

15/97

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Civil



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en génie civil*

Thème

**ETUDE DU COMPORTEMENT STATIQUE
LINÉAIRE ET NON LINÉAIRE DES SOLS
PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS**

Proposé et Dirigé par:

M^r :B.ZAGHLACHE

Etudié par :

**A.R.KHELLOU
M.BOUAM**

Promotion : Octobre 1997

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Civil



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en génie civil*

Thème

**ETUDE DU COMPORTEMENT STATIQUE
LINÉAIRE ET NON LINÉAIRE DES SOLS
PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS**

Proposé et Dirigé par:

M^r :B.ZAGHLACHE

Etudié par :

A.R.KHELLOU

M.BOUAM

Promotion : Octobre 1997

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

ملخص:

يهدف هذا المشروع إلى دراسة سلوك التربة الخطي واللاخطي في الحالة السكونية

بواسطة طريقة العناصر المنتهية اخذين بعين الاعتبار نموذج "دانكان" بالنسبة للسلوك

اللاخطي.

ABSTRACT

This work consist in a study of the static linear and non linear behaviour of soil using the finite elements method where we take in a consideration the DUNCAN 's model in the non linear behaviour .

RESUME

Le présent travail consiste à étudier le comportement statique élastique linéaire du sol par la méthode des éléments finis en utilisant le modèle de « DUNCAN » pour le cas non linéaire .



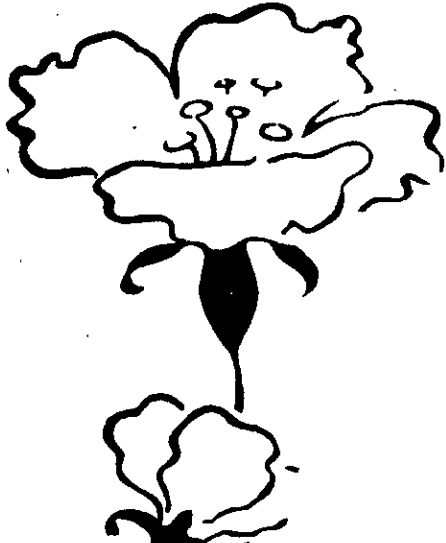
A :

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail

*Ma très chère mère qui a tant
souffre pour moi
Mon très cher père
Mes frères et mes soeurs
Tous les membres de ma famille
Mes amis surtout DJAMEL
ABDELHAKIM
Et a tout ceux qui me sont chers.*

A. REZZAK



DEDICACE

Je dédie ce modeste travail A :

*Ma très chère mère qui a tant souffert pour
moi*

Mon très cher père

Mes frères et mes soeurs surtout

ABDELHAKIM

Tout mes amis

particulièrement: LARBI,

KHALED ET MOUHAMMED.

Sans oublier ceux de R.U.B.A.

MEBAREK

REMERCIEMENT

Nous tenons a remercier tout particulièrement pour l'intérêt qu'il a témoigné à l'égard de notre travail et pour les précieux conseils et encouragements notre promoteur : **M^r B.ZAGHLACHE**

Nous remercions également :

Les enseignants de l'E.N.P. ayant contribué à notre formation de polytechniciens

Les étudiants de poste graduation de l'E.N.P. particulièrement :

M^r :K.BERBRA , **M^r : Z. TI DJANI**.de leurs aides et leurs conseils .

Que tout nos amis et ceux qui nous ont aidé de près ou de loin trouvent ici l'expression de nos remerciements et profondes reconnaissances.



SOMMAIRE



Chapitre I : Introduction générale..... 1

Chapitre II : Etude du comportement élastique linéaire des sols

II.1- Introduction.....	7
II.2- Etude du comportement du sol.....	7
II.3- Lois de comportement en élasticité linéaire.....	8
II.4- Etude expérimentale.....	13
II.5- Conclusion.....	15

Chapitre III : Etude du comportement non linéaire des sols

III.1- Généralités.....	17
III.2- Corps élastoplastiques.....	18
III.3- Critères de plasticité.....	21
III.4- Modèle de DUNCAN.....	26

Chapitre IV: Méthode des éléments finis

IV.1- Introduction.....	33
IV.2- Historique.....	34
IV.3- Différentes formulations de la: M.E.F.....	35
IV.4- Formulation intégrale.....	44

Chapitre V: Traitement numérique

V.1- Introduction.....	49
V.2- Intégration numérique.....	49

V.3- Résolution des systèmes d'équations linéaires.....	
V.4- Résolution des systèmes d'équations non.....	56
linéaires	

Chapitre VI : Programme: M.E.F.

VI.1- Introduction.....	63
VI.2- Description du programme : M.E.F.....	63
VI.3- Fonctionnement du programme : M.E.F.....	64
VI.4 Organigrammes généraux.....	68

Chapitre VII : Application

VII.1- Comportement linéaire.....	78
VII.2- Comportement non linéaire.....	81
VII.3- Chargement déchargement.....	84
VII.4 Interprétation des résultats.....	84

Chapitre VIII : Conclusions et recommandations..... 88

Bibliographie

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Le sol servant à supporter des ouvrages, il joue un rôle déterminant dans la tenue de ces derniers. D'importants projets ont été réalisés dernièrement dans l'utilisation du sol en génie civil où les techniques d'implantation et de réalisation ont évolué tel que la construction des routes, les ponts, les barrages ect.

Cette évolution se produit dans l'étude des propriétés physiques et mécaniques de ce matériau complexe. Les recherches concernant ces propriétés deviendront utiles grâce à des synthèses toujours renouvelés.

La **Rhéologie** est la science qui s'intéresse aux propriétés des corps; c'est-à-dire les liens entre l'histoire des contraintes et les déformations à l'aide des **lois rhéologiques** dont leur connaissance n'est pas encore satisfaisante pour ce matériau **polyphasiques** qui est le sol.

Pour tenir compte des actions relatives des phases: **solides**, **liquides** et **gazeuses**, on doit souvent se limiter à une notion élémentaire, qui est très fructueuse; c'est la **pression interstitielle** où le rôle de l'eau dans ce matériau **hétérogène** et **anisotrope** n'assure pas sa **continuité** mécanique.

La grande utilité des notions de **surconsolidation** et de **compactage** ne sont que des aspects particuliers de l'écroutissage.

Le **comportement** d'un ouvrage du point de vue **statique** ou **dynamique** dépendra toujours de la nature du sol sur lequel il est destiné à être bâti.

On entend par comportement statique d'un ouvrage sous l'action d'un système de sollicitations, la tenue de l'ouvrage lorsque la variation des sollicitations en fonction du temps se fait avec des **vitesse suffisamment faibles** pour ne pas engendrer des forces inertielles non négligeables. Dans le cas contraire, le comportement sera considéré comme dynamique.

Pour la première catégorie de sollicitations, on a par exemple: Les charges permanentes, les surcharges classiquesetc.

Dans la deuxième catégorie, on trouve: Les charges dues aux chocs, les tremblements de terre, les charges dues aux vibrations des machines ...etc.

La transmission des sollicitations de l'ouvrage au sol ou bien, du sol à l'ouvrage se fait par l'intermédiaire des fondations.

Il existe plusieurs types de fondations, mais généralement il sont classées en deux grandes catégories:

Les fondations **superficielles**.

Les fondations **profondes**.

Parmi les fondations superficielles on distingue : Les semelles (isolées ou filantes) , les radiers ...etc.

Parmi les fondations profondes on trouve: Les puits et les pieux.

Le choix d'un type de fondation pour un ouvrage qui est soumis à un système de sollicitations donné dépend essentiellement de la nature du sol. Il en ira donc de même pour son coût, les fondations représentent une part très appréciable du coût de l'ouvrage. Par conséquent, la compréhension du rôle du sol et plus précisément, l'étude du comportement du sol (vue que c'est surtout lui qui intervient dans les calculs) est nécessaire.

Le comportement d'un sol dépend essentiellement des phases : Solides , liquides et gazeuses qu'il contient et de leurs **interactions**.

Un **modèle** susceptible de prendre en considération ces trois phases, est très difficile à mettre en oeuvre, vu que la complexité des phases elles mêmes et de leurs interactions et même si on y parvient, il sera difficilement maniable et utilisable.

Dans la pratique, les modèles les plus utilisés supposent que le sol soit:

*Un matériau monophasique, continue, homogène et isotrope.

Ou bien:

*Un matériau biphasique saturé.

Dans notre étude nous intéresserons au premier cas.

Diverses lois de comportement du sol (monophasique) sont présentés dans la littérature. La détermination du comportement se fait dans le cadre d'une théorie donnée à partir d'un nombre de résultats expérimentaux.

Le modèle ainsi déterminer permet d'évaluer le comportement du sol soumis à des chemins de contraintes quelconques qui sont généralement plus complexes que ceux ayant servi à l'établir.

Le modèle doit être formulé avec des contraintes effectives puisque le comportement du sol est régi par ces contraintes.

L'examen de ces résultats expérimentaux montre que:

Pour des déformations (linéaires ou angulaires) faibles, le sol a un comportement **élastique linéaire**. Tant que ces déformations restent inférieures à une limite que l'on peut estimer à: 10^{-04} . On peut alors concéder cette valeur comme étant une limite d'un domaine élastique linéaire conventionnel à l'intérieur duquel le comportement du sol reste linéaire.

A partir d'une contrainte suffisamment élevée, il y a apparition d'une déformation résiduelle si on effectue un déchargement. Dans ce cas, le comportement du sol est non linéaire.

Pour le comportement linéaire, on a les types des modèles qui sont les suivants:

Modèle élastique de **HOOKE** .

Modèle d'**EUCKLID**.

Modèle de **VOIGHT**

Modèle de **KELVIN**

Et pour le comportement non linéaire, on trouve les modèles suivants:

Modèle de **DUNCAN**

Modèle plasto élastique

Modèle plasto visco- élastique

Modèle de **BINGHAM** ...ect.

Enfin, pour notre travail, nous intéresserons principalement au:

I : Comportement statique **linéaire** du sol (en utilisant le modèle de **HOOKE**).

II : Comportement statique **non linéaire** du sol (en utilisant le modèle de **DUNCAN**).

Et nous essayerons de mettre en évidence l'influence de la loi du comportement utilisée.

Une étude non linéaire du sol par les méthodes classiques de la mécanique des milieux continus est très difficile voir parfois impossible (multicouches, surfaces irrégulières ... etc.). Il devient donc nécessaire d'opter pour des nouvelles méthodes d'analyse plus puissantes dont la plupart sont numériques.

La méthode des éléments finis est la plus largement répondue. C'est elle que nous allons utiliser dans notre travail. Une de ses avantage principaux est sa capacité de prendre en compte les hétérogénéités résultantes: soit des variations des caractéristiques du sol, soit d'une non linéarité plus prononcée pour certaines zones (angles des fondations) et elle

s'applique parfaitement aux milieux hétérogènes d'après les théories de la mécanique des milieux continus.

En résumé, cette étude est développée comme suit:

Chapitre: I

Une brève introduction situant le problème abordé et définissant les objectifs de la recherche.

Chapitre: II

Une étude du comportement élastique linéaire du sol avec différentes équations de l'élasticité plane.

Chapitre: III

Une étude du comportement non linéaire du sol. Les critères classiques de plasticité et les différentes formules utilisées dans le modèle non linéaire de **DUNCAN** sont présentés dans ce chapitre.

Chapitre: IV

Une présentation de la méthode des éléments finis avec différentes formulations.

Chapitre: V

Les différentes méthodes utilisées dans la résolution des systèmes des équations linéaires et les systèmes non linéaires.

Chapitre: VI

Les programmes élaborés dans le cadre de cette étude.

Chapitre: VII

Un certain nombre d'applications avec différents résultats obtenus.

Chapitre: VIII

Quelques conclusions et recommandations d'après cette étude.

CHAPITRE 2

ÉTUDE DU COMPORTEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE DES SOLS.

COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE DES SOLS

II.1) INTRODUCTION:

La mécanique du sol repose bien souvent sur des études et des expériences approximatives en ce qui concerne le comportement du matériau. Elle s'intéresse bien aux deux aspects: contrainte et déformation pour aborder le problème de la modélisation du comportement du sol sous chargement quelconque.

L'étude du comportement est envisagée tant du point de vue expérimental que du point de vue de la modélisation théorique.

Pour le comportement élastique linéaire du sol, nous aborderons cette étude sous l'aspect bidimensionnel de sollicitations dans le cadre de la théorie d'élasticité linéaire et à partir d'une approche en contraintes effectives.

II.2) ETUDE DU COMPORTEMENT DU SOL:

Cette étude est obtenue si partant d'un état d'équilibre caractérisé par un champ de contraintes: σ , et un champ de déformation: ϵ , il est possible de déterminer le nouvel état de déformation obtenu après une application d'un incrément de contraintes: $d\sigma$.

Le comportement du sol étant un résultat liant le tenseur des contraintes: σ_{ij} le tenseur des déformations: ϵ_{ij} et leurs incréments: $d\sigma_{ij}$ et $d\epsilon_{ij}$.

Pour le comportement linéaire du sol, ce résultat est obtenu dans le cadre de la théorie d'élasticité linéaire.

Ce pendant, en raison de la complexité de description de ce comportement, une approche plus expérimentale et plus pragmatique est souvent employée en mécanique du sol. Cette approche est un substitut au modèle théorique que constitue la loi de comportement.

A partir d'un petit nombre de résultats expérimentaux, le modèle ainsi déterminé permet d'évaluer le comportement du sol soumis à des chemins des contraintes quelconques tels que ceux suivis in situ.

Ces chemins sont généralement plus complexes que ceux ayant servi à établir le modèle, et pour que ce modèle soit totalement valable, il doit pouvoir être soumis à des chemins de contraintes différents.

II.3) LOIS DE COMPORTEMENT EN ELASTICITE LINEAIRE:

II.3.1) INTRODUCTION:

Tout corps solide est à une certaine limite susceptible de se comporter d'une manière élastique, en d'autres termes il peut reprendre sa forme et sa taille initiale après que les forces qui provoquent le chargement cessent d'agir, éventuellement c'est le cas où des chargements sont importants.

Dans la théorie d'élasticité on a supposé que le matériau est continu, homogène et isotrope et que les composantes du vecteur des déplacements sont très petites pour rester dans le domaine de petites déformations.

La théorie d'élasticité est l'une des branches les plus vigoureuses des milieux continus déformables.

II.3.2) LES LOIS DE COMPORTEMENT:

Les milieux, surtout solides ont un comportement tellement complexe qu'il n'est pas possible de mettre au point une équation même un système d'équations qui décrit ce comportement compte tenu de tout les paramètres intervenant.

* SOLIDE ELASTIQUE HOOKEEN IDEAL:

C'est un matériau idéal souvent utilisé dans le calcul des structures, il est supposé suivre la loi de **HOOKE** qui est pour un état de contraintes uniaxial prend la forme suivante:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

Et pour des situations de cisaillement pur, la loi de **HOOKE** prend la forme similaire suivante:

$$\tau = \gamma \cdot G$$

Tel que:

τ : Contrainte de cisaillement .

γ : Déformation angulaire .

G : Module de cisaillement .

II.3.3) LES EQUATIONS GOUVERNANTES:

II.3.3.1) LES EQUATIONS D'EQUILIBRE:

L'état de contrainte en un point du milieu continu est caractérisé par le tenseur des contraintes suivant:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Tel que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

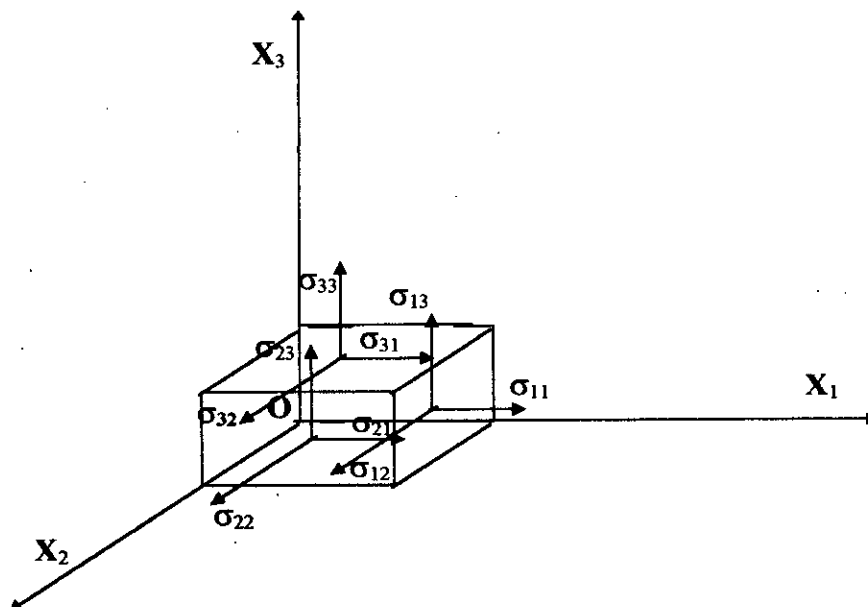


Fig 11.1: Etat plan de contraintes.

L'équation d'équilibre statique en un point du milieu est comme suit:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad i, j = 1, 3$$

Dans lesquelles:

f_i : Représente la composante du vecteur des forces volumétriques dans la direction: i

$\sigma_{ij,j}$: La dérivée de σ_{ij} par rapport à: j.

En mécanique du sol on a:

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = -\gamma$$

Dans le cas bidimensionnel, les équations d'équilibre se ramènent à:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + f_1 = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + f_2 = 0 \end{cases}$$

IL3.3.2) LES EQUATIONS DE COMPATIBILITE:

Il existe six composantes de déformations :

$$\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12} = \epsilon_{21}, \epsilon_{13} = \epsilon_{31}, \epsilon_{23} = \epsilon_{32}$$

Et trois composantes de déplacements:

$$u_1, u_2, u_3$$

Il est possible de donner trois de déplacements suffisamment dérivables: u_i pour déduire les six fonctions: ϵ_{ij} mais le contraire arbitrairement est impossible (déduire les : u_i à partir des : ϵ_{ij}).

Il devrait par conséquent exister trois relations liant les: ϵ_{ij} d'un point de vue mathématique pour que le système différentiel soit intégrable.

Les conditions d'intégrabilité assurent l'existence du champs de déplacement et son unicité. En fait, les déplacements sont obtenus à des constantes près qui sont déterminées par des conditions aux limites.

IL.3.3.3) LES EQUATIONS DEFORMATION - DEPLACEMENT:

L'état de déformation : $[\epsilon]$ en un point est défini tel que:

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Les relations déformations - déplacements, pour la théorie d'élasticité linéaire sont données par les équations suivantes:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

IL.3.3.4) LES EQUATIONS CONTRAINTES - DEFORMATIONS:

Pour les matériaux isotropes, la loi de HOOK généralisée s'écrit comme suit:

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{pp} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \epsilon_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} = -(\lambda / 2\nu (3\lambda + 2\mu)) \sigma_{pp} \cdot \delta_{ij} + (1 / 2\nu) \sigma_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} = -(\nu / E) \sigma_{pp} \cdot \delta_{ij} + ((1 + \nu) / E) \sigma_{ij}$$

Tel que :

δ_{ij} : Symbole de CRONECKER.

λ et μ : sont des coefficients de LAME , ils sont donnés en fonction de:
E et ν comme suit:

$$\lambda = (\nu \cdot E) / ((1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu))$$

$$\mu = G = (E / 2 (1 + \nu))$$

Avec :

ν : Coefficient de POISSON.

E : Module de YOUNG.

G : Coefficient de cisaillement.

IL4) ETUDE EXPERIMENTALE:

Cette approche consiste à anticiper le type de chargement auquel va être soumis en place un élément de sol lors de la sollicitation. Ce type est reproduit au laboratoire d'une manière aussi fidèle que possible, compte tenu des moyens expérimentaux qu'il est possible de concevoir.

Le comportement du sol est caractérisé alors, par une courbe: effort - déformation qui est directement utilisée pour rendre compte du comportement du sol en place (Fig.II.2) .

La limitation de cette approche en contraintes totales apparaît clairement dès que les conditions de drainage deviennent complexes.

En généralisera cependant ces résultats pour donner des formulations générales de lois de comportement.

*** CHARGEMENT QUASI - STATIQUE MONOTONE:**

La figure II.2 représente des différentes courbes: Efforts - déformations obtenues à l'appareil triaxial par trois chemins de contraintes différents:

- *Compression isotrope (Courbe A).
- *Essai à déformation latérale nulle (Courbe B).
- *Essai à contrainte radiale constante (Courbe C).

