

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Département Génie Civil

PROJET DE FIN D'ETUDE

Pour l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'état

en Génie Civil

Thème

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**INVESTIGATION DU PROBLEME DU
PREMIER PASSAGE DE LA REPONSE
DYNAMIQUE ALEATOIRE DES
STRUCTURES**

Proposé par :

Mr.B.TILIOUINE

Professeur à l'ENP

Etudié par :

ZIDELMAL Nacer

Promotion 2000

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

- *Mes parents en signe de reconnaissance pour tous les sacrifices consentis à mon égard, et pour leurs soutien moral et matériel, notamment pendant les dures épreuves et leur encouragement tout le long de mes études .*
- *Mes frères et soeurs.*
- *Notre cher petit poussin : Ouahab.*
- *Mon amis Mustapha que dieu le tout puissant l'accueille en son vaste paradis.*
- *Mes amis .*

Nacer

REMERCIEMENTS

L'aboutissement de ce travail à son terme n'a été rendu possible que par l'encouragement de nombreuses personnes, que je tiens énormément à remercier.

D'abord, je remercie vivement mon promoteur : le Professeur B. TILIOUINE pour son aide si précieuse et ses conseils éclairés tout au long du travail.

Mes remerciements vont également au président du jury ainsi que les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

J'exprime ma gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Un remerciement particulier est adressé à Mr .S. ZERMOUT pour son apport si précieux.

Sans oublier Mr .T. BOUHABEL pour son aide.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

1.INTRODUCTION GENERALE.

1.1. INTRODUCTION

Le grand public, s'il se trouve aujourd'hui naturel de profiter des progrès de la technologie, également pris conscience des dangers qui les accompagnent : c'est pourquoi il exige de l'ingénieur des réalisations toujours moins coûteuses et toujours plus fiables, contradiction apparente que seule une conception mieux comprise permet de dépasser.

Il est ainsi devenu nécessaire, au fil des ans, de raffiner les schémas mathématiques utilisés au stade de projet, pour tenter de les faire approcher d'une réalité souvent complexe.

C'est ainsi, aussi que la conception de la plupart des structures (que ce soient les constructions fixes du génie civil, du génie nucléaire ou du génie océanique, les machines ou parties de machines, les constructions aéronautiques, automobiles ou navales) exige à présent la détermination de leur réponse aux sollicitations de nature dynamique quelle sont amenées à rencontrer au cours de leur existence.

Or, le comportement dynamique d'une structure est très fréquemment lié à des phénomènes que ne peut permettre de prévoir la seule considération des chargements statiques ou pseudo-statiques auxquels sont souvent assimilées les sollicitations dynamiques rencontrées dans la réalité.

L'objectif que se fixe la dynamique des structures est de caractériser le comportement des constructions soumises à des sollicitations dynamiques. Pour cela, deux approches fondamentalement différentes s'offrent à nous pour évaluer la réponse d'une structure à des charges dynamiques : l'approche déterministe et l'approche non déterministe (stochastique ou aléatoire).

L'analyse déterministe suppose une connaissance complète des propriétés dynamiques et de l'état initial du système, de même que l'exacte évolution temporelle de l'excitation, chose difficile à rencontrer.

1.2. VIBRATION ALEATOIRE

L'une des tâches les plus importantes dans la conception des structures de Génie Civil est l'estimation de la sécurité de celles-ci.

Cette tâche est généralement complexe car plusieurs facteurs qui influent significativement dans la conception en terme de résultat final ne peuvent être déterminés de manière définitive.

Prenons l'exemple d'un haut bâtiment, où la connaissance du site, la pression du vent, et le mouvement de la terre dans la région sont particulièrement incertain dans leurs larges mesures.

Analyser et comprendre l'incertitudes de ces charges dynamiques et leurs effets dans la sécurité de la structure fait l'objet principale de la vibration aléatoire des structures.

Traditionnellement, les charges dynamiques dues à la pression du vent, au mouvement de la terre, à la mer agitée ...etc., sont estimées généralement de manière imparfaite soit en sélectionnant la fonction de temps et en déduire la charge maximum qui sera prise en considération dans la conception, soit en procédant à la moyenne des charges déduites de plusieurs fonction de temps (étude déterministe) .

Les deux approches sont fondamentalement insuffisantes car, au moment ou elles donnent quelque fois des indications raisonnables sur les futures conditions de chargement, elles ne peuvent fournir à l'ingénieur de façon quantitative et convenable la réponse à la question de la sécurité des structures d'une manière rationnelle.

La vibration aléatoire des structures de génie civil est une discipline qui peut être ramenée à trois étapes fondamentales .

La première étape est de caractériser les excitations par des modèles mathématiques (schémas de calcul)qui reflètent le plus l'état et le comportement réel de celles-ci.

L'analyse entrée-sortie(input-output) fait l'objet de la deuxième étapes.

Enfin l'évaluation de la sécurité de la structure en terme de fiabilité basée sur la théorie de la ruine.

1.3. ORGANISATION

Dans un grand nombre de cas, l'incertitude sur le système peut être rendue faible par rapport à celle sur l'excitation et le système est considéré comme déterministe.

C'est cette classe de problèmes que nous nous intéresserons exclusivement dans ce qui suit, limitant ainsi notre objectif à la prédiction des caractéristiques statistiques de la réponse dynamique d'un système déterministe connu à une excitation aléatoire dont les caractéristiques statistiques sont considérées comme connues.

Cette classe de problèmes concerne notamment la réponse des bâtiments à l'excitation résultant de l'action du vent, la réponse des bateaux et des plates-formes de forage à l'action de la houle, la réponse des constructions à l'accélération du sol lors de tremblement de terre.

L'action sismique , ses caractéristiques spécifiques à savoir, sa nature, le mouvement fort qu'elle engendre et sa représentation analytique fait l'objet du chapitre 2.

L'étude des propriétés statistiques nécessaire à la spécification d'un phénomène aléatoire relève de la théorie des processus aléatoires ; elle est présentée dans le chapitre 3.

La présentation de l'action sismique par sa densité spectrale de puissance dont les modèles proposés sont : bruit blanc pur, bruit blanc filtré type KANAI-TAJIMI, bruit blanc filtré type CLOUGH-PENZIEN(KANAI-TAJIMI modifié) fera l'objet du chapitre 4.

Outre que les caractéristiques statistiques de l'excitation supposés connues, une restriction additionnelle importante sera imposée sur les systèmes : ils seront toujours supposés linéaires.

Pour cette classe de systèmes, la relation entrée-sortie s'exprime par des convolutions dans le domaine du temps et des multiplications dans le domaine fréquentiel(domaine de Fourier).

Il s'ensuit que la plupart des résultats s'exprime plus simplement dans le domaine fréquentiel. D'où le rôle important joué par la transformée de Fourier.

La facilité avec laquelle la relation entrée-sortie s'exprime dans le domaine fréquentiel n'est d'ailleurs pas la seule caractéristique attrayante des systèmes linéaires.

En effet, une classe importante de processus d'excitation physiques peuvent être considérées comme gaussiens, ce qui peut en général être justifier par le théorème de la limite centrale, selon lequel un phénomène résultant de la superposition d'un grand nombre de contributions élémentaires indépendantes tend vers un processus gaussiens, quelle que soit la distribution des contributions élémentaires.

De tels processus sont entièrement caractérisés par leurs propriétés statistiques du deuxième ordre(c'est à dire, la moyenne et la fonction d'auto corrélation ou la densité spectrale), ce qui est d'ailleurs l'ordre maximum pour lequel il est possible d'obtenir des informations expérimentales sur la structure statistique d'un phénomène .

La réponse d'un système linéaire à une excitation gaussienne est également gaussienne .Le caractère gaussien est donc maintenu au travers d'un système linéaire.

Une analyse limitée aux statistiques des deux premiers ordres est donc parfaitement justifiée dans ce cas.

La relation entrée-sortie entre les statistiques des deux premiers ordres, pour des systèmes linéaires régis par les équations différentielles traditionnelles de la dynamique des structures, est discutée aux chapitres 5 et 6.

L'oscillateur linéaire à un degré de liberté est analysé en détail (chapitre 5) en raison, d'une part, de l'intérêt pour la compréhension de considérer des situations simples, mais surtout du rôle joué par l'oscillateur dans l'analyse de la réponse des structures possédant des modes normaux.

Le mouvement de telles structures peut en effet être décomposées en celui des différents modes qui se comportent comme autant d'oscillateurs à un degré de liberté.

Comme, en général, la contribution principale de la réponse provient des quelques premiers modes, il est possible de limiter l'analyse à ceux-ci entraînant ainsi une réduction considérable de la taille du problème à traiter.

Supposant connaître les caractéristiques statistiques de la réponse aléatoire d'une structure, afin de les convertir en une information sur sa fiabilité, il importe de définir les modes de ruines.

Un mode sera considéré au chapitre 7 : la ruine par dépassement de seuil connu sous le nom du problème de *premier passage*. Il vise à déterminer la probabilité que le système ne quitte pas un domaine réputé sûr, pendant la durée d'observation. Il peut être exprimé alternativement comme la recherche de la distribution de probabilité du plus grand des extrema de la réponse pendant la durée d'observation : *peak factor*.

Ce problème n'a pas reçu, à ce jour, de solution rigoureuse, même dans le cas le plus simple de la réponse d'un oscillateur linéaire à un bruit blanc gaussien. De nombreuses solutions approchées existent toutefois et sont discutées.

L'investigation numérique sera l'objet du chapitre 8.

L'interprétation des résultats et les conclusions seront débattues dans le chapitre 9.

2.CARACTERES SPECIFIQUES DE L'ACTION SISMIQUE.

2.1. INTRODUCTION.

Les tremblements de terre ont représenté depuis toujours un des plus graves désastres de l'humanité. Leur apparition brutales et imprévue, la violence des forces mises en jeu, l'énormité des pertes humaines et matérielles ont marqué la mémoire des générations . Parfois, les dommages sont comparables à un budget national annuel.

De nos jours, avec l'accélération du développement industriel, la réalisation de constructions audacieuses, telles que : barrages, immeubles de grande hauteur abritant des centaines de personnes, etc. La concentration d'une grande partie de la population dans des agglomérations urbaines immenses, la garantie antisismique des constructions s'impose comme une absolue nécessité du point de vue social, économique et politique.

Ainsi l'établissement d'un projet de construction parasismique rationne, exige de la part de l'ingénieur l'acquisition préalable d'un minimum de connaissance concernant les caractéristiques spécifiques de l'action sismique.

2.2. NATURE DE L'ACTION SISMIQUE.

L'action sismique consiste en un mouvement vibratoire du sol de forte amplitude caractère aléatoire correspondant à une libération brutale d'une partie de l'énergie se propageant sous forme d'ondes élastiques ayant pris naissance à l'intérieur de l'écorce terrestre de durée variable mais toujours brève. Ces ondes se diffusent dans toutes les directions à partir de la source et se manifestent sous forme de déplacement du sol qui sera enregistré par des stations dotées d'instruments adéquats.

A l'origine de tels phénomènes se trouvent les déformations lentes de la croûte terrestre ou du milieu sous-jacent, qui entraînent l'accumulation de tensions internes. Ces dernières finissent par dépasser, en un point donné, la résistance des roches au cisaillement, produisant à l'endroit en question une rupture qui se propage ensuite. La faille résultante constitue désormais une zone de faiblesse dans la croûte.

Les propriétés de l'action sismique dépendent de nombreux facteurs, dont notamment : la magnitude, le mécanisme au foyer et la profondeur du foyer, la distance du site à la source, la direction de propagation, les propriétés mécaniques et la configuration des milieux traversés, ainsi que les caractéristiques géologiques, géotechniques et topographiques du site.

Il est bien entendu qu'à partir de certaines distances de la source allant de quelques dizaines de kilomètres pour les séismes modérés à quelques centaines de kilomètres pour les grands séismes, les mouvements sismiques n'affectent plus les constructions.

En génie sismique, l'ingénieur alloue un intérêt aux effets locaux des mouvements sismiques importants (de forte intensité) pour lesquels le mouvement est suffisamment intense pour engendrer des endommagements structuraux. Ces

suffisamment intense pour engendrer des endommagements structuraux. Ces mouvements sismiques sont dits *mouvements forts*.

2.3. MOUVEMENT FORT.

L'étude analytique et expérimentale du mouvement fort a pu se développer ces dernières années grâce aux réseaux de sismographes et d'accélérographes installés dans certaines régions sismiques du monde.

L'intérêt pour une telle étude s'est accentué en raison des problèmes de sécurité se posant avec une acuité de plus en plus grandes en ce qui concerne certaines installations stratégiques particulièrement sensibles telles que les ponts, les centrales nucléaires etc.

L'étude du mouvement fort en zone proche se définit comme étant la mesure et l'interprétation physique du mouvement du sol au voisinage d'une faille, dans une zone où ces mouvements mettent en danger les constructions et la vie humaine.

Les enregistrements obtenus par les systèmes de mesure des mouvements forts sont requis par l'ingénieur aussi bien pour étudier les propriétés des mouvements sismiques proches de la source que pour l'étude de la variation spatiale des ondes sismiques.

2.4. ONDES SISMQUES.

Après rupture, l'énergie est libérée sous forme d'ondes sismiques de divers types. Ces dernières se propagent rapidement à partir du foyer, provoquant une secousse sismique et engendrant en surface un mouvement complexe difficile à prédire en un site donné.

On distingue les types d'ondes suivantes : - Ondes de volume.
- Ondes de surface.

a) Ondes de volumes.

Elles prennent naissance dans le foyer et se propagent à l'intérieur de la terre (dans un volume), sous deux formes :

- *Ondes longitudinales ou ondes P (ondes primaires)* : Ce sont des ondes de dilatation ou de compression qui se propagent à une vitesse moyenne de 7 à 8 Km/h et induisent une déformation parallèle à la direction de propagation. Elles s'accompagnent d'un changement de volume.
- *Ondes transversales ou ondes S (ondes secondaires)* : Ce sont des ondes de cisaillement, correspondant à un mouvement sans variation de volume. Elles se propagent à une vitesse de 4 à 5 Km/h et induisent une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Ces ondes sont les plus

dangereuses pour les constructions, elles sont d'une importance primordiale en génie parasismique.

A la différence des ondes longitudinales, les ondes transversales ne peuvent se propager dans les milieux liquides ou gazeux, en raison de l'incapacité de ces milieux à transmettre les efforts de cisaillement.

b) Ondes de surface.

Les ondes de volume rencontrent des discontinuités et des hétérogénéités à la surface libre. En heurtant ces surfaces, elles donnent naissance à des ondes de surface n'intéressant le sol que sur une profondeur extrêmement faible.

On distingue principalement :

- les ondes de Rayleigh
- les ondes de Love
- **Ondes de RAYLEIGH ou ondes R** : Ce sont les ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de la direction de propagation. Elles entraînent des compressions ou des tractions ainsi que des cisaillements dans le sol.
- **Ondes de LOVE ou ondes Q** : Ce sont les ondes pour lesquelles les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface perpendiculairement à la direction de propagation. Elles n'entraînent que des contraintes de cisaillement.

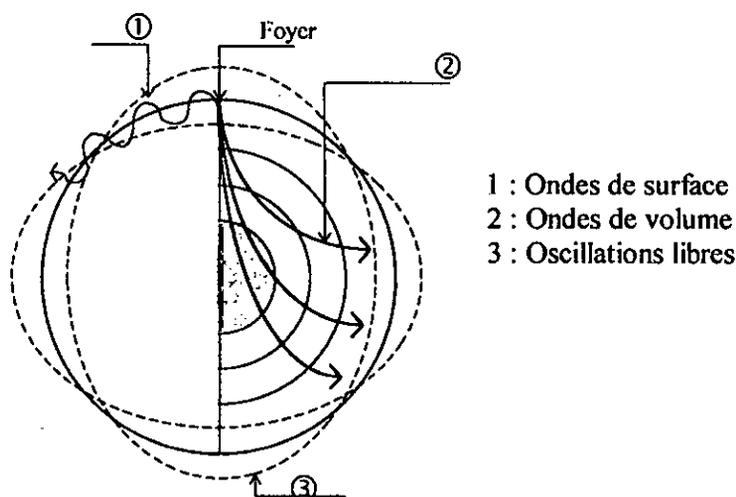


Fig. 2.1 - Types d'ondes

Chaque point de la surface du sol est sollicité successivement par les divers types d'ondes. Par suite de leur vitesse de propagation, ce sont les ondes longitudinales qui arrivent les premières suivies des ondes transversales, et en dernier lieu des ondes superficielles.

Tout point de la surface est aussi sollicité par de nombreuses ondes secondaires provenant de réflexions et réfractions des ondes initiales (P et S) à la surface de la terre et à l'interface des divers couches géologiques en profondeur. Ce point est ainsi entraîné dans une trajectoire spatiale complexe.

2.5. CARACTERISATION D'UN MOUVEMENT SISMIQUE.

2.5.1. Définitions.

a) L'épicentre géométrique.

L'épicentre géométrique est la projection verticale du foyer sismique sur la surface libre. Fig. 2.2

b) La distance focale.

La distance focale d'un bâtiment est la distance qui le sépare du foyer sismique. Fig. 2.2

c) La distance épacentrale.

La distance épacentrale d'un bâtiment est la distance qui le sépare de l'épicentre géométrique. Fig. 2.2

d) L'épicentre d'observation.

C'est le site où se produit le maximum de dégâts lors d'un séisme. Il n'est pas forcément confondu avec l'épicentre géométrique.

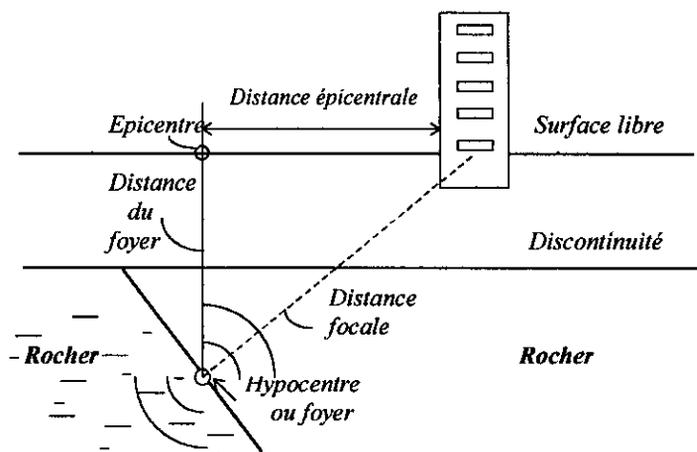


Fig. 2.2 - Caractéristiques du mouvement sismique

2.6. EVALUATION DES SEISMES.

Pour l'ingénieur en génie civil, la caractéristique essentielle est l'aptitude plus ou moins grande du séisme à provoquer en un point donné de la surface des actions mécaniques et des destructions.

Pour représenter cette grandeur, on utilise aujourd'hui des échelles macroscopiques désignées par :

- l'échelle des magnitudes
- l'échelle des intensités.

- **Magnitude :**

La magnitude représente une mesure de l'énergie libérée par la rupture de la faille dans la zone source. Elle est calculée comme étant le logarithme de l'amplitude maximale enregistré par un sismographe du type Wood-Anderson, ayant une période propre de 0.8s et un pourcentage d'amortissement critique de 80%, situé à 100 Km de l'épicentre.

D'une façon générale la magnitude est calculée par l'expression :

$$M = \log \frac{A}{T} + F(\Delta, h) + S \quad 2.1$$

où

- A : L'amplitude maximale de l'onde sismique enregistrée.
- T : Période de l'onde sismique enregistrée.
- F : Représente le facteur de correction de la distance épacentrale Δ et de la profondeur h .
- S : Représente un facteur de site.

La magnitude d'un séisme est un nombre réel exprimé en chiffres arabes.

Entre la magnitude M et l'énergie libérée E , a été établie la relation suivante :

$$E = 10^{1.8 + 1.5M} \quad \text{KJoules} \quad 2.2$$

- **Intensité :**

L'échelle d'intensité attribuée à un séisme caractérise son importance en un lieu donné, d'après les manifestations ressenties par les personnes et les dégâts subis par les constructions.

L'intensité d'un séisme dépend du lieu où elle est mesurée et décroît généralement quand la distance épacentrale du lieu d'observation augmente. Elle est exprimée en chiffres romains. Il existe deux grandes échelles de mesure :

- L'échelle macroscopique internationale - l'échelle MERCALLI.
- L'échelle macroscopique M.S.K :

2.7. REPRESENTATION ANALYTIQUE DE L'ACTION SISMIQUE.

L'une des visées du génie sismique est de quantifier la réponse sismique des structures. Dans ce sens plusieurs représentations de l'input sismique existent.

Parmi elles, celle qui utilise l'histoire temporelle de l'action sismique et celle qui représente la répartition énergétique du signal sismique (fonction de densité spectrale) et qui nécessite une analyse de nature probabiliste.

En pratique, une représentation de l'action sismique peut se faire à l'aide d'un spectre de réponse.

2.7.1. Spectre de réponse.

Le spectre de réponse en accélération, vitesse ou déplacement permet de faire intervenir la notion de contenu en fréquence du mouvement sismique, son but est de caractériser un séisme d'après une structure.

Par définition, un spectre de réponse exprime la réponse maximale des grandeurs d'un oscillateur simple à un degré de liberté de fréquence propre et de coefficient d'amortissement variable.

Par ailleurs, pour une même secousse sismique, les spectres de réponse établis en surface sont différents selon qu'ils correspondent à un affleurement rocheux ou à un dépôt sédimentaire. Les caractéristiques des sédiments vont influencer sur le mouvement du sol enregistré en surface. Par conséquent, la forme du spectre de réponse établi en surface est très sensible à la nature du sol.

2.7.2. Spectre de calcul.

Lorsqu'il s'agit de déterminer le spectre de réponse à prendre en compte pour le calcul des constructions en un site donné, il est exclu d'utiliser un seul accélérogramme, même s'il a été enregistré au voisinage du site. Ainsi, en se basant sur l'étude des spectres de réponses associés à plusieurs séismes et sur le calcul des réponses correspondant à différents enregistrements de mouvements, il est possible d'estimer la forme générale de spectres typiques, ou de déduire des règles qui permettent de construire, de façon approximative, des spectres de calcul utilisables pour la conception des structures.

Il existe une différence fondamentale entre un spectre de réponse (*response spectrum*) et un spectre de calcul (*design spectrum*). Le premier caractérise la réponse calculée associée à un mouvement sismique particulier (unique), alors que le second caractérise une classe de mouvements sismiques pouvant exciter un site bien défini.

2.8. ASPECTS STOCHASTIQUES DES ACCELEROGRAMMES DES SEISMES A FORTS MOUVEMENTS.

L'étude des accélérogrammes des tremblements de terre à fort mouvement montre une nature stochastique évidente du signal. Cette nature aléatoire est due à deux catégories de paramètres :

- la première catégorie concerne la profondeur du foyer, la distance du site considéré à l'épicentre, la quantité d'énergie libérée dans la zone du foyer, durée pendant laquelle l'énergie se libère, la vitesse de rupture qui est variable. Ces paramètres liés aux séismes lui même et à sa localisation par rapport au site où se trouve la structure étudiée ont un caractère aléatoire évident.
- La seconde catégorie de paramètres à considérer est relative au fait que les ondes sismiques atteignent le site considéré après avoir subi de nombreuses diffractions, réflexions dans les couches du sous-sol. Ces phénomènes complexes font que les accélérogrammes ont une nature stochastique.

Ainsi, deux accélérogrammes relatifs au même séisme mesuré en deux points voisins d'un même site seront généralement différents. Donc, il est important de considérer les accélérogrammes comme des réalisations d'un processus stochastique, non pas comme des fonctions déterministes du temps et de l'espace.

**3. NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DES
VIBRATIONS ALEATOIRES.**

3.1. INTRODUCTION.

L'étude des propriétés statistiques nécessaires à la caractérisation d'un phénomène aléatoire relève de la théorie des processus aléatoires. Ces dernières années la théorie des processus aléatoires s'est développée. Elle constitue le fondement pour l'analyse stochastique des structures. Parmi les applications importantes de la théorie des processus aléatoires, on citera l'analyse des vibrations aléatoires des systèmes mécaniques. Les vibrations aléatoires constituent une discipline qui combine la théorie des processus aléatoires et la dynamique des structures. Leur principal objectif est d'obtenir les caractéristiques probabilistes de la réponse d'un système pour des caractéristiques connues des sollicitations.

Les méthodes d'analyse des vibrations aléatoires, exposées dans cette section, donnent la possibilité d'étudier les processus dynamiques qui se manifestent dans les systèmes mécaniques (possibilité de déterminer les caractéristiques probabilistes des déplacements des points du système et de leur deux premières dérivées) et d'obtenir des informations relatives aux propriétés statistiques du système, indispensable à l'évaluation de son niveau de fiabilité.

3.2. VARIABLES ALEATOIRES : NOTIONS DE BASE.

3.2.1. Caractérisation d'une variable aléatoire.

Pour la plupart des phénomènes physiques intéressant l'ingénieur, le résultat d'une expérience aléatoire consiste en une valeur numérique. Par conséquent un phénomène aléatoire peut être représenté par un nombre aléatoire x , dont la valeur dépend du résultat de l'essai.

x est une fonction définie sur l'ensemble ω des résultats possibles du phénomène. $x = x(r) \quad r \in \Omega$, la variable x est appelée variable aléatoire.

Une fonction aléatoire continue est décrite par sa fonction de distribution cumulative $F_x(x)$, qui représente la probabilité que les valeurs de la variable aléatoire (abréviation VA) soient inférieures ou égales à x .

$$F_x(x) = P(X \leq x) \qquad 3.1$$

La fonction de distribution cumulative (FDC) est par définition monotone, non décroissante et satisfait les relations suivantes :

$$F_x(-\infty) = 0 \qquad , \qquad F_x(+\infty) = 1$$

Alternativement une VA continue peut être décrite par sa fonction de densité de probabilité (FDP).

$$P_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \qquad 3.2$$

La FDP étant non décroissante, il s'ensuit que la FDP est non négative et vérifie la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(x) dx = 1 \quad 3.3$$

La FDC est exprimée par :

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x P_x(y) dy \quad 3.4$$

3.2.2. Distribution conjointe de plusieurs variables aléatoires continues.

Le comportement conjoint de deux VA x_1 et x_2 est décrit par la FDC conjointe $F_{x_1, x_2}(x_1, x_2)$ qui représente la probabilité suivante :

$$F_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = P[(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2)] = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} P_{x_1, x_2}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad 3.5$$

La FDP conjointe s'en déduit par :

$$P_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{x_1, x_2}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad 3.6$$

La FDC marginale d'une seule variable s'obtient en remplaçant la limite supérieure d'intégration sur l'autre variable par l'infini, par exemple :

$$F_{x_2}(x_1) = P[X_1 \leq x_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \int_{-\infty}^{x_2} P_{x_1, x_2}(y_1, y_2) dy_1 \quad 3.7$$

$$P_{x_2}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_2 \quad 3.8$$

Il est évident que la densité conjointe contient plus d'information que les densités marginales puisque ces dernières s'en déduisent par intégration partielle.

Le concept se généralise à plus de deux VA :

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n)] \quad 3.9$$

$$P_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 3.10$$

Si les VA sont mutuellement indépendantes :

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{x_1}(x_1) \cdot F_{x_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{x_n}(x_n) \quad 3.11$$

3.2.3. Espérance mathématique.

Espérance mathématique ou moyenne d'ensemble d'une VA est définie par :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xP_x(x)dx \quad 3.12$$

Pour autant que cette intégrale existe, si $y = f(x)$ est une fonction de la VA X , son espérance mathématique peut être calculée sans détermination préalable de sa densité de probabilité par :

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} yP_y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P_x(x)dx \quad 3.13$$

3.2.4. Moments.

Les moments d'une ou plusieurs VA sont définies comme les espérances mathématiques des différentes puissances de ces VA.

- Pour une seule variable, le moment initial d'ordre n est défini par : $E[X^n]$
- Pour deux VA, le moment conjoint d'ordre $(m+n)$ des VA X et Y est : $E[X^m Y^n]$

Si l'on pose , $m_x = E[X]$:

- le $n^{\text{ème}}$ moment central de la V.A X est défini par :

$$E[(X-m_x)^n]$$

De même le $(m+n)^{\text{ème}}$ moment central conjoint de deux VA X et Y est défini par:

$$E[(X-m_x)^m (Y-m_y)^n]$$

Les moments centraux d'ordre 2 portent respectivement les noms de :

- variance (cas d'une seule VA) :

$$E[(x - m_x)^2] = E[X^2] - m_x^2 = \sigma_x^2 \quad 3.14$$

- covariance (cas de deux VA) :

$$E[(x - m_x)(y - m_y)] = E[XY] - m_x m_y = \sigma_{xy}^2 \quad 3.15$$

dont la valeur normalisée porte le nom de coefficient de corrélation :

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} \quad 3.16$$

Pour des VA réelles, les coefficients de corrélation vérifient : $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

Deux VA sont linéairement indépendantes ou non corrélées si leur variance est nulle.

3.3. PROCESSUS ALEATOIRE.

Si un phénomène physique est aléatoire, alors chaque échantillon $X(t)$ de ce phénomène (mesure ou enregistrement temporel) est le résultat de circonstances uniques qui ne se répéteront pas à l'occasion d'autres mesures indépendantes de ce même phénomène. Un ensemble complet d'échantillons $X(t)$ (fonction aléatoire) constitue un processus aléatoire. On appelle une fonction aléatoire une fonction pour laquelle à chaque valeur donnée de l'argument (par exemple le temps) il correspond une VA.

Lorsqu'un processus aléatoire est défini par plusieurs paramètres, on l'appelle en conséquence champ aléatoire. Les champs aléatoires sont essentiellement des fonctions aléatoires multidimensionnelles c.-à-d. dépendant de plus d'un paramètre.

$X(t)$ représente un champ aléatoire dans lequel t correspond à un vecteur qui peut dépendre de plusieurs paramètres (temps, position dans l'espace...etc.).

3.3.1. Caractérisation d'un processus aléatoire.

a) Fonction de densité de probabilité :

D'une manière générale, pour caractériser les processus aléatoires de façon complète dans le sens probabiliste, il est nécessaire de spécifier les densités de probabilité conjointe d'ordres croissants suivantes :

$$\begin{array}{ll} P_x(x, t) & \text{d'ordre 1} \\ P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) & \text{d'ordre 2} \\ \vdots & \\ P_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) & \text{d'ordre n} \end{array}$$

Cependant dans le cas particulier des processus aléatoires Gaussiens une caractérisation basée uniquement sur les statistiques du premier et du second ordre, contient toute les informations nécessaires pour une description complète du processus.

b) Moments :

Un processus aléatoire peut être caractérisé par ses moments, comme suit :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_x(x, t) dx$$

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

⋮

$$E[X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \dots x_n P_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Les premiers moments sont d'une importance pratique considérable et ont reçu les notations et appellations suivantes :

- L'espérance mathématique :

$$m_x(t) = E[X(t)] \quad 3.17$$

- La fonction d'autocorrélation :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad 3.18$$

- La fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - m_{x1})(X(t_2) - m_{x2})] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - m_{x1})(x(t_2) - m_{x2}) P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad 3.19$$

avec : $m_{x1} = m_x(t_1)$ et $m_{x2} = m_x(t_2)$.

