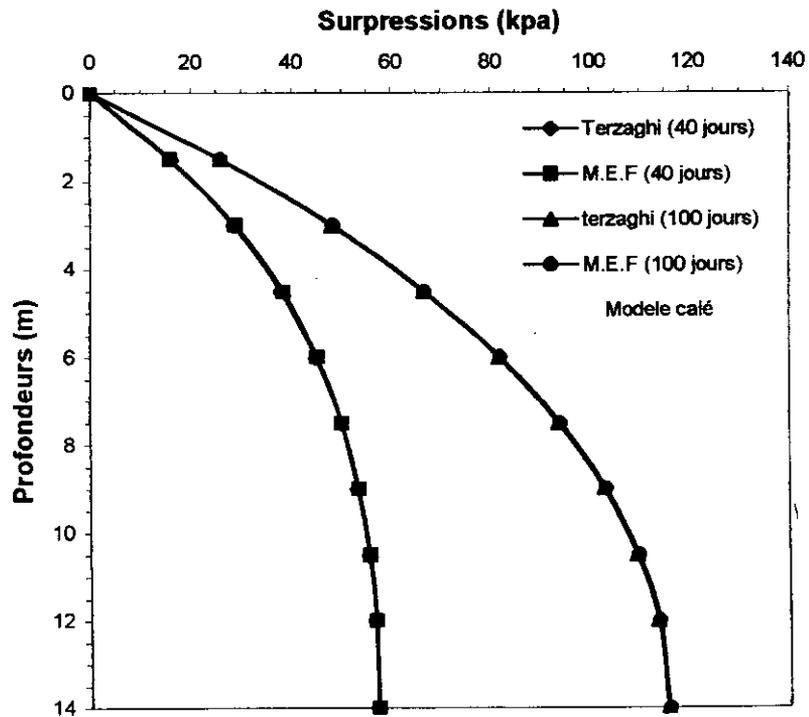


fig VI-6 Contraintes effectives sous charge variable(drainage double)



**Fig VI-7 Tassements temporaires sous charge variable(drainage simple)**



**Fig VI-8 Surpressions temporaires sous charge variable(drainage simple)**

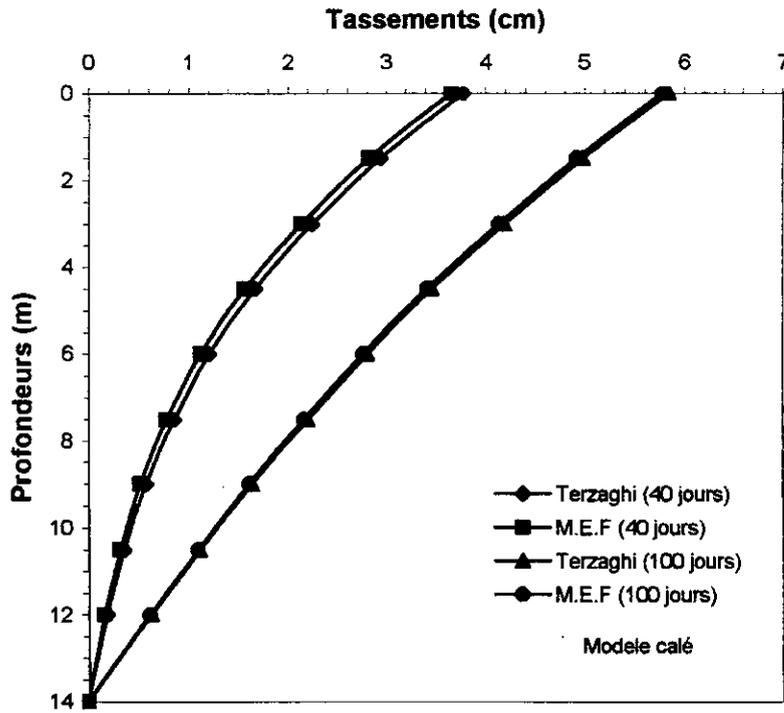


Fig VI-9 Tassements temporaires sous charge constante(drainage simple)

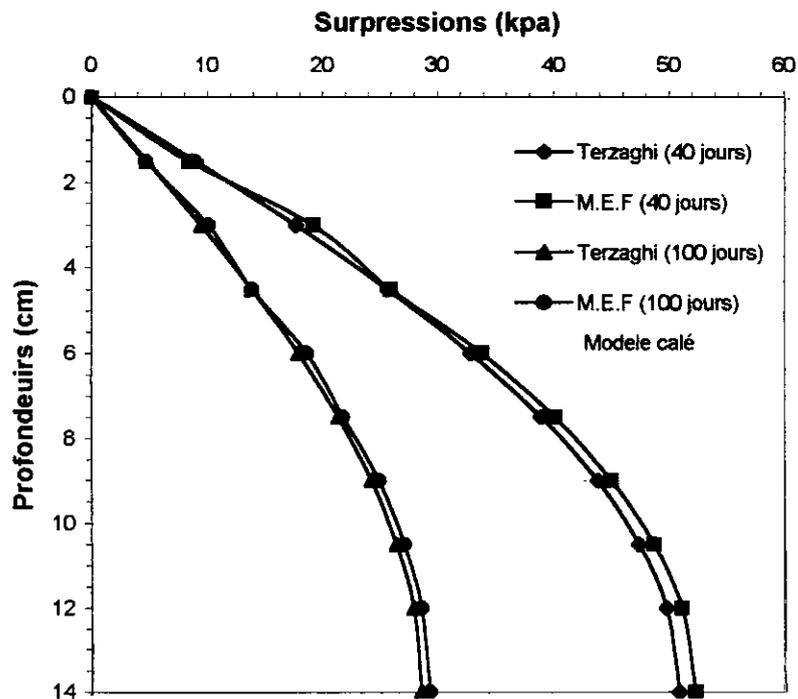


Fig VI-10 Surpressions temporaires sous charge constante(drainage simple)

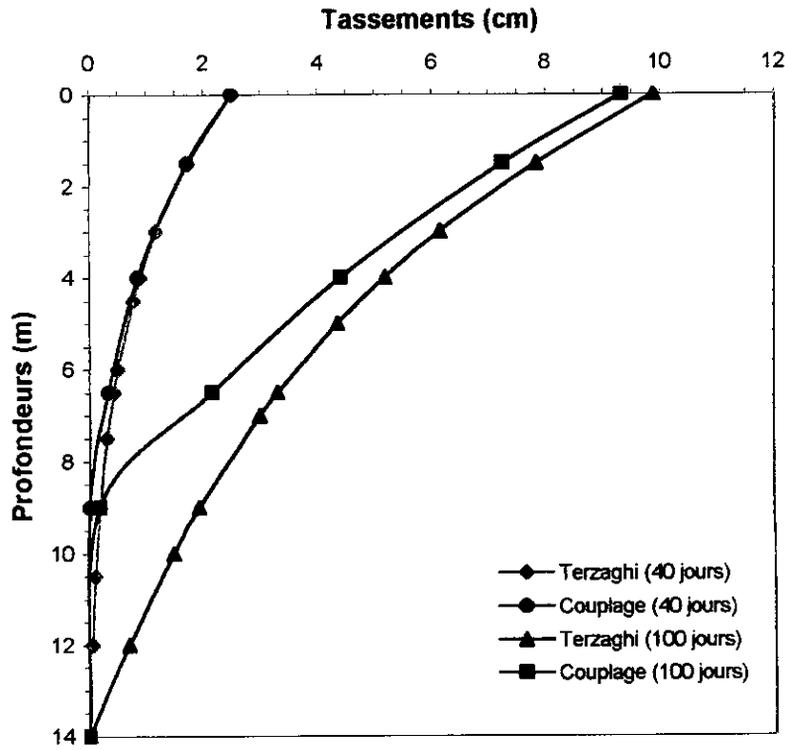


Fig VI-11 Tassements temporaires sous charge variable(drainage simple)

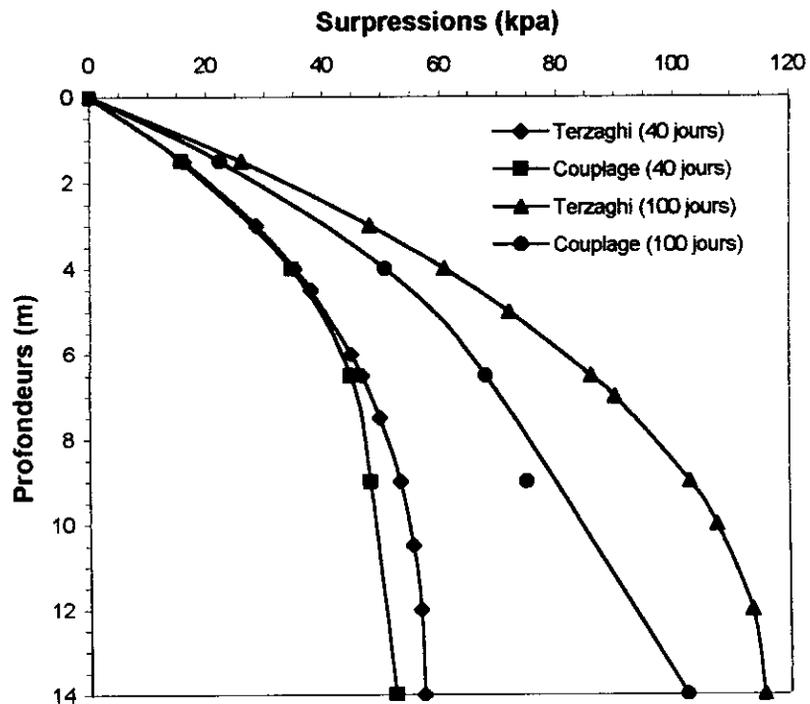


Fig VI-12 Surpressions temporaires sous charge variable(drainage simple)