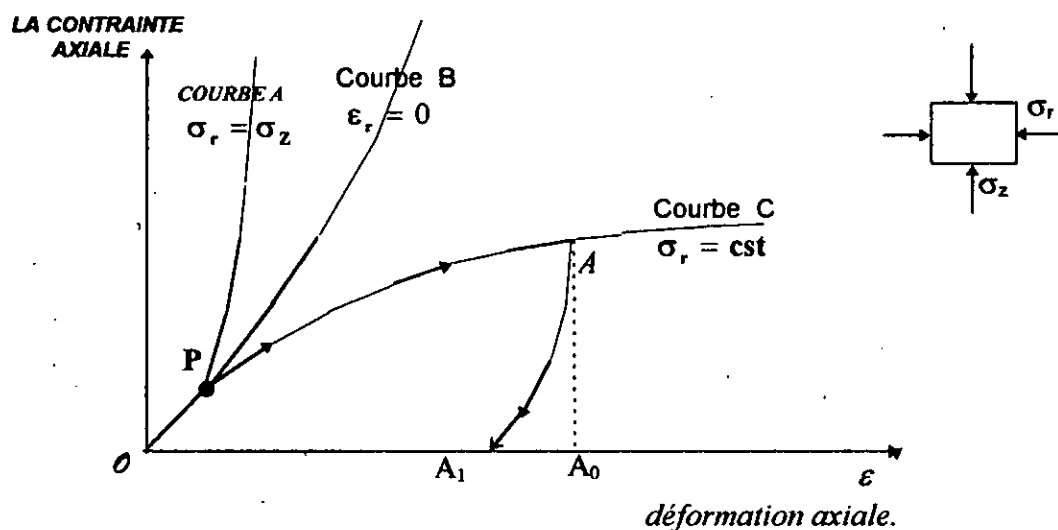


Fig.11.2: Courbe effort déformation chargement quasi - statique monotone.

L'examen de ces résultats expérimentaux montre que:

* Il existe un domaine de faible déformation pour lequel la relation entre la contrainte appliquée et la déformation associée est linéaire:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

Et dans ce domaine, le chemin de déchargement est confondu sur le chemin de chargement, donc le sol a un comportement élastique linéaire.

* Au delà d'un certain seuil de contrainte, et quelque soit le chemin de contraintes suivi le comportement du sol cesse d'être linéaire.

Cependant, la non linéarité n'exclurait pas à priori l'hypothèse d'un comportement élastique.

* A partir d'une contrainte suffisamment élevée, (Point: 'A' sur la courbe: 'C') il y a apparition d'une déformation résiduelle si on effectue un décharge de l'échantillon .On remarque qu'il y a un écrouissage de cette échantillon.

En 'A' , la déformation est donc la somme d'une déformation élastique: 'A₀ A₁', récupérable lors d'une décharge et une déformation irréversible : 'OA₀' appelée déformation plastique , le comportement du sol dans ce cas est dit élastoplastique.

* Pour certains trajets de chargement, (Courbe: 'C') la déformation devient très importantes pour une valeur finie de contrainte appliquée, le sol atteint un état de rupture.

II.5) CONCLUSION:

Sous un chargement quasi - statique monotone, le comportement du sol est caractérisé par un domaine d'élasticité variable au cours du chargement et au delà duquel apparaissent des

déformations plastiques irréversibles. Pour certains chemins de contraintes, le sol peut atteindre un état de rupture.

D'après les résultats expérimentaux, le sol ne peut être représenté par un modèle élastique linéaire, tout au moins sur une plage de déformations étendues.

L'étude du comportement du sol dans son domaine d'élasticité cependant est importante car il existe une gamme de problèmes pour lesquels ce modèle est valable: C'est le cas de vibrations des massifs des machines bien conditionnées, des sollicitations sismiques de faible amplitude comme celle engendrés lors des essais géophysiques.

$$\bar{\sigma}_v = \bar{\sigma}_0$$

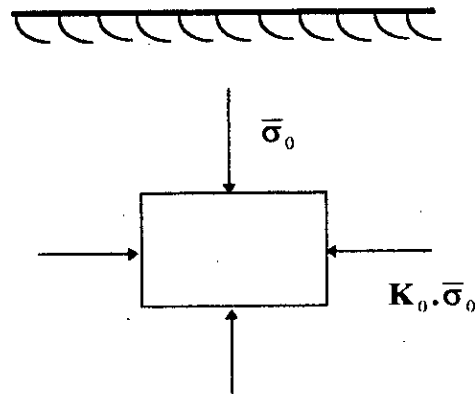


fig.11.3

Dans le cas d'une sollicitation unidirectionnelle, la relation contrainte - déformation se réduit à une relation de proportionnalité dont la constante est le module de déformation.

Pour la sollicitation de cisaillement simple, (Figure: 3), on a: G , ν et K_0 (K_0 : est coefficient de poussée de terre au repos) sont des constantes.

CHAPITRE 3

ETUDE DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DES SOLS

ETUDE DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DES SOLS

III.1) GENERALITES:

Le comportement de chaque type de sol dépend de différents facteurs: La densité relative, le teneur en eau , la structure du sol, les conditions de drainage , l'état de contraintes considéré, la durée de charge,...etc.

Il est possible de tenir en compte de ces valeurs, si on choisit les conditions des essais similaires aux conditions du site correspondantes et dans ce cas seul, les résultats représentent vraiment celles du site.

Dans un grand domaine de variation des contraintes, le comportement du sol est nonlinéaire et dépend de la valeur de la pression latérale utilisée dans les essais.

C'est pour cela, et à cause de la variation des facteurs décrites précédemment d'un sol à un autre et dans le même sol, il est difficile d'obtenir un seul modèle décrivant ce comportement.

Notre objet n'est pas de faire la synthèse de tout les comportements non linéaires, mais nous étudierons un modèle hyperbolique dit: modèle de **DUNCAN** ou les sollicitations sont supposées unidirectionnelles.

III.2) LES CORPS ELASTOPLASTIQUES:

Pour la simplicité, on se place dans le cas où le tenseur des contraintes peut être défini par un seul paramètre mécanique: σ , et le tenseur de déformation par un seul paramètre géométrique: ε , l'état de volume étudié est représenté par un point de coordonnées (σ, ε) .

III.2.1) DEFINITION:

Un corps est dit avoir un comportement élastoplastique quand au delà d'un certain niveau de chargement, il présente des déformations réversibles (élastiques) et les déformations irréversibles (élastoplastiques).

La considération d'un corps élastoplastique non linéaire se fait en excluant l'influence du paramètre temps.

$$d\varepsilon^t = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

III.2.2) TYPE DES CORPS ELASTOPLASTIQUES:

a) LES CORPS ECROUISSABLES:

Entre les points: O et A, (figure III.1), les déformations sont élastiques, lorsqu'on dépasse cette limite d'élasticité, on constate que la déformation continue de croître, le point représentatif de l'état du corps progresse de: A vers: B. Si l'on décharge alors l'élément subit une déformation plastique irréversible: OB₀.

Lors d'un nouveau chargement, on décrit la droite: B₀B qui est parallèle à la droite: OA tant se passe comme si la limite élastique du matériau avait été relevé, le corps s'est écrouit.

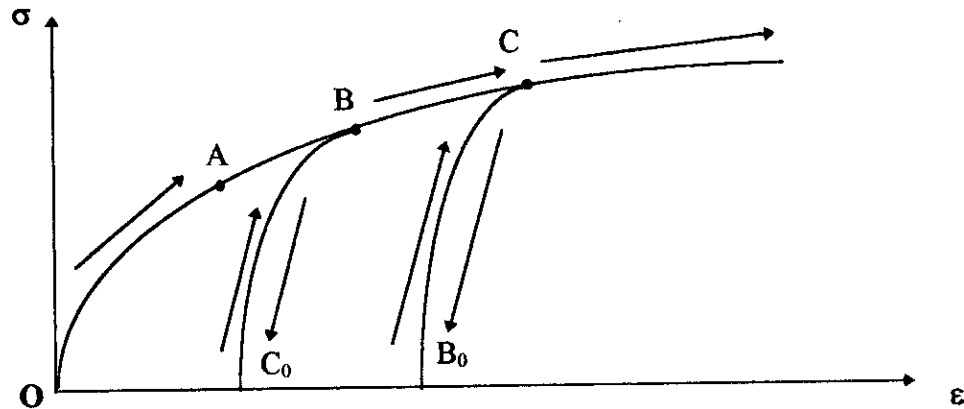


Fig.111.1: Les corps écrouissables.

b) LES CORPS ELASTOPLASTIQUES:

Sur la **figure: III.2**, on a schématisé le comportement d'un corps élastoplastique parfait c'est à dire, non écrouissable. La limite d'élasticité qui est représentée par le point: A , ne peut être dépasser.

Pour cette valeur de contrainte, le matériau présente un écoulement plastique sous une contrainte constante.

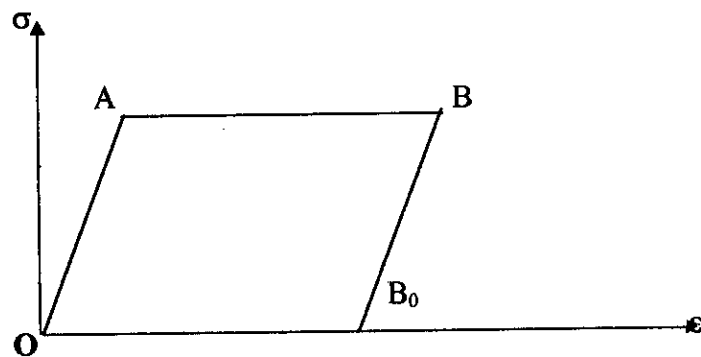


Fig.111.2: Les corps élastoplastiques parfaits

c) LES CORPS RIGIDES PLASTIQUES:

Pour ce type des corps élastoplastiques, (Figure:III.3), les déformations élastiques du matériau sont nulles, le corps reste rigide tant que l'on atteint pas le point: A à partir duquel se manifeste l'écoulement plastique sous contrainte constante.

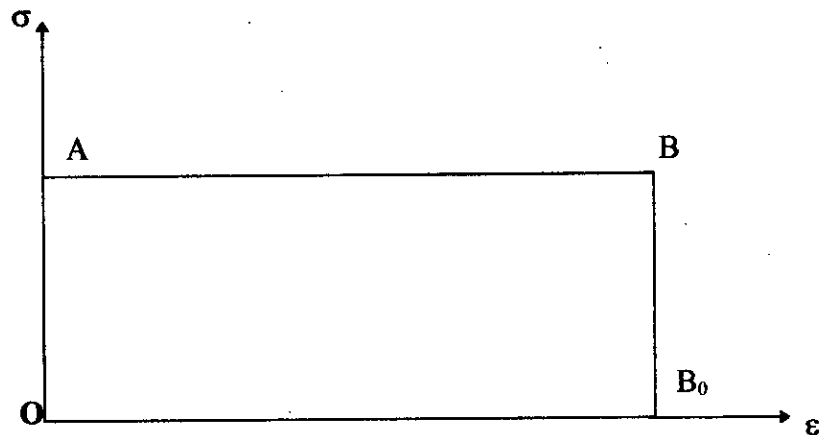


Fig.111.3 :Les corps élastoplastiques.

*** CONCLUSION:**

D'une façon plus générale, la définition d'un corps élastoplastique parfait dans le cas où l'état de contrainte et de déformation d'un élément du corps dépendent de plus d'une variable, cet état est représenté par le point: $F(\sigma_{ij})$ tel que:

σ_{ij} : Sont les paramètres qui caractérisent l'état de contrainte.

F : est une fonction connue s'appelle, si elle est nulle, **critère de plasticité**.

Dans l'espace de: n dimensions , tel que : $n_{max} = 6$, on admet qu'il existe un domaine ouvert d'élasticité limite par une surface frontière dite: **surface limite** qui n'appartient pas à ce domaine et qui a pour équation: $F(\sigma_{ij}) = 0$.

L'écoulement se produit si: $F(\sigma_{ij}) > 0$, et il s'arrête si: $F(\sigma_{ij}) \leq 0$.

L'expérience montre que:

- ◆ F: Ne dépend que des grandeurs de contraintes principales et non de leurs orientations.
- ◆ La déformation se fait sans changement du volume.

Pour cela, plusieurs critères de plasticité ont été initialement développés pour les métaux et ensuite utilisés pour les sols.

III.3) CRITERES DE PLASTICITE:

La fonction: **F** citée précédemment décrit dans l'espace des contraintes - déformations une surface dite: **Surface d'état limite** dont la projection dans le plan des contraintes est une courbe dite: **Courbe d'état limite**.

Dans ce qui suit, pour les critères de plasticité, on va concéder que: **F** est définie sur l'espace des contraintes principales, donc: $n = 3$.

III.3.1) CRITERE DE TRESCA:

En 1964; **TRESCA** a montré, après des essais sur le Plomb que la plasticité arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteint une certaine limite. On peut donc écrire:

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2K$$

Tel que:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Sont des contraintes principales avec: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

K : Est une constante, pour le sol, K représente la cohésion.

Dans ce critère, la contrainte principale intermédiaire n'intervient pas dans le calcul.

Dans l'espace de contrainte: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la surface définie par cette fonction de charge est un prisme d'axe: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, et à base hexagonale régulière. (Figure: III.4.a et III.4.b)

III.3.2) CRITERE DE MOHR - COULOMB:

Le critère de **MOHR - COULOMB** est couramment utilisé surtout pour les sols cohésifs (Possédant les deux composantes de cisaillements: C et ϕ).

En termes de contraintes principales, le critère s'écrit comme suit:

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi - C \cdot \cos \phi = 0$$

Tel que:

σ_1, σ_3 : Sont des contraintes principales extrêmes.

ϕ : Angle de frottement.

C : La cohésion.

- σ_2 : N'intervient pas dans les calculs, et on peut écrire la fonction en intervenant le terme: $\frac{\phi}{2}$ comme suit:

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - 2C \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = 0$$

La surface définie par la fonction de charge est un pyramide de base hexagonale et d'axe:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (\text{Figure : III.5.a et III.5.b})$$

III.3.3) CRITERE DE VON MISES:

Pour tenir compte la contrainte principale intermédiaire, **VON MISES** en: 1913 proposa l'idée suivante:

*La plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur déviateur: J'_2 atteint une valeur limite, c'est à dire:

$$F = J'_2 - \frac{2}{3}K^2 = 0$$

Avec :

$$J'_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

Tel que: **K** est une constante

Dans l'espace des contraintes: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la surface définie par la fonction de charge est un cylindre de révolution d'axe: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Sa section passe par le plan d'équation:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

Et elle a comme rayon: $K\sqrt{2}$ (Figure : III.6.a et III.6.b

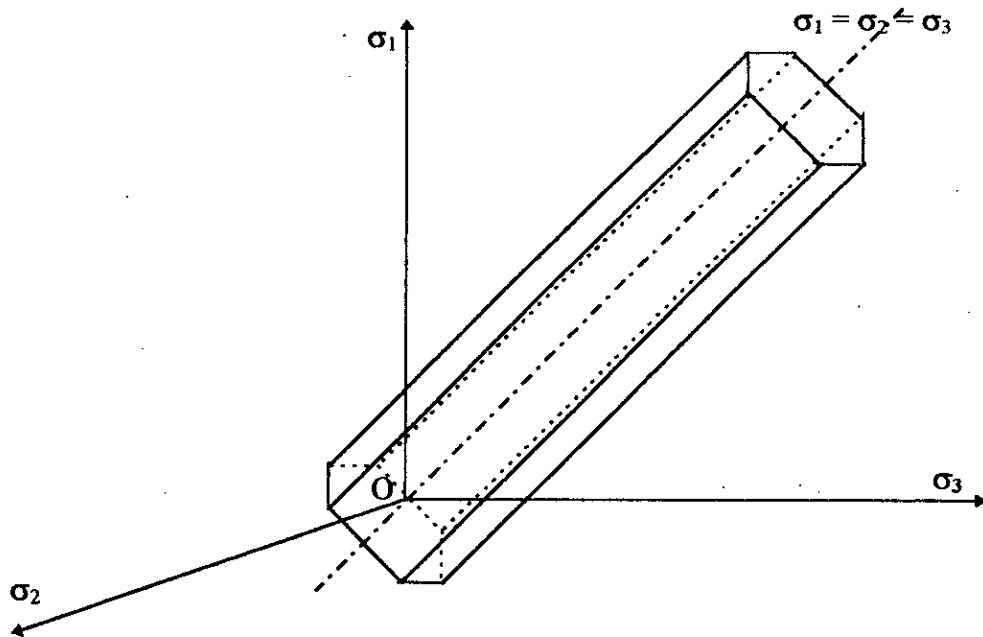


Fig.111.4.a : Représentation du critère de TRESCA dans l'espace: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

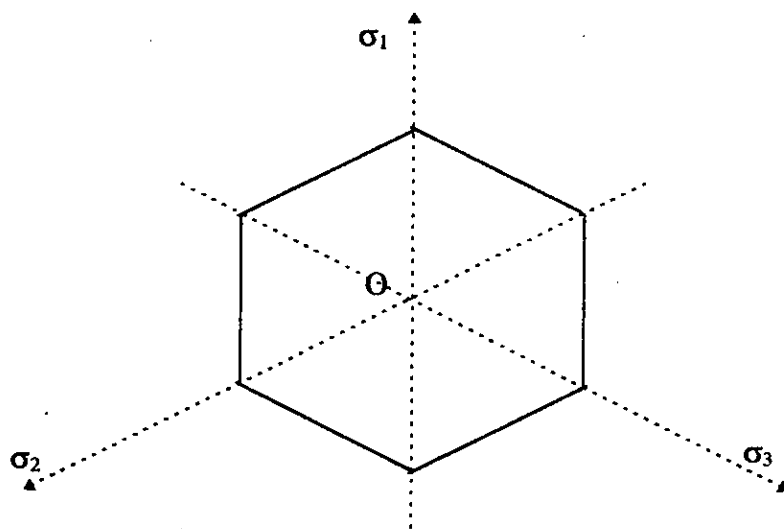


Fig.:111.4.b: La section du prisme est représentée par le plan:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

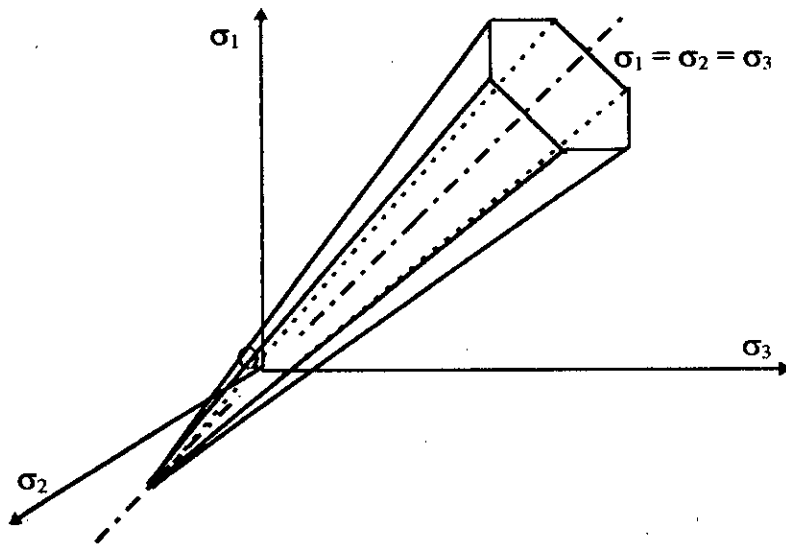


Fig.:111.5.a: Critère de MOHR COULOMB dans l'espace

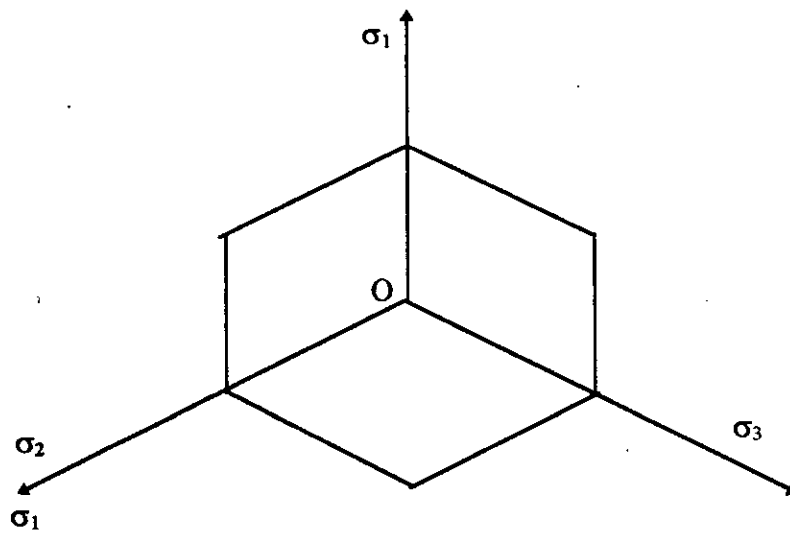


Fig.:111.5.b: La section de la pyramide est désignée par le plan $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

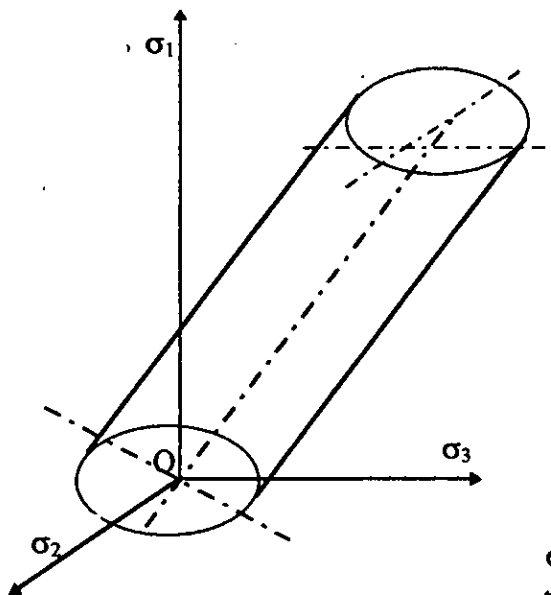


Fig.:111 6.a:
 Représentation du critère de Von - Mises dans l'espace des contraintes principales.

