

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

10/98

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT GENIE CIVIL

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE  
POUR L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT  
EN GENIE CIVIL



758ME

SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT  
DES CHAUSSEES SOUPLES

Proposé et dirigé par :

M. Pr. B.Tiliouine

Etudié par :

A. Y. Boubidi  
M<sup>ed</sup>.A. Bourega

PROMOTION 98

10, Avenue Hassen Badi - El-Harrach - ALGER  
Tel : (02) 52.53.01/03 Fax 52.29.73 (02) : ) E.MAIL. ENP@ IST.CERIST.DZ

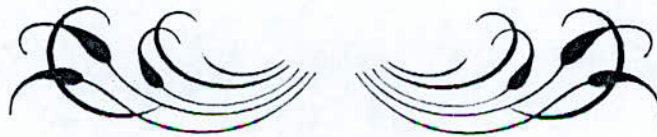
# DEDICACES

- \* A ma mère.
- \* A mon père.
- \* A ma sœur CHAHINEZ.
- \* A mon frère SAID.
- \* A toute ma famille.
- \* A mon binôme AMINE.
- \* A tous mes amis.

*Youcef*

- \* A ma chère mère qui m'a tout donné sans rien demander.
- \* A mon père à qui je dois énormément.
- \* A ma grande sœur OUAHIBA et sa petite famille.
- \* A ma petite sœur SAOUSSEN.
- \* A mes frères RAFIK le doc, SAMIR et ADEL.
- \* A mon oncle TAHER et à toute sa famille.
- \* A mon binôme préféré YOU.
- \* A tous mes amis(es).

*Amine*



# REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Nos vifs remerciements vont tout d'abord à notre promoteur le professeur M.B.TILIOUINE professeur au département de Génie Civil de VE-N-P pour nous avoir introduit à la problématique vaste et complexe du dimensionnement des chaussées souples et leur analyse par les techniques modernes de calcul.

A ce titre nous tenons à lui exprimer notre profonde reconnaissance ainsi que notre sincère gratitude pour les encouragements, les précieux conseils, ainsi que la disponibilité permanente qu'il a bien voulu nous prodiguer durant la durée du projet.

Nous tenons également à remercier M.A.SEGHIR ainsi que le personnel technique du C-T-T-P en particulier MM. BOUCHAMA et TOUATI, sans oublier bien sûr M.A.IKHLEF pour leur aimable collaboration.

Nous remercions du fond du cœur M. M.RABET et le personnel de la bibliothèque notamment AMMI MAHMOUD, AMMI SALAH et KRIMO, ainsi que RACHID du centre de calcul de Génie Civil.

Enfin, à tous les amis qui nous ont aidé de près ou de loin nous adressons nos sincères remerciements.

**Sujet :** Simulation numérique du comportement des chaussée souple.

**Résumé :** Le présent travail consiste en l'analyse du comportement mécanique des chaussées souples.

Un essai de plaque a été utilisé pour déterminer le module du sol-support, deux modèles de calcul basés sur une formulation axisymétrique ont été développés, le premier en éléments finis et l'autre par couplage d'éléments finis-infinis.

L'applicabilité de ces deux modèles est établie par comparaison systématique a des logiciels de calcul universels

---

**Subject :** Numerical simulation of a flexible road pavement behaviour.

**Abstract :** This work consists in an analysis of the mechanical behaviour of a flexible road pavement.

A plate loading test was used to obtain the support-soil moduls, two models based on an axisymetric formulation are implemented, the first one using finite elements, and the second one a combination of finite-infinite elements.

The applicability of this two models is established by comparision to a general purpose programs.

---

**الموضوع:** المماثلة الرقمية لتصرف الطرقات المرنة .

**الملخص:** تهدف هذه الدراسة إلى تحليل التصرف الميكانيكي للطرق المرنة .

تمت تجربة اللافتة للحصول على عامل مرونة التربة الحاملة . لهذا الغرض تم وضع نموذجين محوري التناظر باستعمال العناصر المحدودة والجمع بين العناصر المحدودة واللامحدودة .

تطبيق هذين النموذجين كان بالمقارنة مع عدة برامج عالمية .

# SOMMAIRE



Principales notations.  
Introduction générale

2

## Chapitre I

### Introduction au dimensionnement des chaussées.

. I-1- Introduction	6
. I-2- Différentes catégories de chaussées	7
. I-3- Modèles de la mécanique de chaussées	8
. I-3-1- Modèle monocouche- massif homogène	8
. I-3-1-a- Hypothèses	9
. I-3-1-b- Principales équations	9
. I-3-2- Modèles bi-couches	10
. I-3-2-a- Hypothèses	10
. I-3-2-b- Principales équations	11
. I-3-3- Modèles multicouches	12
. I-3-3-a- Hypothèses	12
. I-3-3-b- Principe de résolution	13

## Chapitre II

### Paramètres de dimensionnement des chaussées souples.

. II-1- Introduction	17
. II-2- Matériaux de chaussées souples	17
. II-2-1- le béton bitumineux (B-B)	18
. II-2-2- Les graves non-traitées (G-N-T)	19
. II-2-3- Le sol-support (S-S)	19
. II-3- Le trafic	19
. II-3-1- Agressivité du trafic	20
. II-3-2- Prise en compte du trafic dans le dimensionnement	20

## Chapitre III

### Essai de plaque

. III-1- Introduction	23
. III-2- Appareillage	23
. III-3 Conditions d'essai	24

. III-4-	Mode opératoire	25
. III-4-1	Préparation du sol et mise en place de la plaque	25
. III-4-2-	Chargement et déchargement	25
. III-5-	L'interprétation et la représentation des résultats	27
. III-5-1-	La courbe Contraintes- Tassements	27
. III-5-2-	Calcul du module de déformation $E_0$	27
. III-6-	Etude expérimentale sur sol reconstitué dans le moule prototype	29
. III-6-1-	Matériau utilisé	29
. III-6-2-	Conditions de l'expérimentation	29
. III-6-3-	Résultats	30
. III-6-4-	Conclusion	30

## Chapitre IV

### La méthode des éléments finis

. IV-1-	Introduction	34
. IV-2-	Historique	35
. IV-3-	Formulation M-E-F	36
. IV-3-1-	Formulation déplacement	37
. IV-3-1-1-	Introduction	37
. IV-3-1-2-	Etapas de base pour la détermination des caractéristiques de rigidité d'un élément	37
. IV-3-1-3-	Evaluation de la matrice de rigidité	38
. IV-3-1-4-	Détermination de la matrice de rigidité d'un élément	40
. IV-3-1-5-	Règle d'assemblage	42
. IV-4-	Convergence	43
. IV-4-1-	Convergence monotone	43
. IV-4-2-	Convergence non monotone	44
. IV-5-	Elément de référence isopramétrique	45
. IV-5-1-	Elément fini Q8	48
. IV-5-1-1-	Fonction de transformation géométrique et de forme	48
. IV-6-	Formulation d'un problème axisymétrique par la M-E-F	50
. IV-6-1-	Introduction	50
. IV-6-2-	Equations de base	51
. IV-7-	Intégration numérique	53
. IV-7-1-	Méthode de Gauss	54
. IV-7-1-1-	Intégration numérique dans les problèmes bidimensionnels	54
. IV-8-	Modélisation des chaussées par éléments finis	55
. IV-8-1-	Discretisation de la structure de chaussée par éléments finis	56
. IV-8-2-	Conditions aux limites et aux interfaces	56

## Chapitre V

### La méthode des éléments infinis

. V-1-	Introduction	59
. V-2-	Historique	59
. V-3-	Formulation des éléments infinis	61
. V-3-1-	Approche directe	61
. V-3-2-	Approche inverse	62
. V-3-2-1-	Principe de la construction de la fonction de transformation	63

. a-	Cas unidimensionnel	63
. b-	Cas bidimensionnel	64
. V-4-	Calcul de la matrice de rigidité	66
. V-5-	Couplage éléments finis - infinis	69

## Chapitre VI

### Approche du problème réel.

.VI-1-	Introduction	72
.VI-2-	Prise en compte d'un jumelage à partir d'un calcul axiymétrique	72
.VI-2-1-	Principe de la méthode	73
.VI-2-1-1-	Superposition des charges	73
.VI-2-1-2-	Application au problème traité	74
.VI-3-	Méthode d'Oedmark	76
.VI-3-	Introduction	76
.VI-3-2-	Principe de la méthode	76
.VI-3-3-	Facteur de correction	78

## Chapitre VII

### Présentation du programme

.VII-1-	Introduction	81
.VII-2-	Etapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis	81
.VII-3-	Présentation du programme d'éléments finis	83
.VII-3-1-	Modules de préparation de données	83
.VII-3-2-	Module principal	83
.VII-3-3-	Résolution du système $[K].\{U\}=\{F\}$	85
.VII-4-	Programmation des éléments infinis	88

## Chapitre VIII

### Simulation numérique

Présentation des applications et interprétation des résultats	92
---	----

Conclusion générale	120
---------------------	-----

Annexe

# Principales notations

## NB :

Certaines notations particulières peuvent être utilisées dans différentes parties, elles ne seront pas répétées.

$\Delta$  : Opérateurs laplacien.

$\frac{\partial F}{\partial x}$  ou  $F_{,x}$  : Dérivée partielle de la fonction F par rapport à la variable x.

dét M : Déterminant de la matrice M.

u : Déplacement radial ( ou horizontal ).

w : Déplacement vertical.

E : Module d'élasticité.

$\nu$  : Coefficient de poisson.

$\epsilon_r, \sigma_r$  : Déformation et contrainte radiales.

$\epsilon_\theta, \sigma_\theta$  : Déformation et contrainte tangentiels.

$\epsilon_z, \sigma_z$  : Déformation et contrainte verticales.

$\epsilon_{rz}, \sigma_{rz}$  : Déformation et contrainte de cisaillements.

[ $\epsilon$ ] : Vecteur des déformations.

[ $\sigma$ ] : Vecteur des contraintes.

[B] : Matrice des relations cinématiques.

[D] : Matrice d'élasticité.

[J] : Matrice jacobienne.



- $[K^e]$  : Matrice de rigidité élémentaire.
- $[K]$  : Matrice de rigidité globale.
- $\xi, \eta$  : Variables dans le repère locale (de référence).
- $X(\xi, \eta)$  : Position d'un point quelconque à l'intérieur de l'élément de référence.
- $U(\xi, \eta)$  : Déplacement d'un point quelconque à l'intérieur de l'élément de référence.
- $\varepsilon_6$  : Déformation a  $10^6$  cycle de chargement .
- $r, z$  : Variables dans le repère globale (réel ).
- $[X]$  : Vecteur colonne des positions des nœuds de l'élément.
- $[U]$  : Vecteur colonne des déplacement nodaux.
- $[P^T]$  : Vecteur ligne des polynômes.
- $[N^T]$  : Vecteur ligne des fonctions d'interpolations d'un élément fini Q8.
- $[F^T]$  : Vecteur ligne des fonctions de forme d'un élément semi- infini.
- $[T^T]$  : Vecteur ligne des fonctions de transformation géométrique.
- $a$  : Rayon de la charge.
- $d$  : Entre axe du jumelage.
- $n$  : Nombre de couche.
- $p$  : Charge concentrée.
- $q_0$  : Charge uniformément répartie.

Le reste des variables sont définies au cours de l'étude.

*INTRODUCTION  
GENERALE*

Les méthodes de dimensionnement de chaussées fondées sur l'analyse théorique des contraintes et des déformations dans les massifs multicouches et la comparaison des valeurs trouvées en laboratoire tend à replacer le dimensionnement des structures de chaussées dans le cadre général du dimensionnement des ouvrages en génie civil.

L'utilisation de ces méthodes rationnelles de calcul pour la représentation schématique d'une structure de chaussée est d'abord établie à partir de l'étude en laboratoire des propriétés des matériaux de chaussées (étude de module, étude de fatigue...etc.), une fois toutes les données rassemblées, le calcul proprement dit de la structure est complexe. Les variations de contraintes aux différents niveaux d'une structure multicouche, résultant du passage en surface d'une charge roulante sont d'une grande complexité. Des simplifications et des approximations sont nécessaires, c'est en cela que consiste la modélisation du problème, d'abord pour prévoir les contraintes et les déformations qui apparaîtront aux divers niveaux de la structure sous l'action du trafic, puis pour prévoir la réponse des matériaux sous l'effet de ces contraintes et déformations.

L'établissement d'un modèle de chaussée reproduisant le plus près possible le fonctionnement mécanique de la structure utilise une branche particulière de la mécanique des milieux continus dite «mécanique des chaussées».

Le domaine de la mécanique des chaussées est limité à deux ambitions : comprendre le fonctionnement des divers types de structures de chaussées et définir les règles de dimensionnement. Comme pour les autres structures en génie civil, le dimensionnement consiste tout d'abord à évaluer le niveau de sollicitation de la structure (ce qui pose le problème de la définition d'un certain nombre de paramètres représentatifs de son fonctionnement mécanique). Ce niveau de sollicitation est ensuite confronté aux paramètres limites des différents matériaux de chaussées (qui sont ici de limites en fatigue, c'est-à-dire sous sollicitations répétées).

Les modèles qui servent à évaluer ce niveau de sollicitation prétendent représenter d'une façon suffisamment réaliste les interactions entre les divers paramètres qui gouvernent le fonctionnement de la structure.

Ces modèles ont beaucoup évolué avec les structures de chaussées, cette évolution n'aurait probablement pas été aussi profonde si la généralisation de l'emploi des calculateurs numériques n'avait permis de résoudre des problèmes physiques d'une complexité accrue, soit à l'aide de méthodes numériques (différences finies, éléments finis), soit même en redécouvrant des modèles analytiques qui n'avaient pas pu connaître un grand développement par le passé, car l'obtention de résultats nécessitait trop de calculs manuels.

Le présent travail qui se base sur les méthodes rationnelles de dimensionnement, traite de la modélisation des chaussées souples (dites aussi, «chaussées traditionnelles») par éléments finis. Une suite d'approximation d'une réalité complexe est nécessaire, ainsi on approche le problème réel tridimensionnel par un problème axisymétrique, qui est très avantageux en temps de calcul, surtout lorsqu'on travaille avec des moyens informatiques réduits.

Des hypothèses sont aussi faites sur le comportement des matériaux qui est supposé élastique linéaire, en considérant que les contraintes et les déformations engendrées sont assez faibles.

Ce travail sera divisé en huit chapitres :

Chapitre I: dans ce chapitre nous présentons une étude bibliographique sur les différents modèles de la mécanique de chaussées.

Chapitre II: nous citerons ici les différents paramètres qui entrent dans le dimensionnement des chaussées, en définissant la notion de trafic ainsi que les différents matériaux constituant des chaussées souples.

Chapitre III: on présente brièvement l'essai de plaque qui fait partie des essais de laboratoire pour la détermination des propriétés mécaniques du sol à partir des courbes contraintes-tassements.

Chapitre IV : on consacre ce chapitre à une présentation de la M.E.F avec ses différentes formulations, ainsi qu'à son utilisation dans le dimensionnement des chaussées par la formulation d'un problème axisymétrique.

Chapitre V : ce chapitre sera consacré à une brève présentation de la méthode des éléments infinis, et l'application du couplage éléments finis-éléments infinis pour les structures étudiées.

Chapitre VI : nous présentons dans ce chapitre deux approches totalement différentes pour un dimensionnement pratique des chaussées souples, dans la première on présente le traitement d'un jumelage à partir d'un calcul axisymétrique, et dans la deuxième on présente une méthode approchée de dimensionnement se basant sur l'équivalence des couches (méthode d'**Oedmark**).

Chapitre VII : on présente le programme d'éléments finis, et celui du couplage éléments finis-éléments infinis élaborés pour la résolution d'un problème axisymétrique.

Chapitre VIII : les différentes applications sont présentées dans ce chapitre, les résultats obtenus servent à valider les modèles élaborés.

*CHAPITRE I*  
*INTRODUCTION*  
*AU DIMENSIONNEMENT DES*  
*CHAUSSES*

**I-1-Introduction :**

L'utilisation des méthodes rationnelles de dimensionnement fondées sur l'analyse théorique des contraintes et des déformations et leurs comparaison à des valeurs limites trouvées en laboratoire lors d'essais sur les matériaux, est relativement récente pour le dimensionnement des chaussées. L'utilisation de ces méthodes de dimensionnement qui tend à replacer le dimensionnement des structures de chaussées dans le cadre général du dimensionnement des ouvrages de génie civil fait maintenant l'objet d'un large consensus malgré les hésitations du premier temps.

Néanmoins, le dimensionnement des chaussées présente de nombreuses particularités.

Tout d'abord, on peut distinguer deux approches différentes de dimensionnement, celle qui relève de l'empirisme, et celle qui relève de la théorie.

Pour la première citée, le dimensionnement se base sur l'observation sous trafic des chaussées réelles ou expérimentales, et l'établissement par des méthodes statistiques, de relations entre leur durée de vie et les caractéristiques géométriques, ainsi que les propriétés mécaniques des matériaux qui les composent.

Cette approche purement empirique présente l'inconvénient majeur de nécessiter un très grand nombre de sections à observer, pour déterminer l'influence des nombreux paramètres intervenant dans le dimensionnement, et donc présente un coût très élevé, de plus les relations obtenues ne sont valables que pour les matériaux, les conditions d'environnement ainsi qu'au type de chargement, particuliers à l'expérimentation, et ne peuvent donc pas être généralisées.

L'approche théorique qui utilise une branche particulière de la mécanique des milieux continus dite « mécanique des chaussées » se base sur une modélisation de la chaussées. Le modèle établi doit reproduire le plus près possible le fonctionnement mécanique de la structure, à l'aide de ce modèle on détermine les sollicitations que subissent les matériaux de chaussées et le sol support sous l'effet du trafic, ces sollicitations sont ensuite comparées aux sollicitations admissibles.

Cette méthode qui se base sur des modèles mathématiques a fait d'énormes progrès avec l'apparition de puissants moyens de calcul.

En réalité l'approche théorique n'est pas très disjointe de la première, car elle conserve une certaine part d'empirisme ou en tout cas, nécessite un calage par référence au comportement des chaussées réelles.

Donc les méthodes de dimensionnement des chaussées ne sont en fait que des méthodes de vérification des structures de chaussées préalablement établies, et la phase de conception est une phase tout à fait essentielle dans ce domaine. Lors de cette phase beaucoup de problèmes ne pourront être abordés par les calculs, et les méthodes de dimensionnement ne seront pas d'un grand secours, car il n'est pas envisageable de vérifier toutes les conceptions possibles, il est donc clair que cette phase relève du choix d'une politique routière à adopter.

## I-2-Différentes catégories des chaussées.

On présente sur la figure 1-1, les différentes catégories de chaussées que l'on peut rencontrer. Celles que l'on se propose d'étudier représente les structures traditionnelles appelées : chaussées souples.

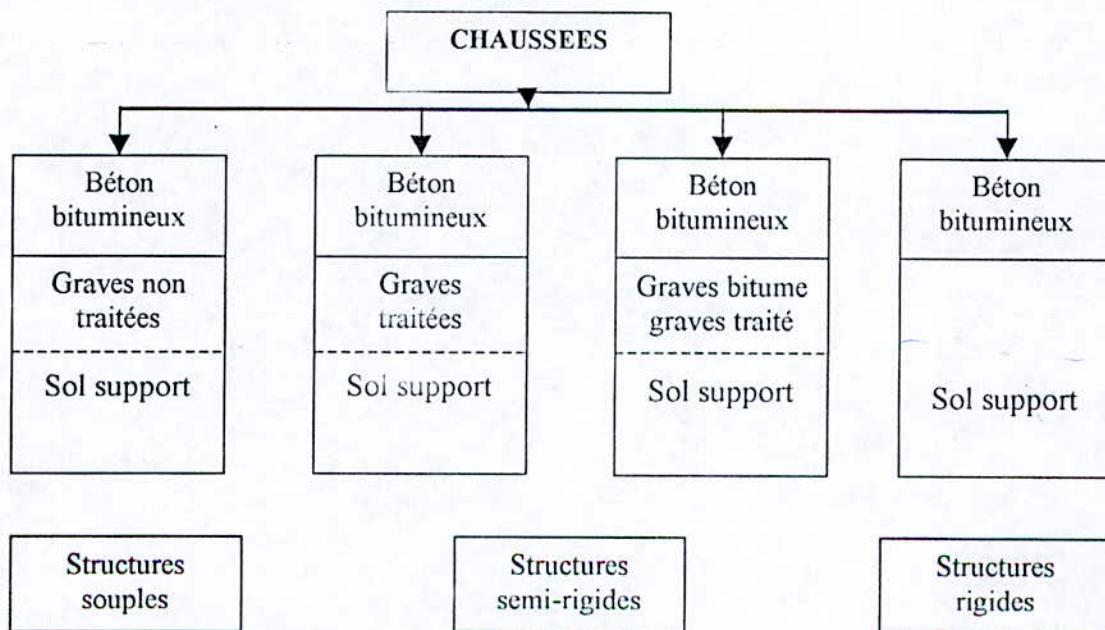


Fig. 1-1- Types de chaussées classiques



### I-3-Modèles de la mécanique des chaussées :

On présente dans ce paragraphe, un bref aperçu sur les modèles de chaussées qui ont fait l'objet d'études théoriques par certains auteurs. Pour ce qui concerne les chaussées souples, ces modèles présentent l'handicap de n'être adapté qu'au comportement élastique linéaire des matériaux qui composent la structure. Néanmoins, ils permettent de valider les calculs effectués par la méthode des éléments finis avec le même type de comportement. Ceci apparaît notamment dans le cas du modèle de **Burmister** qui sert de base au programme de calcul **Alize** largement répandu dans les laboratoires des ponts et chaussées et dans la profession.

#### I-3-1-Modèle monocouche –massif homogène :

Le modèle monocouche proposé par **J- Boussinesq** en 1885, considère un massif semi-infini à une charge ponctuelle ou une charge répartie (fig. 1-2 ).

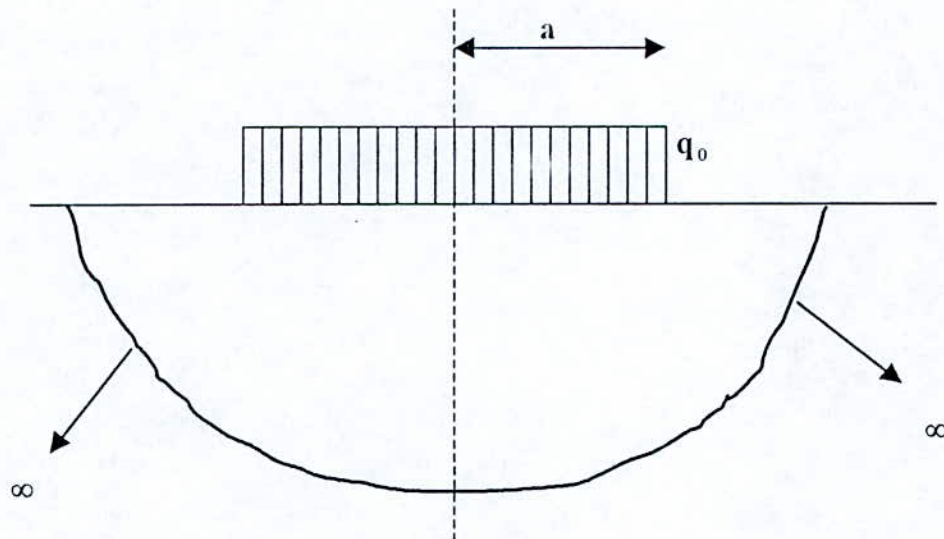


Fig. 1-2- Modèle de Boussinesq 1885

**I-3-1-a-Hypothèses :**

Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

- Massif homogène équivalent à un espace semi - infini.
- Charge concentrée  $P$  ou uniformément répartie  $q_0$  sur un disque de rayon  $a$ .

**I-3-1-b-Principales équations :**

On donne les expressions des contraintes et des déplacements pour chaque type de chargement ( Timoshenko et Goodier, 1934 ).

Pour  $P$  charge concentrée avec :  $\rho = r^2 + z^2$

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} \rho^{-1/2} \right] - 3r^2 z \rho^{-5/2} \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left\{ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} \rho^{-1/2} + z \rho^{-3/2} \right\}$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} z^3 \rho^{-5/2}$$

$$\sigma_r = -\frac{3P}{2\pi} r z^2 \rho^{-5/2}$$

$$W = \frac{P}{2\pi E} \left[ (1+\nu) z^2 r^{-3/2} + 2(1-\nu^2) \rho^{-1/2} \right]$$

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)p}{2\pi E r} \left( z\rho^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{(1-2\nu)} r^2 z\rho^{-\frac{3}{2}} \right)$$

Pour  $q_0$  charge répartie avec :  $\rho_a = a^2 + z^2$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{q_0}{2} \left[ -(1+2\nu) + \frac{2(1+\nu)z}{\sqrt{\rho_a}} - \left( \frac{z}{\sqrt{\rho_a}} \right)^3 \right]$$

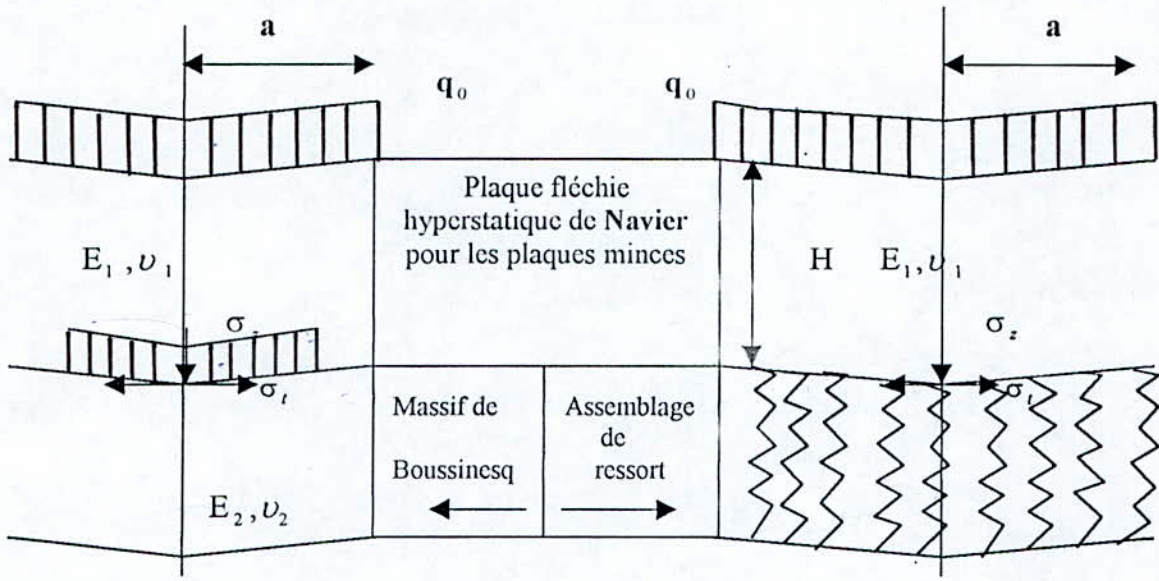
$$\sigma_r = q_0 \left[ -1 + \frac{z''}{\rho_a^{\frac{3}{2}}} \right] \quad \text{et avec} \quad \Psi = \frac{a}{r} \sin \theta, \text{ on a :}$$

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q_0 r}{\pi E} \left[ \int \sqrt{1-\psi^2} d\theta - \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\psi^2}} \right]$$

### I-3-2-Modèles bicouches :

#### I-3-2-a-Hypothèses :

Hogg 1938 et Westergaard 1926 ont étudié les solutions théoriques d'un modèle bicouche selon deux hypothèses différentes concernant le sol support (fig. 1-3).



a- Modèle de Hogg 1938

b- Modèle de Westergaard 1926

Fig. 1-3- Modèles bicouches

**I-3-2-b-Principales équations :**

Dans le cas particulier où  $V_1 = V_2 = V$  l'expression de la contrainte de traction dans la plaque pour un modèle de **Hogg** est donnée en (1), la fonction  $F$  dépendant de la rigidité de la plaque.

$$\sigma_t = \frac{P}{H^2} \frac{1+\nu}{2\pi} F\left(\frac{E_1 H^3}{E_2 a^3}\right) \tag{1}$$

L'expression de la contrainte de traction dans la plaque pour le modèle de **Westergaard** et dans le cas de charge circulaire au centre de la dalle donne une expression à rapprocher de celle fournie par le modèle de **Hogg**.

$$\sigma_t = \frac{P}{H^2} \frac{1+\nu}{2} F\left(\frac{E_1 H^3}{E_2 a^3}\right)$$

On ne s'étendra pas plus ces modelés car ils n'interviendront pas dans notre travail (pour plus de détails, réf. 10).

