

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur  
et de la recherche scientifique

**Ecole Nationale Polytechnique**

*Département : Génie Civil*



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**Projet de Fin D'Etudes**

*Présenté pour l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en Génie civil*

**Thème :**

Modélisation des planchers  
déformables pour l'étude de la  
réponse dynamique des structures  
auto-stables en décrochement

proposé et dirigé Par :

- M. Demidem

Etudié par :

- Mr. Benfardjallah djelloul  
- Mr. Boutres Mounir



**ENP** – 10 Avenue Hacène Badi – EL HARRACH - ALGER

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur  
et de la recherche scientifique

## Ecole Nationale Polytechnique

Département : Génie Civil



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

### Projet de Fin D'Etudes

Présenté pour l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en Génie civil

Thème :

**Modélisation des planchers  
déformables pour l'étude de la  
réponse dynamique des structures  
auto-stables en décrochement**

proposé et dirigé Par :

- M. DEMIDEM

Etudié par :

- M. Benfardjallah djelloul  
- M. Boutres Mounir

Promotion 2000

E N P – 10 Avenue Hacène Badi – EL HARRACH - ALGER

## REMERCIEMENTS

Louange à dieu qui nous a donné la santé et le courage pour achever ce travail.

Nous exprimons toute notre profonde reconnaissance à notre promoteur **M. DEMIDEM** qui est à l'origine de ce travail, pour nous avoir dirigé avec tant de patience.

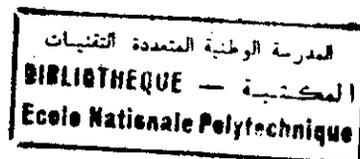
Qu'il nous soit permis également d'exprimer notre gratitude envers tous nos enseignants, qui nous ont prodigué leur savoir au cours de nos études.

Nous sommes aussi profondément reconnaissant envers nos parents, nos amis qui ont lutté pour notre réussite.

Nous remercions le membre de jury pour l'honneur qu'ils nous font pour juger notre travail.

Nos remerciements vont pour tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à la réalisation de ce travail : **MADANI, AMIROUCHE, NAIMA, TADJ, MOUKHTAR,, ABDELRAHMANE, HAKOU, AMI RACHID**, que dieu le bénisse et notre prochain souvenir **EL HAOUASS**, ainsi qu'à tous ceux qui auront bien voulu consacré le temps et la patience de lire ce document.

# Sommaire



INTRODUCTION.....	1
-------------------	---

## CHAPITRE I ANALYSE LINEAIRE DES PROBLEMES STATIQUES

I.1 NOTION SUR LA THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE .....	3
I.1.1 Contraintes .....	3
I.1.2 Déformations.....	3
I.1.3 Equation d'équilibre .....	4
I.1.4 Loi de comportement.....	5
I.2 INTRODUCTION AUX METHODES VARIATIONNELLES .....	5
I.2.1 Définition .....	5
I.2.2 Approche cinématique .....	6
I.2.2.1 Principe des travaux virtuels .....	6
I.2.2.2 Théorème de l'énergie potentielle en déplacement.....	6
I.2.3 Approche d'équilibre .....	7
I.2.3.1 Principe des travaux complémentaires.....	7
I.2.3.2 Théorème de l'énergie potentielle en contraintes.....	7
I.3 MATRICE DE RIGIDITE ET DE FLEXIBILITE D'UN ELEMENT DE STRUCTURE.....	7
I.3.1 Discrétisation d'une structure .....	7
I.3.2 Repère local – Repère global.....	8
I.3.3 Caractéristique élastique .....	8
I.3.4 Transformation des coordonnées.....	10
I.4 METHODE DE CALCUL DES STRUCTURES HYPERSTATIQUE .....	11
I.4.1 Méthode des forces.....	11
I.4.2 Méthode des déplacements .....	12
I.5 PRESENTATION DU PROGRAMME DEVELOPPE .....	13

## CHAPITRE II PRÉSENTATION GÉNÉRALE DE LA DYNAMIQUE DES STRUCTURES

II.1 INTRODUCTION.....	14
II.2 TYPE DE CHARGEMENT.....	14
II.2.1 Chargements périodiques.....	14
II.2.2 Chargements non périodiques.....	14
II.3 CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PROBLEME DYNAMIQUE...	15

<b>II.4 FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT.....</b>	
II.4.1 Principe d'Alembert.....	15
II.4.2 Principe des déplacements virtuels.....	16
II.4.3 Principe de Hamilton.....	16

### *CHAPITRE III SYSTEME A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE*

<b>III.1 INTRODUCTION .....</b>	<b>18</b>
<b>III.2 EQUATIONS DU MOUVEMENT.....</b>	<b>18</b>
<b>III.3 INFLUENCE DES FORCES DE PESANTEUR.....</b>	<b>19</b>
<b>III.4 INFLUENCE D'UNE EXCITATION D'APPUI.....</b>	<b>20</b>
<b>III.5 RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT.....</b>	<b>22</b>
III.5.1 Oscillation libre.....	22
III.5.1.1 Oscillation libre non amortie.....	23
III.5.1.2 Oscillation libre amortie.....	24
III.5.2 Oscillation forcée.....	25
III.5.3 Cas général.....	28

### *CHAPITRE IV SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE*

<b>IV.1 INTRODUCTION.....</b>	<b>29</b>
<b>IV.2 EXPRESSION DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE.....</b>	<b>29</b>
<b>IV.3 LES MATRICES CARACTERISANT LES PROPRIÉTÉS D'UNE STRUCTURE.....</b>	<b>32</b>
IV.3.1 Caractéristiques élastiques.....	32
IV.3.2 Caractéristiques massiques.....	33
IV.3.3 Amortissement.....	34
<b>IV.4 MODELISATION DES STRUCTURES.....</b>	<b>35</b>
IV.4.1 Cas des planchers rigides.....	35
IV.4.2 Cas des planchers flexibles.....	36
<b>IV.5 METHODES DE RESOLUTION.....</b>	<b>37</b>
IV.5.1 Méthode de superposition des modes.....	37
IV.5.2 Méthodes de calcul des valeurs propres.....	43
IV.5.3 PRESENTATION DU PROGRAMME DÉVELOPPÉ.....	47
<b>CHAPITRE V APPLICATION.....</b>	<b>48</b>
<i>Conclusion.....</i>	<i>70</i>
<i>bibliographi.....</i>	

المدسة الوطنفة المتمددة التففففات  
BIBLIOTHEQUE — المكدتفة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Introduction

## Introduction :

Depuis quelques années les séismes sont considérés comme un phénomène imprévisible, et même une inéluctable fatalité susceptible de provoquer des dégâts catastrophiques (détérioration de constructions, nombreuses pertes de vies humaines ...etc.).

Pour cette raison, le comportement des constructions, sous actions dynamiques, constitue aujourd'hui une grande partie de la théorie des structures que tout ingénieur de génie civil ne doit pas l'ignorer.

La prise en compte de ces catastrophes et leurs causes a contribué au développement rapide d'une science récente qui est le génie parasismique qui englobe (la dynamique des sols, la sismologie, l'instrumentation sismique et la dynamique des structures).

Dans le contexte de notre travail on s'intéresse à la dynamique des structures qui a pour objectif l'analyse des contraintes et des déformations dans n'importe quel type de structures soumises à un changement dynamique arbitraire et on peut dire que la D.D.S est une extension de l'analyse des structures sollicitées par des changements statique.

En général dans l'étude dynamique des structures les planchers sont supposés rigide c'est-à-dire que les nœuds d'un même plancher sont liés rigidement entre eux et le plancher se déplace dans son ensemble sans subir de déformation, ce qui permet de simplifier le problème. Mais une question s'impose dans ce cas, est ce que cette simplification ne nous amène pas loin de la réalité puisqu'en effet la possibilité de flexibilité des planchers de la structure existe.

L'objectif de cette étude, est la mise en évidence l'effet de la flexibilité (déformabilité des planchers) sur la réponse des structures. Cela a été illustré par une comparaison des résultats obtenus pour des structures étudiées présentant des planchers déformables, à la présence des décrochements, ainsi l'influence de certains paramètres.

En effet, pour simplifier l'étude, nous avons remplacé les structures par un modèle simple mais significatif, autrement dit, qui reflète en quelque sorte le comportement de la structure.

En premier lieu on a étudié la réponse des structures à planchers rigides, ensuite on a pris les mêmes structures mais en tient compte la déformabilité des planchers pour extraire son effet sur la réponse dynamique.

Après cela, on a voulu illustrer l'influence du décrochement sur la réponse dynamique des constructions, c'est pourquoi on a pris plusieurs structures à décrochements différents pour qu'on puisse aboutir à notre objectif.

- Dans le chapitre I : nous exposons les notions principales de théorie d'élasticité linéaire. Ainsi les méthodes générales de détermination des déplacements des systèmes élastiques.
- Dans le chapitre II : une présentation générale la dynamique des structures
- Dans le chapitre III et le chapitre IV : nous avons mis l'accent sur les notions générales de la dynamique des structures du point de vue modélisation, formulation des équations de mouvement des systèmes un seul degré de liberté puis a plusieurs degrés de liberté ainsi la résolution des équations.
- Dans le chapitre V : au cours de ce chapitre une étude comparative sur la réponse faite entre un modèle rigide et un modèle flexible.

Enfin, on termine l'étude par des conclusions et des recommandations.

## I.1. NOTION SUR LA THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE :

Soit un solide soumis à un chargement donné. La théorie de l'élasticité linéaire a pour objet, l'étude des contraintes et des déformations qui résultent de l'effet du chargement en supposant que :

- Les déformations sont petites.
  - Les lois de comportement reliant les contraintes aux déformations sont linéaires.
- L'analyse linéaire des problèmes statiques et dynamiques, fait appel aux équations générales de la théorie de l'élasticité linéaire. Par conséquent, dans ce chapitre, nous donnerons les principes fondamentaux de la théorie de l'élasticité.

### I.1.1. Contraintes :

Soit un corps solide déformable schématisé ci-dessous dont la géométrie définit un domaine  $V$  et une surface extérieure  $S$ .

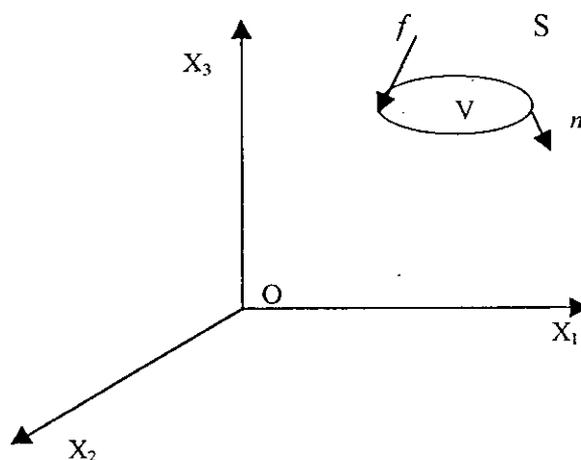


Fig. 1.1

Chaque facette est soumise à une contrainte admettant trois composantes  $\sigma_{ij}$  lorsque :

$i = j$  :  $\sigma_{ij}$  est une contrainte normale.

$i \neq j$  :  $\sigma_{ij}$  est une contrainte tangentielle ou de cisaillement.

On dit que le corps est soumis à un tenseur de contrainte dont les composantes sont  $\sigma_{ij}$  d'une manière générale, le tenseur de Contrainte est symétrique.

### I.1.2. déformations :

Soit  $U(u_1, u_2, u_3)$  le vecteur déplacement d'un point quelconque du domaine  $V$ . Les composantes du tenseur déformation ont pour expressions générales :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (I.1)$$

Lorsque  $i = j$  :  $\epsilon_{ij}$  est une déformation normale qui affect le volume du corps.

$i \neq j$  :  $\epsilon_{ij}$  est une déformation de cisaillement qui modifie la forme du corps.

Comme le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations est symétrique.

Les six composantes  $\epsilon_{ij}$  dépend des trois fonctions  $u_1, u_2$  et  $u_3$  du déplacement. Elles ne sont donc pas indépendantes entre elles. Elles sont liées par des équations dites de compatibilité. Les conditions de compatibilité assurent l'existence du champ de déplacement et son unicité.

**I.1.3. Equation d'équilibre :**

Considérons un cube élémentaire (fig. I-2) de corps solide déformable précédant (fig. I-1) en équilibre.

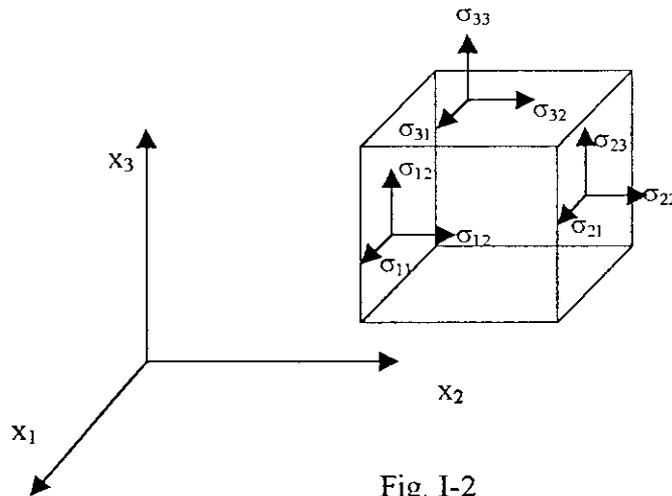


Fig. I-2

Les équations d'équilibre de translation du cube selon les trois axes s'écrivent

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \quad \dots(x_1, x_2, x_3) \tag{I-2}$$

Où  $f(f_1, f_2, f_3)$  est la force de volume par unité de volume, le symbole  $\dots(x_1, x_2, x_3)$  indique qu'on peut déduire les deux dernières équations de la première par permutation cyclique des indices. Il est commode, dans les démonstrations générales d'utiliser la notation indicielle et de rassembler les trois formules en une formule unique

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \tag{I-3}$$

où l'on fait usage de la convention suivante de sommation :

Chaque fois qu'un indice en lettre minuscule apparaît deux fois dans le même monôme, ce monôme représente la somme des trois termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1, 2, 3.

L'équation (I-1) traduit l'équilibre en un point selon les trois directions.

**I.1.4. Loi de comportement :**

Pour les matériaux dits élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations se traduisent sous la forme générale :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (I-4)$$

Où les composantes  $C_{ijkl}$  font intervenir les caractéristiques physiques du matériau.

Dans le cas particulier des matériaux isotropes, les coefficients d'élasticité se réduisent à deux constantes indépendantes  $\lambda$  et  $\mu$  (ou  $E$  et  $\nu$ ).

Les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes connues sous le nom de loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (I-5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (I-6)$$

avec :  $\lambda$  et  $\mu$  coefficients de Lamé.

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$E$  : module d'élasticité du matériau.

$\nu$  : coefficient de Poisson

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker

**I.2. INTRODUCTION AUX METHODES VARIATIONNELLES**

Les méthodes variationnelles nous permettent, selon qu'on considère une variation des déformations ou des contraintes, d'exprimer la variation de l'énergie potentielle totale ou l'énergie complémentaire totale du système, et donc de déterminer un champ de déplacements ou un champ de contraintes d'un corps en équilibre.

Ainsi, pour une approche déplacement on aura à calculer les champs de déplacements par contre pour une approche contrainte on devra chercher le champ de contraintes.

**I.2.1. Définition :**

- Un champ de déplacements cinématiquement admissible est un champ de déplacements qui vérifie les conditions aux limites en déplacements du problème.

- Un champ de contraintes statiquement admissible est un champ de contraintes qui vérifie les équations d'équilibre plus les conditions aux limites en contraintes à la surface.

### 1.2.2. Approche cinématique(déplacements) :

La solution (déplacements et contraintes) du problème de mécanique des solides est à la fois cinématiquement et statiquement admissible. Dans un premier temps nous allons adopter l'approche déplacement pour chercher une formule énergétique à l'aide du champ de déplacements inconnus.

#### 1-2.2.1. Principes des travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie de déformation est égal à la somme des travaux virtuels des forces de volume et de surface dans tout accroissement virtuel cinématique admissible du champ des déplacements.

$$\delta U = \delta \int_V W \, dv = \int_V f_i \, \delta u_i \, dv + \int_S S_i \, \delta u_i \, ds \quad (I-7)$$

$\delta U$  : accroissement virtuel de l'énergie de déformation.

$$\delta U = \delta \int_V W \, dv$$

#### 1.2.2.2. Théorème de l'énergie potentielle en déplacement :

On appelle énergie potentielle en déplacement la fonctionnelle  $V$  définie par :

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) \, dv - \int_V f_i u_i \, dv - \int_S S_i u_i \, ds \quad (I-8)$$

Le premier terme de la fonctionnelle désigne l'énergie de déformation du solide, le second terme désigne le travail des forces volumiques et le troisième terme désigne le travail des forces surfaciques.

#### **Théorème :**

Parmi tous les champs de déplacements cinématique admissibles, le champ solution du problème est celui qui minimise l'énergie potentielle.

Ceci exprime aussi bien l'extremum du potentiel total du système que l'équilibre du corps. En conséquence, l'état d'équilibre correspond au minimum du potentiel total du système.

### 1.2.3. Approche équilibre (contraintes) :

#### 1.2.3.1. Principe des travaux virtuels complémentaires :

Pour un corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie complémentaire de déformation est égal à la somme des travaux des champs virtuels des forces de volume et de surface dans le champ de déplacements réels.

$$\delta U_c = \int_v u_i \delta f_i \cdot dv + \int_s u_i \delta S_i^* \cdot ds \quad (I-9)$$

$\delta U$  : accroissement virtuel de l'énergie de déformation.

$$\delta U_c = \delta \int_v W_c \cdot dv$$

#### 1.2.3.2. Théorème de l'énergie potentielle en contraintes :

On appelle énergie potentielle en contraintes, la fonctionnelle  $V^*$  définie par :

$$V^*(\sigma) = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}) dV - \int_s \sigma_{ij} n_j u_i dS \quad (I-10)$$

**Théorème :** parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles, le champ des contraintes solution du problème est celui qui maximise l'énergie potentielle en contrainte  $V^*$ .

## 1.3. MATRICE DE RIGIDITE ET DE FLEXIBILITE D'UN ELEMENT DE STRUCTURE

### 1.3.1. Discrétisation d'une structure

Un corps déformable possède un nombre infini de points. En chacun de ceux-ci, on peut définir les forces extérieures, les contraintes, les déformations et les déplacements. Tandis que la mécanique des milieux continus utilise des fonctions représentant ces différentes grandeurs en tous les points du corps. Les méthodes de calcul des structures s'appliquent à un nombre fini des grandeurs que l'on traite matriciellement. Dès lors il est indispensable de substituer à la structure étudiée un modèle mathématique composé d'un certain nombre appelés éléments fini ou éléments discrets, reliés entre eux en un nombre fini de points appelés nœuds. Les éléments obtenus par «découpage» de la structure restent des corps déformables continus mais leur forme plus simple permet de les étudier aisément par la mécanique des milieux continus. La discrétisation de la structure permettra donc une analyse par l'emploi d'équations algébriques simultanées et par conséquent à l'aide des ordinateurs.

Les interactions entre éléments sont introduites sous forme des forces et des déplacements généralisés.

Lorsque la discrétisation est terminée, le stade suivant consiste à calculer les caractéristiques des éléments, c'est-à-dire les relations entre les forces généralisées et les déplacements généralisés par l'intermédiaire de matrice de rigidité ou de flexibilité.

### I.3.2. Repère local – Repère global :

La définition de notre structure, et celle des efforts dans les barres, nous a conduit à utiliser implicitement deux repères différents (Fig. I-3)

Le repère global, ou repère de la structure, noté X, Y sert à définir les coordonnées des nœuds. Dans ce repère seront fournies les réactions des appuis et les déplacements des nœuds.

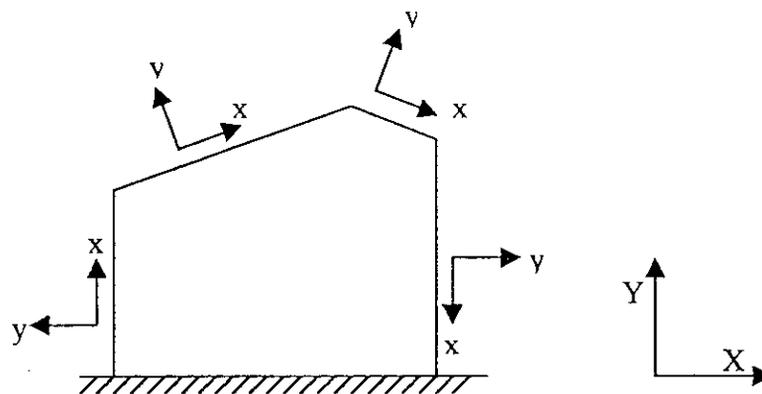


Fig. I-3 Repère local et Repère global

Le repère local, ou repère lié à la barre, noté x, y est repère propre à chaque barre, défini par la fibre neutre de la barre (axe x, orienté du nœud début au nœud fin) et par l'axe y, directement perpendiculaire à l'axe x. Dans ce repère propre à chaque barre, seront exprimés les efforts N, T, M.