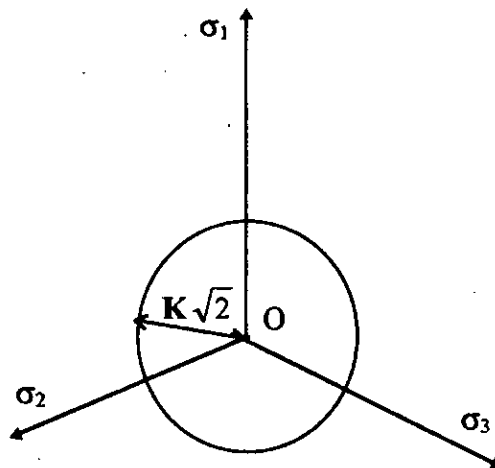


Fig.:111 6.b:
 La section du cylindre est représentée par le plan $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

III.4) MODELE DE DUNCAN:

Dans l'essai triaxial, l'analyse des contraintes par ce modèle introduit dans la relation non linéaire des contraintes - déformations deux paramètres suivants:

ϕ : Angle de frottement.

C : Coefficient de cohésion.

Dit aussi: paramètres de **MOHR COULOMB**

Les résultats de ces essais sont représentés par une courbe qui est approximativement une hyperbole passant par le centre du repère.

III.4.1) LA NONLINEARITE DES CONTRAINTES:

Le comportement non linéaire dépend de la valeur du déviateur: $(\sigma_1 - \sigma_3)$ sans introduire la contrainte principale intermédiaire: σ_2 .

Après interprétation des résultats, **KNODER** a trouvé la relation suivante:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon}{a + b\epsilon} \tag{III.1}$$

Tel que:

σ_1, σ_3 : sont successivement contraintes majeure et mineure .

ϵ : Déformation axiale .

a, b : Deux constantes à déterminer expérimentalement.

(Figure : III.7.a)

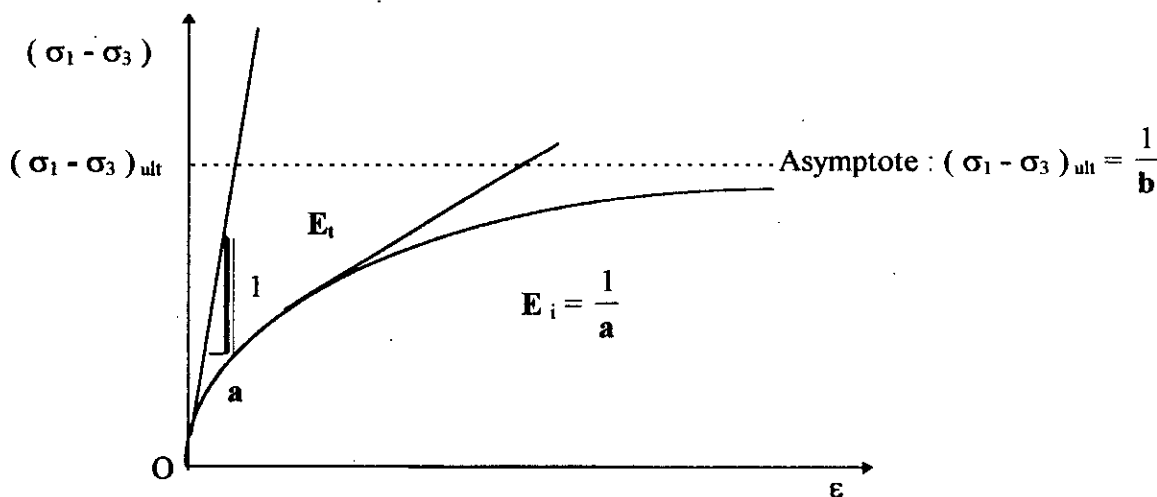


Fig.111.7.a : La courbe hyperbolique contrainte - déformation.

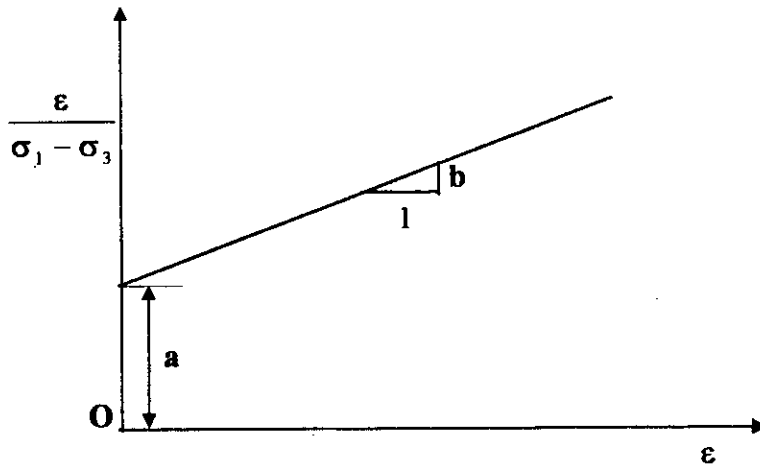


Fig.111.7.b: La courbe contrainte - déformation dans un repère transformé.

$$a = \frac{1}{E_i} \quad : E_i \text{ est le module tangent initial.}$$

$$b = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad : (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \text{ est le symptôme de la courbe hyperbolique.}$$

$$(III.1) \Rightarrow \frac{\epsilon}{\sigma_1 - \sigma_3} = a \cdot \epsilon + b \quad (III.2)$$

L'équation (III.2) a comme variables : $\frac{\epsilon}{\sigma_1 - \sigma_3}, \epsilon$ et elle représente une fonction linéaire pour: ϵ dans un repère transformé. (Figure : III.7.b).

*** REMARQUE:**

généralement, $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \geq (\sigma_1 - \sigma_3)_r$ tel que:

$(\sigma_1 - \sigma_3)_r$: est le déviateur à la rupture.

$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$: est la valeur de symptôme.

On relie ces deux valeurs par la relation:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_r = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (III.3)$$

R_f : est une constante indépendante de: $(\sigma_1 - \sigma_3)$ et: $1 \leq R_f \leq 0.75$

Alors on remplace les valeurs de :a et b dans l'équation () , on trouve:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = \frac{\varepsilon}{\left[\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon \cdot R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_r} \right]} \quad (III.4)$$

E_i : est en fonction de contrainte de confinement sauf dans le cas du sol saturé non consolidé non drainé on introduit cette contrainte . [JANBU].a trouvé la relation suivante:

$$E_i = K \cdot P_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (III.5)$$

σ_3 : est la contrainte principale mineure.

P_a : la pression atmosphérique.

K, n : deux paramètres sans unité.

On utilise les critères de rupture de MOHR - COULOMB comme suit:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_r = \frac{2C \cdot \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (\text{III.6})$$

Donc à partir des équations (III.4,5 et 6) on peut déterminer les 5 paramètres: K, n, C, ϕ, R_r qui jouent un rôle déterminant dans la détermination du comportement non linéaire d'un sol.

III.4.2) LES VALEURS DU MODULE TANGENT:

Le module tangent varie successivement d'une itération à une autre. on peut écrire:

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \varepsilon} \quad (\text{III.7})$$

$$\text{III.4} \Rightarrow E_t = \frac{1/E_1}{\left[\frac{1}{E_1} + R_r \frac{\varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)} \right]^2} \quad (\text{III.8})$$

$$\text{III.4} \Rightarrow \varepsilon = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left[E_1 \left(1 - R_r \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_r} \right) \right]} \quad (\text{III.9})$$

Substituant (III.9) dans(III.8) et après simplifications on trouve:

$$E_t = (1 - R_r S)^2 E_1 \quad (\text{III.10})$$

Avec:

$$S = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_r} \quad (\text{III.11})$$

Substituant (III.5) , (III.6) et(III.11) dans(III.10) on obtient:

$$E_t = \left[\frac{1 - R_r (1 - (1 - \sin \phi)(\sigma_1 - \sigma_3))}{2C \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi} \right]^2 K \cdot P_r \left(\frac{\sigma_3}{P_r} \right)^n \quad (\text{III.12})$$

Donc d'après cette dernière équation, et pour déterminer la valeur du module tangent E_t , il suffit d'évaluer les valeurs de 5 paramètres cités avant.

III.4.3: DECHARGEMENT RECHARGEMENT:

La loi de déchargement - rechargement peut être représenté par une droite reliant les extrémités haut et bas du cycle déchargement - rechargement (Fig.III.8).

Cette droite correspond à une valeur du module de déchargement - rechargement constante E_{ur} pour une contrainte principale σ_3 donnée.

Ce module de déchargement - rechargement s'exprime par la formule suivante:

$$\text{Où} \quad E_{ur} = K_{ur} \cdot P_r \left(\frac{\sigma_3}{P_r} \right)^n \quad (\text{III.13})$$

n est le même paramètre défini dans la relation du module tangent (III.12).

K_{ur} est un paramètre de déchargement - rechargement - sans dimension.

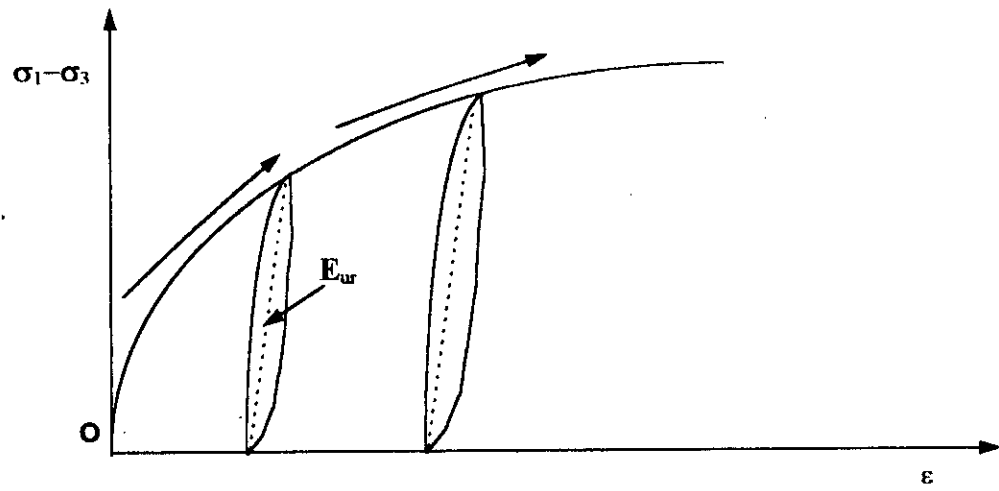


Fig.III.8: *Courbe chargement déchargement d'un essai triaxial.*

CHAPITRE 4

LA METHODE DES ELEMENTS

FINIS

METHODE DES ELEMENTS FINIS

IV.1) INTRODUCTION:

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteuses et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères.

Nous pensons bien sûr aux projets spéciaux: aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale.

Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de **modèles** qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes qu'on peut décrire grâce aux équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations, elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur, c'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique.

Les systèmes physiques sont classés en deux grandes catégories: **Les systèmes discrets et les systèmes continus.**

Les systèmes discrets sont ceux constitués d'un nombre fini d'éléments bien définis. Dans ce cas, les problèmes correspondants peuvent être résolus quelque soit l'importance du nombre des constituants.

Les systèmes continus sont par ailleurs, constitués d'éléments infinitésimaux, dont leur nombre est infini. Dans ce cas seul, l'emploi de la notion mathématique d'infiniment petit permet de caractériser le problème, cela conduit donc à des équations différentielles que l'on ne peut résoudre exactement que pour des cas simplifiés.

A partir de ça, et pour surmonter la difficulté des problèmes continus, ce type de systèmes peut être approché par un système discret.

IV.2) HISTORIQUE:

Depuis une soixantaine d'années, la **mécanique des structures** permet l'analyse des assemblages: barre et poutres, le comportement de chaque élément est représenté par une **matrice de rigidité élémentaire** construite à l'aide des hypothèses de la **Résistance Des Matériaux**.

A partir de ces **matrices élémentaires**, nous obtenons un système d'équations algébriques en utilisant les conditions d'équilibre et de continuité des déplacements.

La résolution de ce système nous donne des sollicitations conduits aux déplacements de tout les noeuds de la structure .

En 1956, **TURNER** , **CLAUGH** et **TOPP** introduisent le concept d'**élément fini**: il représentent un **milieu continu élastique** à deux dimensions par un assemblage des panneaux triangulaires sur lesquels les déplacements sont supposés varier linéairement, chaque panneau est caractérisé par une **matrice de rigidité élémentaire** .

Après l'assemblage de ces matrices, la technique classique de la **mécanique des structures** conduit à la solution, c. à. d. : aux déplacements en tout point du **milieu continu**.

Et après, **KELSEY** systématise l'utilisation de la notion de l'**énergie** dans l'analyse des structures.

En fait , les idées de base de la **méthode des élément finis** apparaissent déjà dans les travaux de: **COURANT** , **HRENICOFF** et **MC HENRY** qui ont montré que la résolution de certains problèmes de **milieu continu** est possible en effectuant une discrétisation spéciale du domaine tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Dés **1960** , la **méthode des éléments finis** subit un développement rapide dans plusieurs directions:

- ◆ Introduire des éléments de haute précision.
- ◆ Construire une base mathématique bien déterminée.
- ◆ Utilisation de la méthode pour la résolution des problèmes non stationnaires ou non linéaires.

En fin, on peut dire pour tout problème physique, il y a lieu de tenir compte les étapes générales suivantes:

- a) Modélisation du système.
- b) Trouver les équations algébriques gouvernantes.
- c) Résolution de ces équations.
- d) Interprétation des résultats.

Donc, ce chapitre donnera une présentation cohérente de la méthode des éléments finis avec différentes formulations mathématiques utilisées.

IV.3) DEFFERENTES FORMULATIONS DE LA :M.E.F.:

IV.3.1) APPROXIMATION NODALE:

Il n'est pas toujours possible de trouver une fonction exacte pour décrire un phénomène physique ce qui nous amène à trouver une fonction approchée grâce à laquelle

nous pouvons remplacer le système continu par un système discrétisé équivalent tel que la différence:

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) \quad (IV.1)$$

soit assez petite pour l'objet visé.

Pour cela, on choisit un nombre fini de fonctions dépendantes de n paramètres a_i

$$u(x, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Puis on détermine les a_i pour satisfaire l'équation (IV.1)

On a, si u est linéaire en a_i :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) a_i = \langle P \rangle \cdot \{a\} \quad (IV.2)$$

Avec:

$P_i(x)$: sont des fonctions connues et linéairement indépendantes .

Posant: $u(x_i) = u_i$

On peut choisir comme paramètres a_i les valeurs u_i donc:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \cdot u_i = \langle N \rangle \cdot \{u\} \quad (IV.3)$$

u_i : sont les paramètres nodaux .

$N_i(x)$: est une fonction d'interpolation .

L'équation (IV 3) est une approximation nodale.

$$u(x_i) = u_i \Rightarrow N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

◇ REMARQUE:

On peut étendre cette approximation nodale directement à une approximation d'une fonction à plusieurs variables:

$$u(x, y, z) = u(\mathbf{x}) \quad \text{Avec } : \mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z)$$

IV.3.2) APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS:

La construction de $u(\mathbf{x})$ est difficile lorsque n est important, le problème se complique si le domaine V a une forme complexe, et si $u(\mathbf{x})$ doit satisfaire des conditions aux limites sur les frontières de V .

La méthode d'approximation nodale par sous domaines simplifie la construction de $u(\mathbf{x})$, elle consiste à:

- Identifier du domaine V un ensemble de sous domaines : V^c appelés **les éléments** du domaine (**Figure : IV.1**).

- Définir sur chaque élément : $u^c(\mathbf{x})$ tel que:

a : Sur chaque V^c , on ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des noeuds situées sur V^c et sur sa frontière.

b : $u^c(\mathbf{x})$ est continue sur V^c et satisfait les conditions de continuité sur les différents sous domaines.

Donc, pour réaliser cette approximation, il faut:

- ◇ Définir analytiquement la géométrie de tout les éléments.
- ◇ Construire $N_i(\mathbf{x})$; $i = 1, n$ pour chaque élément.

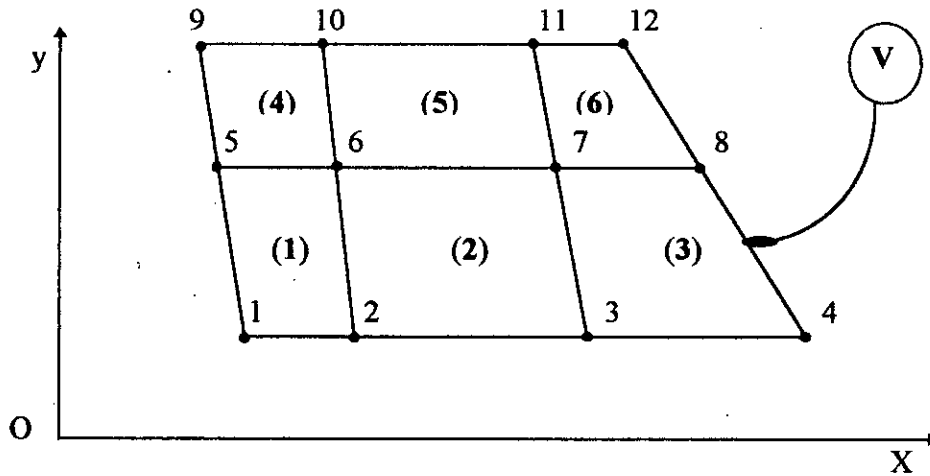


Fig.1V.1 Discretisation du domaine: V
(6 éléments et 12 noeuds)

IV.3.3) DEFINITION DE LA GEOMETRIE DES ELEMENTS:

La détermination géométrique de chaque élément se fait par un certain nombre de noeuds \bar{n} , ces noeuds sont appelés: **noeuds géométriques**. Et si : $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{n}}$, l'élément est dit: **isoparamétrique**.

IV.3.3.1) QUELQUES FORMES CLASSIQUES DES ELEMENTS:






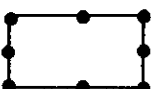


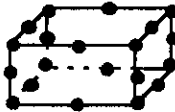
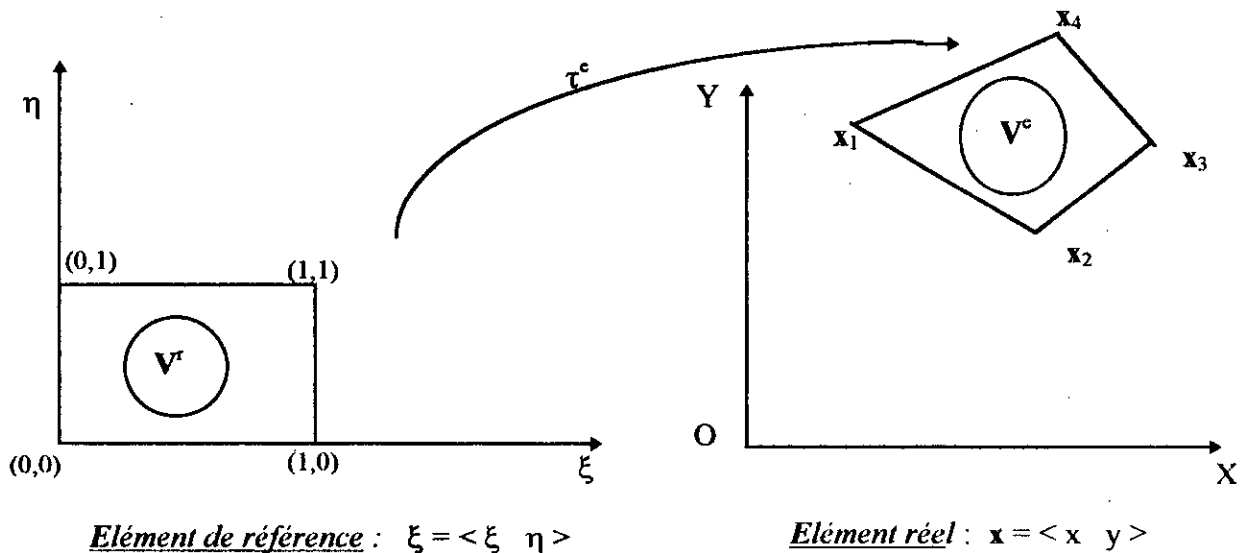
Eléments à une dimension:			
Linéaire: (2)		Quadratique: (3)	
Eléments à deux dimensions:			
Eléments triangulaires:		Eléments quadrilatéraux:	
			
Linéaire: (3)	Quadratique: (6)	Linéaire: (4)	Quadratique: (8)
Eléments à trois dimensions:			
Eléments triadriques		Eléments hexaédriques	
			
Linéaire: (4)	Linéaire: (8)	Quadratique: (20)	

Fig.1V.2: *Forme de quelques éléments classiques.*

IV.3.3.2) ELEMENT DE REFERENCE:

Un élément de référence V^r est un élément de forme très simple repéré dans un repère de référence qui peut être transformé en chaque élément réel V^e par une transformation géométrique : τ^e .