D'autres fonctions utiles et qui sont d'ailleurs reliées aux deux premiers moments sont

- La variance :

$$\sigma_x(t) = \sqrt{E[X(t) - m_x(t)]^2} \quad 3.20$$

- Le coefficient de corrélation :

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{xx}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \cdot \sigma_x(t_2)} \quad 3.21$$

Par ailleurs, lorsqu'il s'agit de deux processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$, la dépendance statistique qui les relie peut s'exprimer à travers :

- La fonction d'intercorrélation :

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad 3.22$$

- La fonction d'intercovariance :

$$\Gamma_{xy}(t_1, t_2) = E\left[(X(t_1) - m_{x1})(Y(t_2) - m_{y2})\right] \quad 3.23$$

avec : $m_{x1} = m_x(t_1)$ et $m_{y2} = m_y(t_2)$.

- Le coefficient d'intercorrélation :

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \cdot \sigma_y(t_2)} \quad 3.24$$

3.3.2. Processus stationnaire.

Un processus aléatoire est dit stationnaire ou strictement stationnaire, si les distributions de probabilités obtenues pour l'ensemble ne dépendent que des temps relatifs et non absolus; ou encore, si sa structure de probabilité est invariante vis-à-vis d'un changement de l'origine des temps ou d'une translation dans le temps. Cela veut dire que la densité de probabilité du premier ordre est indépendante du temps et que celles d'ordre supérieur ne dépendent que des différences relatives entre les instants considérés. Ceci implique :

$$P_x(x, t) = P_x(x, t + \tau) \quad \text{indépendant de } t$$

$$P_x(x_1, t_1; x_2, t_2) = P_x(x_1, t_1; x_2, t_1 + \tau) \quad \begin{array}{l} \text{indépendant de } t \\ \text{mais fonction de } \tau \end{array}$$

$$P_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = P_x(x_1, t_1; x_2, t_1 + \tau_1; \dots; x_n, t_1 + \tau_{n-1}) \quad \begin{array}{l} \text{indépendant de } t \\ \text{mais fonction de } \tau_1, \dots, \tau_n \end{array}$$

Il découle de ce qui précède que les moments individuels sont constants et les moments conjoints sont fonction de la différence des arguments ($t_i - t_j$).

$$E[X^n(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P_x[X(t)] dx = \text{constante}$$

$$E[X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} P_x(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad 3.25$$

$$= R_{xx}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$$

avec : $\tau_j = t_{j+1} - t_j$

Un processus est dit faiblement stationnaire ou stationnaire au sens large, si seulement sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation satisfont les conditions de

stationnarité :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_x(x) dx = m_x = \text{constante} \quad 3.26$$

de même pour un tel processus, la variance est indépendante du temps, en effet :

$$\begin{aligned} E\left[(X(t) - m_x)^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 P_x[X(t)] dx \\ &= \sigma_x^2 = \text{constante} \end{aligned} \quad 3.27$$

Les fonctions d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et d'autocovariance $\gamma_x(\tau)$ sont aussi indépendantes du temps et ne dépendent que de la différence τ entre les instants considérés, en effet :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_x(\tau) \quad 3.28$$

$$\Gamma_{xx}(t_1, t_2) = E\left[(X(t_1) - m_x)(X(t_2) - m_x)\right] = \Gamma_x(\tau) \quad 3.29$$

Les processus aléatoires utilisés en engineering ont toujours un début et une fin et ne peuvent donc pas être vraiment stationnaires, mais pour des considérations pratiques, il est très souvent adéquat de supposer que le processus est stationnaire pour l'essentiel de la durée, ou bien il peut être divisée en plusieurs tranches qui sont approximativement stationnaires.

a) Propriétés des fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance.

- La fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} R_x(0) &= E[X^2] = S_x \\ R_x(-\tau) &= R_x(\tau) \\ |R_x(\tau)| &\leq R_x(0) = S_x \end{aligned} \quad 3.28$$

- La fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned} \Gamma_x(\tau) &= R_x(\tau) - m_x^2 \\ \Gamma_x(-\tau) &= \Gamma_x(\tau) \\ |\Gamma_x(\tau)| &\leq R_x(0) = \sigma_x^2 \end{aligned} \quad 3.29$$

La fonction d'autocorrélation tend vers la valeur du carré de la moyenne quand la différence des instants est infiniment large $\tau \rightarrow \infty$ et ceci dans le cas où le processus ne contient aucune composante périodique. En d'autres termes, la fonction de covariance diminue, en l'absence de composantes périodiques, quand l'écart entre les instants augmente. Ainsi, on pourra avoir :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma_{xx}(\tau) = 0$$

et on aboutit finalement à :

3.30

$$R_{xx}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m_x^2$$

Il s'ensuit que la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire $R_x(\tau)$ est réelle, paire et atteint son maximum à l'origine ($\tau=0$). La fonction d'autocovariance possède les mêmes propriétés.

• Fonction d'intercorrélation :

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

$$|R_{xy}(\tau)| \leq [R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0)]^{1/2}$$

3.31

En général, les fonctions de cross-corrélation $R_{xy}(\tau)$ ne sont ni symétriques, ni paires. On constate que pour la plupart des processus aléatoires, la corrélation entre 2 processus devient très faible lorsque l'écart entre les instants est large et, par conséquent, la fonction d'intercorrélation tend vers le produit des moyennes des 2 processus quand l'écart tend vers l'infini :

$$R(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m_x m_y$$

3.32

Nota :

Les fonctions d'autocovariance et d'intercovariance ont, respectivement, les mêmes propriétés que celles d'autocorrélation et de cross-corrélation.

b) Moyenne temporelle et processus ergodique.

Considérons un processus stationnaire $X(t)$, sa moyenne temporelle est définie par :

$$S = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \langle X(t) \rangle_T$$

3.33

Un processus est dit ergodique, si en plus de la stationnarité, les moyennes temporelles, sur un échantillon, et d'ensemble sont identiques.

Pour des considérations pratiques, seulement les ergodicités de la moyenne et de fonction d'autocorrélation seront étudiées (processus faiblement stationnaire).

Un processus est dit ergodique dans la moyenne si :

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle_T$$

3.34

Un processus est dit ergodique dans la corrélation si :

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t)X(t + \tau) \rangle_T \quad 3.35$$

3.3.3. Décomposition spectrale d'un processus aléatoire.

a) Transformée de Fourier.

Il est très important de faire une analyse spectrale (décomposition fréquentielle) d'un processus aléatoire.

Soit une fonction réelle $h(t)$, sa transformée de Fourier est définie par :

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad 3.36$$

Où $H(\omega)$ constitue l'amplitude spectrale de la fonction considérée. L'existence de $H(\omega)$ est garantie si $h(t)$ est absolument intégrable, i.e. si l'intégrale suivante a une valeur finie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad 3.37$$

La transformée inverse est définie par :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} dt \quad 3.38$$

La notion de transformée de Fourier sera utilisée afin de définir la décomposition spectrale d'un processus aléatoire stationnaire $X(t)$.

b) La fonction de densité spectrale de puissance.

Les processus aléatoires stationnaires $X(t)$ ne possèdent de transformées de Fourier puisqu'un échantillon d'un tel processus ne s'annule pas à l'infini, il n'est pas absolument intégrable. Un moyen de contourner cette difficulté consiste à considérer la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ du processus considéré. Celle-ci étant la transformée inverse de densité spectrale de puissance.

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau & (a) \\ R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega & (b) \end{cases} \quad 3.39$$

Les relations ci-dessus sont connues sous le nom de relations de *WIENER-KHINTCHINE*.

Pour $\tau = 0$, à partir de la relation (b), une relation importante s'établit :

$$R_x(0) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad 3.40$$

La fonction de densité spectrale de puissance comme le montre la relation ci-dessus, est une mesure de la distribution, dans le domaine des fréquences, de la moyenne de la valeur au carré $E[X^2]$, ou encore, elle décrit la répartition de l'énergie moyenne du processus. La densité spectrale de puissance donne aussi une indication sur la décomposition spectrale du signal $X(t)$.

En effet, en considérant la transformée de Fourier tronquée d'un processus stationnaire $X(t)$:

$$\bar{X}(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i\omega t} dt \quad 3.41$$

$S_x(\omega)$ est liée aussi, d'une façon directe, à $\bar{X}(\omega, T)$ qui est la décomposition fréquentielle du signal.

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} E[|\bar{X}(\omega, T)|^2] \quad 3.42$$

Cette équation définit $S_x(\omega)$ comme la limite d'une fonction positive par conséquent :

$$S_x(\omega) \geq 0$$

Pour un signal réel, la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ étant réelle et paire, il en est de même pour la fonction de densité spectrale $S_x(\omega)$.

Les signaux ayant une densité spectrale de puissance constante sont appelés Bruit Blanc.

$$S_x(\omega) = S_0 \quad 3.43$$

Sa fonction d'autocorrélation est définie comme suit :

$$R_x(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad 3.44$$

où $\delta(\tau)$ est la fonction de Dirac.

Un tel processus n'est pas pratiquement réalisable puisque sa variance n'est pas bornée. Il constitue cependant une idéalisation très importante dans l'étude la réponse des systèmes linéaires.

Un signal peut être caractérisée par une frange de fréquences large ou étroite. A ce titre, un processus ayant un contenu spectral large ou étalé est dit processus à Bande large (Wide Band), tandis que celui dont le contenu spectral est réduit ou étroit est dit processus à Bande étroite (Narrow Band).

c) Fonction de densité de puissance unilatérale.

Dans la littérature, il est fréquent de rencontrer une densité de puissance spectrale unilatérale $G_x(f)$ définie par :

$$\int_0^{\infty} G_x(f) df = E[X^2] \quad 3.45$$

avec : $f = \frac{\omega}{2\pi}$ fréquence (Hz)

La relation entre $S_x(\omega)$ et $G_x(f)$ est :

$$G_x(f) = 4\pi S_x(2\pi f) \quad 3.46$$

d) Fonction d'interdensité spectrale.

La fonction de densité spectrale de puissance croisée de deux processus aléatoire $X(t)$ et $Y(t)$ est définie par :

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad 3.47$$

Elle existe si $S_{xx}(\omega)$ et $S_{yy}(\omega)$ existent.

$S_{xy}(\omega)$ est généralement complexe et satisfait la relation :

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega) \quad \text{où : } * \text{ signifie complexe conjugué.}$$

On établit que.

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} E \left[\left| \bar{X}(\omega, T) \cdot \bar{Y}^*(\omega, T) \right| \right] \quad 3.48$$

$S_{xy}(\omega)$ vérifie la relation :

$$\left| S_{xy}(\omega) \right|^2 \leq S_{xx}(\omega) \cdot S_{yy}(\omega) \quad 3.49$$

3.3.4. Fonction d'autocorrélation et densité spectrale des processus aléatoires dérivés.

a) Fonction d'autocorrélation.

Les deux premières fonctions d'autocorrélation de processus dérivés sont définies par :

$$\begin{aligned} R_{\ddot{x}}(\tau) &= R_x(\tau) = -\frac{d^2}{dt^2} R_x(\tau) \\ R_{\ddot{\ddot{x}}}(\tau) &= R_x(\tau) = \frac{d^4}{dt^4} R_x(\tau) \end{aligned} \quad 3.50$$

Un processus faiblement stationnaire est orthogonal à sa dérivée $\dot{X}(t)$:

$$E[X(t) \cdot \dot{X}(t)] = 0 \quad 3.51$$

b) Fonction de densité spectrale.

Les deux premières fonctions de densité spectrales de processus dérivés sont définies par :

$$\begin{aligned} S_{\dot{x}}(\omega) &= \omega^2 S_x(\omega) \\ S_{\ddot{x}}(\omega) &= \omega^4 S_x(\omega) \end{aligned} \quad 3.52$$

Dans ce chapitre, nous avons exposé les notions fondamentales de la théorie des vibrations aléatoires indispensable pour prédire les caractéristiques statistiques de la réponse d'une structure connue à une excitation aléatoires de caractéristiques statistiques connues.

**4. REPRESENTATION DE L'ACTION SISMIQUE PAR SA
DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE.**

4.1. INTRODUCTION.

Il est vrai que lors de l'analyse des vibrations aléatoires des structures linéaires soumises à des excitations stationnaires de nature uniformes, la description de l'entrée peut se faire en terme de la densité spectrale de puissance.

Cette fonction de densité spectrale, n'est qu'une représentation analytique de l'énergie que transportent les ondes sismiques lors de leurs propagation dans un site donné. Cette dernière décrit l'input sismique dans le domaine fréquentiel.

En effet, l'action sismique peut être représenté par le biais d'un bruit blanc pur (White noise), ce qui mathématiquement s'écrit $S_x(\omega) = \text{Cste}$, ou bien par un bruit blanc filtré (Filtred White Noise) avec : $S_x(\omega) = S_0 \cdot F(\omega)$ avec $F(\omega)$ fonction du filtre considéré.

4.2. BRUIT BLANC PUR.

Le bruit blanc est la représentation la plus directe de l'input sismique, vu qu'au niveau de la source du séisme toutes les fréquences sont supposées être présentes et participer avec la même amplitude spectrale.

La fonction d'auto-corrélation est :

$$R_x(\tau) = 2\pi \cdot S_0 \cdot \delta(\tau) \quad 4.1$$

où : $\delta(\tau)$: fonction de Dirac.

Il découle de l'équation (4.1) que l'accroissement de la fonction sur un intervalle de temps infiniment petit, doit être infiniment grand.

Un processus aléatoire stationnaire pour lequel la fonction de corrélation est proportionnelle à la fonction de Dirac est dit bruit blancs.

4.3. BRUIT BLANC FILTRE.

Les enregistrements effectués en surface ne s'accorde pas avec l'hypothèse justifiant la représentation de l'input sismique par un bruit blanc. Physiquement, ceci peut s'expliquer par le fait que le parcours effectué par les ondes sismiques de la source à la surface du sol joue le rôle de filtre, qui compte tenu de ses caractéristiques physiques peut, soit amplifier soit amortir ces fréquences qui le traversent.

Des modèles peuvent être construit par filtrage d'un bruit blanc par des filtres linéaires invariant tous le temps.

4.3.1. Modèle de KANAI-TAJIMI

Une densité spectrale de type *Kanai-Tajimi* (filtre simple) dont l'expression est donnée par l'équation (4.2):

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = S_0 \frac{1 + 4\beta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)^2 + 4\beta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \quad 4.2$$

constitue une représentation plus réaliste du signal sismique à la surface du sol.

S_0 est une constante dépendant de l'accélération du signal sismique.

β_g et ω_g traduisent les propriétés dynamique du sol.

4.3.2. Modèle de Kanai-Tajimi modifiée.

La fonction de densité spectrale de type *Kanai-Tajimi* (filtre simple) ne s'annule pas au voisinage de $\omega = 0$ par conséquent la vitesse et le déplacement associés au processus input ont des variances infinies.

Clough et *Penzien* évitent cette singularité en proposant un deuxième filtre.

Donc la fonction de densité spectrale de puissance prend la forme suivante :

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = S_0 \frac{1 + 4\beta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)^2 + 4\beta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + 4\beta_c^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad 4.3$$

Cette fonction a un comportement en ω^4 au voisinage de $\omega = 0$ compatible avec les enregistrements de séismes ω_g , β_g , ω_c et β_c sont des paramètres traduisant les propriétés dynamiques du sol.

Les différentes valeurs que peuvent prendre les paramètres précédents permettent de balayer différents types de sol, à titre d'exemple :

Pour un sol ferme :

$$\omega_g = 15 \text{ rad/s}, \quad \beta_g = 0.6, \quad \omega_c = 1.5 \text{ rad/s}, \quad \beta_c = 0.6$$

Pour un sol moyen :

$$\omega_g = 10 \text{ rad/s}, \quad \beta_g = 0.4, \quad \omega_c = 1 \text{ rad/s}, \quad \beta_c = 0.6$$

Pour un sol mou :

$$\omega_g = 5 \text{ rad/s}, \quad \beta_g = 0.2, \quad \omega_c = 0.5 \text{ rad/s}, \quad \beta_c = 0.6$$

5.REPONSE ALEATOIRE D'UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE.

5.1. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, on utilise la théorie des processus aléatoires pour étudier les vibrations de systèmes élémentaires : les systèmes à un degré de liberté.

Tout système à un degré de liberté (fig. 5.1) est le résultat d'une idéalisation d'un système réel qui permet d'obtenir l'information indispensable sur le mouvement du système.

En considérant les systèmes linéaires invariants dans le temps, la réponse de ces derniers peut être déterminée dans le domaine temporel ou fréquentiel.

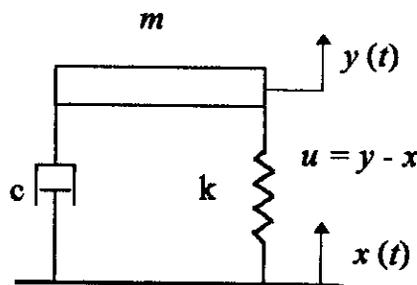


Fig. 5.1 - Oscillateur à un degré de liberté

5.2. EQUATION DE MOUVEMENT.

Les propriétés qui caractérisent le comportement dynamique d'une structure sont :

- la rigidité de la structure k
- la masse de la structure m
- l'amortissement c

L'équation de mouvement de l'oscillateur représenté à la figure (5.1) s'écrit :

$$m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x) = 0 \quad 5.1$$

La force de rappel élastique et d'amortissement dépendent toutes deux du mouvement relatif $u = y - x$.

En introduisant la fréquence naturelle ω_n et la fraction d'amortissement critique ξ

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$$

l'équation (5.1) prend la forme :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{x} \quad 5.2$$

Cette relation montre que la réponse relative ne dépend que de ω et ξ .

5.3. REPONSE DANS LE DOMAINE TEMPOREL.

La réponse temporelle unitaire d'un système initialement au repos est la réponse impulsionnelle $h(\tau)$ causée notamment par une impulsion de Dirac.

En se basant sur le principe de superposition, la réponse temporelle ou encore relation entrée-sortie (input-output) pour un système à un seul degré de liberté, supposé initialement au repos, prend la forme de d'un produit de convolution (intégrale de DUHAMEL) :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{x}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \ddot{x}(t - \tau) d\tau \quad 5.3$$

Tout système physiquement réalisable satisfait la condition $h(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$ (la réponse ne peut précéder l'excitation) est dit système causal.

Compte tenu de cette condition, les bornes de l'intégrale de DUHAMEL peuvent être modifiées pour donner :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \ddot{x}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) \ddot{x}(t - \tau) d\tau \quad 5.4$$

Si, en outre, l'excitation est à support positif ($\ddot{x}(t) = 0$, pour $t < 0$), alors :

$$u(t) = \int_0^t \ddot{x}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \ddot{x}(t - \tau) d\tau \quad 5.5$$

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$du(t) = h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_n} \cdot \sin\omega_n(t - \tau) \quad 5.6$$

Remarque :

Si le système n'est pas initialement au repos, la réponse due à l'effet des conditions initiales doit être ajoutée en raison du principe de superposition.

En présence de structure amorties, on a :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^{t_d} \ddot{x}(\tau) e^{-\omega_n\xi(t-\tau)} \sin\omega_D(t - \tau) d\tau \quad 5.7$$

avec $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$

Soit, en définissant la réponse impulsionnelle pour $\ddot{x}(\tau) = 1$:

$$h(t - \tau) = \frac{e^{-\omega_n \xi(t-\tau)}}{m \omega_D} \sin \omega_D(t - \tau) \quad 5.8$$

Cette fonction est représentée à la figure (5.2) pour deux valeurs de l'amortissement. On constate que la mémoire du système est d'autant plus longue que l'amortissement est faible.

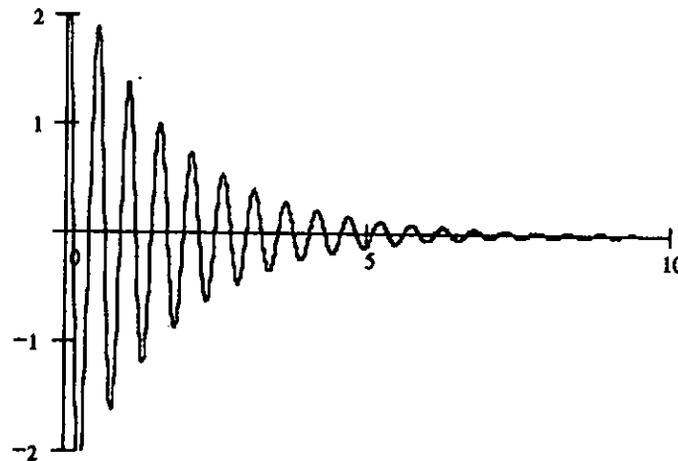


Fig.5.2 - Réponse impulsionnelle d'un oscillateur linéaire.

5.4. REPONSE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL.

L'étude précédente dans le domaine des temps peut servir pour déterminer la réponse de tout système linéaire à un degré de liberté soumis à une excitation quelconque, mais il est parfois plus commode d'effectuer l'étude dans domaine des fréquences.

La réponse fréquentielle unitaire d'un système à un seul degré de liberté est la fonction de transfert $H(\omega)$, causée par une excitation harmonique unitaire $\exp(i\omega t)$. Celle-ci est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle temporelle $h(t)$.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt \quad 5.9$$

La relation entrée-sortie du système, en vertu du principe de superposition et de la transformée de Fourier, prend la forme d'une simple multiplication :

$$U(\omega) = H(\omega) \cdot \ddot{X}(\omega) \quad 5.10$$

$H(\omega)$: fonction de réponse en fréquence complexe.

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 + 2i\xi\omega_n\omega - \omega^2} \quad 5.11$$

5.5. RELATION ENTREE/SORTIE - INPUT/OUTPUT RELATIONSHIP.

Il convient, à la suite de ce qui précède, de se pencher sur les relations mathématiques permettant de relier l'input (I) et l'output (O) de systèmes vibratoires linéaires. En somme, un problème d'entrée-sortie revient à rechercher la ou les sorties en fonction de ou des entrées.

Soit $\ddot{x}(t)$ et $u(t)$ deux processus aléatoire où le premier définit l'input stationnaire d'un système linéaire alors que le second représente l'output correspondant.

On peut relier $\ddot{x}(t)$ et $u(t)$ par le biais de l'intégrale de convolution suivante :

$$u(t) = \int_0^{t_d} \ddot{x}(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad 5.12$$

Par ailleurs, les espérances mathématiques des deux processus sont reliées comme suit:

$$m_u = E[u(t)] = \int_0^{t_d} E[h(t - \tau) \cdot \ddot{x}(\tau)] d\tau \quad 5.13$$

or $h(t - \tau)$ est une caractéristique du système, il vient alors :

$$m_u = \int_0^{t_d} h(t - \tau) \cdot E[\ddot{x}(\tau)] d\tau = m_{\ddot{x}} \int_0^{t_d} h(t - \tau) d\tau \quad 5.14$$

Remarque :

Si le processus input est à moyenne nulle, le processus output est aussi à moyenne nulle.

De manière similaire, les fonctions d'autocorrélations respectives peuvent être reliées par le double produit de convolution suivante :

$$\begin{aligned} R_u &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) R_{\ddot{x}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) R_{\ddot{x}}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad 5.15$$

$$R_x(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad 5.16$$

où : $\delta(\tau)$ fonction de DIRAC

Compte tenu de cette équation, la fonction d'autocorrélation de l'output est donnée par :

$$R_u(\tau) = \frac{\pi S_0}{2\xi\omega_n^3} e^{-\omega_n \xi \tau} \left[\cos \omega_D \tau + \frac{\xi}{\omega_D} \sin \omega_D \tau \right] \quad 5.17$$

Cette fonction est représentée sur la figure 5.3. La décroissance est gouvernée par l'amortissement qui contrôle la mémoire du processus. Notons que quoique la variance de l'excitation soit infinie, celle de la réponse est finie pour autant que le système soit amorti.

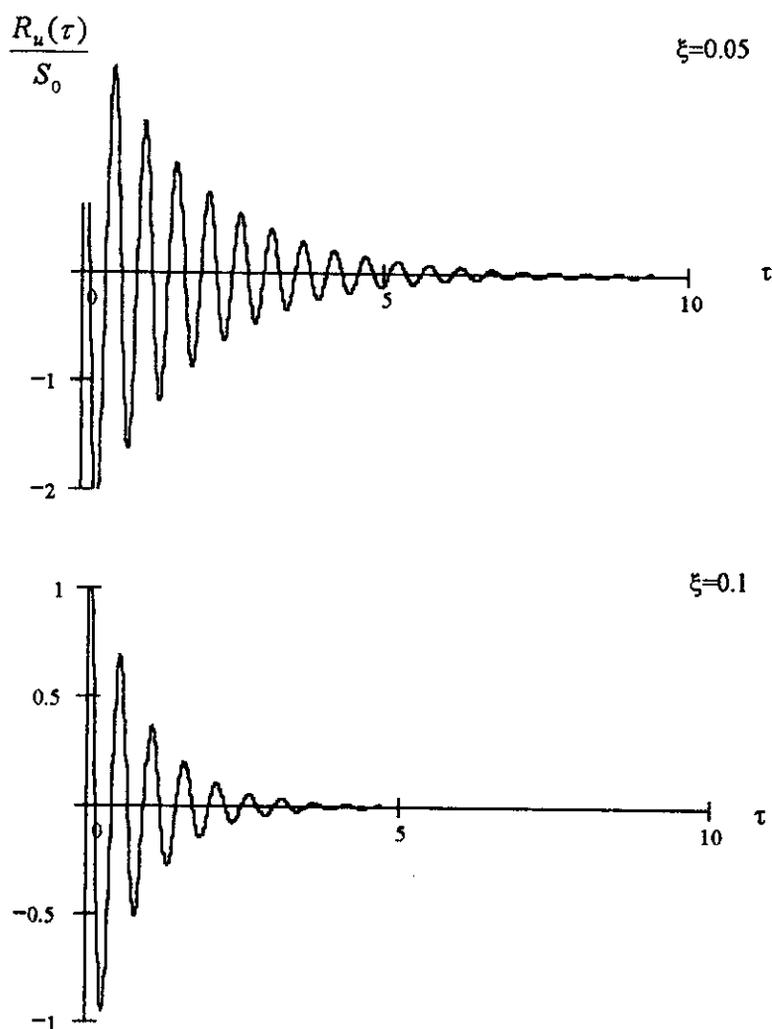


Fig. 5.3- Fonction d'autocorrélation de la réponse d'un oscillateur linéaire à un bruit blanc.

La variance du processus out-put prend la forme :

$$\sigma_u^2 = R_u(0) = \frac{\pi S_0}{2\xi\omega_n^3} e^{-\omega_n \xi \tau} \quad 5.18$$

La fonction d'autocorrélation sera donc :

$$R_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\omega_n \xi \tau} \left[\cos \omega_D \tau + \frac{\xi}{\omega_D} \sin \omega_D \tau \right] \quad 5.19$$

$$\begin{aligned} R_u(0) = \sigma_u^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \end{aligned} \quad 5.20$$

En raison du caractère pointu de $|H(\omega)|^2$ alentour de ω_n et de sa décroissance rapide quand ω augmente (comme ω^{-4}), l'approximation suivante est souvent justifiable pour une excitation quelconque (fig. 5.4).

$$R_u(0) = S_x(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2\xi\omega_n^3} S_x(\omega_n) \quad 5.21$$

Ceci revient à remplacer l'excitation réelle par un bruit blanc équivalent d'intensité égale à la densité de puissance spectrale de l'excitation à la fréquence naturelle du système. Les conditions sous lesquelles l'approximation se justifie sont :

- les valeurs de $S_x(\omega)$ sont telles que la contributions de l'intégrale provient du voisinage de la fréquence naturelle ω_n .
- $S_x(\omega)$ varie lentement alentour de ω_n .

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^2} \quad 5.22$$

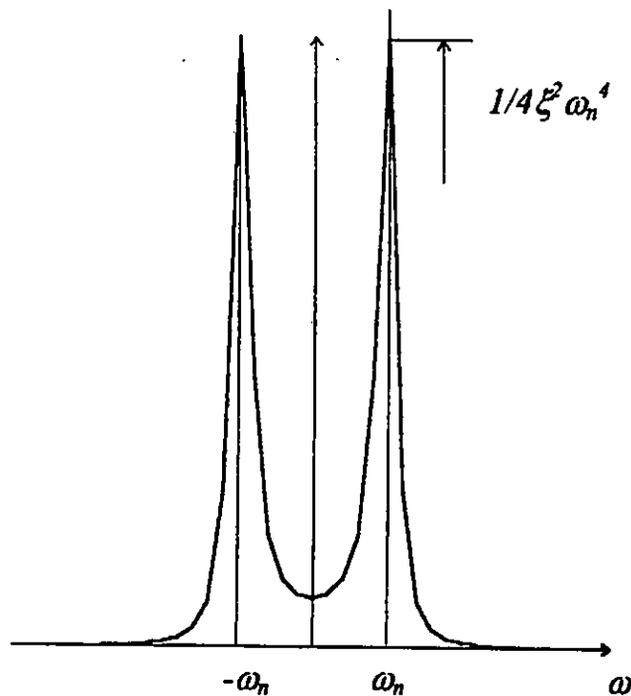


Fig. 5.4- Illustration de l'approximation Bruit Blanc.

Si l'excitation est faiblement stationnaire, la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$R_u(t, t) = \frac{\pi S_x(\omega_n)}{2\xi\omega_n^3} \left\{ 1 - \frac{e^{-2\xi\omega_n t}}{\omega_d^2} \left[\omega_d^2 + 2(\xi\omega_n \sin \omega_d t)^2 + \xi\omega_n \omega_d \sin 2\omega_d t \right] \right\} \quad 5.23$$

L'équation (5.23) est représentée à la *figure (5.5)*. Elle montre que l'état stationnaire sera atteint d'autant plus vite que l'amortissement est grand. Si le temps durant lequel le système est exposé à l'excitation stationnaire est grand vis-à-vis de la période naturelle du système.

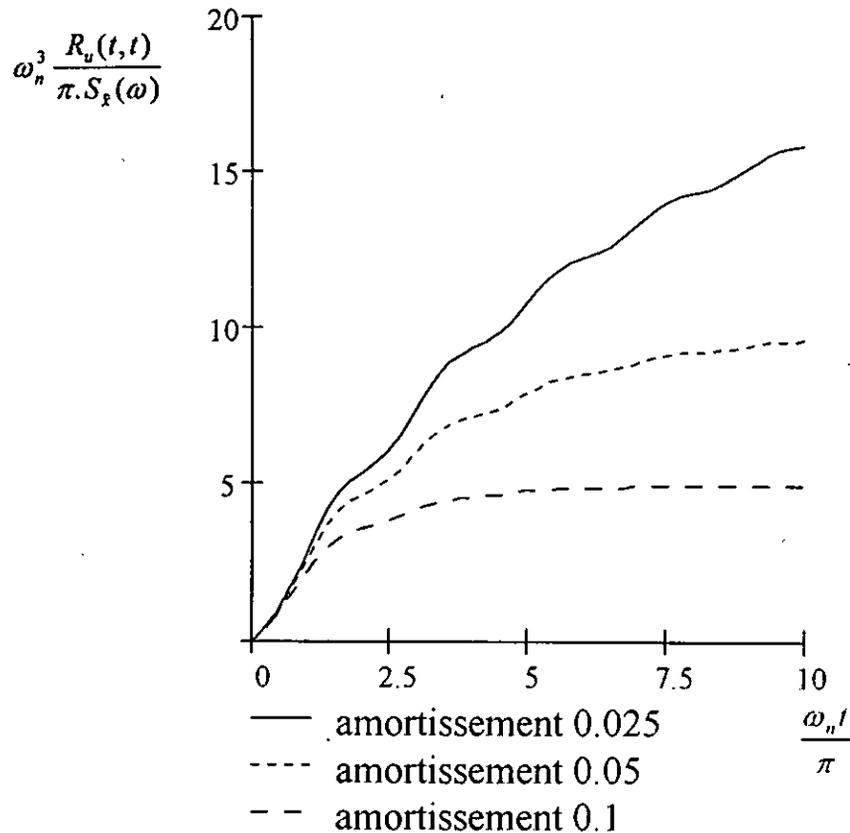


Fig. 5.5- Réponse transitoire d'un oscillateur partant du repos.