### I.3.3. Caractéristique élastique :

Si l'on considère un élément discret élastique soumis à une série de n forces nodales généralisées

$$\{P\} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}^T \quad (\text{I-11})$$

dans la direction desquelles les déplacements généralisés correspondants valent

$$\{u\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \quad (\text{I-12})$$

**a)- Matrice de flexibilité**

l'ensemble de tout les déplacements s'exprime par :

$$\{u\} = [f] \{P\} \quad (I-13)$$

Où  $[f]$  est la matrice de flexibilité (souplesse) de l'élément discret étudié. Celle-ci est symétrique en vertu du théorème de BETTI.

Avec :

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1i} & \dots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2i} & \dots & f_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1} & f_{i2} & f_{i3} & \dots & f_{ii} & \dots & f_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (I-14)$$

la définition d'un coefficient d'influence de souplesse  $f_{ij}$  est la suivante :

$f_{ij}$  {valeur du déplacement selon la coordonnée  $i$ , sous l'action d'une charge unité appliquée selon la coordonnée  $j$ }.

Pour un élément quelconque donné on peut calculer les coefficients d'influence de souplesse en utilisant n'importe quelle méthode du RDM.

**b)- Matrice de rigidité**

l'ensemble de tout les déplacements s'exprime par :

$$\{P\} = [k] \{u\} \quad (I-15)$$

Où  $[k]$  est la matrice de rigidité de l'élément discret étudié. Celle-ci est symétrique en vertu du théorème de BETTI.

Avec :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (I-16)$$

$k_{ij}$  : Coefficient d'influence de rigidité

Les coefficients d'influence de rigidité représentent les forces créés dans la structure si un degré de liberté est contraint à subir un déplacement unité alors que tous les autres sont fixés.

D'après (I-13 ) et (I-15 ), on remarque bien que

$$[k] = [f]^{-1} \tag{I-17}$$

Matrice de rigidité d'un élément poutre, en négligeant les déformations dues aux efforts tranchants :

$$k = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & & & & & \\ & \frac{12EI}{l^3} & & & & \\ & & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \\ & & & & \text{SYM} & \\ -\frac{ES}{l} & & & & \frac{ES}{l} & \\ & & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & & \frac{12EI}{l^3} \\ & & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{I-18}$$

avec

- E : Module de d'élasticité.      S : Section de la poutre.
- I : Moment d'inertie.              l : longueur de la poutre.

### I.3.4. Transformation des coordonnées :

La transformation de coordonnées, consiste à exprimer les caractéristiques des éléments préalablement calculées dans un système d'axes locaux, dans un autre système d'axes globaux.

Soit  $\{u\}$  le vecteur des déplacements élémentaires par rapport à un système d'axes locaux (lié à l'élément )  $(x, y)$  et  $\{u^G\}$  le vecteur des déplacements élémentaires par rapport à un système d'axes globaux  $(X, Y)$ .

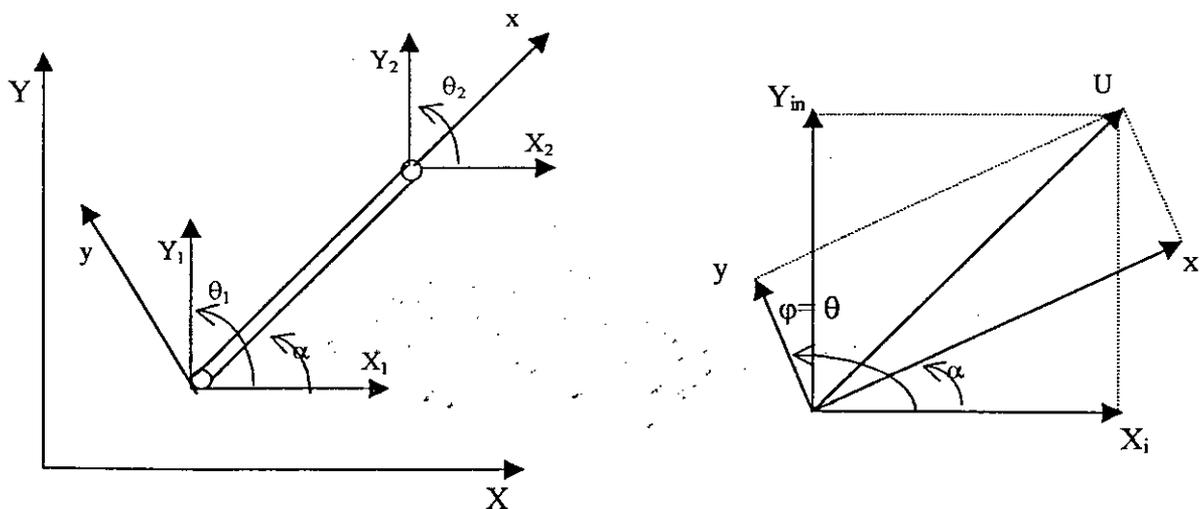


Fig. I.4 : Transformation de coordonnées pour une poutre dans un plan

On peut écrire la relation suivante :

$$\{u\} = [R] \{u^G\} \quad (I-19)$$

avec  $[R]$  : matrice de transformation

Considérons notre cas, une poutre travaillant dans un plan (voir figure I.4). Dans ce cas, on peut écrire pour un nœud (o) donné la relation suivante :

$$x_i = X_i \cos \alpha + Y_i \sin \alpha$$

$$y_i = -X_i \sin \alpha + Y_i \cos \alpha$$

$$\varphi_i = \theta_i$$

$$\text{On a par ailleurs } \{u\} = \{x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2\}$$

$$\{u^G\} = \{X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2, \theta_2\}$$

$$\text{D'où : } [R] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### I.4. METHODES DE CALCUL DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES :

Pour déterminer les forces de liaison et les efforts dans n'importe quelle section d'une structure hyperstatique les équations de la statique ne sont pas suffisantes. Il faut donc ajouter des équations supplémentaires. Ces équations supplémentaires sont des équations caractérisant la déformation de la structure.

Pour les structures hyperstatiques, les efforts sont fonction des charges et des déformations.

Il existe deux principales méthodes de calcul qui sont :

##### I.4.1. Méthode des forces (ou des efforts) :

Dans cette méthode, on prend comme inconnues les forces des liaisons surabondantes.

En supprimant les liaisons surabondantes et en les remplaçant par des forces des inconnues, la structure hyperstatique est transformée en une structure isostatique (appelée structure de base) pour laquelle on peut calculer les déplacements causés par les forces de liaisons.

Les équations supplémentaires, dont le nombre doit être égal au nombre des liaisons supprimées, sont obtenues en considérant que la déformation de la structure de base est la même que celle de la structure

#### **I.4.2. Méthode des déplacements (ou déformations)**

Dans cette méthode, on prend comme inconnues les déplacements subits par les nœuds de la structure (rotation et translation). Le nombre d'inconnues est égal dans ce cas au nombre des déplacements possibles du nœud.

Les équations supplémentaires sont obtenues en écrivant la condition d'équilibre statique de la structure dans son état déformé. L'équilibre doit être assuré pour toute possibilité de déplacement des nœuds (rotation, translation). On obtient ainsi un nombre d'équations égal au nombre d'inconnues.

### I.5. présentation du programme développé

Le programme pour l'analyse statique des structures a été élaboré en utilisant le langage Delphi. Il permet de déterminer les déplacements et les efforts, en tout point de toute structure modélisable en élément poutre.

L'organigramme suivant (Fig.I.4) montre les différentes étapes du calcul.

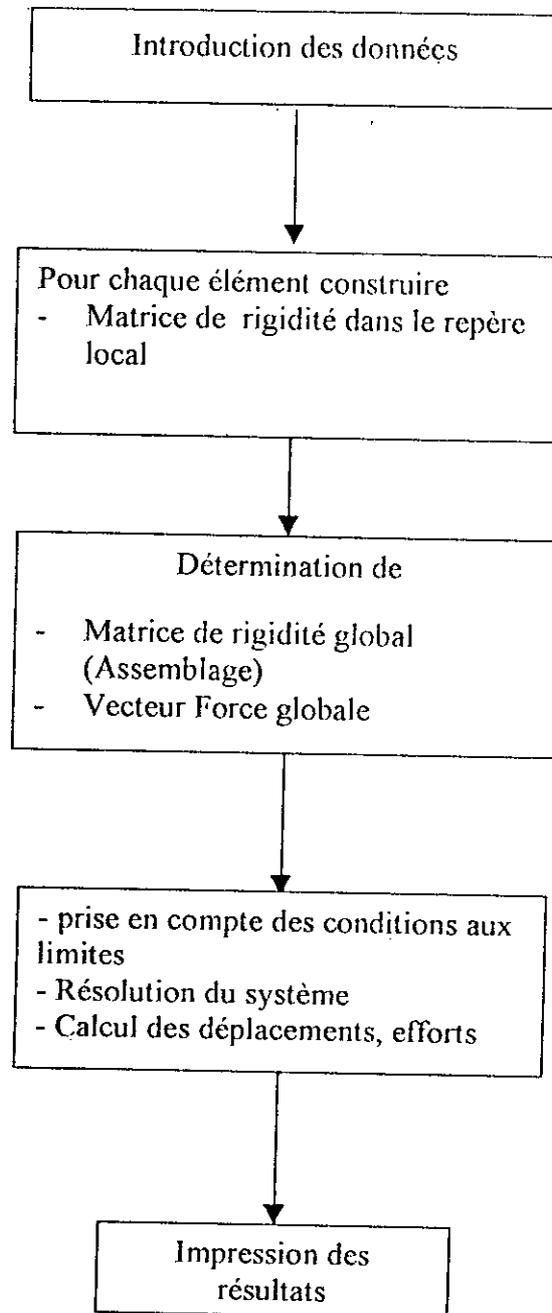


Fig. I-5 Organigramme de calcul statique

## **Chapitre II**

# **Présentation générale de la dynamique des structures**

## II.1. INTRODUCTION :

La dynamique des structures présente une branche de la mécanique appliquée ayant pour objet le calcul ainsi que l'étude du comportement des structures vis-à-vis des vibrations ou chocs.

Les structures généralement caractérisées par une masse et élasticité peuvent effectuer des mouvements relatifs, sous l'action des sollicitations dynamiques, si le mouvement est répétitif, il est appelé «vibration».

Généralement, on comprend par action dynamique, la sollicitation produite par des charges qui varient rapidement dans le temps, de même la réponse d'une structure à un chargement dynamique «c'est-à-dire les déplacements et les contraintes qui en résultent» est également variable dans le temps, donc c'est-à-dire qu'elle est dynamique aussi.

En général, l'inertie présente une partie significative dans l'équilibre de la structure, le caractère dynamique du problème doit être considéré dans la solution, le cas où l'on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées.

Par ailleurs, si le mouvement est si lent que les forces d'inertie pouvant être négligées, l'analyse à tout instant d'une telle structure peut être conduite par une procédure d'analyse statique même si le chargement et la réponse varient dans le temps.

## II.2. TYPE DE CHARGEMENT :

Pratiquement n'importe qu'elle structure est susceptible de subir, pendant sa durée de vie, un chargement dynamique sous une forme ou une autre. Du point de vue analytique, on peut subdiviser les chargements donnés en deux grandes catégories :

### II.2.1. *Chargements périodiques :*

Ils sont constitués par des charges répétitives qui conservent les mêmes évolutions dans le temps sur un grand nombre de cycles, le chargement le plus simple est de forme sinusoïdale.

### II.2.2. *Chargements non périodiques :*

Ce sont soit des impulsions de courte durée, soit des chargements de longue durée et de formes quelconques. Les chocs et les impulsions sont des sources courantes de chargements impulsifs. Pour ces efforts de courte durée on peut utiliser des formes d'analyse simplifiées. En revanche, un chargement quelconque de longue durée, comme peut en provoquer une source sismique, ne peut être traité que par une procédure d'analyse dynamique.

### II.3. CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PROBLEME DYNAMIQUE :

Un problème de dynamique des structures se distingue du problème statique correspondant par deux caractéristiques importantes. La première est, par définition, la nature évolutive du problème dynamique dans le temps. Comme la charge et la réponse varient avec le temps, il est évident qu'un problème dynamique n'a pas qu'une solution, ce qui déjà le différencie d'un problème statique ; il faut en effet déterminer une succession de solution correspondant à tous les instants qui présente un intérêt dans l'histoire de la réponse. Une étude dynamique sera donc plus complexe et moins rapide qu'une étude statique.

### II.4. FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT :

L'objectif initial de l'étude dynamique d'une structure est la détermination de l'histoire dans le temps des déplacements d'une certaine structure soumise à un chargement donné et variable dans le temps. Dans la plupart des cas, une étude approchée ne faisant intervenir qu'un nombre limité de degrés de liberté procurera une précision suffisante, et le problème pourra donc être réduit à la détermination de l'histoire dans le temps des seules composantes de déplacement choisies.

Les expressions mathématiques qui définissent les déplacements dynamiques sont appelées équation du mouvement de la structure ; la résolution de ces équations donne les histoires de déplacements recherchées.

La formulation des équations du mouvement peut être présentée par des méthodes « principes » différentes ; parmi ces méthodes « principes » :

#### II.4.1. Principe d'Alembert :

Les équations du mouvement d'un système dynamique quelconque sont des expressions de la deuxième loi de NEWTON, selon laquelle le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque  $m$  est égal à la force qui lui est appliquée.

Cette relation peut s'exprimer mathématiquement par l'équation différentielle :

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{du}{dt} \right) \quad (\text{II-1})$$

$P(t)$  : le vecteur de la force appliquée.

$u(t)$  : le vecteur position de la masse  $m$ .

Dans la plupart des problèmes, de dynamique des structures, on peut supposer que la masse  $m$  ; ne varie pas dans le temps, auquel cas l'équation précédente s'écrit :

$$p(t) = m \frac{d^2u}{dt^2} = m\ddot{u}(t) \quad (\text{II-2})$$

Les points représente la dérivation par rapport au temps, cette dernière équation qui n'est autre que l'expression bien connue de l'égalité entre la force appliquée et le produit de la masse et de l'accélération communiquée, peut également s'écrire :

$$p(t) - m\ddot{u}(t) = 0 \quad (\text{II-3})$$

$m\ddot{u}(t)$  : appelée force d'inertie, s'oppose à l'accélération de la masse, cette loi selon laquelle se produit une force d'inertie proportionnelle et opposée à son accélération, est connue sous le nom de «principe d'Alembert ».

#### II.4.2. Principe des déplacements virtuel :

##### *Enoncé*

Si un système en équilibre, sous l'action d'un ensemble de force, et soumis à un déplacement virtuel, alors le travail total effectué par ces forces est nul. Par conséquent, ceci est traduit par l'expression d'un équilibre.

#### II.4.3. Principe de Hamilton :

Le principe de Hamilton est un principe variationnel basé sur des grandeurs énergétiques scalaires, le principe variationnel le plus applicable est celui de Hamilton que l'on peut exprimer comme :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (\text{II-4})$$

où :

$T$  : énergie cinétique totale du système

$U$  : énergie potentielle total du système

$W_{nc}$  : travail des forces non conservatrices agissant sur le système.

Le principe de Hamilton exprime que la somme de la variation de l'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatives, prise pendant un intervalle de temps entre  $t_1$  à  $t_2$ , est identiquement nulle.

Pour un cas statique on a  $T=0$ , d'où l'équation se réduit à :

$$\delta(U - W_{nc}) = 0 \quad (\text{II-5})$$

D'où le principe du minimum de l'énergie potentielle souvent utilisé pour des analyses statiques.

*Récapitulation :*

On a vu que l'équation du mouvement d'un système dynamique pouvait se formuler par l'une des trois méthodes possibles présentées, qui diffèrent en principe de base, mais ils ont le même objectif.

- Principe de Hamilton :

Il permet d'éviter les problèmes de détermination des équations vectorielle de l'équilibre consiste à utiliser les grandeurs énergétiques sous forme variationnelle.

- Principe des déplacements virtuels :

Il nous facilite l'expression des forces agissant sur une structure qui comprend plusieurs points massiques (corps finis), liés entre eux en fonction des degrés de liberté de déplacements.

- Principe d'Alembert :

C'est la méthode la plus évidente, consiste à écrire directement l'équilibre dynamique de toutes les forces agissant sur le système, en tenant compte des effets d'inertie.

## **Chapitre III**

# **Système à un seul degré de liberté**

### III.1. INTRODUCTION

Les caractéristiques physiques essentielles de toute structure élastique linéaire soumise à des charges de nature dynamique sont :

- Sa masse
- Ses propriétés élastiques (souplesse, rigidité).
- Son mécanisme de déperdition d'énergie ou d'amortissement.
- La source extérieure d'exécution ou chargement.

Dans le modèle le plus simple de système à un seul degré de liberté, chacune de ces caractéristiques est supposée, condensée dans un élément physique unique : la (fig. III-1) montre un schéma d'un tel système.

Toute la masse  $m$  de ce modèle simple est localisé dans le bloc rigide. Des rouleaux contraignent son déplacement de manière qu'il ne puisse se produire que suivant une translation simple ; l'unique coordonnée de déplacement  $u$  définit donc complètement sa position. La résistance élastique du déplacement est représentée par le ressort sans masse de rigidité  $k$ , et le mécanisme de déperdition d'énergie par l'amortisseur  $c$ . Le mécanisme de chargement externe qui provoque la réponse dynamique du système est la charge  $P(t)$  variable dans le temps

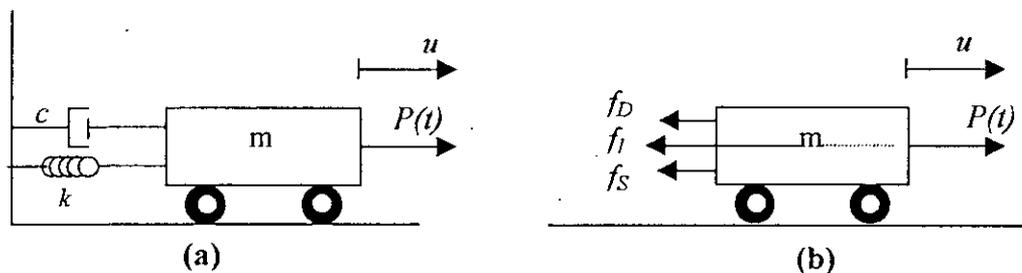


Fig. III-1 système idéalisé à un degré de liberté

- a) composante élémentaire
- b) forces participant à l'équilibre

### III.2. EQUATION DU MOUVEMENT :

L'équation du mouvement du système de (fig. III-1) s'obtient par n'importe lequel des trois procédés présentés précédemment, dans ce cas élémentaire, la méthode la plus simple consiste à exprimer directement l'équilibre de toutes les forces agissant sur la masse (principe d'Alembert) :

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (\text{III-1})$$

$p(t)$ : chargement appliqué

$f_I$  : la force d'inertie

$f_D$  : la force d'amortissement

$f_S$  : la force du ressort élastique

Chacune des forces figurants au premier membre de cette équation est fonction du déplacement  $u$  ou de ses dérivées par rapports au temps tel que :

$$f_s = ku \quad (\text{III-2-a})$$

$$f_I = m\ddot{u} \quad (\text{III-2-b})$$

$$f_D = c\dot{u} \quad (\text{III-2-c})$$

Par injection de ces formules dans l'équation (III-1) on aura l'équation du mouvement de ce système d'un seul degré de liberté. :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (\text{III-3})$$

### III.3. INFLUENCE DES FORCES DE PESANTEUR :

Considérant à présent le système représenté en (Fig. III-2-a) qui correspond à celui de la (Fig. III.1.a) après une rotation de  $(90^\circ)$  «si bien que les forces de gravité agissant dans la direction du déplacement », le système de forces agissant sur la masse est alors défini comme sur le schéma de la (Fig.III-2-b), et si on utilise les équations (III-2 ) l'expression de l'équilibre s'écrit :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) + W \quad (\text{III-4})$$

$W$  : le poids du bloc rigide.

Si on exprime le déplacement total  $u$  comme la somme du déplacement statique  $\Delta_{st}$  (dû au poids  $W$ ) et du déplacement dynamique complémentaire  $\bar{u}$  ; voir la (Fig.III-2)

$$u = \Delta_{st} + \bar{u} \quad (\text{III-5})$$

La force dans le ressort s'écrit :

$$f_s = ku = k\Delta_{st} + k\bar{u} \quad (\text{III-6})$$

En reportant l'équation ( III-6 ) dans l'équation ( III-4), on obtient :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\bar{u} + k\Delta_{st} = p(t) + W \quad (\text{III-7})$$

Et comme,  $k\Delta_{st} = W$  , on a finalement :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\bar{u} = p(t) \quad (\text{III-8})$$

Si on dérive à présent l'équation (III-5) en remarquant que  $\Delta_{st}$  est indépendant du temps (et donc que  $\ddot{u} = \ddot{\bar{u}}$  , etc....), l'équation ( III-8 ) peut être mise sous la forme :

$$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u} = p(t) \quad (\text{III-9})$$

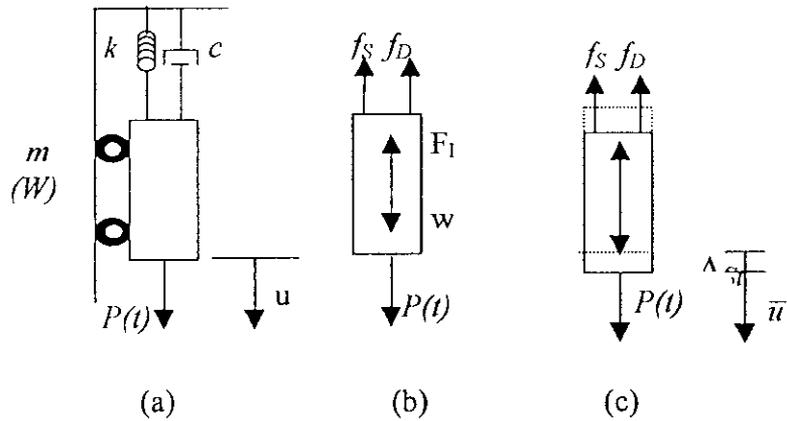


Fig.III-2 : Influence de la pesanteur sur l'équilibre d'un système à un seul degré de liberté

En comparant les équations (III-9) et (III-3), on constate que si le mouvement est mesuré par rapport à la position de l'équilibre statique du système dynamique, son équation n'est pas affectée par les forces de la pesanteur, pour cette raison les déplacements seront désormais comptés à partir de la position statique du système, et les déplacements ainsi repérés constitueront la réponse dynamique.