Par exemple dans le cas d'un rectangle:



$$\tau^e : \xi \longrightarrow \mathbf{x}^e \text{ avec : } \mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi)$$

Fig.1V.3: Transformation de l'élément réel..

τ^e : Dépend de la forme et de la position de l'élément réel , donc des coordonnées des noeuds géométriques qui le définissent:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{x}^e(\xi, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Avec: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n$ sont des noeuds géométriques qui appartiennent à V^e .

τ^e : est choisie d'une manière à présenter les propriétés suivantes:

- τ^e : est bijective en tout point ξ .
- Les noeuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux noeuds géométriques de l'élément réel.

Donc, pour chaque élément, on a:

$$\tau : \xi \longrightarrow \mathbf{x}(\xi) = [\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x})] \cdot \{\mathbf{x}_n\} \quad (\text{IV.4})$$

$\{\mathbf{x}_n\}$: Les noeuds géométriques de l'élément : \mathbf{V}^e .

- **Exemple:** La forme de référence à deux dimensions d'un élément carré quadratique à 8 noeuds :

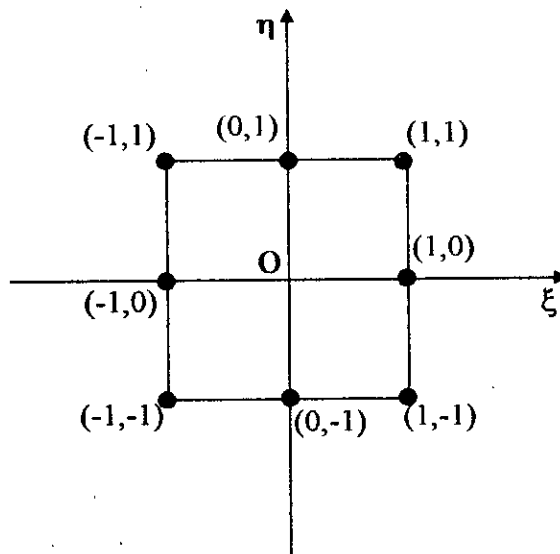


Fig.1V.4: Elément de référence

Cet élément de référence est définie comme suit:

$$\begin{cases} -1 \leq \xi \leq 1 \\ -1 \leq \eta \leq 1 \end{cases}$$

IV.3.4) APPROXIMATION SUR UN ELEMENT DE REFERENCE:

Nous choisissons sur V un ensemble de n noeuds d'interpolation de coordonnées x_i : $i = 1, n$ confondus ou non avec les noeuds géométriques.

Sur chaque élément on a:

$$u_{ex}(x) \approx u(x) = \langle N(x) \rangle \cdot \{u_n\}$$

Et sur l'élément de référence on obtient:

$$u_{ex}(\xi) \approx u(\xi) = [N(\xi)] \cdot \{u_n\} \tag{IV.5}$$

Avec:

$$x(\xi) = [N(\xi)] \cdot \{x_n\} \tag{IV.6}$$

$$u(\xi_i) = [N(\xi_i)] \cdot \{u_n\}$$

$$N_j(\xi_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

Où:

$$u_i = u_{ex}(\xi_i)$$

Alors:

$$\{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle P(\xi_1) \rangle \\ \vdots \\ \langle P(\xi_n) \rangle \end{bmatrix} \cdot \{a\}$$

$$\Rightarrow \{u_n\} = [P_n] \cdot \{a\} \tag{IV.7}$$

$$\Rightarrow \{a\} = [P_n]^{-1} \cdot \{u_n\} \tag{IV.8}$$

Pour un élément de référence:

$$u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \cdot \{a\} \tag{IV.9}$$

On substituant l'équation (IV.8) dans l'équation (IV.9) et on trouve :

$$u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \cdot [P_n]^{-1} \cdot \{u_n\} \tag{IV.10}$$

Comparant (IV.5) avec (IV.10) , on obtient :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle \cdot [P_n]^{-1} \tag{IV.11}$$

Donc , en conclusion , pour construire les fonctions d'interpolation il faut poursuivre les étapes suivantes:

- 1 : Choisir la base polynomiale : $\langle P(\xi) \rangle$.
- 2 : Evaluer la matrice : $[P_n] = [p_j(\xi_i)] \quad i = 1, n \quad , \quad j = 1, n$.
- 3 : Calculer : $[P_n]^{-1}$.
- 4 : Calculer : $\langle N(\xi) \rangle$ suivant la relation (11) .

IV.4) FORMULATION INTEGRALE:

Comme on a déjà vu, les systèmes physiques sont classés en deux grandes catégories:

Les systèmes **discrets**.

Les systèmes **continus**.

L'étude du comportement d'un système discret est représenté par un système d'équations algébriques et celui d'un système continu est le plus souvent représenté par un système d'équations aux dérivées partielles associé à des conditions aux limites.

Les équations algébriques du système discret peuvent être résolues par les méthodes numériques qu'on va décrire après, par contre les équations du système continue ne peuvent en générale pas être résolues directement, donc il est nécessaire de discrétiser ces équations.

La **M . E . F** est l'une des méthodes qui peuvent être utiliser pour faire cette discrétisation.

IV.4.1) FORMULATION MATRICIELLE ET DISCRETISATION:

En mécanique des sol, d'après l'hypothèse de la continuité, la discrétisation de la forme matricielle obtenue est atteint à l'aide du schéma suivant: (Fig.1V.5)

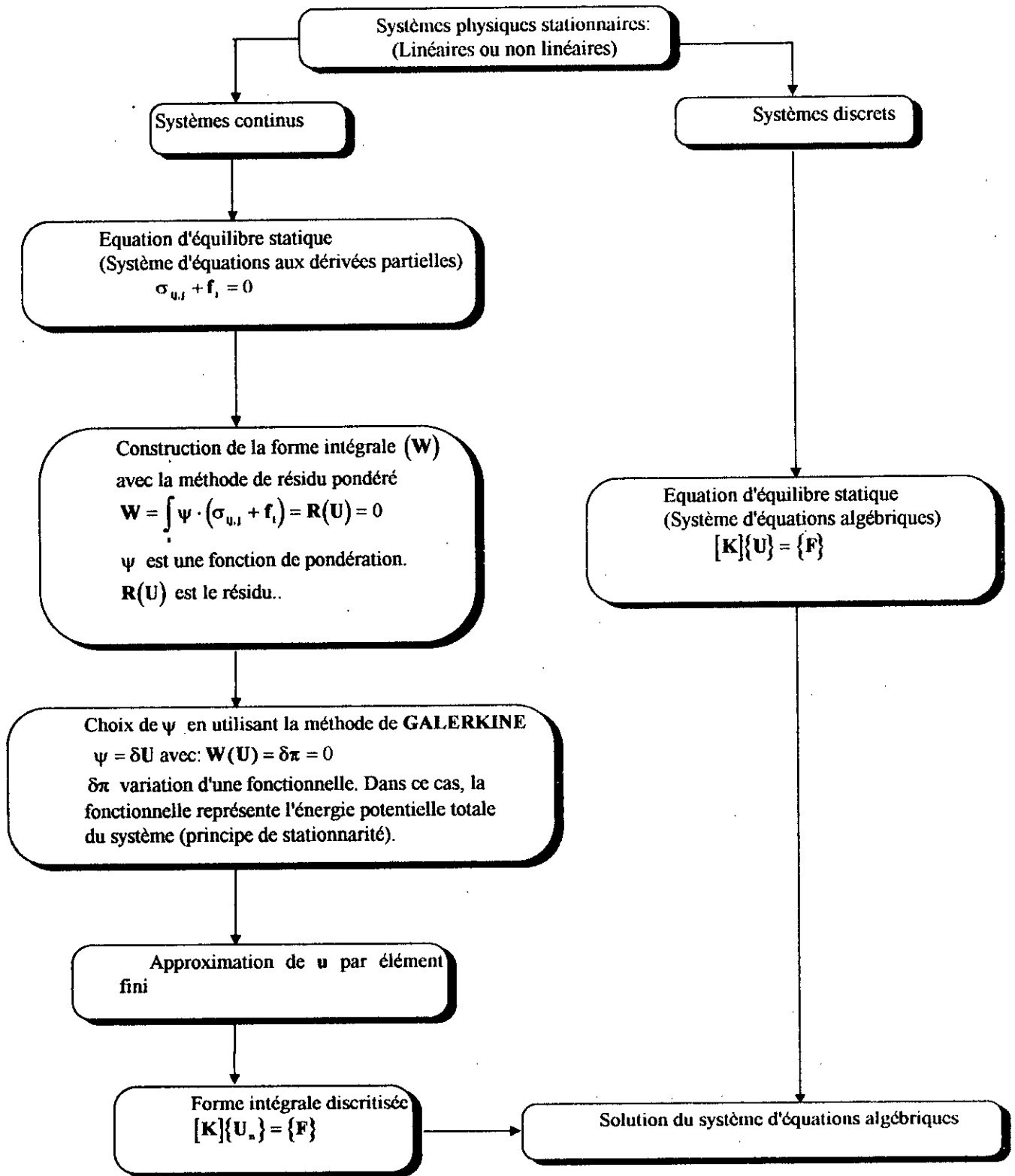


Fig.IV.5: Demarche de discretisation d'un système continu.

IV.4.2) EQUATION D'EQUILIBRE STATIQUE: (Voir Fig.IV.4:)

Le comportement d'un système physique continue est décrit par un système d'équations au dérivées partielles. Dans notre étude, ce système est représenté par les équations d'équilibre statique d'un corps infinitésimal comme suit:

$$\{\sigma_{u,j}\} + \{f_i\} = 0 \tag{IV.12}$$

Dans un problème stationnaire, pour un système discret, les équations du comportement peuvent en générale s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \tag{IV.13}$$

Où:

$[K]$ est une matrice caractérisant le système .

$\{U\}$ est le vecteur des variables inconnues (les déplacements) .

$\{F\}$ est le vecteur de sollicitations connues .

En utilisant la méthode des résidus pondérés, on réécrit l'équation (IV.12) sous forme intégrale suivante:

$$W = \int_s \psi (\sigma_{u,j} + f_i) ds = 0$$

A l'aide de la méthode de GALERKINE , on a :

$$\psi = \delta U$$

Alors:

$$W = \int_{Su} \delta U (\sigma_{u,j} + f_i) ds = 0$$

$$\mathbf{W} = \int_s \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij} \mathbf{ds} + \int_s \delta \mathbf{u}_i f_i \mathbf{ds} = 0$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = 0$$

sachant que:

$$\int_s (\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} \mathbf{ds} = \int_s \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} \mathbf{ds} + \int_s \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij,j} \mathbf{ds}$$

$$\Rightarrow \int_s \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij,j} \mathbf{ds} = \int_s (\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} \mathbf{ds} - \int_s \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} \mathbf{ds}$$

Donc:

$$\mathbf{W}_1 = \int_s (\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} \mathbf{ds} - \int_s \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} \mathbf{ds}$$

On utilisant le théorème de: GAUSS

$$\int_s (\delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij})_{,j} \mathbf{ds} = \int_{\ell} \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij} n_j \mathbf{d}\ell$$

$\mathbf{d}\ell$ est un element de frontié re

D'où

$$\mathbf{W}_1 = \int_{\ell} \delta \mathbf{u}_i \sigma_{ij} n_j \mathbf{d}\ell - \int_s \delta \mathbf{u}_{i,j} \sigma_{ij} \mathbf{ds}$$

Sous forme matricielle:

$$W = \underbrace{\int \langle \delta u \rangle \{ \sigma \} \{ n \} d\ell}_{=0} - \int \langle \delta \epsilon \rangle \{ \sigma \} \{ n \} ds + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \{ F \} ds = 0$$

$$\int \underbrace{\langle \delta \epsilon \rangle \{ \sigma \} ds}_{*} = \int \delta \left[[S][U][D] \right] \left[[S][U] \right] ds = \int \underbrace{\delta \left[[S][N_U][U_N] \right]}_{**} [D][S][N_U][U_N] ds$$

$$** = [S][U_N]^T [N]^T [S]^T = \delta [U_N]^T [B]^T$$

$$* = \delta [U_N]^T [B]^T [D][B] ds [U_N] = \delta [U_N]^T [K][U_N]$$

Alors:

$$[K] = \int_s [B]^T [D][B] ds$$

CHAPITRE 5

TRAITEMENT NUMERIQUE

TRAITEMENT NUMERIQUE

V.1) INTRODUCTION:

La mise en oeuvre effective de la méthode des éléments finis décrite dans le chapitre précédent nécessite l'utilisation de méthodes numériques variées pour construire les matrices élémentaires et résoudre les systèmes d'équations algébriques qui en résultent. Ce chapitre regroupe les descriptions des diverses méthodes numériques couramment employées, sans pour autant faire une présentation complète de toutes les méthodes disponibles.

Nous présentons tout d'abord la méthode d'intégration numérique de: **GAUSS** qui nous permet de construire les matrices et vecteurs élémentaires par l'intégration sur l'élément de référence en utilisant un nombre de **points d'intégration** convenable.

Le second paragraphe est consacré à la résolution des **systèmes d'équations linéaires**. Pour cela, nous présentons la méthode de: **GAUSS - SEIDEL** et les techniques de **décomposition** correspondantes. La résolution de ces systèmes est atteinte en adaptant une succession d'améliorations d'une solution approchée.

Enfin, pour le troisième paragraphe, nous décrivons les méthodes de **substitution** et celles de: **NEWTON - RAPHSON** (**complète** et **modifié**) ainsi que la méthode **incrémentale** qui permettent de ramener la résolution des **systèmes d'équations non linéaires** à la résolution des systèmes d'équations linéaires.

V.2) INTEGRATION NUMERIQUE:

Dans la méthode des éléments finis, la matrice de rigidité élémentaire $[k]$ et le vecteur de sollicitations élémentaire $\{f\}$ s'expriment sous forme d'intégrales comme suit:

a : Sur l'élément réel:

$$[k] = \int_s [B(x,y)]^T [D] [B(x,y)] dx dy$$

$$\{f\} = \int_s \{N(x,y)\} f_s dx dy$$

b : Sur l'élément de référence:

$$[k] = \int_s [B(\xi,\eta)]^T [D(\xi,\eta)] [B(\xi,\eta)] \det(J(\xi,\eta)) d\xi d\eta$$

$$\{f\} = \int_s \{N(\xi,\eta)\} f_s \det(J(\xi,\eta)) d\xi d\eta$$

L'intégration numérique est basé essentiellement sur une approximation d'une fonction intégrable: $f(\xi)$ par un polynôme: $Y(\xi)$.

C'est à dire:

$$\int_A^B f(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} Y(\xi) d\xi$$

Le problème est donc de déterminer les termes de ce polynôme. Parmi les méthodes utilisées pour l'intégration numérique: la méthode de GAUSS.

V.2.1) METHODE DE GAUSS:

Avant de généraliser à plusieurs dimensions, nous avons en premier lieu le cas unidimensionnel.

La méthode de GAUSS est celle dans laquelle les r coefficients W_i et les r abscisses ξ_i sont déterminés d'une manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre m avec:

$$m \leq 2r - 1$$

remplaçant l'intégrale d'une fonction polynomiale $Y(\xi)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration ξ_i .

Donc on a :

$$\int_{-1}^{+1} Y(\xi) d\xi = \sum_1^n W_i Y(\xi_i) \tag{V.1}$$

$$Y(\xi) = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1}$$

$$\begin{aligned} \text{(V.1)} \Rightarrow \int_{-1}^{+1} Y(\xi) d\xi &= a_1 \int_{-1}^{+1} d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi \\ &= a_1 (W_1 + W_2 + \dots + W_r) + a_2 (W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r) \\ &\quad + \dots + a_{2r} (W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + W_r \xi_r^{2r-1}) \end{aligned} \tag{V.2}$$

Pour que la relation (V.2) soit vérifiée en toutes valeurs de a_i , $i = 1, 2, \dots, 2r$, il faut que:

$$* \int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha + 1} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \text{si } \alpha \text{ est pair.}$$

$$** \int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \text{si } \alpha \text{ est impair.}$$

Ce système de $2r$ équations est linéaire en W_i et non linéaire en ξ_i , il détermine les $2r$ paramètres de l'équation (V.1) sous les conditions suivantes:

$$W_i > 0 \quad \text{et} \quad -1 < \xi_i < +1$$

Donc, pour notre cas, on généralisera ces résultats à un état bidimensionnel comme suit:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j Y(\xi_i, \eta_j) \quad (V.3)$$

Avec:

W_i et W_j : sont les coefficients de pondération (poids). Il sont calculés à partir d'un cas unidimensionnel.

ξ_i et η_i : sont les coordonnées des points d'intégration tel que:

r_1 : nombre de points suivant ξ .

r_2 : nombre de points suivant η .

Alors, totalement on utilise r points de GAUSS tel que: $r = r_1.r_2$.

V.2.2) CHOIX DU NOMBRE DE POINTS D'INTEGRATION:

le choix du nombre de points d'intégration dépend essentiellement du type de l'élément utilisé et de la matrice élémentaire construite.

Dans la pratique, on choisie le plus souvent un nombre de point aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul.

Il existe pour chaque type d'élément un nombre minimum de points d'intégration au dessus duquel la singularité de la matrice $[k]$ peut être produite.

V.3) RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES:

La résolution du système d'équations:

$$[K].\{U\} = \{F\} \quad (V.4)$$

est une étape très importante de la méthode des éléments finis. Ce système est linéaire lorsque la matrice de rigidité $[k]$ ne dépend pas des déplacements $\{U\}$.

Le nombre n d'inconnues $\{U\}$ est proportionnel au nombre total des noeuds d'interpolation et au nombre de degrés de liberté par noeuds.

Parmi les méthodes les plus utilisées pour la résolution des systèmes des équations linéaires: la méthode d'élimination de GAUSS qui consiste à triangulariser la matrice de rigidité globale $[K]$ pour obtenir une matrice triangulaire.

Cela permet de décomposer la matrice $[K]$ en deux matrices comme suit:

$$[K] = [L].[S]$$

Ou:

$[L]$ est une matrice triangulaire inférieure de termes diagonaux unité.

$[S]$ est la matrice triangulaire supérieure obtenue par l'élimination de GAUSS qui peut être décomposer à son tour comme suit:

$$[S] = [D].[U]$$

Ou:

$[D]$ est une matrice diagonale vérifiant la condition: $d_{ii} = s_{ii}$

$[U]$ est une matrice triangulaire supérieure avec : $u_{ii} = 1$ et les autres termes sont calculés comme suit:

$$u_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_{ii}} \quad \text{pour } j > i$$

Donc $[K]$ peut s'écrire comme suit:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{U}]$$

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}][\mathbf{U}] \quad \text{avec : } [\mathbf{L}'] = [\mathbf{L}][\mathbf{D}]$$

Et comme $[\mathbf{K}]$ est symétrique, alors: $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}]^T$ et l'équation () peut s'écrire comme suit :

$$[\mathbf{K}]^T = [[\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{U}]]^T = [\mathbf{U}]^T[\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T = [\mathbf{K}] \quad \text{avec:}$$

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{U}]$$

$$\Rightarrow [\mathbf{U}] = [\mathbf{L}]^T$$

Alors on peut écrire:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T$$

En fin , la résolution du système d'équations linéaire global nous ramène à résoudre le système équivalent suivant :

$$[\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T \{ \mathbf{U} \} = \{ \mathbf{F} \}$$

Et cela se fait par trois étapes suivantes :

1: Résoudre le système $[\mathbf{L}]\{ \mathbf{Y} \} = \{ \mathbf{F} \}$ tel que : $\{ \mathbf{Y} \} = [\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T \{ \mathbf{U} \}$

2: Résoudre le système $[\mathbf{D}]\{ \mathbf{Z} \} = \{ \mathbf{Y} \}$

3: Trouver la solution finale $\{ \mathbf{U} \}$ avec la résolution du système

$$[\mathbf{L}]^T \{ \mathbf{U} \} = \{ \mathbf{Z} \} .$$

Donc, comme résumé, pour résoudre le système d'équations linéaires on peut suivre le déroulement des deux algorithmes suivants:

1 : Algorithme de décomposition:

Pour : $i = 1, n$

$$l_{ii} = 1$$

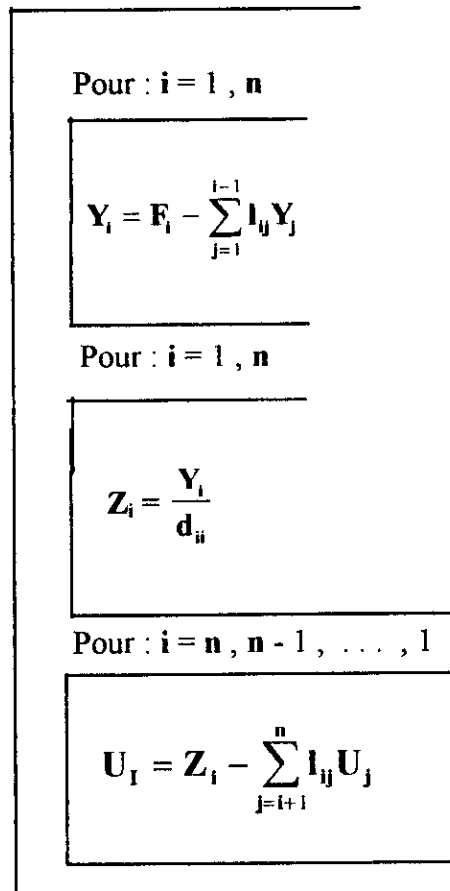
Pour : $r = 1, n$

$$d_{rr} = k_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} d_{kk} l_{rk}$$

Pour : $j = 1, r - 1$

$$l_{rj} = \frac{k_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} d_{kk} l_{jk}}{d_{rr}}$$

2 : Algorithme de résolution :



V.4) RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS NON LINEAIRES:

Dans un modèle linéaire, les paramètres physiques sont supposés indépendants des déplacements tel que le module d'YONG dans le cas d'élasticité linéaire avec petites déplacements. Par contre, dans un modèle non linéaire, la rigidité est en fonction de la solution U telle que dans le cas de la plasticité, et le cas d'élasticité avec grands déplacements.