5.6. CONCLUSION.

A travers ce chapitre, nous avons vu que pour la classe des systèmes linéaires, la relation entrée-sortie s'exprime par des produits de convolution dans le domaine temporel et des multiplications dans le domaine fréquentiel. IL s'en suit que la plupart des traitements s'effectuent plus simplement dans le domaine fréquentiel. La facilité avec laquelle la relation entrée-sortie s'exprime dans le domaine fréquentiel est d'ailleurs une caractéristique attrayante des systèmes linéaires.

En effet, la réponse d'un système linéaire à une excitation Gaussienne est également Gaussienne. De tels processus sont entièrement caractérisés par leurs propriétés statistiques du deuxième ordre, i.e. la moyenne et la fonction d'autocorrélation ou de densité spectrale de puissance, ce qui est d'ailleurs l'ordre maximum pour lequel il est possible d'obtenir des informations sur la structure statistique d'un phénomène.

**6.REPONSE ALEATOIRE DES SYSTEMES A PLUSIEURS
DEGRES DE LIBERTE.**

6.1. INTRODUCTION.

Les systèmes à un degré de liberté considérés dans le chapitre précédent constituent des problèmes élémentaires de la théorie des vibrations. Or les constructions ne peuvent être envisagées comme des systèmes à un degré de liberté que dans des cas particuliers ou bien de manière approchée.

Les mouvements sismiques induisent dans les structures des actions dynamiques, dues essentiellement aux forces d'inertie qui apparaissent dans les masses lorsqu'on impose le mouvement au niveau des supports.

6.2. GENERALITES.

6.2.1. Degré de liberté d'un système.

Le problème fondamental du calcul des constructions parasismiques est celui de la détermination de la réponse d'une structure à un mouvement sismique donné.

La configuration de la structure en oscillations est connue au travers d'un certain nombre de paramètres qui sont les coordonnées du système. La structure étant supposée rapportée à un trièdre OXYZ invariablement lié au sol et les trois composantes de l'action sismique étant supposées agir parallèlement à ces axes, il y a un intérêt évident à choisir comme paramètres les composantes suivant ces axes des déplacements des divers éléments matériels à partir de leur position de repos.

Ces déplacements consistent en translations, mais ils peuvent aussi comporter des rotations. Si l'on désigne par n le nombre de paramètres indépendants strictement nécessaires à la définition de la configuration, le système est dit présenter n degrés de liberté et les paramètres retenus sont les degrés de liberté du système.

6.2.2. Modélisation de la structure à masse concentrée :

La modélisation consiste en l'établissement d'un modèle de calcul qui reproduit au mieux le comportement dynamique réel de la structure, la détermination de ce modèle est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à une secousse sismique.

Le principe de la modélisation à masse concentrée est de représenter une structure complexe par un ensemble de poutres liées entre elles. Les masses correspondant aux volumes de béton de chaque niveau sont supposées concentrées en leur centre de gravité et liées aux noeuds reliant les éléments.

6.3. FORMULATION DE L'EQUATION DE MOUVEMENT.

L'équation de mouvement du système s'exprime en écrivant l'équilibre des forces associées à chaque degré de liberté.

Pour un système à un nombre fini de degrés de liberté, l'équation du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$[F_I] + [F_c] + [F_e] = [P(t)] \quad 6.1$$

où : F_e : force élastique de rappel

F_c : force d'amortissement

$P(t)$: force extérieure

F_I : force d'inertie

Pour une structure à comportement linéaire, l'expression des forces élastiques F_e s'écrit :

$$\{ F_e \} = [k] \{ u \} \quad 6.2$$

où $[k]$ s'appelle matrice de rigidité de la structure, et $\{u\}$ le vecteur déplacement représentant le déformée de la structure.

Si l'amortissement est de type visqueux, les forces d'amortissement peuvent s'écrire :

$$\{ F_c \} = [c] \{ \dot{u} \} \quad 6.3$$

où $[c]$ est la matrice d'amortissement et $\{\dot{u}\}$ vecteur vitesse.

Les forces d'inertie peuvent s'écrire :

$$\{ F_I \} = [m] \{ \ddot{u} \} \quad 6.4$$

où $[m]$ matrice masse et $\{\ddot{u}\}$ vecteur accélération.

Commentaire :

Les matrices $[m],[c]$ et $[k]$ sont symétriques définies positives. $[m]$ et $[k]$ résultent de la discrétisation de la structure, le plus souvent par éléments finis. La matrice d'amortissement $[c]$ représente un mécanisme de dissipation complexe, elle est en général mal connue.

6.4. ANALYSE MODALE.

L'analyse dynamique des structures exige la résolution d'un grand nombre d'équations d'équilibre dynamique. s'agissant de chargement de courte durée et qui tendent à exciter de nombreux modes de vibrations, les procédures d'intégration numérique pas à pas sont en général efficaces. Cependant, pour des chargements de durées relativement longues tels que les séismes et qui par contre ont tendance à exciter un nombre réduit de modes, la procédure de superposition modale est l'approche la plus appropriée. La différence essentielle entre ces deux approches est

que contrairement à l'intégration directe, la superposition modale exige qu'un chargement de base soit opéré.

En effet, le passage de la base des coordonnées physiques vers la base des vecteurs propres, par exemple, permet de transformer les équations d'équilibre en une forme assurant une résolution plus efficace.

La première étape de la méthode de superposition modale consiste à modéliser la structure en un système ayant un nombre fini de degrés de liberté (DDL), les matrices de masse et de rigidité sont alors évaluées. Une fois les configurations modales de la vibration non amortie déterminées, les équations de mouvements sont découplées par une transformation en ces coordonnées modales.

Une supposition de base pour cette méthode est que l'amortissement ne cause aucun couplage entre les équations modales.

6.4.1. Les problèmes aux valeurs propres.

a) *Calcul des fréquences propres et des modes propres de vibration d'un système.*

L'équation de mouvement d'un système se déplaçant librement sans amortissement est donnée par :

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0 \quad 6.5$$

Une solution particulière est donnée par l'expression :

$$\{u\} = \{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) \quad 6.6$$

où $\{\hat{u}\}$ représente les modes de déformation possibles du système et θ est un angle de déphasage. Le vecteur des accélérations a pour valeur :

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 \{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 \{u\} \quad 6.7$$

l'équation (6.6) s'écrit donc :

$$-\omega^2 [m]\{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) + [k]\{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) = 0 \quad 6.8$$

Cette équation doit être vérifiée à tout instant t ; on en déduit donc:

$$[[k] - \omega^2 [m]]\{\hat{u}\} = 0 \quad 6.9$$

Cette relation représente un système de N équations à N inconnues qui sont les composantes du vecteur $\{\hat{u}\}$. Une solution non nulle n'est possible que si le déterminant de la matrice $[k] - \omega^2 [m]$ est nul :

$$|[k] - \omega^2 [m]| = 0 \quad 6.10$$

L'équation (6.10) est appelée l'équation aux fréquences du système. En développant ce déterminant, on obtient une équation de degré N en ω^2 pour un système à N degrés de liberté. La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N$ relatives aux N modes de vibrations possibles.

Chaque pulsation ω_i du système caractérise un mode propre de vibration ou forme propre ϕ_i exprimé par l'équation (6.11) :

$$[[k] - \omega_i^2 [m]] \cdot \{\phi_i\} = \{0\} \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{\{\phi_i\}^T \cdot [k] \cdot \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T \cdot [m] \cdot \{\phi_i\}} \quad 6.11$$

Soit $[\Phi]$ la matrice construite par colonnes à partir des vecteurs propres, cette matrice est dite *matrice modale* associée à la structure.

b) Méthode d'approche pour la résolution des problèmes aux valeurs propres.

Les méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres se présentent sous forme de deux catégories: méthodes directes et méthodes itératives.

Parmi ces méthodes, on cite :

- la méthode itérative directe ,
- la méthode itérative inverse ,
- la méthode itérative des sous espaces .

c) Sélection des modes utiles.

Les modèles dynamiques possèdent, en général, un grand nombre de degrés de liberté tel que l'extraction de tous les modes de vibration ne peut être envisagée pour des raisons économiques.

On se contente donc de calculer les premiers modes de vibration dans un classement par périodes décroissantes.

Avant de poursuivre le calcul, il faut tout d'abord s'assurer que le nombre de modes évalués est suffisant et donc que des modes importants n'ont pas été négligés. Ensuite, il convient d'éliminer tous les modes ne correspondant pas à des efforts notables, afin de simplifier l'exploitation des résultats. La sélection s'effectue d'après la valeur maximale de l'énergie potentielle emmagasinée dans la structure lors du mouvement.

Pour le mode j , cette énergie a pour expression :

$$E_j = \frac{1}{2} U_j^T \cdot k \cdot U_j \quad 6.12$$

6.4.2. Cas d'excitations sismiques uniformes.

Lors de la conception et de l'analyse parasismique des structures linéaires, une hypothèse est fréquemment adoptée. Elle stipule que la structure étudiée subit un mouvement du sol de nature uniforme. En d'autres termes, la même excitation sismique est supposée agir simultanément au niveau de tous les points d'appuis de la structure au sol.

Cependant, cette hypothèse implique que les vibrations du sol résultent d'une propagation verticale d'ondes sismiques spatialement uniformes, ou alors que les dimensions de la base de la structure considérée sont petites relativement aux longueurs d'ondes sismiques (ce qui est vrai pour les structures peu étendues), d'où l'analyse dynamique s'en trouve amplement simplifiée puisque seule la variation temporelle du signal sismique est à considérer.

Dans le cadre d'un calcul des réponses physiques, l'un des moyens les plus efficaces est, sans doute, celui qui se base sur le principe de superposition modale. En effet, il est plus simple de quantifier les réponses modales (histoires temporelles ou quantités maximales) d'un système structural à N degrés de liberté, puis de combiner ces réponses selon un procédé adéquat qui permette d'approcher au mieux la réponse exacte.

Notons que, dans le cadre d'une approche probabiliste modale, le développement analytique qui conduit à la formulation d'une règle de combinaison des réponses modales maximales d'une structure se base sur la théorie des vibrations aléatoires.

Considérons une structure à N ddl soumise à une excitation sismique de nature uniforme.

Sous forme matricielle, les équations d'équilibre dynamique de cette structure peuvent être exprimées comme suit :

$$[m] \{\ddot{u}\} + [c] \{\dot{u}\} + [k] \{u\} = -[m] \{1\} \ddot{x}_g(t) \quad 6.13$$

où $\ddot{x}_g(t)$: accélération du sol

$[m]$, $[c]$, $[k]$: respectivement matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure.

$u(t)$: vecteur déplacement relatif de la structure.

$\{1\}$: vecteur d'influence du chargements sismique : ses composantes valent 1 pour les ddl de translation orientés dans directions de l'excitation et 0 pour les ddl de rotation ou translations orientées normalement à la direction de l'excitation.

La technique de superposition modale nécessite l'introduction de la transformation suivante :

$$\{u\} = [\phi] \cdot \{y\} \quad 6.14$$

où ϕ : matrice de transformation et y : vecteur de coordonnées généralisées.

Si la matrice de transformation utilisée est celle des modes propres, alors y est identique au vecteur des coordonnées normales. Dans ce cas la substitution de l'équation (6.14) dans l'équation (6.13) et la pré multiplication par $[\phi]^T$ permet d'écrire:

$$[\phi]^T [m][\phi] \{\ddot{y}\} + [\phi]^T [c][\phi] \{\dot{y}\} + [\phi]^T [k][\phi] \{y\} = -[\phi]^T [m] \{1\} \ddot{x}_g(t) \quad 6.15$$

Supposons à présent que l'amortissement du système est classique. Par conséquent, la matrice d'amortissement $[c]$ est alors orthogonale par rapport à la matrice modale ϕ au même titre que $[k]$ et $[m]$

Il s'en suit que les équations de mouvements du système sont découplées en N équations indépendantes. L'application des propriétés d'orthogonalité permet alors d'écrire :

$$\ddot{y}_k + 2\beta_k \omega_k \dot{y}_k + \omega_k^2 y_k = -\gamma_k \ddot{x}_g \quad 6.16$$

où y_k : $k^{\text{ème}}$ coordonnée modale

β_k : facteur d'amortissement modale donnée par :

$$2\beta_k \omega_k = \frac{\phi_k^T [c] \phi_k}{\phi_k^T [m] \phi_k} \quad 6.17$$

ω_k : fréquence angulaire propre donnée par :

$$\omega_k^2 = \frac{\{\phi\}_k^T [k] \{\phi\}_k}{\{\phi\}_k^T [m] \{\phi\}_k} \quad 6.18$$

γ_k : facteur de participation modal du mode k donné par :

$$\gamma_k = \frac{\{\phi\}_k^T [m] \{1\}}{\{\phi\}_k^T [m] \{\phi\}_k} \quad 6.19$$

L'équation (6.16) est analogue à l'équation d'équilibre gouvernante d'un oscillateur à un degré de liberté. Sa résolution peut se faire soit par intégration

numérique, ce qui nécessite la connaissance exacte de l'évolution temporelle du chargement $\ddot{x}_g(t)$, soit par la méthode du spectre de réponse, ce qui implique la connaissance du spectre de réponse de l'excitation $\ddot{x}_g(t)$, mais qui fournit uniquement la réponse modale maximale, c'est-à-dire, $\max(y_k)$.

6.5. REPONSE D'UN SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE A UNE EXCITATION ALEATOIRE STATIONNAIRE.

En utilisant la méthode de superposition modale, toute quantité de réponse $R(t)$ d'un système linéaire peut s'exprimer en termes de ses réponses modales sous la forme suivante :

$$R(t) = \sum_k L_k y_k(t) \quad 6.20$$

où L_k : constantes dépendant du type de réponse considéré.

Supposons à présent une excitation sismique $\ddot{x}_g(t)$ à la base de la structure. Dans le domaine du temps, la réponse aléatoire d'un système discret à une excitation $\ddot{x}_g(t)$ satisfait :

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \phi_k(j) \int_0^t \ddot{x}(\tau) h_k(t-\tau) d\tau \quad 6.21$$

avec γ_k : facteur de participation du mode k
 $\psi_k(j)$: j^{ème} composante du k^{ème} mode

Prenons l'espérance mathématique :

$$E[u_j(t)] = \sum_{k=1}^n \gamma_k \phi_k(j) \int_0^t h_k(t-\tau) E[\ddot{x}(\tau)] d\tau \quad 6.22$$

Similairement, la fonction d'autocorrélation du processus output s'écrit :

$$R_{u_j}[t_1, t_2] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_{\ddot{x}}(t_1, t_2) h_k(t_1 - \tau_1) h_l(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad 6.23$$

Pour une excitation stationnaire, la fonction d'autocorrélation ne dépend que de $(t_1 - t_2)$, donc la fonction d'autocorrélation du processus output s'écrit :

$$R_{u_j}(\tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\omega) H_l^*(\omega) S_{\ddot{x}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad 6.24$$

avec $H_k(\omega)$: fonction de réponse complexe du mode k où la fonction de transfert du mode k, elle est donnée, lorsque la réponse considéré est le déplacement, par :

$$H_k(\omega) = \frac{1}{\omega_k^2 + 2i\beta_k\omega_k\omega - \omega^2} \quad 6.25$$

$H_k^*(\omega)$: conjugué complexe de $H_k(\omega)$

ω_k : fréquence du $k^{\text{ème}}$ mode .

La variance du processus output est obtenue pour $\tau = 0$:

$$\sigma_{u_j}^2 = R_{u_j}(0) \quad 6.26$$

La fonction d'autocorrélation du processus dérivé output est donné par :

$$R_{u_j}(\tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 H_k(\omega) H_l^*(\omega) S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\tau \quad 6.27$$

et la variance correspondante :

$$\sigma_{u_j}^2 = R_{u_j}(0) \quad 6.28$$

Dans la double sommation précédente, les termes correspondant aux indices k, l et l, k sont des conjugués complexes. Par conséquent, toutes les quantités de réponse d'un système linéaire sont réelles puisque les parties imaginaires s'annulent.

On obtient alors :

$$\sigma_{u_j}^2(\tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\omega) H_l^*(\omega) S_x(\omega) d\omega \quad 6.29$$

$$\sigma_{u_j}^2(\tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 H_k(\omega) H_l^*(\omega) S_x(\omega) d\omega \quad 6.30$$

où Re définit la partie réelle d'un argument complexe.

6.5.1. Rôle des cross-corrélations.

Supposons maintenant que l'excitation sismique est représentée par le biais d'un bruit blanc (white noise) :

$$S_x(\omega) = S_0 = \text{Cste} \quad 6.31$$

la variance du processus output s'écrira :

$$\begin{aligned} \sigma_{u_j}^2(\tau) = S_0 & \left[\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \phi_k^2(j) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 d\omega \right] \\ & + S_0 \left[\sum_{k \neq l}^n \sum_{k \neq l}^m \gamma_k \phi_k(j) \gamma_l \phi_l(j) \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\omega) H_l^*(\omega) d\omega \right] \end{aligned} \quad 6.32$$

Le terme en double sommation représente l'effet des cross-corrélations ou bien l'effet des modes couplés. Pour examiner l'importance des cross-corrélations, introduisons le rapport de la seconde intégrale à la première intégrale :

$$\alpha_{kl} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\omega) H_l^*(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 d\omega} \quad 6.33$$

Ce coefficient représente l'intercorrélacion entre les modes k et l .

Pour $\xi = \xi_k = \xi_l$:

$$\alpha_{kl} = \frac{8 \xi^2 \frac{\omega_k}{\omega_l}}{\left(1 + \frac{\omega_k}{\omega_l}\right) \left[\left(1 - \frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2 + 4 \xi^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right) \right]} \quad 6.34$$

La figure (6.1) Représente la variation du coefficient α_{kl} en fonction du rapport ω_k/ω_l , dans le cas d'un bruit blanc, pour deux valeurs de l'amortissement.

On constate que α_{kl} est petit si l'espacement entre les fréquences est large.

Si la contribution des cross-corrélacion est négligée, la variance totale du processus output est la somme des variances des différentes réponses modales. Ceci revient à considérer les réponses modales comme statistiquement indépendantes. Ceci est acceptable si $\alpha_{kl} \ll 1$, c'est-à-dire si les modes sont bien séparés. Cette hypothèse est à la base de la méthode SRSS (Square Root of the Sum of the Squares) qui est largement utilisée en analyse sismique.

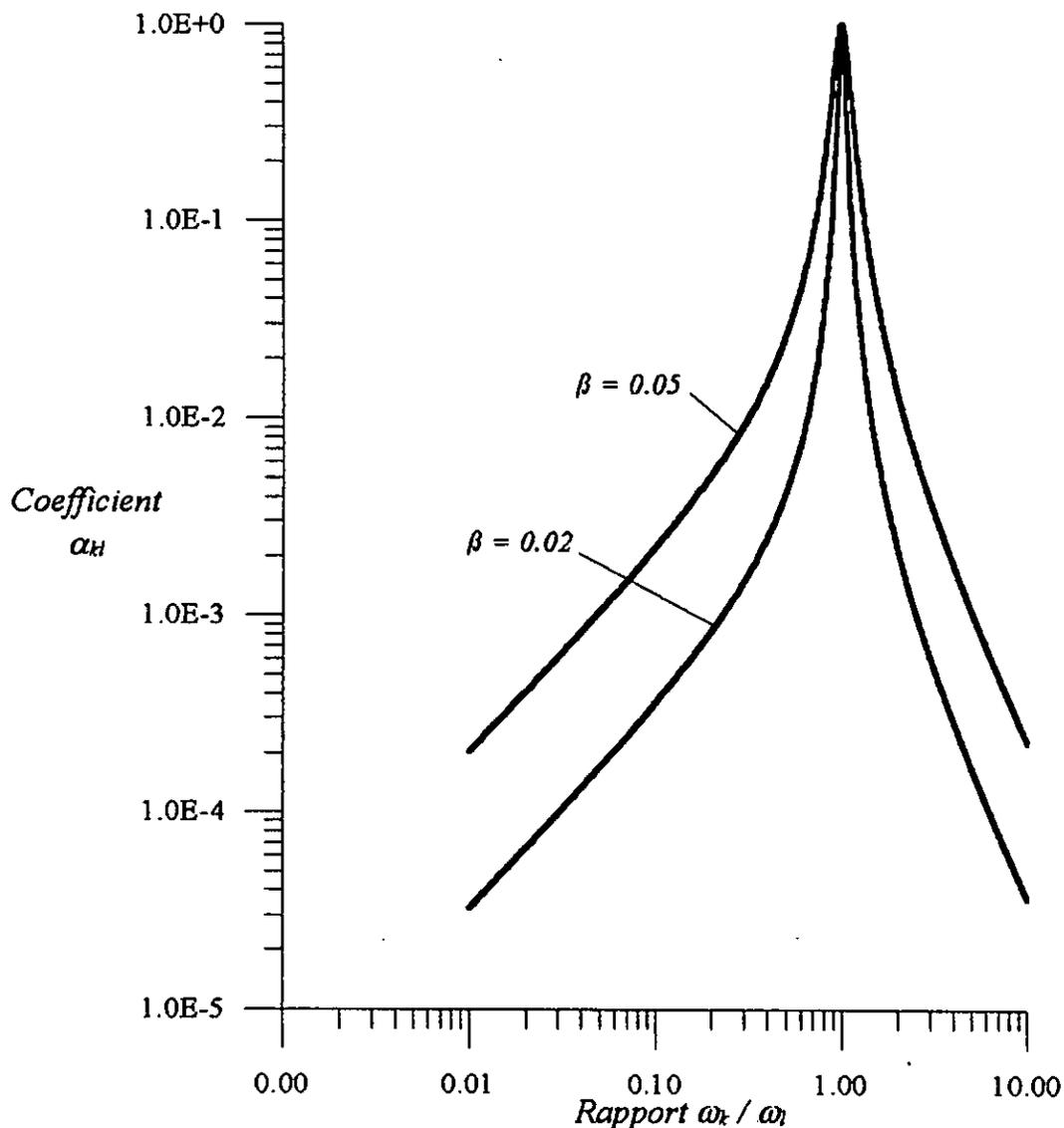


Fig. 6.1- Variation du coefficient d'intercorrélation modale.

6.5.2. Approximation de la réponse pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté avec des fréquences modales séparées, une approximation de la variance du processus output (dont le processus input est représenté par un bruit blanc WN) est donnée par :

$$\sigma_{u_j}^2(\tau) = S_0 \left[\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \phi_k^2(j) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 d\omega \right] \quad 6.35$$

Pour une excitation représentée par un bruit blanc filtré (FWN), l'approximation est :

$$\sigma_{u_j}^2(\tau) = \left[\sum_{k=1}^n S_x(\omega_k) \gamma_k^2 \phi_k^2(j) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 d\omega \right] \quad 6.36$$

où $G_x(\omega_k)$ est l'ordonnée de la fonction de densité spectrale du processus input à $\omega = \omega_k$.

De la même manière, la variance du processus output dérivé est donnée par :

$$\sigma_{u_j}^2(\tau) = \left[\sum_{k=1}^n S_x(\omega_k) \gamma_k^2 \phi_k^2(j) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_k(\omega)|^2 \omega^2 d\omega \right] \quad 6.37$$

Dans le cas où les fréquences naturelles des modes dominants sont rapprochées, l'effet du couplage doit être pris en considération, cela veut dire que les approximations données ci-dessus ne sont plus valables, ce qui nous conduit à inclure la double sommation pour la calcul de σ_{uj}^2 .

7.PROBLEME DU PREMIER PASSAGE.

7.1. INTRODUCTION

Dans ce qui précède, nous avons étudié comment les propriétés statistiques de la réponse d'une structure (déplacement) pouvaient être estimées en fonction des propriétés statistiques du processus d'excitation et des caractéristiques de la structure.

Du point de vue de l'ingénieur d'étude, il est souhaitable que la connaissance statistique de la réponse de la structure puisse être convertie en une information statistique au sujet de sa fiabilité.

Ceci implique une connaissance détaillée des modes de ruine, qui constituent des aspects moins développés de la théorie des vibrations aléatoires. Deux modes de ruines se présentent

- La ruine par dépassement d'un seuil : Ce type de ruine survient quand la réponse du système (une contrainte par exemple) dépasse une valeur critique (sa limite élastique par exemple).

Il est lié à un problème connu sous le nom de *problème du premier passage* : Soit un processus aléatoire que nous observons sur une durée T , quelle est la probabilité que les valeurs de ce processus restent en dessous d'un seuil dont le dépassement entraînerait la ruine de la structure .

Ce problème peut être formulé alternativement comme la recherche de la distribution de la valeur extrême (peak factor ou facteur de pic)

- La ruine par fatigue ou par accumulation de dommages : basée sur le critère de Palmgren-Miner selon lequel chaque cycle entraîne un dommage qui ne dépend pas de l'ordre dans lequel les sollicitations sont appliquées (négligence de phénomène physique) et que la ruine survient lorsque la somme des endommagements vaut 1.

Dans ce qui suit, on va s'intéresser seulement au premier mode de ruine .

Comme préliminaire à l'étude de ruine, il est intéressant d'étudier les paramètres statistiques des grandeurs suivantes :

- Le nombre de fois qu'un processus aléatoire franchit un certain seuil, pendant une durée d'observation donnée .
- Le nombre de maxima (minima) du processus au-dessus(en dessous)d'un certain seuil pendant une durée d'observation donnée.

La notion d'enveloppe d'un processus en bande étroite joue un rôle très important .

7.2. FRANCHISSEMENTS D'UN SEUIL , PASSAGE PAR ZERO

Soit un processus $X(t)$ dont un échantillon est représenté à la *figure 7.1*. Nous nous intéressons au nombre moyen de franchissements par ce processus d'un

seuil quelconque b entre les instants t_1 et t_2 . Une attention particulière sera consacrée au cas $b=0$ (passage par zéro).

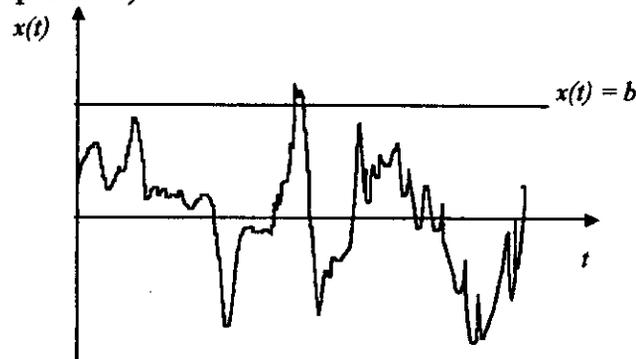


Fig.7.1

Définissant le taux de franchissement du seuil $N(b,t)$ (nombre de franchissements par unité de temps à l'instant t). Si $x(t)$ est stationnaire, $p(x, \dot{x}, t)$ est indépendante du temps et le taux moyen de franchissement est constant; soit $v = E[N(b)]$.

$$E[N(b,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| p(b, \dot{x}, t) d\dot{x} \quad 7.1$$

avec $p(\dot{x}, b, t)$ est la densité de probabilité conjointe du processus $x(t)$ et de sa dérivée $\dot{x}(t)$ à l'instant t .

Si $x(t)$ est stationnaire, Gaussien de moyenne nulle, $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ sont indépendantes et que leur distribution conjointe est donnée par :

$$P_{x\dot{x}}(x, t, \dot{x}, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)\right] \quad 7.2$$

Introduisant cette relation dans la précédente, on trouve :

$$\gamma^+_b = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad 7.3$$

Quand le seuil considéré est $b = 0$, la formule se ramène à :

$$v_0^+ = E[N_+(0)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_x} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{xx}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right]^{1/2} \quad 7.4$$

Cette dernière formule est connue sous le nom de la formule de Rice. Elle justifie la domination de la fréquence centrale (ou fréquence moyenne).

En effet, considérons par exemple un processus en bande étroite. L'allure générale d'un échantillon de ce processus est celle d'une sinusoïde d'amplitude et de fréquence lentement variables avec la temps (fig. 7.2).

La partie d'un échantillon comprise entre deux passages par zéro à vitesse positive peut être considérée comme un cycle équivalent. Le taux de passage par zéro avec une vitesse positive nous donne donc la fréquence moyenne de ces cycles, c'est à dire la fréquence équivalente.

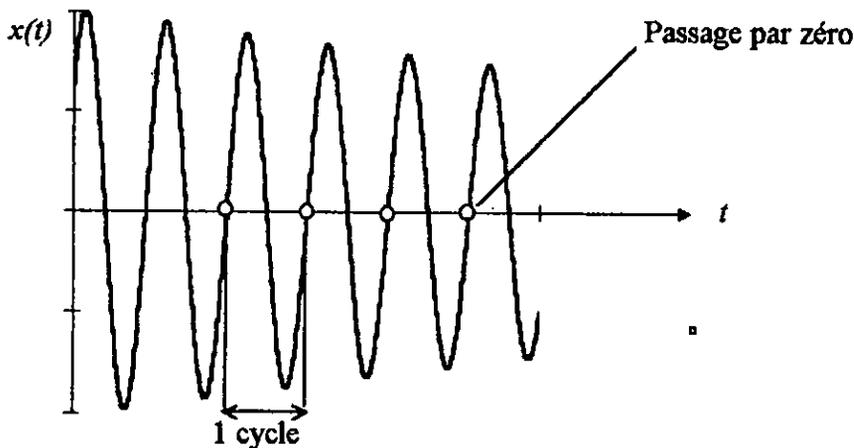


Fig. 7.2 Echantillon d'un processus en bande étroite

7.3. DISTRIBUTION DES MAXIMA

Considérons un échantillon $x(t)$ d'un processus continu $X(t)$. Un maximum se produit quand $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} < 0$. Ceci suggère que les informations au sujet de la distribution des maxima seront obtenues à partir de la distribution conjointe de $X(t)$, $\dot{X}(t)$ et $\ddot{X}(t)$. Dans ce qui suit, il est par conséquent supposé que le processus est au moins deux fois dérivable.

Les extrema (maxima et minima) de $X(t)$ correspondent aux passages par zéro de $\dot{X}(t)$. Soit $C(b, t_1, t_2)$, le processus de comptage associé au nombre d'extrema de $X(t)$ au dessus d'un certain seuil b , entre t_1 et t_2 . Il est défini comme le nombre de passages par zéro de $\dot{X}(t)$ quand $X(t) > b$. Il peut s'écrire

$$C(b, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\ddot{X}(t)| \delta[\dot{X}(t)] 1[X(t) - b] dt \quad 7.5$$

Le terme $|\ddot{X}(t)| \delta[\dot{X}(t)]$ représente formellement un train d'impulsion unitaires aux instants où la vitesse s'annule ; le terme $1[X(t) - b]$ tient compte de ce que les extrema considérés sont ceux au dessus du seuil b . En fait, nous sommes spécialement intéressées aux maxima. Soit $M(b, t_1, t_2)$, le processus de comptage associé au nombre de maxima entre t_1 et t_2 . Soit $M_u(b, t)$ leur taux (nombre par unité de temps, en t). Ils sont reliés par

$$M(b, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} M_u(b, t) dt \quad 7.6$$

$E[M_u(b, t)]$ s'obtient comme dans la précédente section, l'intégration est limitée aux valeurs négatives de l'accélération puisqu'on s'intéresse aux seuls maxima. On trouve

$$E[M_u(b, t)] = - \int_b^{\infty} dx \int_0^{\infty} \ddot{x} p(x, 0, \ddot{x}, t) dt \quad 7.7$$

Si le processus aléatoire est à variation raisonnablement lente, la probabilité que deux ou plusieurs pics se produisent durant l'intervalle $[t, t+dt]$ est négligeable, comparée à la probabilité qu'un seul pic se produise durant cet intervalle.