### I-3-3-Modèles multicouches (Burmister 1943) :

Les modèles bicouches que l'on vient de voir sont intéressants puisqu'ils permettent de déterminer les grandes tendances de variations (rôle de l'épaisseur, rôle de module entre couches, influence du rayon de chargement ...). On a, néanmoins, très vite souhaité passer à des modèles à  $n$  couches parce qu'ils facilitent grandement la schématisation des structures : une structure traditionnelle est mieux représentée par un schéma tricouche (sol, corps granulaire et enrobé) ; il en est de même pour les assises traitées (sol, assise, enrobé éventuellement décollé de l'assise) ; dans les études de renforcement, des schémas de structure faisant intervenir un nombre de couches plus important encore, sont souhaitables (par exemple trois couches pour l'ancienne chaussée et deux pour le renforcement).

#### I-3-3-a-Hypothèses :

**Burmister** a traité le problème général à  $n$  couches schématisé sur la figure 1-4. Il s'agit là d'un modèle assez puissant, puisque :

- Toutes les couches sont traitées comme des solides élastiques (on évite l'hypothèse de plaque).
- Les interfaces entre couches peuvent être au choix, soit collées, soit décollées, et une même structure peut comporter des couches collées et des couches décollées.
- Le cas de charges multiples (jumelages, essieux tandem ...) peut être traité en additionnant les effets de charges élémentaires.

La principale limitation de ce modèle réside dans le fait que, comme dans le modèle de **Boussinesq** ou de **Hogg**, les couches sont infinies en plan. Le modèle ne permet donc pas d'aborder les effets de bord (charge au bord d'une fissure ou au bord de la chaussée). On remarque néanmoins que les bords sont en général suffisamment éloignés de la bande de roulement, pour que l'hypothèse de couches infinies puissent être le plus souvent adoptée (ce n'est pas exact dans le cas particulier des dalles de béton pour lesquelles il est nécessaire d'effectuer des calculs pour des charges en bord ou en angle de dalle).

On remarque par ailleurs que c'est cette hypothèse de couches infinies en plan qui facilitent grandement les calculs. En effet, si on suppose que la charge appliquée (ou que chacune des charges élémentaires appliquées) est circulaire, le problème traité possède une symétrie de révolution. La prise en considération de cette symétrie facilite grandement les calculs par l'utilisation de coordonnées cylindriques.

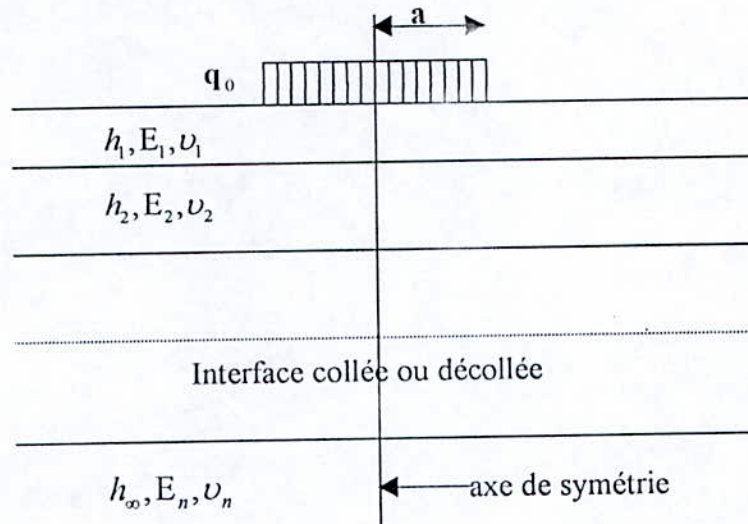


Fig.1-4- Modèle de Burmister

### I-3-3-b-Principe de résolution :

Dans le cas de structures composées de  $n$  couches de caractéristiques élastiques différentes, on recherche  $n$  fonctions définies, dans chacune des couches  $i$  par l'équation :

$$\Delta^2 \Phi(r, z) = 0 \quad (\text{où } \Delta^2 \text{ est l'opérateur biharmonique})$$

et par les conditions à la limite (interface supérieure et interface inférieure de la couche)

Cette équation devient beaucoup plus simple si l'on procède à une transformation de Henkel d'ordre zéro du plan  $(r, z)$  au plan  $(m, z)$  on obtient alors :

$$\Phi_i(r, z) \Phi_i(m, z) = \int_0^{+\infty} r j_0(mr) \Phi_i(r, z) dm$$

Où  $j_0$  est la fonction de **Bessel** d'ordre zéro. On aboutit à un système d'équations différentielles du quatrième ordre :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2\right)\Phi_i(m, z) = 0 \quad \text{où } \Phi_i(m, z) = H_0(\Phi_i(r, z)).$$

Les solutions de ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\Phi_i(m, z) = Y(m) \{ [A_i(m) + C_i(m)z]e^{mz} - [B_i(m) + D_i(m)z]e^{-mz} \}$$

$A_i(m), B_i(m), C_i(m), D_i(m)$  : fonctions qui dépendent des conditions aux limites du problème et du type d'interface entre les couches ( collées ou décollées) ;

$Y(m)$  est une fonction arbitraire ; **Burmister** propose de prendre cette fonction égale la transformée de **Henkel** d'ordre zéro de la fonction de charge  $P(r)$ .

La transformée inverse de **Henkel** permet de revenir à l'expression de  $\Phi_i(r, z)$  de façon suivante :

$$\Phi_i(m, z) \Phi_i(r, z) = \int_0^{+\infty} m j_0(mr) \Phi_i(m, z) dm$$

expression qui s'écrit explicitement :

$$\Phi_i(r, z) = \int_0^{+\infty} m j_0(mr) Y(m) \{ [A_i(m) + C_i(m)z]e^{mz} - [B_i(m) + D_i(m)z]e^{-mz} \} dm$$

En appliquant les conditions aux limites et aux interfaces suivantes :

- A la surface ( $z=0$ ), avec  $R_c$  le rayon de la charge, on a :

$$\sigma_{z_i} = p \quad \text{pour} \quad 0 < r < R_c \quad \text{et} \quad \sigma_{z_i} = 0 \quad \text{pour} \quad r > R_c$$

- Pour  $z \rightarrow +\infty$  et pour une distance radiale fixée, les déplacements et les contraintes sont nuls, ce qui entraîne :  $A_n(m) = C_n(m) = 0$

- Les interfaces étant collées, les conditions de continuité s'écrivent comme suit :

$$u_i = u_{(i+1)} \quad w_i = w_{(i+1)} \quad \sigma_{z_i} = \sigma_{z_{(i+1)}} \quad \sigma_{rz_i} = \sigma_{rz_{(i+1)}}$$

On peut alors déterminer les expressions des contraintes et des déplacements par les équations de la mécanique des milieux continus en tout points de la structure.

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right], \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right], \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad w = \frac{1 + \nu}{E} \left[ (1 - 2\nu) \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right], \quad u = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}$$



*CHAPITRE II*

*PARAMETRES DE  
DIMENSIONNEMENT DES  
CHAUSSES SOUPLLES*

### II-1-Introduction :

La durée de vie d'une chaussée est liée à la fatigue des matériaux qui la composent. Pour le béton bitumineux, la fatigue ne semble être liée qu'à la déformation qu'il subit. Pour les sols supports, mis à part l'aspect de rupture plastique, la fatigue se traduit par des tassements. Enfin pour les matériaux granulaires, la fatigue reste très sensible à leur état hydrique qui provoque une chute de rigidité notable. Le dimensionnement des chaussées souples est basé sur les paramètres suivants :

- La déformation radiale à la base de la couche de béton bitumineux qui doit être limitée pour empêcher sa rupture par fatigue (fissuration).
- La déformation verticale à la surface du sol support qui doit être limitée pour cause d'orniérage.

### II-2-Matériaux de chaussées souples :

Les chaussées souples conçues pour un faible trafic comportent :

- ◆ Une couche de béton bitumineux relativement mince (2 à 12 cm).
- ◆ Une ou plusieurs couches de graves non traitées (20 à 60 cm au total).
- ◆ Un sol support.

Certains matériaux ont un comportement élastique linéaire isotope qui a pour caractéristiques mécaniques :

- Module d'élasticité :  $E$  constant.
- Coefficient de poisson :  $\nu$  constant.

Un comportement élastique linéaire orthotrope est aussi envisageable. On ne développe pas cet aspect car il n'intervient pas dans ce cadre de ce travail.

**II-2-1-Le Béton bitumineux (B-B) :**

Le béton bitumineux est un matériau utilisé comme couche de roulement pour les chaussées souples avec une épaisseur relativement faible ( $< 15$  cm) par rapport aux autres couches. On adopte en général les valeurs suivantes du module d'élasticité et de l'allongement vertical à  $10^6$  cycles :

$$E = 6000 \text{ MPa et } \epsilon_6 = 150 \cdot 10^{-6} \text{ pour des températures entre } 20 \text{ et } 30 \text{ }^\circ\text{C.}$$

On passe à des matériaux bitumineux beaucoup plus rigides en utilisant des graves-bitumes enrichies qui présentent des modules plus élevés :  $E = 9000$  à  $10000$  MPa et des allongements plus faibles :  $\epsilon_6 = 90 \cdot 10^{-6}$  à  $120 \cdot 10^{-6}$  pour des températures supérieures à  $30$  °C.

Ces derniers matériaux ne seront pas considérés dans notre étude.

Les valeurs de  $\epsilon_6$  sont des valeurs obtenues en laboratoire, elles doivent être multipliées par un coefficient de calage pour tenir compte du comportement sur route : 1.1 pour les bétons bitumineux

Etant donné la faible épaisseur de cette couche de matériau, on se contentera d'un comportement élastique linéaire en comportement réversible. Bien que certains auteurs aient avancé dans la recherche concernant la fatigue de ces matériaux. Cet aspect ne sera pas pris en compte dans ce travail.

**II-2-2-Les graves non traitées (G-N-T) :**

Les G-N-T sont des matériaux souvent utilisés comme couches de base et de fondation des chaussées souples. Ces matériaux présentent les particularités suivantes :

- ◆ Selon les essais effectués en laboratoire à l'appareil triaxial à chargements répétés, on observe un comportement élastique non linéaire ( la rigidité dépend de l'état de contrainte qui règne dans les matériaux ).

♦ Ce sont des matériaux dont le caractère non-lié ne leur permet pas de supporter de fortes tractions, la plupart des études entreprises jusqu'à ce jour considèrent que les comportements adoptés ne doivent faire apparaître aucune traction. Toutefois, il a été observé que le peu de cohésion que peuvent avoir ces matériaux, surtout en présence d'eau provoquant une succion, leur assure une certaine résistance à la traction et une rigidité minimale.

### II-2-3-Le sol support :

La démarche logique de la connaissance d'un sol-support de chaussée comporte trois étapes distinguées :

- ♦ Une identification géotechnique qui permet de rattacher le comportement prévisible de ce sol au comportement général d'une famille connue. Cette étape s'appuie sur une classification des sols.
- ♦ Une étude des paramètres d'état, car pour une famille de sols donnée, il existe des paramètres caractéristiques de leur comportement et il est important d'en situer la valeur par rapport à une valeur de référence. On s'appuie ici sur la courbe **Proctor-CBR**.
- ♦ Une évaluation de la portance : contenu de la valeur des paramètres d'état (par exemple de la teneur en eau), on cherche ici à obtenir une évaluation chiffrée de la capacité de portance, on utilise par exemple l'essai de plaque qui sera présenté plus en détail dans le chapitre 3, ou alors l'essai **CBR** [California Bearing Ratio ] qui est utilisé pour évaluer la portance des sols sensible à l'eau.

D'autres éléments que les seuls éléments géotechniques sont néanmoins nécessaires pour effectuer l'analyse des contraintes et des déformations dans une structure de chaussées, ces autres éléments sont issus d'étude générale de laboratoire et de l'observation des comportements des chaussées.

### II-3-Le trafic :

Le trafic est notamment le trafic poids lourds, est l'un des paramètres prépondérants du dimensionnement des chaussées ; il est nécessaire de l'analyser en terme d'agressivité vis-à-vis des chaussées sur lesquelles il circule.

### II-3-1-Agressivité de trafic :

Le passage d'une charge lourde sur une chaussée provoque des dommages de différentes natures :

1- Le support de la chaussée, sol- support ou couche de forme en matériaux non traités, enregistre à chaque passage d'une charge, une déformation permanente fonction de la contrainte verticale qui lui est appliquée. L'accumulation de ces déformations permanentes se traduit à la surface de la chaussée par des déformations du profil, du moins en ce qui concerne les chaussées traditionnelles. Sous les assises traitées aux liants hydrauliques ou hydrocarbonés, les contraintes verticales sur le support sont suffisamment faibles pour que les déformations permanentes restent modérées.

2- Les structures de chaussées qui comportent des couches liées fléchissent à chaque passage de la charge. Ce fléchissement donne lieu, à la base de la chaussée, à des contraintes de tractions par flexion, la répartition de ces contraintes de traction conduit à une accumulation de dommages de fatigue qui provoquera à terme la ruine de la chaussée (fissuration). Ce mode de rupture par flexion répétée constitue le mode principal des ruptures des chaussées comportant des assises traitées (liants hydrauliques ou hydrocarbonés).

3- Le passage de charges peut aussi entraîner d'autres dommages dans la couche de surface de la chaussée. Le revêtement peut s'user jusqu'à devenir glissant (effort tangentiel), la répétition de contraintes verticales peut conduire, sur certains revêtements, à un orniérage notable (fluage).

Les modèles de calculs les plus courants, ne permettent d'étudier que les dommages des deux premiers types. Les dommages du troisième type sont plus difficiles à appréhender par le calcul.

### II-3-2-Prise en compte du trafic dans le dimensionnement :

Rappelons que le dimensionnement des chaussées est un dimensionnement à la fatigue, les matériaux de chaussées étant choisis par ailleurs pour répondre à d'autres exigences telles que la résistance au fluage et les caractéristiques antidérapantes.

Caractériser le trafic en vue du dimensionnement d'une chaussée, c'est en fait déterminer le nombre  $n_{eq}$ , trafic cumulé équivalent au trafic devant réellement circuler sur cette chaussée pendant sa durée de vie, telle qu'elle a été conventionnellement définie. On en déduit ensuite les contraintes et les déformations à ne pas dépasser dans les différents matériaux de la chaussée. Ce nombre  $n_{eq}$  est fonction :

- Du trafic à la mise en service, exprimé en nombre de poids lourds ou en nombres d'essieux ;
- De l'agressivité de ce trafic, exprimé en nombre d'essieux standards ;
- De la durée considérée et du taux de croissance.

Selon les méthodes, c'est le nombre de cycles  $n_{eq}$  ou le trafic à la mise en service qui constitue le paramètre d'entrée dans les méthodes pratiques de dimensionnement.

La détermination de  $n_{eq}$  nécessite de faire des hypothèses et des choix sur l'agressivité du trafic, la durée de service de la chaussée et le taux de croissance. Selon les cas; ces hypothèses et ces choix seront implicites (cas du catalogue des structures- types de chaussées neuves ) ou laissés au choix du maître d'ouvrage (cas du manuel de conception des chaussées neuves à faible trafic).

*CHAPITRE III*

*ESSAI DE PLAQUE*

### III-1- Introduction :

L'essai de plaque est applicable dans les travaux de terrassement et dans la construction des routes et des aéroports. Il est utilisé pour le contrôle de compactage du sol pour obtenir des valeurs de base pour le dimensionnement des chaussées de routes et pistes d'aérodromes.

Le but de l'essai de plaque est la détermination de courbes pressions – tassements à l'aide desquelles on apprécie la déformabilité et la portance du sol. Les courbes contraintes – tassements permettent la détermination du module de déformation  $E_v$  et du module de réaction  $K_s$ .

L'essai de plaque est un essai où le sol est chargé et déchargé plusieurs fois par une plaque circulaire à l'aide d'un dispositif de pression. Les contraintes normales moyennes sous la plaque  $\sigma_0$  et les tassements correspondants  $S$  des différents paliers de charges sont représentés comme ligne de contrainte – tassement dans un diagramme.

Dans ce qui suit l'essai de plaque désigne l'essai réalisé sur sol reconstitué dans le moule prototype du C.T.T.P. et non l'essai de plaque in-situ.

### III-2-Appareillage :

L'appareillage nécessaire pour la réalisation de l'essai de plaque comprend :

- ◆ **Moule prototype** : hauteur = 1m , diamètre = 0.92m.
- ◆ **Contrepoids** : Pour l'exécution de l'essai de plaque il faut un contrepoids qui doit être au moins 1 T plus lourd que la charge maximum de l'essai. Le contrepoids utilisé est constitué d'un portique en acier solidaire au moule, dimensionné de manière à supporter une charge maximale de 13 tonnes.



- ◆ **Plaque** : une plaque de 300 mm de diamètre et 25 mm d'épaisseur. (fig.3-1)

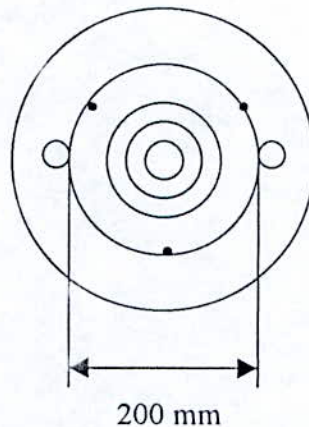


Fig. 3-1-Schématization d'une plaque  $\varnothing$  300 mm

- ◆ **Générateur de pression** : Le dispositif est constitué d'un vérin hydraulique d'une capacité de 5 tonnes.
- ◆ **Dynamomètre** : La force est mesurée directement par un dynamomètre disposé entre le vérin et le contrepoids
- ◆ **Poutraison de référence** : Constituée de deux poutres en acier rigide et indéformable sur lesquelles sont fixés les comparateurs destinés à mesurer la déflexion de la plaque. Les deux poutres prennent appui sur les bords du moule.
- ◆ **Comparateurs** : Trois comparateurs au 1 /100 mm sont disposés symétriquement sur la plaque.

### III-3-Les Conditions d'essai :

L'essai de plaque peut être exécuté sur sol à gros grains, sur sols fins consistants à très consistants et sur sols mixtes. Le pourcentage des éléments à diamètre supérieur à  $\frac{1}{4}$  du diamètre de la plaque doit être négligeable.

Dans le cas de sables uniformes à dessiccation rapide, de sols encroûtés ou détrempés temporairement en surface, de sols remaniés d'autres façons dans la zone superficielle, l'essai de plaque sera exécuté en-dessous de cette zone en veillant à ne pas modifier la compacité du sol à tester.

Dans les cas des sols fins (limons, argiles) l'essai de plaque ne peut être exécuté et interprété d'une façon incontestable que s'ils sont consistants à très consistants (rapide à durcir). En cas de doute, il faut donc déterminer la teneur en eau du sol qui influence les résultats d'une façon décisive. La détermination se fera à différentes profondeurs jusqu'à  $1.5d$  ( $d$  : diamètre de la plaque) au-dessous de la plaque.

#### **III-4-Mode opératoire :**

##### **III-4-1-Préparation du sol et mise en place de la plaque :**

Après avoir reconstitué le sol dans le moule prototype à une valeur en eau déterminée suivant le mode de compactage, on dispose sous la plaque une couche mince de sable fin pour assurer un bon contact entre le sol et la plaque, l'horizontalité de la plaque est vérifiée à l'aide d'un niveau à bulle

Le vérin est centré sur la plaque sous le contrepoids. Pour mesurer la force appliquée sur la plaque, on dispose un dynamomètre entre le vérin et la plaque.

Ensuite les poutres sur lesquelles sont fixés les comparateurs sont mises en place. Par la suite, la plaque est légèrement préchargée de façon à ce qu'elle soit posée à plein contact. Les comparateurs marquant zéro, on procède au chargement.

##### **III-4-2-Chargement et déchargement :**

La charge maximale de l'essai dépend selon le cas : du but de l'essai, des propriétés du sol et de la dimension de la plaque.

Pour la détermination du module de déformation  $E_0$ , en construction de routes, l'essai est en général exécuté avec une plaque 300 mm de diamètre, avec deux cycles de chargements. La charge est augmentée jusqu'à atteindre une contrainte normale au-dessus de la plaque d'environ 2.5 bars.

La charge est appliquée en dix paliers et en intervalles de charge plus ou moins égaux. Le déchargement se fait en respectant les mêmes intervalles. Après le déchargement complet un deuxième cycle est exécuté.

Le nombre de paliers peut être réduit dans le cas de sols grossiers et compacts, mais pour le premier cycle de chargement, il faut conserver au moins quatre paliers et trois au moins pour le deuxième cycle.

Pendant les cycles de chargement et de déchargement, on ne peut passer au palier suivant que si le chargement de tassement ou de soulèvement est  $\leq 0.02$  mm/min. Cette valeur obtenue il faut passer immédiatement au palier suivant. La charge doit être maintenue constante pendant chaque palier.

Si par inadvertance on produit une pression plus élevée que prévue, elle ne peut pas être réduite mais doit être maintenue et notée sur le formulaire.

Les tassements et soulèvements doivent toujours être lus sur les comparateurs dans le même ordre. Les valeurs sont notées sur le formulaire à côté de la pression dans le domaine préchargé.

Pour un contrôle de deuxième cycle, un troisième cycle de chargement peut être exécuté de la même manière après déchargement complet par paliers, mais cette fois-ci après le deuxième palier, la charge finale du deuxième cycle sera appliquée directement sans palier intermédiaire.

### III-5-L'interprétation et la représentation des résultats :

#### III-5-1-La courbe contraintes- tassements :

La contrainte normale moyenne  $\sigma_0$  correspondant à chaque palier et le tassement correspondant lus sur les comparateurs sont notés. Le tassement moyen de la plaque est calculé à partir de trois lectures de comparateurs. La représentation des contraintes et des tassements moyens se fait selon la fig.3-2.

#### III-5-2-Calcul du module de déformation $E_v$ :

Pour le calcul du module de déformation, les contraintes  $\sigma_{01}$  ,  $\sigma_{02}$  et les tassements correspondants  $S_1$  , $S_2$  sont lus sur la courbe de déformation du premier et deuxième chargement ensuite les différences sont calculées.

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_{02} - \sigma_{01}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1$$

avec :

$\sigma_{01}$  : Contrainte normale moyenne sous la plaque correspondant à 0.3 fois la charge maximale du premier cycle.

$S_1$  : Tassement de la plaque à une charge de 0.3 fois la charge maximale du premier cycle.

$\sigma_{02}$  : Contrainte normale moyenne sous la plaque correspondant à 0.7 fois la charge maximale du premier cycle.

$S_2$  : Tassement de la plaque à une charge de 0.7 fois la charge maximale du premier cycle.

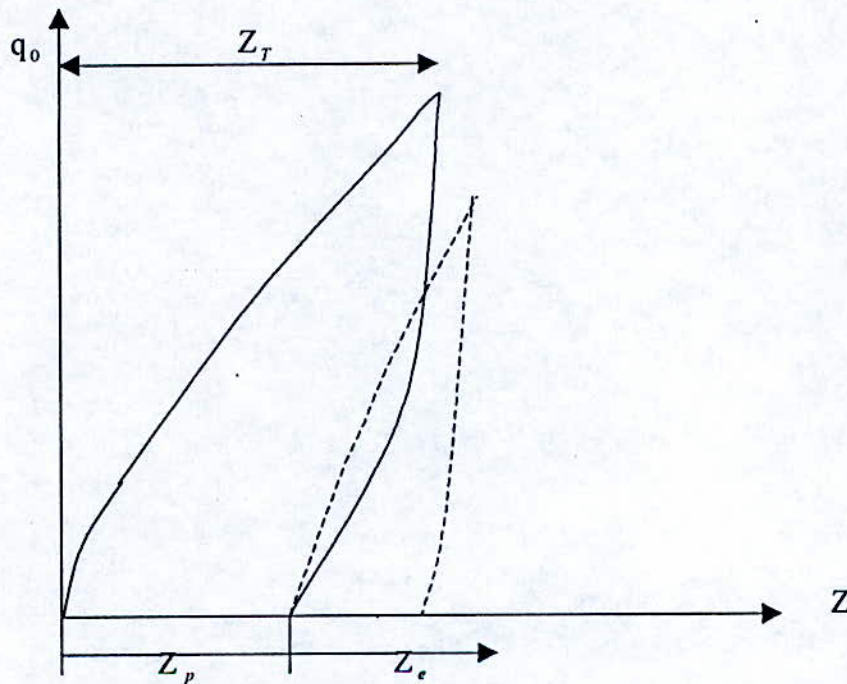
Avec ces valeurs le module de déformation est calculé à partir de la formule suivante :

$$E_v = 1.5 a \frac{\Delta\sigma_0}{\Delta S} \quad (1)$$

avec :

$a$  : rayon de la charge.