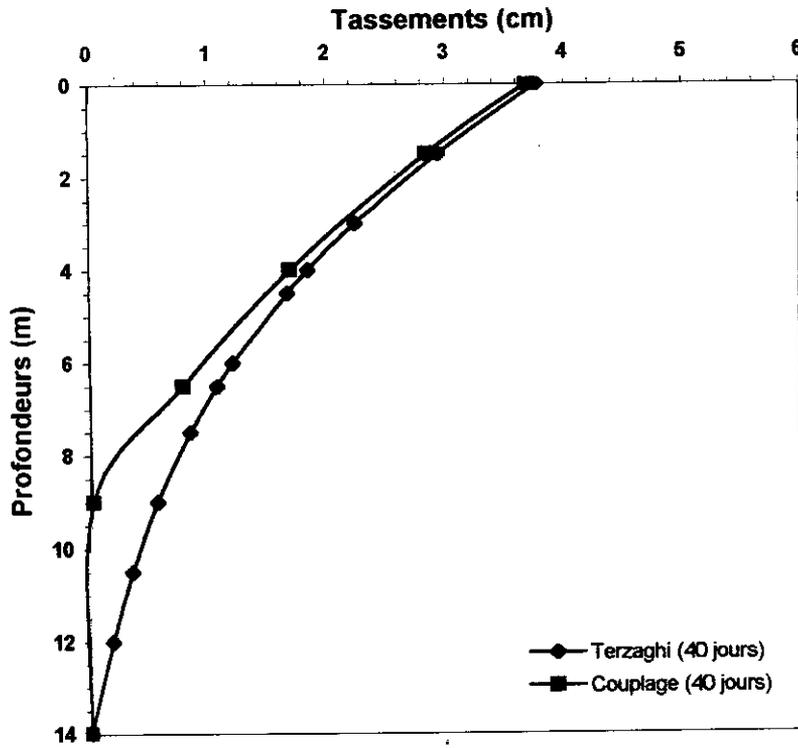


Fig VI-13 Tassements sous charge constante(drainage simple)

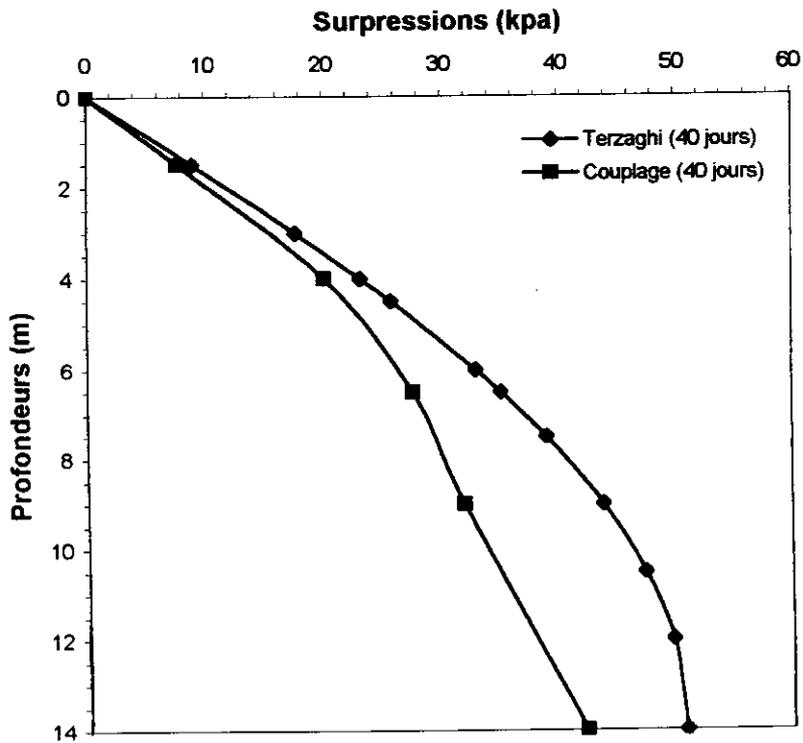


Fig VI-14 Surpressions sous charge constante(drainage simple)

**VII-2-2 Application (2)****a- Données du calcul**

Cet exemple est essentiellement proposé pour mettre en évidence les difficultés de prise en charge des méthodes analytiques, dans le cas des sols stratifiés. Pour cela on a proposé (2) cas différents :

**-cas (1) :** est une tricouche dont les coefficients de perméabilité des couches sont proches. Les données caractéristiques du sol sont énumérées dans le tableau ci-dessous [9].

				M/j	Mpa		m	couche
e	v	c <sub>c</sub>	c <sub>s</sub>	k <sub>v</sub>	E	s <sub>r</sub>	h	
1.62	0	0.85	0.05	161E-5	7.5	1	4.5	1
1.5	0	0.85	0.05	102E-5	10	1	4.5	2
1.43	0	0.85	0.05	77.76E-5	12	1	5	3

**-cas (2) :** est aussi un tricouche dont les coefficients de perméabilité des couches possédant un rapport de (2). Les données caractéristiques sont représentées dans le tableau ci-dessous.

				M/j	Mpa		m	couche
e	v	c <sub>c</sub>	c <sub>s</sub>	k <sub>v</sub>	E	S <sub>r</sub>	h	
1.62	0	0.85	0.05	77.76E-5	8.00	1	4.5	1
1.5	0	0.85	0.05	38.88E-5	10.0	1	4.5	2
1.43	0	0.85	0.05	19.44E-5	12.0	1	5	3

**b- Interprétation des résultats :**

Il faut noter dans ce cas la qu'on n'a pas vraiment des résultats théoriques mais des résultats approximatifs qui sont déterminées par une assimilation du tricouche à un mono-couche équivalente. Dans notre cas les caractéristiques de la couche équivalente sont déterminées par des formules proposées par

TERZAGHI [8]. L'examen attentif des (Fig VI-15, Fig VI-16, Fig VI-17, Fig VI-18) nous permis de faire une étude d'erreur dont les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

cas	profondeurs	1.5	4.5	7.5	10.5
1	%d'erreurs (pressions)	37.94	40.92	24.26	17.5
	%d'erreurs (tassements)	18.24	10.26	7.45	3.09
2	% d'erreurs (pressions)	60.08	56.58	24.59	10.42
	%d'erreurs (tassements)	40.63	43.34	45.66	38.96

A l'aide d'une simple comparaison entre les résultats obtenus (tableau), on remarque que les taux d'erreurs (du mono-couche équivalent) dans le deuxième cas sont beaucoup plus grands que ceux du premier cas malgré que dans ce cas, on a trouvé la valeur max. des pressions (à 100 jours) avec un taux d'erreur de (4%) .

Donc d'après cette comparaison on peut dire que l'utilisation d'un mono-couche équivalente est conseillée seulement pour des multicouches dont les propriétés sont très voisines. dans le cas contraire, la méthode des éléments finis doit être utilisée si l'on souhaite obtenir des résultats plus réalistes.

**Remarque :** Les taux d'erreur sont calculés par rapport aux résultats trouvés par la M.E.F qui est la plus exacte dans ce cas.

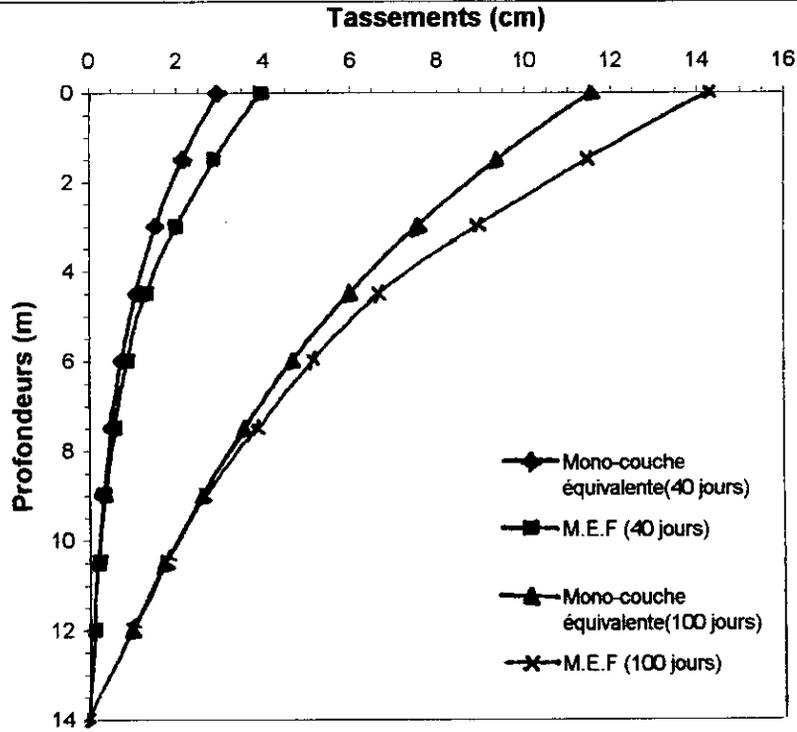


Fig VI-15 Tassements temporaires sous charge variable(tri-couches 1)