La méthode des éléments finis conduit à une formulation qui sert à discrétiser des problèmes non linéaires et qui peut s'écrire sous la forme suivante:

$$W = \langle \delta U \rangle \{ [K(U)] \cdot \{U\} - \{F\} \} = 0$$

Alors , pour toute valeur de $\langle \delta U \rangle$ on a:

$$\{ [K(U)] \cdot \{U\} - \{F\} \} = 0$$

ou:

$$\{ R(U) \} = \{ F \} - \{ [K(U)] \cdot \{U\} \} = 0$$

avec: $\{ R(U) \}$ représente le résidu.

La résolution des problèmes non linéaires toujours nous ramène à la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs jusqu'à ce que nous trouvons une solution $\{U\}$ qui rend le résidu $\{R(U)\}$ aussi proche que possible de zéro.

Pour cela, existe plusieurs méthodes de résolution, parmi ces méthodes on a:

- ◆ La méthode de **substitution**.
- ◆ La méthode de **NEWTON-RAPHSON**.
- ◆ La méthode **incrémentale**.

V.4.1) METHODE DE SUBSTITUTION:

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions: $\{U^1\}, \{U^2\} \dots \{U^i\}$

Chaque terme $\{U^i\}$ est calculé à partir d'un terme $\{U^{i-1}\}$ en résolvant le système linéaire suivant:

$$[K(U^{i-1})]\{U^i\} = \{F\} \tag{V.5}$$

On introduit le résidu $\{R^i\}$ l'équation (V.5) devient comme suit:

$$\begin{aligned} \{R^i\} &= \{R(U^{i-1})\} = \{F\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \\ &= [K(U^{i-1})]\{U^i\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \\ &= [K(U^{i-1})]\{\{U^i\} - \{U^{i-1}\}\} \\ &= [K(U^{i-1})]\{\Delta U^i\} \end{aligned}$$

Donc:

$$\{R^i\} = [K(U^{i-1})]\{\Delta U^i\}$$

Avec:

$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$$

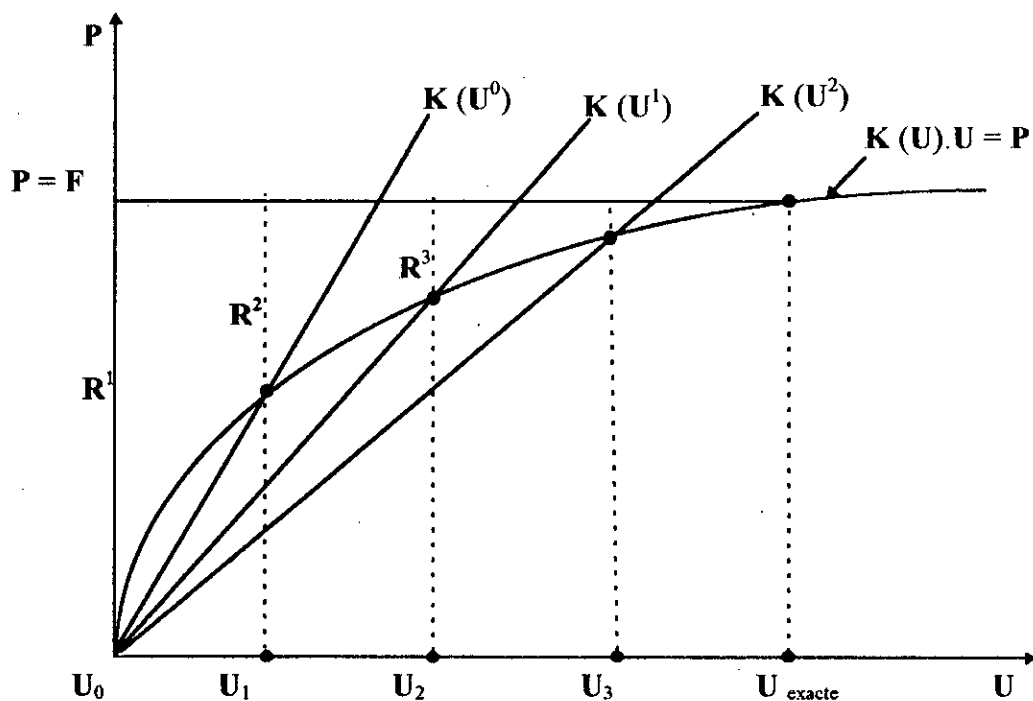


Fig.V.1: Méthode de substitution.

V.4.2) METHODE DE NEWTON RAPHSON:

V.4.2.1) METHODE DE NEWTON RAPHSON MODIFIE:

Dans cette méthode la rigidité initiale est prise en compte, on décompose la matrice de rigidité globale $[K]$ en une somme de deux matrices $[K_t]$ et $[K_{nr}]$ telle que:

$[K_t]$ est une matrice constante.

$[K_{nr}]$ est une matrice qui varie avec les déplacements: $\{U\}$

Donc:

$$[K] = [K_t] + [K_{nr}]$$

alors :

$$[[K_t] + [K_{nr}(U^{i-1})]] \{\Delta U^i\} = \{R^i\}$$

On négligeant le terme: $[K_{nr}]$, nous obtenons:

$$[K_t] \{\Delta U^i\} = \{R^i\}$$

Avec:

$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$$

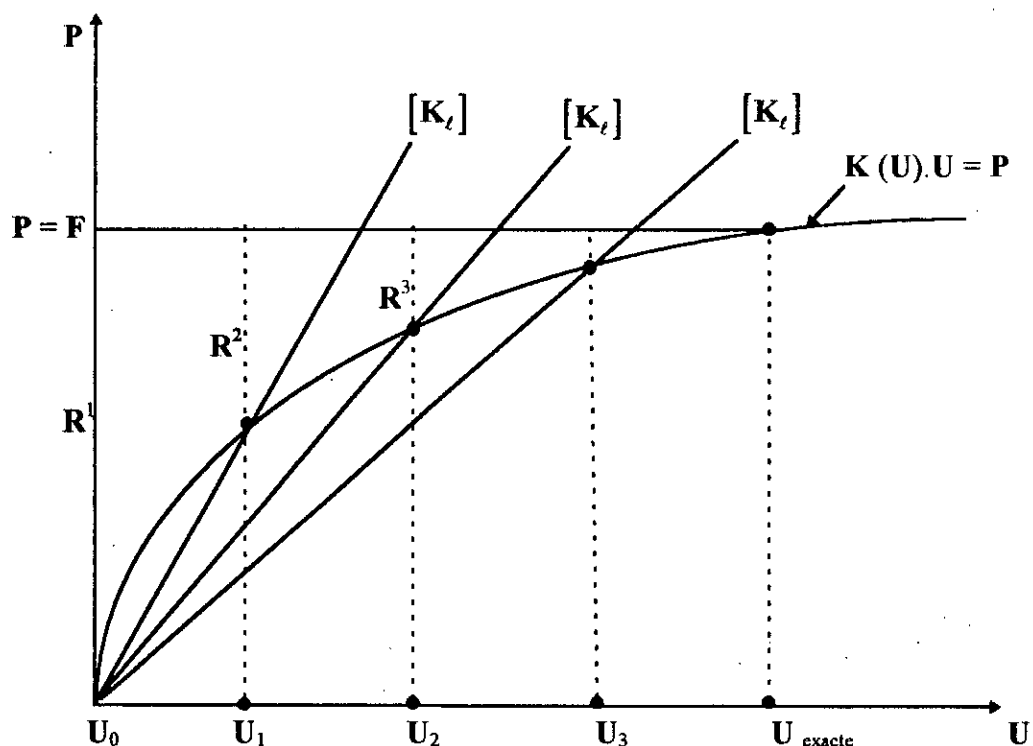


Fig.V.2.Méthode de NEWTON RAPHSON modifié.

V.4.2.2) METHODE DE NEWTON RAPHSON COMPLETE:

Dans les problèmes fortement non linéaires cette méthode est plus souvent utilisée car généralement elle converge plus rapide .

Dans cette méthode , on suppose qu'à l'itération numéros (i - 1) nous obtenons une approximation $\{U^{i-1}\}$ de la solution $\{U\}$ tel que le résidu ne soit pas nul:

$$\{R(U^{i-1})\} = \{F\} - \{[K(U^{i-1})]\}\{U^{i-1}\} \neq 0$$

Et à l'itération numéros (i) nous cherchons une approximation $\{U^i\}$ de la solution exacte $\{U\}$ tel que:

$$\{R(U^i)\} = \{R(U^{i-1} + \Delta U)\}$$

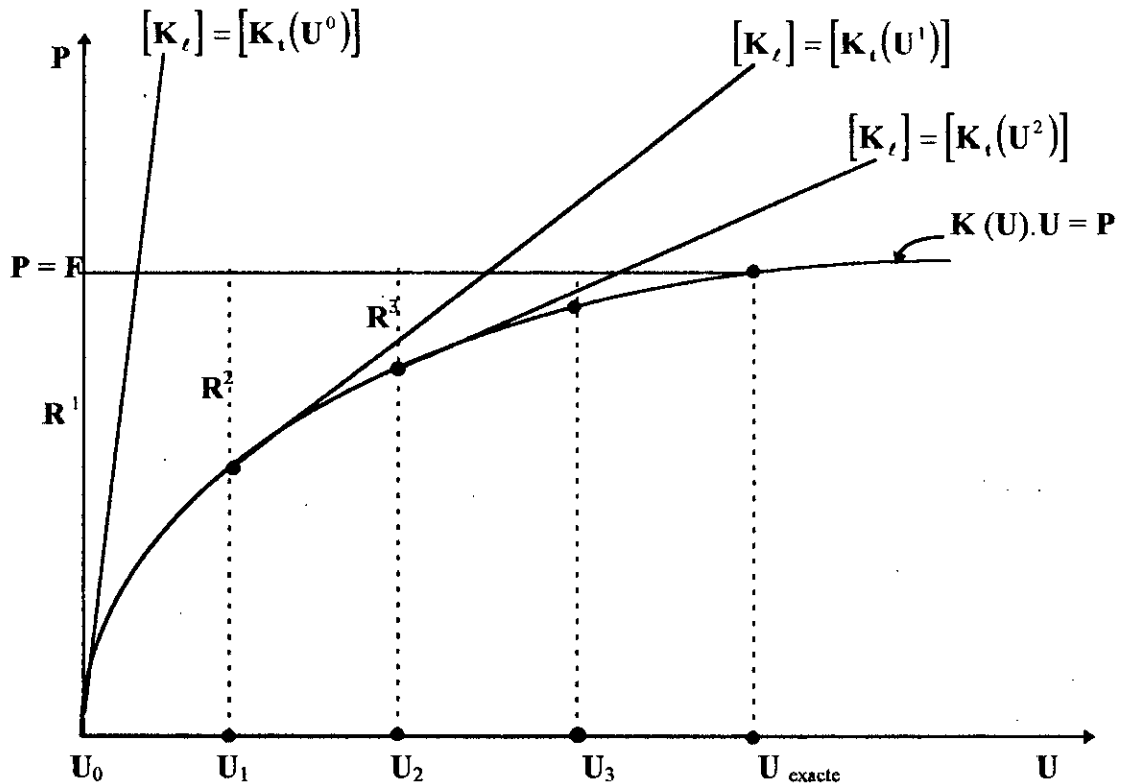


Fig.V.3: Méthode de NEWTON RAPHSON complète.

V.4.3) METHODE INCREMENTALE (OU PAS A PAS):

Le principe de la méthode incrémentale est la subdivision du vecteur de sollicitations $\{F\}$ en plusieurs incréments. Elle consiste à remplacer la résolution du système :

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} = \lambda \cdot \{F_0\}$$

par la résolution successive de:

$$[K(U_j)] \cdot \{U_j\} = \lambda_j \cdot \{F_0\}$$

Où:

$$\lambda_j = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda$$

Chaque étape constitue un problème non linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations de la méthode de **NEWTON RAPHSON** ou celle de **substitution**.

En utilisant **une itération** de la méthode de **NEWTON RAPHSON** à chaque étape, la méthode incrémentale s'écrit pour un niveau de sollicitations λ_j donné comme suit:

$$\begin{aligned} \{R(U_{j-1})\} &= \lambda_{j-1} \cdot \{F_0\} - [K(U_{j-1})]\{U_{j-1}\} \\ [K_t(U_{j-1})]\{\Delta U_j\} &= \{R(U_{j-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \cdot \{F_0\} \\ \{U_j\} &= \{U_{j-1}\} + \{\Delta U_j\} \end{aligned}$$

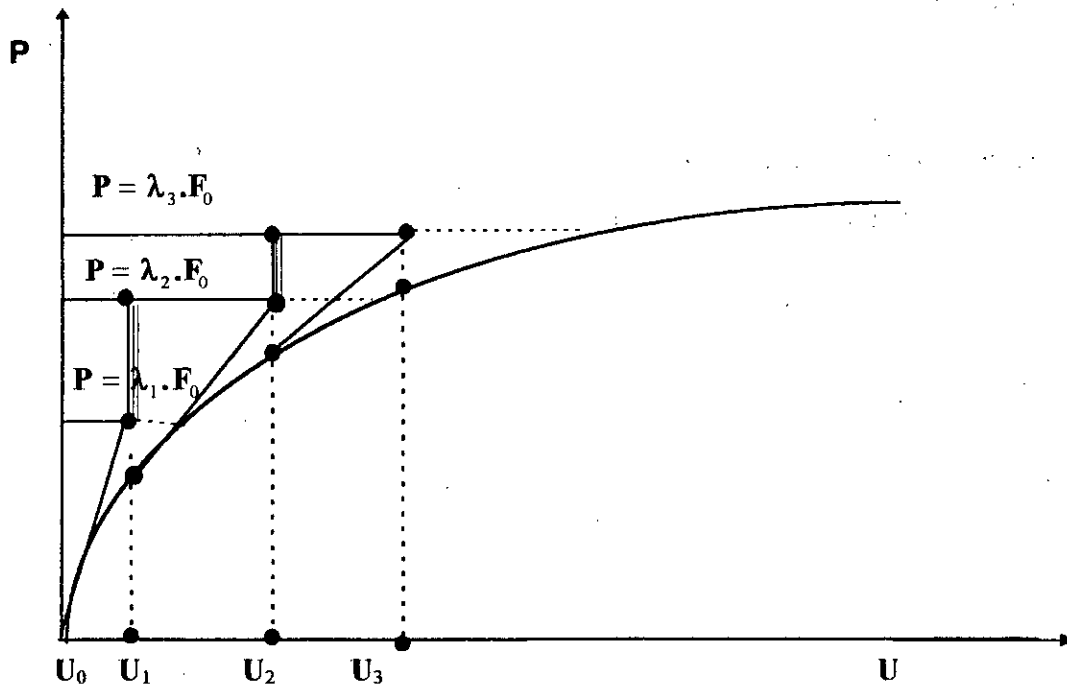


Fig.V.4.Méthode incrémentale à une itération de **NEWTON-RAPHSON**.

CHAPITRE 6

PROGRAMME

M.E.F

PROGRAMME: *M.E.F.*

VI.1) INTRODUCTION:

Pour notre étude, nous avons utilisé un programme appelé: *M. E. F.* Il est écrit en langage: **FORTRAN**. On a utilisé un élément de référence **isoparamétrique carré à 8 noeuds et à 16 degrés de liberté.**

Dans ce chapitre, nous présentons dans chaque cas de comportement l'organisation générale du programme: **M . E . F** avec ses différentes étapes mettant en oeuvre la théorie des chapitres précédents.

VI.2) DESCRIPTION DU PROGRAMME: *M . E . F*:

Ce programme contient deux grands blocs:

1 : Bloc d'**entrer** des données.

2 Bloc de **résolution et impression** des résultats.

- Le premier bloc sert à lire à partir d'un fichier, vérifier et a organiser les données décrivant le maillage (noeuds et éléments) qui sont relatives à la géométrie des noeuds, les paramètres physiques, les sollicitations, le type du problème étudié et les conditions aux limites..

- La construction des matrices et des vecteurs globaux $[K]$ et $[F]$, la résolution des systèmes d'équations algébriques (linéaires ou non linéaires) et l'impression des résultats seront réalisées par le deuxième bloc du programme.

VI.3) FONCTIONNEMENT DES PROGRAMMES:

VI.3.1) COMPORTEMENT LINEAIRE:

Dans ce cas, le milieu est supposé: **élastique** , **linéaire** , **homogène** et **isotrope**.
Alors, selon les hypothèses de la théorie d'élasticité plane, cette approche est applicable, il s'agit d'un problème d'élasticité **plane** .

Dans notre travail, nous cherchons à résoudre le système d'équations linéaires suivant:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (\text{VI.1})$$

Dont:

$[\mathbf{K}]$ est la matrice de rigidité globale.

$\{\mathbf{U}\}$ est le vecteur de déplacements de toutes les noeuds (vecteur des inconnues).

$[\mathbf{F}]$ est le vecteur des forces (sollicitations) global.

Après qu'on calcul les déplacements, on trouve les valeurs des contraintes et des déformations en chaque point de **GAUSS** pour chaque élément.

VI.3.2) COMPORTEMENT NON LINEAIRE:

Dans la résolution des problèmes non linéaires, on a utilisé la méthode incrémentale (ou pas par pas) avec la méthode itérative de **NEWTON RAPHSON** modifié où la matrice de rigidité: $[\mathbf{K}]$ est calculé une fois pour toute.

Donc, pour chaque incrément de charge on évalue un incrément de déplacement $\Delta\mathbf{U}$.
Pour cela il faut résoudre le système d'équations suivant:

$$[\mathbf{K}].\{\Delta\mathbf{U}^i\} = \{\mathbf{R}^i\}$$

Avec:

$$\{\mathbf{R}^i\} = \{\mathbf{F}\} - [\mathbf{K}].\{\Delta\mathbf{U}^{i-1}\}$$

$$\{\mathbf{U}^{i-1}\} = \{\mathbf{U}^{i-2}\} + \{\Delta\mathbf{U}^{i-1}\} \quad / \quad \{\mathbf{U}^0\} = 0 \quad \text{et } i \text{ numéros d'itération.}$$

$$\{\mathbf{F}\} = \{\Delta\mathbf{P}\} + \{\mathbf{F}^0\}$$

Tel que:

$\{\mathbf{F}^0\}$ est la charge volumétrique.

$\Delta\mathbf{P}$ est l'incrément de la charge appliqué.

Pour chaque itération i , et à partir de $\{\Delta\mathbf{U}^i\}$ on calcul les incréments de:

- ◆ Déformations $\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^i\}$ à l'aide des relations: **déformations - déplacements.**
- ◆ Contraintes $\{\Delta\boldsymbol{\sigma}^i\}$ à l'aide des relations: **contraintes - déformations**
(introduire la matrice d'élasticité), puis on additionne ces incréments au contraintes calculés à l'itération précédente:

$$\{\boldsymbol{\sigma}^i\} = \{\boldsymbol{\sigma}^{i-1}\} + \{\Delta\boldsymbol{\sigma}^i\}$$

ensuite on calcul les contraintes principales qui nous permettent le calcul du module tangent à partir de la formule proposé par DUNCAN selon la relation suivante: (voir paragraphe: (III.4.2).

$$E_t^i = \left[1 - \frac{R_f(1 - \sin \phi)(\sigma_1^i - \sigma_3^i)}{2C \cdot \cos \phi + 2\sigma_3^i \sin \phi} \right]^2 \cdot K \cdot P_n \left(\frac{\sigma_3^i}{P_n} \right)^n \quad (\text{VI.2})$$

Tel que:

σ_1^i La contrainte principale majeure à l'itération: i .

σ_3^i La contrainte principale mineure à l'itération: i .

*** REMARQUE:**

Le module tangent varie suivant l'itération ainsi que la matrice de rigidité.

Toutes ces opérations peuvent être résumer dans l'algorithme suivant: (Figure VI.1).