De cette manière les flèches, contraintes, etc. . En totales seront obtenues en ajoutant les valeurs statiques adéquates aux résultats de l'étude dynamique. \*

**III.4. INFLUENCE D'UNE EXCITATION D'APPUI :**

On considère une masse  $m$  liée à une console verticale encastrée dans le sol en un point A (Fig. III-3 ), ce qui constitue l'équivalent d'un oscillateur simple.

Pour tenir compte du mouvement du sol en cas de séisme, on impose au point A un déplacement horizontal  $v_s(t)$ , variable avec le temps.

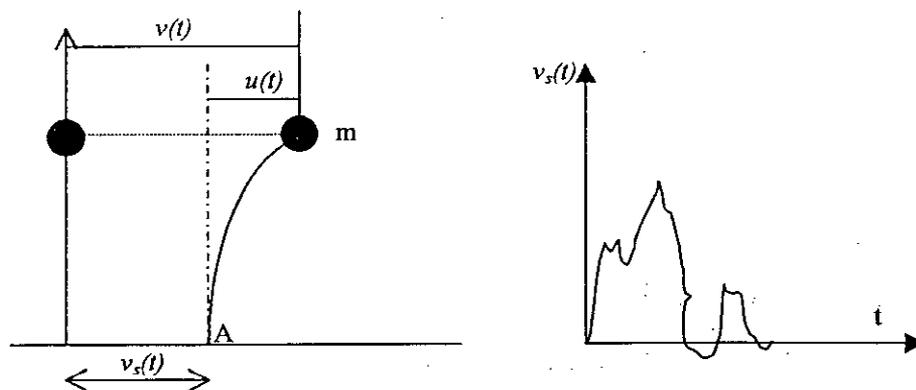


Fig. III-3 : Excitation par déplacement d'appui

Les déplacements de la masse  $m$  sont mesurés, soit dans un repère relatif lié au point A (déplacement  $u(t)$ ), soit dans un repère absolu (déplacement  $v(t)$ ), ces déplacements sont liés par la relation :

$$v(t) = u(t) + v_s(t) \quad (\text{III-10})$$

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t) + \dot{v}_s(t) \quad (\text{III-11})$$

La masse est soumise aux forces horizontales suivantes :

- une force de rappel due à la console qui est proportionnelle au déplacement relatif  $u$  :

$$f_1 = -ku$$

- une force d'amortissement supposée proportionnelle à la vitesse relative  $\dot{u}$

$$f_2 = -c\dot{u}$$

Ces forces sont liées à l'accélération absolue  $\ddot{v}$  par la relation suivante :

$$f_1 + f_2 = m\ddot{v} \quad (\text{III-12})$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}\dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (\text{III-13})$$

Soit, compte tenu de ( III-11 ):

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p(t)}{m} \quad (\text{III-14})$$

avec 
$$p(t) = -m\ddot{v}_s(t) \quad (\text{III-15})$$

On voit qu'on se ramène à l'étude d'un oscillateur simple dans le repère relatif, en supposant la masse soumise à une force fictive  $p(t) = -m\ddot{v}_s(t)$  Proportionnelle à l'accélération absolue du point d'appui A.

### III.5. RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT :

L'équation du mouvement d'un système à un seul degré de liberté est équivalente à l'équation du mouvement d'un système simple masse-ressort avec amortissement (Fig.III-4)

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (\text{III-16})$$

d'où l'équation du mouvement :

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{1}{m} p(t) \quad (\text{III-17})$$

avec

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{III-18})$$

Le coefficient  $\omega$  est appelé pulsation et se mesure en radian par seconde.

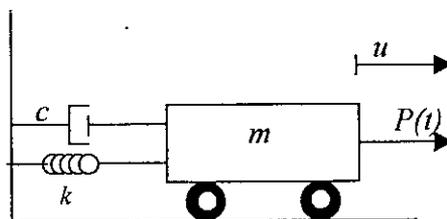


Fig. III-4. système élémentaire à un degré de liberté

#### III.5.1. Oscillation libre :

En absence de la force extérieure  $p(t)$ , la masse oscille librement. Ce mouvement peut par exemple, peut être obtenu en relâchant l'oscillateur après l'avoir écarté de sa position d'équilibre.

D'après (III-17), l'équation du mouvement s'écrit:

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (\text{III-19})$$

La solution prend une forme différente selon que l'oscillation est amorti ou non

**III.5.1.1. Oscillations libres non amorties :**

Dans ce cas le coefficient  $c$  est nul et l'équation du mouvement :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (\text{III-20})$$

a une solution de la forme :

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{III-21})$$

Les coefficients  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes que l'on détermine par des conditions aux limites.

Si l'on se donne par exemple, le déplacement  $u_0$  et la vitesse  $\dot{u}_0$  à l'origine des temps, le déplacement a pour expression :

$$u = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (\text{III-22})$$

La période  $T$  du mouvement (en seconde) :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{III-23})$$

La fréquence du mouvement mesurée en Hertz, a pour valeur

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{III-24})$$

*Remarque :*

Dans la relation ( III-23) ; on doit utiliser les unités du système international :

- la masse exprimée en kg (ou tonnes )
- le coefficient  $k$  en N/m (ou kn/m )

Si on exprime  $k$  en kilogrammes-force par mètre (ou tonne-force par mètre) comme il est usuel de le faire, il convient d'effectuer un changement d'unité et la relation (III-23) devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g k}} \quad (\text{III-25})$$

avec  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$m$  : exprimé en tonnes,

$k$  : exprimé en tonnes-force par mètre,

$T$  : en seconde.

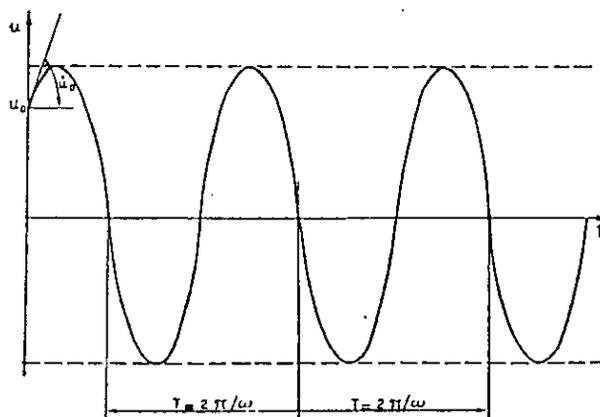


Fig.III-5 Oscillations libres non amorties

### III.5.1.2. Oscillation libre amortie :

La forme de la solution dépend de la valeur d'amortissement  $c$ .

Si on pose :

$$\xi = \frac{C}{2m\omega} \quad (\text{III-25})$$

On doit distinguer les cas suivants :

#### a) Amortissement critique : $\xi = 1$

La solution de l'équation (III-19) est de la forme

$$u(t) = (A + Bt) \exp(-\omega t) \quad (\text{III-26})$$

Les constantes A, B peuvent s'exprimer en fonction du déplacement  $u_0$  et de la vitesse  $\dot{u}_0$  à l'origine des temps, on obtient alors :

$$u(t) = [u_0(1 + \omega t) + \dot{u}_0 t] \exp(-\omega t) \quad (\text{III-27})$$

Le mouvement ne comporte pas d'oscillation

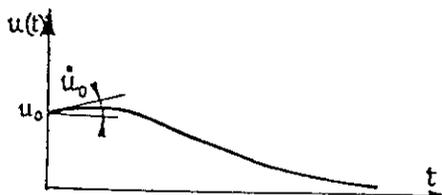


Fig.III-6 Oscillation par amortissement critique

b) *Oscillation suramortie* :  $\xi > 1$ 

La solution est de la forme :

$$u(t) = (A \exp \omega_d t + B \exp(-\omega_d t)) e^{-\xi \omega t} \quad (\text{III-28})$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\text{III-29})$$

Comme dans le cas précédent, le mouvement ne présente pas d'oscillation.

c) *Oscillation sous-amortie* :  $\xi < 1$ 

C'est le seul cas intéressant en pratique pour le calcul dynamique des structures, celles-ci ayant toujours un amortissement inférieur à l'amortissement critique, la solution de l'équation ( III-19 ) est de la forme :

$$u(t) = (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) \exp(-\xi \omega t) \quad (\text{III-30})$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

Si on introduit les conditions initiales  $u_0$ ,  $\dot{u}_0$  à l'origine des temps, on obtient :

$$u(t) = \left( \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_d} \sin \omega_d t + u_0 \cos \omega_d t \right) \exp(-\xi \omega t) \quad (\text{III-31})$$

Le mouvement est pseudo-périodique (Fig.III-7), l'amplitude des extremums décroissant avec le temps à cause de l'amortissement.

La pseudo-période a pour valeur :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad (\text{III-32})$$

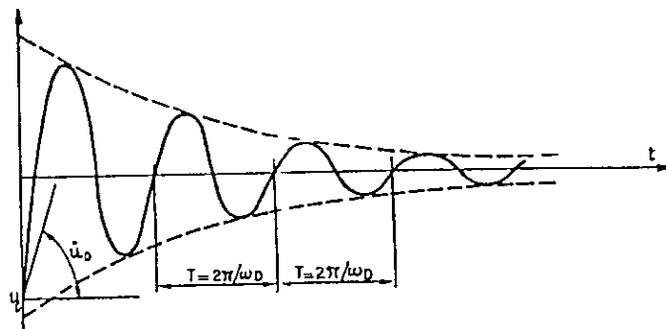


Fig.III-7 Oscillations libres sous-amorties

### III.5.2 Oscillations forcées :

On considère un oscillateur simple initialement au repos et soumis à une force variable dans le temps  $P(t)$ . Avant l'étude du cas général, on examinera tout d'abord le cas particulier.

*Cas particulier de l'excitation harmonique :*

Une excitation est harmonique si la force  $P(t)$  est une fonction sinusoïdale du temps

$$p(t) = p_0 \sin \alpha t \quad (\text{III-33})$$

Une telle force est par exemple engendrée par une machine tournant avec une vitesse angulaire  $\alpha$ .

L'équation du mouvement est déduit de ( III-17 )

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{P_0}{m} \sin \alpha t \quad (\text{III-34})$$

Dans le cas d'un oscillateur sous-amorti, la solution est de la forme

$$u(t) = (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \exp(-\xi \omega t) + \frac{P_0}{K} \lambda \sin(\alpha t - \theta) \quad (\text{III-35})$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\omega}$$

$$\theta = \text{arctg} \frac{2\xi\omega}{1 - \beta^2}$$

Les coefficients A et B peuvent être calculés en exprimant qu'au temps  $t=0$  ; le déplacement et la vitesse sont nuls.

On remarque que le déplacement est la somme de deux termes :

- le premier terme définit le mouvement transitoire qui est amorti et disparaît donc rapidement (Fig. III-8-a)
- le deuxième terme définit le mouvement permanente qui s'effectue avec la même pulsation  $\alpha$  de la force excitatrice (Fig. III-8-b).

Après une phase transitoire, le régime permanent s'établit (Fig. III-8-c) définit par la relation

$$u(t) \frac{P_0}{k} \lambda \sin(\alpha t + \theta) \quad (\text{III-36})$$

Contrairement au cas des oscillations libres qui s'effectuent avec une pseudo-période propre à l'oscillation du mouvement permanent et celle de la force excitatrice.

Le coefficient  $\frac{P_0}{K}$  représente le déplacement statique du ressort sous l'action de la force  $P_0$ .  
Le coefficient  $\lambda$  est le coefficient d'amplification (dynamique).

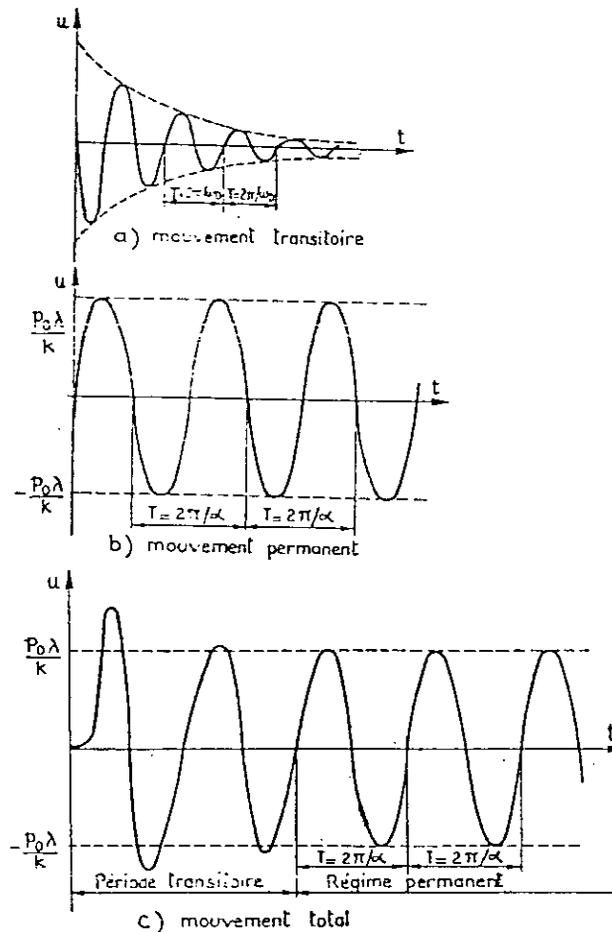


Fig.III-8 Oscillations forcées. Cas de l'excitation harmonique

On voit donc que la réponse d'un oscillateur à une excitation donnée dépend essentiellement de sa pulsation propre :

- Pour un oscillateur infiniment raide ( $\omega$  infinie,  $\beta = 0$ ) il n'y a pas d'amplification de la déformée statique, le mouvement est sinusoïdale d'amplitude  $\frac{P_0}{K}$ .
- Pour un oscillateur très souple (grande valeur de  $\beta$ ), le coefficient d'amplification a une valeur très faible ; le mouvement est sinusoïdal d'amplitude  $\frac{P_0}{m\alpha}$ .
- Lorsque la pulsation de l'oscillateur est égale à celle de la force excitatrice ( $\beta = 1$ ), celui-ci entre en résonance, le coefficient d'amplification ayant pour valeur

$$\lambda = \frac{1}{2\xi}$$

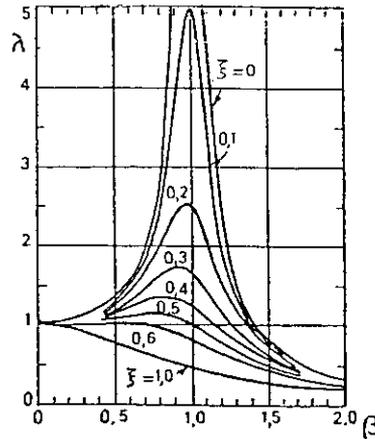


Fig.III-9 Excitation harmonique  
Coefficient d'amplification du

III.5.3 Cas général :

On considère une force P(t) de forme quelconque, il peut s'agir d'une force périodique engendrée par une machine ou d'une impulsion due à un choc

La solution de l'équation du mouvement (III-17) est exprimée par l'intégrale de Duhamel

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t P(\tau) \exp(-\xi\omega(t-\tau)) \times \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \tag{III-37}$$

Pendant le temps de l'application de la force P(t), la masse soumise à des oscillations forcées auxquels succèdent des oscillations libres amortis (fig. III-10).

Dans le cas d'une oscillation non amorti, l'intégral de Duhamel prend la forme s'écrit :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t P(\tau) \times \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \tag{III-38}$$

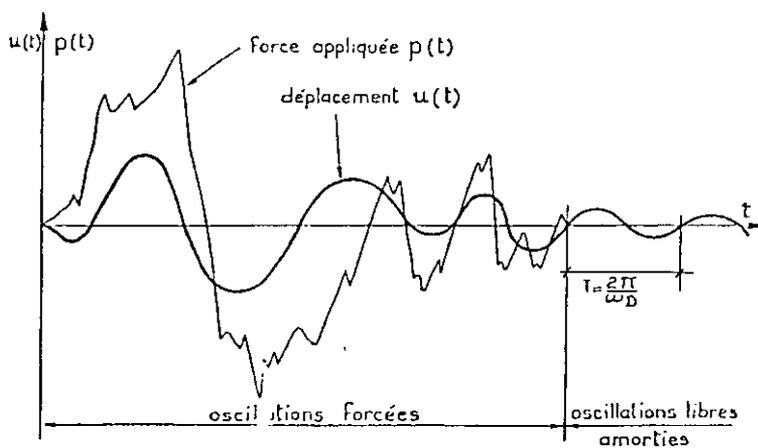


Fig.III-10 : Oscillations forcées. Cas général

## **Chapitre IV**

# **Système à plusieurs degrés de libertés**

#### IV.1. INTRODUCTION

Dans l'étude du comportement dynamique des structures, toute structure pouvait être représentée sous forme d'un système à un seul degré de liberté, et que sa réponse à une excitation dynamique pouvait alors être exprimé par une équation différentielle unique.

Si les caractéristiques mécaniques du système sont telles qu'une coordonnée unique suffit effectivement à exprimer son mouvement et qu'aucun autre mouvement n'est possible, alors le système est un système à un seul degré de liberté et la solution en question conduit à la réponse dynamique exacte.

Si par contre la structure possède plus d'un mode de déplacement mais qu'on la représente toujours par un modèle à un degré de liberté, la résolution de cette équation unique ne conduira qu'à une représentation approchée du comportement dynamique exact.

En général, la réponse dynamique d'une structure ne pourra pas être exprimée de manière précise par un modèle à un seul degré de liberté.

L'expression de la réponse faisant intervenir aussi bien l'historique du déplacement que son amplitude, le comportement résultant ne peut-être représenté qu'à l'aide de plusieurs coordonnées de déplacement c'est-à-dire que le système doit comporter plusieurs degrés de liberté.

Le nombre de degré de liberté de la structure est défini comme étant le nombre de paramètres indépendants qui peuvent définir entièrement la position du système quelconque quel que soit l'instant « t » du mouvement. Il est aussi défini comme étant le nombre de déplacements indépendants du système considéré.

#### IV.2. EXPRESSION DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE :

L'équation du mouvement du système s'exprime en écrivant l'équilibre des forces effectivement associées à chaque degré de liberté.

En général on aura quatre types de forces à chaque nœuds « i » :

- la force appliquée  $P_i(t)$ , et les forces induites par le moment lui-même, c'est-à-dire la force d'inertie  $f_{Ii}$
- la force d'amortissement  $f_{Di}$ , et la force élastique  $f_{Si}$

Le système des équations de l'équilibre s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= P_1(t) \\
 f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= P_2(t) \\
 f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} &= P_3(t) \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{IV-1}$$

Où sous forme matricielle :

$$\{f_I\} + \{f_D\} + \{f_S\} = \{P(t)\} \quad (\text{IV-2})$$

Chaque force résistante s'exprime au moyen de coefficient d'influence. Par exemple la composante élastique de la force au point 1 dépend en général des composantes des déplacements de tous les autres points de la structure ; ainsi au point 1 :

$$f_{S1} = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 + \dots + k_{1N}u_N \quad (\text{IV-3})$$

De même pour le nœud 2 :

$$f_{S2} = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + \dots + k_{2N}u_N \quad (\text{IV-4})$$

Et en général :

$$f_{Si} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + k_{i3}u_3 + \dots + k_{iN}u_N \quad (\text{IV-5-a})$$

Ces expressions supposent que la structure est évidemment à un comportement linéaire et que le principe de superposition s'applique, les coefficients  $k_{ij}$  sont appelés coefficients d'influence de rigidité :

$$k_{ij} \begin{cases} \text{force correspondant à la coordonnée } i \\ \text{produite par un déplacement de la coordonnée } j \end{cases} \quad (\text{IV-5-b})$$

L'expression des forces  $f_{Si}$  peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{Si} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{IV-6-a})$$

soit :

$$\{f_S\} = [k] \{u\} \quad (\text{IV-6-b})$$

$[k]$  : s'appelle la matrice de rigidité de la structure (pour l'ensemble des déplacements choisis).

$\{u\}$  : le vecteur déplacement représentant la déformation de la structure.

Si on admet que l'amortissement ne dépend que de la vitesse, c'est-à-dire qu'il est du type visqueux, les forces d'amortissement peuvent s'exprimer de la même manière qu'à l'équation (IV-6-a), au moyen de coefficient d'influence d'amortissement :

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{Di} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{IV-7-a})$$

$\dot{u}_i$  : le taux d'accroissement (vitesse) de la coordonnée de déplacement «i».