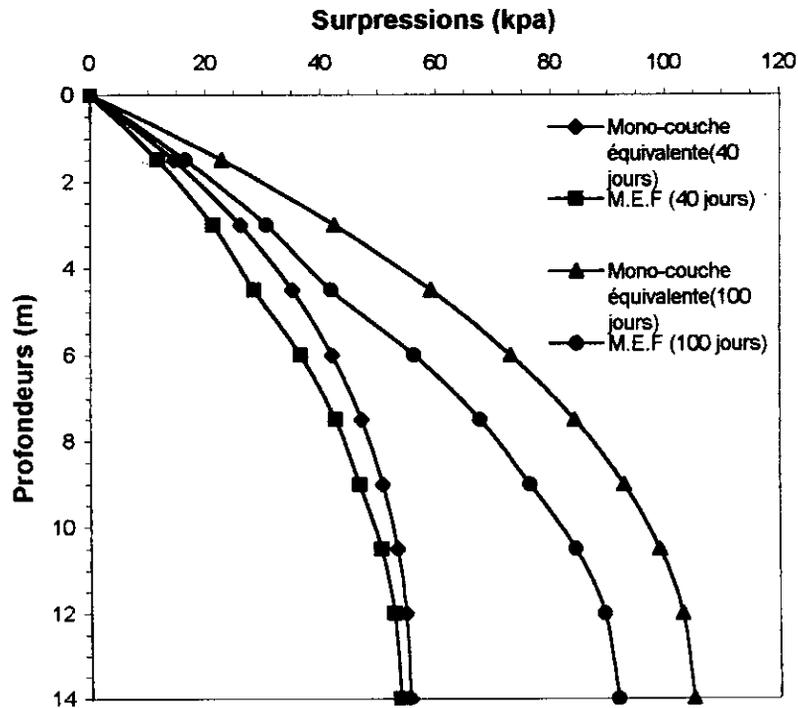
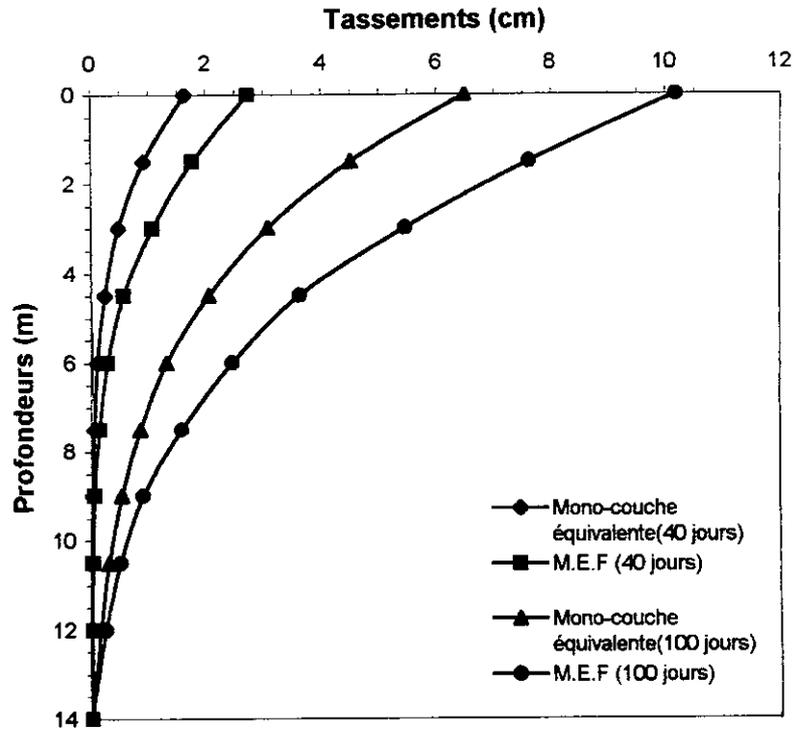
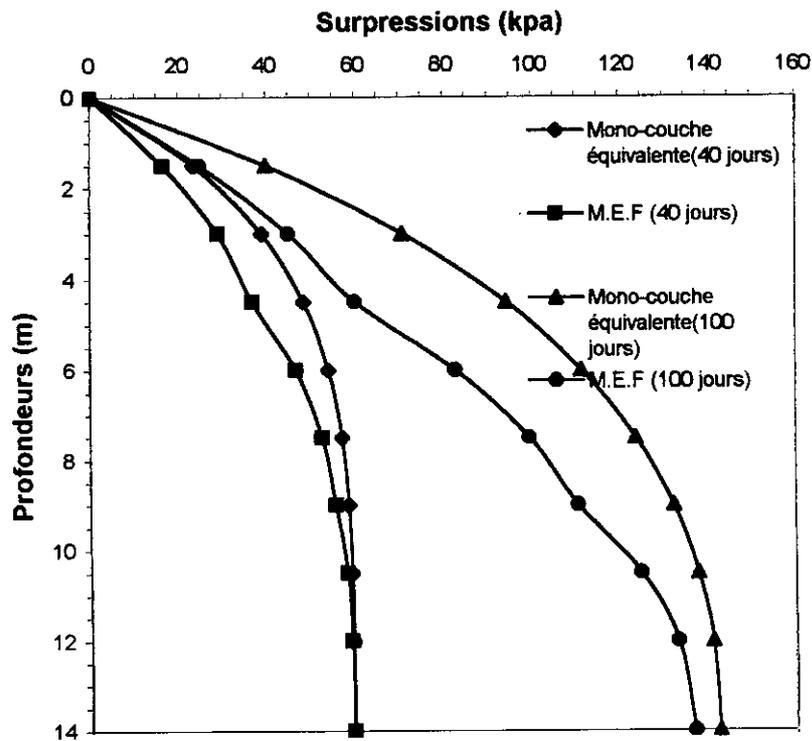


Fig VI-16 Surpressions temporaires sous charge variable(tri-couches 1)



**Fig VI-17 Tassements temporaires sous charge variable(tri-couches 2)**



**Fig VI-18 Surpressions temporaires sous charge variable(tri-couches 2)**

## VI-3 ETUDE DE LA CONSOLIDATION BIDIMENSIONNELLE

## VI-3-1 Application

## a- Données du calcul

En partant des données regroupées dans le tableau ci-dessous [9], nous ferons une étude d'un sol monocouche d'une profondeur de (14m) et d'une distance horizontale de (12m) et qui est soumis à un système de chargement variable et uniformément réparti sur une distance de (3m).

$m$				$M/j$	$M/j$	$T/m^2$	$T/m^2$		$KN/m^3$	
H	$e_0$	$C_s$	$C_c$	$k_x$	$k_y$	$E_x$	$E_y$	$\nu$	$\gamma_s$	$S_r$
14	1.27	0.05	0.85	77.76 E-5	77.76 E-5	1000	1000	0.25	27	1

La loi de chargement est représentée sur la (Fig VI-1) et pour procéder à une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et ceux de la méthode du couplage, on a choisi les temps (40j, 80j, 100j), quant aux cotes dans lesquels s'effectuèrent les mesures, on a insisté sur l'axe de symétrie et la surface du sol.

## b- Interprétation des résultats

De prime abord, il faut noter que nous avons procédé au teste de convergence de la méthode des éléments finis en utilisant des éléments de (2m\*2m) et des éléments de (1m\*1m), mais en regardant les résultats obtenues, nous avons jugé bon d'utiliser des éléments de (1m\*1m) comme résultats de référence.

Deuxièmement, nous avons opté pour des appuis doubles à la distance (x=12m) de l'axe de symétrie pour la raison suivante : aux début, nous avons libéré les tassements mais nous avons obtenu des valeurs de tassements de l'ordre de (4mm) qui ne requièrent pas à notre avis l'augmentation des dimensions de la monocouche, qui exigent de bloquer ces tassements pour que nous puissions comparer les résultats de la méthode des éléments finis à ceux de la méthode du couplage qui implique l'annulation de ces tassements en champ lointain.

Les deux courbes (Fig VI-19, Fig VI-20) sont respectivement une comparaison entre les tassements temporels sur l'axe de symétrie et sur la surface du sol en utilisant les deux méthodes : éléments finis et couplage. Cette dernière

nous a permis d'obtenir la valeur du tassement max au temps (80 j) avec un taux d'erreur estimé à (8.1%).

Quant aux courbes (Fig VI-21, Fig VI-22) : nous avons choisi des cotes horizontales et verticales pour aussi faire une comparaison entre les deux méthode. Nous avons remarqué que ces tassements diminuent en partant, horizontalement, de l'axe de symétrie à l'autre coté et, perpendiculairement, du haut en bas. Mais le remarquable, c'est que – en utilisant la méthode du couplage – nous avons obtenu à ( $t = 100j$ ) et ( $x = 5m$ ) la valeur du tassement max avec un taux d'erreurs égale à (9.14%).

En examinant les déplacements horizontaux représentés sur les deux courbes (Fig VI-23, Fig VI-24), on pourra conclure que ces déplacements augmentent avec le temps, par contre ils diminuent en s'éloignant du chargement dans la direction de la profondeur. Quant au déplacements max (obtenu avec un taux d'erreur égale à 10.82% au niveau de la surface du sol et au temps 80j), il est situé à une distance de (3m) de l'axe de symétrie c'est à dire là où se termine le chargement.

Ainsi, les courbes (Fig VI-25, Fig VI-26, Fig VI-27) représentent une comparaison entre les contraintes obtenues par la méthode des éléments finis et la méthode du couplage. On remarque, alors que ces contraintes effectives augmentent avec le temps et diminuent en profondeur. Concernant les résultats obtenus par la méthode du couplage, nous avons relevé un taux d'erreur (à  $t = 100j$ , et  $z = 1.5m$ ) égale à (1.05%).

Par ailleurs, les taux d'erreur obtenus pour les surpressions interstitielles sont relativement sensibles (Fig VI-28)

Enfin, en examinant tous ces résultats obtenus avec un maillage à 189 ddl (couplage) par rapport à un maillage de 420 ddl (éléments finis) c'est à dire plus de (50%) de variables qui sont éliminées, nous pourrions dire que nous avons obtenu des résultats satisfaisants et très encourageant pour cette technique de couplage.