Pour $j = 1$, NPAS

Pour $i = 1$, NITER

Pour chaque élément:

- Extraction de $\{u^{i-1}\}$ à partir de $\{U^{i-1}\}$
- Calcul du résidu global $\{R^i\}$ par l'assemblage des résidus élémentaires $\{r^i\}$ tel que:

$$\{r_i\} = \{f\} - [k] \cdot \{u^{i-1}\}$$

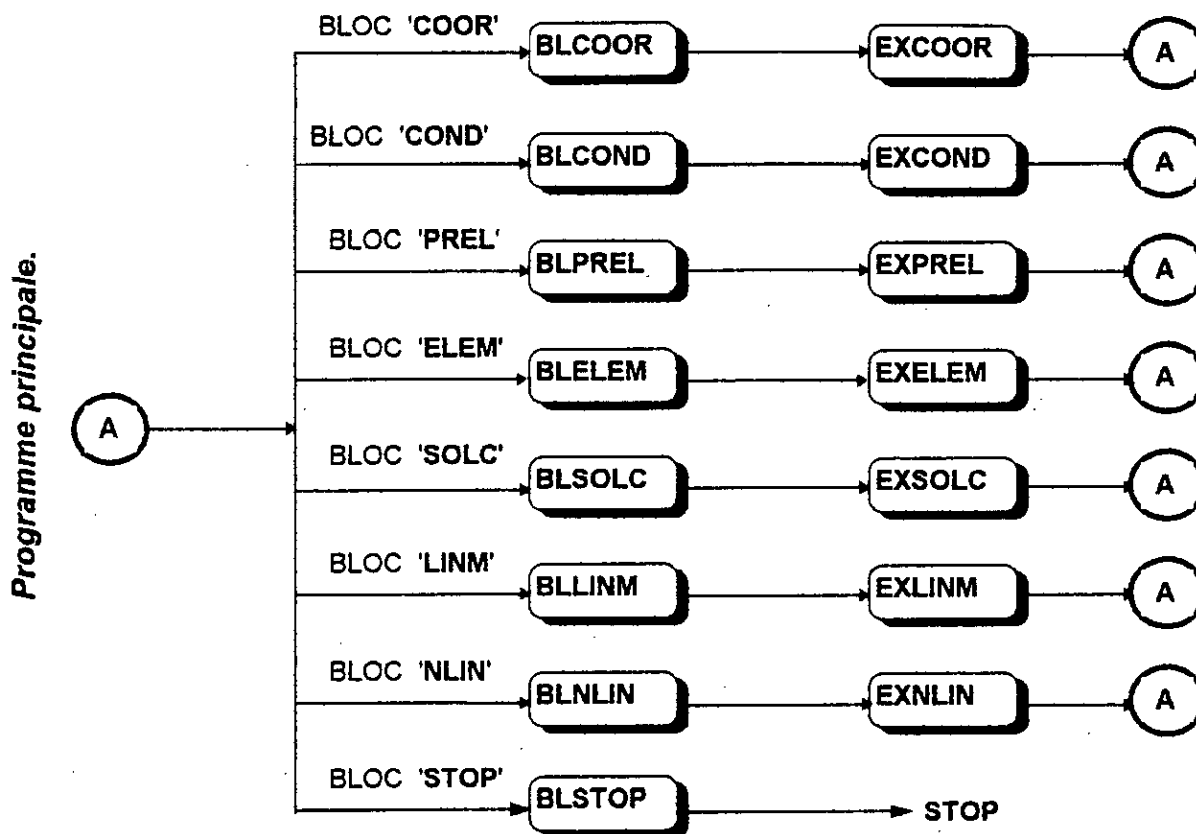
- ◇ Résoudre le système: $[K] \cdot \{\Delta U^i\} = \{R^i\}$
- ◇ Calculer les déformations: $\{\Delta \epsilon^i\}$
- ◇ Calculer les contraintes: $\{\Delta \sigma^i\}$
- ◇ Calculer les contraintes: $\{\sigma^i\} = \{\sigma^{i-1}\} + \{\Delta \sigma^i\}$
- ◇ Trouver les contraintes principales: σ_1^i, σ_3^i
- ◇ Evaluer la valeur de: E_t^i avec la formule: (VI.2)
- ◇ Mettre à jour la solution: $\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\}$
- ◇ Test de convergence.

NPAS : Nombre de pas.

NITER : Nombre des itérations.

Fig.VI.1: Algorithme général pour la résolution des problèmes non linéaires.

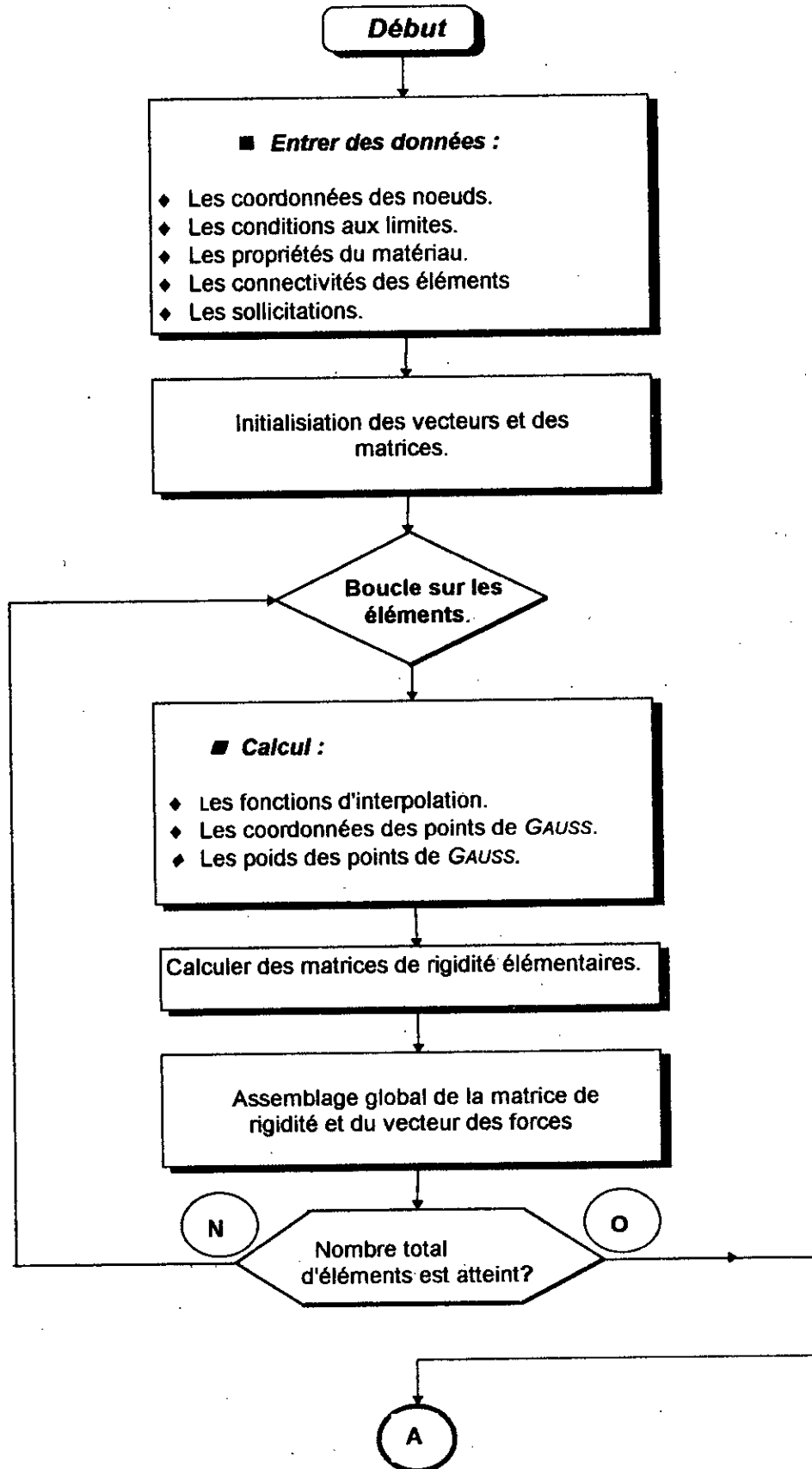
VI.4) LES ORGANIGRAMMES GENERAUX:



Enchaînement de l'exécution des différents blocs.

- BLOC 'COOR': Lecture des coordonnées des noeuds et le nombre de degrés de libertés de chaque noeuds.
- BLOC 'COND' Lecture des conditions aux limites.
- BLOC 'PREL' Lecture des propriétés élémentaires.
- BLOC 'ELEM' Lecture des éléments: la connectivité.
- BLOC 'SOLC' Lecture des sollicitations.
- BLOC 'LINM' Assemblage et résolution des problèmes non linéaires.
- BLOC 'NLIN' Résolution des problèmes non linéaires.
- BLOC 'STOP' Fin du programme.

ORGANIGRAMME DU MODELE LINEAIRE



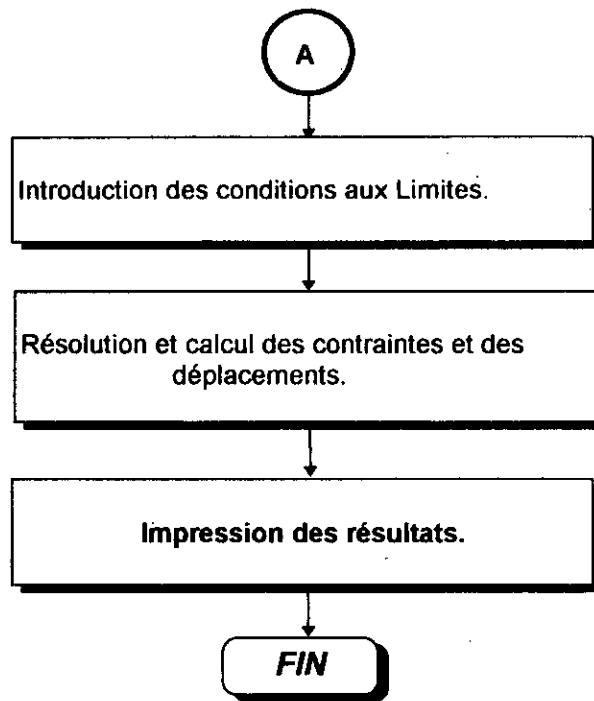
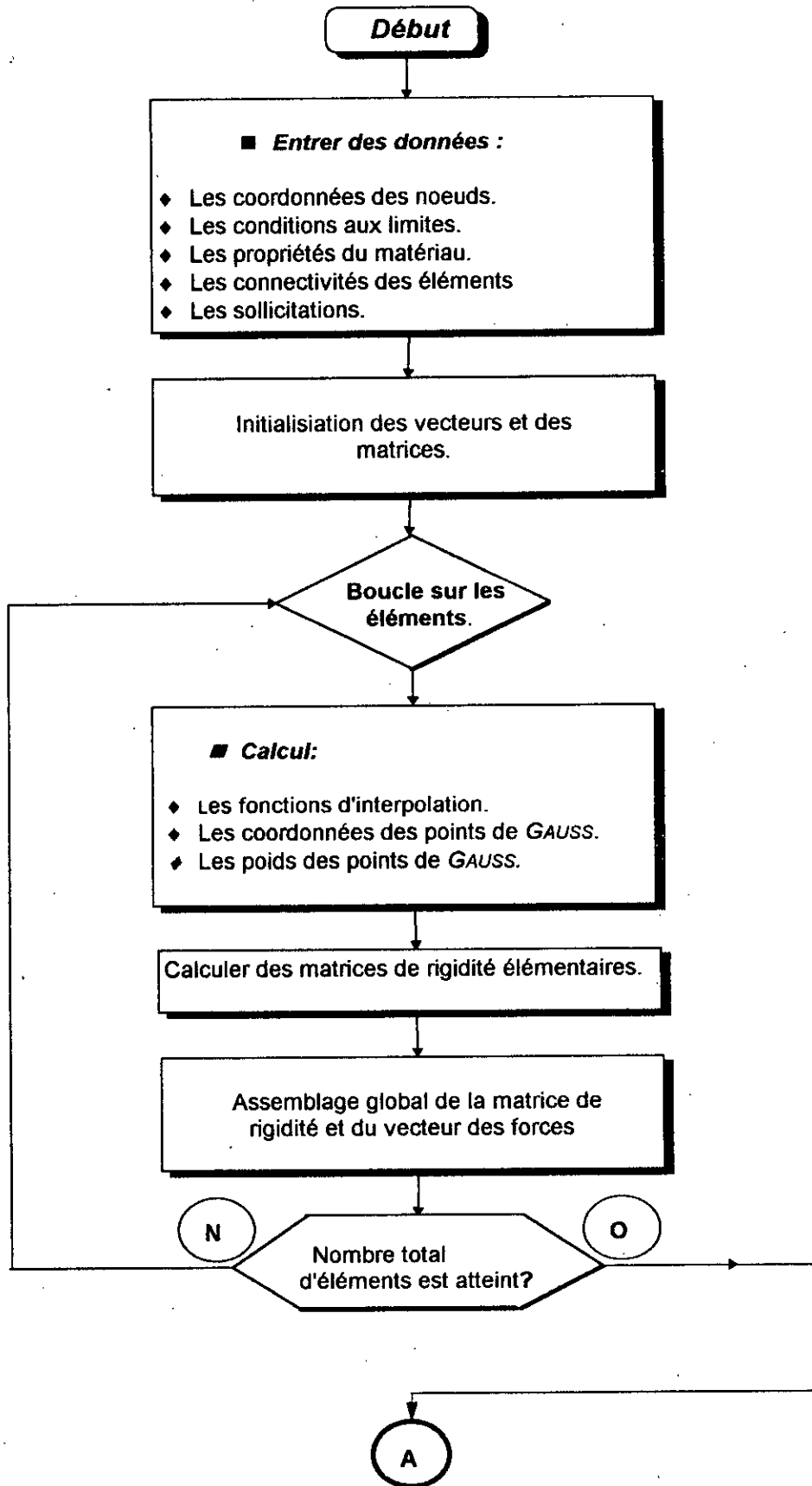
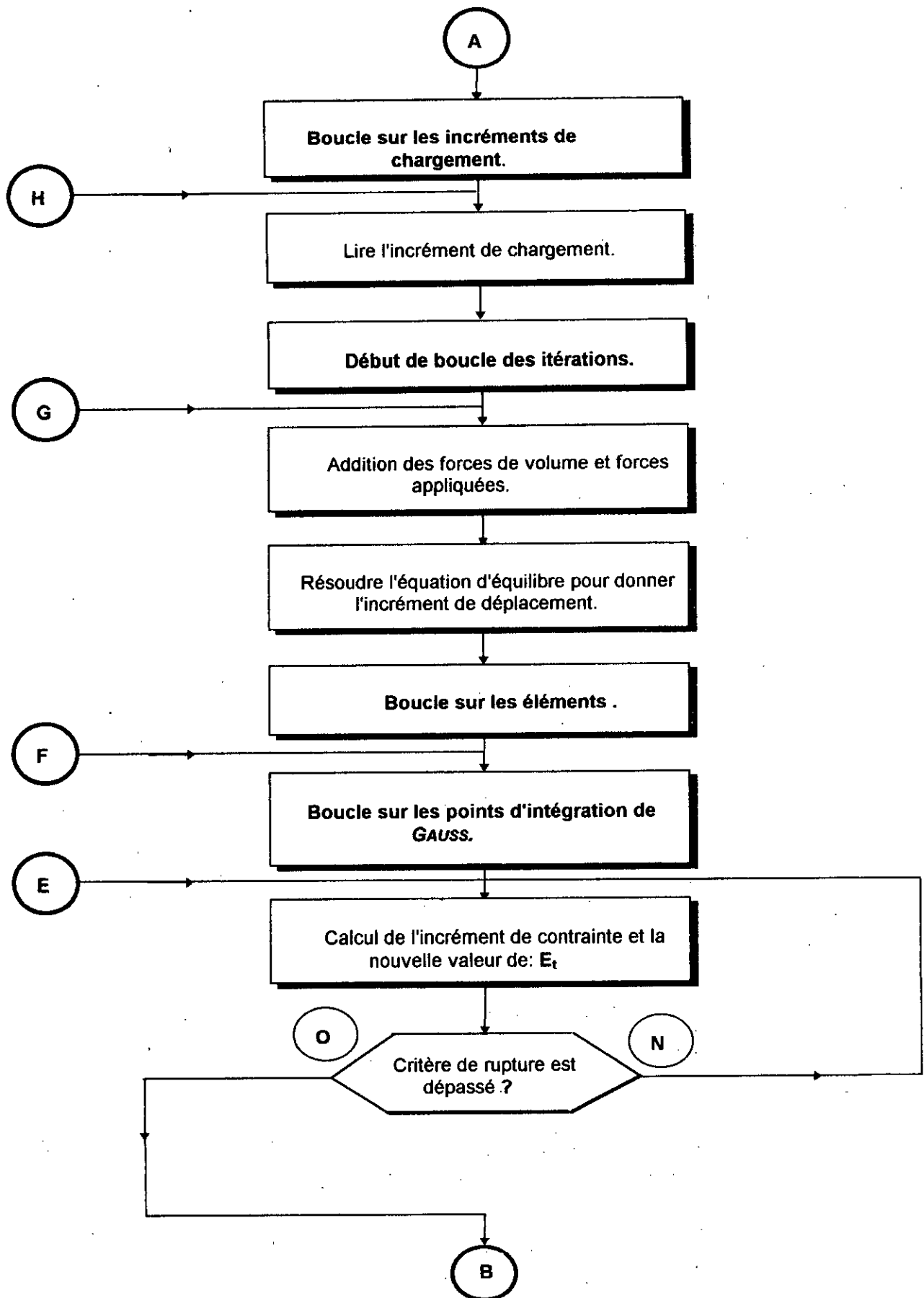


Fig.VI.2 :
ORGANIGRAMME GENERAL: *Cas de comportement linéaire*

ORGANIGRAMME DU MODELE NON LINEAIRE





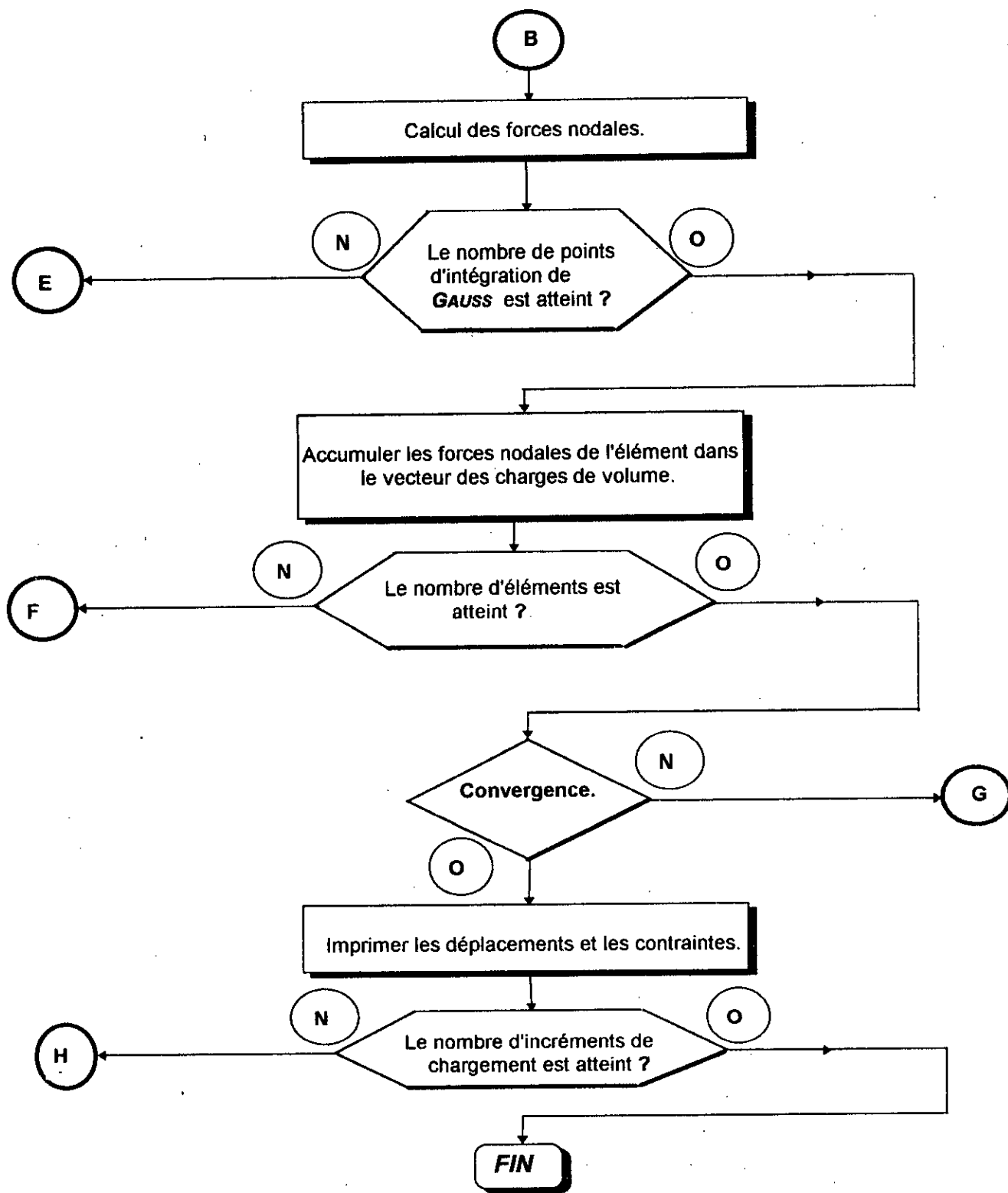


Figure. VI.3:
ORGANIGRAMME GENERAL: Cas de comportement linéaire

CHAPITRE 7

APPLICATION

APPLICATION

Pour cette application, le modèle élément fini utilisé contient 100 éléments isoparamétriques chaque élément est associé avec 8 noeuds: (Figure VII.1)