Dans ces conditions, $E[M_u(b, t)] dt$ représente la probabilité qu'un pic supérieur à b se produise durant $[t, t+dt]$; de même que $E[M_T(t)] dt$ représente la probabilité d'un pic (quelle que soit son amplitude) durant le même intervalle. Par conséquent, l'expression

$$F(b, t) = 1 - \frac{E[M_u(b, t)]}{E[M_T(t)]} \quad 7.8$$

représente la probabilité qu'un pic se produise en t ait une amplitude inférieure ou égale à b .

$F(b, t)$ est donc la fonction de répartition (conditionnelle) de l'amplitude des maxima.

7.4. DISTRIBUTION DE L'ENVELOPPE

Un processus dont la puissance spectrale est fortement concentrée au voisinage de la fréquence centrale est dit en bande étroite (fig. 7.3(a)). Un échantillon d'un tel processus a l'allure d'une sinusoïde d'amplitude et de fréquence lentement variables (fig. 7.3 (b)). L'enveloppe peut être visualisé intuitivement comme la courbe reliant les

extrema de l'échantillon. Pour la définir formellement, considérons le plan de phase $(x, \dot{x}/\omega_0)$ (fig. 7.3(c)).

Un mouvement harmonique $x = a \sin \omega t$ s'y représente par une trajectoire circulaire de rayon a . La trajectoire d'un échantillon d'un processus en bande étroite (et de moyenne nulle) s'y présente par une spirale tournant à une fréquence variant lentement autour de la fréquence centrale ω et oscillant lentement de l'intérieur vers l'extérieur.

Nous définissons l'enveloppe comme le rayon du point image dans le plan de phase. Le processus enveloppe $A(t)$ est défini par

$$A^2(t) = X^2(t) + \left(\frac{\dot{X}(t)}{\omega} \right)^2 \quad 7.9$$

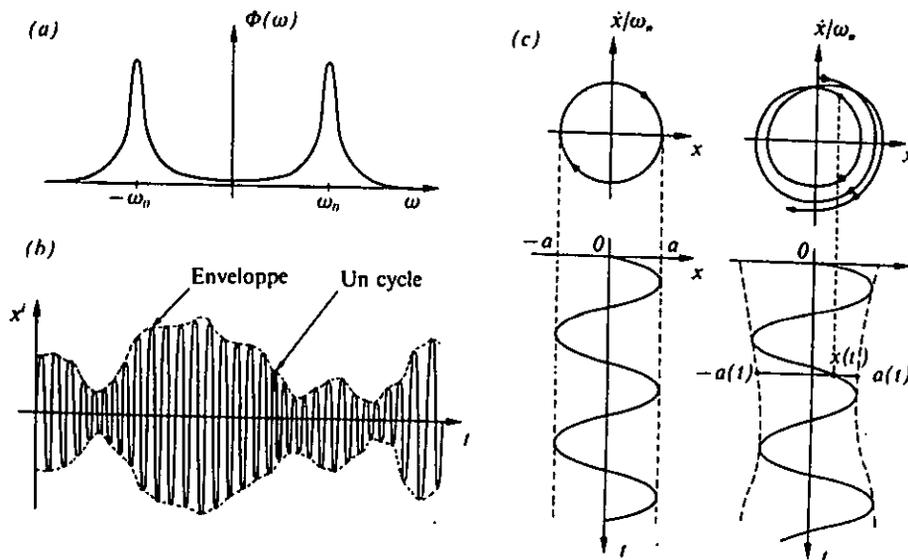


Fig.7.3 Enveloppe. (a)Puissance spectrale. (b)Allure d'un échantillon. (c)Représentation dans le plan de phase.

7.5. TAILLE MOYENNE DES GROUPE

Un échantillon d'un processus stationnaire en bande étroite se présente comme sur la figure 7.4 : La lenteur de variation du processus enveloppe fait qu'à chaque franchissement du seuil b par l'enveloppe, correspondent plusieurs passages des seuils $\pm b$ par le processus lui même

Les franchissements du processus ont donc tendance à se grouper. Le quotient entre le nombre moyen de franchissements des seuils $\pm b$ par le processus $X(t)$ et le nombre moyen de franchissements du seuil b par le processus enveloppe $A(t)$ représente la taille moyenne des groupes (*Average Clump-Size*)

$$\langle CS \rangle = \frac{2\nu_b^+}{n_b^+} \quad 7.10$$

Cette interprétation est certainement valable pour de faibles valeurs du seuil b pour lesquelles ν_b^+ est considérablement plus grand que n_b^+ .

Elle ne s'applique toutefois pas aux valeurs élevées de b , pour lesquelles tous les franchissements de l'enveloppe ne sont pas accompagnés de dépassements du processus (7.10) conduit dans ce cas à une valeur $\langle CS \rangle$ inférieur à 1, ce qui est absurde.

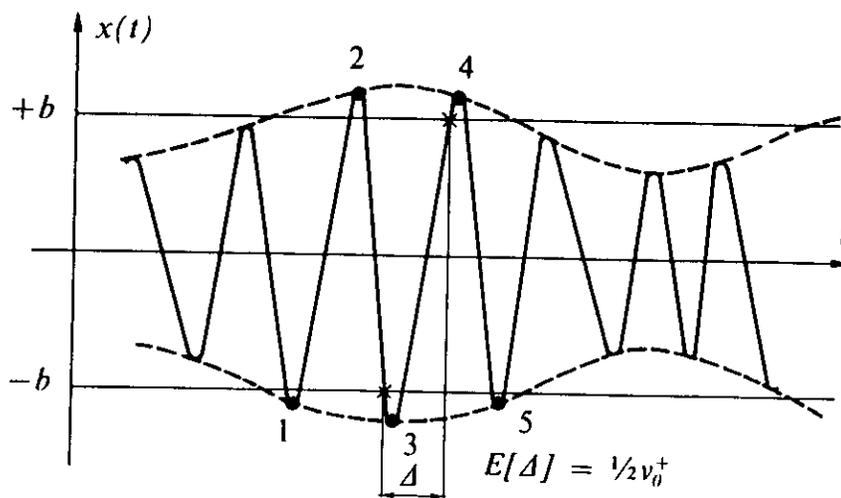


Fig. 7.4

Ce dernier point se comprendra mieux dans le plan de phase (fig. 7.5) où l'on voit clairement que le domaine $a > b$ correspondant aux dépassements de l'enveloppe, que nous dénommerons passage de type E , contient le domaine $|x| > b$ correspondant aux passages de type D et sera conséquemment plus fréquemment visité par le point image du processus.

L'expression 7.10 doit alors être corrigée pour tenir compte de la fraction r de dépassement de type E qui sont accompagnés de dépassement de type D .

$$r = 2 \frac{\nu_b^+}{n_b^+} \left(1 - \exp\left(-\frac{n_b^+}{2\nu_b^+}\right) \right) \quad 7.11$$

La taille moyenne des groupe s'obtient maintenant en limitant le dénominateur de (7.10) aux dépassements de l'enveloppe effectivement accompagnés de dépassements du processus lui même. On trouve

$$\langle CS \rangle = \frac{2\nu_b^+}{r n_b^+} = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{n_b^+}{2\nu_b^+}\right)} \quad 7.12$$

Comme on peut s'y attendre, (7.12) converge vers (7.10) pour de faibles valeurs du seuil ; elle converge vers 1 pour de hautes valeurs de seuil.

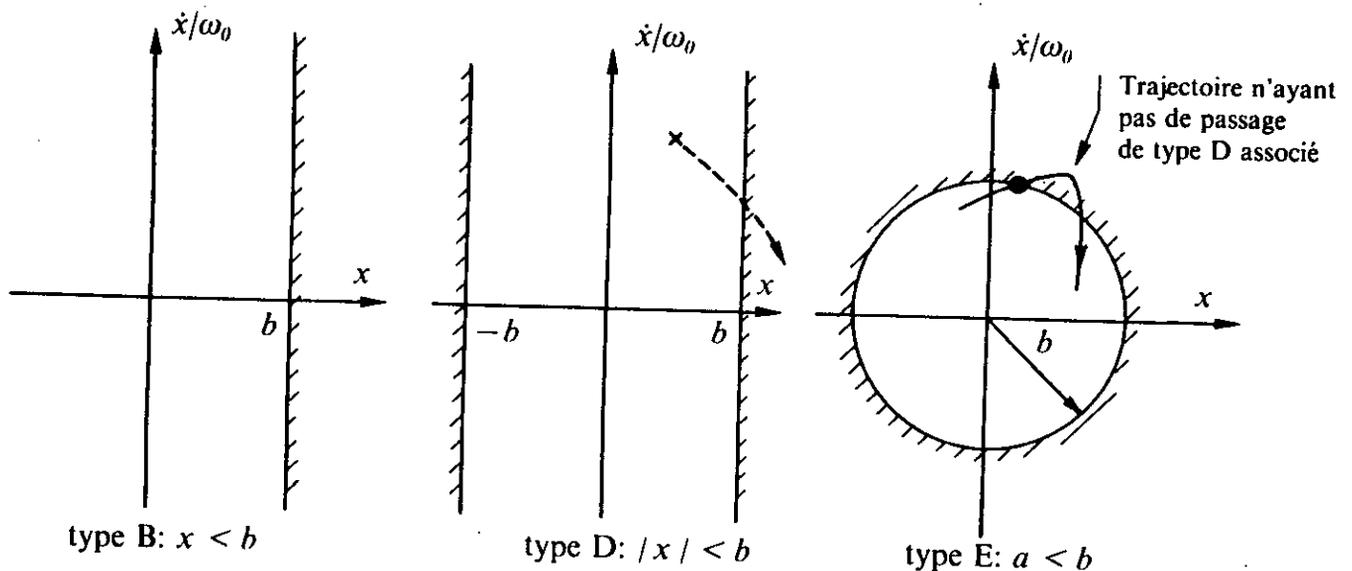


Fig. 7.5 Domaine de sécurité correspondant aux différents types de passages

7.6. PROBLEME DU PREMIER PASSAGE

7.6.1. Position de problème

Soit une structure dont la ruine est supposée se produire quand la réponse (un déplacement ou une contrainte) dépasse un certain seuil. L'ingénieur aura à calculer la probabilité que, sur une durée de fonctionnement donnée T , le processus de réponse dépasse le seuil de ruine ou, ce qui revient au même, à estimer la distribution de probabilité de la durée de fonctionnement T après laquelle la ruine par dépassement du seuil se produira.

Ce problème est extrêmement compliqué et n'a pas encore été parfaitement résolu.

Soit $x(t)$ la réponse d'un oscillateur linéaire faiblement amorti à un bruit blanc gaussien et observons un ensemble d'échantillons $x(t)$ sur une durée T . On peut définir une probabilité $w(T)$ que le processus reste dans le domaine de sécurité qui s'écrit :

$$w(T) = \text{Pr ob} \{ |x(t)| < b; 0 \leq t < T \} \quad 7.13$$

$w(T)$ représente la fraction d'échantillon qui n'ont pas franchit le seuil de ruine après une durée T ; c'est une mesure de *fiabilité*. C'est, par définition une fonction décroissante de T .

Dans la suite, nous examinerons quelques modèles conduisant à une approximation de $w(T)$.

7.6.2. Hypothèse de franchissements indépendants

L'approximation la plus simple de la densité de probabilité du premier passage s'obtient en supposant que les franchissements à pente positives du seuil b par la réponse stationnaire peuvent être considérées comme des événements indépendants.

Dans ces conditions, le nombre de franchissements dans $[0, T[$ constitue un processus de poisson de taux d'arrivage $2\nu_b^+$.

La probabilité que n passage se produisent sur la durée d'observation T s'écrit alors

$$W[n \text{ passages sur } [0, T[] = \frac{(2\gamma_b \cdot T)^n}{n!} \cdot \exp(-2\nu_b^+ T) \quad 7.14$$

La fiabilité correspond à $n = 0$

$$W[n \text{ passages sur } [0, T[] = \exp(-2\nu_b^+ T) \quad 7.15$$

$$\gamma_b^+ = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad 7.16$$

L'hypothèse de franchissements indépendants est critiquable, spécialement pour les processus en bande étroite pour lesquels les franchissements ont tendance à se grouper. Ce modèle tend à sous-estimer le temps entre deux franchissements et conduit par conséquent à des résultats conservatifs au point de vue design.

7.6.3. Hypothèse des franchissements de l'enveloppe

Comme les dépassement d'un processus en bande étroite ont tendance à se grouper et que le premier dépassement de chaque groupe est précédé de dépassement de l'enveloppe (fig 7.4), un nouvel estimateur de α peut être obtenu en supposant que les dépassements de l'enveloppe constituent des événements indépendants.

Comme dans la section précédente, le nombre de dépassement de l'enveloppe se produisant pendant la durée d'observation constitue un processus de poisson de taux d'arrivages n_b^+ .

$$W(T) = \exp(-\alpha T)$$

$$\alpha = n_b^+ = \sqrt{2\pi} \cdot \delta \frac{b}{\sigma_x} \gamma_b^+ \quad 7.17$$

δ est un paramètre de dispersion spectrale, définit par :

$$\delta = 1 - \frac{m_1^2}{m_0 \cdot m_2} = 1 - \frac{m_1^2}{\sigma_x \cdot \sigma_x^2} \quad 7.18$$

avec m_1 : moment d'ordre 1 de la réponse .

Pour de faibles valeurs du seuil, la formule fournit un meilleur estimateur de α que dans la section précédente .

Pour les valeurs élevés du seuil n_b^+ tend à être supérieur à $2\gamma_b^+$, rendant l'estimateur trop conservatif .

Notons que le taux de décroissance limite dépend ici de la largeur de bande du processus ; ce n'est pas le cas du modèle précédent.

7.6.4. Approche basée sur la taille moyenne des groupes

Les considérations de la section (7.5) nous ont montrés que cet estimateur était valable pour les faibles valeurs de seuil b , mais ne s'applique pas aux valeurs élevées, pour lesquels il devenait inférieur à 1 .

L'approche précédente sera donc améliorée en remplaçant le taux d'arrivage de l'enveloppe par le taux d'arrivage de groupe .On trouve alors :

$$\alpha = 2\gamma_b^+ / \langle cs \rangle \quad 7.19$$

Alors on aura :

$$W(T) = \exp(-\alpha T) \quad 7.20$$

$$\alpha = 2\gamma_b^+ (1 - \exp(-\sqrt{\pi/2} \cdot \delta \frac{b}{\sigma_x})) \quad 7.21$$

$$\gamma_b^+ = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad 7.22$$

7.6.5. Modèle de Vanmarcke

L'expression de la fiabilité est donnée par :

$$W(T) = (1 - \exp(-\eta^2 / 2)) \left[-2\gamma_0^+ T \frac{(1 - \exp(-\sqrt{\pi/2} \cdot \delta \cdot \eta))}{\exp(\eta^2 / 2) - 1} \right] \quad 7.23$$

$\eta = \frac{b}{\sigma_x}$ la valeur réduite du seuil b .

Cette relation a l'immense avantages de fournir un estimateur explicite de la fiabilité en fonction de la valeur réduite de seuil $\eta = \frac{b}{\sigma_x}$, du nombre de demi-cycles $N=2\gamma_0^+$, et du paramètre de largeur de bande δ .

8.ETUDE NUMERIQUE.

8.1. INTRODUCTION.

La réponse à la question de la sécurité des structures d'une manière rationnelle relève désormais de la vibration aléatoire, elle fait le souci de toute conception.

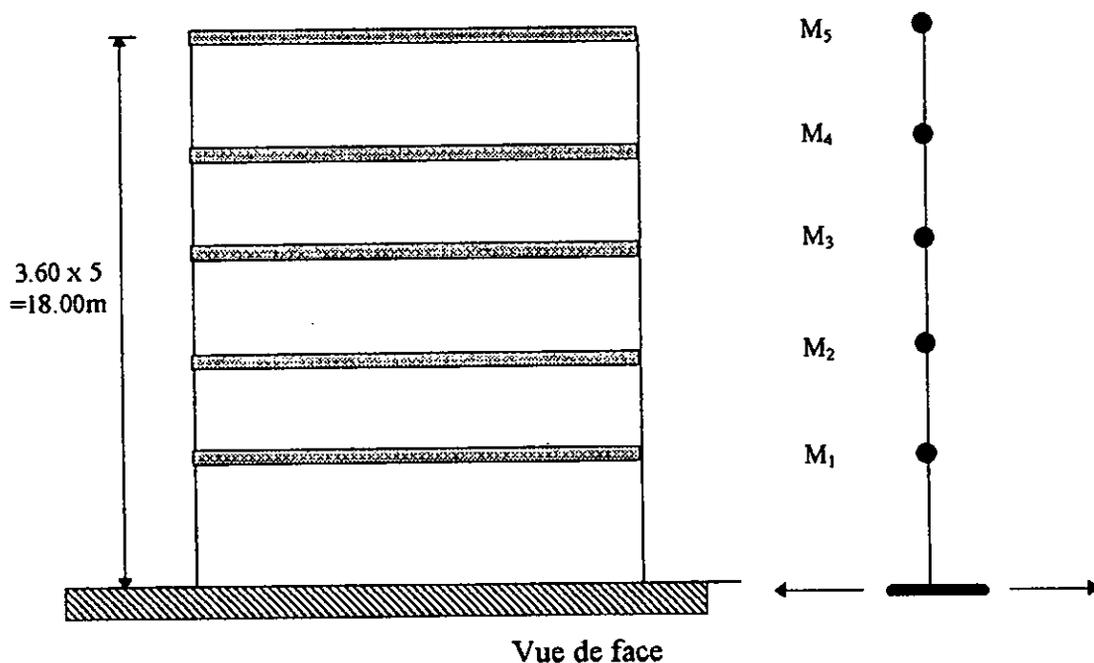
Au cours des précédents chapitres, nous avons pu voir le développement de la théorie de vibration aléatoire appliquée aux structures de génie civil, et comment à partir d'un certain nombre d'hypothèses on aboutit à une information statistique de la sécurité ceci n'est que la fiabilité.

A travers ce chapitre (Etude numérique), on se propose de voir de près toutes ces hypothèses, en étudiant une structure courante de bâtiment (R+5), et une autre application avec deux manières de représentation : plancher rigide et plancher flexible.

8.2. PRESENTATION DE LA STRUCTURE

On rappelle que :

- 1) La masse totale du bâtiment est concentrée au niveau des planchers, ce qui implique entre autres, que le nombre de degrés de liberté correspondant aux déplacements horizontaux de planchers est égal au nombre de masses.
- 2) Les travers sont infiniment rigides par rapport aux poteaux, ce qui revient à admettre une rotation nulle des noeuds de la structure.
- 3) Les déformations de la structure sont indépendantes des forces axiales reprises par les poteaux. Cette hypothèse revient à admettre que les planchers demeurent en position pratiquement horizontale durant le mouvement de vibration de la structure.



Vue de face

La structure proposée pour l'étude est un bâtiment à cinq niveaux (R+5) avec une hauteur d'étage $h=3.6\text{m}$. Les masses sont concentrées au niveau des planchers

Niveau	Masses(t)	Raideurs(10^6N/m).
1	150	215
2	135	210
3	120	170
4	105	165
5	90	135

8.3. DETERMINATION DES MODES ET VECTEURS PROPRES

L'analyse modale nous permet de calculer les modes propres qui contribuent dans la réponse de la structure et les vecteurs propres qui leurs correspondent, et nous avons les résultats suivants :

Mode k	Fréquence naturelle (rad/s)	Facteur de participation, γ_k
1	12.1	22.5
2	31.7	8.31
3	48.8	4.13
4	63.8	2.41
5	72.1	1.13

Les vecteurs modaux obtenus sont les suivants :

Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
0.01544	0.03874	0.04577	0.04566	0.02730
0.02963	0.05068	0.01471	-0.04019	-0.04613
0.04368	0.02510	-0.05149	-0.01649	0.05358
0.05347	-0.01955	-0.03046	0.05670	-0.04625
0.05930	-0.05889	0.05179	-0.03314	0.01875

8.4. CARACTERISTIQUES STATISTIQUES DE LA REPONSE

Ensuite, le calcul de σ_{uj} et σ_{ij} seront fait pour le cas d'un input sismique décrit par les trois modèles de densité spectrale de puissance (c'est à dire : Bruit blanc pur, Brut blanc filtré (modèle de Kanaï-Tajimi) et bruit blanc filtré (modèle Kanaï-Tajimi modifié) et pour trois types de sol (sol ferme, sol moyen, sol mou).

Les paramètres définissant la constante S_0 ont été choisis tels que le pic d'accélération du sol $PGA = 0.3 g$ et la durée du séisme $t_{max} = 10$ secondes.

Pour un sol ferme : $S_0 = 0,00478 \text{ m}^2/\text{s}^3$, $\omega_g = 15 \text{ rad/s}$, $\beta_g = 0.6$

$\omega_c = 1.5 \text{ rad/s}$, $\beta_c = 0.6$

Pour un sol moyen : $S_0 = 0,00822 \text{ m}^2/\text{s}^3$, $\omega_g = 10 \text{ rad/s}$, $\beta_g = 0.4$

$\omega_c = 1 \text{ rad/s}$, $\beta_c = 0.6$

Pour un sol meuble: $S_0 = 0,0158 \text{ m}^2/\text{s}^3$, $\omega_g = 5 \text{ rad/s}$, $\beta_g = 0.2$

$\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$, $\beta_c = 0.6$

Nous rappelons que σ_{ij} et σ_{uj} sont donnés par les équations (6.35), (6.37) dans le cas où l'effet de l'inter corrélation modale est négligée, et par les équations (6.29,6.30) dans le cas contraire.

a) Cas d'un bruit Blanc pur

Sol ferme						
Couplage modale négligé			Couplage non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
0.5573	8.1766	0.45	0.3282	4.5587	0.44	1
0.7621	10.0202	0.34	0.6195	7.9411	0.34	2
0.9132	11.1656	0.24	0.9037	11.0323	0.26	3
1.0017	11.7800	0.18	1.1045	13.3912	0.23	4
1.0500	12.1028	0.13	1.2284	15.1725	0.25	5

Sol moyen						
Couplage modale négligé			Couplage non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
0.7332	10.7560	0.45	0.4318	5.9970	0.44	1
1.0025	13.1815	0.34	0.8149	10.4466	0.34	2
1.2014	14.6883	0.24	1.1888	14.5129	0.26	3
1.3177	15.4965	0.18	1.4530	17.9161	0.23	4
1.3813	15.9212	0.13	1.6160	19.9593	0.25	5

Sol meuble						
Couplage modale négligé			Couplage non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
1.0165	14.9126	0.45	0.5987	8.3144	0.44	1
1.3899	18.2751	0.34	1.1289	14.4833	0.34	2
1.6655	20.364	0.24	1.6481	20.1209	0.26	3
1.8269	21.4846	0.18	2.0145	24.4232	0.23	4
1.9150	22.0734	0.13	2.2405	27.6719	0.25	5

b) Cas d'un bruit blanc filtré (modèle de Kanai-Tajimi) :

Sol ferme						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
0.7237	9.0040	0.25	0.4278	5.1813	0.24	1
0.9997	12.2358	0.22	0.8157	9.8009	0.21	2
1.2096	14.5587	0.18	1.1982	14.3435	0.18	3
1.3347	15.8868	0.16	1.4660	17.6129	0.17	4
1.4038	16.6006	0.14	1.6270	19.6796	0.18	5

Sol moyen						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
0.9344	10.8611	0.19	0.5609	6.4056	0.2	1
1.2931	14.9717	0.18	1.0647	12.2035	0.19	2
1.5681	18.0850	0.17	1.5571	17.9137	0.17	3
1.7333	19.9384	0.17	1.8984	21.9164	0.17	4
1.8250	20.9619	0.16	2.1012	24.3333	0.17	5

Sol meuble						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
0.4919	3.9048	0.46	0.3200	2.3923	0.46	1
0.6798	5.3825	0.45	0.5830	4.4722	0.46	2
0.8231	6.5018	0.45	0.8241	6.4654	0.45	3
0.9088	7.1681	0.45	0.9845	7.8392	0.45	4
0.9562	7.5360	0.45	1.0775	8.6602	0.45	5

c) Cas d'un bruit blanc filtré (modèle de Clough-Penzien CP) :

Sol ferme						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
0.7258	9.0394	0.24	0.4289	5.2027	0.23	1
1.0026	12.2854	0.21	0.8179	9.8420	0.20	2
1.2132	14.6198	0.17	1.2017	14.4043	0.17	3
1.3387	15.9550	0.15	1.4705	17.6871	0.16	4
1.4080	16.6729	0.13	1.6320	19.7614	0.17	5

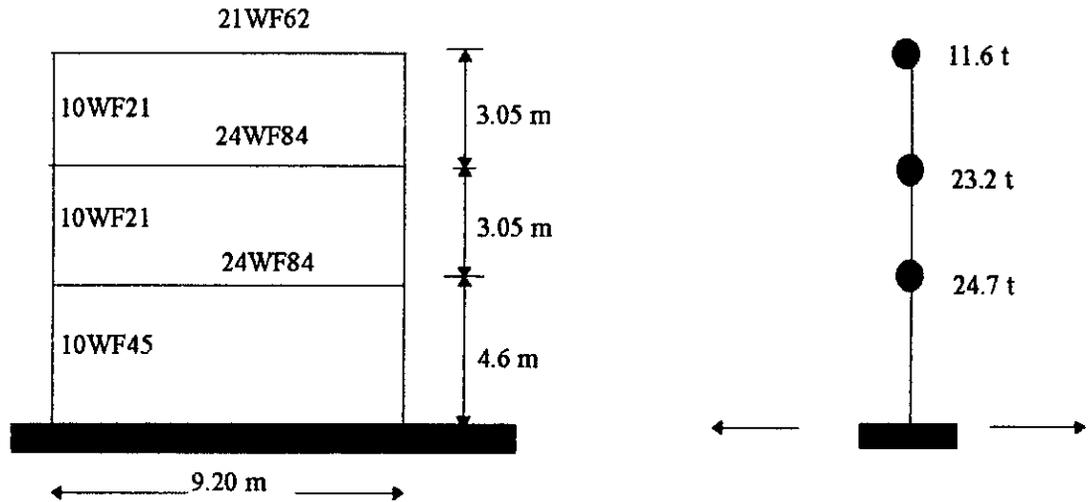
Sol moyen						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
0.9355	0.5615	0.19	0.5615	6.4190	0.19	1
1.2947	1.0659	0.18	1.0659	12.2289	0.18	2
1.5701	1.5591	0.17	1.5591	17.9508	0.17	3
1.7355	1.9008	0.16	1.9008	21.9616	0.16	4
1.8273	2.1040	0.16	2.1040	24.3831	0.17	5

Sol meuble						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
0.4913	3.9089	0.45	0.3195	2.3952	0.45	1
0.6789	5.3883	0.45	0.5821	4.4773	0.45	2
0.822	6.5088	0.44	0.8230	6.4725	0.44	3
0.9076	7.1758	0.44	0.9833	7.8475	0.44	4
0.9550	7.5442	0.44	1.0763	8.6692	0.44	5

8.5. APPLICATION N°2

La deuxième application a été proposée pour voir comment la réponse aléatoire varie (si elle varie) avec la flexibilité ?

La structure est une fois avec plancher rigide et une autre fois avec plancher flexible. Elle est métallique, l'accélération du sol est de 0.3g .



Structure flexible : Vue de face

8.6. MODES ET VECTEURS PROPRES

8.6.1. Structure rigide

Les modes et facteurs de participation donnés par l'analyse modale sont :

Mode k	Fréquence naturelle (rad/s)	Facteur de participation γ_k
1	8.39	7.54
2	24.26	-1.51
3	35.38	-0.29

Les vecteurs modaux sont :

Étage	Mode 1	Mode 2	Mode 3
1	0.0971	-0.1628	-0.0673
2	0.14307	0.2367	0.14912
3	1.5947	0.1694	-0.17989

8.6.2. Structure à planchers flexible

Les modes propres sont donnés par :

Mode k	Fréquence naturelle (rad/s)	Facteur de participation γ_k
1	7.74	7.5
2	22.65	1.67
3	33.64	0.43

Les vecteurs modaux sont :

Etage	Mode 1	Mode 2	Mode 3
1	0.09313	0.15946	0.08018
2	0.14351	-0.00821	-0.15018
3	0.16372	-0.17907	0.16637

8.7. CARACTERISTIQUES STATISTIQUES DE LA REPONSE

8.7.1. Structures à plancher rigide

Les variances du processus et les variances du processus dérivé ainsi que le paramètre de dispersion pour différents modèles de densité spectrales de puissance et pour les trois types de sols , dans le cas ou l'inter corrélation est négligée et dans le cas contraire sont données par le tableau suivant :

a) Cas d'un bruit blanc pur BB

Sol ferme						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
1.3706	12.0975	0.32	1.1695	9.9417	0.28	1
1.4380	11.4909	0.11	1.7232	14.6655	0.24	2
1.7395	14.1850	0.18	1.9185	16.1702	0.023	3

Sol moyen						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
1.7973	15.8642	0.32	1.5336	13.0372	0.28	1
1.8857	15.0687	0.11	2.2597	19.2315	0.24	2
2.2812	18.6022	0.18	2.5159	21.2050	0.23	3

Sol meuble						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	σ_r (cm)	σ_x (cm/s)	δ	
2.4919	21.9944	0.32	2.1263	18.0750	0.28	1
2.6144	20.8915	0.11	3.1330	26.6628	0.24	2
3.1627	25.7903	0.18	3.4881	29.3980	0.23	3

b) Cas d'un bruit blanc filtré (modèle de Clough-Penzien CP) :

Sol ferme						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
1.7032	14.6901	0.23	1.4380	12.2609	0.19	1
1.7986	14.8261	0.11	2.1488	18.3642	0.20	2
2.1731	18.0679	0.14	2.3925	20.3102	0.19	3

Sol moyen						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
2.8310	23.6876	0.15	2.4245	20.1590	0.15	1
3.0068	24.9851	0.13	3.5741	29.9370	0.15	2
3.6291	30.1948	0.14	3.9836	33.3000	0.14	3

Sol meuble						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
2.1071	14.4378	0.28	1.8302	12.4404	0.28	1
2.2382	15.3135	0.28	2.6259	18.1097	0.28	2
2.7014	18.4879	0.28	2.9415	20.2286	0.28	3

8.7.2. **Structure à plancher flexible :**

a) **Cas d'un bruit blanc pur BB :**

Sol ferme						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
1.5146	12.4287	0.33	1.2613	9.9397	0.29	1
1.8632	14.3007	0.22	1.9369	14.9650	0.23	2
1.98471	14.8850	0.17	2.2116	17.2357	0.24	3

Sol moyen						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
1.9862	16.2985	0.33	1.6540	13.0346	0.29	1
2.4434	18.7533	0.22	2.5400	19.6246	0.23	2
2.6026	19.5197	0.17	2.9002	22.6022	0.24	3

Sol meuble						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_x (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
2.7538	22.5965	0.33	2.2932	18.07136	0.29	1
3.3875	25.9990	0.22	3.5215	27.2078	0.23	2
3.6083	27.0623	0.17	4.0209	31.3361	0.24	3

b) Cas d'un bruit blanc filtré (modèle de Clough-Penzien CP) :

Sol ferme						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_r (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
1.8456	14.8334	0.24	1.5361	12.0060	0.21	1
2.2780	17.7064	0.17	2.3666	18.4619	0.18	2
2.4294	18.5780	0.13	2.7038	21.2670	0.19	3

Sol moyen						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_r (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
3.0569	23.7719	0.16	2.5532	19.6916	0.15	1
3.7883	29.2983	0.15	3.9344	30.4544	0.15	2
4.0488	31.2296	0.14	4.4901	34.8599	0.15	3

Sol meuble						
Couplage modale négligé			Couplage modale non négligé			Niveau
σ_r (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	σ_r (cm)	$\sigma_{\dot{x}}$ (cm/s)	δ	
2.7249	17.9259	0.25	2.3086	15.0772	0.25	1
3.3783	22.2068	0.24	3.5037	23.0489	0.24	2
3.6113	23.7304	0.24	3.9728	26.2186	0.24	3

8.8. INTERPRETATION DES RESULTATS :

La fiabilité des structures n'est qu'une mesure de sécurité, elle est définie comme étant la probabilité pour laquelle le processus considéré $x(t)$ (déplacement par exemple) reste dans un domaine réputé sûr, pendant la durée d'observation T .