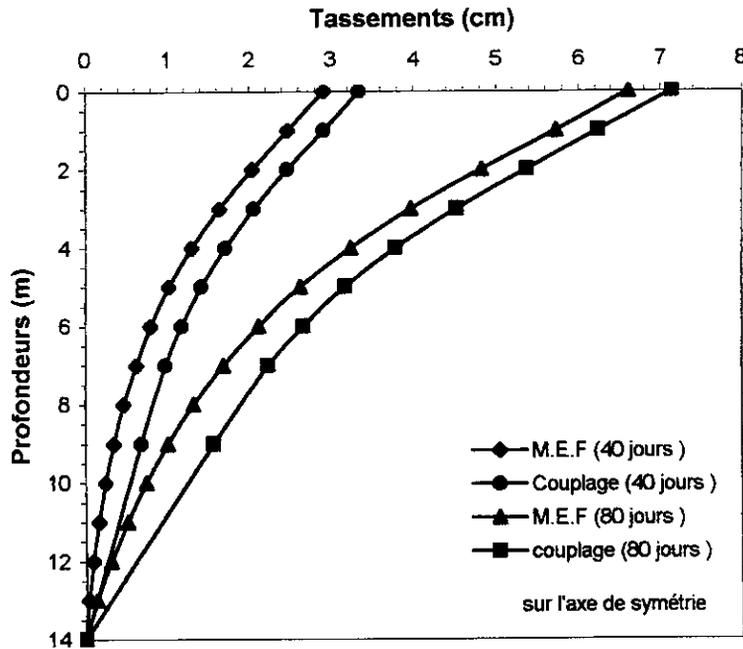


Fig VI-19 Variation temporaire des tassements en profondeurs

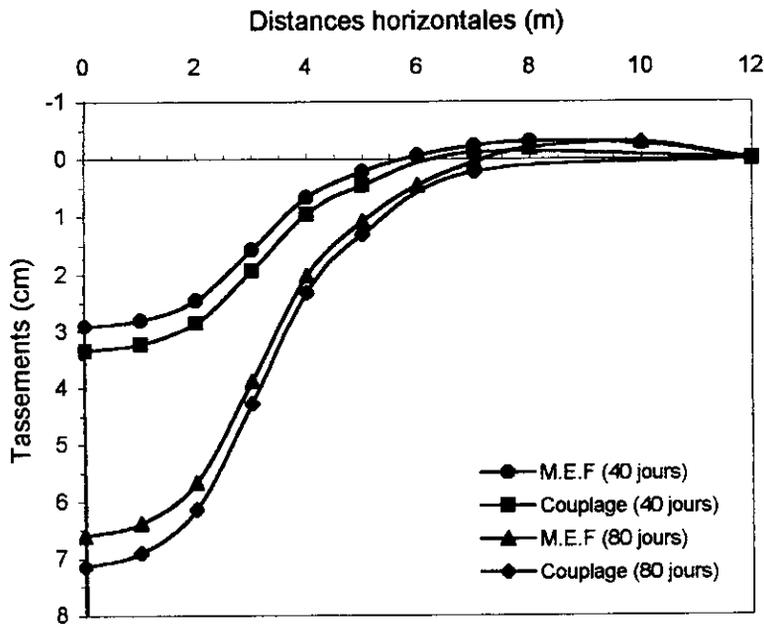


Fig VI-20 variation temporaire des tassements à la surface du sol

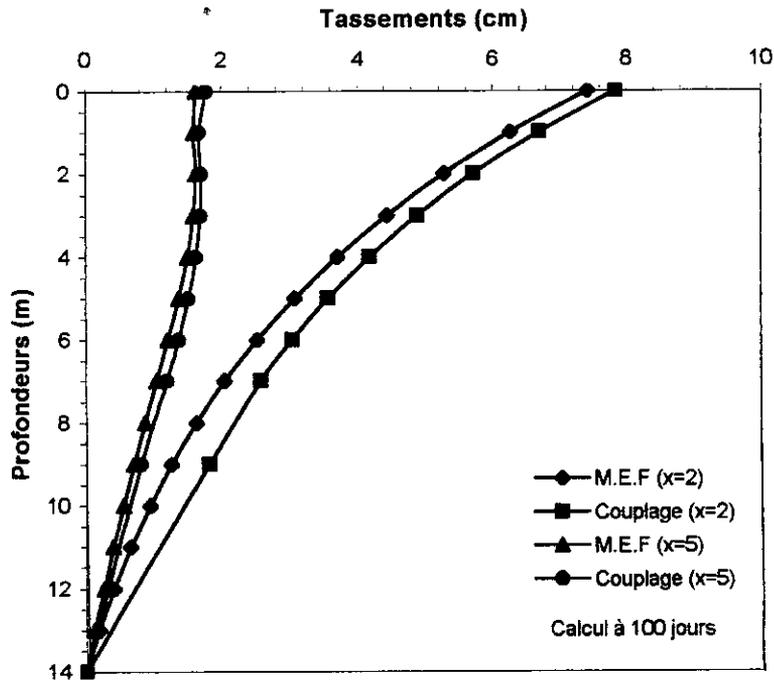


Fig VI-21 Variation des tassements en profondeurs sur différentes distances horizontales

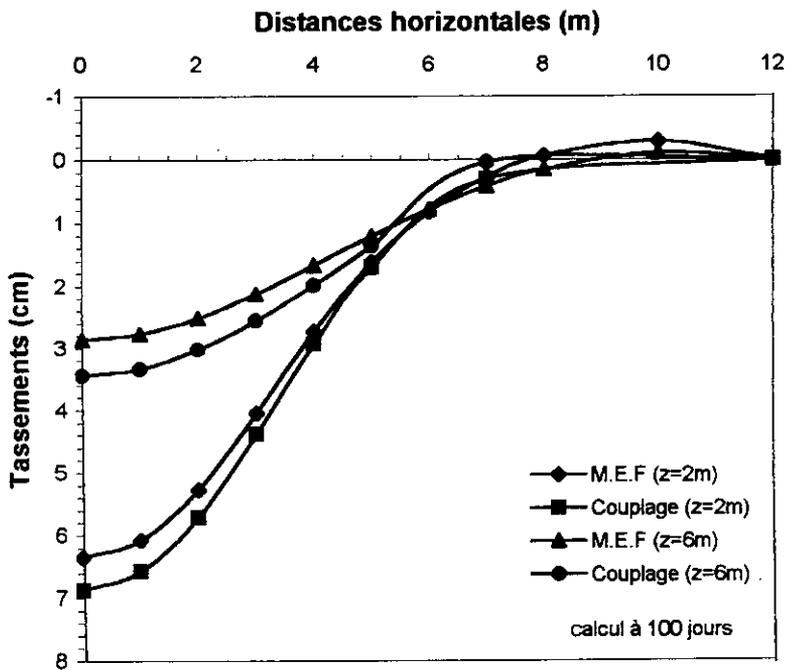


Fig VI-22 Variation des tassements en distances horizontales sur différentes profondeurs

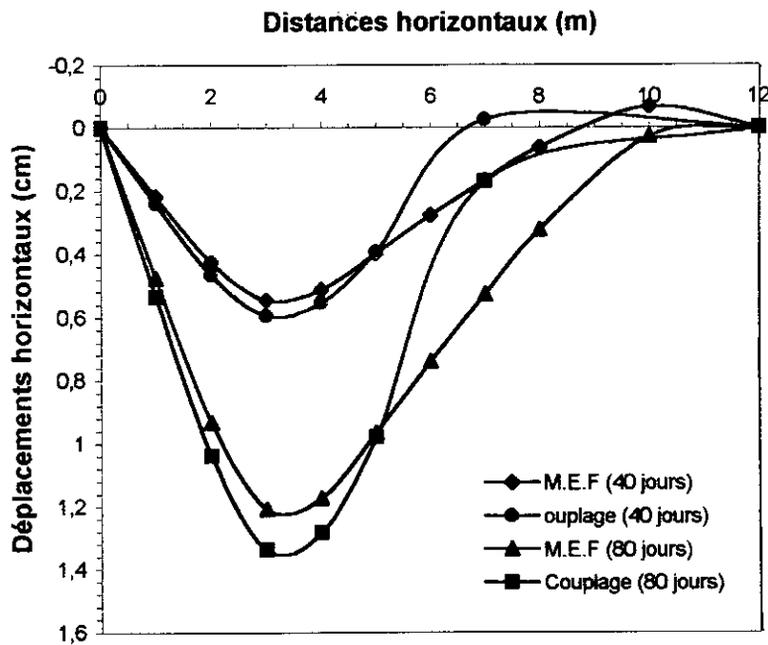


Fig VI-23 Variation temporaire des déplacements horizontaux à la surface du sol

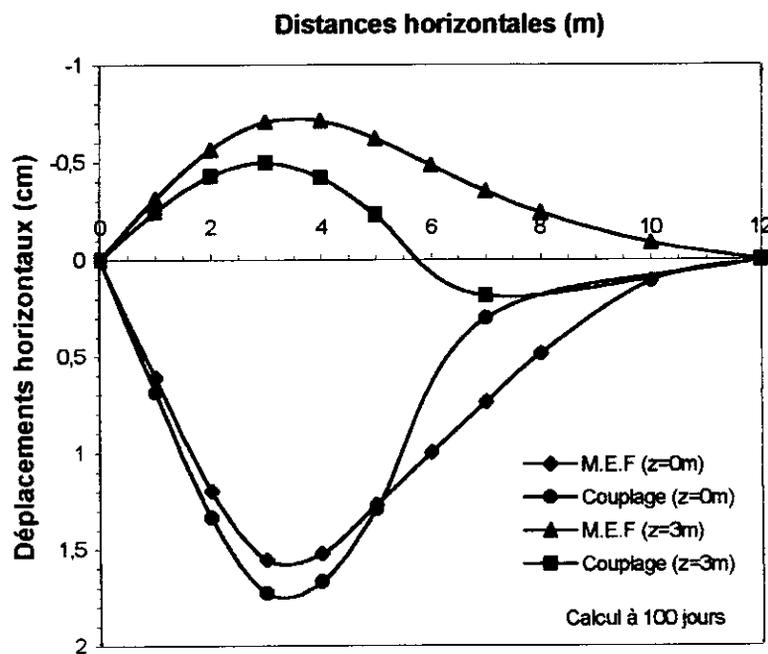


Fig VI-24 Variation des déplacements horizontaux en distances horizontales sur différentes profondeurs