$c_{ij}$  : coefficient d'influence d'amortissement

$c_{ij}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{force correspondant à la coordonnée } i \\ \text{et provoquée par une vitesse unité suivant la coordonnée } j \end{array} \right.$

soit :  $\{f_D\} = [c] \{\dot{u}\}$  (IV-7-b)

$[c]$  : la matrice d'amortissement (relative au degré de liberté choisit).

$\{\dot{u}\}$  : le vecteur vitesse.

De même les forces d'inertie peuvent s'exprimer au moyen de coefficients d'influence appelés coefficients d'influence de masse  $m_{ij}$ , liant les accélérations de chaque degré de liberté à la résultante correspondante des forces d'inertie, ainsi :

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{Ii} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & \dots & m_{ii} & \dots & m_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{IV-8-a})$$

$\ddot{u}_i$  : l'accélération de la coordonnée i

$m_{ij}$  : les coefficients d'influence sont définis comme :

$m_{ij}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{force correspondant à la coordonnée } i \\ \text{causée par une accélération unité de la coordonnée } j. \end{array} \right.$

soit :  $\{f_I\} = [m] \{\ddot{u}\}$  (IV-8-b)

$[m]$  : matrice de masse de la structure

$\{\ddot{u}\}$  : vecteur accélération.

A présent il est possible d'exprimer l'équilibre dynamique global de la structure :

$$[m] \{\ddot{u}\} + [c] \{\dot{u}\} + [k] \{u\} = \{P(t)\} \quad (\text{IV-9})$$

La dimension des matrices représentées ici correspondant au nombre de degré de liberté utilisé pour décrire la déformée de la structure.

Cette équation exprime donc les N équations d'équilibre relatives aux N degrés de liberté choisis, définissent la réponse.

Si la force excitatrice  $p(t)$  est une action sismique donnée par son accélération  $\ddot{x}_g$ , alors l'équation (IV-9) se transforme en :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[m]\{B\}\ddot{x}_g$$

où  $\{B\}$  est un vecteur unitaire.

### IV.3. LES MATRICES CARACTERISANT LES PROPRIETES D'UNE STRUCTURE :

#### IV.3.1 Caractéristique élastique :

##### - Rigidité :

Les coefficients d'influence de rigidité définis par l'équation (IV-5), représentent les forces créés dans la structure si un degré de liberté contraint à subir un déplacement unité alors que tous les autres sont fixés.

Ainsi que les coefficients d'influence de rigidité sont numériquement égaux aux forces qu'il faut appliquer pour imposer cette condition de déplacement nuls et unités.

Ces coefficients sont positifs lorsque les forces sont dans le sens des déplacements, et négatifs dans le cas contraire.

#### IV.3.2 Caractéristiques massiques :

##### Matrice des masses concentrées :

Pour simplifier la représentation des caractéristiques massiques d'une structure on doit supposer la concentration de la masse aux points de définition des déplacements en translation, le calcul de ces masses ponctuelles suppose que la structure constituée d'un nombre finit de segments. La (fig.IV-1) illustre cette idée dans le cas d'une poutre.

$$m_1 = m_{1a} + m_{1b}$$

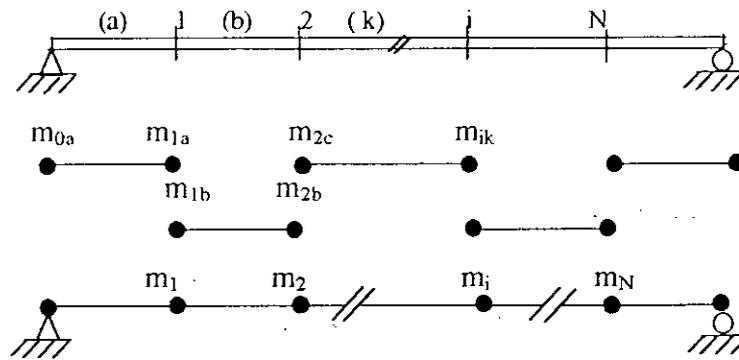


Fig.IV-1 concentration de la masse dans les nœuds d'une poutre

Pour un système on considère que les degrés de liberté de translation, la matrice de masse est diagonale pour l'exemple (Fig.IV-1) elle s'écrit :

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & . & . & . \\ . & 0 & m_3 & 0 & . & . \\ . & . & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & 0 & m_i & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & m_N \end{bmatrix}$$

$m_i$ : étant la masse concentrée relative au point d'application et à la direction du déplacement

L'avantage de l'approche par concentration des masses est qu'elle simplifie les calculs numériques puisqu'en excluant les couplages entre les différents déplacements, elle diagonalise la matrice d'inertie.

- Le nombre de termes diagonaux égale au nombre des degrés de liberté.
- Les  $m_{ij}$  sont nuls car une accélération appliquée à un point ne peut produire une force d'inertie que dans le point où la masse est concentrée.
- Le coefficient d'influence est  $m_{ij} = m_i$  (diagonal).

### IV.3.2 Amortissement :

Les structures peuvent présenter un amortissement substantiel quand elles sont assujetties à des chargements dynamiques, cependant l'évaluation de ce genre de phénomène reste à ce jour tout à fait vague et empirique et ne peut en aucun cas être qualifié avec certitude.

Généralement, on présente la matrice d'amortissement par :

$$[c] = a_0 [m] + a_1 [k] = \alpha [m] + \beta [k] \quad (\text{IV-10})$$

$[m]$  et  $[k]$  étant respectivement la matrice masse et la matrice rigidité.

Rayleigh a montré qu'une matrice d'amortissement de la forme :

$[c] = a_0 [m] + a_1 [k]$ , où  $a_0$  et  $a_1$  sont des coefficients arbitraires, satisfera à la condition d'orthogonalité.

Les constantes  $a_0$  et  $a_1$  peuvent être reliées aux facteurs d'amortissement de n'importe quel mode J par :

$$\xi_j = \frac{a_0}{2\omega_j} + \frac{a_1 \omega_j}{2} \quad (\text{IV-11})$$

$\xi_j$ : facteur d'amortissement du mode J.

$\omega_j$ : fréquence angulaire propre au mode J.

Elle peut être déterminée par l'analyse d'oscillateur libre, d'après l'équation (IV-11) on aura donc si on ne tient compte que des deux (2) premiers modes :

$$a_0 = \alpha = 2\omega_1\omega_2 (\xi_2\omega_1 - \xi_1\omega_2) / (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

$$a_1 = \beta = 2(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1) / (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

Ces facteurs d'amortissement sont généralement déterminés expérimentalement à l'aide des machines vibrantes sur des constructions existantes, pour illustrer cette remarque le tableau suivant donne les facteurs d'amortissements de quelques structures :

Types de construction	$\xi$
Portiques en B.A.	2 à 15%
Murs porteurs et préfabriqués	5 à 20%
Structures métalliques	2 à 6%
Ponts métalliques	2 à 10%
Ponts en B.A.	3 à 15%
Constructions massives	5 à 10%
Sols de fondation	5 à 40%

#### IV.4. MODELISATION DES STRUCTURES :

La détermination d'un modèle tenant compte le plus correctement possible la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à une excitation donnée.

Si le calcul des masses et de leur position peut être effectuée avec une précision, le calcul des raideurs est souvent très rapproché.

En effet dans le cas des constructions en béton armé, les inerties des sections sont modifiées par la fissuration et il existe une imprécision sur la valeur des modules et des largeurs des tables de compression.

Pour les ossatures métalliques, le calcul des raideurs est plus précis, mais dans le cas des charpentes boulonnées, une erreur est introduite par le jeu dans les assemblages.

Compte tenu de toutes ces imprécisions, il est donc inutile de détailler excessivement un modèle dans le seul but de restituer la raideur de la structure, par contre, il faut prévoir un nombre suffisant de masses concentrées, de même on peut être ainsi conduit à établir des modèles différents en fonction de la direction de l'excitation.

La structure est modélisée par des barres ou des éléments reliant les nœuds entre eux. On appelle nœuds ceux qui sont situés au croisement de deux éléments. Chaque nœud possède six degrés de liberté en maximum, c'est-à-dire six mouvements possibles (trois rotations et trois translations), mais en pratique, on pourra souvent n'en considérer qu'un nombre réduit. Dans le cas d'une structure plane, chaque nœud possède en principe trois degrés de liberté.

En général dans le cas des structures auto-stables la rigidité à la flexion transversale des planchers est négligée ; et pour cette raison on considère deux types de modélisation

##### IV.4.1. Cas des planchers rigides (modèle 1) :

Les nœuds d'un même plancher sont liés rigidement entre eux et le plancher se déplace dans son ensemble sans subir de déformation.

Dans ce cas, la modélisation des structures auto-stables peut être faite en considérant un système masse-ressort équivalent (couplage direct), dans lequel les masses représentent les planchers et les coefficients de raideur des ressorts représentent les rigidités des poteaux de la structure étudiée.

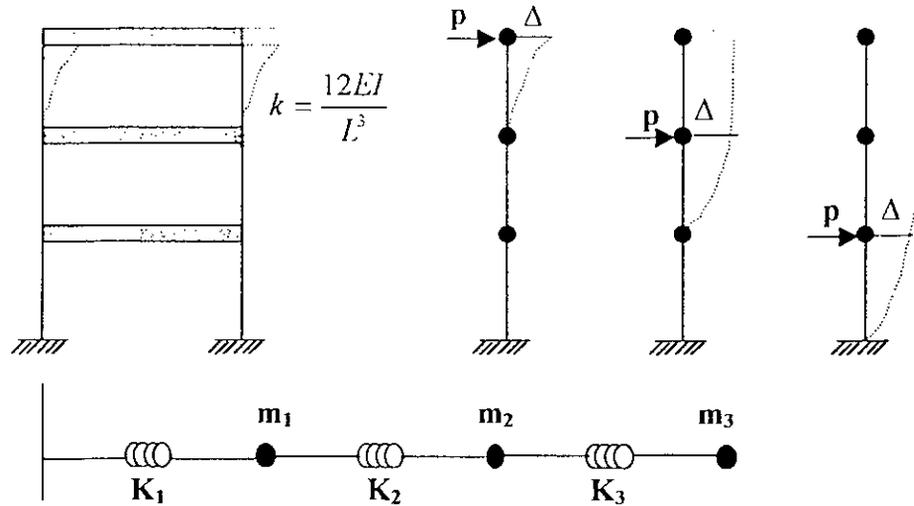


Fig. IV-2 :Modèle masse-ressort (couplage direct)

**IV.4.2. Cas des planchers flexibles (modèle 2) :**

Dans ce cas les planchers ayant des rigidités finies, l'étude de la structure implique un effet réciproque indirect (couplage indirect).

Pour mieux illustrer la différence entre une structure rigide et une structure flexible, déplaçons le troisième plancher pendant que le deuxième reste fixe.

Si le plancher est rigide, il n'y aura pas d'effort transmis, par contre si les poutres sont flexibles, les nœuds du deuxième plancher trouveront, causant une flexion dans les poteaux au niveau inférieur et par conséquent transmettront des efforts au premier plancher.

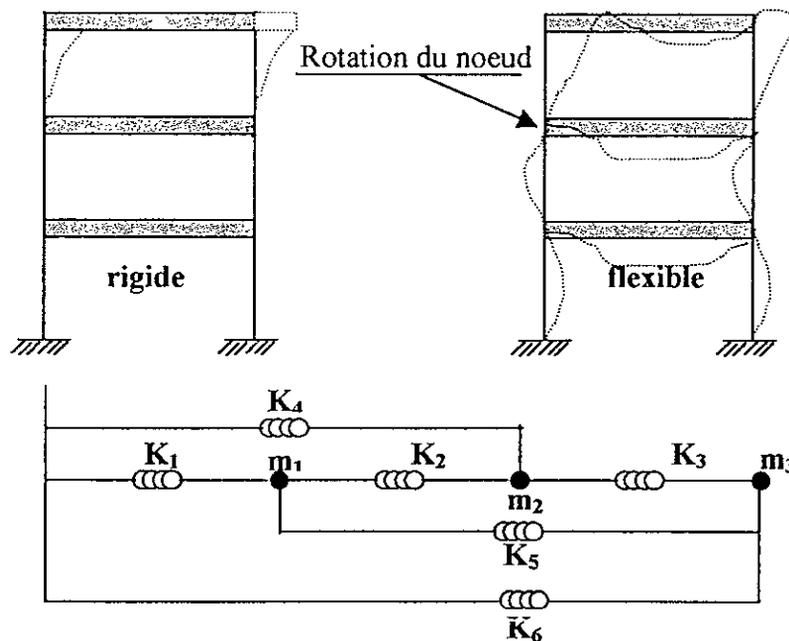


Fig.IV-3 Modèle masse-ressort (couplage indirect)

#### IV.5. METHODES DE RESOLUTION :

On peut dire que les méthodes de résolution se divisent en deux grandes catégories, la première se base sur les données du spectre de réponse, et la deuxième nécessite les données d'un accélérogramme, celle-ci consiste à étudier la réponse structurale selon les domaines suivants :

- Domaine des temps.
- Domaine des fréquences.

#### ETUDE DE LA REponse DANS LE DOMAINE DU TEMPS :

Cette étude se fait grâce à deux méthodes :

- Méthode de superposition des modes.
- Méthodes d'intégration directe.

#### IV.5.1. METHODE DE SUPERPOSITION DES MODES :

Une structure classique idéale est dépourvue de tout amortissement de sorte qu'elle peut vibrer indéfiniment tant qu'il soit nécessaire de lui fournir de l'énergie.

Ce comportement est purement théorique en raison de l'existence inévitable de ce phénomène. Des frottements qui amortissent le mouvement, toutefois ceux-ci sont très faciles de sorte que les vibrations libres peuvent subsister assez longtemps.

L'équation du mouvement d'un système se déplaçant librement sans amortissement s'écrit :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0 \quad (\text{IV-12})$$

En admettant le mouvement oscillatoire harmonique, les solutions particulières peuvent s'écrire sous la forme :

$$x_n(t) = x_n \sin(\omega t + \theta) \quad (\text{IV-13})$$

$x_n$  : les modes de déformations possibles du système (seule leur amplitude varie avec le temps).

$\theta$  : est un angle de déphasage

$\omega$  : la fréquence de vibration

Les accélérations en vibration libres

$$x_n(t) = -\omega^2 x_n \sin(\omega t + \theta) \quad (\text{IV-14})$$

En reportant ces deux dernières expressions dans la première équation, nous obtenons l'expression.

$$-\omega^2 m x_n \sin(\omega t + \theta) + k x_n \sin(\omega t + \theta) = 0$$

qui doit être vérifiée quelque soit  $t$ , donc pour toutes les valeurs de la fonction sinus, on a :

$$[k - \omega^2 m] \{x\} = 0 \quad (\text{IV-15})$$

Comme  $\{x\}$  n'est généralement pas nul, la solution est donnée par :

$$[k - \omega^2 m] = 0$$

Cette équation est appelée l'équation aux fréquences du système

Les  $N$  solutions  $(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2)$

Soit :  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$

Le mode correspondant à la fréquence la plus basse est appelé le premier mode, le second mode correspond à la fréquence suivante etc....

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

A chaque valeur propre correspond une forme d'oscillation l'ensemble des valeurs propres et des formes propres est appelé «mode propre ou normal de vibration».

En remplaçant la pulsation propre dans le système (IV-15) il s'en suit :

$$\begin{cases} (k_{11} - m_1 \omega_1^2) x_1 + k_{12} x_2 + \dots + k_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1} x_1 + k_{n2} x_2 + \dots + (k_{nn} - m_n \omega_n^2) x_n = 0 \end{cases}$$

Le mode propre  $\{x_j\}^i$  ne peut être déterminé que sous forme de rapport de déplacements nodaux.

On doit se donner une des composantes  $(x_j)^{(i)}$  pour trouver les autres déplacements. Les modes propres sont habituellement normalisés par rapport à la plus grande composant si  $x_1^{(i)}$  est cette dernière on pose :

$$\Phi_{k,i} = \frac{x_k^{(i)}}{x_1^{(i)}}$$

avec :

$\Phi_{k,i}$  : représente l'ordonnée du mode propre i. Si l'on choisit  $x_1^{(i)}$ , on obtient alors un système en  $\Phi_{k,i}$  de (N-1) équations dont la résolution donne la forme de la vibration propre correspondant à  $\omega_i$  (on note que l'amplitude reste inconnue).

On trouve deux matrices :

a) la matrice spectrale :

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

b) la matrice modale :

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \Phi_{N1} & \Phi_{N2} & & \Phi_{Nn} \end{bmatrix}$$

La détermination des fréquences et modes vibratoires d'une structure se réduit donc au problème de calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice. Les fréquences propres de vibration du système sont les carrées des valeurs propres, et les modes vibratoires correspondent aux vecteurs propres.

- **Cordonnées principales normales :**

Dans l'étude des systèmes quelconques à  $N$  degrés de liberté qui précède, la déformée à un instant donné était définie par  $N$  composantes du vecteur  $u$ . dans le cas d'un système linéaire, une représentation beaucoup plus utile est rendue possible par les modes de vibration libre.

Ces modes correspondent à  $N$  allures de déplacements indépendantes, dont les amplitudes peuvent servir de coordonnées généralisées, dont les amplitudes peuvent servir de coordonnées généralisées pour représenter un déplacement quelconque.

Les modes de vibration jouent le même rôle que les termes d'un développement en série de fourrier et ils présentent les mêmes avantages d'orthogonalité et possibilité d'une représentation satisfaisante des déplacements à l'aide d'une approximation limitée à quelques termes seulement.

Prenons le cas de la poutre encastree de la (Fig. IV-2), dont la déformée est définie par la mesure de trois flèches le long de son axe original. On peut représenter sur cette structure un vecteur déplacement  $u$  quelconque en superposant les amplitudes convenablement déterminées des trois modes de vibration, comme la figure le montre.

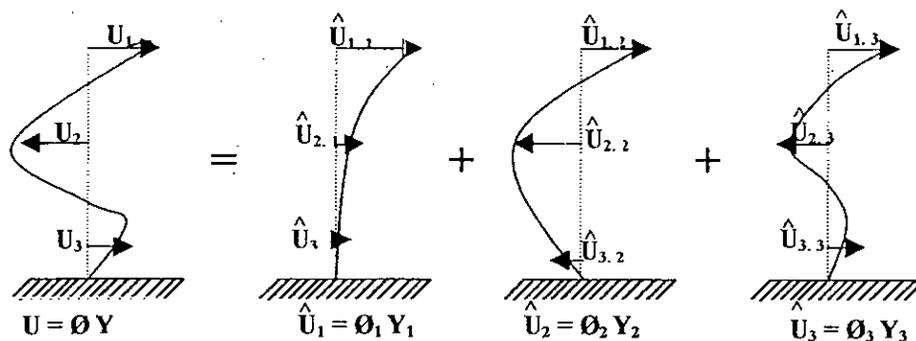


Fig. IV-2 Représentation d'une déformée par une somme de composantes modales

Pour chaque composante modale  $\hat{u}_n$ , les déplacements sont données par le vecteur modal  $\{\Phi_n\}$  multiplié par l'amplitude modale  $y_n$

$$\hat{u}_n = \Phi_n y_n$$

Les déplacements sont la somme des composantes modales :

$$u = \Phi_1 y_1 + \Phi_2 y_2 + \dots + \Phi_n y_n = \sum_{n=1}^n \Phi_n y_n \quad (\text{IV-16})$$

En notation matricielle

$$\{u\} = [\Phi] \{y\}$$

En voit que la matrice  $[\Phi]$  de cette équation permet de passer du vecteur  $y$  des coordonnées généralisées au vecteur  $u$  des coordonnées géométriques.

Les amplitudes modales, en coordonnées généralisées, sont appelées coordonnées principales (ou normales) de la structure.

Pour calculer une coordonnée principale  $y_n$ , l'équation (a) peut être multipliée par le produit de la transposée du vecteur modal correspondant par la matrice de masse.

$$\Phi_n^t m u = \Phi_n^t m \Phi y$$

Si on développe le second membre de cette équation on obtient :

$$\Phi_n^t m \Phi y = \Phi_n^t m \Phi_1 y_1 + \Phi_n^t m \Phi_2 y_2 + \dots + \Phi_n^t m \Phi_n y_n \quad (\text{IV-17})$$

Tous les termes de cette somme s'annulent sauf, celui qui correspond à  $\Phi_n$  et ce en raison de la propriété d'orthogonalité des modes de vibration par rapport à la matrice masse. En conservant ce terme non nul dans le second membre de l'équation (IV-17) on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_n^t m u &= \Phi_n^t m \Phi_n y_n \\ y_n &= \Phi_n^t m u / \Phi_n^t m \Phi_n \end{aligned}$$

A chaque coordonnée principale, il correspond une expression de ce type soit  $[\Phi]^t$  l'ensemble des vecteurs propres on aura donc :

$$\begin{aligned} [\Phi]^t [m] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^t [K] [\Phi] &= [\omega_i^2] \\ [\Phi]^t [C] [\Phi] &= [2\xi_i \omega_i] \end{aligned}$$

- $\omega_i$ : fréquence propre de mode  $i$
- $\xi_i$ : facteur d'amortissement du mode  $i$ .