Elle s'écrit par :

$$W(T) = \text{Pr ob} \{ |x(t)| < b; 0 \leq t < T \}$$

Elle fait l'objet principal de la présente étude à travers cette investigation numérique. On s'est forcé à la représenter en fonction du seuil proposé, pour les différents modèles basés sur différentes hypothèses :

- Modèle de *Poisson* : basé sur l'hypothèse des franchissements indépendants du processus.
- Modèle de *l'enveloppe* : basé sur l'hypothèse des franchissements indépendants de la courbe enveloppe
- Modèle de la *taille moyenne* : basé sur la taille moyenne des groupes des pics.
- Modèle de *Vanmarcke*.

L'input a été représentée par trois types de densité spectrale de puissance :

1. Bruit blanc pur WN.
2. Bruit blanc filtré : modèle de Kanai-Tajimi KT
3. Bruit blanc filtré : modèle de Clough-Penzien.CP.

Pour plusieurs conditions de sols :

- Sol ferme.
- Sol moyen .
- Sol meuble.

Alors, on se retrouve avec un nombre considérable de paramètres influents directement sur la fiabilité. Pour bien mener l'étude, à fin de bien pouvoir conclure, on se propose de voir de très près l'effet de chaque paramètre en respectant la méthodologie suivante :

- Modélisation de l'excitation

- Présentation des modèles de fiabilité pour les trois types de densité spectrale de puissance(DSP),ainsi que pour les différents sols, ensuite faire apparaître la Time-History comme élément de comparaison et tirer les conclusions qui se présentent.

- Effet des modèles de la DSP .

- Effet du sol sur la réponse.

- Effet de l'inter corrélation.

- Effet de flexibilité.

8.8.1. Allure générale :

L'allure générale de la fiabilité est croissante avec les déplacements (seuils choisis pour lesquels tout dépassement causerait une ruine).En effet , pour des seuils très élevés ,la fiabilité tend vers 1 : C'est un événement presque certain . Le processus en aucun cas ne doit quitter le domaine de sécurité

Inversement pour les seuils très réduits la fiabilité a tendance de s'annuler puisque l'événement de dépassement du seuil est presque certain.

C'est ainsi ,de point de vue design qu'on s'intéresse aux valeurs de seuils dont la fiabilité est suffisamment grande .

Toutefois, il y est à signaler que les deux modèles basés sur l'enveloppe et la taille moyenne des groupes, pour des seuils très réduits(qui ne peuvent être considérés dans les calculs de conception) la fiabilité est grande.

Les modèles ont tendance à se rapprocher pour les niveaux inférieurs et de s'éloigner pour les niveaux supérieurs. La fiabilité augmente d'une manière brutale pour atteindre la valeur unité cela pour une légère variation des seuils(déplacements ,effort tranchant ou moment de flexion) .Cette augmentation est due à la variation des déplacements inter étages qui décroît avec les étages supérieurs.Fig.(8.3 - 8.4 - 8.5 - 8.6 -8.7).

8.8.2. Représentation des modèles :

La question la plus importante à poser est : Comment exploiter ces modèles ?

Il y a deux façons de voir : Soit on choisit le seuil pour lequel tout dépassement causerait une ruine et on aura quatre valeurs différentes de fiabilité pour les quatre modèles différents. On donnera beaucoup d'intérêt pour la valeur dont le modèle est de Vanmarcke puisque celui-ci présente la fiabilité la plus importante.

Soit, on se donne une fiabilité et on a les quatre seuils à considérée pour les différents modèles, et dans ce cas le modèle de Vanmarcke tient encore de l'importance puisque il suppose un seuil plus petit.

Ce résultat est nettement visible lors de la représentation de la Time-History avec les différents modèles comme élément de comparaison. *Fig.(8.8 -8.9 - 8.10 - 8.11).*

On voit encore que la supposition stationnaire rapporte une réponse supérieur à celle de non stationnarité(il s'agit de la Time-History dans notre cas).*Fig. (8.8 -8.9).*

8.8.3. Effet du sol :

Les fréquences sont excitées de la même manière dans le cas ou l'input est modélisée par un bruit blanc pur (WN), par voie de conséquence leur contribution à la réponse sera donc uniforme. Avoir une réponse provoquée par un sol meuble plus grandes que celle provoquée par un sol ferme et de degrés moins celle provoquée par un sol moyen paraît par la suite logique et raisonnable. *Fig.(8.12).*

La variation de la réponse avec les conditions de sol ne suit pas la même logique que précédent pour une représentation de l'excitation aléatoire par un bruit blanc filtré(KT, CP).Ceci peut être justifier par les raisons suivantes :

- Les fréquences ne sont pas sollicitées de la même manière. *Fig.(8.1 -8.2).*
- La présence du phénomène de résonance pour les conditions du sol moyen .Ceci explique la réponse maximale rapportée par celui-ci par rapport au autre types de sol (ferme et meuble). *Fig.(8.13).*
- La contribution principale des quelques premiers modes dans la réponse : Ceci revient à dire que tout dépend de la situation des premières fréquences naturelles de la structure par rapport à la fréquence centrale de l'input. Cette observation est très visible si on change de structure et voir comment la réponse varie avec les conditions de sols (la deuxième application à plancher rigide par exemple).*Fig.(8.23 - 8.24).*

8.8.4. Effet des modèles de la DSP :

Pour une fiabilité donnée, la réponse obtenue dans le cas ou l'input est modélisée par un bruit blanc pur (W-N) est inférieur par rapport à celle obtenue dans le cas ou elle est modélisée par un bruit blanc filtré (type KT et type CP) *Fig.(8.14).*

Partant de la manière par laquelle les fréquences sont excitées suivant les différents types de modèles de densité spectrales(*fig.8.1-8.2*), nous aurions vite penser que la réponse supérieur peut être donnée sou un bruit blanc pur (WN) puisque toutes les fréquences sont, dans ce cas sollicitées de la même manière.

Alors que ce n'est pas le cas. Ceci nous permet de dire que la contribution principale de la réponse provient des quelques premiers modes est une hypothèse désormais justifiée.

Sur l'ensemble les deux représentation de densité spectrale (KT et CP) sont identique pour les fréquences relativement supérieurs , elles ne sont pas pour les petites valeurs de fréquences .Cela explique que les déplacements sont exactement les mêmes.

8.8.5. Effet de la flexibilité :

L'application n°2 a été proposée pour objectif de voir la variation de la réponse aléatoire avec la flexibilité . On prend la structure avec plancher rigide en premier lieu, ensuite on reprend la même structure avec plancher flexible, et on compare les résultats.

La conclusion à tirer est que avec une structure flexible , la réponse est amplifiée par rapport à celle d'une structure supposée rigide .Tout dépend de la façon avec laquelle la structure sera considérée. *Fig.(8.17 - 8.18 ... 8.22).*

8.8.6. Effet de l'inter corrélation :

Pour un sol donné, pour un modèle de densité spectrale donné : on peut observer l'effet de l'inter corrélation modale sur la réponse ,elle est visible et varie avec l'étage.

Notons que le cas ou les modes sont couplés la réponse est maximum pour les niveaux supérieurs. Ceci revient à dire qu'elle doit être considérée surtout c'est les modes ne sont pas séparés. *Fig.(8.15 - 8.16).*

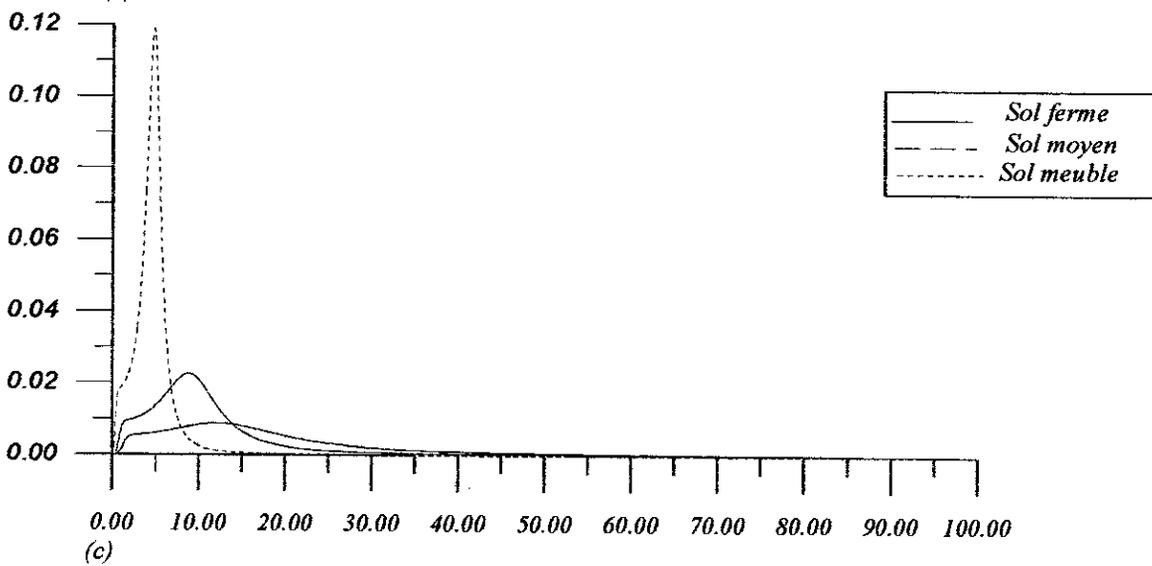
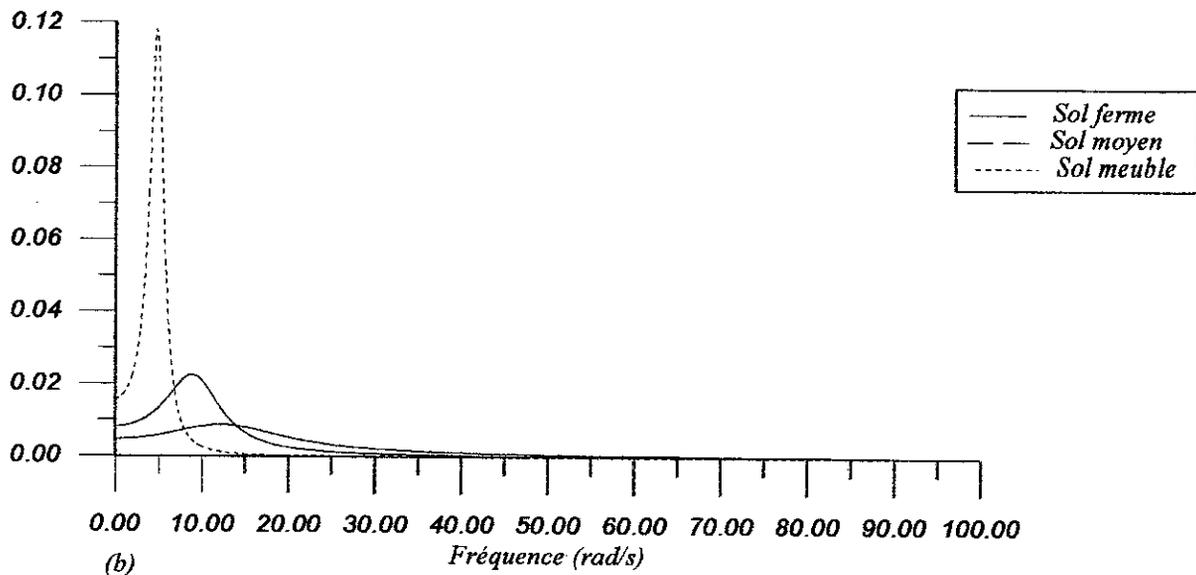
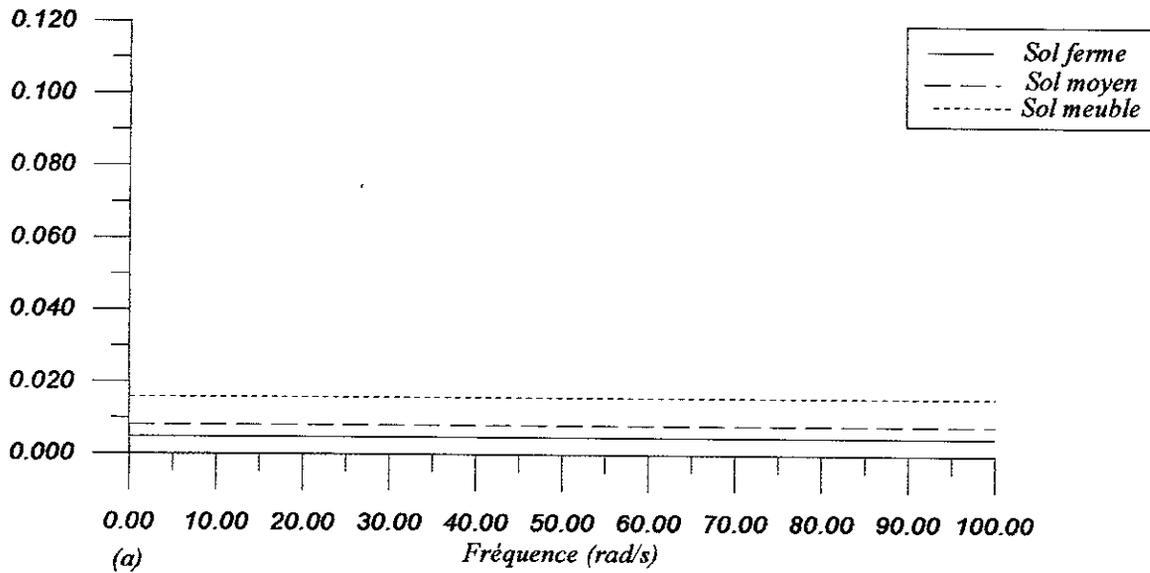


Fig.8.1 Modélisation de l'input : (a) Bruit blanc pur ,
(b) Bruit blanc filtré KT,(c) Bruit blanc filtré CP

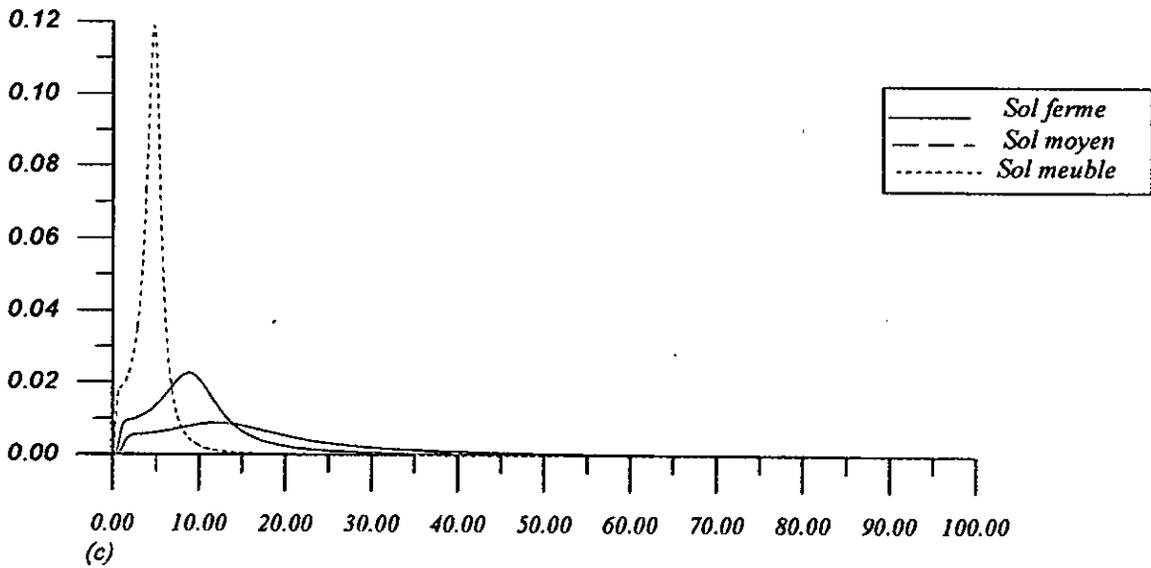
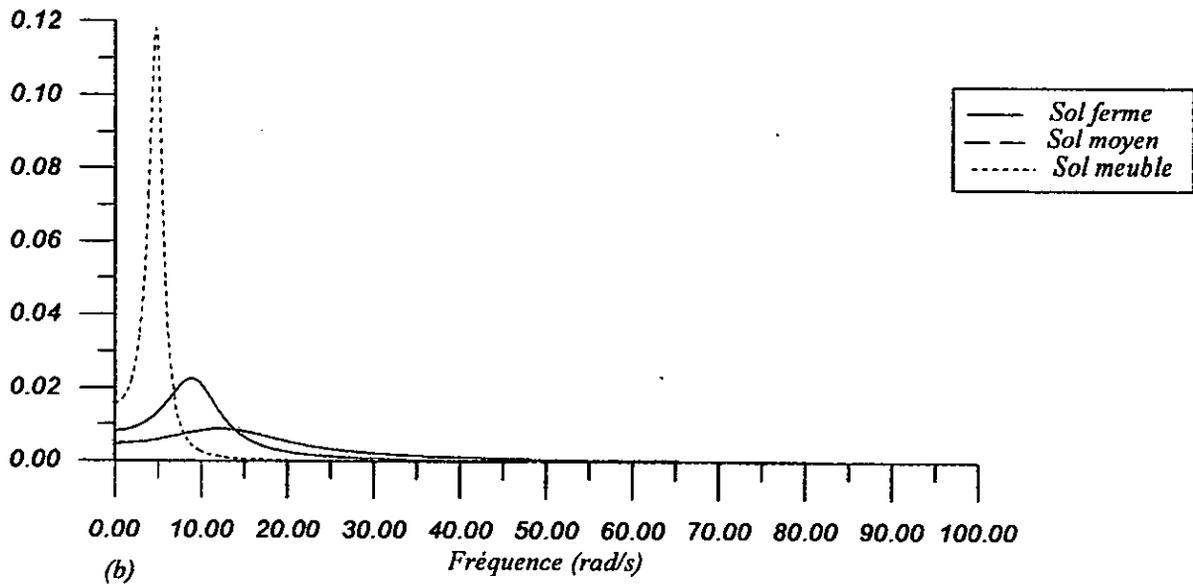
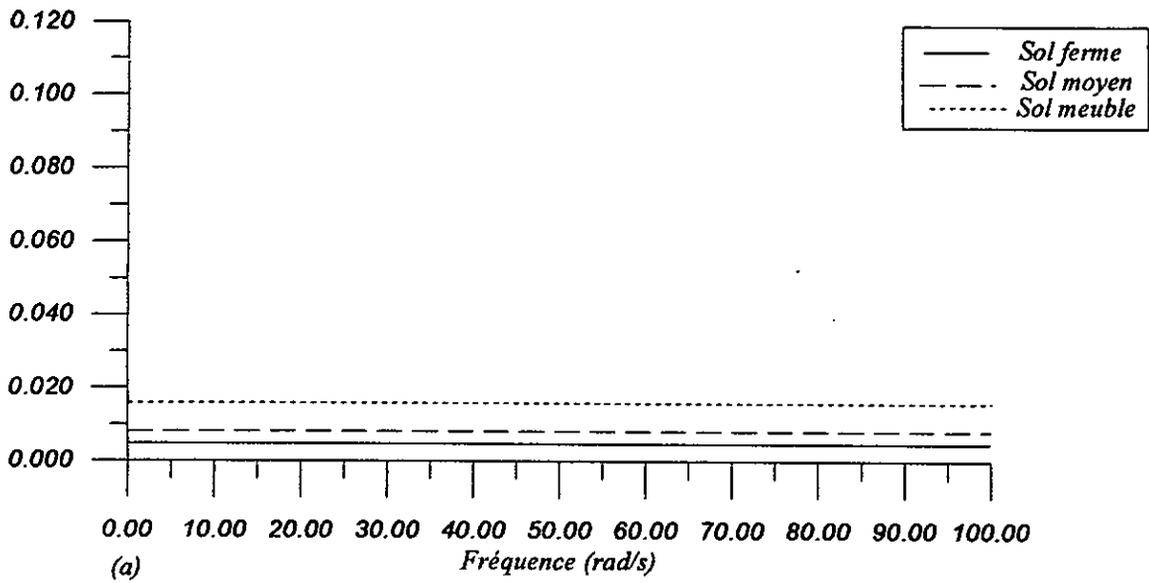


Fig.8.1 Modélisation de l'input : (a) Bruit blanc pur ,
 (b) Bruit blanc filtré KT, (c) Bruit blanc filtré CP

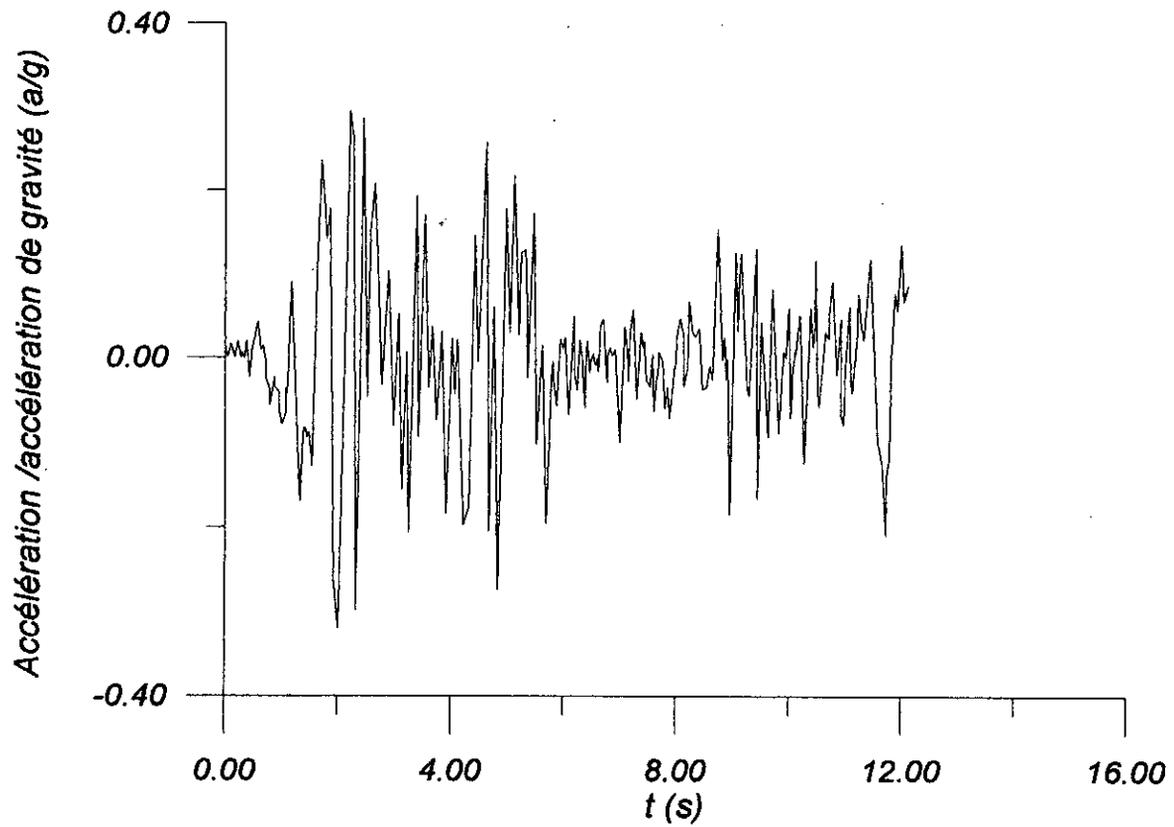
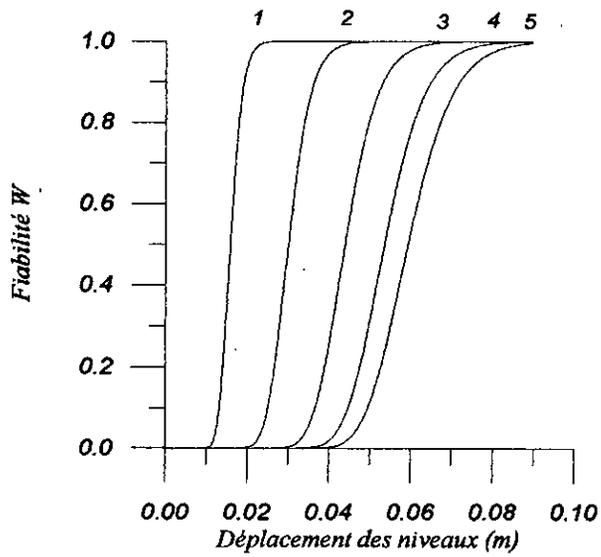
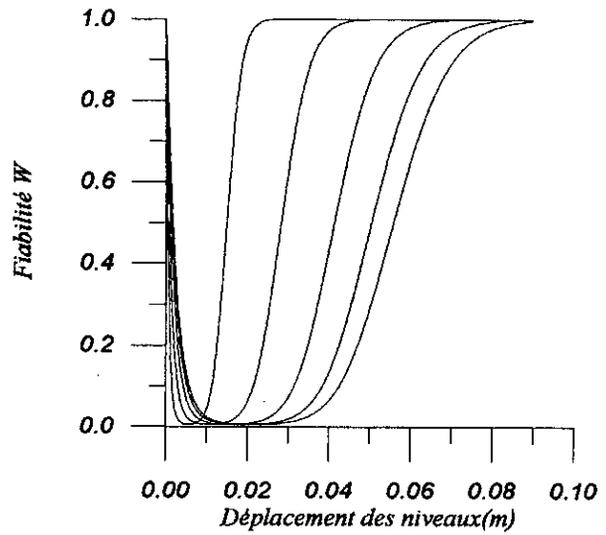


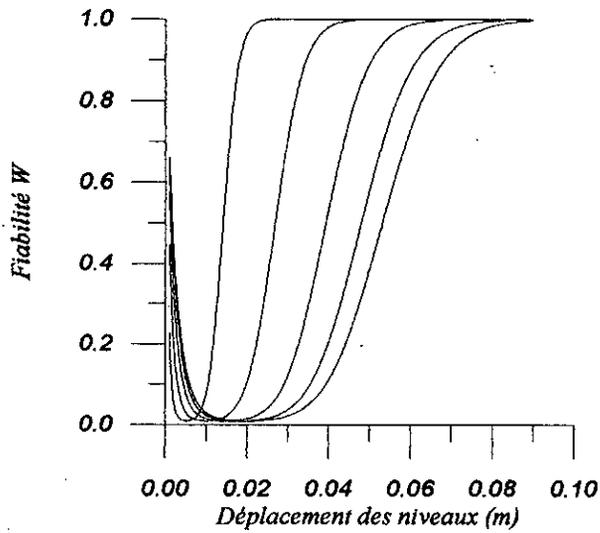
Fig. Accéléro d'Elcentro Mai 1940(NS90)



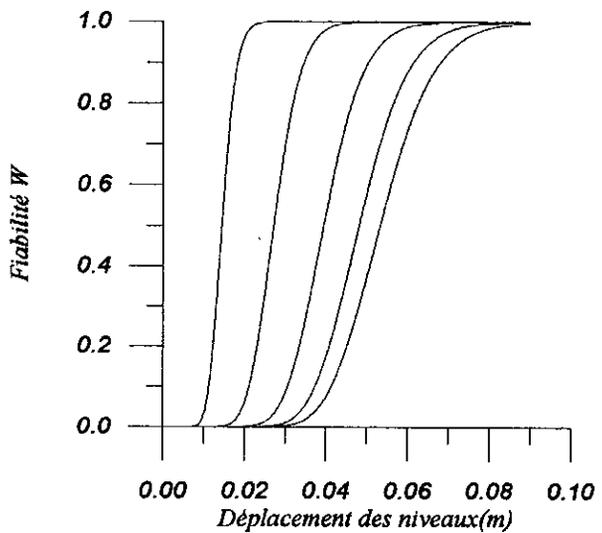
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe



(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes



(d) Modèle de Vanmarcke

Fig. Déplacement inter étages(m):
Cas d'un bruit blanc filtré CP (Sol moyen)

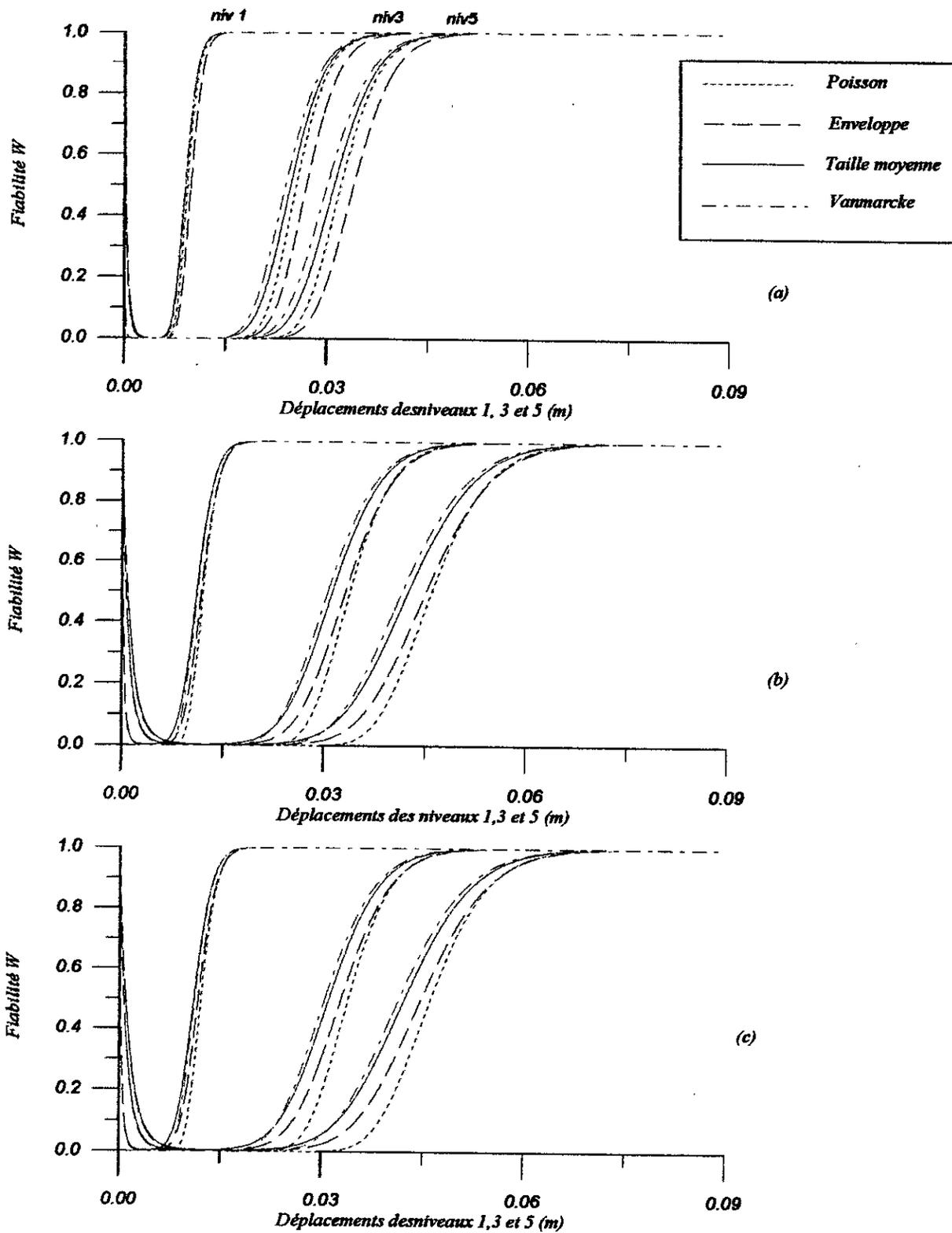


Fig 8.7 Réponse aléatoire de la structure (R+5) : Cas d'un sol ferme (Déplacements)
 (a) Bruit blanc, (b) Bruit blanc filtré KT, (c) Bruit blanc filtré CP