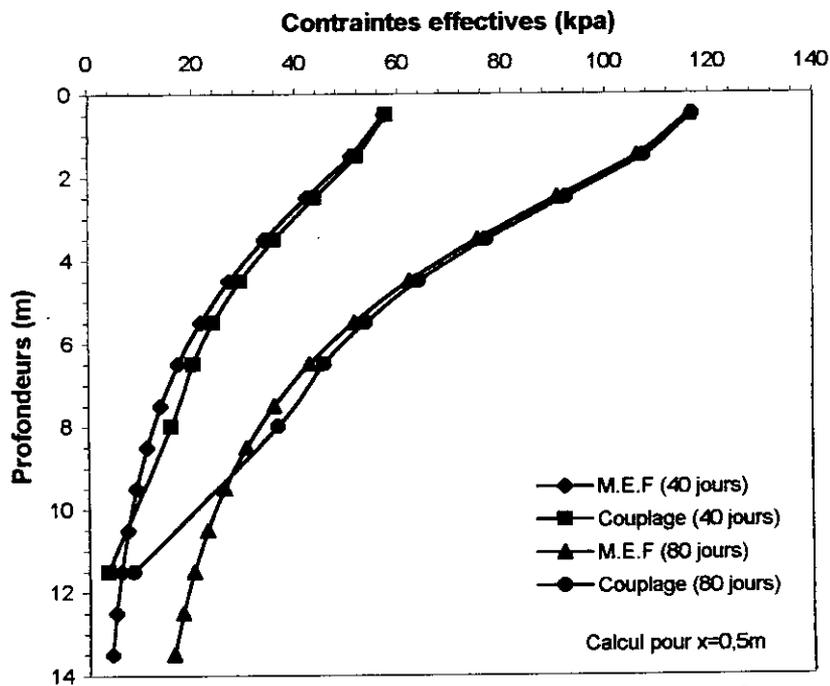


Fig VI-25 Variation temporaire des contraintes effectives verticales en profondeurs

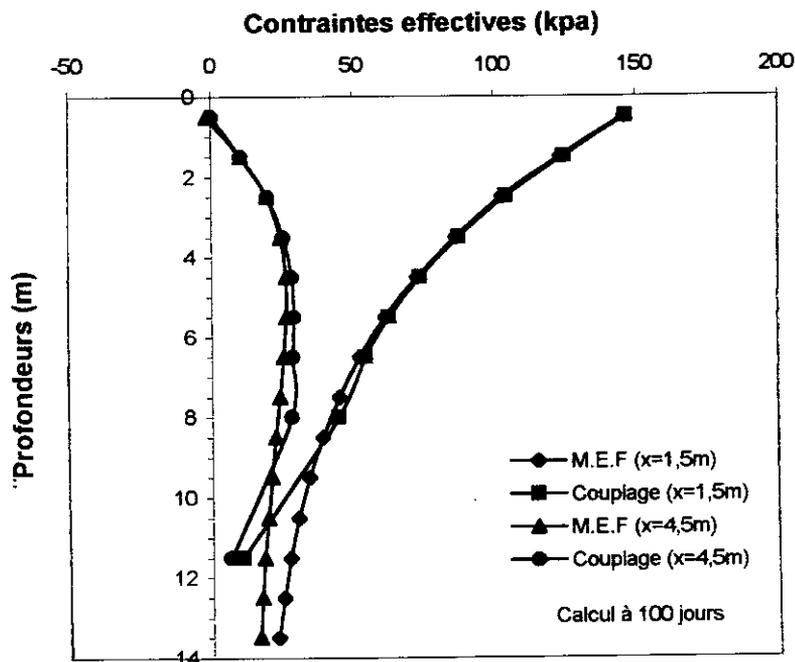
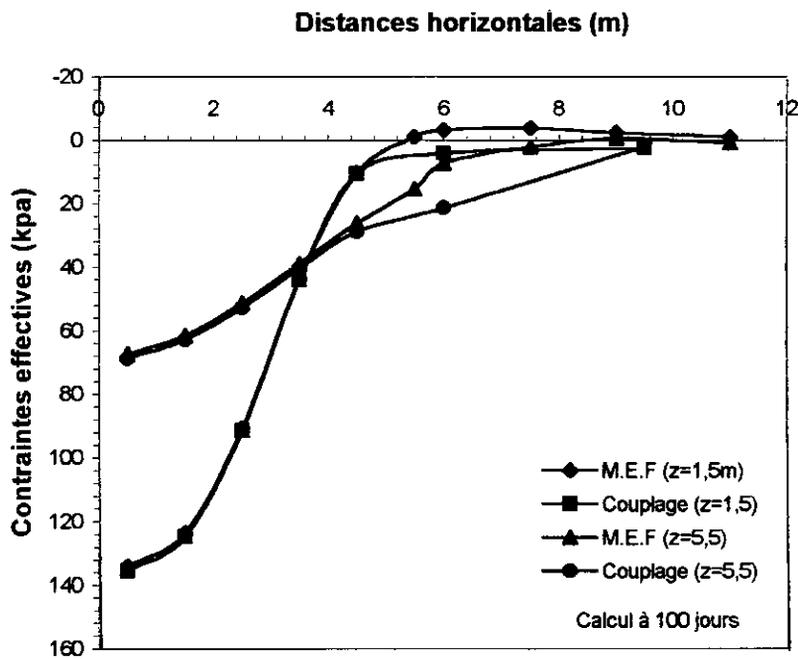
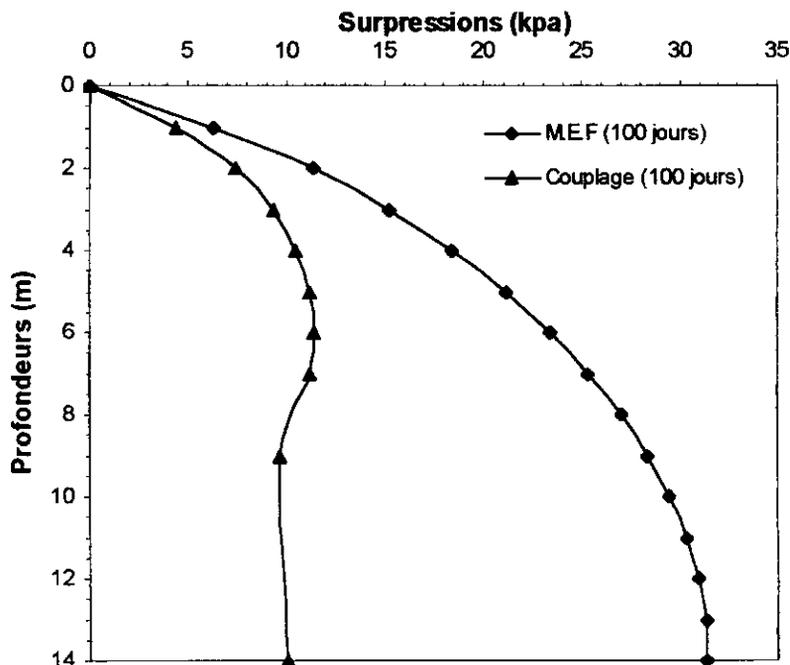


Fig VI-26 Variation des contraintes effectives verticales sur différentes distances horizontales



**Fig VI-27 Variation des contraintes effectives verticales en distances horizontales sur différentes profondeurs**



**Fig VI-28 Surpressions interstitielles en profondeurs sur l'axe de symétrie**

# CONCLUSION GENERALE

## CONCLUSION GENERALE

La consolidation est considérée parmi les phénomènes complexes qui se produisent dans les sols étant donné qu'elle regroupe trois aspects différents : le squelette solide, le liquide (eau) et la variable temps.

Néanmoins, grâce à la méthode des éléments finis - qui est considérée aujourd'hui comme étant la méthode la plus utilisée pour la résolution de tels problèmes. Nous avons essayé d'étudier ce phénomène et de mettre en exergue ses différents aspects généraux. L'un des efforts consacré dans cette étude était la résolution du problème des conditions aux limites et de réduire – dans la mesure du possible – le degré de liberté. Pour cela, on a utilisé la méthode du couplage (éléments finis – éléments infinis)

Cette dernière (méthode de couplage) nous a permis d'obtenir des résultats très encourageants que ce soit dans le cas unidimensionnel ou le cas bidimensionnel. Nous avons résumé ces résultats dans ce qui suit :

- ◆ Concernant le cas unidimensionnel, en utilisant un maillage dont le degré de liberté total (50 ddl) qui représente environ (50%) de celui utilisé dans la méthode des éléments finis (90 ddl), nous avons obtenu, à (100 jours) pour le chargement variable, un taux d'erreur estimé à 5.6% pour la valeur max. des tassements et un taux d'erreur de (11.6%) pour la valeur max. des surpressions. Quand au chargement constant, cette méthode de couplage nous a permis d'obtenir à (40 jours) un taux d'erreur estimé à (16.8%) pour la valeur max. des surpressions contre (2.3%) pour la valeur max. des tassements.
- ◆ Quand au cas bidimensionnel, en utilisant un maillage à (189 ddl) qui représente environ 50% de celui utilisé dans la méthode des éléments finis (420 ddl), nous avons pu obtenir à (80 jours) un taux d'erreur estimé à (8.1%) pour la valeur max. des tassements sur l'axe de symétrie. Le taux d'erreur de la valeur max. des déplacements horizontaux obtenus en même temps (80 jours) est de (10.82%). En outre, nous avons obtenu à (100 jours) la valeur max. des contraintes verticales à une distance de (1.5m) de l'axe de symétrie avec un taux d'erreur estimé à (1.05%).