Pour cette étape on aura donc des équations découplées du mouvement l'équation du mouvement de chaque mode peut alors s'écrire de la manière suivante, en combinant la masse et les chargements généralisées du mode avec la fréquence angulaire propre (ou modale)  $\omega_n$  et la valeur donnée du facteur d'amortissement modal on aura finalement :

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = p_n(t)/m_n$$

L'étape précédente conduit à un système de N équations de mouvement indépendantes correspondant chacune à un mode de vibration ces équations représentent autant de système à un degré de liberté et se résolvent par toute méthode convenant au type de chargement.

L'expression générale de la réponse est donnée par l'intégrale de DUHAMEL

$$y_n(t) = \frac{1}{m_n \omega_d} \int_0^t P_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) d\tau \quad (\text{IV-18})$$

L'intégrale de DUHAMEL est applicable à un système qui est au repos à l'origine des temps ( $t=0$ ). Si les vitesses et les déplacements initiaux ne sont pas nuls, une réponse en vibration libre doit être pour chaque mode à l'expression donnée par l'intégrale de DUHAMEL. L'expression la plus générale de la réponse en vibration libre amortie est donnée pour chaque mode par l'équation :

$$y_n(t) = e^{-\xi_n \omega_n t} \left[ \frac{\dot{y}_n(0) + y_n(0) \xi_n \omega_n}{\omega_{dn}} \sin \omega_{dn} t + y_n(0) \cos \omega_{dn} t \right] \quad (\text{IV-19})$$

$y_n(0)$  et  $\dot{y}_n(0)$  représentent les déplacements et les vitesses initiaux pour chaque mode. Ils peuvent être obtenus pour chaque mode de la manière suivante, à partir des déplacements initiaux imposés  $u(0)$  et des vitesses initiales  $\dot{u}(0)$  exprimées dans les coordonnées géométriques de départ.

$$y_n(0) = \frac{\Phi_n^t m u(0)}{m_n} \quad (\text{IV-20})$$

$$\dot{y}_n(0) = \frac{\Phi_n^t m \dot{u}(0)}{m_n}$$

Une fois la réponse  $y_n(t)$  de chaque mode déterminée à partir des équations (C) et (d), les déplacements exprimés à l'aide des coordonnées géométriques peuvent être obtenus par la transformation en coordonnées principales :

$$u(t) = \Phi y(t)$$

$$u = \Phi_1 y_1 + \Phi_2 y_2 + \dots + \Phi_n y_n$$

Ce qui représente simplement la superposition des contributions de chaque mode. On remarquera que dans la plupart des cas, les contributions des différents modes sont plus importantes pour les fréquences basses, et tendent à décroître pour les fréquences plus

hautes. Il en résulte qu'il n'est généralement pas nécessaire d'inclure tous les modes de vibration à fréquences élevées dans la superposition.

#### IV.5.2 Méthodes de calcul des valeurs propres :

##### 1. Méthode de JACOBI :

Cette méthode a comme avantage de calculer les  $n$  valeurs et vecteurs propres, d'un système de dimensions limitées ( $n < 100$ ) dont les matrices symétriques sont définies positives.

La méthode consiste à transformer les matrices  $[k]$  et  $[m]$ , en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives.

$$\begin{aligned} [k^1] &= [k] \\ [k^2] &= [Q_1]^t [k^1] [Q_1] \\ &\dots \\ [k^{K+1}] &= [Q_K]^t [k^K] [Q_K] \end{aligned} \quad \text{(IV-21)}$$

et

$$\begin{aligned} [m^1] &= [m] \\ [m^2] &= [Q_1]^t [m^1] [Q_1] \\ &\dots \\ [m^{K+1}] &= [Q_K]^t [m^K] [Q_K] \end{aligned}$$

avec :  $[Q_K]$  est une matrice orthogonale d'où :

$$[Q_K]^t [Q_K] = [I]$$

Les matrices  $[k^{K+1}]$  et  $[m^{K+1}]$  tendent vers des matrices diagonales  $[k^d]$  et  $[m^d]$  quand  $K$  tend vers l'infini donc on a :

$$[\lambda] = [k^d] = [m^d]^{-1}$$

d'où les valeurs propres sont obtenues à partir des

$$\lambda_i = k_{ii}^d / m_{ii}^d \quad \text{(IV-22)}$$

$$[\Phi] = [Q_1] [Q_2] [Q_3] \dots [Q_{k-1}] \begin{bmatrix} \cdot & & & 0 \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{m_n}} & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{IV-23})$$

La matrice orthogonale de transformation à la structure suivante :

$$[Q_k] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & \\ & b & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-24})$$

Les coefficients a et b sont établies de telle manière que :

$$K_y^{K+1} = m_y^{K+1} = 0$$

On se ramène :

$$\begin{aligned} aK_{ii} + (1+ab)K_{ij} + bK_{jj} &= 0 \\ am_{ii} + (1+ab)m_{ij} + bm_{jj} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-25})$$

notant que :

$$K_{ii} / m_{ii} = K_{jj} / m_{jj} = K_{ij} / m_{ij}$$

Les valeurs de a et b sont :  $a = 0$ ,  $b = -K_{ij} / K_{jj}$

Dans le cas général on a :

$$\begin{aligned} C_1 &= K_{ii}m_{ij} - m_{ii}K_{ij} \\ C_2 &= K_{jj}m_{ij} - m_{jj}K_{ij} \\ C_3 &= K_{ii}m_{jj} - m_{ii}K_{jj} \end{aligned} \quad (\text{IV-26})$$

$$d = C_3 + \text{signe}(C_3) \sqrt{\left(\frac{C_3}{2}\right)^2 + C_1C_2}$$

d'où  $a = C_2/d$ , et  $b = -C_1/d$

## 2. Méthode de RAYLEIGH – RITZ :

L'avantage de cette méthode est de passer d'un problème de valeurs propres de grandes dimensions en un problème de dimension plus réduite, par conséquent on peut calculer toutes et les vecteurs propres par la méthode de JACOBI.

Le principe de la méthode est de contraindre chaque vecteur propre de système

$[K - \lambda m] [\Phi] = 0$ , à s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de vecteurs dits vecteurs de RITZ de telle sorte que :

$$\{\Phi\} = a_1 \{q_1\} + a_2 \{q_2\} + \dots + a_q \{q_q\} \quad (\text{IV-27})$$

avec :

$a_i$ : coefficient de RITZ

$q_i$ : vecteurs de RITZ

$\{\Phi\}$  : vecteur propre lié au système réduit de dimension  $q$

$$\{\Phi\} = [Q] \{a\} \quad (\text{IV-28})$$

tout d'abord on doit rechercher le quotient de RAYLEIGH et de lui rendre stationnaire avec :

$$\begin{aligned} R(\{\Phi_i\}) &= \{\Phi_i\}^T [k] \{\Phi_i\} / \{\Phi_i\}^T [m] \{\Phi_i\} \\ R(\{\Phi_i\}) &= \{a\}^T [\bar{k}] \{a\} / \{a\}^T [\bar{m}] \{a\} \\ [\bar{k}] &= [Q]^T [k] [Q] \\ [\bar{m}] &= [Q]^T [m] [Q] \end{aligned} \quad (\text{IV-29})$$

Le principe de quotient de RAYLEIGH, minimum s'exprime par

$$\partial R(\Phi) / \partial a_i = 0 \quad (\text{IV-30})$$

sachant que :

$$R\{\Phi\} = [\bar{k}] / [\bar{m}]$$

La condition de stationnarité s'écrit d'une manière générale

$$[\bar{k}] \{a\} = R[\bar{m}] \{a\}$$

avec :

$$\{a\} = [ \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \dots, \{a_q\} ] \quad (\text{IV-31})$$

Cette condition fournit  $q$  valeurs propres,  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_q$ .

Cette approximation de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q$ , et q vecteurs propres :

$$\begin{cases} x_j^t = \{x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^q\} \\ \vdots \\ x_q^t = \{x_q^1, x_q^2, \dots, x_q^q\} \end{cases} \quad (IV-32)$$

les vecteurs propres  $x_i$  sont utilisés pour déterminer les vecteurs  $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_n$  qui sont des approximations des vecteurs propres  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$

$$\text{avec : } \bar{\Phi}_i = \sum_{j=1}^q x_j^i q_j \quad i=1, \dots, q \quad (IV-33)$$

les valeurs propres exactes doivent vérifier

$$\lambda_1 \leq R_1, \dots, \lambda_q \leq R_q$$

De manière a obtenir rapidement les plus petites valeurs propres nous pouvons choisir comme vecteurs de RITZ les solutions de :

$$[k] \{q_i\} = \{F_i\}$$

ou  $\{F_i\}$  sont des vecteurs unitaires qui sollicitent les degrés de liberté i correspondant aux plus petites valeurs de  $K_{ii} / m_{ii}$

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{ligne } i$$

Le système  $[k] \{q_i\} = \{F_i\}$  donne la matrice des vecteurs de RITZ et on doit résoudre :

$$[\bar{k}] [\Phi] = [R] [\bar{m}] [\Phi] \quad (IV-34)$$

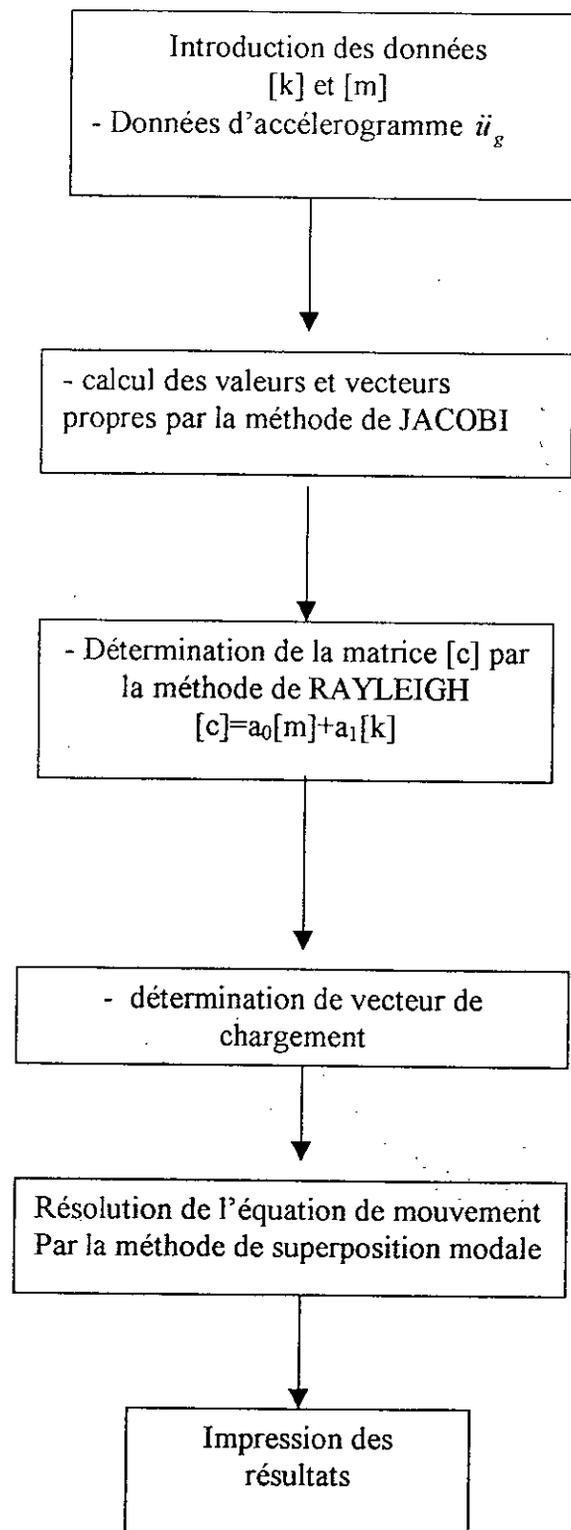
tels que :

$[R]$  : matrice diagonale des valeurs propres du système réduit  
 $[\Phi]$  : matrice des vecteurs propres du même système.

Les approximations des q premiers vecteurs propres sont :

$$[\bar{\Phi}] = \{q\} [\Phi] \quad (IV-35)$$

## IV.6. Présentation de programme développé :



## **Chapitre V**

# **Application**

## V.1 Introduction :

Notre travail consiste à voir l'effet de la flexibilité des planchers ainsi l'incidence de décrochement sur la réponse dynamique des structures auto-stables.

### Remarque :

dans tout le chapitre on utilise la notation suivante

$R_h$  : pourcentage de décrochement horizontal.

$R_v$  : pourcentage de décrochement vertical.

$R_{ij}$  : représente le ressort lié la masse  $i$  avec la masse  $j$ .

$K_{ij}$  : la rigidité du ressort  $R_{ij}$ .

$Pk_{ij}$  : la variation de la rigidité du ressort  $R_{ij}$  entre le modèle 1 et modèle 2

Modèle 1 : Cas d'un plancher rigide.

Modèle 2 : Cas d'un plancher flexible.

- Etude I : présente 4 structures de six étages et six travées
  - Etude I-1 :  $R_v = 0\%$  ;  $R_h = 0\%$
  - Etude I-2 :  $R_v = 33\%$  ;  $R_h = 33\%$
  - Etude I-3 :  $R_v = 33\%$  ;  $R_h = 50\%$
  - Etude I-4 :  $R_v = 33\%$  ;  $R_h = 67\%$
- Etude II : présente 4 structures de quatre étages et quatre travées
  - Etude II-1 :  $R_v = 0\%$  ;  $R_h = 0\%$
  - Etude II-2 :  $R_v = 25\%$  ;  $R_h = 33\%$
  - Etude II-3 :  $R_v = 25\%$  ;  $R_h = 50\%$
  - Etude II-4 :  $R_v = 25\%$  ;  $R_h = 67\%$
- Etude III : présente 4 structures de trois étages et trois travées
  - Etude III-1 :  $R_v = 0\%$  ;  $R_h = 0\%$
  - Etude III-2 :  $R_v = 33\%$  ;  $R_h = 33\%$
  - Etude III-3 :  $R_v = 33\%$  ;  $R_h = 50\%$
  - Etude III-4 :  $R_v = 33\%$  ;  $R_h = 67\%$

Dans toutes les structures (Etude I, II, III) tous les éléments ont les mêmes caractéristique tels que

- Epaisseur des planchers  $e = 15$  cm
- La hauteur d'étage  $h = 4$  m
- La portée des travées  $l = 3$  m
- La section des poutres  $A = 0.25 \times 0.30$  m<sup>2</sup>
- La section des poteaux  $B = 0.25 \times 0.25$  m<sup>2</sup>
- Les planchers sont (3m × 3m)

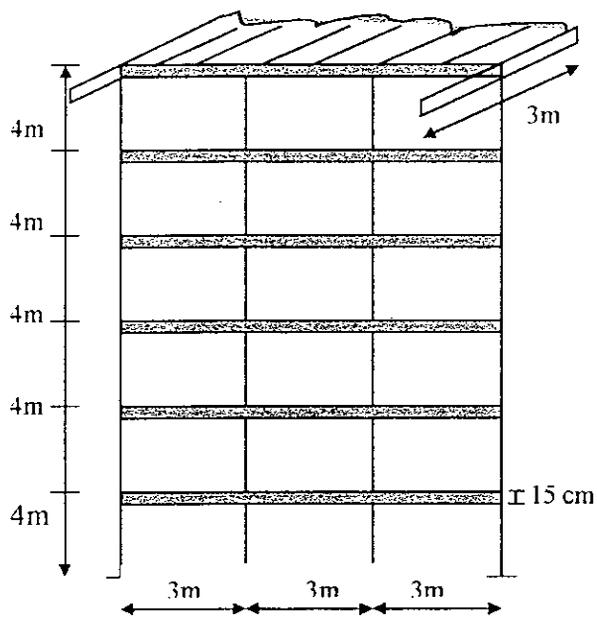


Fig. V.1 : structure III-1

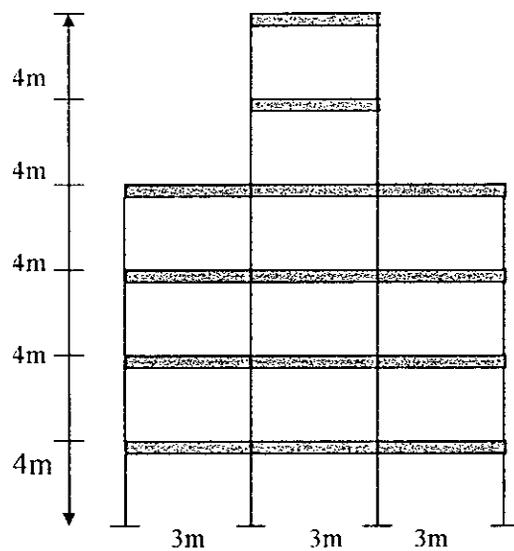


Fig. V.2: structure III-2

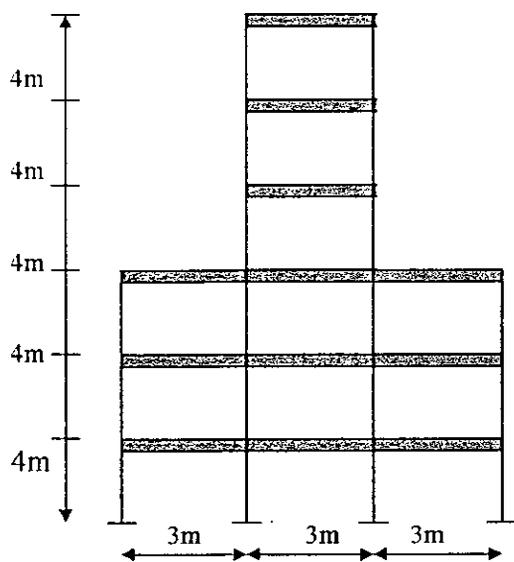


Fig V.3 : structure III-3

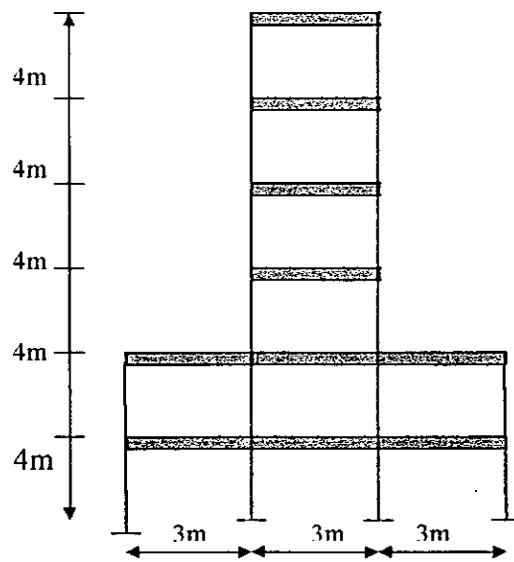


Fig. V.4 : structure III-4

## V.2. l'effet de la flexibilité des planchers sur les caractéristiques élastiques de la structure :

### V.2.1. La rigidité des éléments :

les valeurs des rigidités sont exprimées en kn/m

#### - Etude I-1 (structure uniforme) :

##### a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 14739.99023 & K_{1,2} = 14739.99023 & K_{2,3} = 14739.99023 \\ K_{3,4} = 14739.99023 & K_{4,5} = 14739.99023 & K_{5,6} = 14739.99023 \end{array}$$

##### b) Cas des planchers flexibles (modèle 2 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 13787.78000 & K_{0,2} = -1018.7340 & K_{1,5} = -2.14760 \\ K_{1,2} = 13183.50000 & K_{1,3} = -982.05700 & K_{2,5} = 47.19910 \\ K_{2,3} = 13095.40000 & K_{2,4} = -977.53400 & K_{3,6} = 16.18690 \\ K_{3,4} = 13095.00000 & K_{3,5} = -972.98700 & K_{0,5} = 1.73535 \\ K_{4,5} = 13084.20000 & K_{4,6} = -946.62400 & K_{2,6} = -26.63270 \\ K_{5,6} = 11951.10000 & K_{0,4} = -4.60938 & K_{0,6} = -11.78516 \\ K_{0,3} = 44.85674 & K_{1,4} = 44.66730 & K_{1,6} = -21.44500 \end{array}$$

#### - Etude I-2 (décrochement de 33%)

##### a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 14739.99023 & K_{1,2} = 14739.99023 & K_{2,3} = 14739.99023 \\ K_{3,4} = 14739.99023 & K_{4,5} = 6317.138670 & K_{5,6} = 6317.138670 \end{array}$$

##### b) cas des planchers flexibles (modèle 2 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 13787.90000 & K_{0,2} = -1018.54100 & K_{2,5} = 4.61979 \\ K_{1,2} = 13183.50000 & K_{1,3} = -977.02500 & K_{2,6} = .20208 \\ K_{2,3} = 13085.30000 & K_{2,4} = -953.48100 & K_{3,6} = 17.74350 \\ K_{3,4} = 12284.30000 & K_{3,5} = -314.18700 & K_{0,5} = .61377 \\ K_{4,5} = 5865.39000 & K_{4,6} = -721.88100 & K_{0,6} = .03369 \\ K_{5,6} = 5243.02000 & K_{0,3} = 46.56851 & K_{1,6} = .11145 \\ K_{0,4} = -17.29431 & K_{1,4} = 14.36680 & K_{1,5} = .94363 \end{array}$$

#### - Etude I-3 (décrochement de 50%)

##### a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 14739.99023 & K_{1,2} = 14739.99023 & K_{2,3} = 14739.99023 \\ K_{3,4} = 6317.138670 & K_{4,5} = 6317.138670 & K_{5,6} = 6317.138670 \end{array}$$