$\nu = 0.25$



**Fig-3-2-courbes contraintes-tassements après deux cycles de chargements**

$Z_T$  : déplacement total.

$Z_e$  : déplacement élastique

$Z_p$  : déplacement plastique.

### III-6- Etude expérimentale sur sol reconstitué dans le moule prototype :

#### III-6-1- Matériau utilisé :

Le matériau utilisé dans cette étude provient des terrassements de l'autoroute Est-Ouest à proximité de Bouira. Le sol en question appartient à la classe (CL) dont les principales caractéristiques sont données dans le tableau suivant :

Nature de matériau	< 80 $\mu$	Ip (%)	Proctor modifié	
			$\gamma$ (t/m <sup>3</sup> )	w (%)
Argile limoneuse	82	20.3	1.84	14

#### Caractéristiques de matériau utilisé dans l'étude

On ne s'étendra pas sur les différents essais permettant de déterminer ses caractéristiques car ce n'est pas le but de notre étude.

#### III-6-2-Conditions de l'expérimentation :

L'essai de plaque est réalisé sur des échantillons de sol de différentes compacités et à des teneurs en eau différentes, ce qui implique un grand nombre de manipulation, pour notre part on ne représente que les résultats correspondants aux conditions d'essais suivantes :

- ◆ Matériau utilisé : argile limoneuse (Ip =20.3).
- ◆ Plaque : D=300mm.
- ◆  $\gamma_d = 1.70$  t/m<sup>3</sup>
- ◆ Compacité = 92 % .
- ◆ w = 17 %

**III-6-3-Resultats :**

Les différents résultats obtenus permettent de tracer la courbe contraintes-tassements représentée sur la figure 3-3, ils permettent ainsi de calculer le module de déformation du sol au premier cycle ainsi qu'au deuxième :

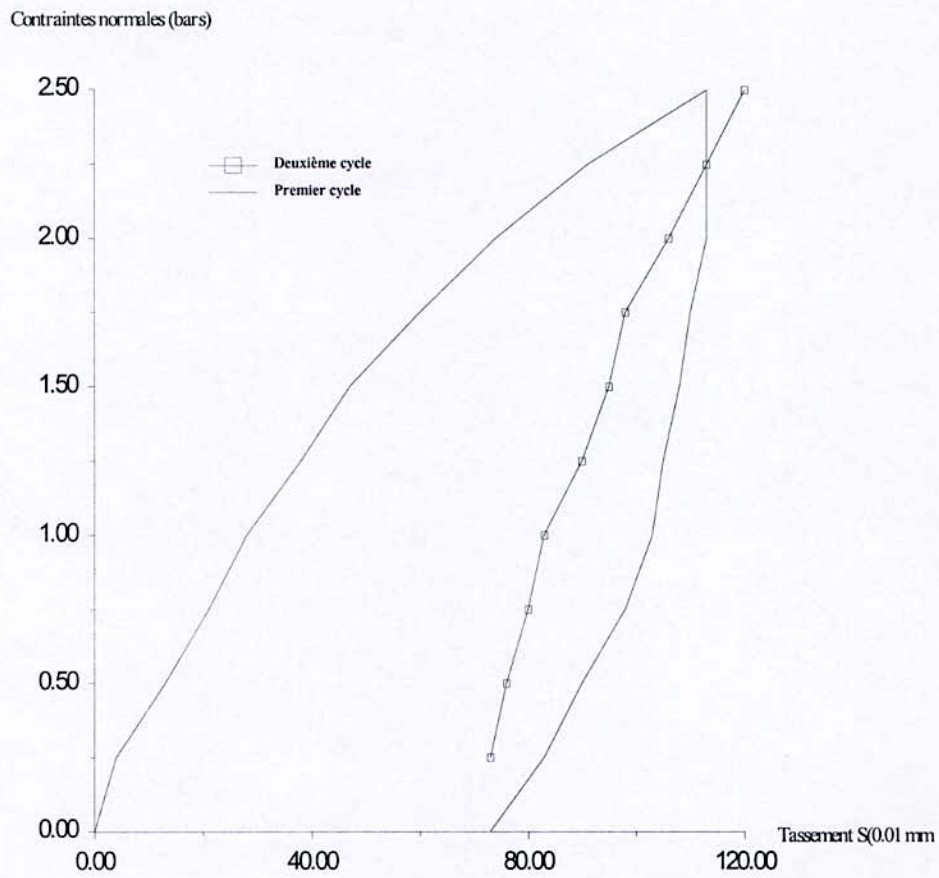
- ◆ Module de déformation au premier cycle  $E_{v1} = 454$  bars.
- ◆ Module de déformation au deuxième cycle  $E_{v2} = 900$  bars.

Ainsi l'essai aura permis de déterminer un module de déformation du sol testé ( $E_{v2}$ ), qui peut être utilisé dans les modèles de calcul.

Il est à noter que le rapport des modules de déformations au premier et au deuxième cycle est inférieur à 2 ( $E_{v2} / E_{v1} = 1.98$ ) ce qui démontre que le sol est bien compacté.

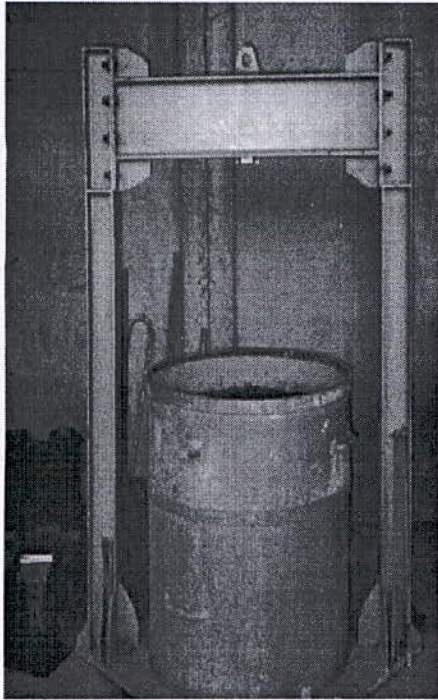
**III-6-4-Conclusion :**

Pour procéder au dimensionnement d'une chaussée, le sol est considéré comme un massif semi- infini homogène, isotrope et élastique avec un module d'élasticité «E ». Il est intéressant donc de se faire l'image la plus précise possible du sol qui devra supporter la chaussée à dimensionner et choisir la valeur du module de sol la plus réaliste en tenant compte des conditions de teneur en eau et de compacité.

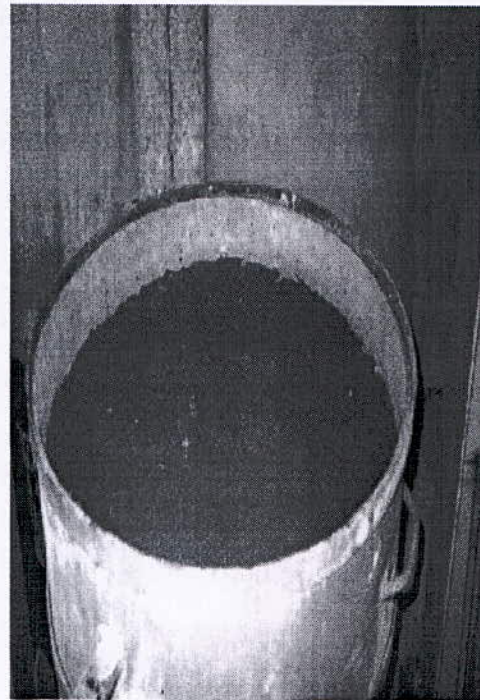


**Fig.3-3-Essai de plaque sur échantillon de sol reconstitué  
courbe contraintes-tassements**

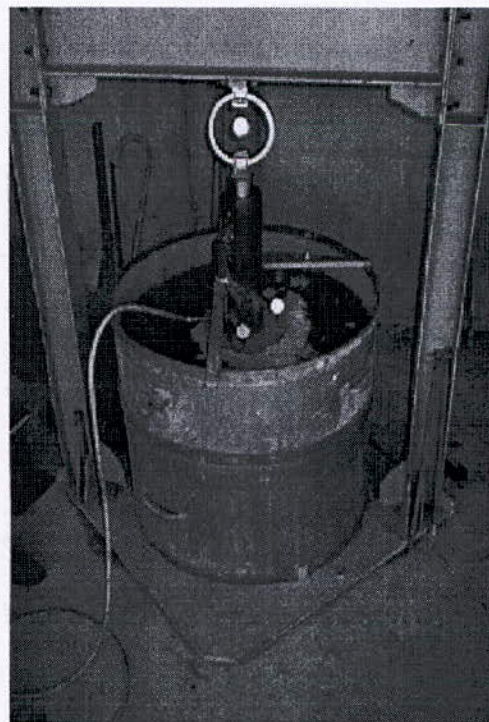




Moule prototype du C-T-T-P



Mise en place du sol à tester



Mise en place du générateur de pression

*CHAPITRE IV*

*METHODE DES ELEMENTS FINIS*

**IV-1-Introduction :**

La méthode des éléments finis est communément utilisée aujourd'hui pour résoudre de nombreux types de problèmes rencontrés par l'ingénieur, cette méthode, qui a connu un développement rapide avec l'apparition de puissants outils de calcul, nécessite de l'ingénieur une connaissance de trois disciplines de base, qui sont :

- ◆ La mécanique des structures (RDM, théorie de l'élasticité, lois de comportement, plasticité, dynamique etc....)
- ◆ L'analyse numérique (méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires etc. ...)
- ◆ L'informatique (techniques de programmation )

La plupart des structures étudiées par l'ingénieur sont de formes complexes, et font intervenir des équations aux dérivées partielles difficiles à résoudre ou du moins nécessitant des opérations de calculs longues et laborieuses

La technique de calcul d'une structure par éléments finis se base sur deux concepts :

- La modélisation.
- La discrétisation .

La modélisation consiste à faire correspondre à la structure réelle un modèle idéalisé analysable du point de vue géométrique, chargement appliqué, et condition aux limites.

Vu la complexité des phénomènes physiques ainsi que de la multitude de paramètres influençant le comportement des matériaux, la modélisation de la structure à étudier nécessite une vue claire de la mécanique de la structure et des limitations liées à chaque hypothèse.

La discrétisation est la subdivision du milieu continu en sous-domaines de forme géométrique simple appelé «éléments finis » interconnectés entre eux par des points appelés «nœuds », ces éléments peuvent être unidimensionnels, bidimensionnels ou tridimensionnels

et doivent remplir certaines conditions que nous présenterons par la suite.

Pour chaque élément une approximation adéquate de la solution en fonction uniquement des valeurs nodales permettra de résoudre le problème, après assemblage des différents éléments et ainsi la reconstitution du domaine original.

La précision de cette approximation dans le résultat final dépend du nombre d'éléments, du nombre de nœuds par élément, ainsi que de la forme du maillage.

#### IV-2-Historique :

La méthode des éléments finis se base d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autres part sur les méthodes d'approximation.

Concernant les théorèmes énergétiques d'élasticité, leur formulation a été effectuée au siècle dernier grâce aux travaux de **Navier** 1819 sur les structures hyperstatistiques puis **Maxwell** 1864 et **Castigliano** 1878 qui établirent de façon complète les théorèmes de l'énergie.

Cependant les applications de cette formulation aux calculs des structures complexes ont été inexistantes à cause de l'indisponibilité des moyens de calcul.

Il faut noter qu'en 1932, **H. Cross** a établi une méthode rendant possible l'analyse de systèmes de poutres avec les moyens de calculs de l'époque (distribution des moments), cependant, ces techniques ne permettaient pas jusqu'alors la résolution des problèmes de milieux continus, rendue possible uniquement par la discrétisation du domaine continu à l'aide de méthodes d'approximation adéquates.

C'est au début du vingtième siècle qu'ont été acquis les résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de **Ritz** 1908 et **Galerkin** 1915.

En 1943, **Courant** établit les bases de la M.E.F en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus était possible en effectuant une discrétisation spatiale du domaine, tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Le développement de l'ordinateur a provoqué un retour aux méthodes classiques d'analyse, et de là, est née «la méthode matricielle», permettant de traiter des problèmes assez complexes. Parmi les contributions les plus importantes, citons celles de **Levy** 1947 **Garvey** 1951, pour la méthode des forces et **Levy** 1953, pour la méthode des déplacements.

En 1955, **Argyris** présente une approche unifiée des déplacements et des forces, puis l'année suivante, **Turner** et **Clough** publient une présentation systématique de la méthode des déplacements.

Dès 1960, la M.E.F subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- Création d'éléments de haute précision.
- Construction d'une base mathématique de la M.E.F.
- Utilisation de la méthode de la M.E.F pour la résolution des problèmes non linéaires et non stationnaires.

#### IV-3-Formulation de la méthode des éléments finis :

Il existe trois formulations de la méthode des éléments finis :

##### ◆ Formulation contraintes ou équilibre :

Dans cette formulation on se donne une approximation soit sous forme d'un champ de contraintes en équilibre ou soit sous forme d'une fonction de contraintes. Elle se base sur la théorie de l'énergie complémentaire.

##### ◆ Formulation déplacements :

Dans cette formulation on se donne une approximation du champ de déplacement, elle se base, sur la stationnarité de l'énergie potentielle.

##### ◆ Formulation mixte :

Dans cette formulation on considère le champ de déplacements et de contraintes comme inconnus primaires du problème, d'où le nom mixte. Nous présentons la formulation basée sur la méthode des déplacements car c'est celle-ci, qui est la plus utilisée.

**IV-3-1-Formulation déplacement :****IV-3-1-1 Introduction :**

Dans cette formulation on suppose que le champ de déplacement est l'inconnu primaire du problème, à partir duquel seront déterminées les contraintes et les déformations en tout point du milieu, utilisant les relations d'élasticité.

Cette formulation peut être résumée dans les étapes suivantes :

- ◆ Subdivision du milieu à étudier par des lignes (cas plan) ou par des plans (cas tridimensionnel) imaginaires, ce qui donne un certain nombre d'éléments finis.
- ◆ Ces éléments sont supposés reliés entre eux par un nombre fini de points appelés «points nodaux » ou «nœuds »dont les déplacements seront les inconnus du problème.
- ◆ On choisit une fonction (ou plusieurs) appelée (s) «fonction (s) de forme » qui définira le mieux possible le champ de déplacement de ces nœuds.
- ◆ On détermine le système de forces concentrées aux nœuds, équivalent à l'ensemble des charges appliquées au milieu.
- ◆ On évalue la matrice de rigidité  $[K^e]$  de chaque élément fini, puis celle du milieu entier par assemblage des matrices élémentaires.
- ◆ On résout le système d'équations pour déterminer les déplacements aux nœuds, puis les déformations et les contraintes.

**IV-3-1-2-Etapes de base pour la détermination des caractéristiques de rigidité d'un élément :**

L'élaboration de la matrice rigidité passe par les étapes suivantes :

- Etape 1:** {
- Identifier le type de problème.
  - Choisir un système e coordonnées convenable.
  - Numérotter les nœuds.

**Etape 2 :** choisir une fonction interpolation, c'est-à-dire déterminer l'ordre du polynôme.

**Etape 3 :** obtenir l'état des déplacements en chaque point en fonction des déplacements nodaux.

**Etape 4 :** relier les déformations en chaque point avec les déplacements.

**Etape 5 :** relier les contraintes avec les déformations puis avec les déplacements.

**Etape 6 :** écrire l'égalité du travail virtuel avec l'énergie de déformation virtuelle et tirer par identification la matrice de rigidité de l'élément.

#### IV-3-1-3-Evaluation de la matrice de rigidité :

La méthode des éléments finis selon l'approche des déplacements a pour but de transformer les équations décrivant le phénomène physique étudié qui sont de type : équations aux dérivées partielles en un système d'équation algébrique linéaire de type :

$$[\mathbf{K}] \left\{ \hat{U} \right\} = \left\{ \hat{F} \right\}$$

$[\mathbf{K}]$  : Matrice de rigidité de la structure.

$\left\{ \hat{U} \right\}$  : Vecteur des déplacements nodaux.

$\left\{ \hat{F} \right\}$  : Vecteur de forces nodales (forces extérieures).

Le but étant de déterminer le champ de contraintes et de déplacements, il suffit de déterminer ce dernier et d'en déduire le premier par la loi de comportement, comme le champ de déplacement est en réalité une fonction continue  $U(x)$ , et que la résolution du système

$[\mathbf{K}] \left\{ \hat{U} \right\} = \left\{ \hat{F} \right\}$  nous donne des déplacements nodaux  $\hat{U}_i$ , la détermination du champ de déplacement passe par une approximation dite «approximation nodale» sur l'élément fini.

Cette fonction approximée dépendra directement des déplacements nodaux  $\hat{U}_i$ , et elle est obtenue par une interpolation nodale.

$$U(x) = N_1(x)\hat{U}_1 + N_2(x)\hat{U}_2 + \dots + N_n(x)\hat{U}_n$$

$$U(x) = \hat{U}_i \cdot \left\{ \begin{array}{c} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{array} \right\} = \langle N_n(x) \rangle \cdot \left\{ \hat{U} \right\}$$

Tel que :  $\langle N(x) \rangle$  vecteur ligne des fonctions d'interpolations.

Les fonctions  $N_i(x)$  sont fréquemment représentées en polynômes, elles sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire, que chaque fonction ne peut être déduite par combinaison linéaire des autres et doivent être indépendantes des  $\hat{U}_i$

- **Propriétés de l'approximation nodale :**

1.  $U(x_i) = U_i$

$$\Rightarrow N_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

2. L'erreur de l'approximation  $e(x) = U(x) - U_{ex}(x)$

et  $e(x_i) = 0$  (aux nœuds)

- **Choix de la fonction déplacements :**

Comme la formulation choisie est une formulation déplacement, on doit donc imposer un champ de déplacement qui remplit les conditions suivantes :

- 1) . La fonction de déplacement doit être continue dérivable sur tout le domaine de l'élément y compris au niveau des frontières.



2) . Les dérivées d'ordre ( n - 1 ) du polynôme de déplacement doivent être continues à travers les frontières de l'élément, c'est-à-dire que les éléments se déforment sans qu'il y ait des ouvertures entre eux.

Cette condition n'est satisfaite que si les déplacements le long d'une frontière ne dépendent que des déplacements des nœuds sur cette dernière.

3) . Les équations déplacements- forces découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement d'ensemble rigide.

4) . Les fonctions doivent être cinématiquement admissibles.

#### IV-3-1-4-Détermination de la matrice de rigidité élémentaire :

D'après le théorème de la stationnarité de l'énergie potentielle totale on a :

$$\partial \pi = 0$$

$$\Rightarrow \partial U = \partial W \quad (1)$$

L'énergie de déformation virtuelle est  $\partial U = \int_v \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dv$

Le travail virtuel des forces extérieures est  $\partial U = \{F\}^T \cdot \{\delta \hat{U}\}$

On a  $[\sigma] = [C]\{\varepsilon\}$   $[C]$  : matrice de comportement

C'est-à-dire en E.L  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$   $[D]$  : matrice d'élasticité.

$\{\varepsilon\} = [L]\{U\}$   $[L]$  : matrice opérateur différentiel.

D'autre part  $\{U\} = [N] \{\hat{U}\}$   $[N]$  : matrice fonction d'interpolation.

$$\Rightarrow \{\varepsilon\} = [L][N] \{\hat{U}\} = [B] \{\hat{U}\}$$

$$\Rightarrow \{\partial\varepsilon\} = [B] \{\partial\hat{U}\}$$

On a aussi :  $\{\varepsilon\} = [D][B] \{\hat{U}\}$

$$\{\sigma\}^T = \{\hat{U}\}^T [B]^T [D] = \{\hat{U}\}^T [B]^T [D] \quad \text{car } [D] : \text{symétrique}$$

$$\{\partial\varepsilon\} = [B] \{\partial\hat{U}\}$$

$$\{\sigma\}^T = \{\hat{U}\}^T [B]^T [D]$$

De (1) on a :  $\{F\}^T \{\partial\hat{U}\} = \int_v \{\sigma\}^T \{\partial\varepsilon\} dv$

$$\Rightarrow \{F\}^T \{\partial\hat{U}\} = \int_v \{U\}^T [B]^T [D] [B] dv$$

Mais :  $\{F\}^T = \{U\}^T [K]^T$

$$\Rightarrow \boxed{[K] = \int_v [B]^T [D] [B] dv} \quad (1)$$

$$[K] \text{ est : } \begin{cases} 1- \text{Symétrique} \\ 2- \text{Singulière (déterminant} = 0 \text{) avant l'introduction des conditions aux limites.} \\ 3- \text{Définie positive.} \end{cases}$$

$[K]$  donnée par (1) est celle d'un élément.

## IV-3-1-5-Règle d'assemblage :

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices  $[K]$  et  $\{F\}$  de la structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments  $[K^e], \{F^e\}$  préalablement calculées. En utilisant l'approche énergétique, on peut définir la méthode d'assemblage.

Soit  $\pi$  l'énergie potentielle totale de l'élément  $e$  :

$$\pi^e = \frac{1}{2} \left\{ \hat{U}^e \right\}^T [K^e] \left\{ \hat{U}^e \right\} - \left\{ \hat{U}^e \right\}^T \{F^e\}$$

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par des énergies potentielles totales élémentaires, soit :

$$\pi = \sum_{\text{éléments}} \pi^e = \sum_{\text{éléments}} \left[ \frac{1}{2} \left\{ \hat{U}^e \right\}^T [K^e] \left\{ \hat{U}^e \right\} - \left\{ \hat{U}^e \right\}^T \{F^e\} \right]$$

mais

$$\pi = \frac{1}{2} \left\{ \hat{U} \right\}^T [K] \left\{ \hat{U} \right\} - \left\{ \hat{U} \right\}^T \{F\}$$

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous- matrices de rigidité nodale de chaque élément.

D'où :

$$[K]^{globale} = \sum_i \int_v [B_i]^T [D_i] [B_i] dv$$

Et les forces nodales sont données par :

$$\left\{ F \right\}_e = \int_v [N] f_v dv + \int_s [N] f_s ds$$

#### IV-4-Convergence :

Dans les discussions de la convergence d'une solution M.E.F, il y a des propriétés nécessaires ou tout au moins souhaitables au niveau de l'élément afin d'obtenir une solution aussi proche que possible de la solution exacte.

Au fur et à mesure qu'on augmente le nombre d'éléments, la solution converge vers l'exacte, mais aussi, le choix du modèle, du type d'éléments...etc. interviennent comme facteurs influant sur la convergence.

Par ailleurs, il importe de préciser que plusieurs sources d'erreurs peuvent affecter le processus de convergence :

- Erreur dues à la précision.
- Erreurs sur les équations constitutives.
- Erreurs sur les itérations de certaines équations.

La convergence de la solution n'est toutefois pas toujours monotone, c'est pourquoi on rencontre deux types de convergences : monotone et non- monotone.

##### IV-4-1-Convergence monotone :

Pour qu'elle soit ainsi, deux critères sont à satisfaire : la complétude et la compatibilité.

###### a-) . La complétude :

un élément fini est dit complet s'il satisfait les deux conditions suivantes :

- Les fonctions qui représentent le déplacement à l'intérieur d'un élément ne doivent pas donner lieu à des déformations lorsque les déplacements nodaux correspondent à un déplacement de corps rigide.

- Les fonctions qui représentent le déplacement doivent pouvoir représenter un état de déformation constante à l'intérieur de l'élément.

**b-) . Compatibilité :**

Un élément est dit compatible s'il permet la définition d'un champ compatible, c'est à dire une continuité des déplacements au sein des éléments et aux frontières de ces derniers, et une continuité des déplacement et de leurs dérivées premières pour les problèmes de flexion.

Physiquement, la compatibilité peut s'expliquer par le fait qu'aucun vide n'apparaît entre les éléments lorsque l'assemblage est chargé.

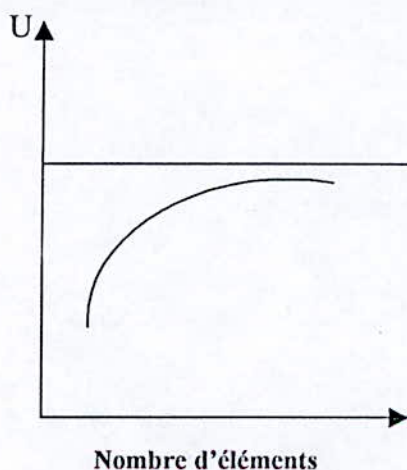
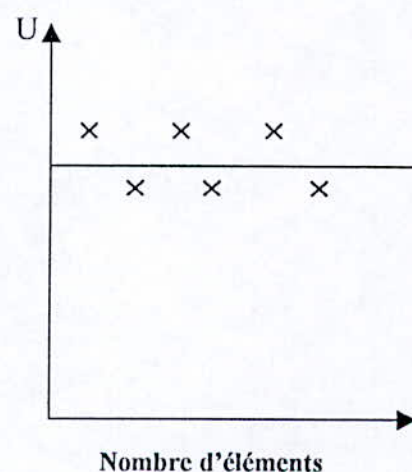
**Remarques :**

- Généralement, des difficultés relatives à la compatibilité apparaissent lorsque les degrés de liberté d'un nœud quelconque sont dépendant (cas de flexion des coqs, des plaques les poutres, etc....).

- Il est à remarquer que la convergence se fait par valeurs inférieures :  $U^{app} < U^{exacte}$ . Si on discrétise trop on risque de rigidifier l'élément.

**IV-4-2-Convergence non- monotone :**

Certains éléments ne satisfassent pas toutes les conditions de complétude comme condition essentielle, mais en la remplaçant par un autre critère de complétude sur un groupe d'éléments. Le test de complétude collective est appelé « patch- test ». On constate que les éléments complets et incompatibles qui satisfassent ce test convergent.