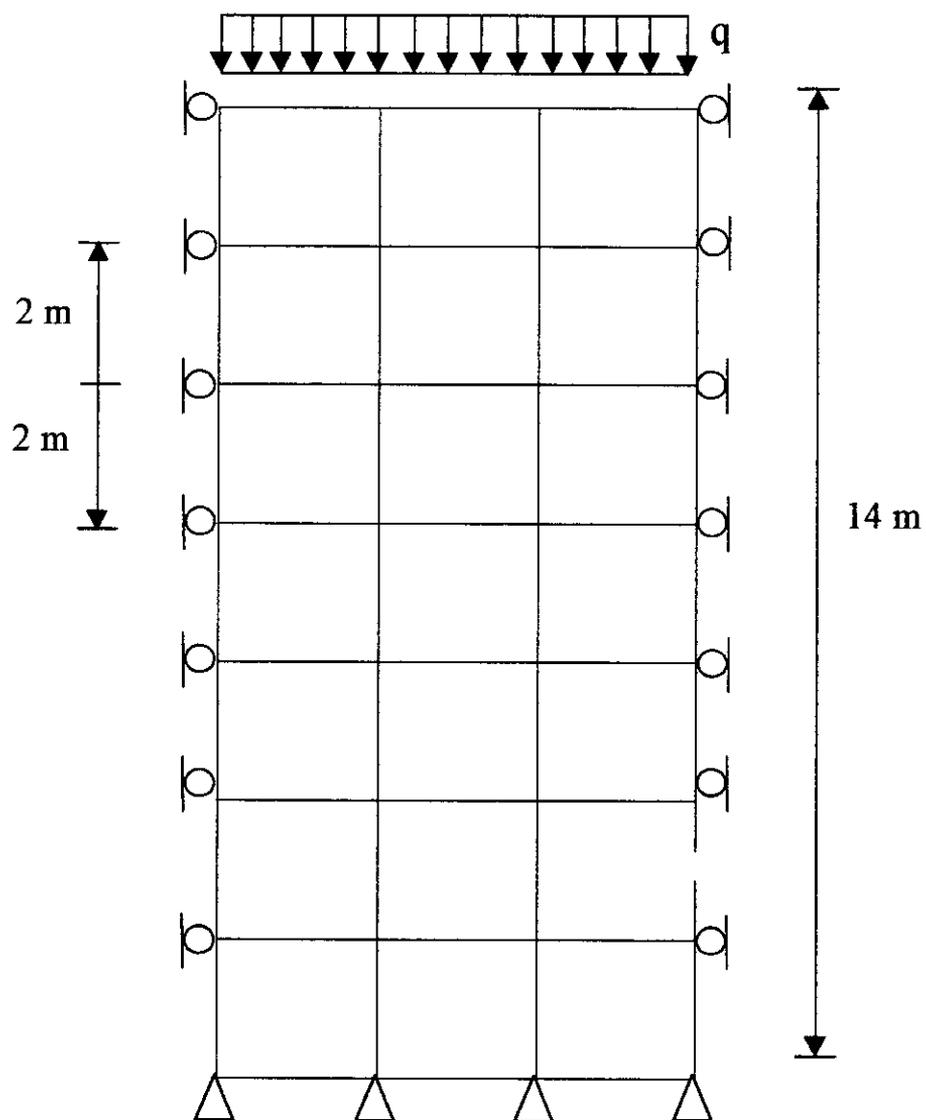
En revanche, il est à remarquer que – dans ce dans dernier – on a obtenu des surpressions avec des taux d'erreur relativement sensibles.

Il faut noter que, la méthode du couplage nous a permis de traiter le problème de la consolidation avec une souplesse remarquable au niveau du

traitement des in-put et out-put d'une part, et d'autre part, elle a fournit des résultats très satisfaisants par rapport aux hypothèses de travail.

Enfin, nous pouvons dire qu'il n'y a pas de solution idéale, c'est pour cela, nous espérons que d'autres études soient menées pour améliorer et mieux compléter l'étude de ce phénomène à composantes aussi diversifiées que complexes par son extension au domaine non linéaire par exemple, opter par d'autre type d'éléments utilisés et la prise en compte de la variation en profondeur des caractéristiques mécaniques du sol.