## b) cas des plancher flexibles (modèle 2 )

$K_{0,1} = 13787.8200$	$K_{0,2} = -1015.04500$	$K_{1,5} = -0.16871$
$K_{1,2} = 13174.0000$	$K_{1,3} = -958.23300$	$K_{2,5} = 17.74690$
$K_{2,3} = 12288.8000$	$K_{2,4} = -314.76300$	$K_{2,6} = -0.43805$
$K_{3,4} = 5873.58000$	$K_{3,5} = -714.12500$	$K_{3,6} = -2.12645$
$K_{4,5} = 6147.27000$	$K_{4,6} = -716.62500$	$K_{0,5} = -0.03271$
$K_{5,6} = 5258.71000$	$K_{0,3} = 26.20457$	$K_{0,6} = -0.12061$
$K_{0,4} = 0.59277$	$K_{1,4} = 5.04484$	$K_{1,6} = 0.14028$

## - Etude I-4 (décrochement de 67% )

## a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$K_{0,1} = 14739.99023$	$K_{1,2} = 14739.99023$	$K_{2,3} = 6317.138670$
$K_{3,4} = 6317.138670$	$K_{4,5} = 6317.138670$	$K_{5,6} = 6317.138670$

## b) cas des planchers flexibles (modèle 2 )

$K_{0,1} = 13776.41000$	$K_{0,2} = -982.70840$	$K_{1,5} = -1.83210$
$K_{1,2} = 12376.10000$	$K_{1,3} = -315.15400$	$K_{2,5} = 71.48650$
$K_{2,3} = 5873.48000$	$K_{2,4} = -724.31200$	$K_{2,6} = -49.74480$
$K_{3,4} = 6162.48000$	$K_{3,5} = -751.59400$	$K_{3,6} = 25.57700$
$K_{4,5} = 6133.31000$	$K_{4,6} = -695.46100$	$K_{0,5} = 0.07959$
$K_{5,6} = 5255.55000$	$K_{0,3} = 4.41104$	$K_{0,6} = -0.07910$
$K_{0,4} = -0.08832$	$K_{1,4} = 18.07120$	$K_{1,6} = 0.50804$

Structure	$Pk_{0,1}$	$Pk_{1,2}$	$Pk_{2,3}$	$Pk_{3,4}$	$Pk_{4,5}$	$Pk_{5,6}$
I-1	6.46	10.56	11.16	11.16	11.23	18.92
I-2	6.46	10.56	11.26	16.66	7.15	17.00
I-3	6.46	10.62	16.63	7.02	2.68	16.75
I-4	6.54	16.04	7.02	2.45	2.90	16.80

Tableau V-1

## - Etude II-1 (structure uniforme) :

## a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$K_{0,1} = 10528.56445$	$K_{1,2} = 10528.56445$	$K_{2,3} = 10528.56445$
$K_{3,4} = 10528.56445$	$K_{4,5} = 10528.56445$	$K_{5,6} = 10528.56445$

b) cas des planchers flexibles (modèle 2 )

$K_{0,1} = 10147.68000$	$K_{0,2} = -971.04560$	$K_{1,5} = -3.37191$
$K_{1,2} = 9985.14000$	$K_{1,3} = -956.98500$	$K_{2,5} = 66.44950$
$K_{2,3} = 9898.79000$	$K_{2,4} = -950.16600$	$K_{2,6} = -28.16760$
$K_{3,4} = 9897.85000$	$K_{3,5} = -944.70200$	$K_{3,6} = 33.18170$
$K_{4,5} = 9884.48000$	$K_{4,6} = -898.59500$	$K_{0,5} = 1.95410$
$K_{5,6} = 8792.49000$	$K_{0,3} = 64.76642$	$K_{0,6} = -11.68896$
$K_{0,4} = -6.21851$	$K_{1,4} = 64.04980$	$K_{1,6} = -21.91060$

- Etude II-2 (décrochement de 33%)

a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$K_{0,1} = 10528.56445$	$K_{1,2} = 10528.56445$	$K_{2,3} = 10528.56445$
$K_{3,4} = 10528.56445$	$K_{4,5} = 6317.138670$	$K_{5,6} = 6317.138670$

b) cas des planchers flexibles (modèle 2 )

$K_{0,1} = 10147.96000$	$K_{0,2} = -970.99850$	$K_{2,5} = -5.38906$
$K_{1,2} = 9985.28000$	$K_{1,3} = -951.77800$	$K_{2,6} = 3.79079$
$K_{2,3} = 9886.17000$	$K_{2,4} = -898.95300$	$K_{3,6} = 38.02080$
$K_{3,4} = 9152.76000$	$K_{3,5} = -358.58500$	$K_{0,5} = -2.88672$
$K_{4,5} = 5955.75000$	$K_{4,6} = -756.79500$	$K_{0,6} = 1.87305$
$K_{5,6} = 5248.84000$	$K_{0,4} = -16.91302$	$K_{1,6} = 3.72060$
$K_{0,3} = 66.41283$	$K_{1,4} = 31.95140$	$K_{1,5} = -2.82880$

- Etude II-3 (décrochement de 50%)

a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$K_{0,1} = 10528.56445$	$K_{1,2} = 10528.56445$	$K_{2,3} = 10528.56445$
$K_{3,4} = 6317.138670$	$K_{4,5} = 6317.138670$	$K_{5,6} = 6317.138670$

b) cas des planchers flexibles (modèle 2 )

$K_{0,1} = 10147.54000$	$K_{0,2} = -966.70980$	$K_{2,5} = 20.85240$
$K_{1,2} = 9971.63000$	$K_{1,3} = -905.18200$	$K_{3,6} = -23.07400$
$K_{2,3} = 9156.88000$	$K_{2,4} = -355.67600$	$K_{0,5} = -2.27100$
$K_{3,4} = 5954.61000$	$K_{3,5} = -721.54200$	$K_{0,6} = 2.21191$
$K_{4,5} = 6151.15000$	$K_{4,6} = -715.18100$	$K_{2,6} = 13.42410$
$K_{5,6} = 5258.39000$	$K_{0,3} = 42.90749$	$K_{0,4} = -3.30432$
$K_{1,4} = -5.89807$	$K_{1,5} = 1.12051$	$K_{1,6} = 3.18897$

- **Etude II-4** (décrochement de 67%)

## a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 10528.56445 & K_{1,2} = 10528.56445 & K_{2,3} = 6317.138670 \\ K_{3,4} = 6317.138670 & K_{4,5} = 6317.138670 & K_{5,6} = 6317.138670 \end{array}$$

## b) cas des planchers flexibles (modèle 2 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 10132.8800 & K_{0,2} = -908.50350 & K_{1,6} = 12.74800 \\ K_{1,2} = 9238.53000 & K_{1,3} = -353.00300 & K_{2,5} = 73.59700 \\ K_{2,3} = 5947.21000 & K_{2,4} = -733.45000 & K_{2,6} = -65.28410 \\ K_{3,4} = 6166.59000 & K_{3,5} = -752.07700 & K_{3,6} = 26.97460 \\ K_{4,5} = 6133.95000 & K_{4,6} = -695.93200 & K_{0,5} = -41260 \\ K_{5,6} = 5256.05000 & K_{0,3} = -3.29406 & K_{0,6} = 1.79395 \\ K_{0,4} = 1.28455 & K_{1,4} = 22.35750 & K_{1,5} = -3.10729 \end{array}$$

Structure	Pk <sub>0,1</sub>	Pk <sub>1,2</sub>	Pk <sub>2,3</sub>	Pk <sub>3,4</sub>	Pk <sub>4,5</sub>	Pk <sub>5,6</sub>
II-1	3.62	5.16	5.98	5.99	6.12	16.49
II-2	3.61	5.16	6.10	13.06	5.72	16.91
II-3	3.62	5.29	13.03	5.74	2.63	16.75
II-4	2.76	12.25	5.86	2.38	2.90	16.80

Tableau V-2

- **Etude III-1** (structure uniforme) :

## a) cas des planchers Rigides (modèle 1 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 8422.85 & K_{1,2} = 8422.85 & K_{2,3} = 8422.85 \\ K_{3,4} = 8422.85 & K_{4,5} = 8422.85 & K_{5,6} = 8422.85 \end{array}$$

## b) cas des planchers flexibles (modèle 2 )

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 8205.63900 & K_{0,2} = -880.83800 & K_{1,4} = 67.32520 \\ K_{1,2} = 8165.71000 & K_{1,3} = -876.50800 & K_{1,5} = -3.86480 \\ K_{2,3} = 8086.36000 & K_{2,4} = -869.53600 & K_{2,5} = 70.17630 \\ K_{3,4} = 8085.42000 & K_{3,5} = -863.99800 & K_{2,6} = -28.97170 \\ K_{4,5} = 8072.13000 & K_{4,6} = -814.88400 & K_{3,6} = 35.93200 \\ K_{5,6} = 7068.44000 & K_{0,3} = 67.79401 & K_{0,4} = -6.85529 \\ K_{0,5} = 2.01709 & K_{0,6} = -11.60449 & K_{1,6} = -22.00170 \end{array}$$

- **Etude III-2** (décrochement de 33%)

## a) cas des planchers Rigides (modèle 1)

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 8422.85 & K_{1,2} = 8422.85 & K_{2,3} = 8422.85 \\ K_{3,4} = 8422.85 & K_{4,5} = 4211.43 & K_{5,6} = 4211.43 \end{array}$$

## b) cas des planchers flexibles (modèle 2)

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 8205.87200 & K_{0,2} = -880.77720 & K_{1,4} = 34.10470 \\ K_{1,2} = 8165.65000 & K_{1,3} = -870.77600 & K_{1,5} = -3.25556 \\ K_{2,3} = 8072.79000 & K_{2,4} = -813.96200 & K_{1,6} = 4.20527 \\ K_{3,4} = 7303.77000 & K_{3,5} = -250.49200 & K_{0,5} = -2.79150 \\ K_{4,5} = 4025.26000 & K_{4,6} = -634.47200 & K_{0,6} = 1.96362 \\ K_{5,6} = 3424.75000 & K_{0,3} = 69.46512 & K_{0,4} = -17.55023 \\ K_{2,5} = -5.75074 & K_{2,6} = 3.45031 & K_{3,6} = 41.94290 \end{array}$$

- **Etude III-3** (décrochement de 50%)

## a) cas des planchers Rigides (modèle 1)

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 8422.85 & K_{1,2} = 8422.85 & K_{2,3} = 8422.85 \\ K_{3,4} = 4211.43 & K_{4,5} = 4211.43 & K_{5,6} = 4211.43 \end{array}$$

## b) cas des planchers flexibles (modèle 2)

## c)

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 8205.64300 & K_{0,2} = -876.52550 & K_{3,6} = -62.18660 \\ K_{1,2} = 8152.22000 & K_{1,3} = -821.45900 & K_{0,5} = -2.29712 \\ K_{2,3} = 7308.58000 & K_{2,4} = -246.05700 & K_{0,6} = 2.62549 \\ K_{3,4} = 4007.12000 & K_{3,5} = -543.52400 & K_{1,6} = 3.76452 \\ K_{4,5} = 4152.72000 & K_{4,6} = -569.37500 & K_{2,5} = 18.21080 \\ K_{5,6} = 3445.22000 & K_{0,3} = 45.26918 & K_{0,4} = -6.3916 \\ K_{1,4} = -5.93904 & K_{1,5} = .27036 & K_{2,6} = 18.27160 \end{array}$$

- **Etude III-4** (décrochement de 67%)

## a) cas des planchers Rigides (modèle 1)

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 8422.85 & K_{1,2} = 8422.85 & K_{2,3} = 4211.43 \\ K_{3,4} = 4211.43 & K_{4,5} = 4211.43 & K_{5,6} = 4211.43 \end{array}$$

## b) cas des planchers flexibles (modèle 2)

$$\begin{array}{lll} K_{0,1} = 8190.24200 & K_{0,2} = -814.62100 & K_{1,4} = 21.26020 \\ K_{1,2} = 7383.31000 & K_{1,3} = -243.58900 & K_{1,5} = -4.01801 \\ K_{2,3} = 3998.74000 & K_{2,4} = -560.85300 & K_{2,5} = 60.76570 \\ K_{3,4} = 4155.76000 & K_{3,5} = -566.65400 & K_{2,6} = -82.30170 \\ K_{4,5} = 4138.70000 & K_{4,6} = -544.27000 & K_{0,6} = 2.08032 \\ K_{0,5} = -30396 & K_{3,6} = -1.06372 & K_{1,6} = 16.79510 \\ K_{5,6} = 3442.05000 & K_{0,3} = -3.41315 & K_{0,4} = .59277 \end{array}$$

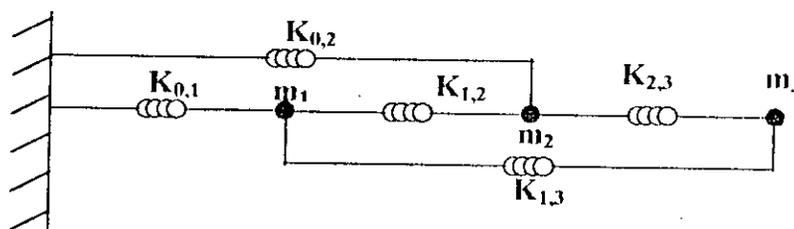
Structure	$Pk_{0,1}$	$Pk_{1,2}$	$Pk_{2,3}$	$Pk_{3,4}$	$Pk_{4,5}$	$Pk_{5,6}$
III-1	2.58	3.05	3.99	4.01	4.16	16.08
III-2	2.58	3.05	4.16	13.29	4.42	18.67
III-3	2.58	3.21	13.23	4.85	1.39	18.19
III-4	2.76	12.34	5.05	1.32	1.73	18.27

Tableau V-3

Effet de la rotation des planchers sur la rigidité des ressorts

D'après les tableaux (V-1, V-2, V-3) on remarque que

- Dans les structures uniformes, la valeur  $Pk_{i,i+1}$  croît, en passant d'un niveau à l'autre vers le dernier étage.
- Dans les structures avec décrochement (au niveau  $i$ ), la valeur de  $Pk_{i,i+1}$  croît avant le décrochement, et décroît juste au niveau du décrochement.
- On remarque que dans la deuxième modélisation, les ressorts  $R_{i,i+1}$ ,  $R_{i,i+2}$  ont une rigidité considérable par rapport aux restes des ressorts, et pour cette raison on propose une troisième modélisation où on prend en considération que les ressorts  $R_{i,i+1}$ ,  $R_{i,i+2}$ .



Exemple : Modèle 3 (à 3 masse)

**V.2.2. La pulsation des modes propres de la structure :**

- **Etude I**
- es Valeurs de la pulsation :

Structure	Modèle	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
I-1	1	6,50	19,13	30,65	40,39	47,78	52,39
	2	5,35	16,00	26,47	36,00	43,87	49,10
	3	5,33	15,99	26,40	36,00	43,88	49,06
I-2	1	8,04	19,62	29,25	41,52	49,71	52,11
	2	6,67	16,09	24,90	37,16	45,84	48,56
	3	6,64	16,00	24,88	37,15	45,83	48,54
I-3	1	8,65	17,79	32,97	40,51	49,06	55,72
	2	7,12	14,36	28,48	35,41	45,35	52,93
	3	7,08	14,32	28,47	35,40	45,34	52,92
I-4	1	8,62	19,00	31,81	43,55	48,67	57,74
	2	6,87	15,71	26,54	39,29	44,24	55,65
	3	6,81	15,67	26,45	39,25	44,26	55,59

Tableau V-4

- Variation de la pulsation entre le modèle 1 et modèle 2 (en %)

Structure	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
I-1	17,77	16,38	13,65	10,86	8,19	6,29
I-2	16,95	18,01	14,86	10,51	7,78	6,82
I-3	17,77	19,31	13,62	12,60	7,56	4,99
I-4	20,26	17,31	16,58	9,77	9,10	3,63

Tableau VI-5

- Variation de la pulsation entre le modèle 2 et modèle 3 (en %)

Structure	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
I-1	0,34	0,07	0,24	0,02	-0,02	0,07
I-2	0,53	0,54	0,09	0,03	0,01	0,04
I-3	0,53	0,26	0,05	0,03	0,01	0,03
I-4	0,93	0,26	0,35	0,10	-0,04	0,11

Tableau VI-6

- Etude I-2

- les Valeurs de la pulsation :

Structure	Modèle	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Etude II-1	1	6,73	19,81	31,73	41,81	49,46	54,23
	2	5,44	16,35	27,34	37,58	46,28	52,20
	3	5,37	16,26	27,20	37,56	46,29	52,12
Etude II-2	1	7,82	20,12	30,89	42,86	50,72	53,90
	2	6,38	16,54	26,14	38,57	47,31	51,28
	3	6,30	16,35	26,07	38,55	47,31	51,24
Etude II-3	1	8,18	19,00	33,55	41,87	50,79	56,22
	2	6,66	15,30	28,79	36,97	47,79	53,66
	3	6,58	15,25	28,81	36,95	47,77	53,65
Etude II-4	1	8,16	19,97	32,52	44,41	50,05	57,95
	2	6,52	16,22	27,36	40,15	46,08	55,97
	3	6,45	16,20	27,24	40,09	46,12	55,90

Tableau VI-7

- Variation de la pulsation entre le modèle 1 et modèle 2 (en %)

Structure	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
II-1	19.214750	17.433430	13.843570	10.108830	6.425996	3.740847
II-2	18.336390	17.800580	15.380470	9.995776	6.733586	4.864177
II-3	18.625860	19.492980	14.183640	11.683830	5.919589	4.539539
II-4	20.104660	18.779400	15.887080	9.603610	7.932051	3.412375

Tableau V-8

- Variation de la pulsation entre le modèle 2 et modèle 3 (en %)

Structure	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
II-1	1.305081	.548738	.514999	.061554	-.032626	.151129
II-2	1.374782	1.159134	.259173	.063806	-.000468	.070468
II-3	1.105367	.301822	-.059967	.072684	.025593	.017529
II-4	1.120768	.141054	.423054	.141613	-.089453	.129159

Tableau V-9

## Etude III : les Valeurs de la pulsation :

Structure	Modèle	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
III-1	1	6,95	20,46	32,77	43,18	51,08	56,01
	2	5,53	16,67	28,05	38,79	48,06	54,44
	3	5,42	16,54	27,86	38,76	48,08	54,33
III-2	1	8,62	21,94	32,02	44,68	53,99	59,08
	2	6,96	17,53	26,56	40,22	51,31	55,02
	3	6,83	17,18	26,45	40,19	51,30	54,98
III-3	1	9,41	20,07	35,84	46,03	52,85	64,24
	2	7,53	15,41	30,58	39,77	49,98	61,13
	3	7,45	15,59	30,67	39,74	49,96	61,13
III-4	1	9,61	21,06	36,39	47,41	55,65	66,65
	2	7,37	16,58	29,64	43,31	50,18	64,40
	3	7,38	16,81	29,60	43,23	50,25	64,34

Tableau V-10

- Variation de la pulsation entre le modèle 1 et modèle 2 (en %)

Structure	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
III-1	20,53	18,51	14,39	10,15	5,92	2,80
III-2	19,29	20,12	17,06	9,98	4,95	6,87
III-3	19,99	23,20	14,67	13,59	5,44	4,84
III-4	23,35	21,27	18,54	8,65	9,82	3,37

Tableau VI-11

- Variation de la pulsation entre le modèle 2 et modèle 3 (en %)

Structure	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
III-1	1,85	0,79	0,69	0,08	-0,04	0,20
III-2	1,92	1,99	0,40	0,09	0,03	0,06
III-3	1,00	-1,16	-0,30	0,08	0,04	0,00
III-4	-0,16	-1,36	0,14	0,19	-0,13	0,11

Tableau VI-12

**V.2.3 Etude paramétrique :**

Variation de la pulsation et de la période du 1<sup>er</sup> mode en fonction de nombre d'étage (structure uniforme ).