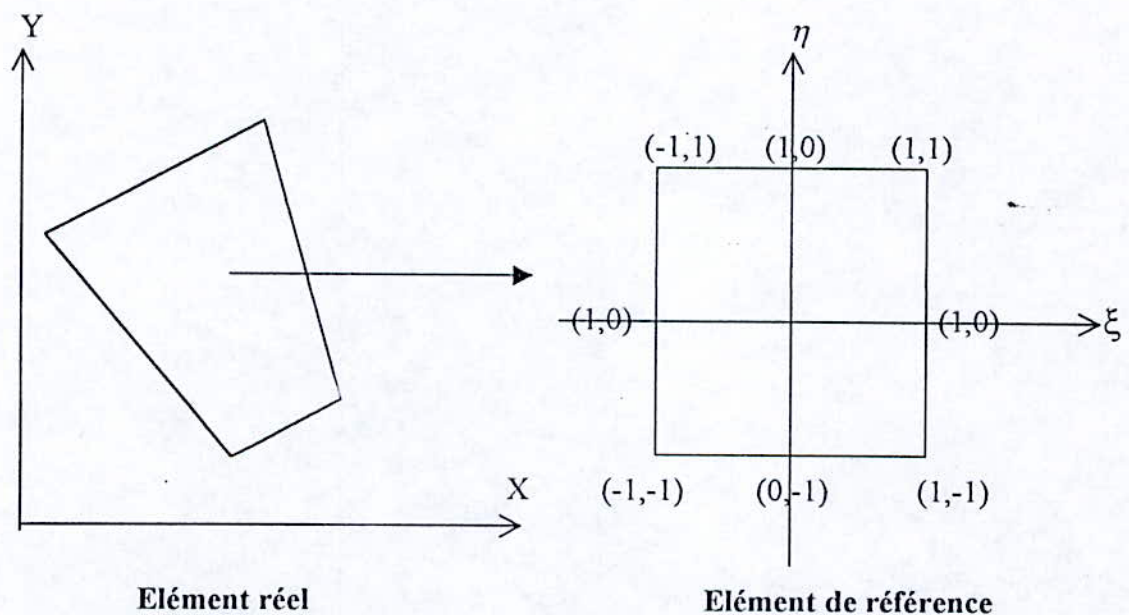
**Convergence monotone****Convergence non- monotone**

#### IV-5-Elément de référence isoparamétrique :

L'élément isoparamétrique permet de simplifier la définition analytique des éléments de formes complexes, il est utilisé pour mieux représenter une géométrie délicate des frontières.

L'élément isoparamétrique est un élément de forme simple qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique.

Un élément est dit isoparamétrique si les fonctions d'interpolations sont identiques aux fonctions de transformations géométriques, c'est-à-dire que les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolations.



L'élément fini utilisé dans le cadre de notre étude est l'élément quadrilatéral à huit nœuds Q8, comme le montre la figure ci-dessus.

Les dérivations par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  en fonction des dérivations en fonction de X et Y s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad [J] : \text{étant la matrice Jacobienne.}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad \text{car déterminant } [J] \neq 0$$

La matrice  $[J]$  n'est pas singulière.

Comme les fonctions d'interpolations coïncident avec les fonctions de transformations géométriques alors on a :

$$U(x) = N_1 U_1 + \dots + N_n U_n$$

$$\text{et } \begin{cases} X = N_1 x_1 + \dots + N_n x_n = \sum N_i x_i \\ Y = N_1 y_1 + \dots + N_n y_n = \sum N_i y_i \end{cases}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum N_i x_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \sum N_i y_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \sum N_i x_i}{\partial \eta} & \frac{\partial \sum N_i y_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = [B][X]$$

$[B]$  : matrice des dérivées des fonctions d'interpolation par rapport à  $\xi, \eta$ .

$[X]$  : matrice de coordonnées des nœuds.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N^e}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Un élément d'aire  $dx dy$  devient :  $dx dy = |\det [J] d\xi d\eta|$

Et la matrice de rigidité :

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot |\det[J]| d\xi d\eta$$



## IV-5-1-Elément fini Q8 :

## IV-5-1-1-Fonction de transformation géométrique et de forme :

On présente brièvement l'élément fini Q8 qui sert de base pour la construction des éléments finis et semi-infinis utilisés. L'élément fini est rectangulaire et comprend huit nœuds. L'élément de référence correspondant est de type quadratique incomplet (8 nœuds) dit : « de Serendip » figure 4-1 :

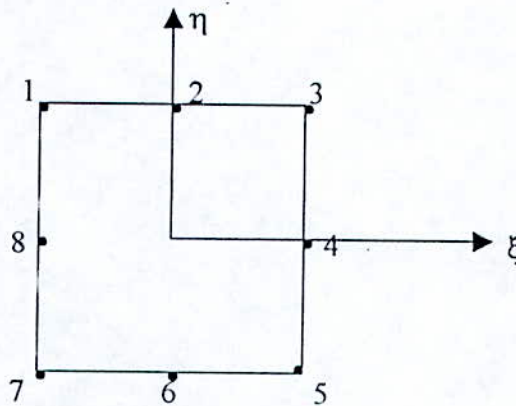


Fig. 4 -1-Elément de référence de l'élément fini à huit nœuds

Pour cet élément, les mêmes fonctions d'interpolation sont utilisées pour le calcul des coordonnées et pour le calcul des déplacements (l'élément est alors dit isoparamétrique). On note ces fonctions :  $N_i(\xi, \eta)$ . Et leurs expressions sont données dans le tableau suivant :

FF	N	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$
N°			
1	$\frac{-(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)(2\xi-\eta)}{4}$	$\frac{-(1-\xi)(\xi-2\eta)}{4}$
2	$\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2}$	$-(1+\eta)\xi$	$\frac{(1-\xi^2)}{2}$
3	$\frac{-(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)(2\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\xi)(\xi+2\eta)}{4}$
4	$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$\frac{(1-\eta^2)}{2}$	$-(1+\xi)\eta$
5	$\frac{-(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)(2\xi-\eta)}{4}$	$\frac{-(1+\xi)(\xi-2\eta)}{4}$
6	$\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}$	$-(1-\eta)\xi$	$\frac{-(1-\xi^2)}{2}$
7	$\frac{-(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)(2\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)(\xi+2\eta)}{4}$
8	$\frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$\frac{(1-\eta^2)}{2}$	$-(1-\xi)\eta$

### Fonctions de forme

Les fonctions qui permettent le calcul des coordonnées d'un point, qui se trouve à l'intérieur de l'élément, sont dites fonctions de transformation géométrique et notées,  $T_i(\xi, \eta)$   $i$  étant le nombre de nœuds de l'élément ( $i=8$  dans notre cas). Les fonctions qui permettent le calcul des déplacements d'un point, qui se trouve à l'intérieur de l'élément sont dites fonctions de forme et notées,  $F_i(\xi, \eta)$   $i=8$ .

Pour un élément fini, on a donc :

$$T(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) \Rightarrow X(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)^T \cdot X^e$$

$$F(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) \Rightarrow U(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)^T \cdot U^e$$

$N(\xi, \eta)$  : Vecteur colonne des fonctions d'interpolation.

$T(\xi, \eta)$  : Vecteur colonne des fonctions de transformation géométrique.

$F(\xi, \eta)$  : Vecteur colonne des fonctions de forme.

$X(\xi, \eta)$  : L'une des coordonnées pour à l'intérieur de l'élément.

$X^e$  : Vecteur colonne de cette coordonnées pour les nœuds de l'élément de référence.

$U(\xi, \eta)$  : L'un des déplacements d'un point à l'intérieur de l'élément.

$U^e$  : Vecteur colonne de ce déplacement pour les nœuds de l'élément de référence.

La construction des éléments finis sera basée sur ces fonctions d'interpolation. Le sens de la numérotation des nœuds de l'élément de référence (fig. 4-1) sera le même pour tout type d'éléments de discrétisation utilisés.

#### IV-6-Formulation d'un problème axisymétrique par la M-E-F :

##### IV-6-1-Introduction :

Le problème de la distribution des contraintes dans les corps à symétrie de révolution (solides « axisymétriques ») soumis à un chargement ayant la même symétrie de révolution est très important en pratique.

Le problème théorique est analogue à celui des contraintes planes ou des déformations planes, car il est, ici encore bidimensionnel. Pour des raisons de symétrie les deux composantes du déplacement dans toutes sections planes contenant l'axe de symétrie définissent complètement le champ de déplacement et donc de contraintes.

Dans les problèmes d'élasticité plane, le travail interne est associé aux trois composantes de la déformation dans le plan, la composante normale de la contrainte n'intervient jamais, soit parce qu'elle est elle-même nulle (contraintes planes), soit parce que la composante correspondante du déplacement est nulle (déformations planes).

En symétrie de révolution ce n'est plus le cas, car la composante radiale du déplacement produit une déformation tangentielle, et comme la contrainte correspondante n'est pas nulle, il faut faire intervenir une quatrième composante des déformations et des contraintes (la matrice de comportement n'est plus carrée d'ordre trois (élasticité plane), mais carrée d'ordre quatre).

Il est à noter, que le volume associé à un élément axisymétrique est celui d'un corps de révolution, et toutes les intégrations doivent s'y rapporter.

#### IV-6-2-Equations de base :

Dans le cas général, les équations déformations-déplacements de l'élasticité peuvent se mettre sous la forme suivante en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

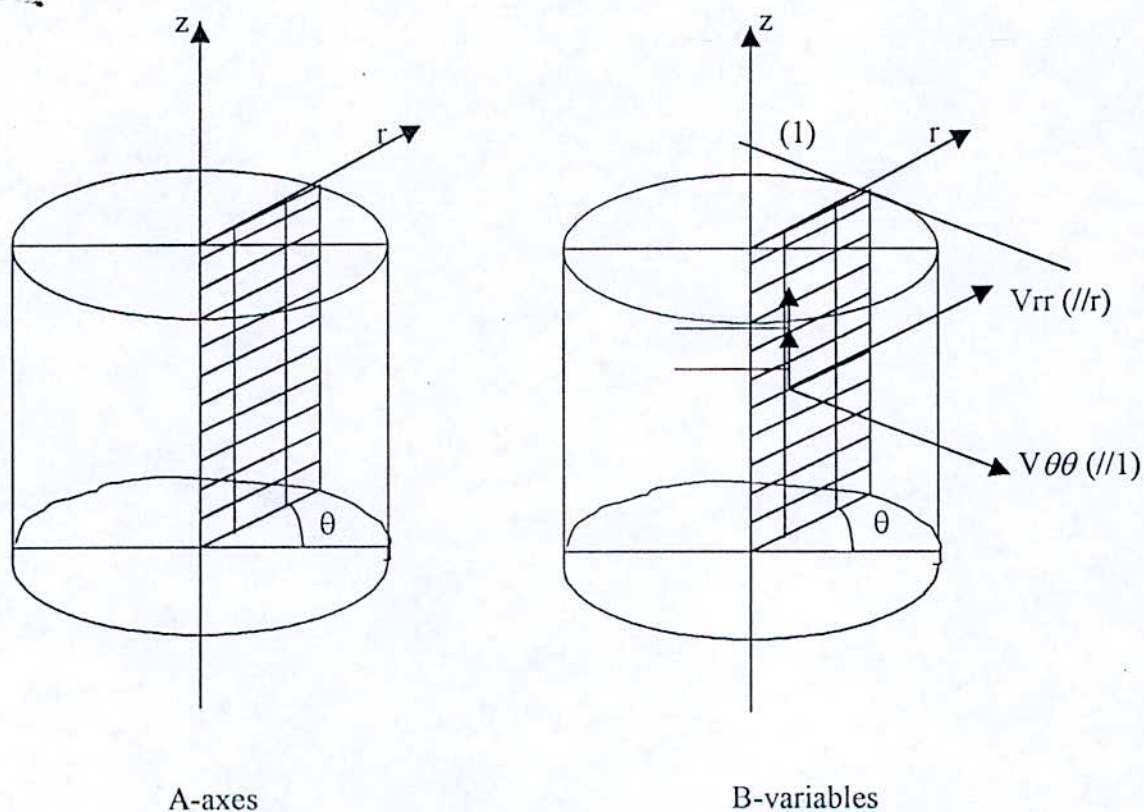


Fig. 4-2 Problèmes axisymétriques.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{-1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Ce sont ces relations qui doivent être utilisées dans le cas de chargement quelconque. Dans le cas d'un chargement de révolution, la solution est complètement axisymétrique. On a

dans ce cas :  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$  ,  $v = 0$  ,  $\varepsilon_{z,\theta} = \varepsilon_{r,\theta} = 0$

D'où la relation déformation – déplacement :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{r,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/ \partial r & 0 \\ 1/ r & 0 \\ 0 & \partial/ \partial z \\ \partial/ \partial z & \partial/ \partial r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

pour un seul nœud

$$\varepsilon = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$$

Si le matériau est isotrope, les équations de **Hooke** peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{r,z} \end{bmatrix} & = & \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{r,z} \end{bmatrix} \\
 \sigma & & D \quad \cdot \quad \varepsilon
 \end{array}$$

Les principes de calcul des éléments permettent de calculer la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  qui est exprimée par :

$$\mathbf{K} = \int_{V^e} B^T \cdot D \cdot B \, dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T \cdot D \cdot B \cdot 2\pi r \, d\xi \, d\eta$$

Généralement  $\mathbf{K}$  est calculée par intégration numérique.

#### IV-7-Intégration numérique :

Le calcul des matrices de rigidité par intégration explicite ne peut être effectué que pour les éléments les plus simples. Par ailleurs, l'intégration exacte peut soulever de sérieuses difficultés pour certains types de problèmes : c'est le cas des problèmes axisymétriques au voisinage de l'axe de révolution. Dans cette éventualité, mais également dans le cas d'élément d'ordre élevé, ou isoparamétriques courbes, l'intégration numérique doit être utilisée.

Différentes méthodes d'intégration numérique sont utilisées pour le calcul des éléments, on peut citer parmi ces méthodes :

- La méthode de **Newton- Cotes**.
- La méthode de **Gauss**.

C'est cette dernière qui a été utilisée, et dont le principe est exposé ci- après.

### IV-7-1-Méthode de GAUSS :

Dans cette méthode, on ne se donne pas à priori la position des points d'intégration mais on détermine cette position de façon à minimiser l'erreur. Ainsi, dans le cas de  $n$  points d'intégration, nous avons  $n$  inconnus supplémentaires : les positions des points d'intégration  $(\xi_i, \eta_i)$  qui sont déterminées par des conditions de minimum de l'erreur. Ainsi, on peut définir un polynôme de degré  $(2n-1)$  satisfaisant  $2n$  conditions, d'une part, le respect des valeurs de la fonction aux points d'intégration  $f(\xi_i, \eta_i)$  et d'autre part, les conditions de minimum de l'erreur en fonction de la position des points d'intégration. Dans ce cas, la méthode de Gauss permet d'intégrer de façon exacte un polynôme de degré  $(2n-1)$ .

#### IV-7-1-1-Intégration numérique pour les problèmes bidimensionnels :

En ce qui concerne les quadrilatères, on peut utiliser des méthodes d'intégration numérique déduites directement de la méthode de Gauss dans le cas unidimensionnel.

En effet le calcul de la matrice de rigidité en coordonnées intrinsèques peut se formuler en utilisant la formule suivante :

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Avec :

$$F(\xi, \eta) = B^T . D . B . \det J$$

Si l'on intègre par rapport à  $\xi$  et ensuite par rapport à  $\eta$  en utilisant les formules de quadrature de Gauss dans le cas unidimensionnel, on aura :

$$K = \int_{-1}^1 \left[ \sum_i w_i F(\xi_i, \eta) \right] ds = \sum_j w_j \sum_i w_i F(\xi_i, \eta_j)$$

$$K = \sum_i \sum_j w_i w_j F(\xi_i, \eta_j)$$

Et si l'on utilise la méthode de **Gauss** (2x2) avec quatre points on aura :

$$w_i = w_j = 1$$

$$\xi_i, \eta_j = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

d'où :

$$K = \sum_{i,j=1}^4 F(\xi_i, \eta_j)$$

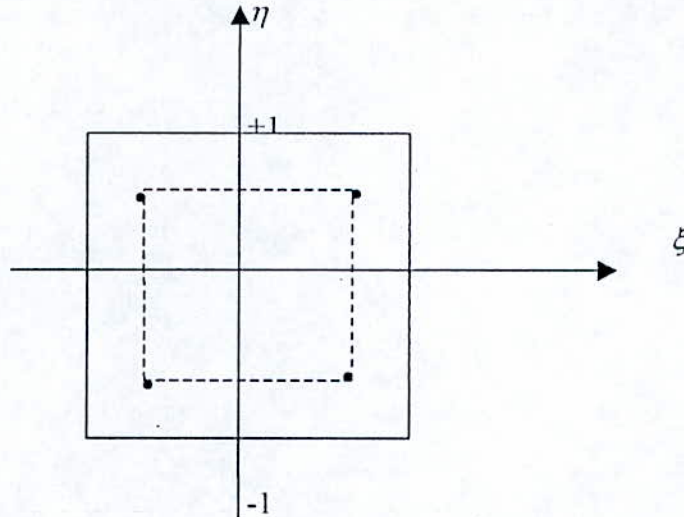


Fig. 4-3- Intégration de Gauss- Legendre (2x2) pour le quadrilatère

**Remarque :**

Les coordonnées dans chacune des deux directions sont solution du polynôme de **Legendre** du deuxième degré, qui s'écrit :

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

**IV-8-Modélisation des chaussées par éléments finis :**

Le problème d chaussée souple est traité en axisymetrie sous chargement statique répartie uniformément sur un disque circulaire. Les éléments de discretisation utilisés sont des éléments rectangulaires à huit nœuds (Q8).



#### IV-8-1-Discrétisation de la structure de chaussée par éléments finis :

La structure est découpée en couches superposées de matériaux à caractéristiques mécaniques différentes. Chaque hauteur de couche ou largeur de zone comprend un certain nombre d'éléments de telle sorte à affiner le maillage au voisinage de la charge.

Les axes sont orientés de gauche à droite pour  $r$  et de bas en haut pour  $z$ . L'origine des axes étant le centre de l'empreinte circulaire de la charge (fig. 4-3).

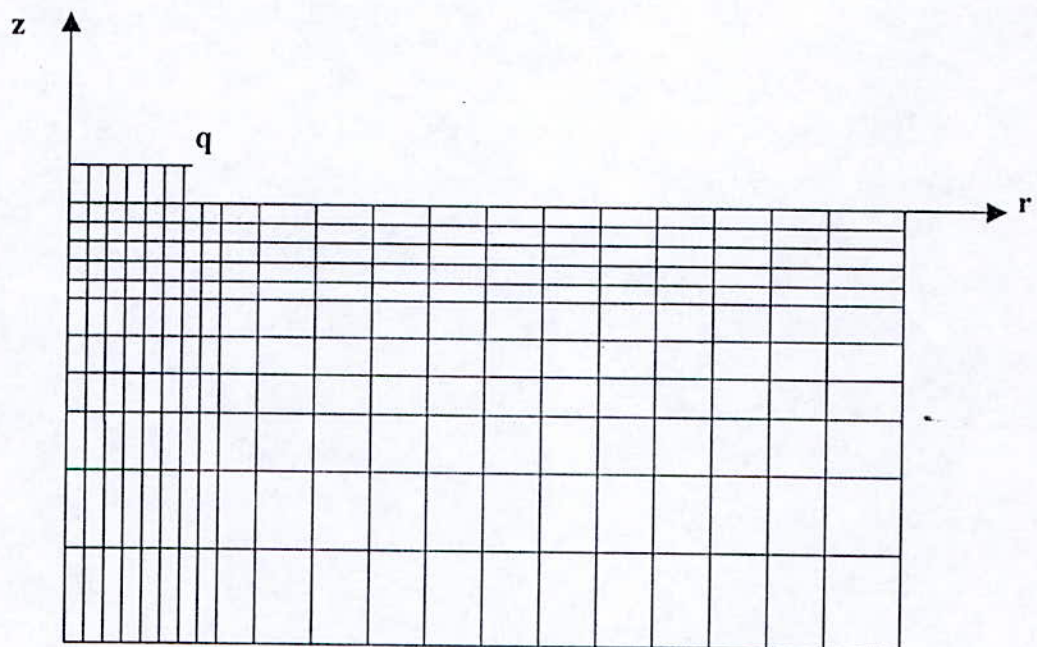


Fig. 4-4- Maillage de la structure étudiée.

#### IV-8-2-Conditions aux limites et aux interfaces :

Les interfaces entre les différentes couches de matériaux sont supposés parfaitement collées, c'est-à-dire qu'elles assurent la continuité des contraintes verticales et de cisaillement, et des déplacements horizontaux et verticaux.

Les conditions aux limites des déplacements sont :

- ◆  $u = w = 0$  fond.
- ◆  $u = 0$  axe et bord droit.
- ◆  $u, w$  continus aux interfaces.

Les conditions aux limites en contraintes sont :

- ◆  $\sigma_{zz} = q, \sigma_{rz} = 0$  en surface et sous la charge.
- ◆  $\sigma_{zz} = 0, \sigma_{rz} = 0$  en surface et en dehors de la charge.
- ◆  $\sigma_{rz} = 0$  axe de la charge.
- ◆  $\sigma_{rz} = 0$  bord droit.
- ◆  $\sigma_{zz}, \sigma_{rz}$  continues aux interfaces.

*CHAPITRE V*

*METHODE DES ELEMENTS  
INFINIS*

### V-1-Introduction :

L'analyse par éléments finis des problèmes caractérisés par des domaines géométriques s'étendant à l'infini, est souvent imprécise, chère ou les deux à la fois. Parmi les méthodes qui permettent de pallier à ces inconvénients, les éléments infinis sont les plus adaptés, car, non seulement, ils reflètent la nature infinie du domaine, mais ils donnent aussi d'excellents résultats en terme de précision et d'économie de la solution. De plus, ils sont très faciles à mettre en œuvre dans un programme d'éléments finis.

Bien qu'il n'y ait pas de domaines physiques qui s'étendent à l'infini, il y a des cas où c'est utile et même avantageux de supposer qu'il en existe. C'est le cas des sols, par conséquent tous les ouvrages de génie civil peuvent être considérés comme reposant sur des massifs semi-infinis.

Dans la pratique quotidienne de l'ingénieur, cette infinité n'est pas toujours prise en compte et elle est souvent tronquée c'est le cas lorsque l'analyse est faite avec la méthode des éléments finis, le domaine est transformé en un domaine fini avec des frontières et des conditions aux limites imposées d'une manière fictive sur ces frontières. Or, un facteur important dont dépendent la précision et l'économie des solutions des méthodes numériques est le choix du maillage. Si la frontière est située assez loin du point d'application des charges, ce qui nécessitera un très grand nombre d'éléments d'où un coût élevé, et parfois injustifié, de la solution. De plus, dans les deux cas, le problème du choix des conditions aux limites reste entier. Et c'est là qu'apparaît tout l'avantage de l'utilisation des éléments infinis.

### V-2-Historique :

L'idée de base de la formulation de la méthode des éléments infinis est l'utilisation des éléments non bornés qui modélisent d'une façon efficace un domaine infini ou semi-infini.

En se basant sur cette idée, plusieurs chercheurs ont commencé dès 1973 à proposer des formulations de ces éléments.

**Ungless** et **Anderson** ont construit le premier élément infini, en se basant sur l'utilisation d'une fonction de décroissance de forme  $\left(\frac{1}{1+r}\right)$  dans la direction radiale.

Le premier travail publié sur ce type d'élément était celui de **Zienkiewicz** et **Bettess** en 1975, dans cette formulation, le domaine de l'élément est étendu jusqu'à l'infini, les fonctions de forme sont multipliées par des fonctions décroissantes et qui sont choisies suivant le type de problème étudié.

En 1981 **Medina** utilise un terme de la forme  $\left(\frac{1}{1+r}\right)$  pour la résolution des problèmes d'axisymétrie, dans la même année **Beer** et **Meek** ont utilisé une transformation incluant un terme de la forme  $\left(\frac{1}{1-\xi}\right)$  et qui transforme le domaine  $\xi$  en un domaine (X) infini.

En 1983, **Bando** a utilisé une nouvelle formulation des éléments infinis pour des excavations.

En 1984 **Marques** et **Owen** ont publié plusieurs articles sur ces éléments, dans cette même année, **Rajapalska** et **Karasudhi** ont publié un article sur l'utilisation des éléments infinis élastoplastiques pour les domaines semi- infinis multicouches.

En 1986, **Zhang** et **Al** ont appliqué des éléments infinis avec des fonctions de formes décroissantes pour l'analyse des contraintes dans les barrages poids.

En 1987, **Kumar** a étendu son analyse concernant les excavations souterraines pour le cas anisotropique et non homogène.

En 1989, **Zhang** et **Al** ont continué l'application des éléments infinis pour les problèmes de fondation de barrages.

### V-3-Formulation des éléments infinis :

La caractéristique commune aux éléments infinis est que la quantité à intégrer sur l'élément, par exemple l'énergie potentielle dans le cas des structures, doit être finie. De ce fait, la fonction approchée construite sur l'élément pour approximer la quantité inconnue doit tendre vers zéro quand les dimensions tendent vers l'infini, de plus, elle doit engendrer des intégrations finies sur l'élément.

Les éléments infinis sont construits suivant deux approches :

- Approche directe.
- Approche inverse.

#### V-3-1-Approche directe :

Cette approche est due à **Bettess**, elle consiste en l'extension du domaine géométrique d'un élément de référence en dehors des limites conventionnelles (jusqu'à l'infini) suivant l'une ou plusieurs directions tout en gardant les fonctions de forme classiques pour sa représentation paramétrique. Quant à l'approximation de la fonction inconnue sur l'élément, celle-ci doit décroître asymptotiquement vers zéro à l'approche de l'infini. En d'autres termes, les fonctions de forme (d'interpolation nodale) associées à l'élément dans la ou les direction(s) infinie(s) doivent comporter un terme qui tend vers zéro vers l'infini. L'inconvénient de cette méthode est que l'une des bornes d'intégrations n'est pas finie. On désigne aussi cette approche par le terme « *formulation descendante* ».