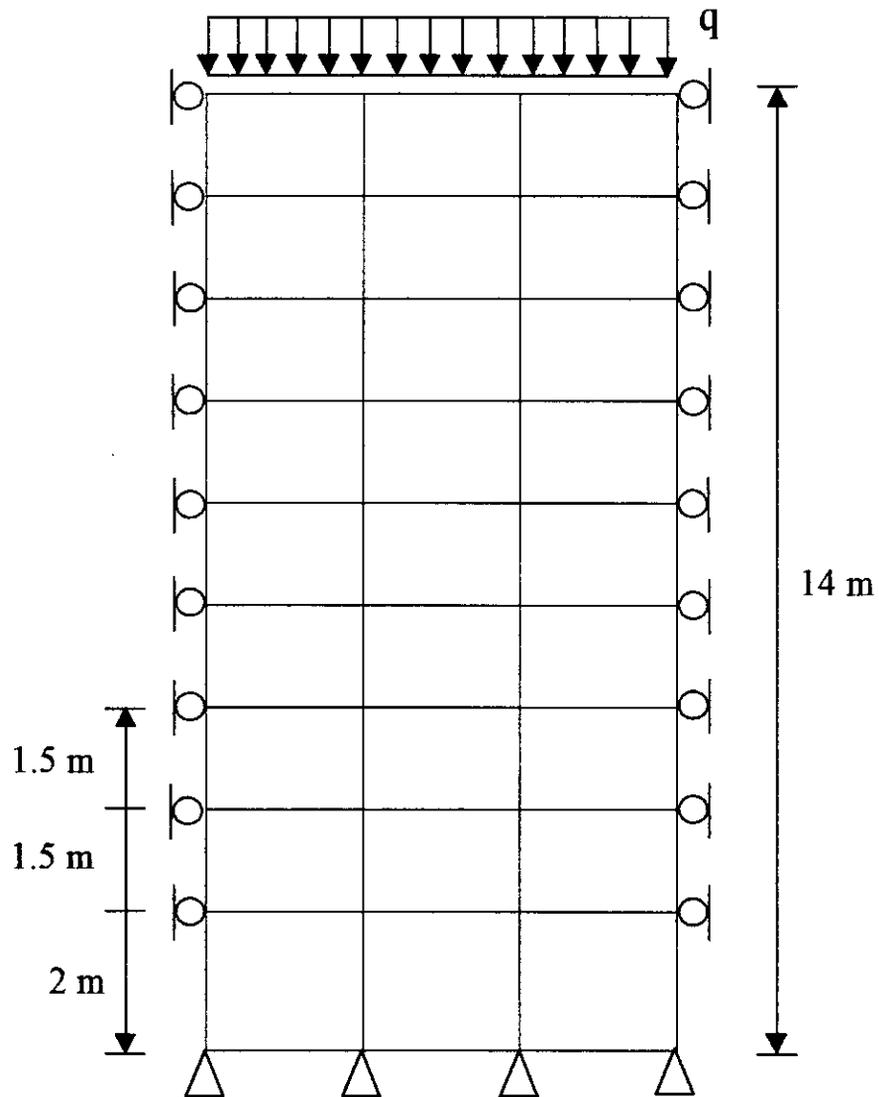
ANNEXE



**Annexe 1 : Maillage de 21 éléments**

○ : Appui simple

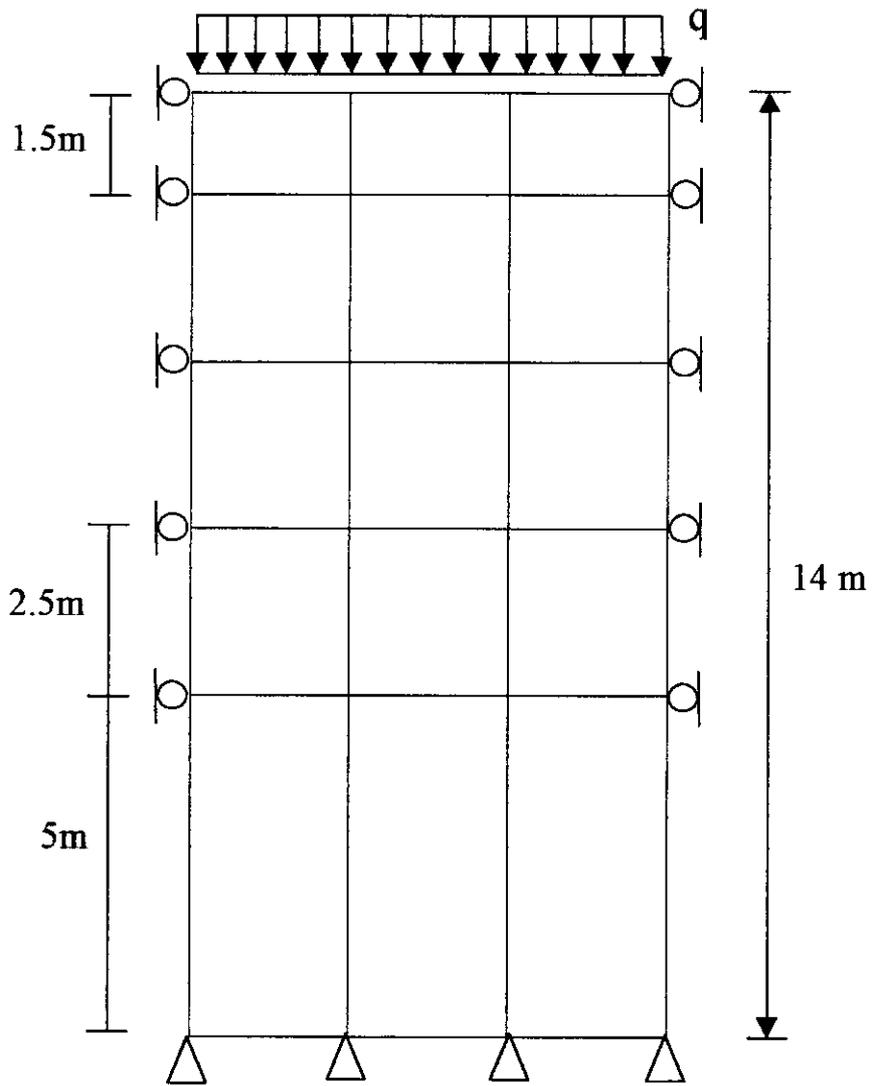
△ : Appui double



**Annexe 2 : maillage de 27 éléments**

○ : Appui simple

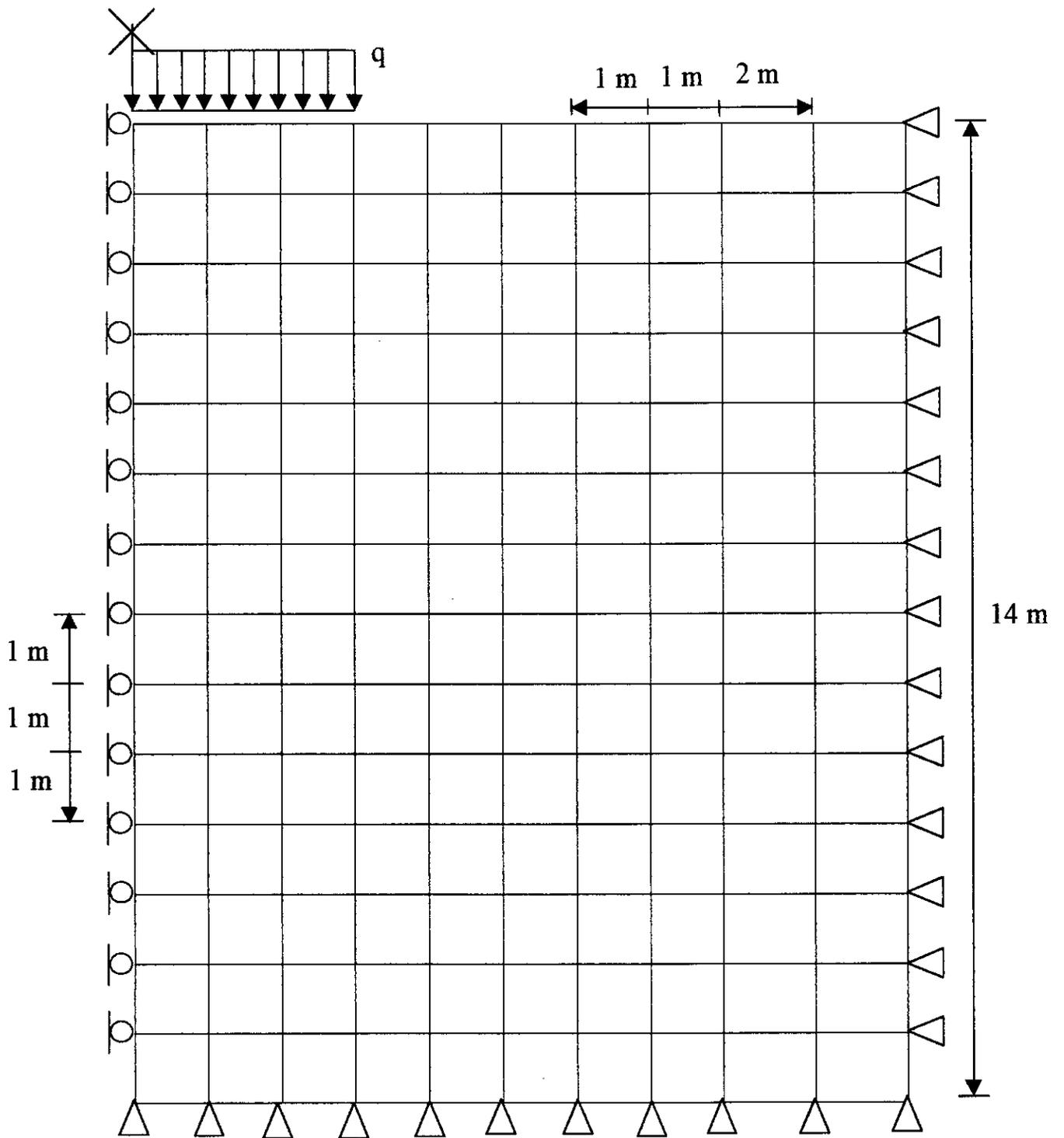
△ : Appui double



**Annexe 3 : Maillage du couplage**

○ : Appui simple

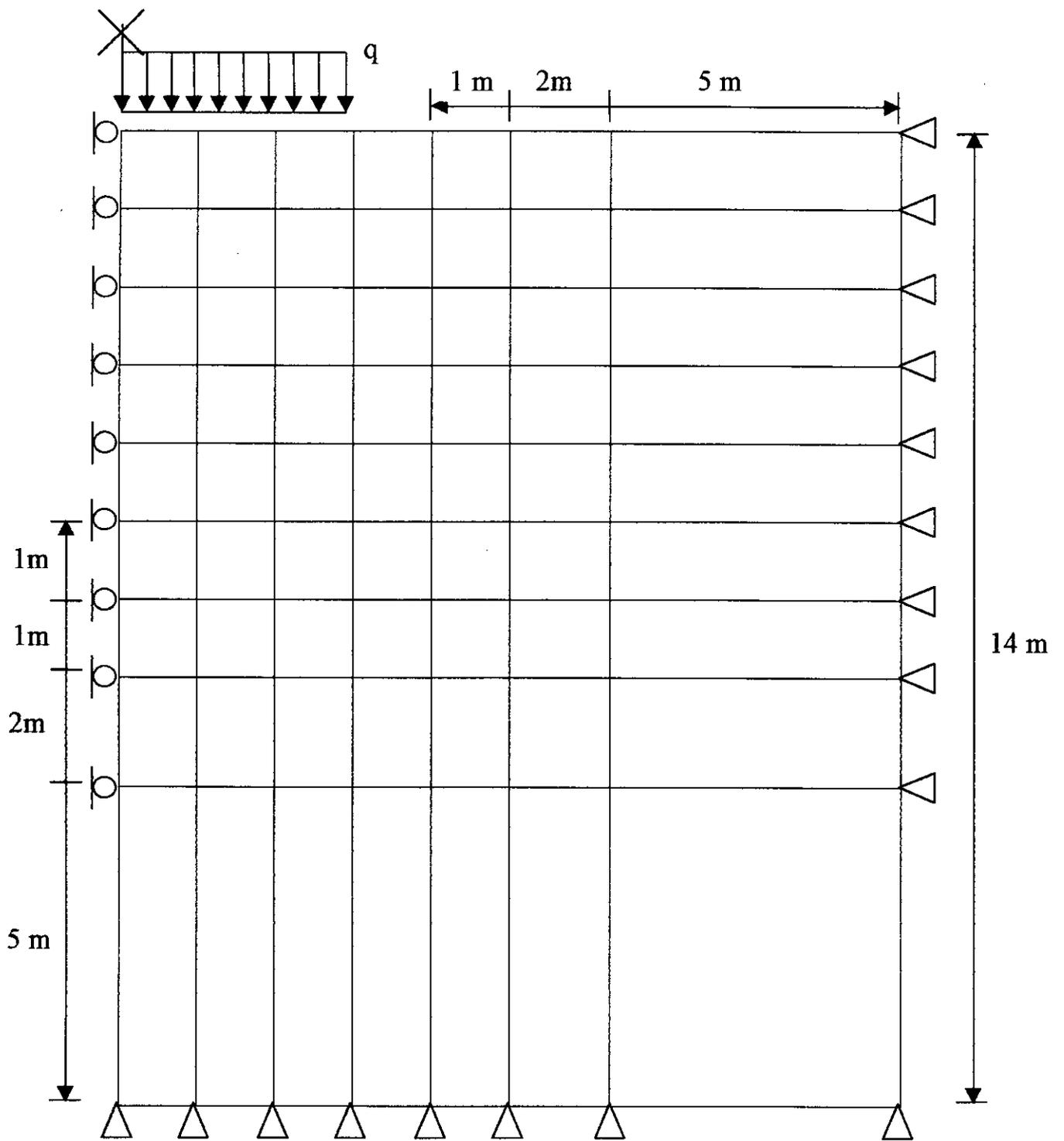
△ : appui double



**Annexe 4 : Maillage éléments finis (cas bidimensionnel)**

○: Appui simple

△: Appui double



**Annexe 5 : Maillage du couplage (cas bidimensionnel)**

○ : Appui simpl

△ : Appui double

Calcul à 40 jours				Calcul à 100 jours		
Z(m)	U (kpa)			U (kpa)		
	exacte	M.E.F	Couplage	exacte	M.E.F	Couplage
0	0	0	0	0	0	0
1.5	16.143	15.983	15.740	26.059	26.043	22.373
3	28.597	28.855	#	48.126	48.346	#
4	35.1607	#	34.750	#	#	50.793
4.5	37.986	38.272	#	66.536	66.716	#
6	44.891	45.134	#	81.609	81.860	#
6.5	46.732	#	44.785	#	#	67.915
7.5	49.827	50.063	#	93.633	93.952	#
9	53.233	53.478	48.109	102.862	103.222	74.879
10.5	55.460	55.705	#	109.504	109.896	#
12	56.769	57.008	#	113.719	114.136	#
14	57.367	57.606	52.545	115.740	116.174	102.582