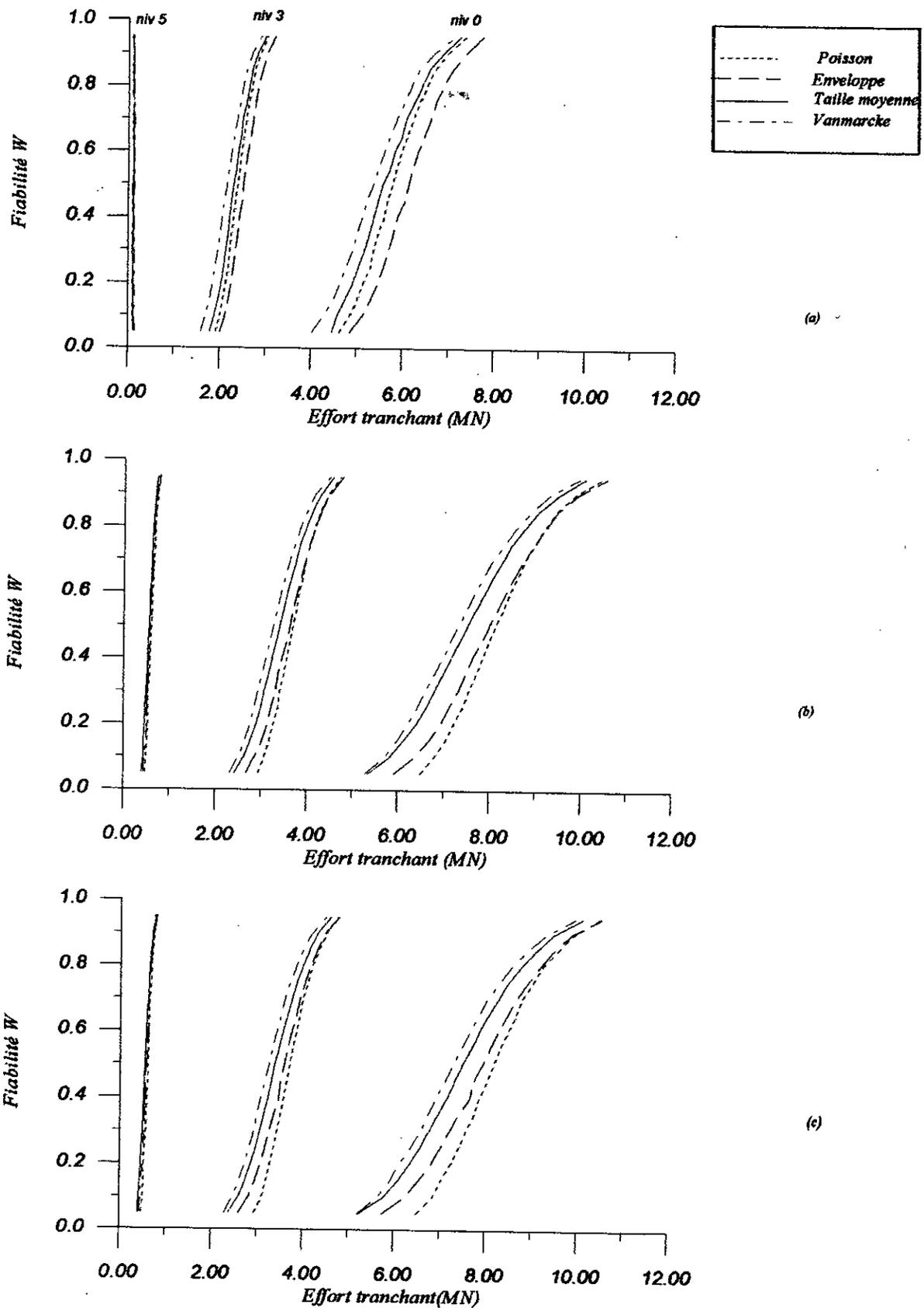


Fig.8.4 Réponse aléatoire de la structure (R+5) : Cas d'un sol ferme(Effort tranchant inter-étage)
 (a) Bruit blanc, (b) Bruit blanc filtré KT, (c) Bruit blanc filtré CP

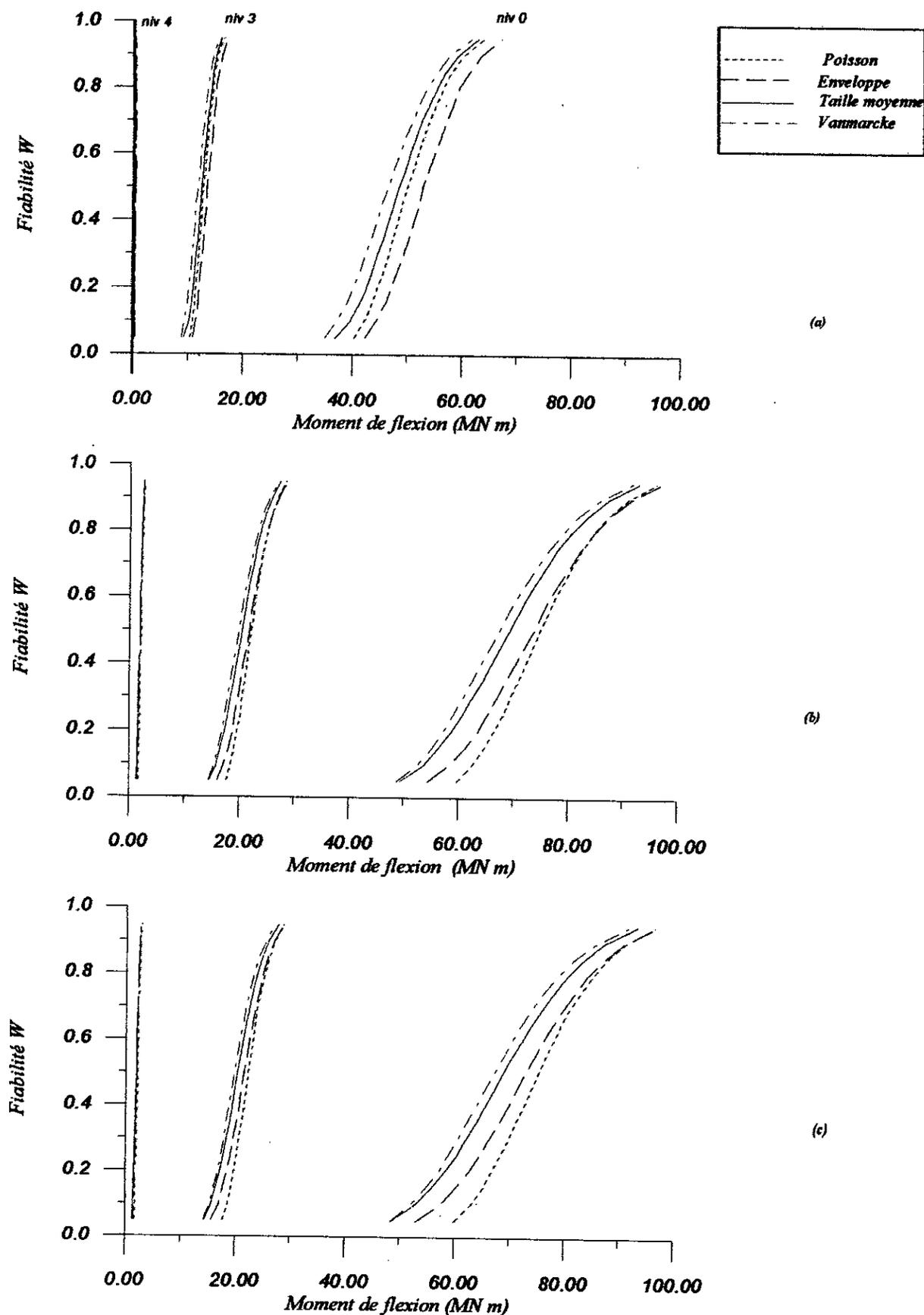


Fig.8.5 Réponse aléatoire de la structure (R+S) :Cas d'un sol ferme(Moment de flexion)
 (a) Bruit blanc, (b) Bruit blanc filtré KT, (c) Bruit blanc filtré CP

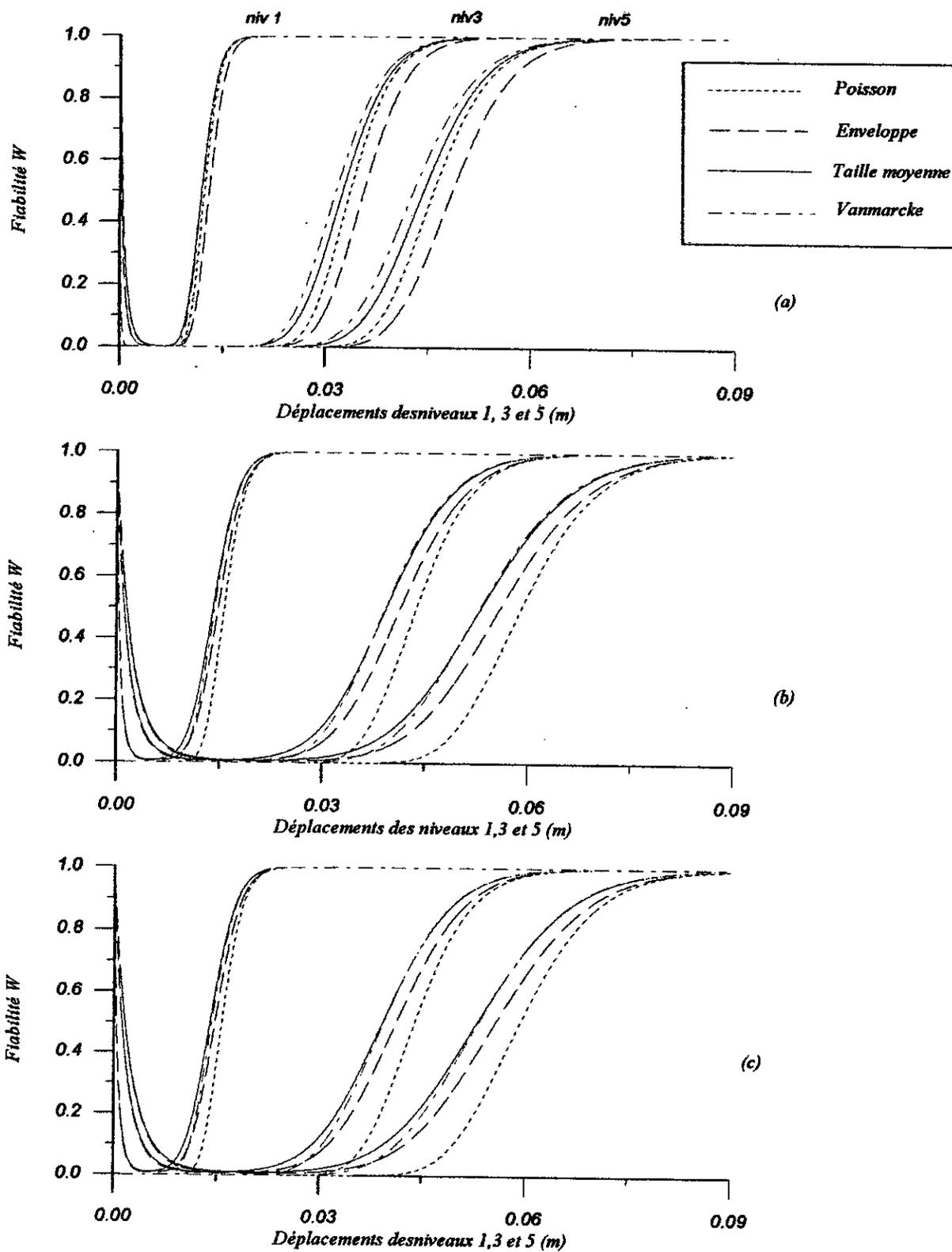


Fig. 8.6 Réponse aléatoire de la structure (R+5) : Cas d'un sol moyen (Déplacements)
 (a) Bruit blanc, (b) Bruit blanc filtré KT, (c) Bruit blanc filtré CP

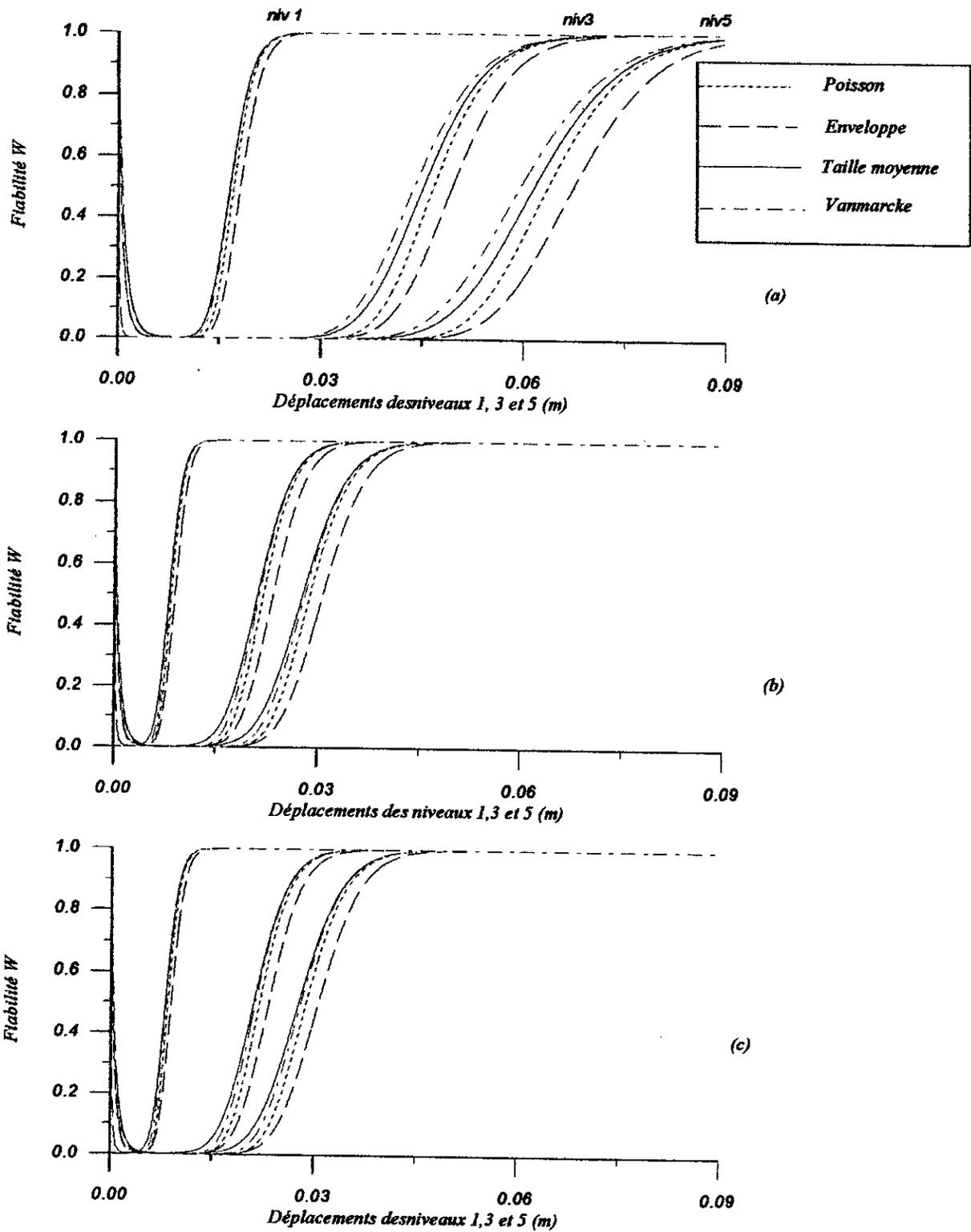
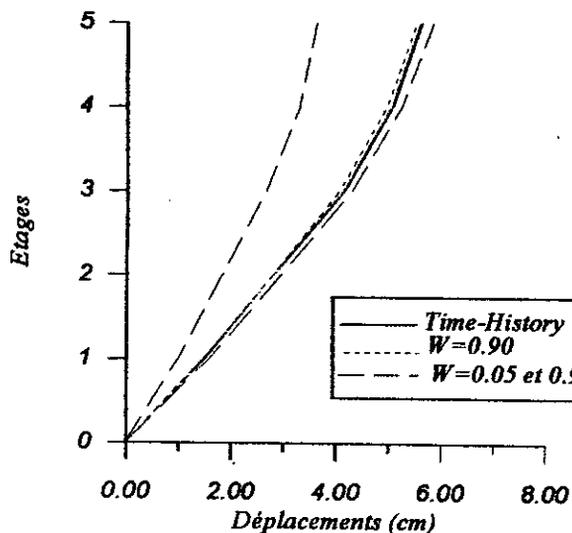
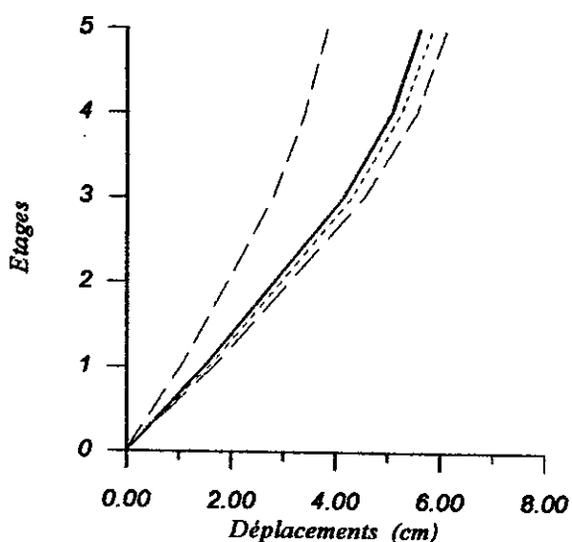


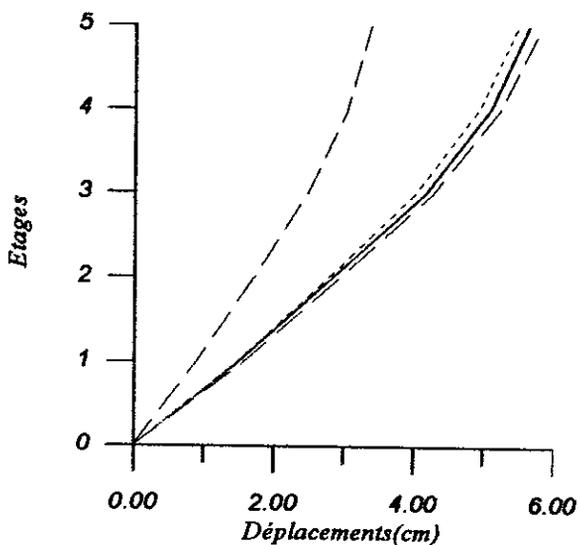
Fig.8.7 Réponse aléatoire de la structure(R+5) :Cas d'un sol meuble(Déplacements)
 (a) Bruit blanc, (b) Bruit blanc filtré KT, (c) Bruit blanc filtré CP



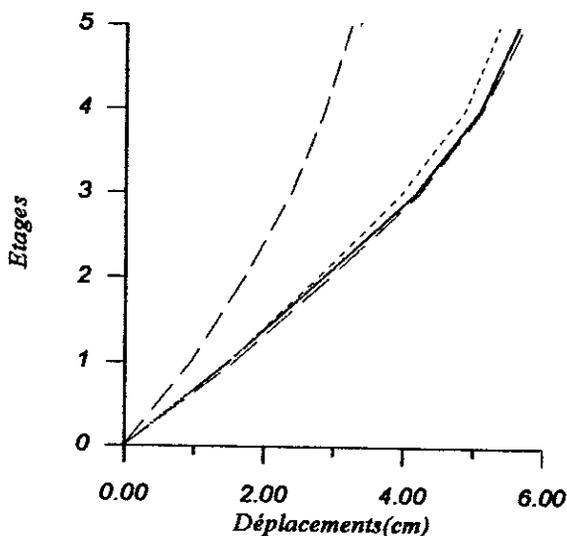
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

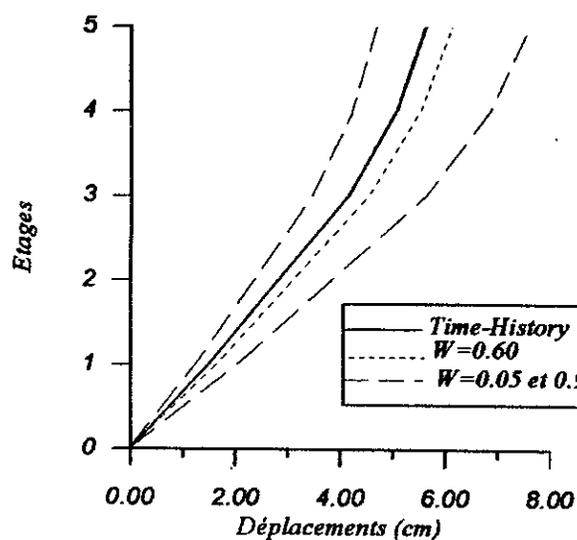


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

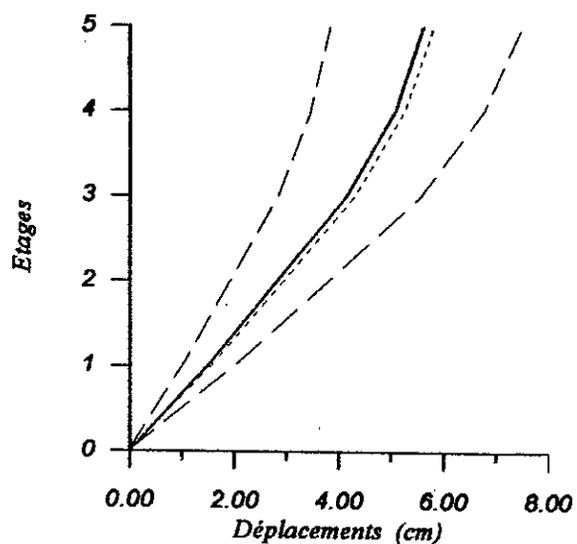


(d) Modèle de Vanmarcke

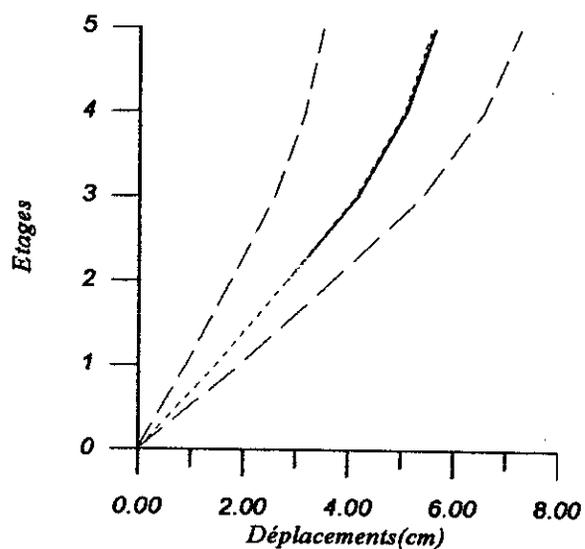
Fig.8.8 Comparaison de la réponse aléatoire avec Time-History : Cas d'un bruit blanc pur (sol moyen)



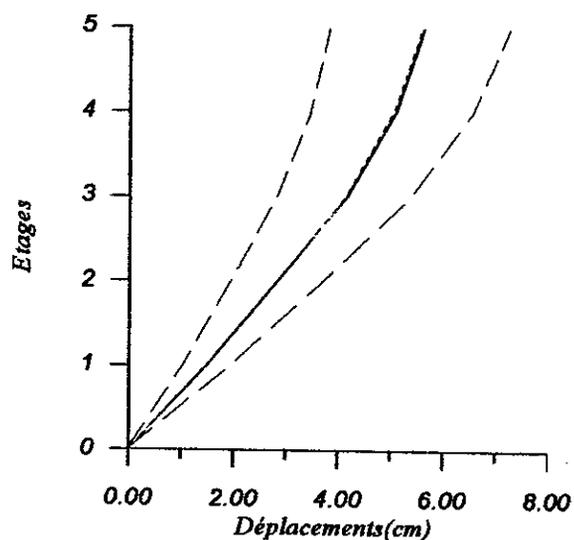
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe



(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes



(d) Modèle de Vanmarcke

Fig.8.9 Comparaison de la réponse aléatoire avec Time-History : Cas d'un bruit blanc filtré CP(sol moyen)

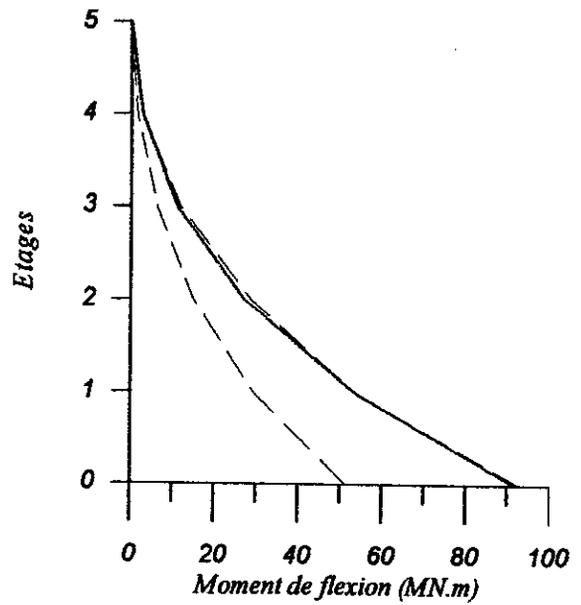
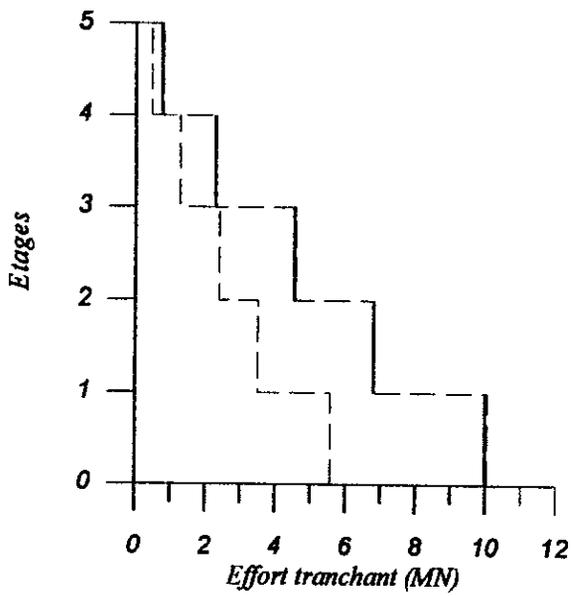
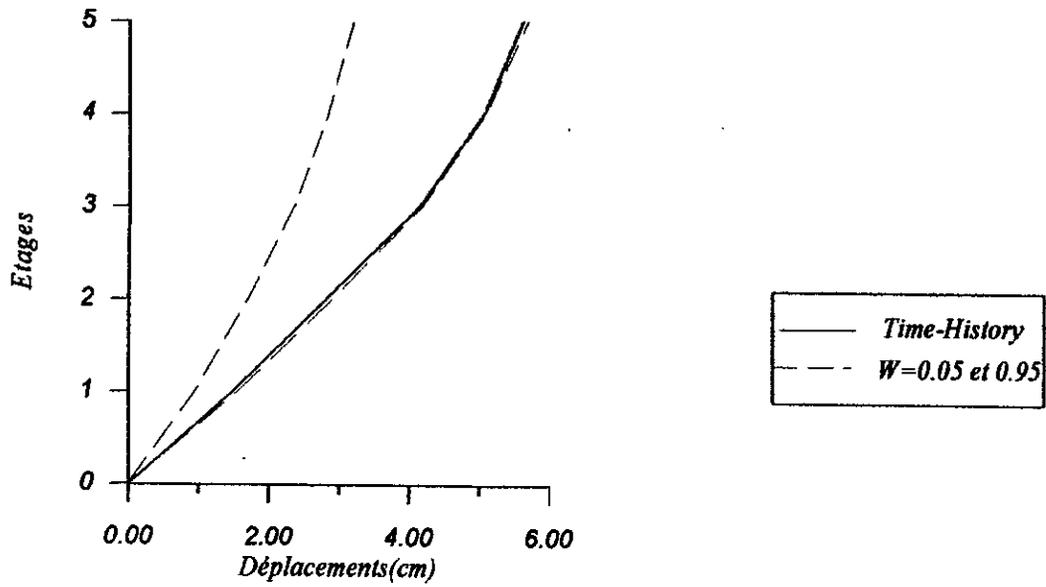


Fig.8.10 Comparaison de la réponse aléatoire calculée par le modèle de Vanmarcke ou l'input est représentée par un bruit blanc pur pour un sol moyen avec Time-History donnée par un accéléro réel d'El-centro 1940