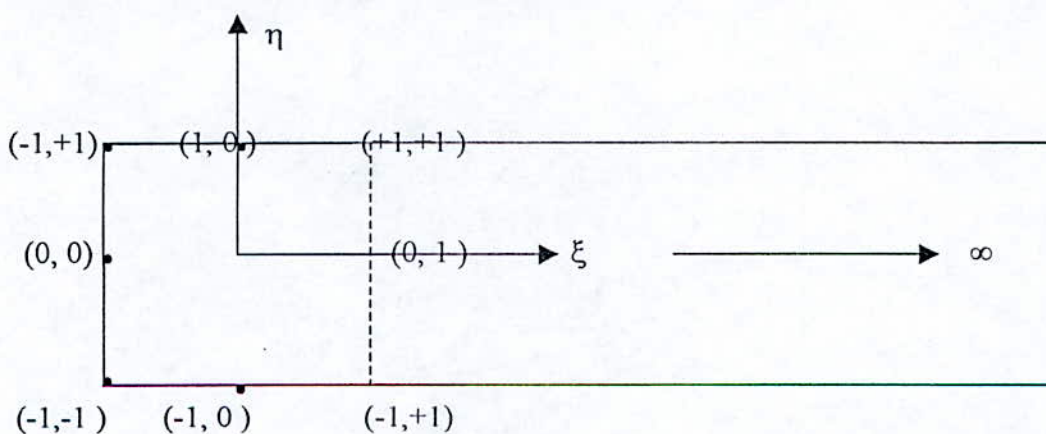


Fig. 5-1-Géométrie de l'élément infini.

Les variables inconnues sont exprimées en termes de fonctions de forme descendantes qui tendent vers zéro à l'infini.

Les fonctions de formes de l'élément infini sont données par l'expression :

$$M_i(\xi, \eta) = F_i(\xi, \eta) \cdot N_i(\xi, \eta)$$

avec :

$N_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de formes standard.

$F_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions décroissantes.

$M_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de forme de l'élément infini.

Le rôle de la fonction décroissante  $F_i(\xi, \eta)$  est d'assurer que le comportement de l'élément reflète bien le sens physique du problème. La fonction décroissante  $F_i(\xi, \eta)$  doit être égale à l'unité en chaque nœud.  $F_i(\xi_i, \eta_i) = 1$

### V-3-2-Approche inverse :

Dans cette approche les dimensions de l'élément de référence ainsi que les fonctions d'interpolation nodale de la fonction inconnue sont les mêmes que celles d'un élément fini classique sauf que la représentation paramétrique de l'élément est définie à l'aide de fonctions comportant une singularité au nœud situé sur la frontière, par exemple pour  $\xi = +1$  si  $\xi$  est la direction infinie, de façon que quand  $\xi$  approche  $+1$  le nœud correspondant de l'élément parent se retrouve à l'infini. On désigne aussi cette approche par le terme « *formulation ascendante* ». Son principal avantage réside dans le fait que les intégrations sur l'élément sont faites à l'aide des formules de **Gauss-Legendre**.

C'est cette approche que nous utiliserons pour notre étude.

### V-3-2-1-Principe de construction de la fonction de transformation :

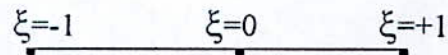
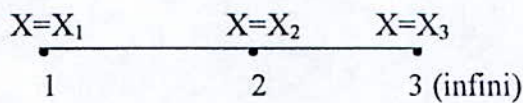
#### a- Cas unidimensionnel :

On présente tout d'abord la transformation géométrique pour un élément infini unidimensionnel qui a servi de base pour formuler les fonctions croissantes dans le cas bidimensionnel qui nous concerne.

Etant donné l'élément unidimensionnel illustré sur la figure 5-2, le troisième nœud est rejeté à l'infini, la position d'un pôle O à partir duquel la transformation à l'infini est effectuée est arbitraire et son abscisse doit vérifier  $x_0 \leq x_1$  (dans notre cas, on a choisi le pôle comme confondu avec le nœud 1)

Considérons la fonction suivante :

$$X = N_1 X_1 + N_2 X_2 = \left( \frac{-2\xi}{1-\xi} \right) X_1 + \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) X_2$$



a- Représentation globale

b- Représentation locale

Fig. 5-2- Élément infini unidimensionnel

Nous remarquons que :

$$\xi = 0 \Rightarrow X = X_2$$

$$\xi = -1 \Rightarrow X = X_1$$

$$\xi = +1 \Rightarrow X = X_3$$

De plus on a :

$$N_1 + N_2 = \sum_{i=1}^2 N_i = 1 \quad (1)$$



En résolvant cette équation en  $\xi$  on trouve :

$$\xi = \frac{X - X_2}{X - 2X_1 + X_2} = 1 - \frac{2(X_2 - X_1)}{X - 2X_1 + X_2}$$

Pour une valeur de  $X_2 = 2X_1$ , on aura alors :  $\xi = 1 - \frac{2X_1}{X}$

Il est à remarquer que la condition (1) est très importante car elle assure que la transformation géométrique effectuée ne sera pas affectée par un changement éventuel de l'origine du système de coordonnées.

### b- Cas bidimensionnel :

La généralisation du problème au cas bidimensionnel est simple. Il suffit, pour un élément infini horizontal par exemple, de multiplier ces nouvelles fonctions de transformation géométrique par les fonctions d'interpolation classique de **Lagrange** qui traduisent la transformation géométrique dans la direction finie  $\eta$ .

Donc les fonctions de formes sont données par :

$$M_i(\xi, \eta) = N_i(\xi)N_i(\eta)$$

avec :

$N_i(\xi)$  : Transformation infinie à une dimension.

$N_i(\eta)$  : Fonction de forme standard en  $\eta$ .

$M_i(\xi, \eta)$  : Fonction de forme de l'élément infini.

Ainsi les fonctions de transformations sont données par :

$$M_1 = \frac{(-1 - \xi - \xi\eta + \eta^2)}{(1 - \xi)}$$

$$M_2 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{2(1 - \xi)}$$

$$M_6 = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{(1 - \xi)}$$

$$M_7 = \frac{(-1 - \xi + \eta\xi + \eta^2)}{(1 - \xi)}$$

$$M_8 = \frac{2(1 - \eta^2)}{(1 - \xi)}$$

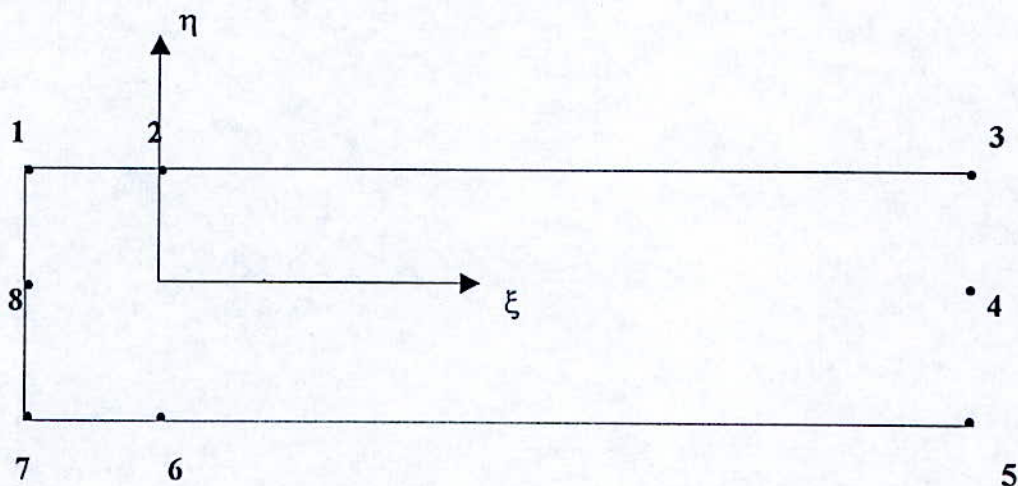


Fig. 5-3- Élément infini à 8 nœuds (à une direction infinie,  $\xi$ )

De la même manière, on obtient pour l'élément de coin (c'est-à-dire à deux directions infinies) illustré sur la figure 5-4 les fonctions de transformations suivantes :

$$M_1 = \frac{4(1 + \xi + \eta)}{(1 - \xi)(1 - \eta)}$$

$$M_2 = \frac{2(1 + \xi)}{(1 - \xi)(1 - \eta)}$$

$$M_8 = \frac{2(1+\eta)}{(1-\xi)(1-\eta)}$$

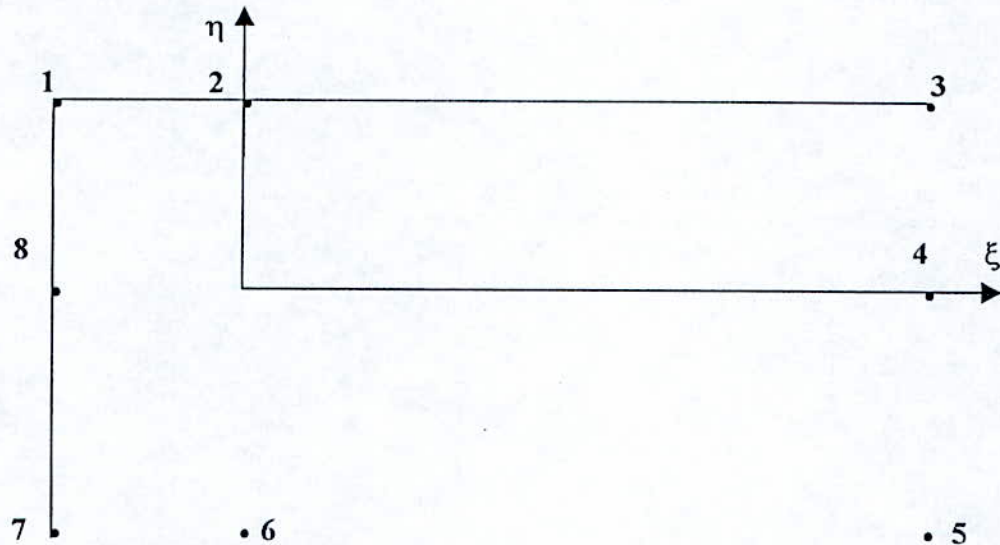


Fig. 5-4- Élément infini à 8 nœuds (à deux directions infinies)

#### V-4-Calcul de la matrice de rigidité de l'élément :

Pour montrer les différentes étapes de calcul de la matrice de rigidité, nous allons considérer l'élément infini illustré par la figure 5-3, la transformation géométrique qui permet le passage des coordonnées locales aux coordonnées globales, s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} r = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) r_i \\ z = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) z_i \end{cases}$$

Avec :

$M_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de transformation de l'élément infini, l'interpolation du champ de déplacement des éléments finis est donnée en termes des déplacements nodaux des nœuds situés à une distance finie.

En supposant que les déplacements tendent vers zéro à l'infini, le nombre  $n$  de nœuds est égal à celui du quadrilatère utilisé (dans notre cas 8) moins le nombre de nœuds appartenant à la frontière rejetée à l'infini et ce pour chaque type d'élément infini considéré, c'est-à-dire :

- $n=5$  pour une seule direction infinie.
- $n=3$  pour deux directions infinies.

Donc, les fonctions d'interpolations de l'élément infini sont obtenues directement à partir de celles correspondantes aux mêmes nœuds de l'élément fini, le champ de déplacement en tous points de l'élément est donné par :

$$\begin{cases} U = \sum_{i=1}^5 N_i(\xi, \eta) U_i \\ V = \sum_{i=1}^5 N_i(\xi, \eta) V_i \end{cases}$$

Avec :

$N_i(\xi, \eta)$  : fonction de forme standard de l'élément fini.

La matrice de rigidité de l'élément infini est donnée par :

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

Ou encore :

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] [J] d\xi d\eta$$

Pour le cas d'un problème axisymétrique, on a :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{r,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial r \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

ou :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^5 N_i(\xi, \eta) U_i \\ \sum_{i=1}^5 N_i(\xi, \eta) V_i \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour un élément infini, les fonctions de transformation  $M_i(\xi, \eta)$  sont différentes des fonctions d'interpolation  $N_i(\xi, \eta)$ .

$$\begin{cases} r = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) r_i \\ z = \sum_{i=1}^5 M_i(\xi, \eta) z_i \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} r_i & ; & \frac{\partial r}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} r_i \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} z_i & ; & \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} z_i \end{cases}$$

Donc la matrice jacobienne  $[J]$  pour un élément infini est donnée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 \frac{\partial M_i}{\partial \xi} r_i & \sum_{i=1}^5 \frac{\partial M_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^5 \frac{\partial M_i}{\partial \eta} r_i & \sum_{i=1}^5 \frac{\partial M_i}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix}$$

Et on voit mieux maintenant la simplicité des transformations à faire à un programme d'éléments finis lorsqu'on utilise cette approche.

### V-5-Couplage élément finis- infinis :

Comme il a été dit plus haut l'ingénieur en génie civil est souvent confronté à des problèmes liés à la présence de domaines infinis ou semi-infinis, c'est le cas pour les chaussées.

La figure 5-5 montre un exemple de maillage d'une structure de chaussées multicouches où il est mis en évidence un domaine constitué d'éléments infinis, à la frontière d'un domaine maillé en éléments finis traditionnels.

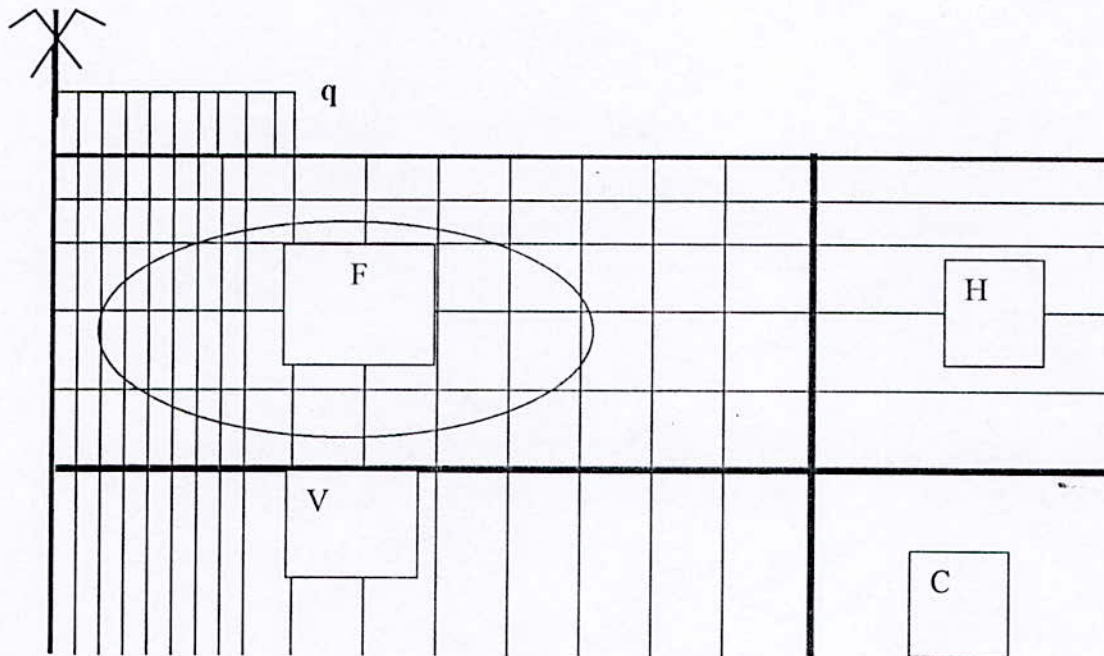


Fig. 5-5- Couplage éléments finis- éléments infinis.

- ◆ F : élément fini.
- ◆ H : élément semi-infini horizontal.
- ◆ V : élément semi-infini vertical.
- ◆ C : élément semi-infini de coin.

L'exemple représente la structure d'une chaussée qui est assimilée à un massif multicouche, semi-infini, élastique, linéaire, homogène et isotrope. Le chargement représente la roue d'un véhicule assimilée elle aussi à une plaque circulaire le domaine présente donc une symétrie de révolution.

Cette étude a pour objectif principal de mettre en évidence la facilité d'introduire des éléments frontières dans un programme structuré pour des éléments finis et les avantages qu'on peut en attendre c'est-à-dire la réalisation du maillage d'un domaine infini d'une façon économique.

Les résultats de cette étude seront présentés plus tard, ils sont basés sur l'approche inverse, et seront comparés avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis.

*CHAPITRE VI*  
*APPROCHE*  
*DU PROBLEME REEL*



### VI-1-Introduction :

Comme il a été mentionné plus haut, le dimensionnement des chaussées se base sur une suite d'approximation d'une réalité très complexe par des modèles de la mécanique des chaussées qui permettent d'expliquer le fonctionnement et le comportement des divers types de structures routières à partir d'une schématisation simple des structures et des charges appliquées.

On présente dans cette partie deux méthodes différentes par leur approche du problème réel, l'une basée sur la prise en compte d'un jumelage à partir d'un calcul axisymétrique, l'autre est une méthode d'approximation qui se base sur le principe d'équivalence des épaisseurs de couches.

### VI-2-Prise en compte d'un jumelage à partir d'un calcul axisymétrique :

L'étude des chaussées en axisymétrie n'est possible que si la charge considérée est simplifiée en une distribution uniforme répartie sur un disque circulaire. Cette charge équivalente est supposée approcher la charge réelle que présentent deux empreintes causées par un jumelage (fig.6-1). De plus, l'empreinte de chaque roue n'est pas vraiment circulaire mais présente une forme plus allongée ; cet aspect ne sera pas pris en compte dans notre travail.

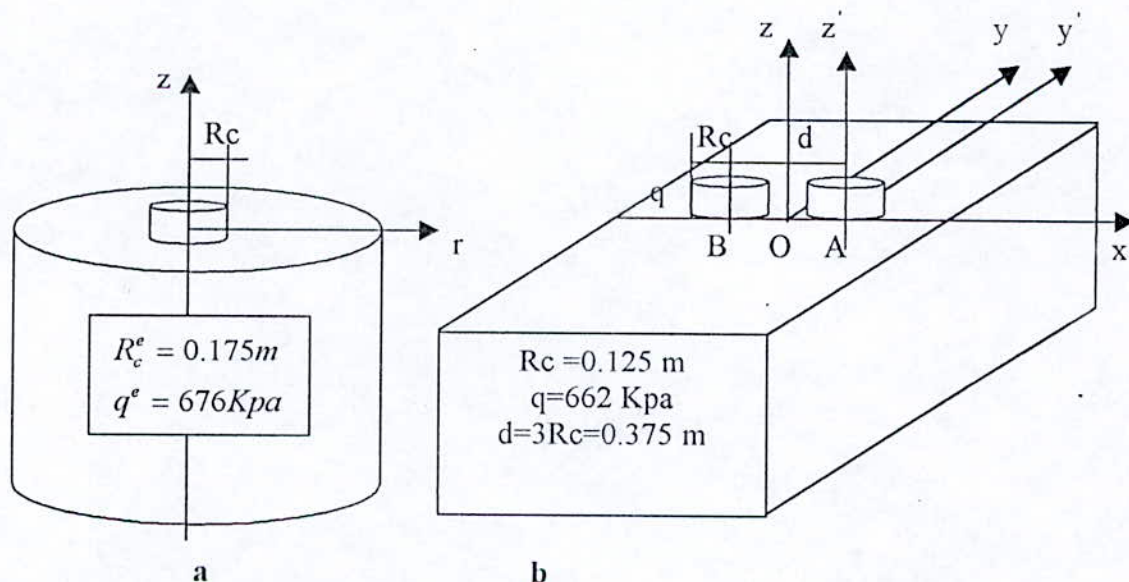


Fig. 6-1 - Problème axisymétrique (a) et tridimensionnel (b)

pour un demi- essieu de 65 KN.

Sur la figure on a :

Oy l'axe de circulation.

Oxz et Oyz les plans de symétrie du jumelage et de l'entre-axe du jumelage.

Lors d'une simulation tridimensionnelle et pour simplifier le maillage l'empreinte circulaire de chaque roue du jumelage est approchée par un carré de côté  $a$  sur lequel pourra être appliquée la même pression, ce qui correspond à :

$$a = R_c \sqrt{\pi} = 0.22155 \text{ m}$$

Le calcul tridimensionnel, qui sert de référence au calcul simplifié proposé, aura ce type de chargement.

Le but recherché ici est de proposer une méthode approchée utilisant une formulation axisymétrique, pour calculer une structure de chaussées à comportement linéaire sous l'effet d'un jumelage. Pour ce faire, on se base sur les résultats d'un calcul axisymétrique sous l'effet d'une charge qui correspond à la pression réelle d'un demi-jumelage soit :

$$q = 662 \text{ Kpa et } R_c = 0.125 \text{ m}$$

### **VI-2-1-Principe de la méthode :**

Pour approcher la solution d'un calcul sous un jumelage, on utilise le principe de la superposition dont on rappelle les grandes lignes.

#### **VI-2-1-1-Superposition des charges :**

Le principe de superposition exprime une correspondance linéaire entre la donnée (champ de force  $P$ ) et la solution (champs de contrainte  $\sigma$ , de déformation  $\varepsilon$  et de déplacement  $U$ ). Ce principe est exact pour des structures dont les matériaux ont des comportements élastiques linéaires, comme dans notre cas.

En application au problème que l'on traite, on note  $q^s$  et  $q^d$  respectivement la charge de gauche et la charge de droite dont les vecteurs forces correspondants sont  $P^s$  et  $P^d$ .

Les solutions correspondantes à chacune de ces forces prises séparément sont :  
 $(\sigma^s, \varepsilon^s, U^s)$  et  $(\sigma^d, \varepsilon^d, U^d)$ .

L'application du principe de superposition donne la solution :  
 $(\sigma = \sigma^s + \sigma^d, \varepsilon = \varepsilon^s + \varepsilon^d \text{ et } U = U^s + U^d)$  correspond à  $P = P^s + P^d$

### VI-2-1-2-Application au problème traité :

Le principe de superposition s'applique dans le cas d'un milieu élastique linéaire axisymétrique soumis à une charge axisymétrique. Dans le cas où seul la charge appliquée n'est pas axisymétrique, il est possible d'appliquer le principe de superposition en développant la charge en série de **Fourier** (O.C.Zienkiewicz, 1977).

Pour le cas de chargement considéré (jumelage), on peut appliquer le principe de superposition, les comportements doivent être les mêmes pour chacun des cas de charge et doivent correspondre aux champs dus à l'ensemble des deux charges.

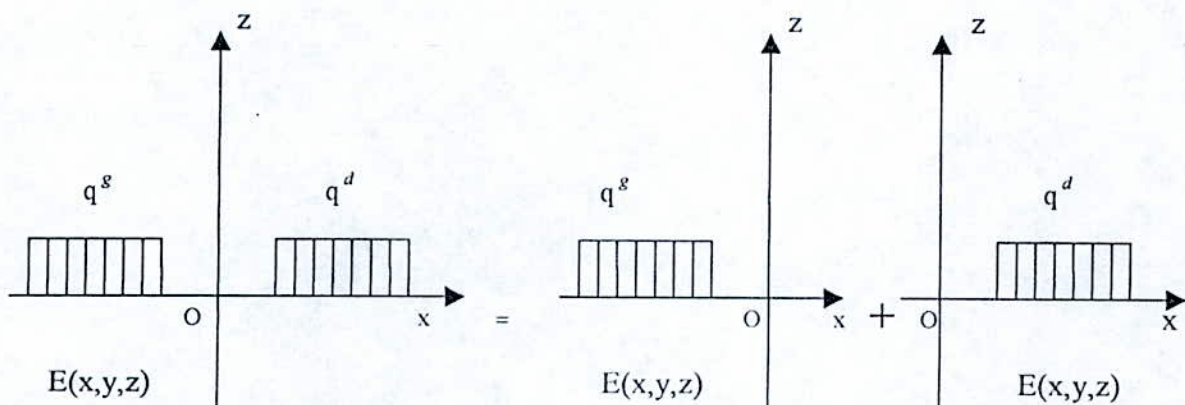


Fig.6-2- Superposition des charges

Entant donnée la symétrie du problème par rapport au plan  $(O, y, z)$ , il suffit de considérer le problème de base schématisé ;

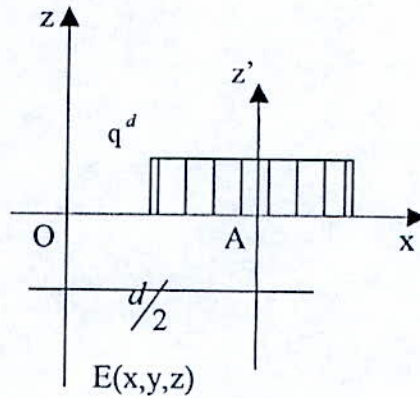


Fig.6-3- Problème à résoudre .

Le champ de caractéristiques élastique  $E(x,y,z)$  est du à la charge totale et est symétrique en  $x$  et en  $y$ . Pour le calcul des contraintes et déplacement, on simplifie la répartition de ces caractéristiques en considérant qu'elle est de révolution autour de l'axe  $Az'$ . Champ de caractéristiques  $E^*(r, z)$ . On est ainsi à un calcul axisymétrique sous l'effet d'une seule charge (fig.6-4)

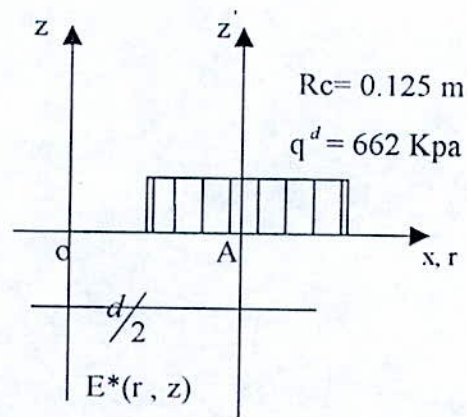


Fig.6-4-Problème approché.

### VI-3-La méthode d'Oedmark :

#### VI-3-1-Introduction :

La méthode d'Oedmark est une méthode approchée pour l'analyse des structures multicouches, son principe est de transformer une structure comprenant plusieurs couches avec des modules  $E$  différents, en une structure équivalente, où toutes les couches ont le même module  $E$ , et où les équations de **Boussinesq** peuvent être utilisées. Cette méthode est aussi appelée «méthode des épaisseurs équivalentes ».

#### VI-3-2-Principe de la méthode :

Deux transformations sont utilisées, comme le montre la figure 6.5, pour une structure bicouche :

- Si on veut calculer les contraintes et les déformations sur une interface, ou la compression de la couche au-dessus de l'interface, la structure est traitée comme un demi-espace de module  $E_1$ .