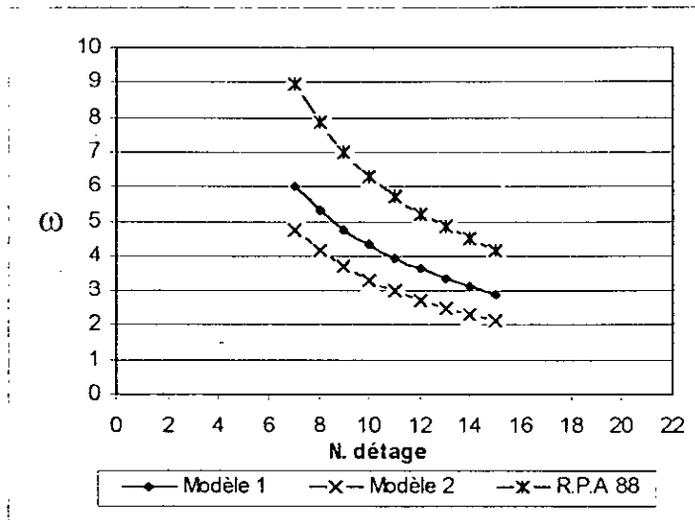


Fig. V-5 : Variation de  $\omega$  en fonction de N<sup>br</sup> d'étage

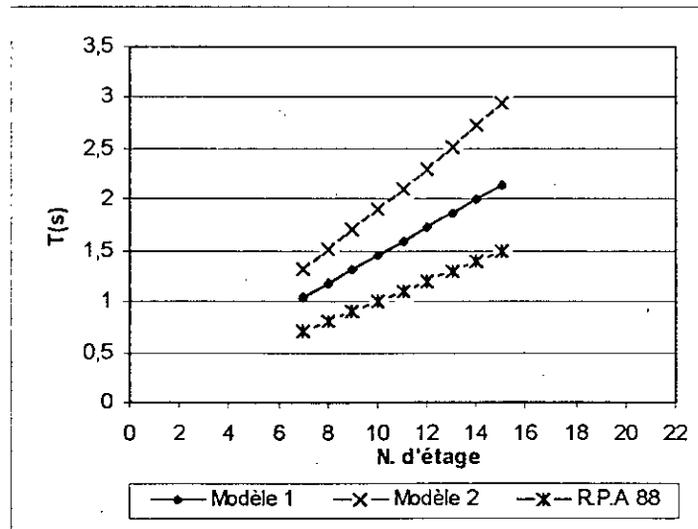


Fig. V-6 : Variation de T en fonction de N<sup>br</sup> d'étage

$$\text{Soit } V_m = \frac{\omega_R - \omega_D}{\omega_R} \cdot 100$$

Avec

$\omega_R$  : pulsation dans le 1<sup>er</sup> Modèle

$\omega_D$  : pulsation dans le 2<sup>er</sup> Modèle

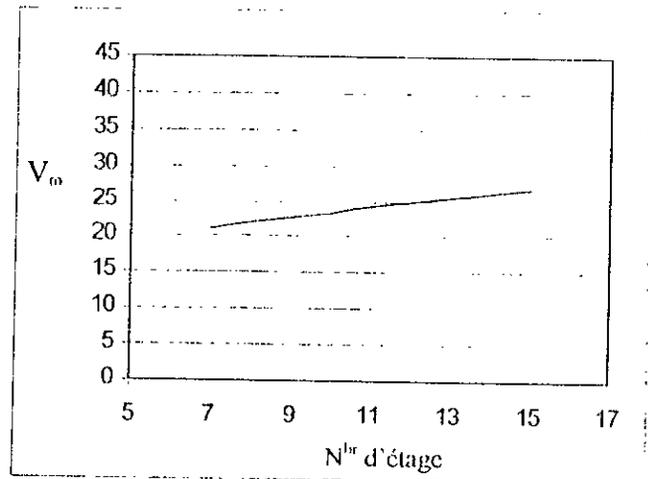


Fig V.7 : Variation de  $V_m$  en fonction de  $N^{\text{br}}$  d'étage

### Analyse des résultats

#### 1) Effet du décrochement sur les périodes propres des structures :

- la période fondamentale de la structure uniforme est plus grand que celle des structures avec décrochement
- La période du deuxième mode des structures avec un décrochement de 50% est plus grande que celle des autres cas.

#### 2) Comparaison entre les trois modèles.

- Les changements de période propre de vibration pour le premier mode, entre le modèle 1 et le modèle 2 sont très importants dans les structures qui ont un décrochement de 67%.
- Les variations de la période dans le troisième et le quatrième mode propre de vibration (entre le modèle 1 et le modèle 2) sont moins importantes que celles des deux premiers modes. Pour le cinquième et le sixième mode ces variations sont encore moins sensibles.
- D'après les tableaux (V-6, V-9, V-12) on remarque la troisième modélisation donne pratiquement les mêmes résultats que la deuxième, à titre d'exemple la variation maximale dans les six modes est de l'ordre de 1.99% (étude III-2, 2<sup>ème</sup> mode).
- Les variations de la période dans le troisième et le quatrième mode propre de vibration (entre le modèle 2 et le modèle 3) sont moins importantes que celles des deux premiers modes. Pour le cinquième et le sixième mode on a des variations moins sensibles.
- Nombre de ressorts utilisés dans chaque modèle :
  - Si on a  $n$  planchers
  - Le modèle 1 nécessite  $n$  ressort
  - Le modèle 2 nécessite  $(n/2)(n+1)$
  - Le modèle 3 nécessite  $2n-1$
- On a vu précédemment que le troisième modèle donne des bons résultats (la flexibilité des planchers est prise en considération), en plus le troisième modèle

permet d'éliminer un nombre important des ressorts, ainsi le volume de travail diminue, à titre d'exemple si on a 10 planchers, le deuxième modèle nécessite 52 ressorts, par contre le troisième modèle nécessite 19 ressorts, c'est-à-dire plus de la moitié des ressorts sont éliminés.

### 3) Etude paramétrique

a) D'après la fig.V.6 on remarque que

- La période fondamentale d'une structure dans le cas flexible est plus grande que celle dans le cas rigide.
- La variation de la période propre de vibration en fonction du nombre d'étage est linéaire.

b) D'après la fig.V.7 on remarque que les valeurs de la pulsation du modèle 1 et modèle 2 diverge proportionnellement au nombre d'étage.

c) Evaluation des prescriptions réglementaires (R.P.A 88)

Le règlement parasismique algérien (R.P.A 88 ) Prescrit (Annexe II-1 ) la formule empirique pour la détermination de la période fondamentale pour les bâtiments à portique auto stable sans palées ou murs de contreventement.

$$T= 0.1 N \quad V-a$$

On remarque (Fig V. 6 ) que les périodes fondamentales obtenues à partir des prescriptions réglementaires sont constantes quelle que soit la valeur du décrochement à étudier, par ailleurs, elles demeurent inférieures aux périodes fondamentales déduites de l'analyse dynamique des structures décrochées.

Il en résulte donc que les prescriptions du R.P.A 88 admettent implicitement des valeurs de rigidités structurales supérieures aux rigidités réelles impliquant ainsi un coefficient sismique de calcul important, ce qui est tout à fait contraire aux impératifs d'ordre économique. Ceci peut-être justifié par le fait que l'équation (V-a) ne permet pas toujours une représentation réaliste des masses et des rigidités des structures.

*Conclusion :* Cette étude à permis de constater que la période proposé par la réglementation (R.P.A 88) donne des valeurs assez éloignées de la période exacte, et elles sont toujours inférieures.

### V.3 la réponse dynamique

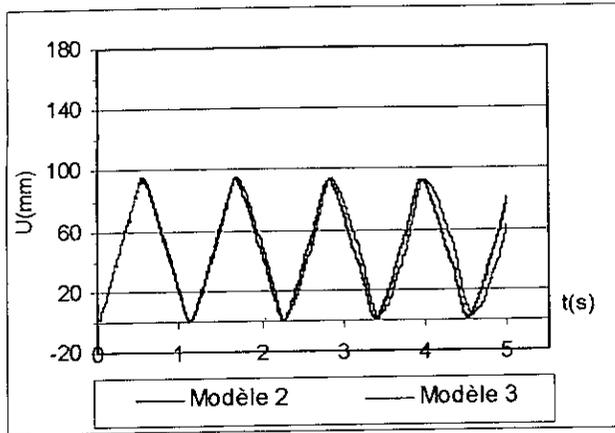
Dans notre étude on a trois types de chargement

- 1) Une excitation constante au sixième étage.
- 2) Une excitation sinusoïdale au niveau de l'appui.
- 3) une excitation d'origine sismique  
- dans cette étude nous avons pris un facteurs d'amortissement de 5% pour les deux premiers modes.

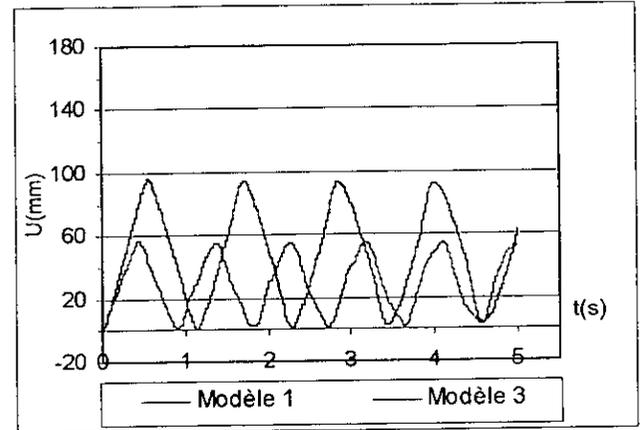
On ne s'intéresse qu'à la réponse des structures de la troisième étude

Les déplacement du 6<sup>ème</sup> étage

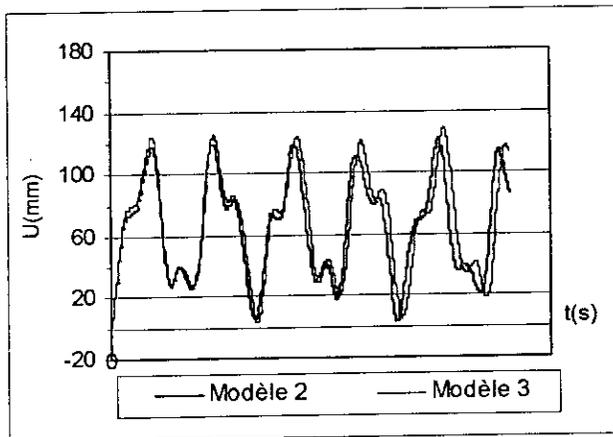
1) cas d'une excitation constante (40 kn/m) :



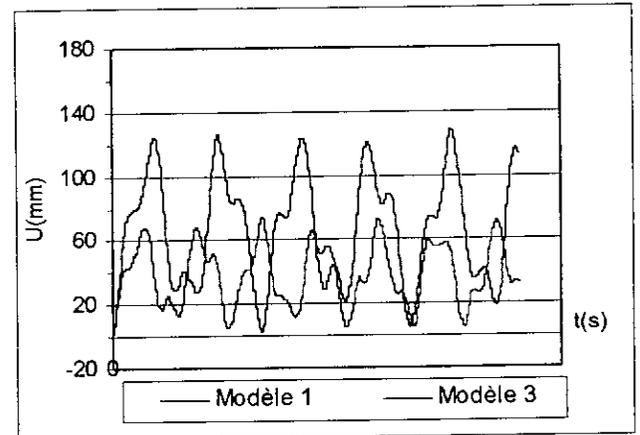
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-1)



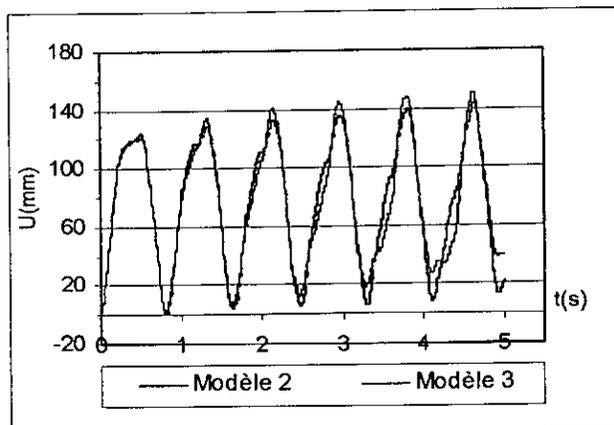
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-1)



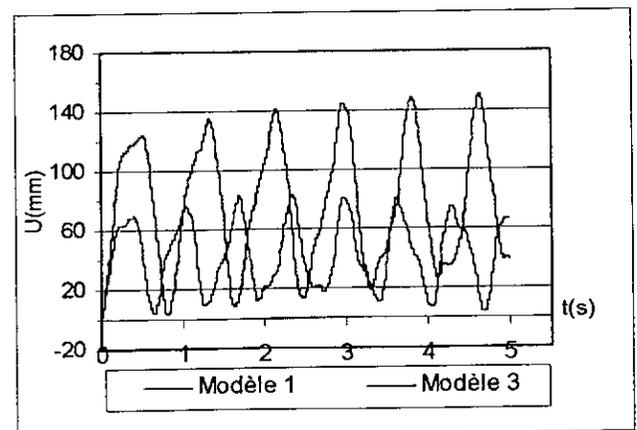
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-2)



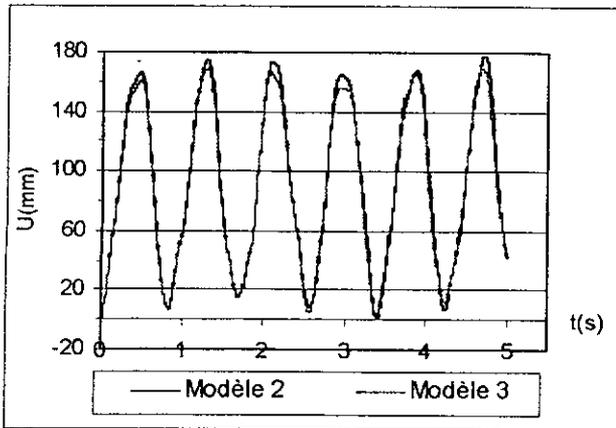
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-2)



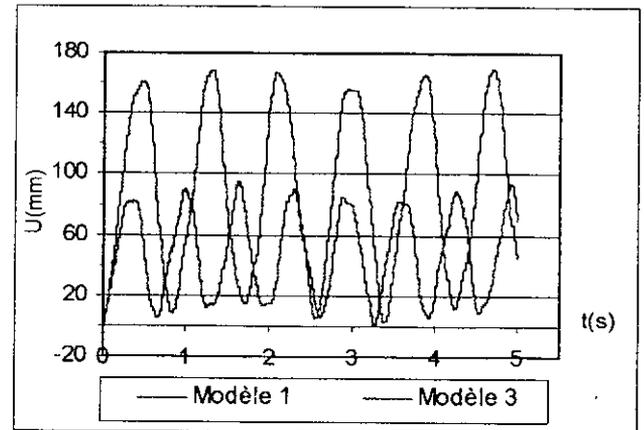
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-3)



Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-3)

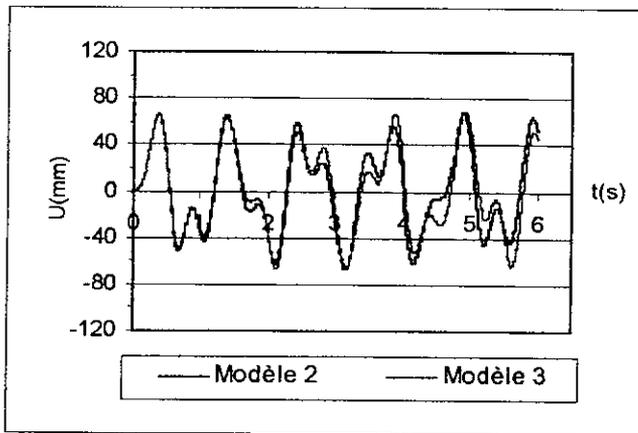


Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-4)

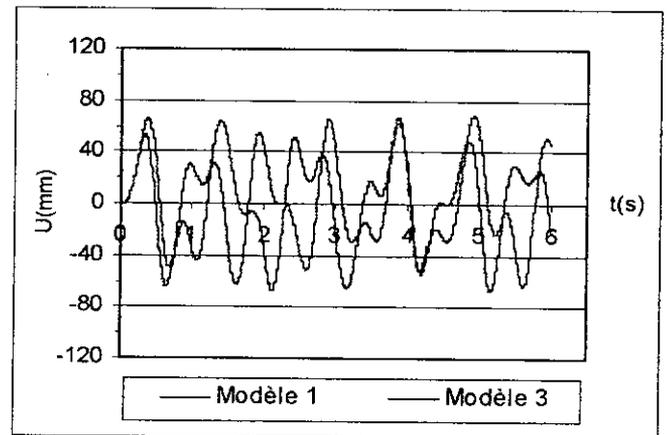


Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-4)

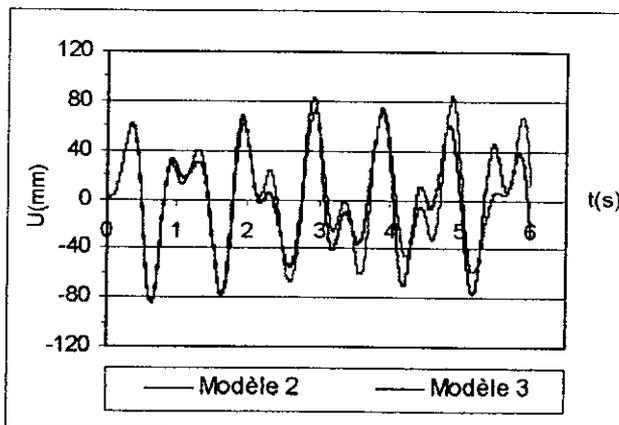
2) Cas d'une exitation sinusoidale ( $0.2 \text{ g} \sin(12.5 t)$ ) ;



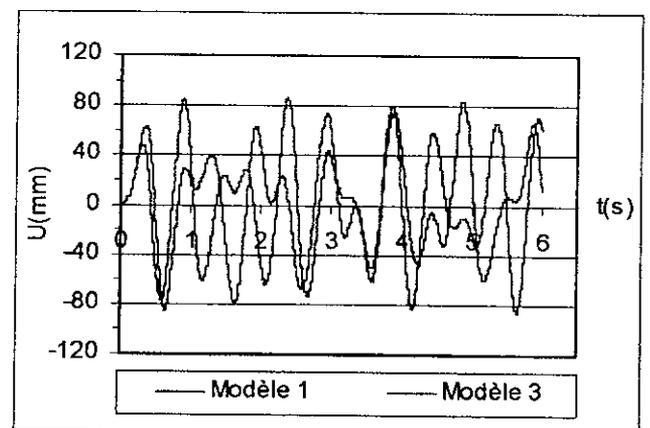
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-1)



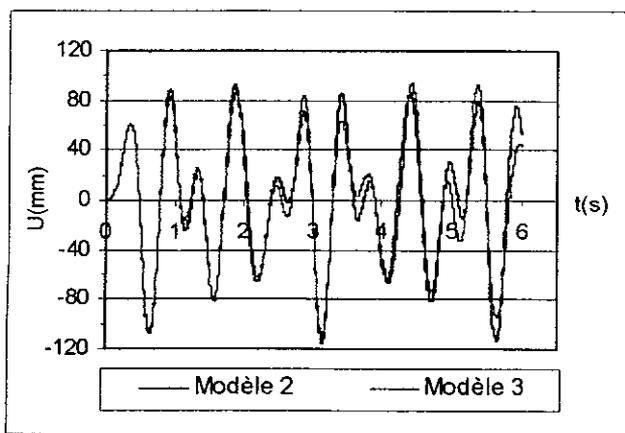
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-1)



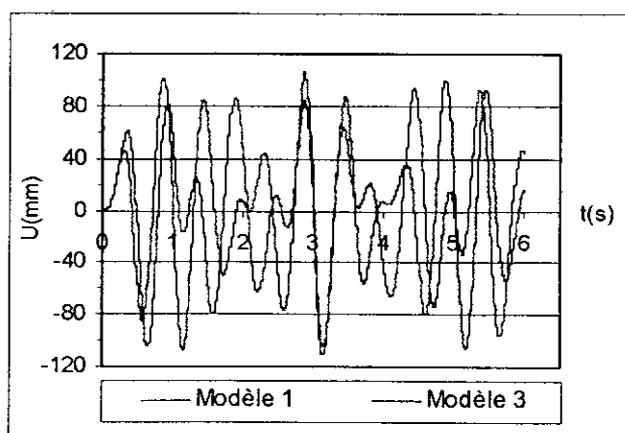
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-2)



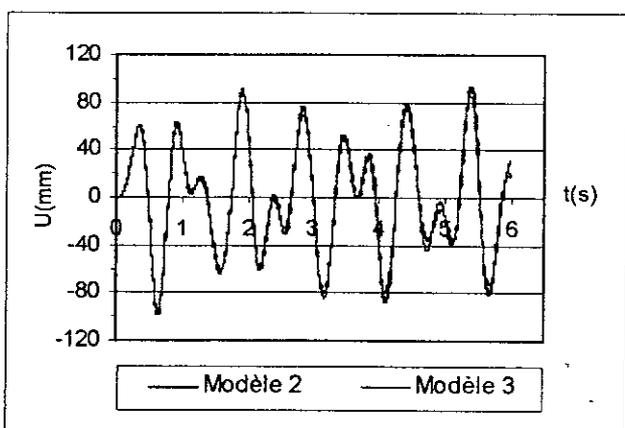
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-2)



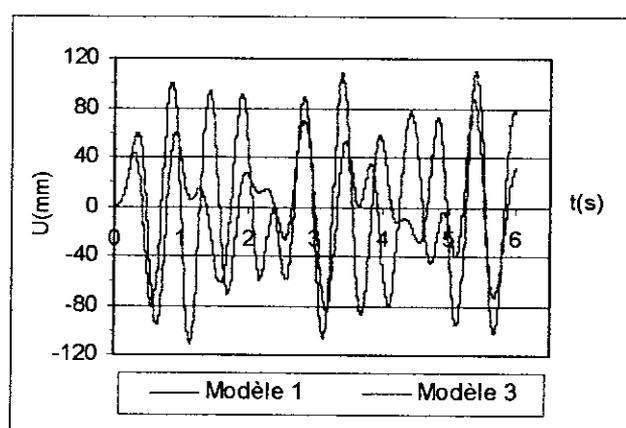
Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-3)



Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-3)