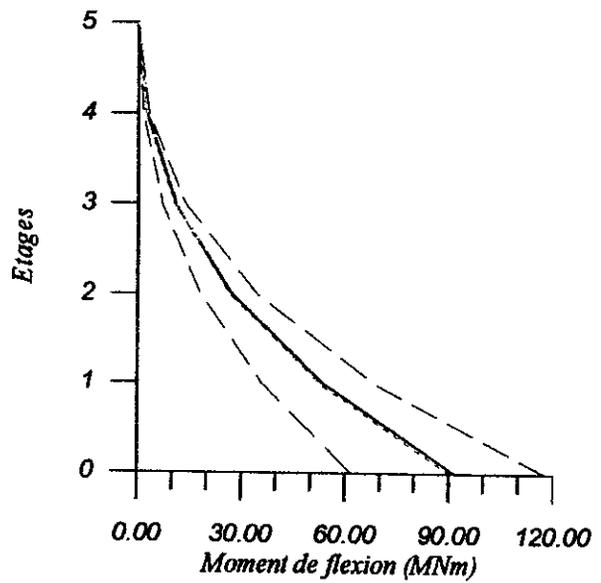
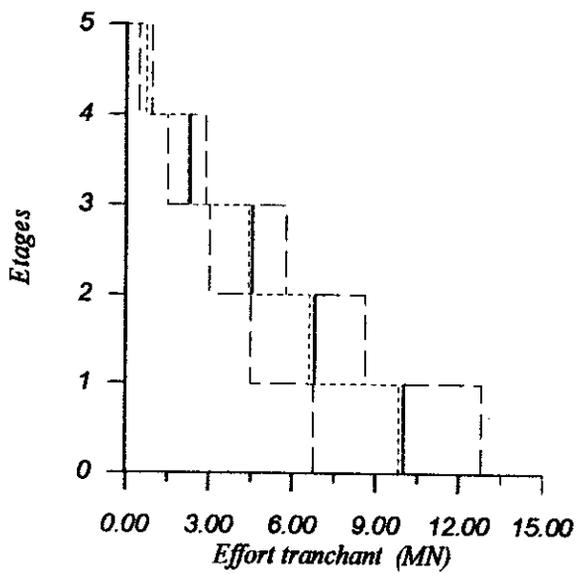
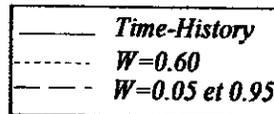
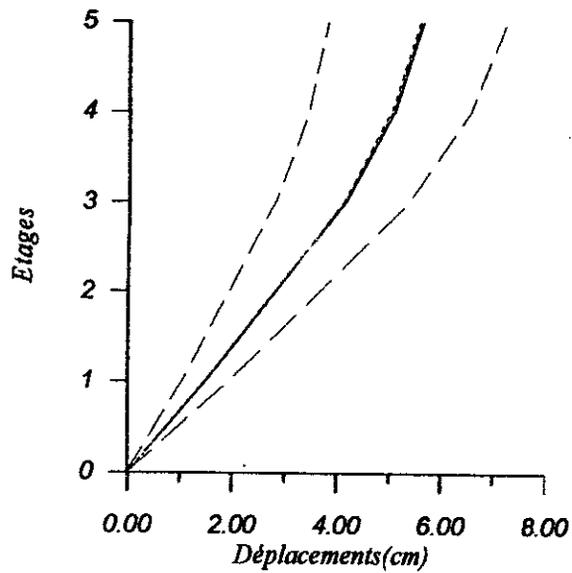
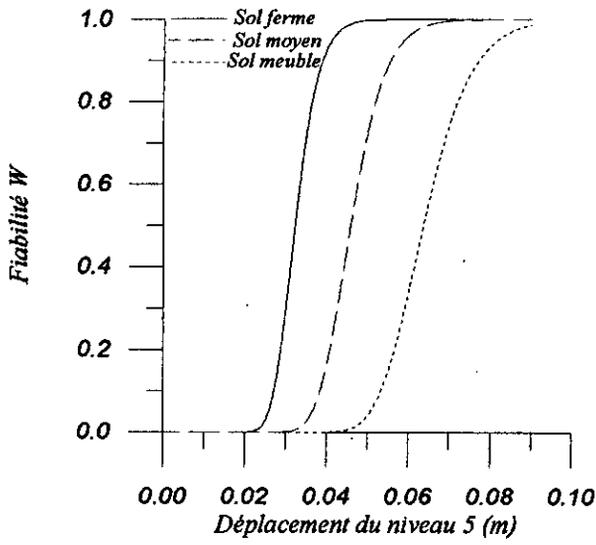
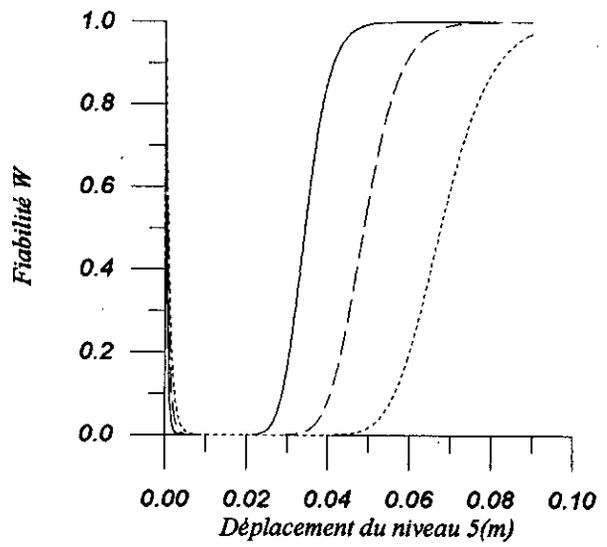


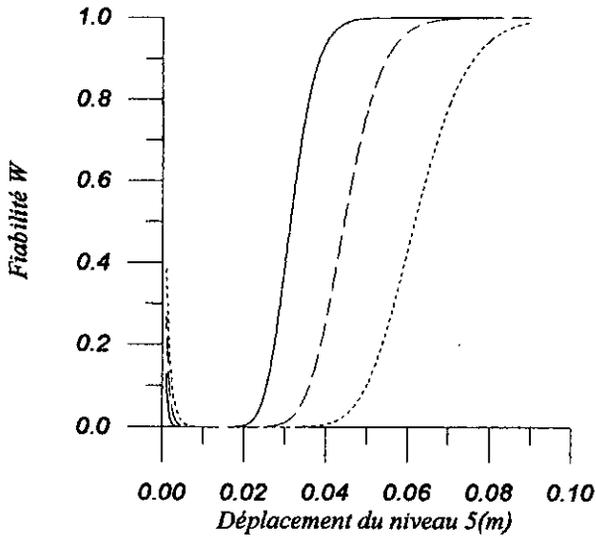
Fig.8.11 Comparaison de la réponse aléatoire calculée par le modèle de Vanmarcke ou l'input est représentée par un bruit blanc filtré CP pour un sol moyen avec Time-History donnée par un accélero réel d'El-centro 18 Mai 1940)



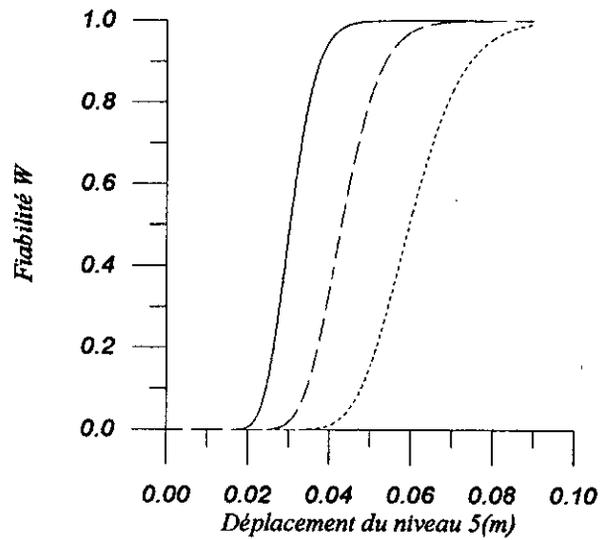
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

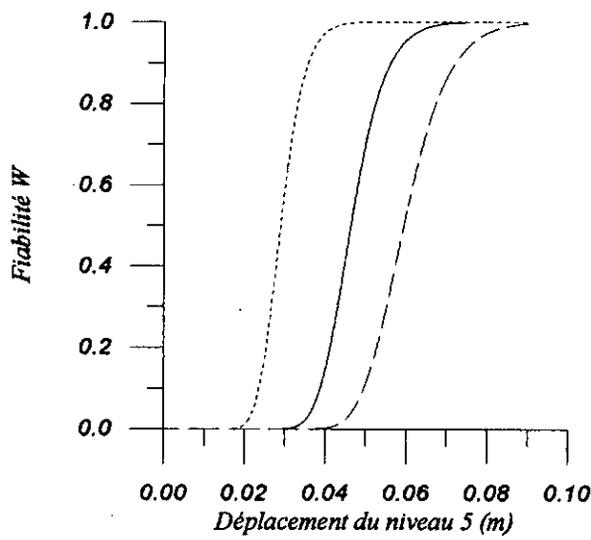


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

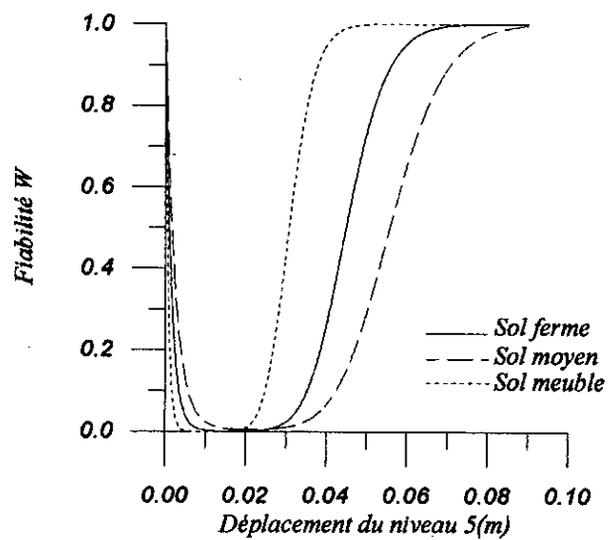


(d) Modèle de Vanmarcke

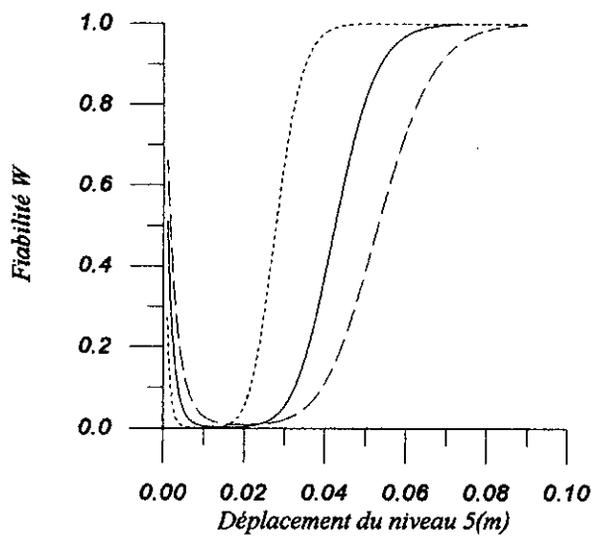
Fig. 8.12 Effet du sol sur la réponse aléatoire: Cas d'un bruit blanc pur



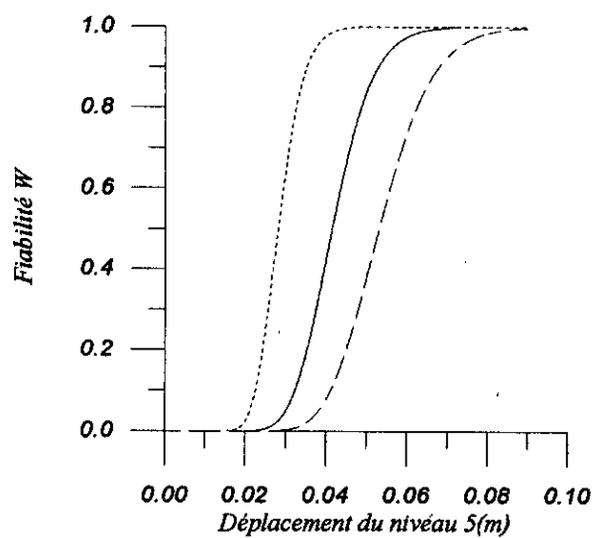
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe



(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes



(d) Modèle de Vanmarcke

Fig.8.13 Effet du sol sur la réponse aléatoire: Cas d'un bruit blanc filtré CP

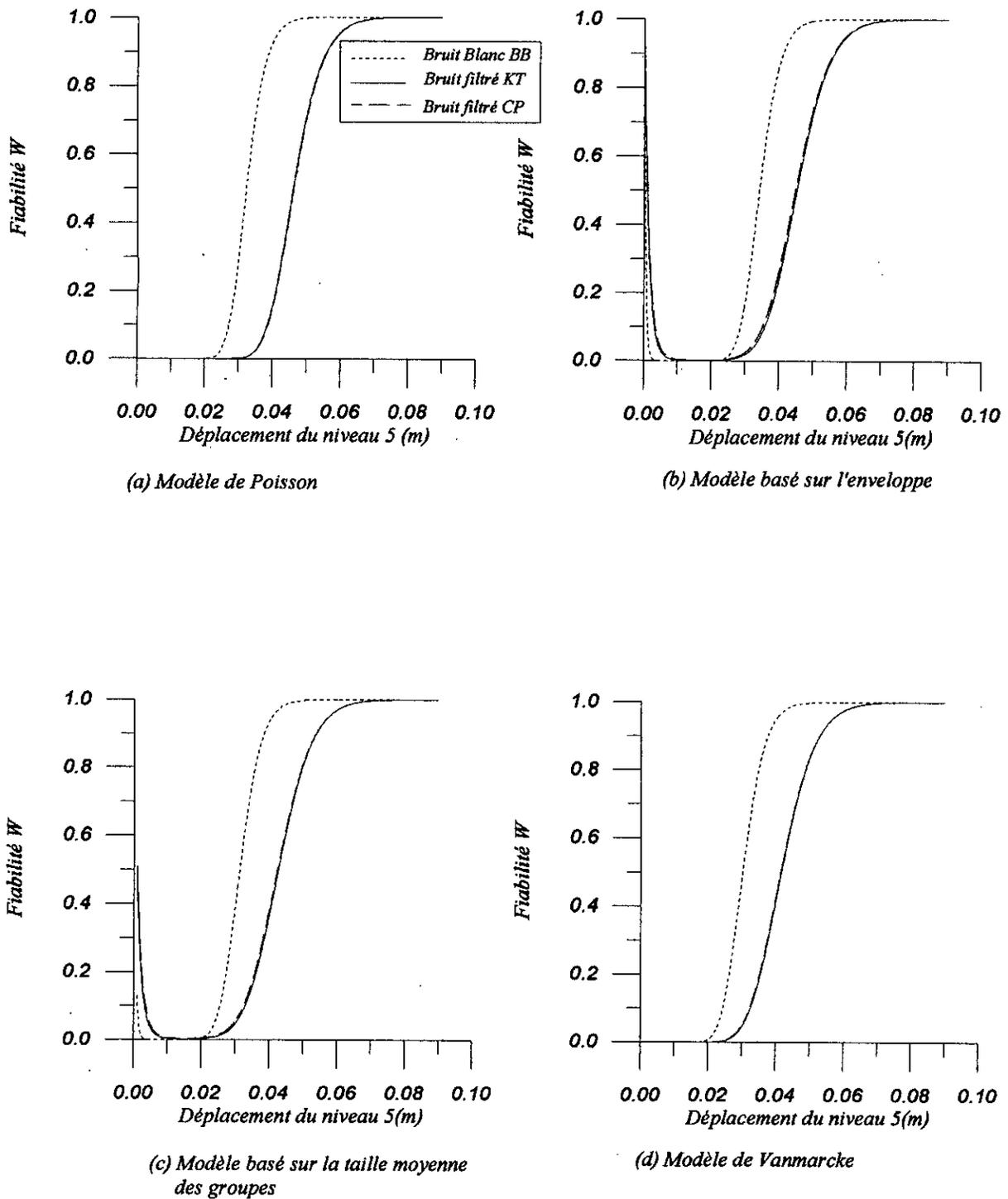
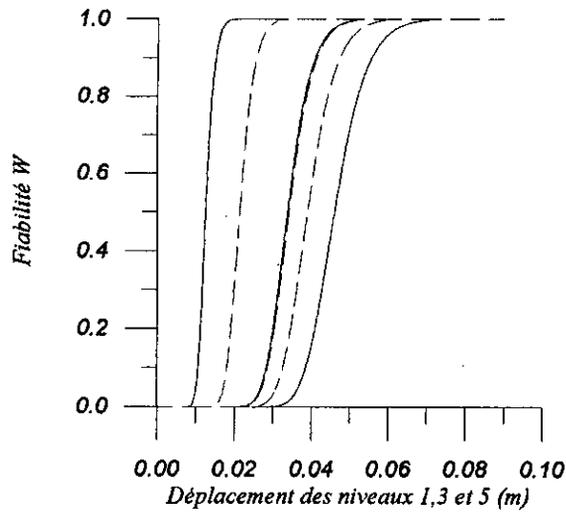
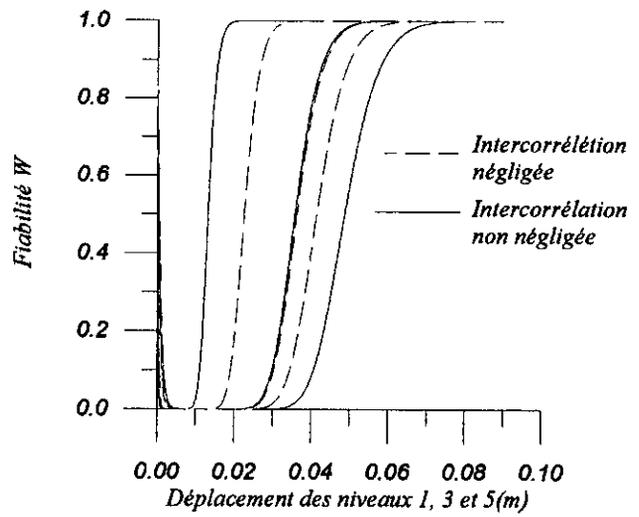


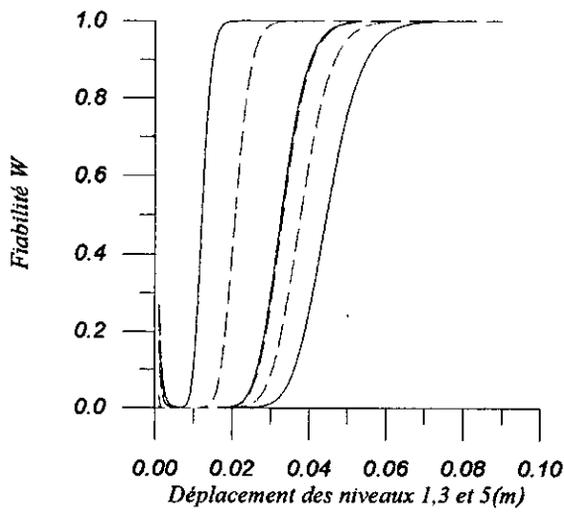
Fig.8.14 Effet des modèles de la DSP sur la réponse aléatoire: Cas d'un sol ferme



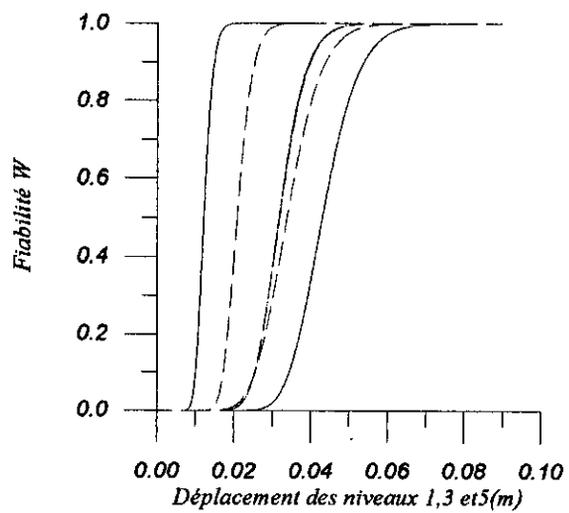
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

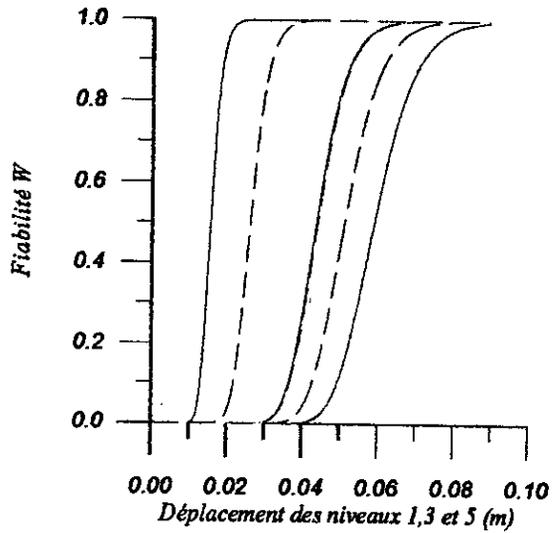


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

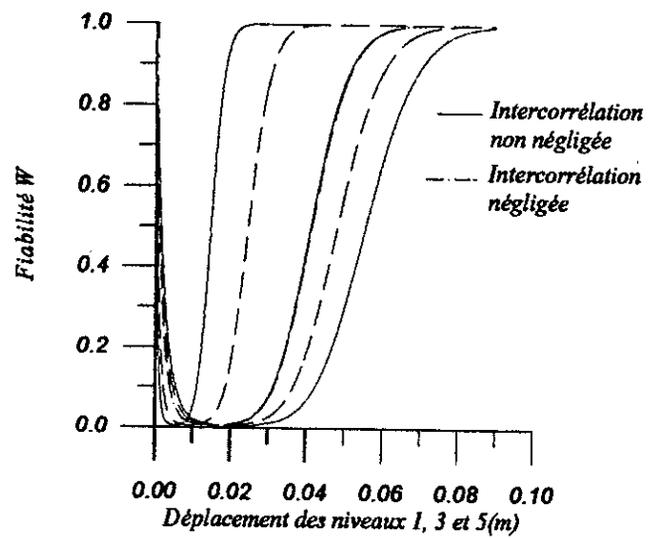


(d) Modèle de Vanmarcke

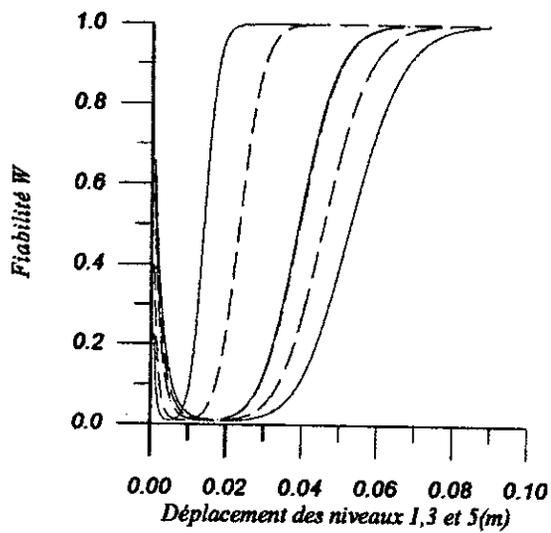
Fig.8.15 Effet de l'inter corrélation sur la réponse aléatoire :
Cas d'un bruit blanc pur (Sol moyen)



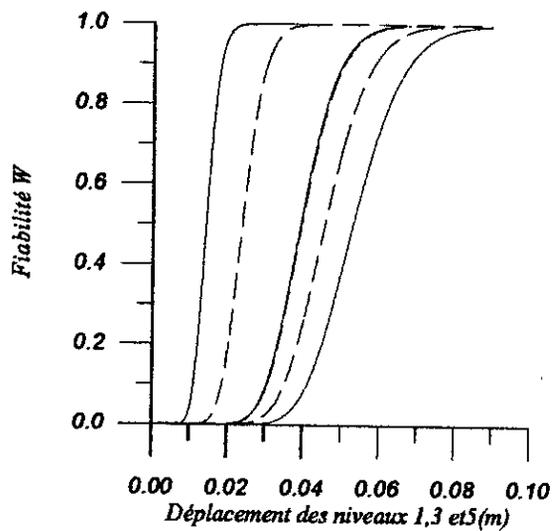
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe



(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes



(d) Modèle de Vanmarcke

Fig.8.16 Effet de l'inter corrélation sur la réponse aléatoire :
Cas d'un bruit blanc filtré CP (Sol moyen)

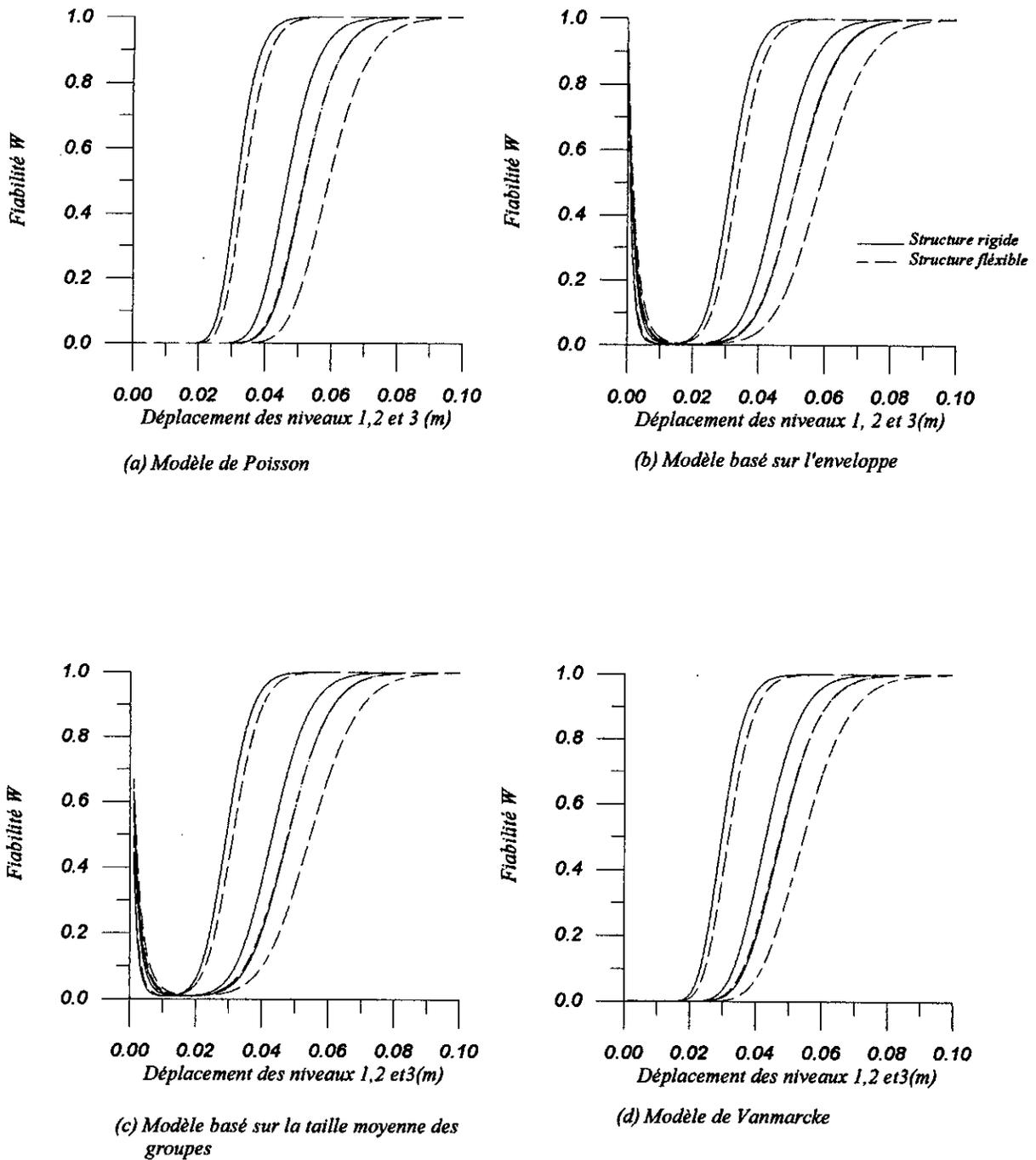
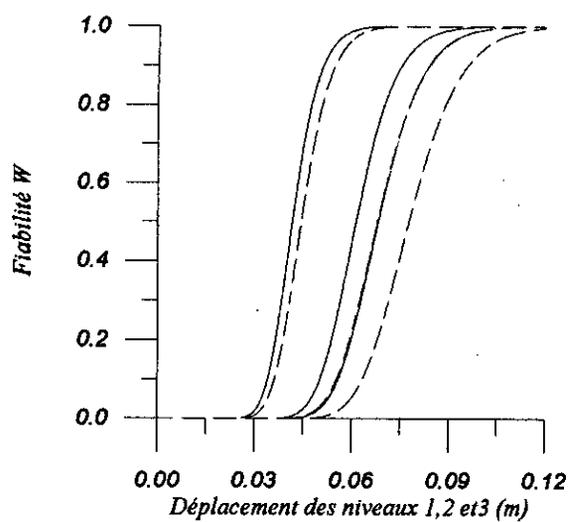
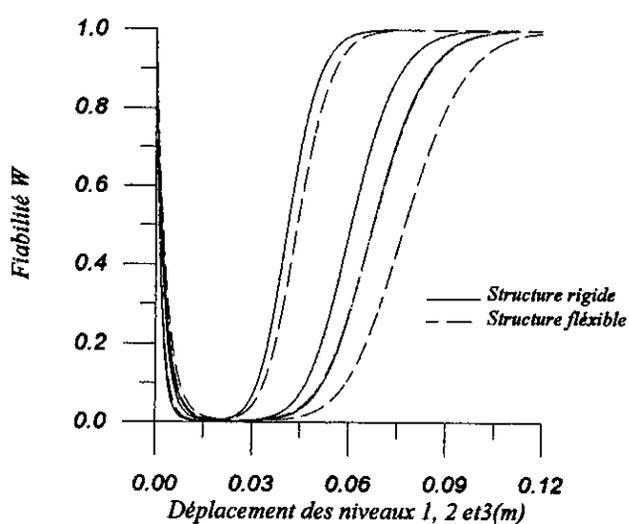


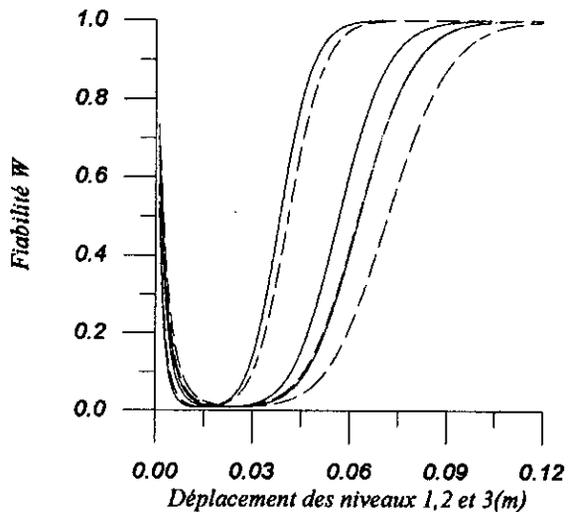
Fig.8.16 Effet de flexibilité sur la réponse aléatoire :
Cas d'un bruit blanc pur (Sol ferme)



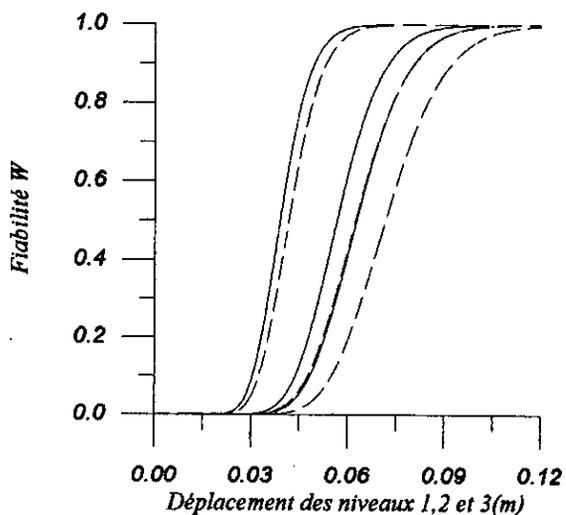
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