- Si on veut calculer les contraintes, les déformations et les déflexions au niveau de l'interface, ou au-dessous d'elle (y compris, la contrainte verticale, et la déformation horizontale à la base de la couche supérieure), la couche au-dessus de l'interface est transformée en une couche équivalente avec un module  $E_2$  et un coefficient de poisson  $\nu_2$  mais avec la même rigidité que la couche originale.

Pour que la rigidité de la couche reste la même, l'expression  $\frac{E.I}{(1-\nu^2)}$  (où  $I$  représente le moment d'inertie) doit rester constante. Ce qui conduit à :

Et donc :

$$\frac{h_2^3.E_2}{(1-\nu_2^2)} = \frac{h_1^3.E_1}{(1-\nu_1^2)}$$

$$h_2 = h_1 \left[ \frac{E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)} \right]^{1/3}$$

Où :  $h_e$  représente l'épaisseur équivalente

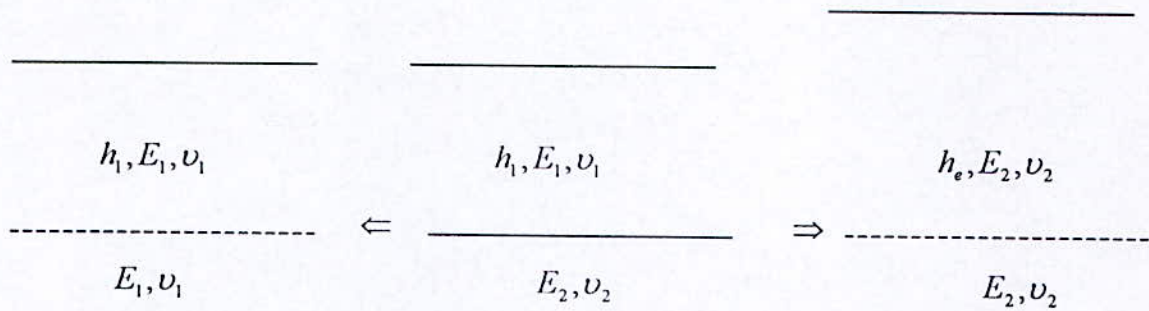


Fig. 6-5 – Transformation pour la méthode d'Oedmark.

Dans plusieurs cas pratiques, les coefficients de Poisson de différents matériaux ne sont pas connus de manière exacte, et on considère souvent que les coefficients de Poisson sont les mêmes pour toutes les couches.

L'expression de l'épaisseur équivalente devient donc :

$$h_e = h_1 \cdot \left[ \frac{E_1}{E_2} \right]^{1/3}, \text{ pour } \nu_1 = \nu_2 \quad (1)$$

Pour une structure multicouche, l'épaisseur équivalente des (n-1) couches supérieures, avec un module  $E_n$ , correspondant à la n-ième couche a pour expression :

$$h_{e,n} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ h_i \cdot (E_i/E_n)^{1/3} \right] \quad (2)$$

### VI-3-3-Facteur de correction :

Pour obtenir une meilleure concordance entre la méthode **d'Oedmark**, qui est une méthode approchée, et la théorie de l'élasticité, un facteur de correction  $f$  est souvent introduit.

Les expressions (1) et (2) deviennent :

$$h_e = f \cdot h_1 \left[ \frac{E_1}{E_2} \right]^{1/3}$$

$$h_{e,n} = f \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left[ h_i \cdot (E_i / E_n)^{1/3} \right]$$

Le facteur de correction  $f$  dépend de l'épaisseur de la couche, du rapport entre les modules des couches, des coefficients de poisson, ainsi que du nombre de couches de la structure.

Les valeurs de  $f$  les plus fréquemment utilisées sont :

- ♦  $f=0.9$  pour les structures bicouches.
- ♦  $f=0.8$  pour les structures multicouches.

A l'exception de la première interface où  $f$  est pris égal à 1.0.

Quelquefois, un facteur de correction, valant :  $1.1 \left( \frac{a}{h_1} \right)^{0.3}$  est utilisé pour la première interface, lorsque  $a > h_1$  (où  $a$  représente le rayon de charge)

Il est important de souligner que ces facteurs de corrections ne font qu'améliorer la concordance de cette méthode avec la théorie de l'élasticité, et pas forcément avec les contraintes et les déformations dans la structure de chaussée réelle, néanmoins, cette méthode approchée donne de bons résultats, à condition de respecter deux limitations essentielles qui sont :

- ◆ le module des différentes couches doit décroître suivant la profondeur, et il est préférable que le rapport des modules de deux couches consécutives soit au moins égal à 2.
- ◆ L'épaisseur équivalente d'une couche, doit être de préférence supérieure au rayon de charge



*CHAPITRE VII*

*PRESENTATION  
DU PROGRAMME*

**VII-1-Introduction :**

Comme il a été dit précédemment, l'outil informatique est indispensable pour la résolution d'un problème en éléments finis vu la grande taille des vecteurs et des matrices à manipuler dans le système  $[K]\{U\} = \{F\}$

La programmation efficace de la méthode des éléments finis requiert une bonne connaissance à la fois dans le domaine des éléments finis, ainsi que dans le domaine de l'informatique, cette programmation est relativement complexe, car elle fait intervenir un grand nombre de sous-routines exécutant des opérations très diverses : organisation des données, intégration numérique, résolution de systèmes d'équations ... etc.

Dans ce chapitre nous définirons tout d'abord les différentes étapes communes à tout programme d'éléments finis, puis nous présenterons les programmes d'éléments finis et éléments infinis élaborés pour la résolution d'un problème axisymétrique.

**VII-2-Etapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis :**

Tout programme basé sur la méthode des éléments finis comprend quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- a-) Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques, les sollicitations et les conditions aux limites.
- b-) Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale des sollicitations.
- c-) Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
- d-) Impression des résultats.

La figure 7-1 montre l'enchaînement de ces différents blocs.

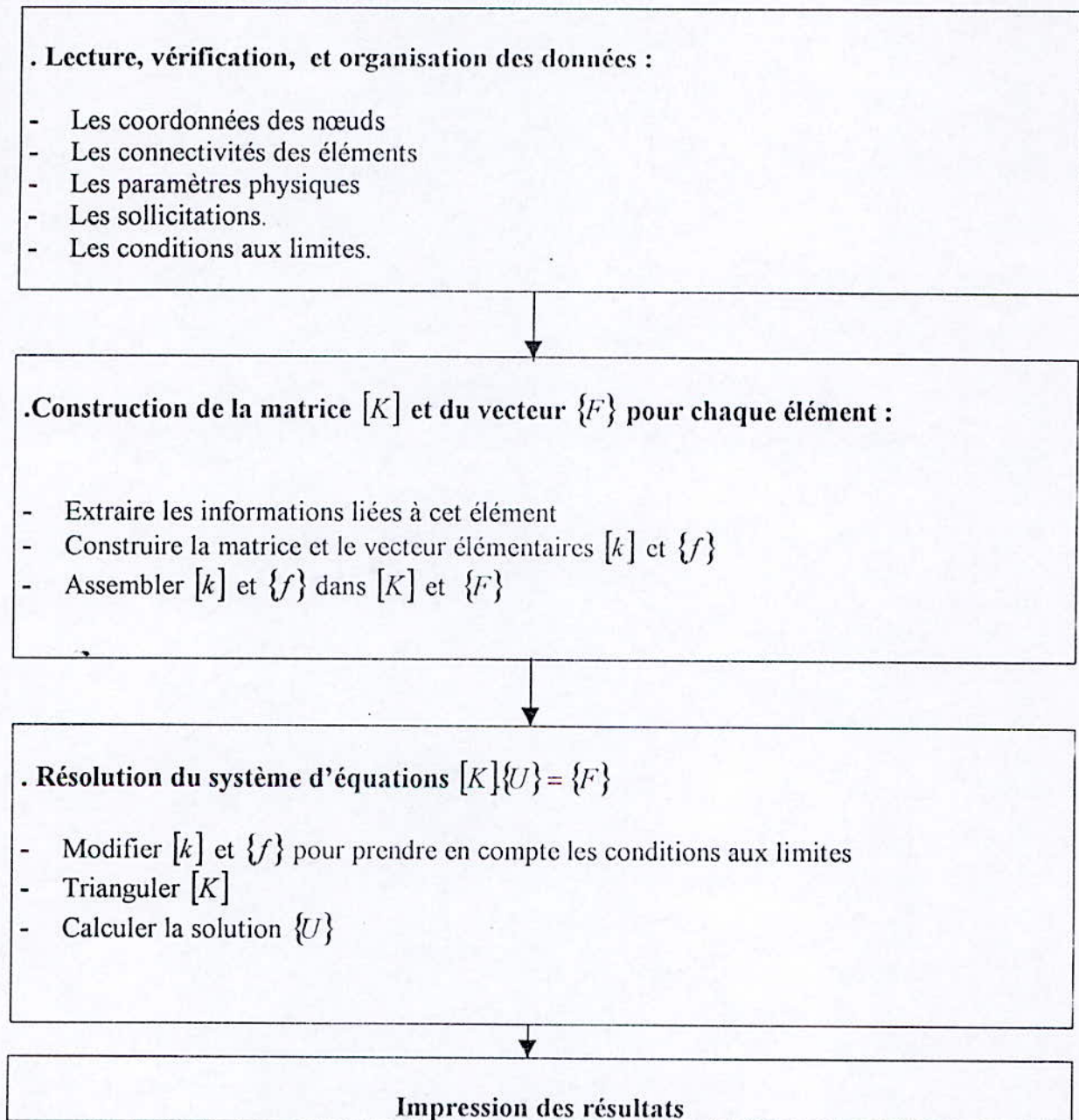


Fig. 7-1 blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme d'éléments finis.

### VII-3-Présentation du programme d'éléments finis :

L'inconvénient des programmes d'éléments finis qui ont à manipuler une quantité importante de données, et qui sont exécutés sur des petits ordinateurs est leur lenteur d'exécution. La meilleure solution pour pallier cet inconvénient est de rendre le programme modulaire, c'est-à-dire de le diviser en un module principal, et des modules de préparation. Ces derniers ne seront pas stockés dans le disque et seront exécutés avant le module principal.

On ne stockera sur disque que les fichiers de sortie de ces modules et qui sont nécessaires pour l'exécution du module principal.

#### VII-3-1-Modules de préparation de données :

Trois modules de préparation de données ont été élaborés :

- ◆ PROGRAMME MESH (programme de maillage) : son fichier de sortie MESH.OUT contient les coordonnées de tous les nœuds de la structure, ainsi que les connectivités des éléments.
- ◆ PROGRAMME ELIM (programme des conditions aux limites) : son fichier de sortie ELIM.OUT contient les termes de la matrice de rigidité à éliminer en tenant compte des conditions aux limites du problème traité.
- ◆ PROGRAMME FORCE (programme de calcul des forces nodales) : son fichier de sortie FORCE.OUT contient les valeurs des forces nodales équivalentes les nœuds non chargés étant affectés d'une valeur nulle.

#### VII-3-2-Module principal :

C'est la partie essentielle du programme, il construit la matrice de rigidité globale de la structure étudiée ; il est composé de neuf sous-routines :

- ◆ Subroutine ZERO : elle initialise les termes de la matrice de rigidité à zéro.
- ◆ Subroutine MATD : elle calcule la matrice d'élasticité  $[D]$  pour chaque couche de chaussée.
- ◆ Subroutine FFHN : elle donne les fonctions de forme de l'élément quadrilatéral à huit nœuds.
- ◆ Subroutine JACOBIEN : elle calcule la matrice Jacobienne ainsi que son déterminant en faisant appel aux fonctions de forme ainsi qu'aux coordonnées des nœuds.
- ◆ Subroutine BTDB : elle calcule la matrice de relation cinématique élémentaire  $[B]$ , puis le produit  $[B^t].[D].[B]$ , qui une fois intégré donne la matrice de rigidité.
- ◆ Subroutine LOCA : elle donne la position de chaque terme élémentaire dans le repère global.
- ◆ Subroutine ASBL : elle permet l'assemblage des matrices élémentaires dans la matrice globale, cet assemblage est fait à l'aide des connectivités, et fait donc appel au fichier MESH.OUT.
- ◆ Subroutine QUAD : elle donne les coordonnées et les poids des points de GAUSS utilisés pour l'intégration numérique.
- ◆ Subroutine CAL : elle modifie la matrice  $[K]$  pour tenir compte des conditions aux limites, c'est-à-dire, qu'elle ne stocke que les termes à degrés de liberté actifs en faisant appel au fichier ELIM.OUT.

**VII-3-3-Resolution du système d'équations  $[K].\{U\}=\{F\}$  :**

Une fois que la matrice de rigidité ainsi que le vecteur de forces globales construits, il ne reste plus qu'à résoudre le système  $[K].\{U\}=\{F\}$  et ainsi déduire le vecteur des déplacements.

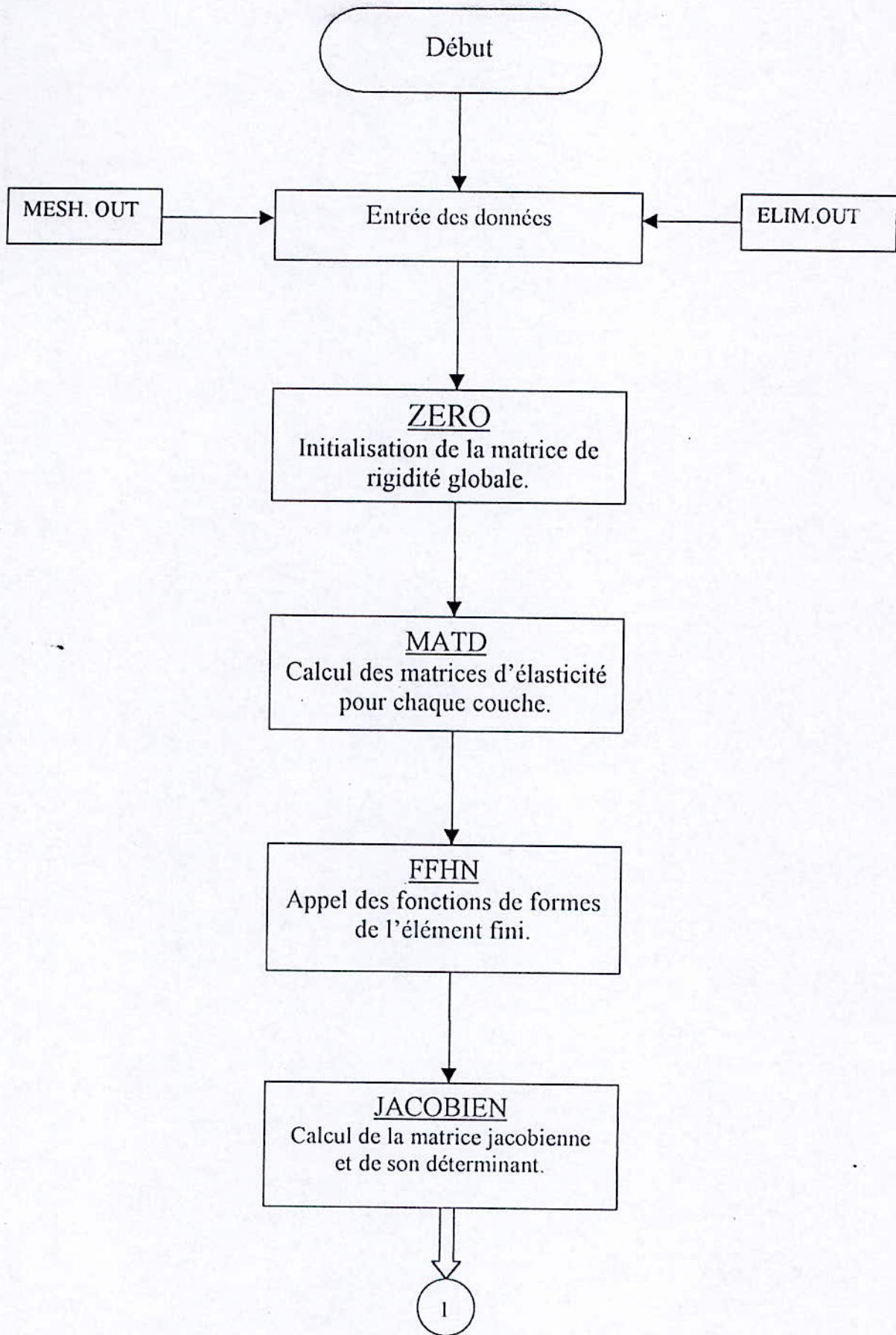
Il existe beaucoup de méthodes de résolution d'un tel système d'équations, pour notre part nous avons utilisé un programme qui permet l'inversion de la matrice de rigidité globale  $[K]$  et ainsi les déplacements seront donnés par :

$$\{U\}=[K]^{-1} \cdot \{F\}$$

Une fois que le vecteur des déplacements est connu, et en ayant déjà calculé les matrices  $[B]$  et  $[D]$ , le calcul des contraintes et des déformations, se fait par simple produit :

$$\{\varepsilon\}=[B] \cdot \{U\}$$

$$\{\sigma\}=[D] \cdot \{\varepsilon\}$$



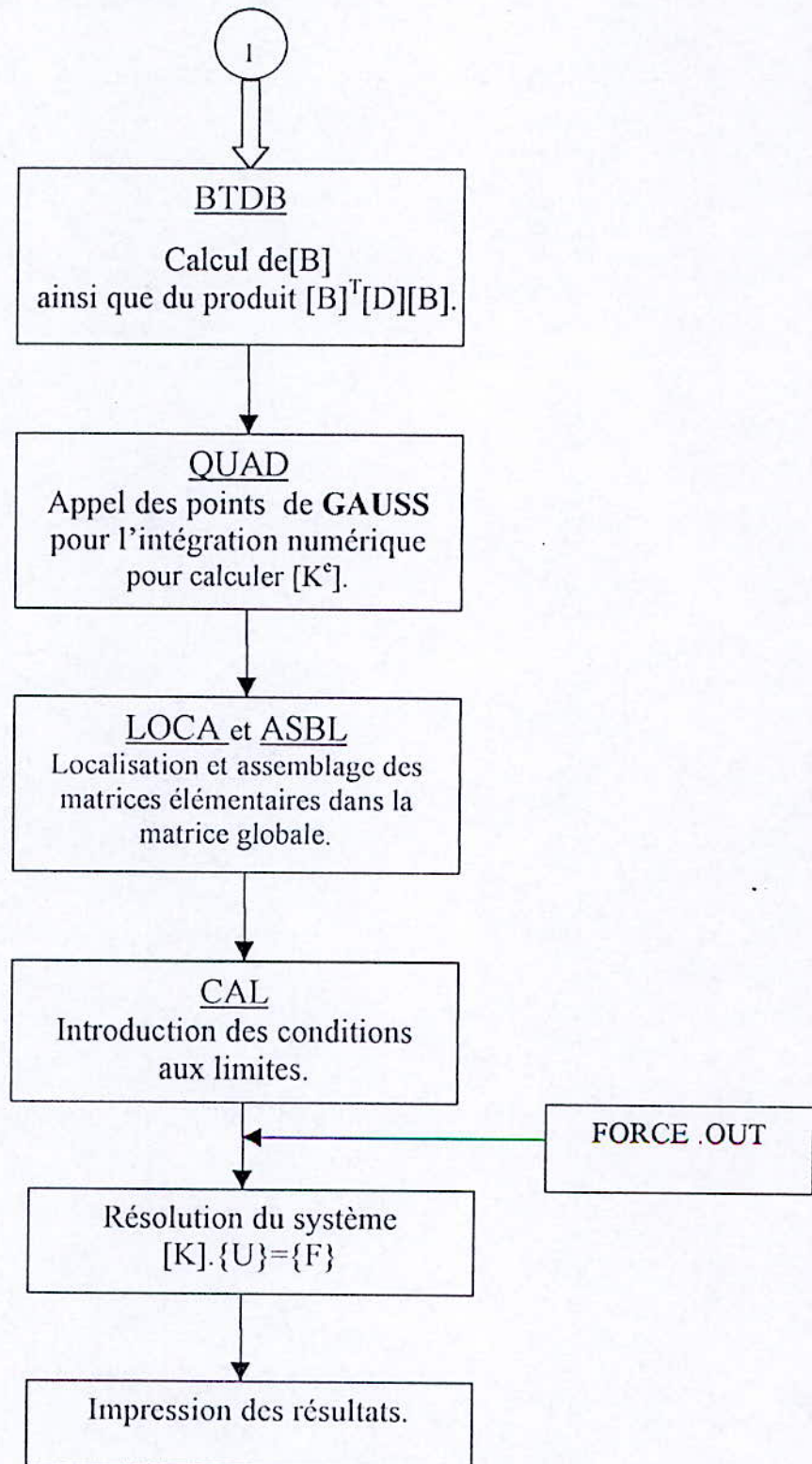


Fig. 7-2- Organigramme du programme d'éléments finis.



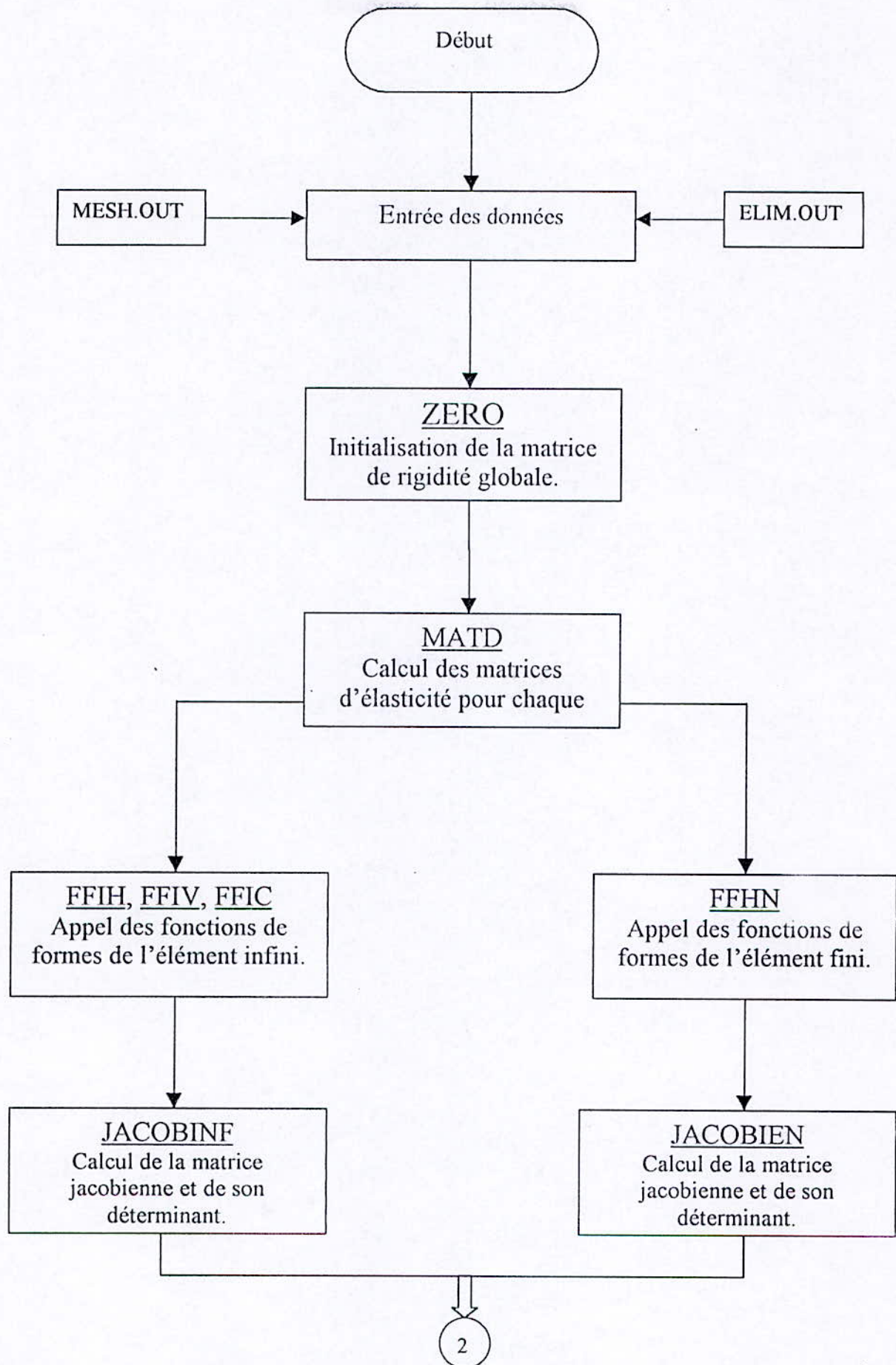
**VII-4- Programmation des éléments infinis :**

L'introduction d'éléments infinis dans un programme d'éléments finis est simple, en effet, et comme l'approche utilisée dans notre étude est l'approche inverse où l'intégration numérique se fait par la méthode de GAUSS déjà utilisée dans le programme d'éléments finis, les seuls changements à apporter à ce dernier sont: l'introduction des fonctions d'interpolation des différents éléments infinis, ainsi que la modification de la subroutine de calcul de la matrice Jacobienne et de son déterminant.

Ainsi les nouvelles subroutines à introduire dans le programme sont :

- ◆ Subroutine FFIH: elle donne les fonctions d'interpolation de l'élément infini horizontal (à une direction infinie, suivant  $\xi$ ) et qui sont au nombre de cinq.
- ◆ Subroutine FFIV: elle donne les fonctions d'interpolation de l'élément infini vertical (à une direction infinie, suivant  $\eta$ ) et qui sont aussi au nombre de cinq.
- ◆ Subroutine FFIC: elle donne les fonctions d'interpolation de l'élément infini de coin (à deux directions infinies).

Le reste des subroutines reste sans changements.