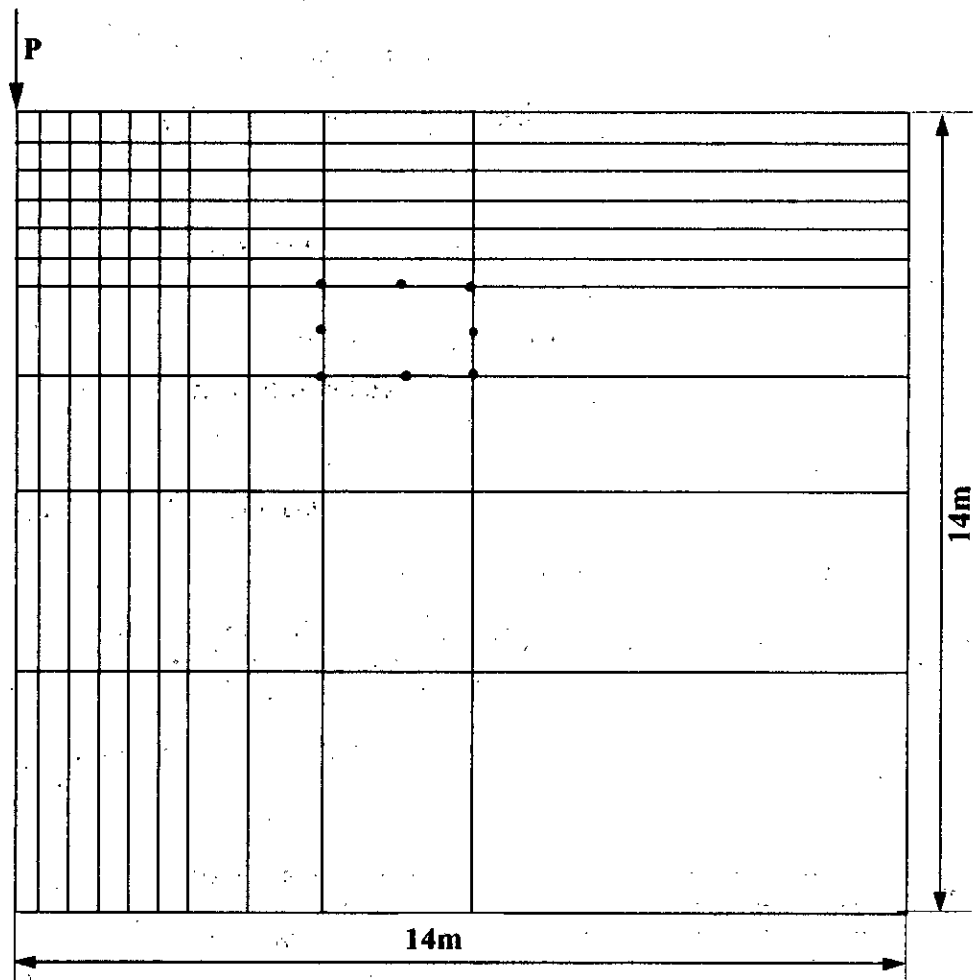


Fig.VII.1: Maillage éléments finis.

Le module tangent initial, le module tangent et le module de chargement - déchargement sont donnés par les relations suivantes:

$$E_t = K.P_s \cdot \left(\frac{\sigma_3}{P_s} \right)^n \quad (VII.1)$$

$$E_{ur} = K_{ur} \cdot P_r \left(\frac{\sigma_3}{P_r} \right)^n \quad (\text{VII.5})$$

Les paramètres : R_r, K, n, c, Φ , et K_{ur} sont déterminés à partir des essais triaxiaux sur deux types de sables: sable dense et sable lâche. Ces paramètres sont donnés par le tableau suivant: (Figure VII.2)

d_r (La densité relative)	ϕ (en degrés)	k	k_{ur}	n	R_r
100 % (sable dense)	36.5	2.000	2 120	0.54	0.91
38 % (sable lâche)	30.4	295	1 090	0.65	0.90
$C = 0$ pour les deux types de sables.					

Fig.VII.2 : Tableau des paramètres.

◇ Remarque:

Pour le coefficient du poisson ν on a pris la valeur: $\nu = 0.3$.

L'étude de cette application est basée sur une approche de **déformation plane**.

La charge: P est répartie linéairement suivant l'axe des: Y (Figure VII.3)

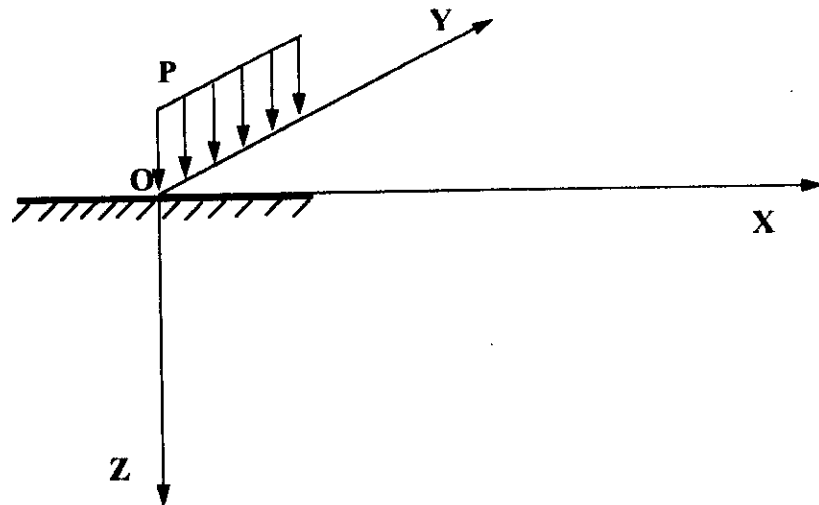


Fig. VII.3 : *Distribution de la charge.*

NOTATION:

- S.D** Sable dense.
- S.L** Sable lâche.
- P** La charge appliquée.
- P.S** Poids propre du sol.
- L** Comportement linéaire.
- N.L** Comportement non linéaire.

VII.1) COMPORTEMENT LINEAIRE:

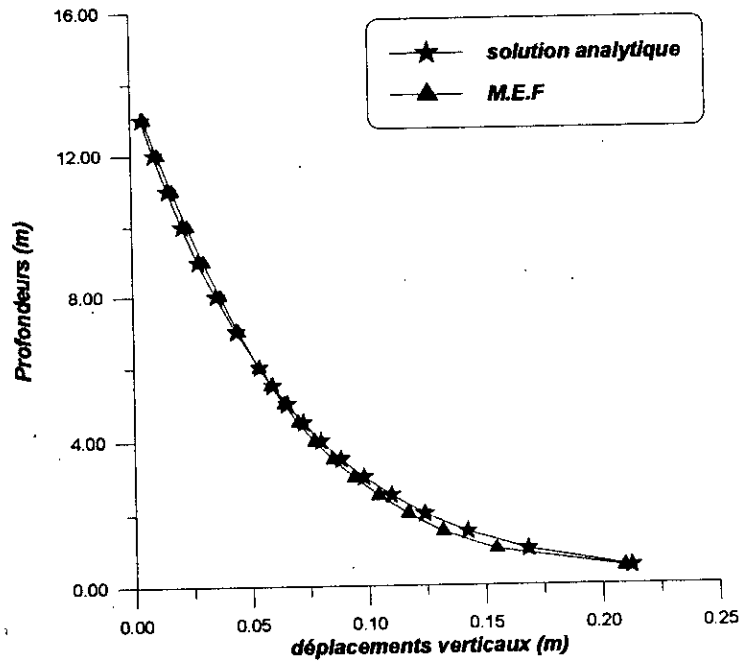


Fig.VII.4: Comparaison des déplacements entre les résultats analytiques et celles obtenues par la M.E.F.

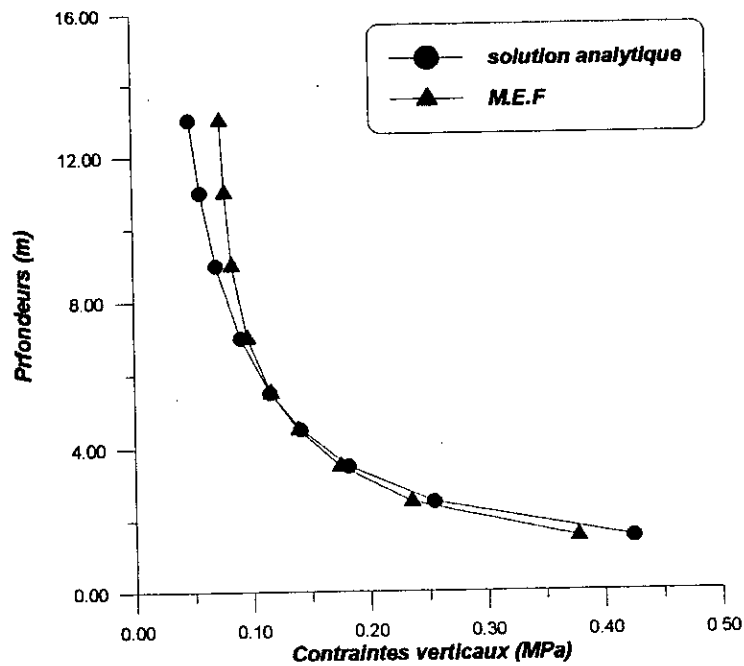


Fig.VII.5: Comparaison des contraintes entre les résultats analytiques et celles obtenues par la M.E.F.

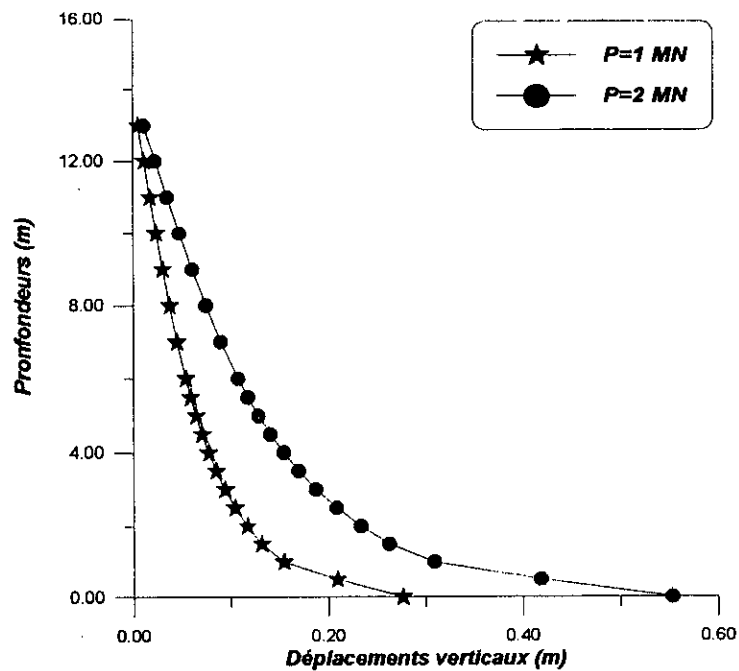


Fig.VII.6 Influence de la charge appliquée (S.L).

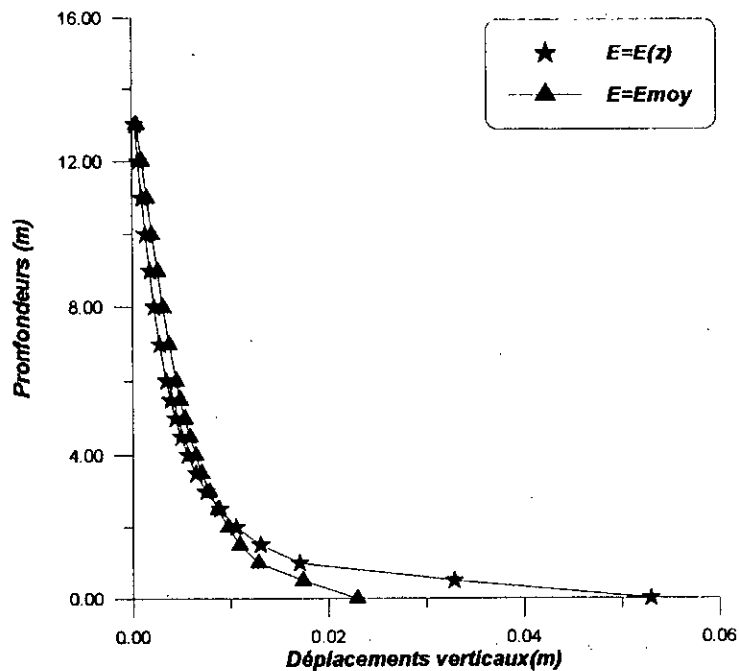


Fig.VII.7: Influence de la rigidité du sol (S.D): $P=2\text{ MN}$.

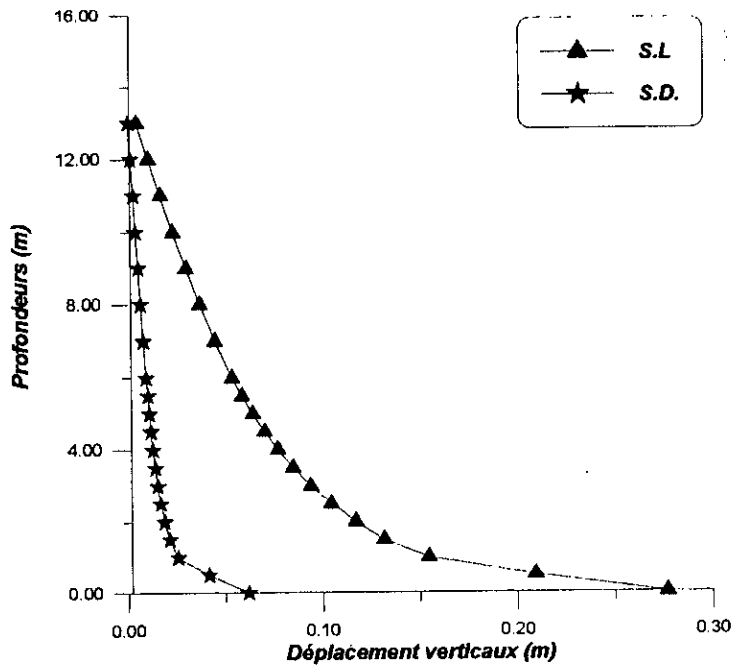


Fig.VII.8: Comparaison des déplacements entre les deux types du sable pour une charge P=1MN

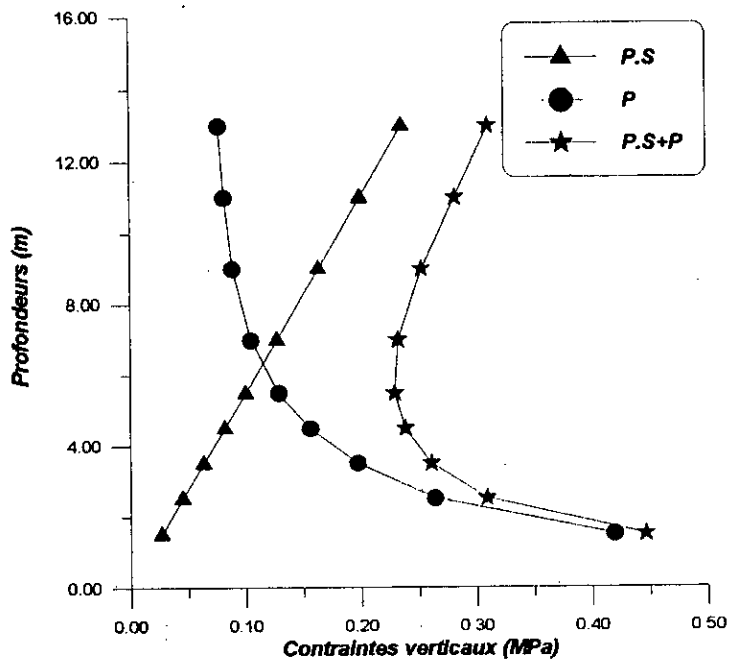


Fig.VII.9: Variation des contraintes dans un sable lâche(P=1MN).

VII.2) COMPORTEMENT NON LINEAIRE:

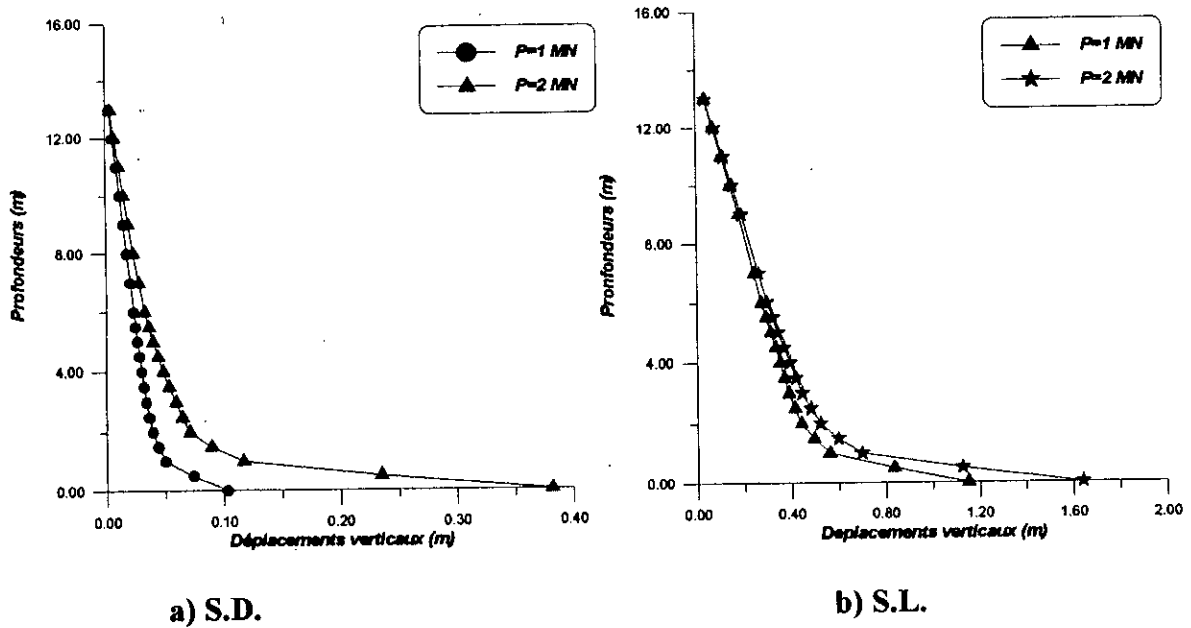


Fig.VII.10: Influence de la charge appliquée.

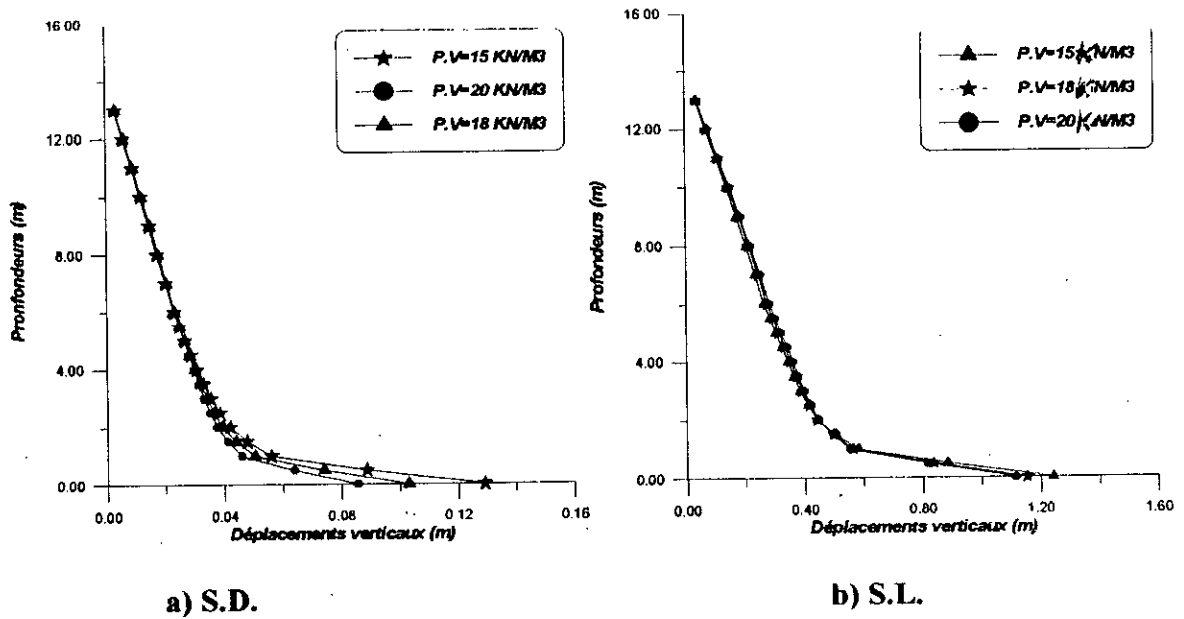


Fig.VII.11: Influence du poids volumique du sol.