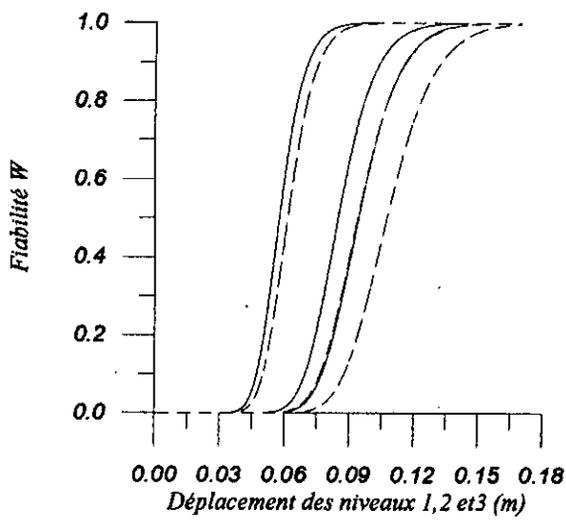


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

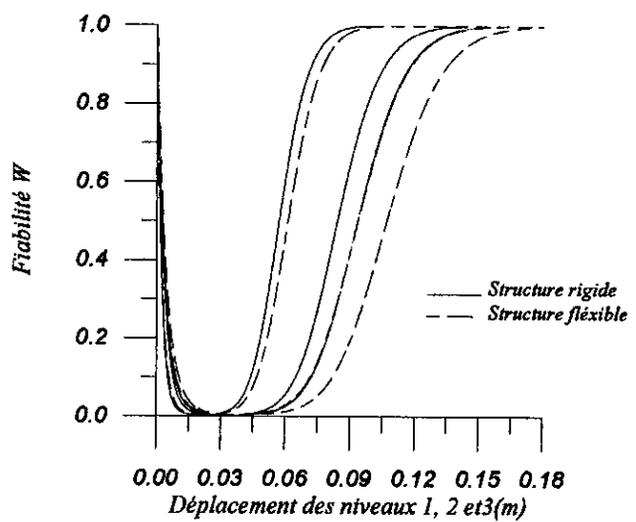


(d) Modèle de Vanmarcke

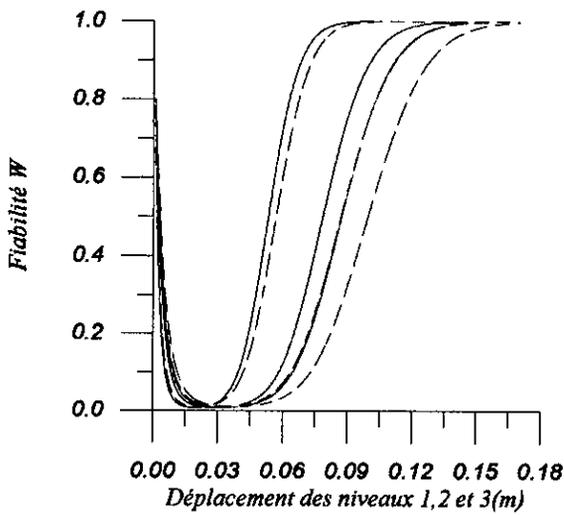
Fig.8.18 Effet de flexibilité sur la réponse aléatoire :
Cas d'un bruit blanc pur (Sol moyen)



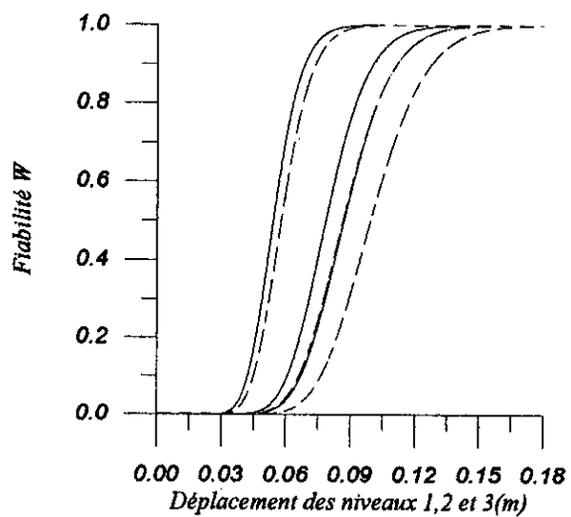
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

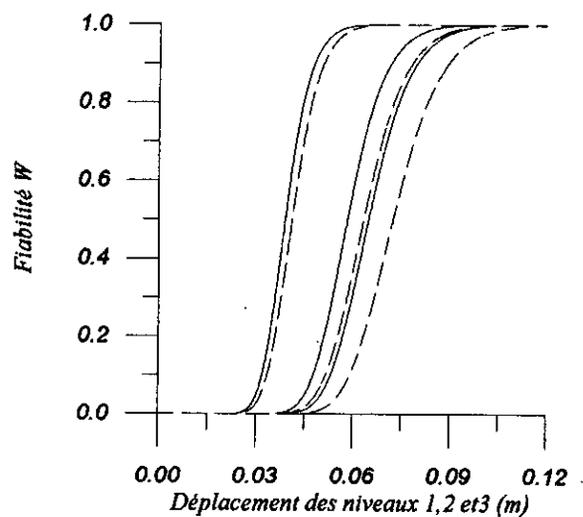


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

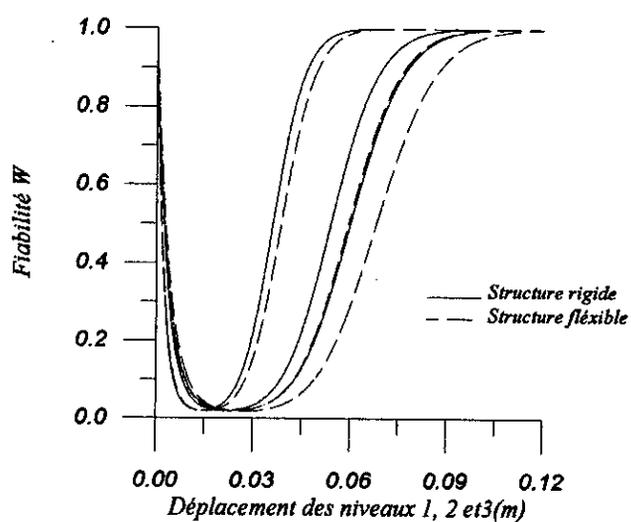


(d) Modèle de Vanmarcke

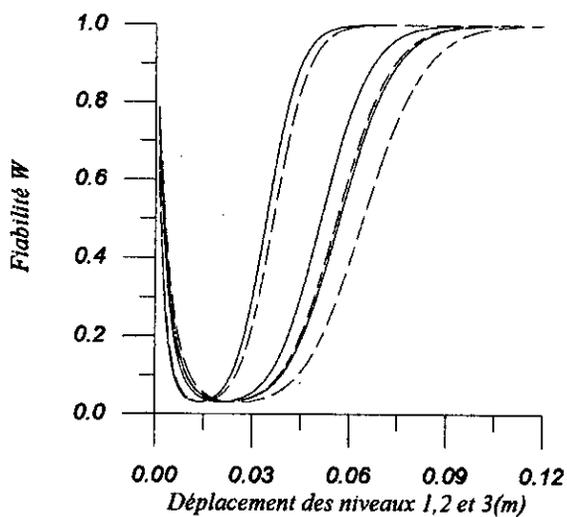
Fig.8.19 Effet de flexibilité sur la réponse aléatoire :
Cas d'un bruit blanc pur (Sol meuble)



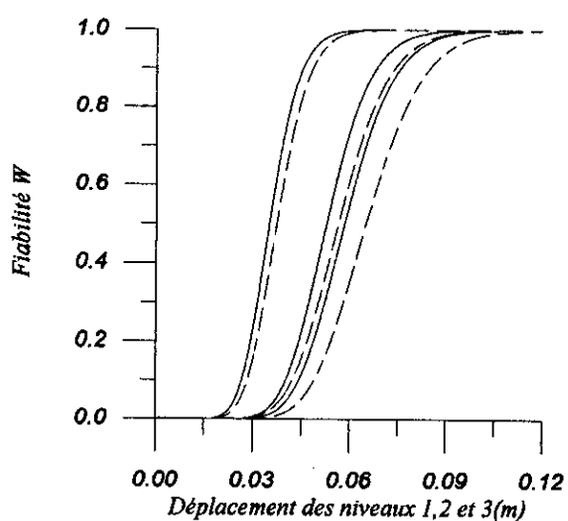
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

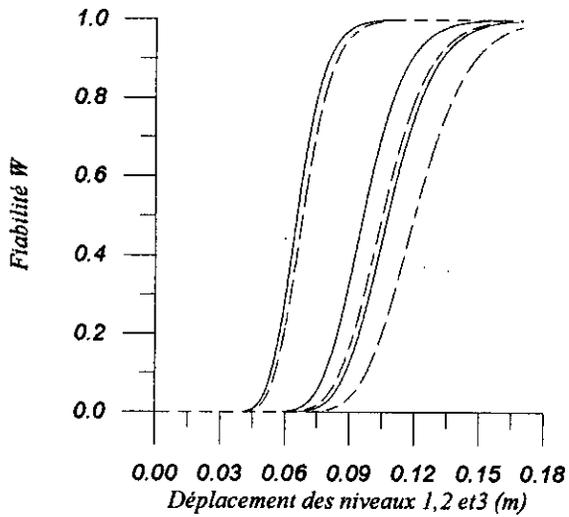


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

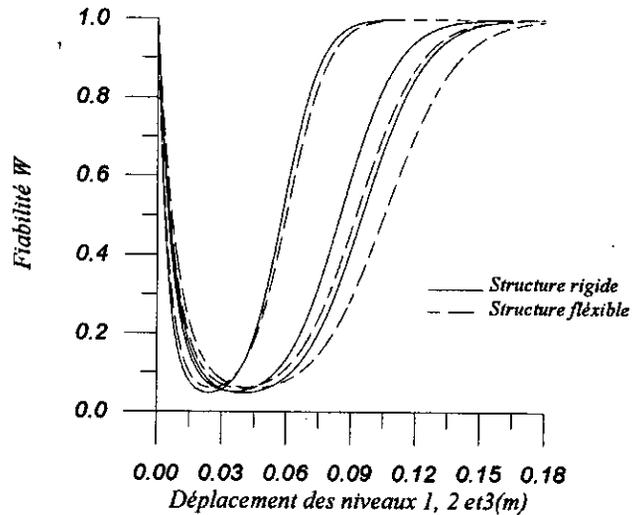


(d) Modèle de Vanmarcke

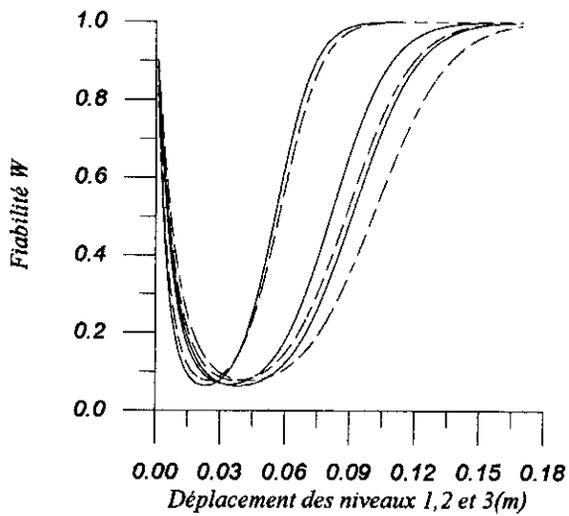
Fig.8.20 Effet de flexibilité sur la réponse aléatoire :
Cas d'un bruit filtré CP (Sol ferme)



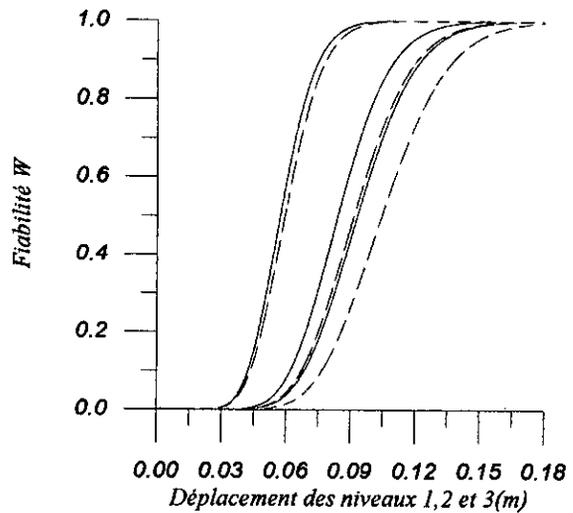
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

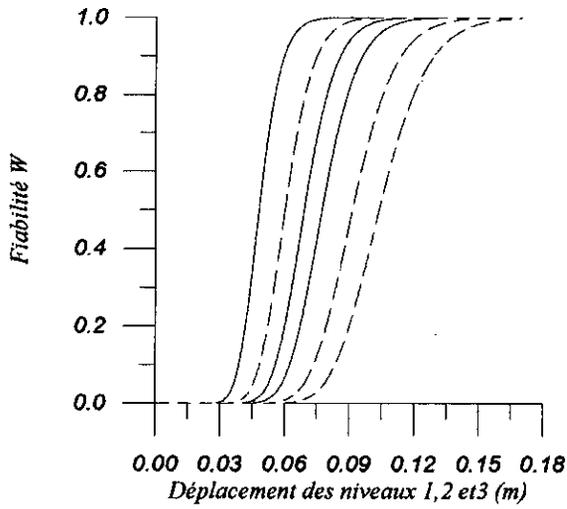


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

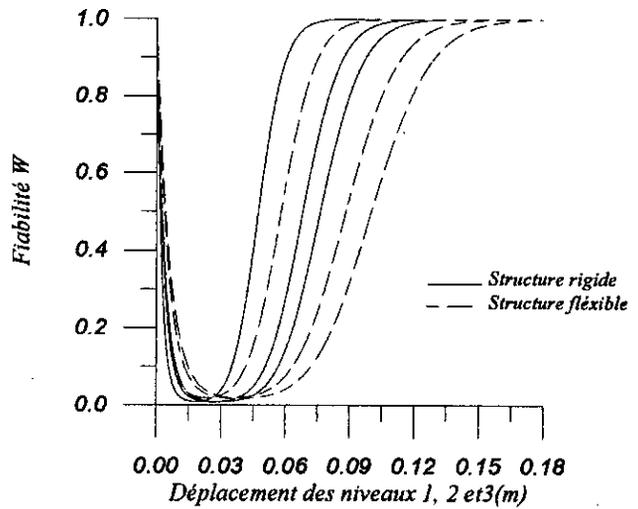


(d) Modèle de Vanmarcke

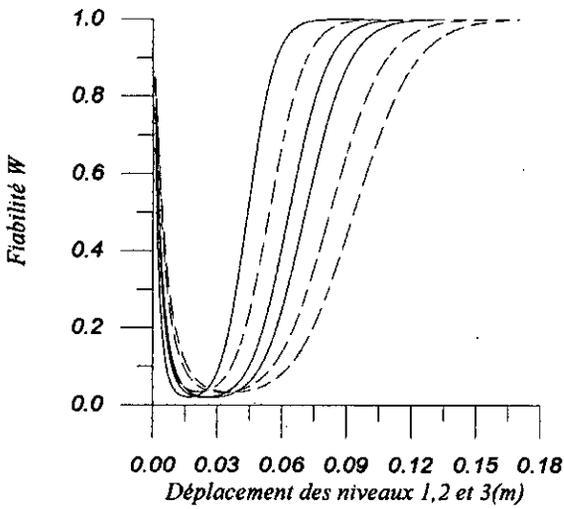
Fig.8.21 Effet de flexibilité sur la réponse aléatoire :
Cas d'un bruit filtré CP (Sol moyen)



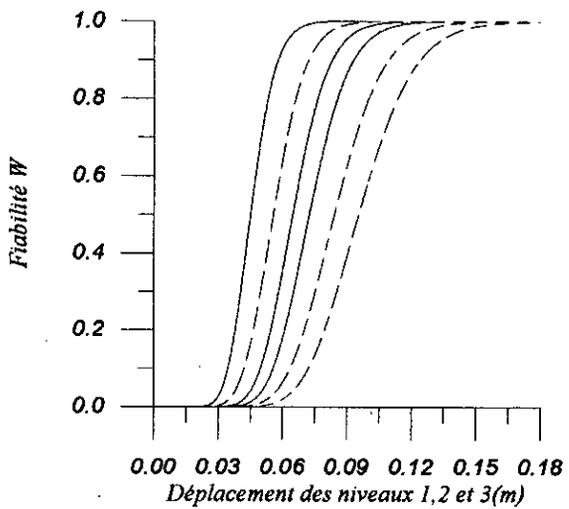
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

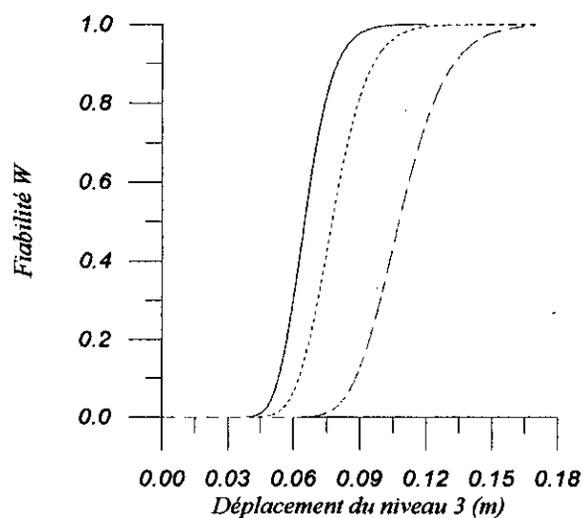


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

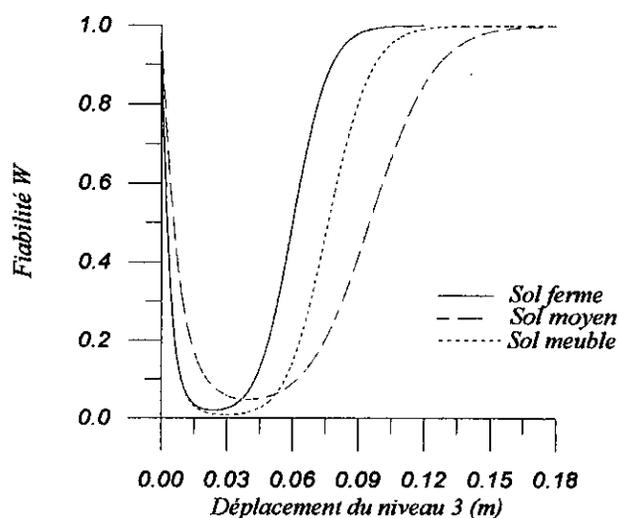


(d) Modèle de Vanmarcke

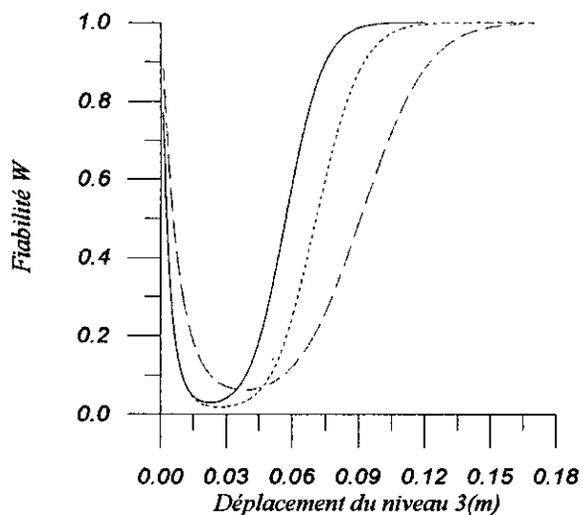
Fig.8.22 Effet de flexibilité sur la réponse aléatoire :
Cas d'un bruit filtré CP (Sol meuble)



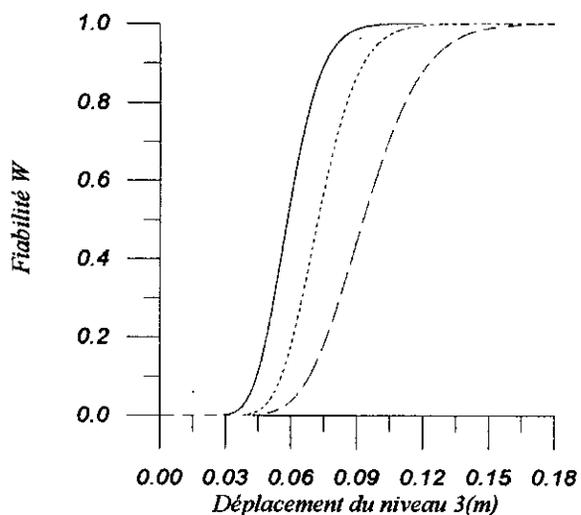
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe

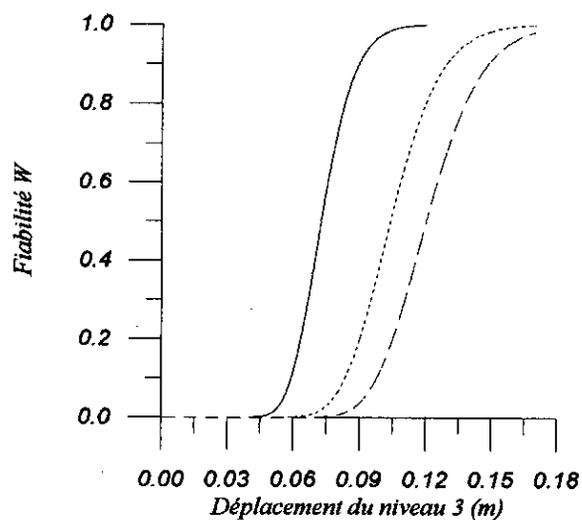


(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes

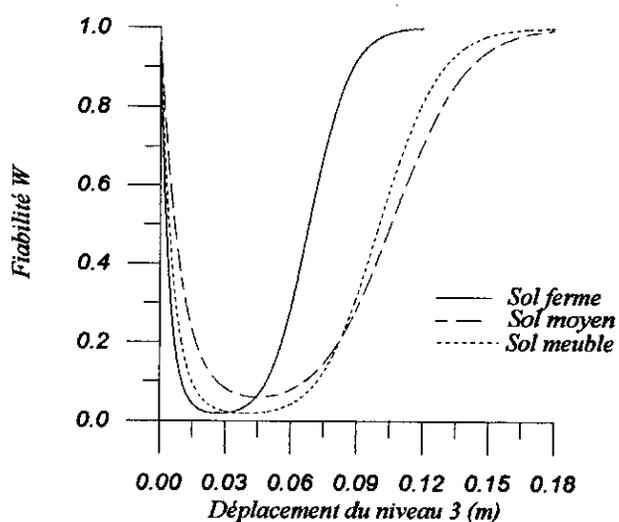


(d) Modèle de Vanmarcke

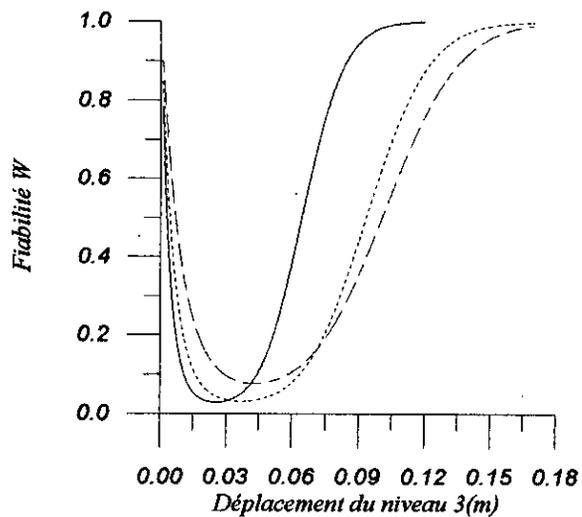
Fig. 8.23 Effet du sol sur la réponse aléatoire de la structure rigide:
Cas d'un bruit filtré CP



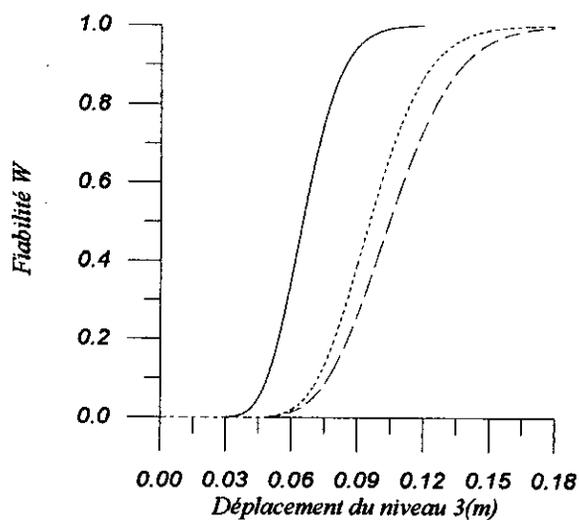
(a) Modèle de Poisson



(b) Modèle basé sur l'enveloppe



(c) Modèle basé sur la taille moyenne des groupes



(d) Modèle de Vanmarcke

Fig. 8.24 Effet du sol sur la réponse aléatoire de la structure flexible:
Cas d'un bruit filtré CP

9.CONCLUSION

9.1. CONCLUSION

N'est il pas plus réaliste de supposer que le chargement dynamique d'origine sismique est un processus incertain ? On parle alors de chargement dynamique aléatoire.

Une question que se pose tout ingénieur lors de son travail de conception des structures de génie civil amenées à rencontrer des sollicitations dynamiques au cours de leur existence.

Et si c'est le cas :

Comment y procéder ? Quel est le cheminement à suivre ? Quelles sont les hypothèses à formuler ? les modélisations à effectuer avec les justifications qui s'impliquent ? et les modèles qui nous est fournit par la théorie des vibration aléatoire appliquée aux structures de génie civil .

C'est la problématique qu'on s'est forcé de poser et d'exposer tout au long de ce travail.

L'approche probabiliste est intéressante dans le but ou elle convertie la sécurité(fiabilité) des structures à une mesure de probabilité à partir des caractéristiques statistiques de la réponse.

Toutefois en aucun cas, la présente étude n'a pour but de mettre en cause l'approche déterministe .Le choix d'utiliser une ou l'autre dépend essentiellement de la manière avec laquelle le chargement extérieur est définit.

A rappeler que l'approche probabiliste n'est rendu possible que par :

- Le développement actuel du génie sismique caractérisé par un perfectionnement des méthodes d'analyse et de calcul.
- L'amélioration de la précision et des connaissances sur le caractère des sollicitations sismiques exercées à la base des constructions .
- La précision des modèles mathématiques (schéma de calcul) des constructions, à fin qu'ils reflètent plus complètement et plus justement l'états et le comportement réel des structures soumises à des sollicitations sismiques.

Ces raisons bien qu'elles ont participés d'une manière efficace au développement de l'approche, elles n'ont finissent d'être des problèmes fondamentaux que pose aujourd'hui le génie sismique.

Par la suite, le problème du premier passage n'a reçu , à ce jour, de solution rigoureuse, même dans le cas le plus simple de la réponse linéaire à un bruit blanc ,

gaussien. De nombreuses solutions approchées existent toutefois et ont été discutées. Elles faisaient l'objectif principale du sujet..

Notons entre autre qu'il est intéressant de le compléter par d'autres travaux introduisant d'autres paramètres et prendre en compte d'autres considérations tel que :

- La non stationnarité des processus .
- La non linéarité des déformations.
- Le processus de Markov et la fiabilité conditionnelle.
- Les structures étendues dont l'excitation sismique n'est pas uniforme.

ANNEX

1. PROCESSUS DE GAUSS.

1. 1. variable aléatoire Gaussienne.

Une variable aléatoire est *Gaussienne* ou *Normale* si sa densité de probabilité peut se mettre sous la forme :

$$P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < x < +\infty$$

m et σ sont respectivement la moyenne et l'écart type de la distribution.

$$m = E(x) = \int x P_x(x) dx$$

$$\sigma^2 = E[(x-m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 P_x(x) dx$$

ces deux constantes caractérisent complètement la distribution Gaussienne.

1. 2. Variables aléatoires conjointement Gaussiennes :

Deux variables aléatoires X et Y ont une distribution Gaussienne conjointe si leur densité peut s'écrire

$$P_x(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho_{xy}^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xy} \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}$$

$$m_x = E(X)$$

$$m_y = E(Y)$$

$$\sigma_x^2 = E[(X-m_x)^2]$$

$$\sigma_y^2 = E[(Y-m_y)^2]$$

$$E[(X-m_x)(Y-m_y)] = \sigma_x\sigma_y\rho_{xy}$$

Ces cinq grandeurs sont les seules impliquées dans la densité de probabilité, elles la déterminent par conséquent complètement.

2. PROCESSUS ALEATOIRE GAUSSIEN :

Un processus stochastique $X(t)$ est dit Gaussien si les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement Gaussiennes pour toutes les valeurs t_1, t_2, \dots, t_n .

3. THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE :

Ce théorème établit que la distribution statistique de la somme de variables aléatoires, possédant la même loi de probabilité, tend asymptotiquement vers une distribution Gaussienne.

Le théorème de la limite centrale joue un rôle capital en théorie des fonctions aléatoires. Ceci est dû au fait que de nombreux phénomènes aléatoires résultent de la somme d'un très grand nombre de contributions individuelles de distribution parfois inconnue. Il est alors possible d'assimiler la distribution résultante à une loi normale si les contributions peuvent être considérées comme indépendantes.

De plus les processus Gaussiens jouissent de propriétés particulières permettant de résoudre certains problèmes insolubles ou difficilement solubles.

4. PROCESSUS DE POISSON :

Soit un système de points aléatoires représentant sur l'axe des temps l'occurrence d'un phénomène aléatoire (appel téléphonique, arrivée d'un client à une station service, accès d'un utilisateur à un ordinateur,...). Si le système de points est dépourvu de corrélation, c'est-à-dire si les apparitions des événements du phénomène aléatoires ne possèdent aucune relation statistique, le système est dit Poissonien.

On est avant tout intéressé par le nombre $N(t)$ de points dans l'intervalle $[0, t]$. Un tel processus est appelé processus de comptage et est en général caractérisé par ses fonctions de probabilités :

$$P_N(n, t) = P[N(t) = n]$$

$$P_N(n_1, t_1, n_2, t_2) = P[N(t_1) = n_1 \text{ et } N(t_2) = n_2]$$

M

La fonction de probabilité $P_n(t)$ est donnée par :

$$P_N(n, t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. W. CLOUGH and J. PENZIEN, "Dynamics of Structures", Mac Graw-Hill 1975.
- [2] DAVIDOVICI, "Génie parasismique"
- [3] DE COULOMB, "Théorie et traitement des signaux"
- [4] B. TILIOUINE, "Dynamique des structures tome 1 : Aspects Vibratoire", Gecotec
2000.
- [5] C. Y. YANG, "Random vibration of structures ", Université Delware 1985.
- [6] A. Preumont E, "Vibration aléatoire et analyse spectrale", Presse polytechnique
et universitaires Romandes 1990.
- [7] SVETLIKIJ, "Vibration aléatoire des systèmes mécaniques"
- [8] M. K. BERRAH M.K, "Cours de vibration aléatoire", Ecole Nationale Polytechnique.
Dépt. Génie Civil 1999.
- [9] B. C. LIN ,I. G. TADJBAKHSI and A. S. PAPAGEORGIO "Response of base-
isolations buildings to random excitations described by the CLOUGH-PENZIEN
specyral model ", Earthquake engineering and structural dynamiques. Vol 18.4962
1989.
- [10] Gabriel R. TORO and C. Allin CORNELL. , " Extremes Of Processes With Bimodal
Spectra", Journal of Engineering Mechanics Vol. 112, N°. 5, Mai 1986.
- [11] G. OLIVETO and A. SANTINI , " The Dynamic Response of Coupled Frame-Wall
Systems to Earthquake Excitations ", Eng. Struct., Vol. 8, Octobre 1986.
- [12] CHERFA , " Thèse Magister ", Ecole Nationale Polytechnique 1995.