**Tab(1) surpressions temporaires sous charge variable  
(drainage simple)**

Calcul à 40 jours				Calcul à 100 jours		
Z(m)	S (cm)			S (cm)		
	exacte	M.E.F	M.E.INF	exacte	M.E.F	M.E.INF
0	2.517	2.513	2.504	9.889	9.890	9.335
1.5	1.743	1.733	1.722	7.840	7.83	7.253
3	1.183	1.170	#	6.151	6.143	#
4	0.902	#	0.853	5.197	#	4.418
4.5	0.785	0.773	#	4.765	4.756	#
6	0.510	0.499	#	3.630	3.620	
6.5	0.439	#	0.348	3.299	#	2.152
7.5	0.322	0.313	#	2.698	2.689	#
9	0.197	0.189	0.009	1.925	1.918	0.187
10.5	0.113	0.108	#	1.271	1.266	#
12	0.056	0.053	#	0.698	0.696	#
14	0	0	0	0	0	0

**Tab(2) tassements temporaires sous charge variable  
(drainage simple)**

Calcul à 40 jours				Calcul à 100 jours	
Z(m)	U (kpa)			U (kpa)	
	exacte	M.E.F	Couplage	exacte	M.E.F
0	0	0	0	0	0
1.5	9.014	8.459	7.739	4.809	4.701
3	17.692	19.208	#	9.483	10.087
4	23.139	#	20.133	12.457	#
4.5	25.730	25.964	#	13.888	13.871
6	32.874	33.920	#	17.899	18.625
6.5	35.023	#	27.584	19.129	#
7.5	38.940	40.137	#	21.404	21.792
9	43.810	45.041	31.851	24.304	24.978
10.5	47.423	48.744	#	26.516	27.173
12	49.761	51.150	#	27.980	28.683
14	50.892	52.311	42.325	28.699	29.425

**Tab(3) surpressions temporaires sous charge constante  
(drainage simple)**

Calcul à 40 jours				Calcul à 100 jours	
Z(m)	S (cm)			S (cm)	
	exacte	M.E.F	Couplage	exacte	M.E.F
0	3.774	3.659	3.686	5.841	5.785
1.5	2.942	2.823	2.844	4.977	4.920
3	2.243	2.130	#	4.185	4.131
4	1.848	#	1.693	3.695	#
4.5	1.670	1.569	#	3.460	3.411
6	1.211	1.118	#	2.799	2.754
6.5	1.080	#	0.789	2.592	#
7.5	0.851	0.773	#	2.195	2.158
9	0.573	0.512	0.032	1.639	1.608
10.5	0.359	0.316	#	1.121	1.099
12	0.189	0.165	#	0.630	0.618
14	0	0	0	0	0

**Tab(4) tassements temporaires sous charge constante  
(drainage simple)**

40 jours			80 jours	
Z(m)	M.E.F	Couplage	M.E.F	Couplage
0	2.913	3.345	6.612	7.148
1	2.473	2.911	5.730	6.278
2	2.034	2.465	4.823	5.371
3	1.632	2.052	3.975	4.522
4	1.291	1.700	3.240	3.783
5	1.016	1.408	2.621	3.171
6	0.791	1.168	2.104	2.653
7	0.608	0.970	1.672	2.225
8	0.460	#	1.308	#
9	0.340	0.674	1.000	1.559
10	0.241	#	0.736	#
11	0.160	#	0.509	#
12	0.094	#	0.313	#
13	0.041	#	0.143	#
14	0	0	0	0

**Tab(5) Variation temporaire des tassements en profondeurs sur l'axe de symétrie**

Calcul à 100 jours		
x(m)	M.E.F	Couplage
0	0	0
1	0.612	0.690
2	1.195	1.337
3	1.555	1.727
4	1.523	1.669
5	1.271	1.292
6	0.999	#
7	0.738	0.302
8	0.486	#
10	0.107	#
12	0	0

**Tab(6) Variation des déplacements horizontaux sur la surface du sol**

40 jours			80 jours	
	M.E.F	Couplage	M.E.F	Couplage
Z(m)	$\sigma'$ (kpa)	$\sigma'$ (kpa)	$\sigma'$ (kpa)	$\sigma'$ (kpa)
0.5	57.330	57.764	116.300	116.935
1.5	50.880	51.978	106.200	107.614
2.5	42.250	43.763	90.820	92.489
3.5	33.980	35.779	75.380	77.123
4.5	27.070	29.134	62110	64.012
5.5	21.550	23.930	51.280	53.538
6.5	17.210	19.974	42.620	45.416
7.5	13.810	#	35.750	#
8	#	15.791	#	36.451
8.5	11.160	#	30.330	#
9.5	9.109	#	26.070	#
10.5	7.520	#	22.750	#
11.5	6.280	3.754	20.140	8.670
12.5	5.300	#	8.050	#
13.5	4.450	#	16.270	#

**Tab(7) Variation temporaire des contraintes effectives en profondeurs à (x=0.5)**

Calcul à 40 jours					Calcul à 80 jours			
	M.E.F		Couplage		M.E.F		Couplage	
x(m)	V(cm)	U(cm)	V(cm)	U(cm)	V(cm)	U(cm)	V(cm)	U(cm)
0	2.913	0	3.345	0	6.612	0	7.148	0
1	2.804	0.218	3.231	0.465	6.386	0.477	6.906	0.536
2	2.456	0.425	2.857	0.465	5.670	0.932	6.142	1.039
3	1.578	0.546	1.935	0.594	3.882	1.208	4.278	1.339
4	0.669	0.514	0.966	0.553	2.023	1.173	2.319	1.284
5	0.224	0.398	0.460	0.395	1.082	0.964	1.304	0.978
6	-0.058	0.278	#	#	0.457	0.740	#	#
7	-0.227	0.167	-0.111	-0.023	0.051	0.527	0.222	0.172
8	-0.310	0.064	#	#	-0.192	0.323	#	#
10	-0.265	-0.66	#	#	-0.290	0.030	#	#
12	0	0	0	#	0	0	0	0

**Tab(8) Variation temporaire des tassements et déplacements horizontaux à la surface du sol**

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. KETTAB, R. MITICHE : « *Mécanique des milieux continus* »  
Edition O.P.U 1995
- [2] BRAJA, M. DAS : « *Advanced soil mechanics* »  
Edition Mc graw-hill book company 1985
- [3] F. SCHLOUSSER : « *Eléments de mécanique des sols* »  
Presses de l'école nationale des ponts et chaussées 1988
- [4] G. PHILIPPONNAT : « *Fondations et ouvrage en terre* »  
Edition Eyrolles 1979
- [5] G. TOUZOT, G. DHATT : « *Une présentation de la méthode des éléments finis* », Edition Maloine 1984
- [6] J.COSTET, G. SANGLERAT : « *Cours pratique de mécanique des sols* », Edition Dunod 1981
- [7] J. F. IMBERT : « *Analyse des structures par éléments finis* »  
Edition Cepadué 1995
- [8] J. P. MAGNAN : « *Remblais et fondations sur sols compressibles* », Presses de l'E.N.P.C 1984
- [9] J. P. MAGNAN : « *Modélisation numérique du comportement des argiles molles naturelles* », Rapport de recherche  
L.C.P.C. Paris 1986
- [10] R. NAHARA : « *Contributions numériques et analytiques à l'étude de la consolidation autour du pressiomètre* », Rapport de recherche  
L.C.P.C. Paris 1986
- [11] Z. BABCHIA, J. P. MAGNON : « *Analyse du comportement des massifs de sols argileux* », L.C.P.C. Paris 1986
- [12] M. DEMIDEM, K. SANDJAK : « *utilisation de l'élément infini bidimensionnel de type lagrange dans l'analyse de l'interaction sol-fondation* », les annales maghrébines de l'ingénieur, Vol.12,

pp 635-639, N° Hors série 1998.

- [13] M. DEMIDEM, M. CHEIKH-TOUAMI, M. BOUDA  
*« Contribution à l'analyse du phénomène d'interaction sol-structure par une combinaison d'éléments finis et infinis »*,  
Algérie équipements, N° 27, pp 31-35 1997.
- [14] AIT. TAYEB, R. BELHAOUAS : *« Consolidation unidimensionnelle d'un multicouches »*, P.F.E : E.N.P 1990
- [15] CHEIKH TOUAMI, BOUDA : *« Contribution à l'analyse du phénomène d'interaction sol-structure par une combinaison d'éléments finis et infinis »*, P.F.E : E.N.P 1996
- [16] K. SAADALLAH, K. SANDJAK : *« Utilisation de l'élément infini bidimensionnel de type ' Lagrange' dans l'analyse de l'interaction sol-fondation »*, P.F.E : E.N.P 1997
- [17] Mr. LAHLOU HADERBACHE : *« Simulation numérique de la consolidation bidimensionnelle en utilisant la méthode de CAM-CLAY »*, P.F.E : E.N.P 1994
- [18] S. BOUZIANE : *« Modélisation non linéaire du comportement du sol par couplage. Eléments finis-éléments d'interfaces et éléments infinis »*, Mag : E.N.P 1996
- [19] S. MANSOUR, M. MOUSSA : *« Détermination de l'état de contrainte et de déformation d'un sol par la M.E.F »*, P.F.E : E.N.P 1991

ملخص:

تهدف هذه الدراسة إلى معالجة ظاهرة التثبيت في الأتربة وذلك باستخدام طريقة العناصر المنهية وطريقة المزاجية (عناصر منهية وغير منهية) ومحاولة إجراء مقارنة بين نتائجهما. الكلمات المفتاحية: التثبيت، المزاجية.

Résumé :

*Cette étude vise à traiter le phénomène de la consolidation dans les sols en utilisant la méthode des éléments finis et celle du couplage. Il est entrepris ensuite d'une comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes.*

Mots clés : la consolidation, le couplage

Abstract :

*This studies aims to treat the phenomenon of the consolidation in the soils in using the method of finites elements and the one of coupling . it is undertaken them one comparison of the results obtained by the two methods.*

Keys words : the consolidation, coupling