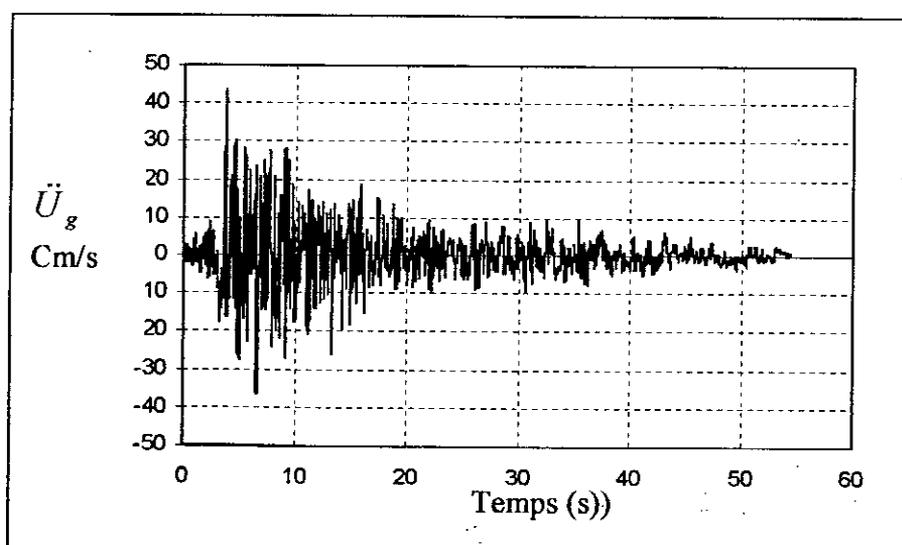


Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-4)

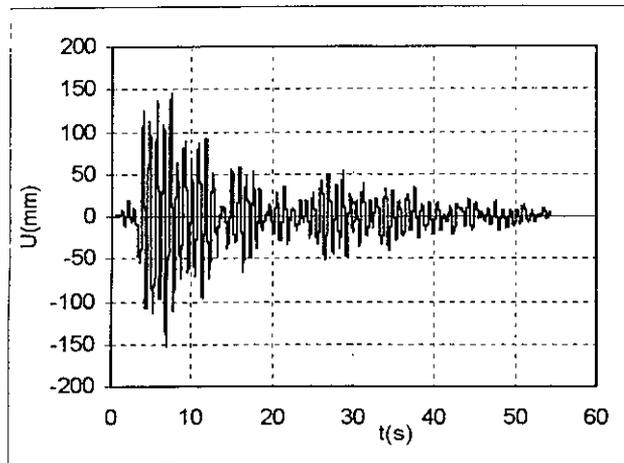


Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (structure III-4)

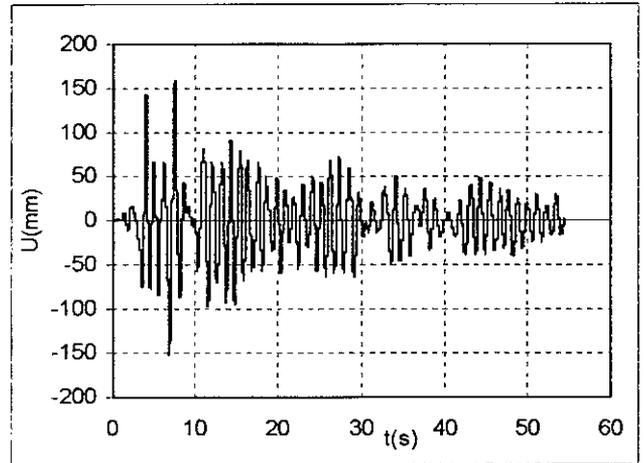
3) Cas d'une excitation d'origine sismique



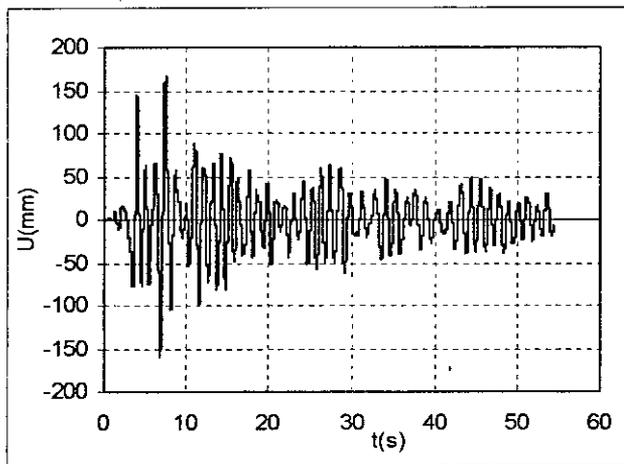
Accélérogramme Accmax = 43,975 cm/s<sup>2</sup>



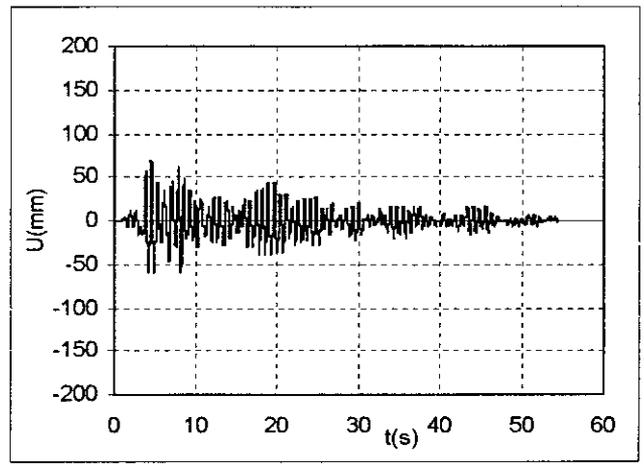
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 1)  
Structure III-1**



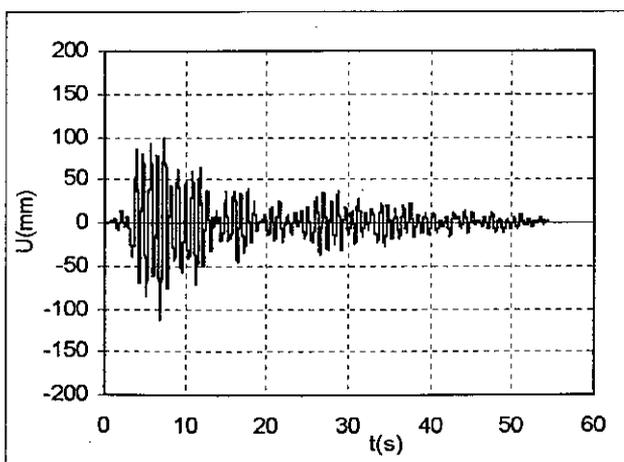
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 2)  
Structure III-1**



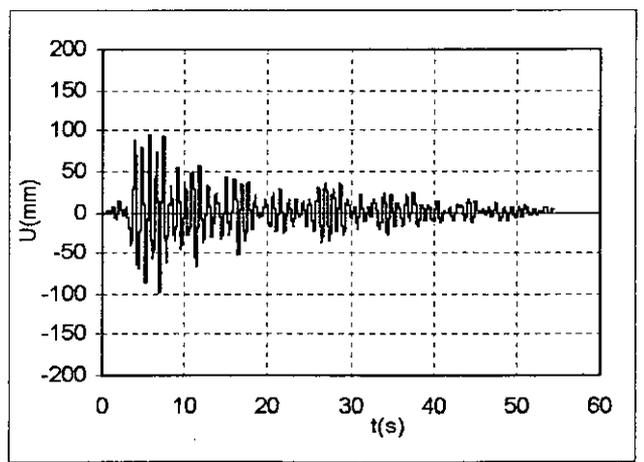
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 3)  
Structure III-1**



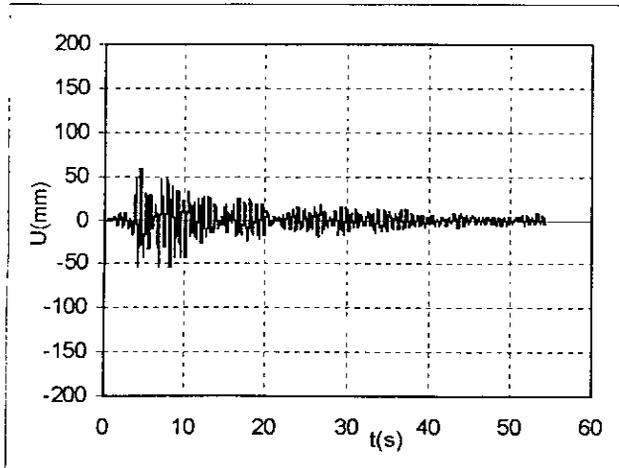
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 1)  
Structure III-2**



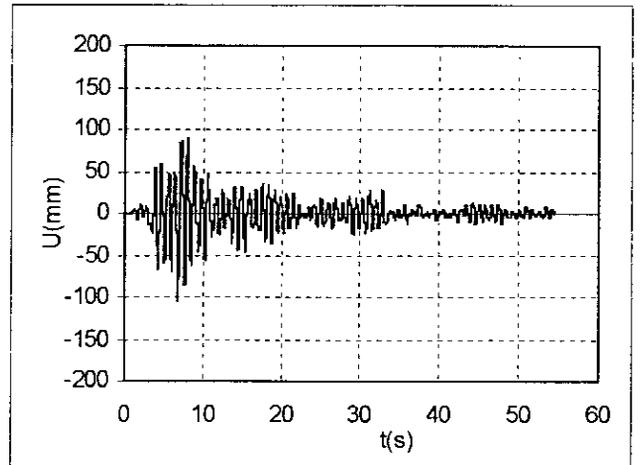
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 2)  
Structure III-2**



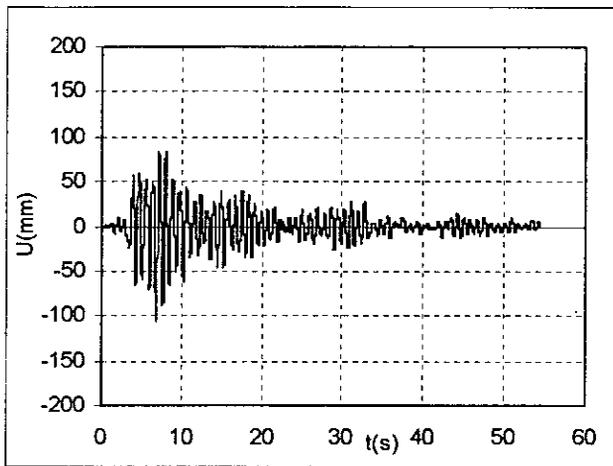
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 3)  
Structure III-2**



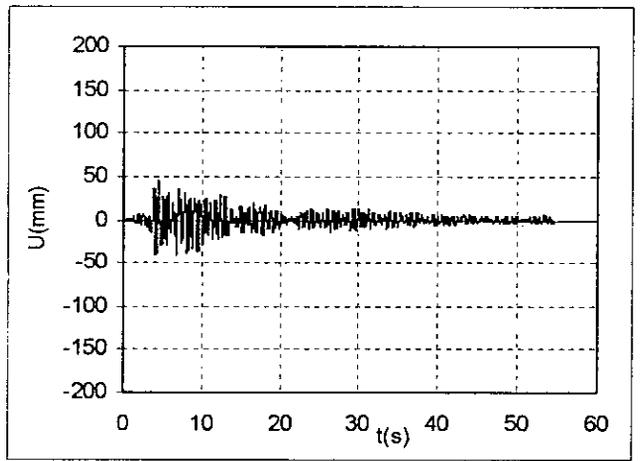
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 1)  
Structure III-3**



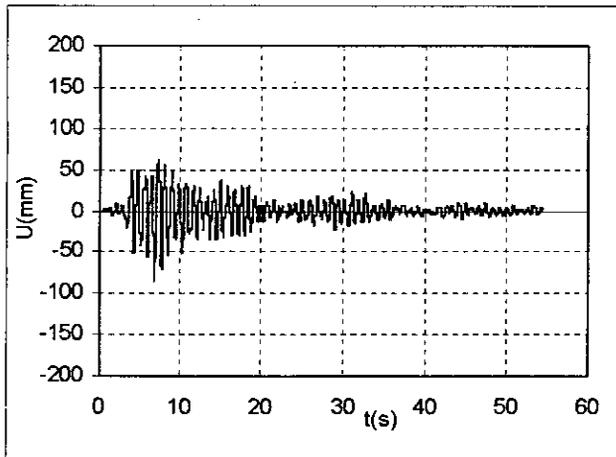
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 2)  
Structure III-3**



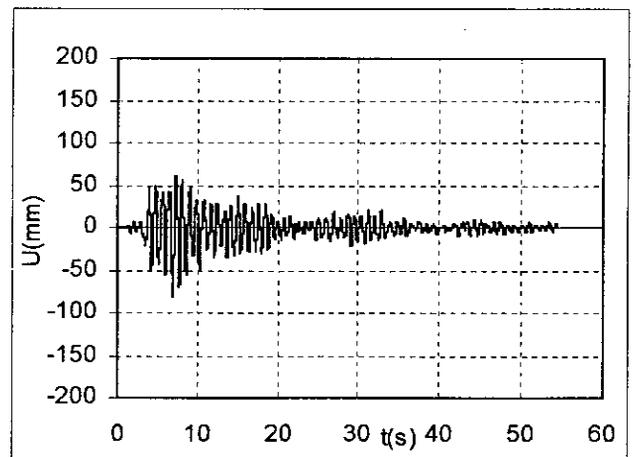
**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 3)  
Structure III-3**



**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 1)  
Structure III-4**



**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 2)  
Structure III-4**



**Depl. du 6<sup>ème</sup> étage (modèle 3)  
Structure III-4**

soient :

$$Dp = \frac{|U_6^2| - |U_6^1|}{|U_6^2|} \cdot 100$$

$$Dp' = \frac{|U_6^2| - |U_6^3|}{|U_6^3|} \cdot 100$$

$U_i^j$  : déplacement maximal de la masse i dans le modèle j :

**A) Cas d'une excitation constante au sixième étage. (40 kn )**

	$U_6^1$	$U_6^2$	$U_6^3$	Dp	Dp'
Structure III-1	55	95	95	45.26	0
Structure III-2	74	122	125	39.36	-2.45
Structure III-3	80	143	148	44.05	-3.49
Structure III-4	94	166	176	43.37	-6.02

Tab V.3.1

Dans cette étude on remarque bien que

- Les déplacements sont plus importants dans le cas où on a pris en compte la flexibilité des planchers a celui où les planchers sont supposés indéformables.
- Les déplacements maximaux du 6<sup>ème</sup> étage des constructions avec décrochements vertical sont plus grands que ceux des étages du bâtiment uniforme
- La troisième modélisation donne résultats plus proche à la deuxième que la première.

**B) Cas d'une excitation sinusoïdale au niveau de l'appui.**

$$Y_s = 0.2 \cdot g \cdot \sin(12.5 \cdot t)$$

	$U_6^1$	$U_6^2$	$U_6^3$	Dp	Dp'
Structure III-1	64	66	67	3.03	-1.51
Structure III-2	86	83	83	-3.61	0
Structure III-3	-107	-113	-115	5.31	-1.77
Structure III-4	-111	-97	-97	-14.43	0

Tab V.3.2

Dans cette étude on remarque bien que

- Les déplacements sont plus importants dans le cas où on a pris en compte la flexibilité des planchers a celui où les planchers sont supposés indéformables.
- les déplacements maximaux du 6<sup>ème</sup> étage des constructions avec décrochements vertical sont plus petits que ceux des étages du bâtiment uniforme
- La troisième modélisation donne résultats plus proche à la deuxième que la première.

## C) Cas d'une excitation d'origine sismique.

Les déplacements maximums dans les trois modélisations sont donner par le tableau ci-dessous

Structure	Model	Etage 1	étage 2	étage 3	étage 4	étage 5	étage 6
III-1	Modèle 1	-39	-73	103	125	144	-154
	Modèle 2	29	63	96	125	146	159
	Modèle 3	29	64	100	131	154	168
III-2	Modèle 1	18	33	46	56	65	69
	Modèle 2	23	49	69	-84	-101	-112
	Modèle 3	20	43	63	77	-88	-99
III-3	Modèle 1	14	26	35	46	54	58
	Modèle 2	18	-35	-49	-69	-91	-104
	Modèle 3	19	37	-51	-72	-93	-106
III-4	Modèle 1	-10	-17	26	35	42	46
	Modèle 2	13	25	37	-53	-71	-84
	Modèle 3	13	24	37	-54	-71	-82

Tab V.3.3

Soit

$$D_{i,j,n} = \frac{|U_n^j| - |U_n^i|}{|U_n^j|};$$

Avec n : désigné l'étage.

$U_i^j$  : déplacement maximal de la masse i dans le modèle j :

structure	Model	n= 2	n= 2	n= 3	n= 4	n= 5	n= 6
III-1	D <sub>1, 2,n</sub>	-34,48	-15,87	-7,29	0	1,369	3,14
	D <sub>2, 3,n</sub>	0	1,56	4	1,5	5,19	5,36
III-2	D <sub>1, 2,n</sub>	21,74	32,65	33,33	33,33	35,64	38,39
	D <sub>2, 3,n</sub>	-15	-13	-9,52	-9,09	-14,77	-13,13
III-3	D <sub>1, 2,n</sub>	22,22	25,28	28,57	33,33	40,65	44,23
	D <sub>2, 3,n</sub>	5,26	5,4	3,92	4,16	2,15	1,88
III-4	D <sub>1, 2,n</sub>	23	32	29	33,96	40,84	45,23
	D <sub>2, 3,n</sub>	0	-4,16	0	1,85	0	-2,44

Tab V.3.4

Dans cette étude on remarque bien que

- Les déplacements sont plus importants dans le cas où on a pris en compte la flexibilité des planchers a celui où les planchers sont supposés indéformables.
- les déplacements maximaux du 6<sup>ème</sup> étage des constructions avec décrochements vertical sont plus petits que ceux des étages du bâtiment uniforme
- D'après les tableaux V.3.4 et V.3.2, on remarque l'effet de la flexibilité sur la réponse du sixième étage croit avec le pourcentage de décrochements.
- La troisième modélisation donne résultats plus proche à la deuxième que la première.

### Conclusion

- En générale dans le cas où l'excitation se trouverait au niveau de l'appui les déplacements maximaux des étages des constructions avec décrochement vertical sont plus petits que ceux des étages du bâtiment uniforme.
- Dans le cas où l'excitation se trouverait au niveau des nœuds les déplacements maximaux des étages des constructions a décrochement vertical sont plus grands que ceux des étages du bâtiment uniforme
- Les déplacements sont plus importants dans le cas où on a pris en compte la flexibilité des planchers a celui où les planchers sont supposés indéformables.

# **Conclusion**

Le présent travail nous a permis de faire ressortir l'effet de la flexibilité des planchers sur la réponse des structures à des excitations dynamiques, ainsi l'effet de décrochement, chose que les règlements parasismiques actuels tendent à étudier de façon forfaitaire.

Nous avons également constaté l'intérêt d'une étude comparative sur la réponse des structures qui prend en considération la flexibilité des planchers à celle où les planchers sont supposés rigides. On a constaté que

- La période fondamentale d'une structure est plus grande dans le cas des planchers flexible que dans le cas des planchers rigides.
- Les déplacements sont plus importants dans le cas où on a pris en compte la flexibilité des planchers à celui où les planchers sont supposés rigides.
- La période fondamentale d'une structure uniforme est plus grande à celle d'une structure en décrochement
- Il y a noté que l'effet de la flexibilité des planchers devient plus important dans les structures les plus élancées.
- Nous avons souhaité en plus d'étudier
  - L'influence de la flexibilité sur la réponse dynamique
    - Des structures en cas de non-linéarité.
    - Lorsque les effets de l'effort tranchant ne sont pas négligeables.
- L'influence de l'amortissement sur la réponse dynamique.
- L'influence de décrochement sur les autres degrés de libertés :
  - Rotation.
  - Structures spatiales (6 ddl/nœud)
- L'influence sur les déplacements dus à l'interaction effort normal-moment fléchissant.

Ceci peut être l'objet d'une autre étude ou d'une suite à notre travail.

# **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] – ALAIN CAPRA ET VICTOR DAVIDOVICI  
Dynamique des structures en zone sismique
- [2]- Ch. MASSONET , G. DEPREZ, R. MAQUOI, R. MULLER, ET G.FONDER  
Calcul des strucyure sur ordinateur
- [3] - G. DHATT ET G. TOUZOT  
Une représentation de la méthode des éléments finis
- [4] - J. F. AUBOIN  
Calcul des structures et informatique
- [5]- J.M GERE – W Weaver  
Analysis of frame structures
- [6]- Ray W. CIOUGH ET JOSEPH PENZIEN  
Dynamique des structures

## ملخص:

يرمي عملنا هذا إلى دراسة التجاوب الديناميكي للمنشآت الذاتية التوازن مع الإجهادات الديناميكية بما فيها الزلازل، آخذين بعين الاعتبار إمكانية تشوه الأرضيات و كذلك تأثير عامل التدرج البنيوي.

الكلمات المفتاحية: الإجهادات الديناميكية، التشوه، التمثيل، التدرج البنيوي، الزلزال.

## Résumé:

Notre travail vise l'étude de la réponse dynamique des structures autostables par considération de l'effet de la déformabilité des planchés sous l'action des charges dynamiques (inclues celles d'origine sismique), ainsi l'incidence de décrochement.

**Mots clés:** Dynamique, Modélisation, déformabilité, discrétisation.

## Abstract:

Our work is to study the effect of planchies deformabilities on the response dynamique of auto stable structures

(inclu sysmic origine), also the effect of decroachment.

**Key words:** dynamics, modelisation, deformabilities, sysmic, decroachment.