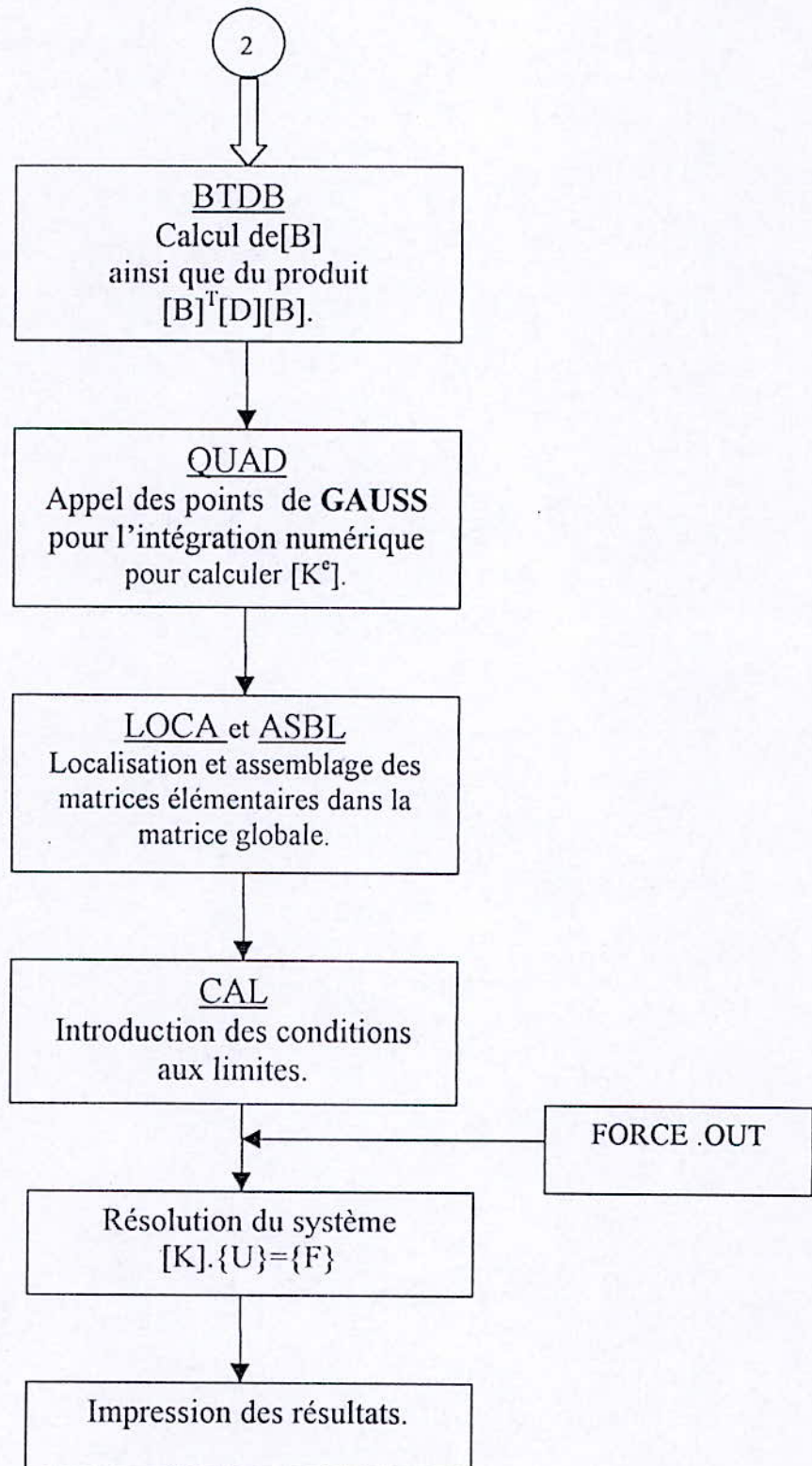
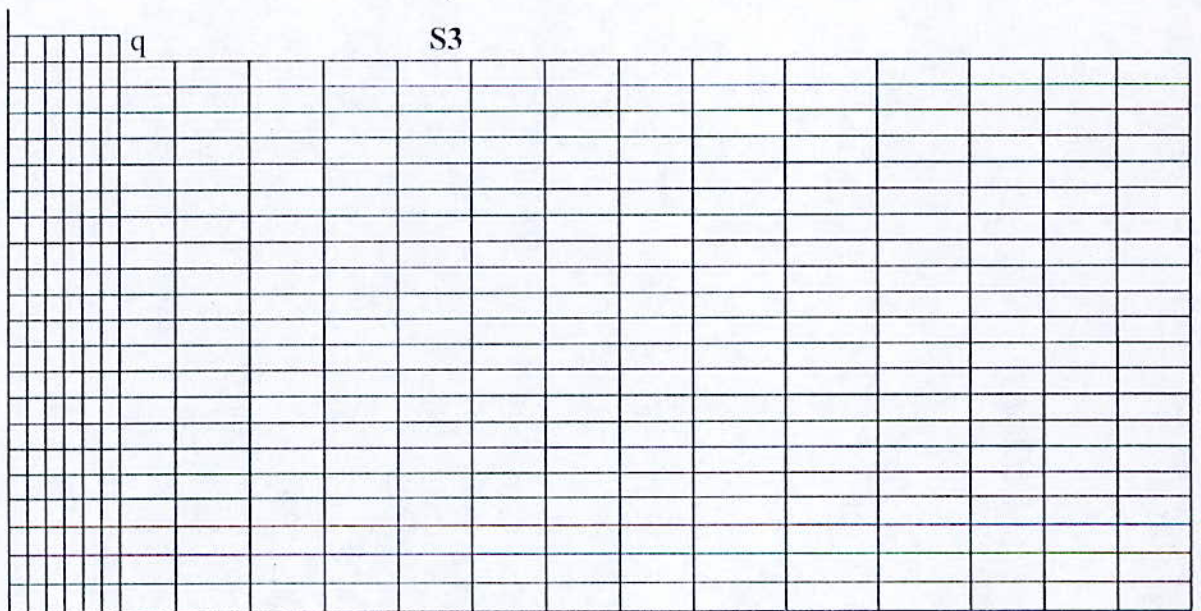
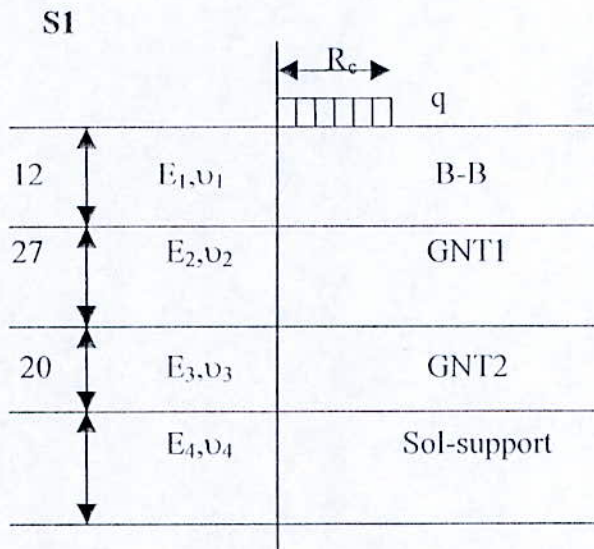
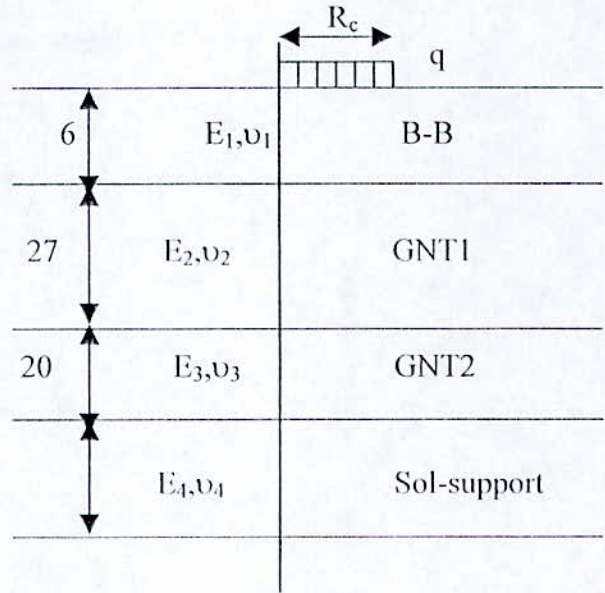
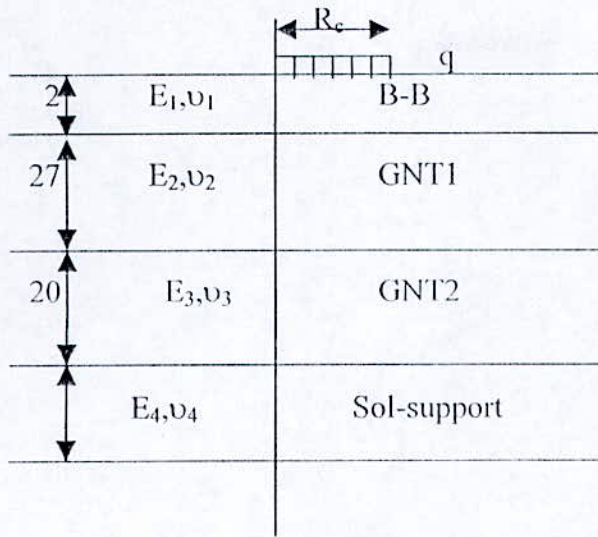


Fig. 7-3-Organogramme du programme de couplage éléments finis-infinis.

*CHAPITRE VIII*

*SIMULATION NUMERIQUE*



Un de type de maillage utilisé "400 éléments"

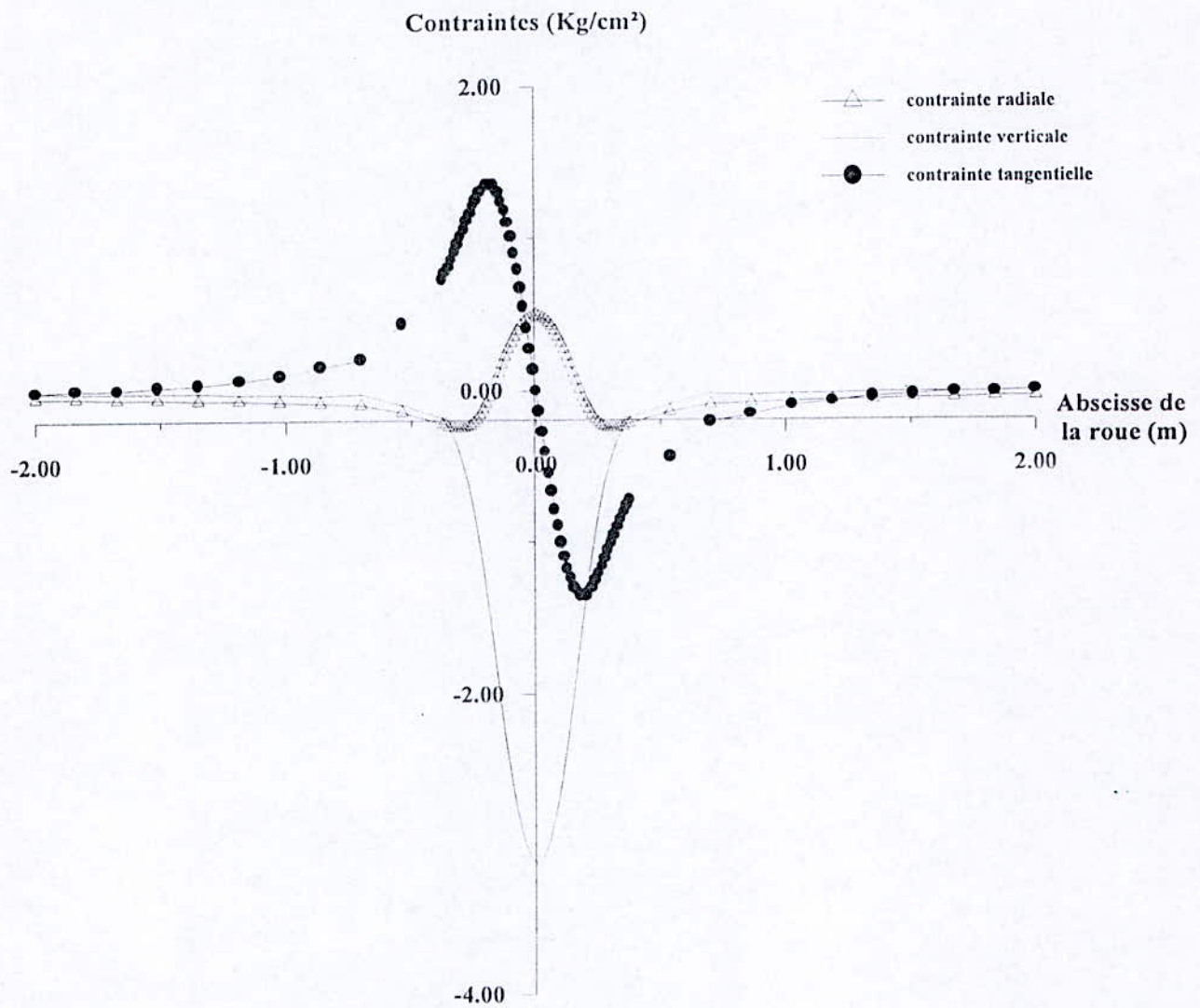


Fig.8-1-Variation de contraintes au milieu de la couche de GNT1

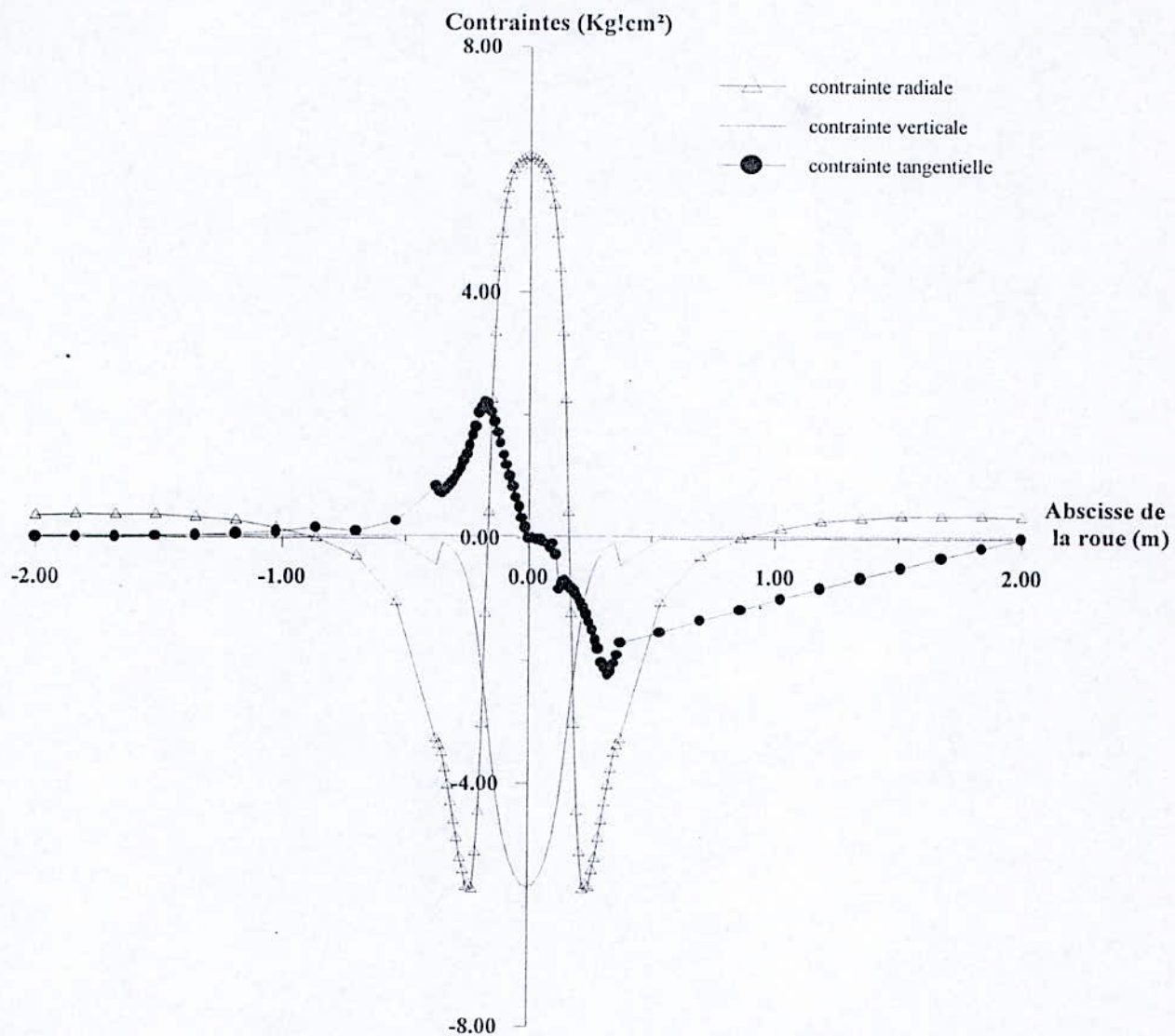


Fig.8-2-Variation de contraintes sur l'interface couche de roulement-GNT1

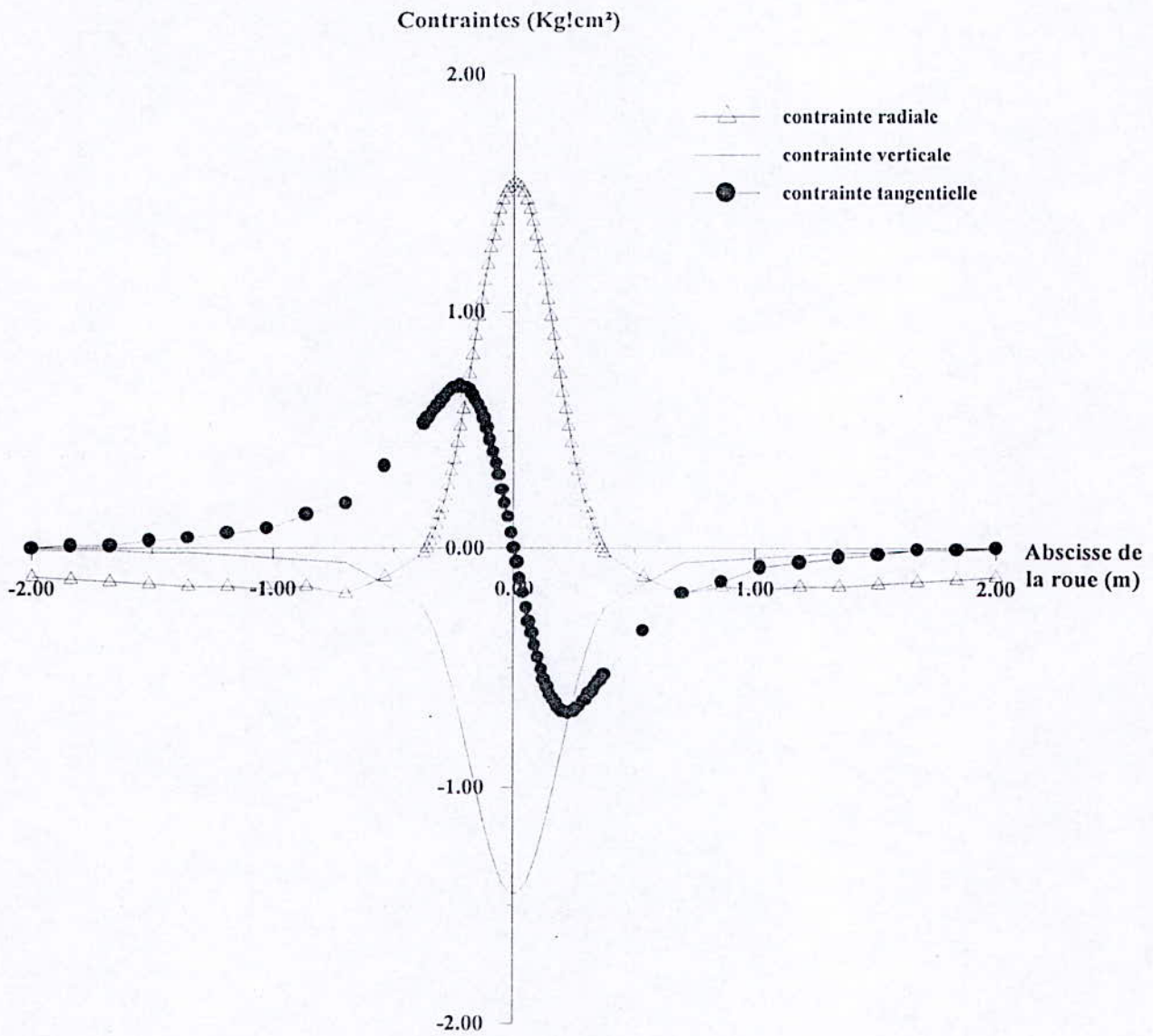


Fig.8-3-Variation de contraintes sur l'interface GNT1-GNT2



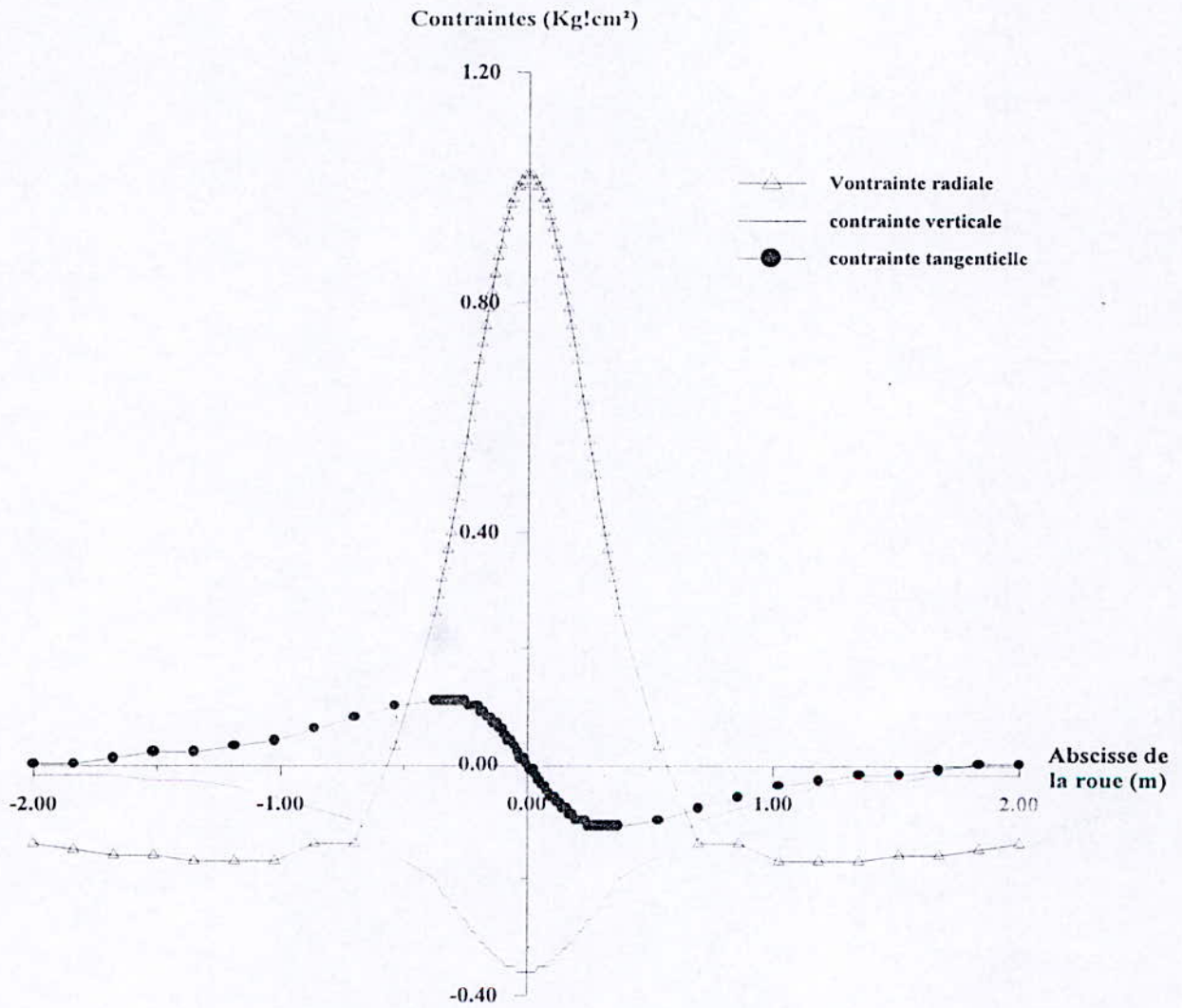


Fig.8-4-Variation de contraintes à l'interface GNT2-Sol -support

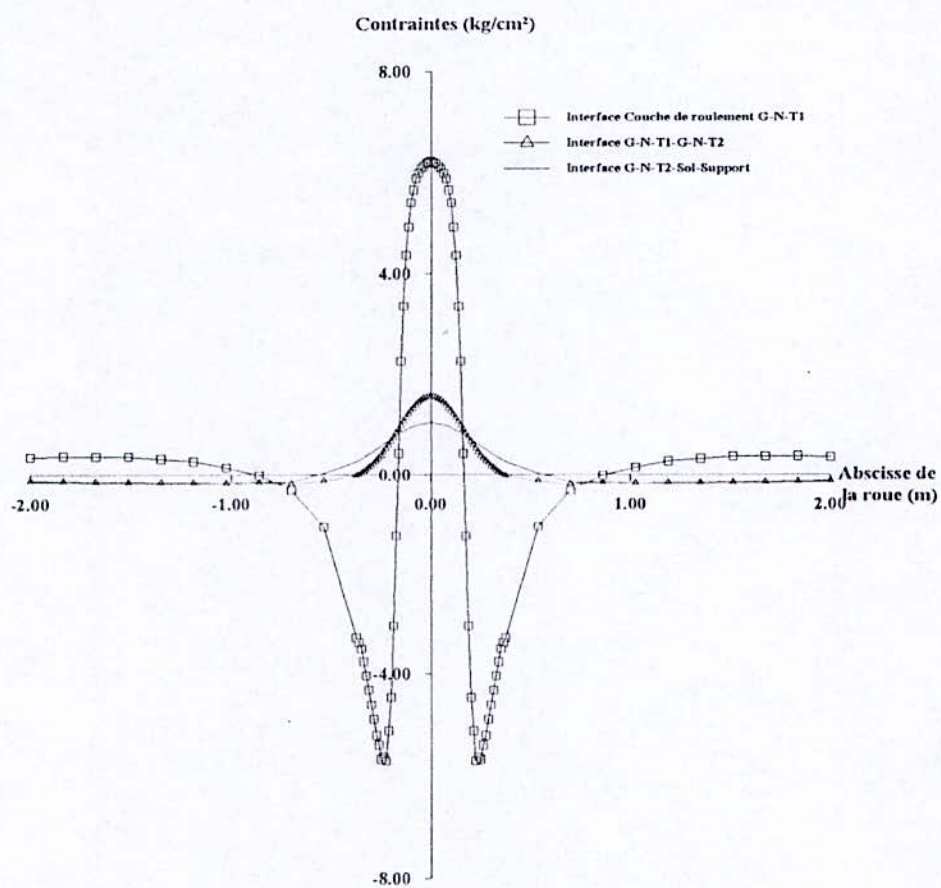


Fig.8-5- Variation de la contrainte radiale.