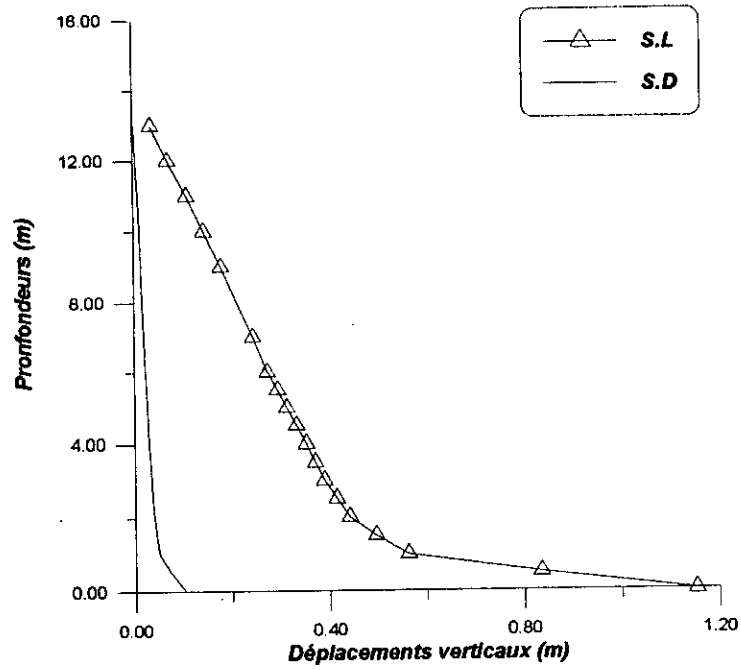


Fig.VII.12: Comparaison des déplacements entre les deux types du sable: P=1MN.

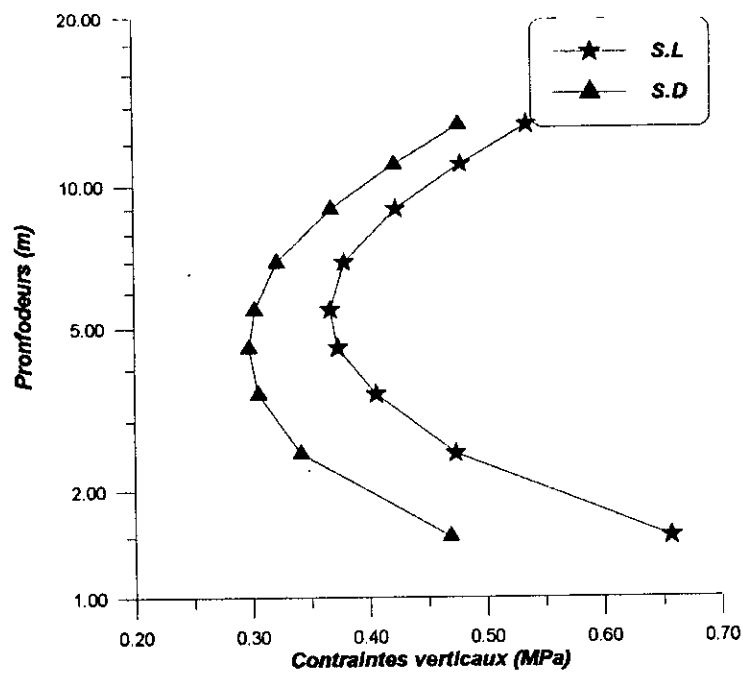
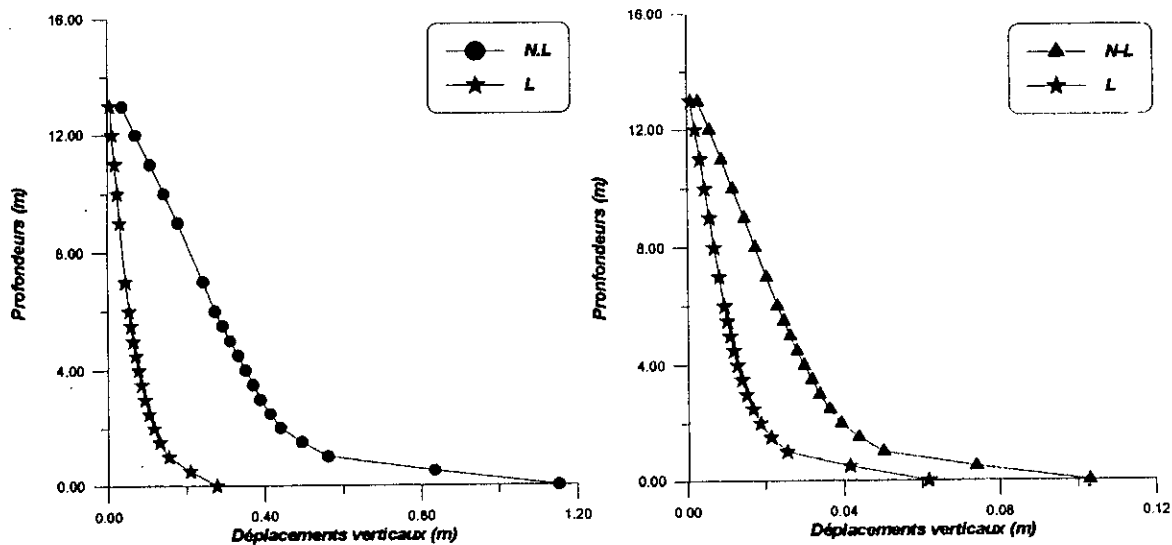


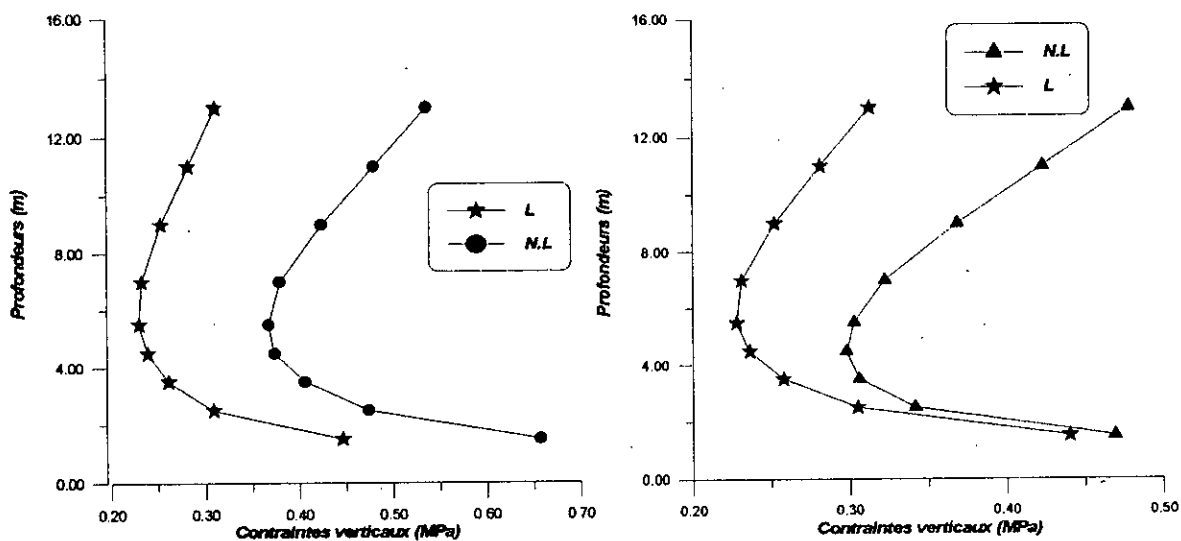
Fig.VII.13: Variation des contraintes dans les deux types du sol.



a) S.D.

b) S.L.

Fig.VII.14: Comparaison des déplacements entre les deux cas: (L. et N.L.)



a) S.D.

b) S.L.

Fig.VII.15: Comparaison des contraintes entre les deux cas: L. et N.L.

VII.3) CHARGEMENT - DECHARGEMENT:

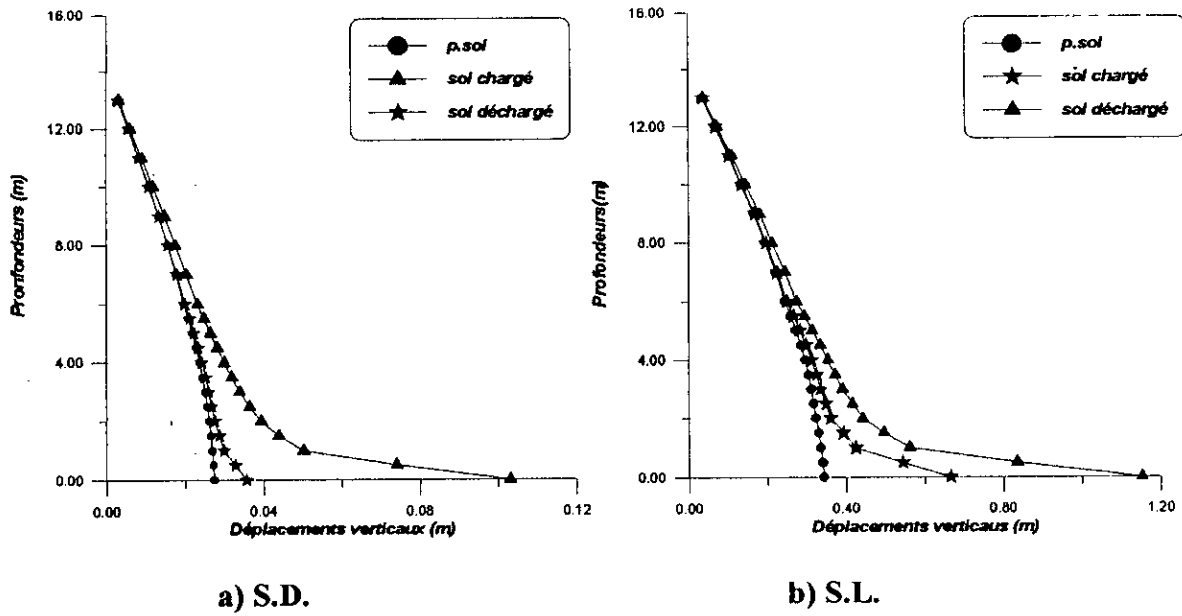


Fig.VII.16: Variation des déplacements dans les deux types du sable.

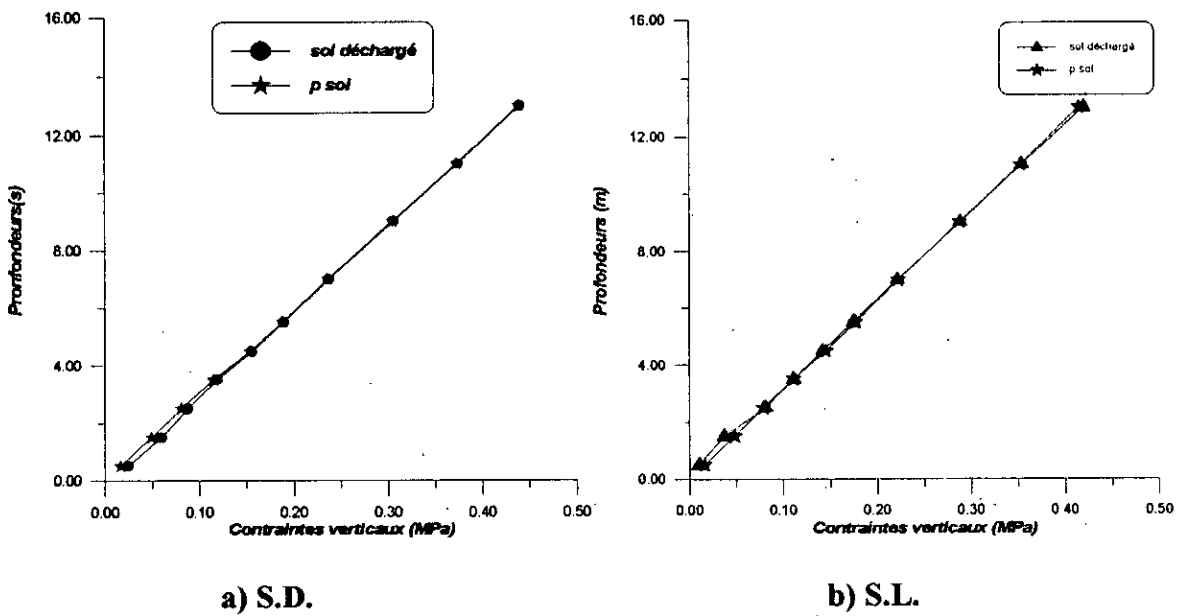


Fig.VII.17: Comparaison des contraintes après le déchargement et les contraintes engendrées par le poids du sol seulement.

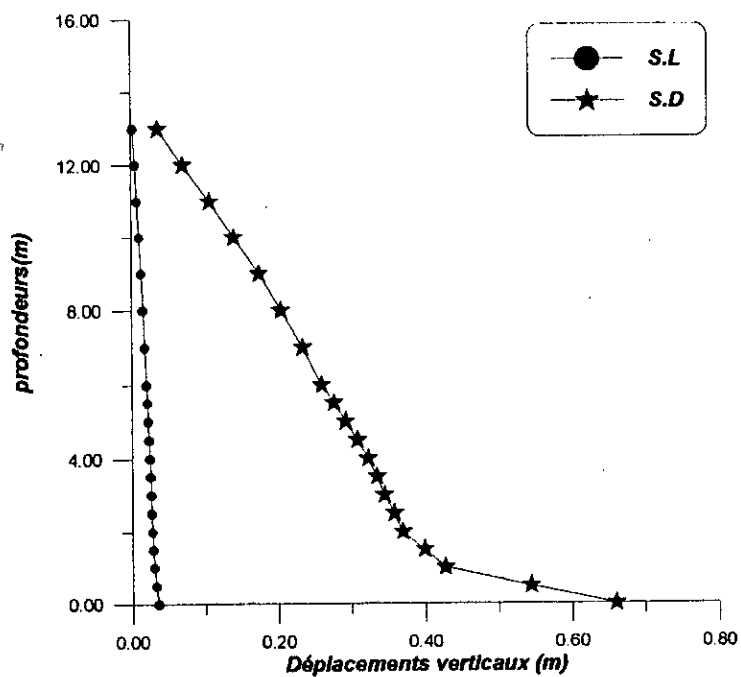


Fig.VII.18: *Comparaison des déplacements entre les deux types du sable après déchargement.*

VII.4) INTERPRETATION DES RESULTATS:

◆ Les résultats obtenues nous ont permis de tracer la variation des déplacements verticaux et les contraintes verticales en fonction de la profondeur.

◆ Il est à noter en premier lieu que la convergence des déplacements et les contraintes obtenues par la **M. E. F.** par rapport à la solution analytique est très satisfaisante (**Fig.VII.4 et VII.5**).

◆ Conformément aux résultats attendus, on voit que:

a) L'augmentation de la charge produit toujours une augmentation des déplacements dans les deux cas: linéaire et non linéaire (**Fig. VII.6 et VII.10**).

b) La diminution de la compacité relative produit une augmentation des tassements (**Fig.VII.8 et VII.12**)

c) Dans un sable dense, l'influence du poids volumique joue un rôle non négligeable au voisinage de la charge (**Fig.VII.14**).

d) Les déplacements sont beaucoup plus importantes au voisinage de la charge dans les deux cas linéaire et non linéaire (**Fig.VII.6 et VII.10**).

◆ La **figure.VII.14** met en évidence que dans le cas non linéaire les tassements sont plus importants que dans le cas d'une étude linéaire. Ceci dû au fait que dans le cas non linéaire, la rigidité au cours des tassements diminue par rapport à la rigidité initiale.

◆ L'étude d'un cas de chargement - déchargement a donné les résultats de la **figure.VII.16** dans le cas non linéaire où on remarque après déchargement, une apparition des déformations irréversibles notables principalement au voisinage de la charge appliquée.

- ◆ Dans le cas d'un sable lâche, on constate que les déformations irréversibles sont très grandes, ceci principalement est dû à la grande porosité initiale. (Fig.VII.18).

- ◆ Les contraintes sont importantes au voisinage de la charge où l'influence du poids propre du sol est négligeable par contre cet effet est remarquable quand on s'éloigne de la charge (Figure.VII.13 et . VII.9).

- ◆ On voit que le champ des contraintes après déchargement est pratiquement confondu avec le champ initial (Fig.VII.17).

- ◆ On remarque que le fait de prendre dans le cas linéaire E_{moy} pour l'ensemble du sol donne une approximation correcte pour l'obtention des tassements au de la d'une profondeur de 2 m . Au voisinage de la surface, cette approximation devient erronée, et la différence n'est plus négligeable (Fig.VII.7).

CHAPITRE 8

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

VIII.1) CONCLUSIONS:

Dans cette présente étude, nous avons étudié le comportement non linéaire du sol en utilisant le modèle de DUNCAN où l'analyse de ce comportement est réalisé avec la méthode des éléments finis.

Le modèle proposé par DUNCAN s'adapte bien à la méthode des éléments finis et aussi à la résolution des systèmes non linéaires avec la méthode incrémentale associée avec celle de NEWTON - RAISON modifié.

Ce modèle est élaboré essentiellement pour les milieux pulvérulents tel que les sables et les graviers. Ce comportement donne une représentation acceptable pour ces sols. L'analyse avec un tel modèle permet de mettre en relief d'une part le comportement non linéaire du sol et d'autre part le comportement non élastique du sol.

Cette non linéarité et cette non élasticité sont d'autant plus importantes que les charges appliqués sont plus grandes. Il s'en suit que pour de telles charges, il est tout a fait adéquat d'utiliser un modèle non linéaire.

Dans cette étude nous avons considéré que les sols pulvérulents où leur comportement est peu influencer par la présence de l'eau, contrairement à des sols cohérents pour lesquels il serait alors difficile et délicat de définir les paramètres c et ϕ à prendre compte pour le modèle.

VIII.2) RECOMMANDATIONS:

Pour l'étude du comportement linéaire élastique des sols nous avons utilisé l'hypothèse de petites déformations pour lesquelles les tenseurs des contraintes et des déformations et les relations contraintes - déformations sont relevées de la mécanique des milieux continus élastiques linéaires classiques (tenseur de CAUCHY).

Dans le cas de grandes déformations ou grands déplacements, cette étude n'est plus valable, il serait intéressant de voir ce qui se passe avec un modèle de ce type (DUNCAN) dans ce cas.

De plus, cette étude élaboré est basée sur un aspect statique il serait intéressant de voir l'aspect dynamique.

Nous avons limité nos applications a des exemples bidimensionnelles pour les raisons de souplesse. L'étude tridimensionnelle peut se faire d'une manière analogue, Le programme mis au point peut être presque totalement repris. Pour une étude détaillée de ce type, la seule modification portant sur l'élément fini à considérer (éléments, noeuds ...).

Finalement, il serait intéressant d'introduire ce type de modèle dans une analyse complète d'interaction sol - structures avec des éléments d'interface.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]-BATOS ET G. DAHTT , " Modélisation des structure par éléments finis"
Volume 1 *solides élastiques* EDITION HERMES (1990).
- [2]-BELKACEMI " Notes de cours: M.D.S." E.N.P. ALGER 1996.
- [3]-BERRAH M.K. " Notes de cours: M.M.C." E.N.P. ALGER 1996.
- [4]-BOUZIANE .,S " Modélisation non linéaire du comportement du sol par couplage
éléments finis - éléments d'interface et éléments infinis "*thèse de magistère* , E.N.P
ALGER (1996).
- [5]-CHEIKH TOUAMI, BOUDA "Analyse du phénomène de l'interaction sol -
fondation par la MEF - MEI.
- [6]-COSTES et SANGLERAT, " Cours pratiques de mécanique des sols " tome 1-2
DUNOD, PARIS (1981).
- [7]-DHATT.G,ET TOUZOT.G , " Une présentation de la méthode des éléments fini "
MALOINE EDITION (1984).
- [8]-JAMES M . DUNCAN and CHIN - YOUNG CHANG , " Journal of the soil
mechanics and foundations division " *Proceeding of the American Society of Civil
Engineers.*
- [9]-KETTAB.A,METICHE.R , "Mécanique des milieux continues " O.P.U ALGER
(1995).

- [10]-PECKER.A, " Dynamique des sols " Presse de l'E.N.P.C. PARIS 1984.
- [11]-PERZOZ.B " Introduction a l'étude de la *Rhéologie* " DUNOD , PARIS 1960.
- [12]-PHILIPPONAT " Fondations et ouvrages en terre " *Editions EYROLLES*
1979.
- [13]-REINER.M, " Rhéologie théorique " *Edition DUNOD* 1955.
- [14]-TIMOCHENKO , "Théorie de l'élasticité linéaire " *Edition MASSON PARIS*
(1951)
- [15]-ZIENKIEWICZ.O.C. " La méthode des éléments finis, formulation de base et
problèmes linéaires " *Edition AFNOR , PARIS* 1991.