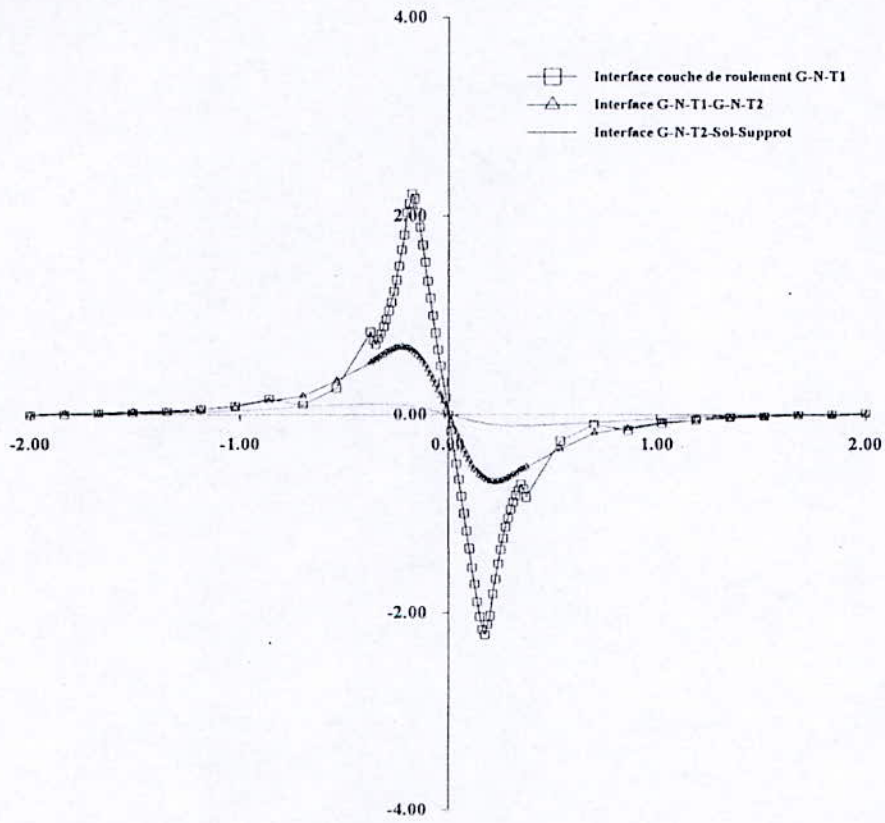


Fig.8-6- Variation de la contrainte tangentielle.

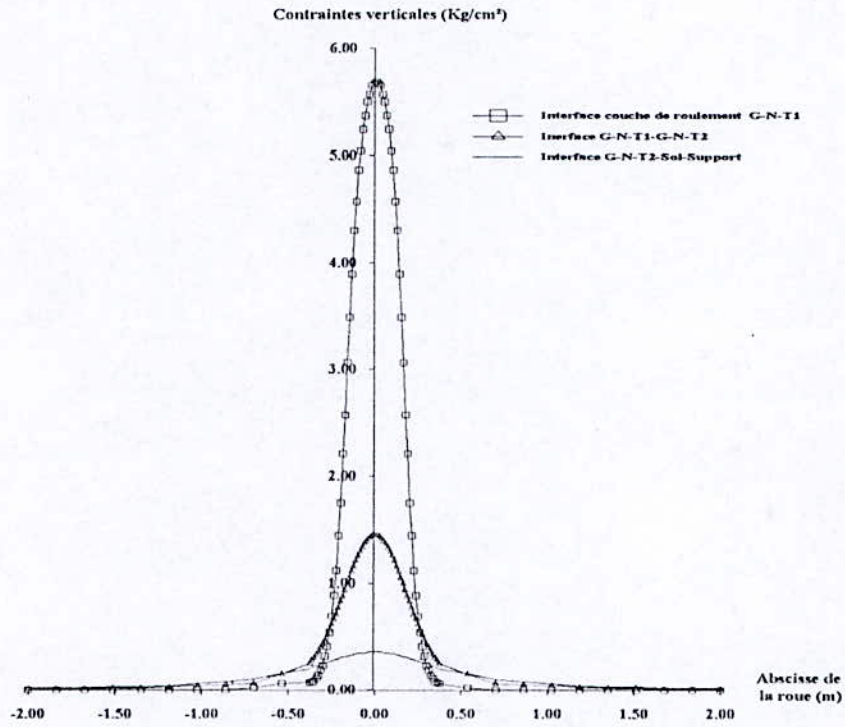


Fig.8-7- Variation de la contrainte verticale.

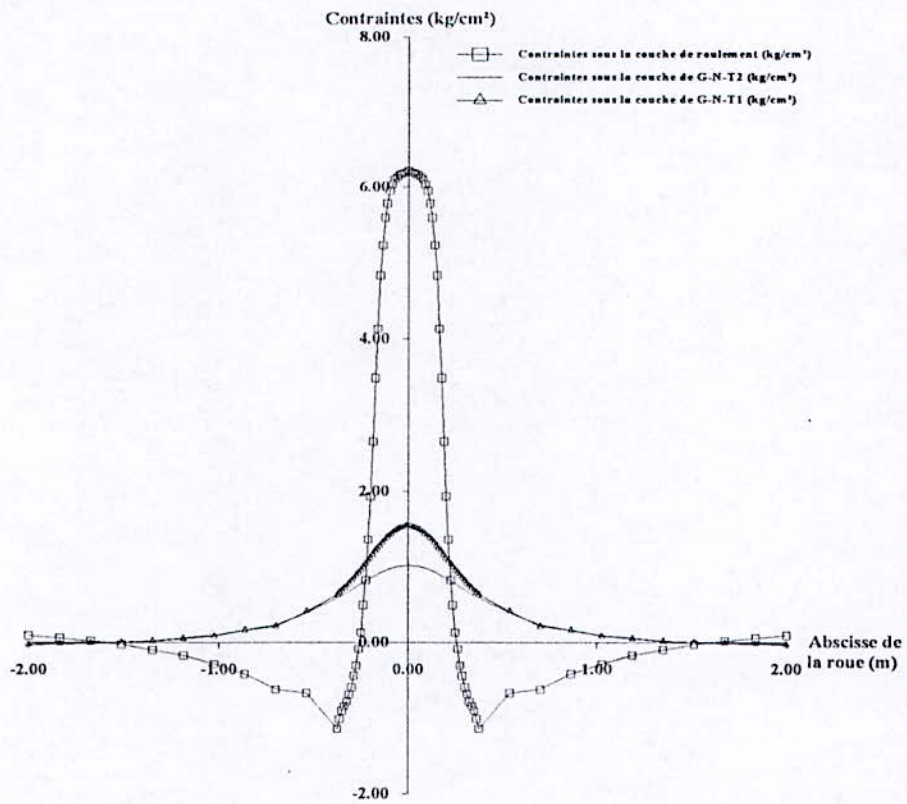


Fig.8-8- Variation des contraintes circonférentielles.

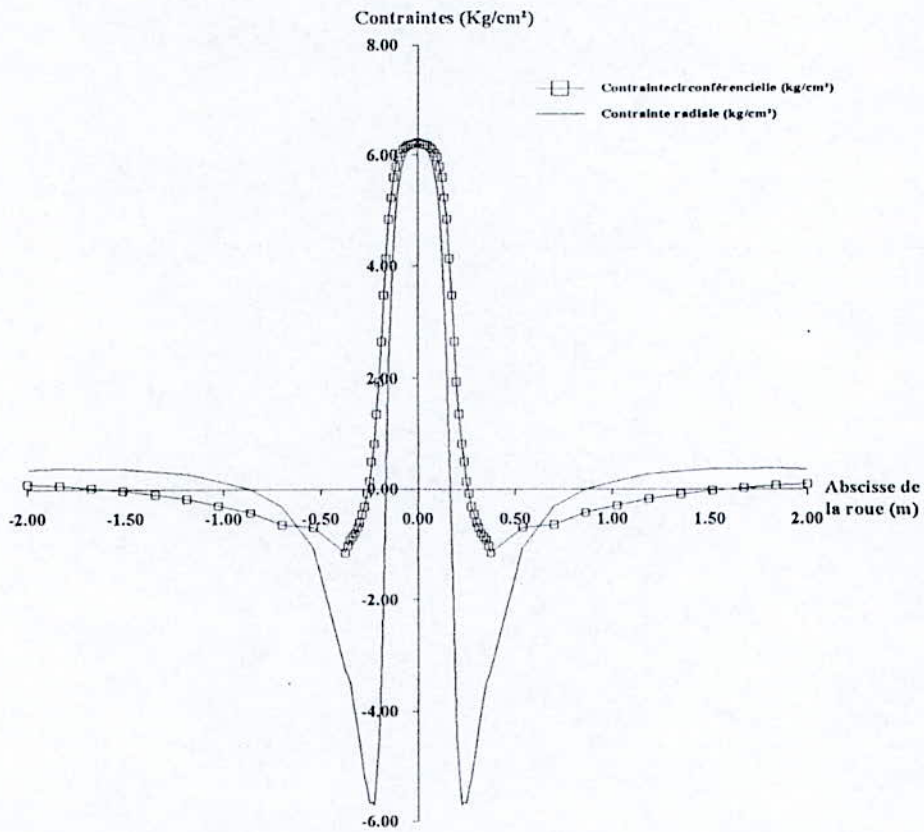


Fig.8-9- Comparaison des contraintes radiales et circonférentielles sous la couche de roulement.

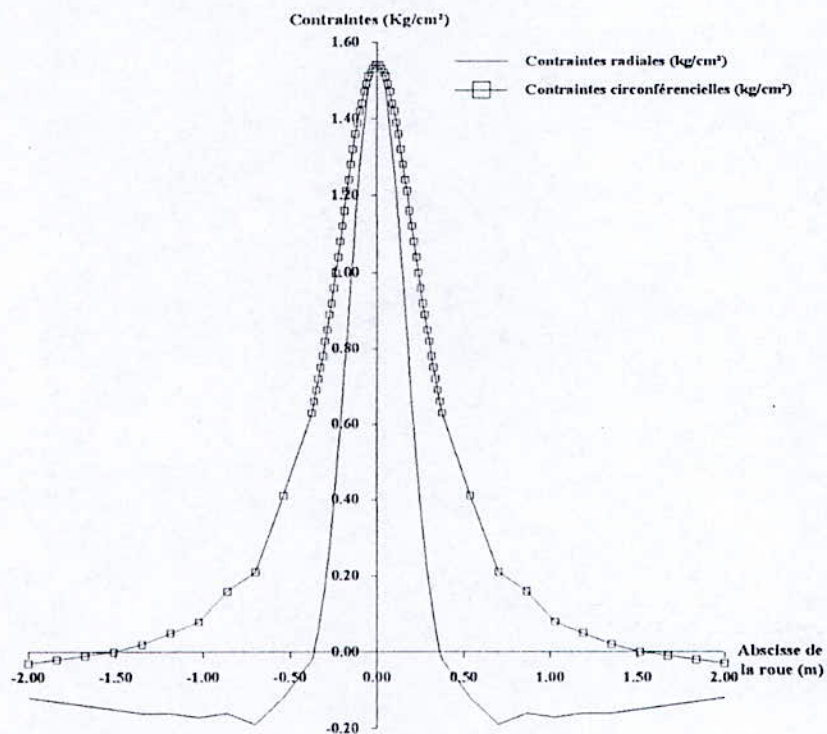


Fig.8-10- Comparaison des contraintes radiales et circonferentielle sous la couche de G-N-T1.

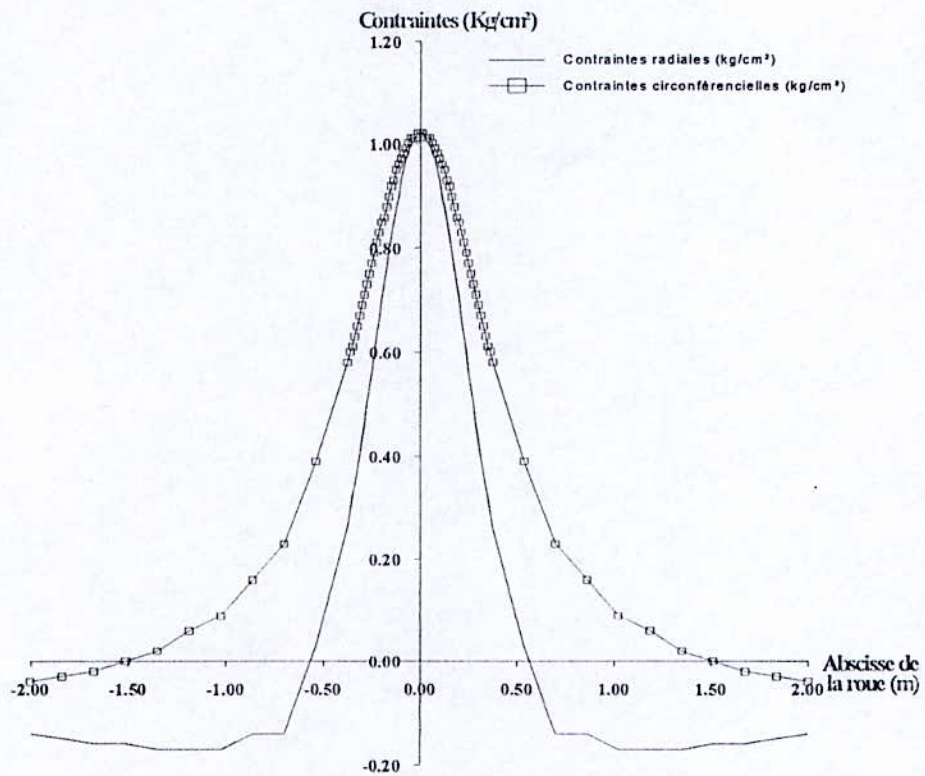


Fig.8-11- Comparaison des contraintes radiales et circonférencielles sous la couche de G-N-T2.



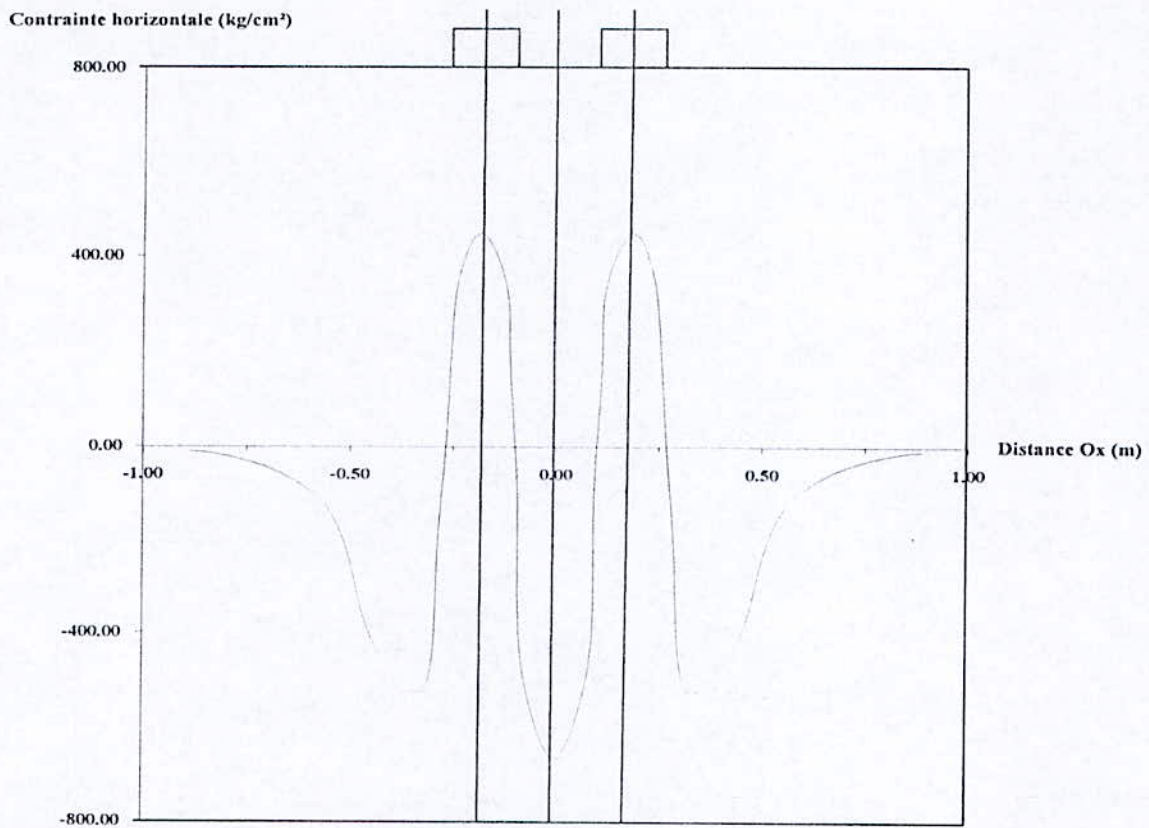


Fig.8-12-Contrainte horizontale à la base de la couche de roulement pour un jumelage.

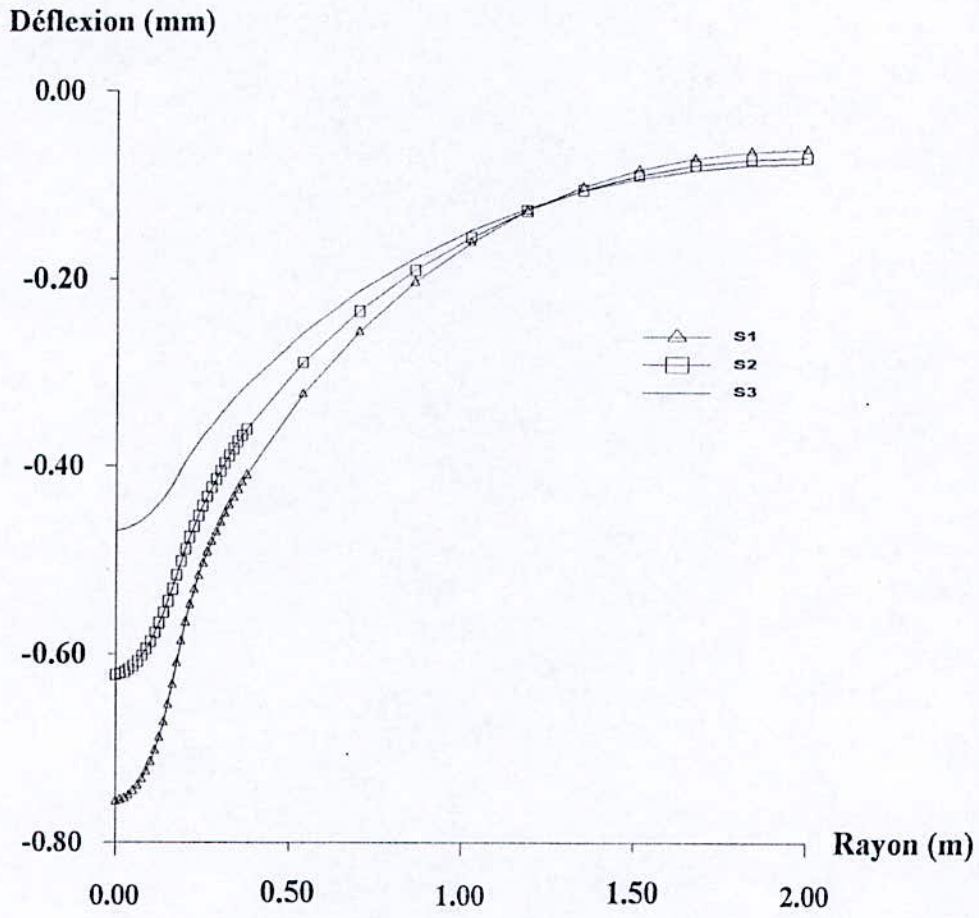


Fig.8-13-Déflexion de surface pour différentes structures de chaussées souples.

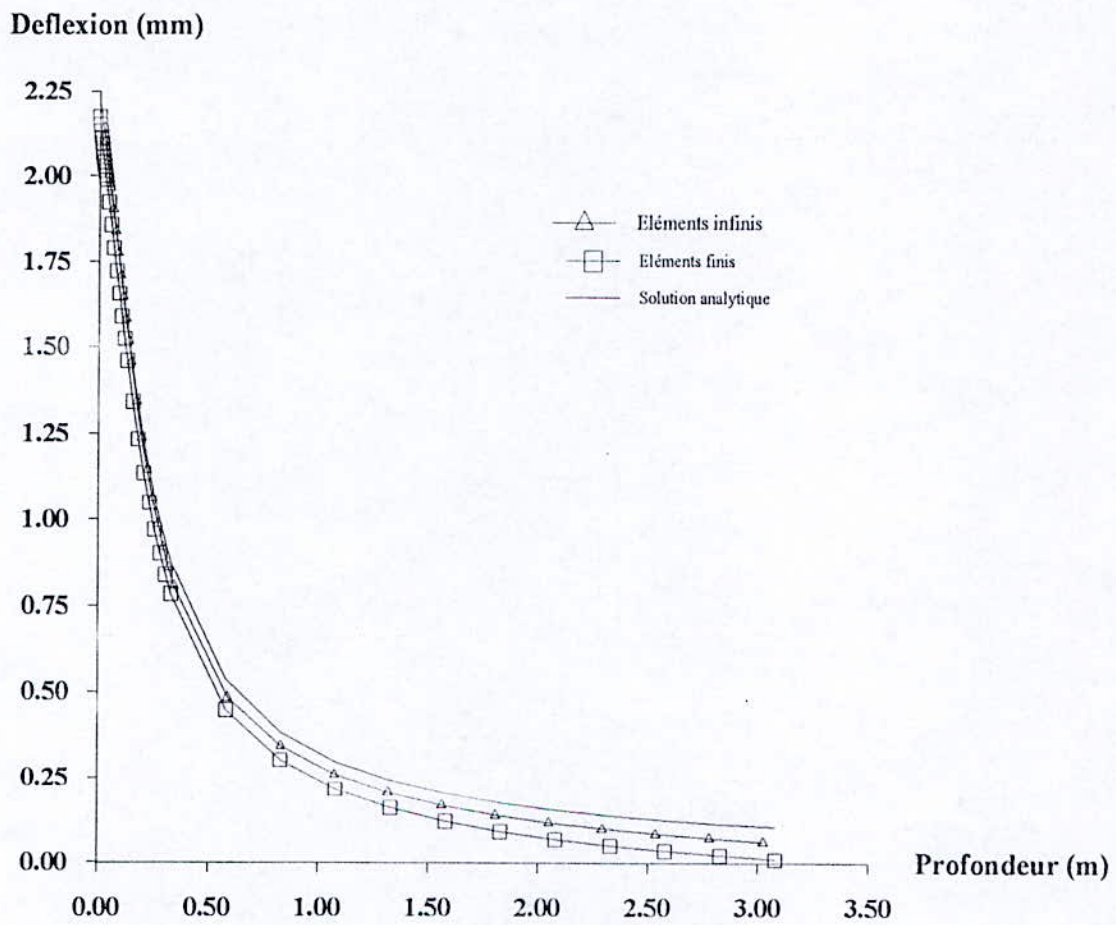


Fig.8-14-Comparaison des résultats de la solution analytique - éléments finis et infinis pour le problème de Boussinesq (charge uniforme).

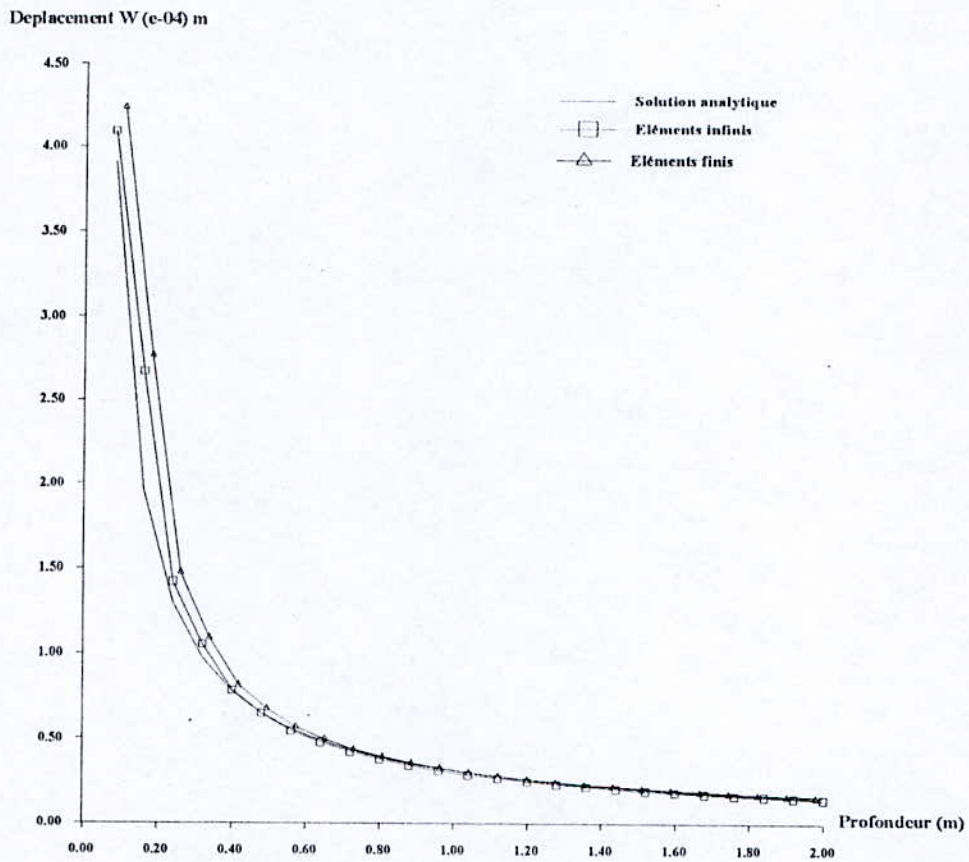


Fig.8-15- Comparaison des résultats de la solution analytique – éléments finis et infinis pour le problème de Boussinesq (charge ponctuelle).

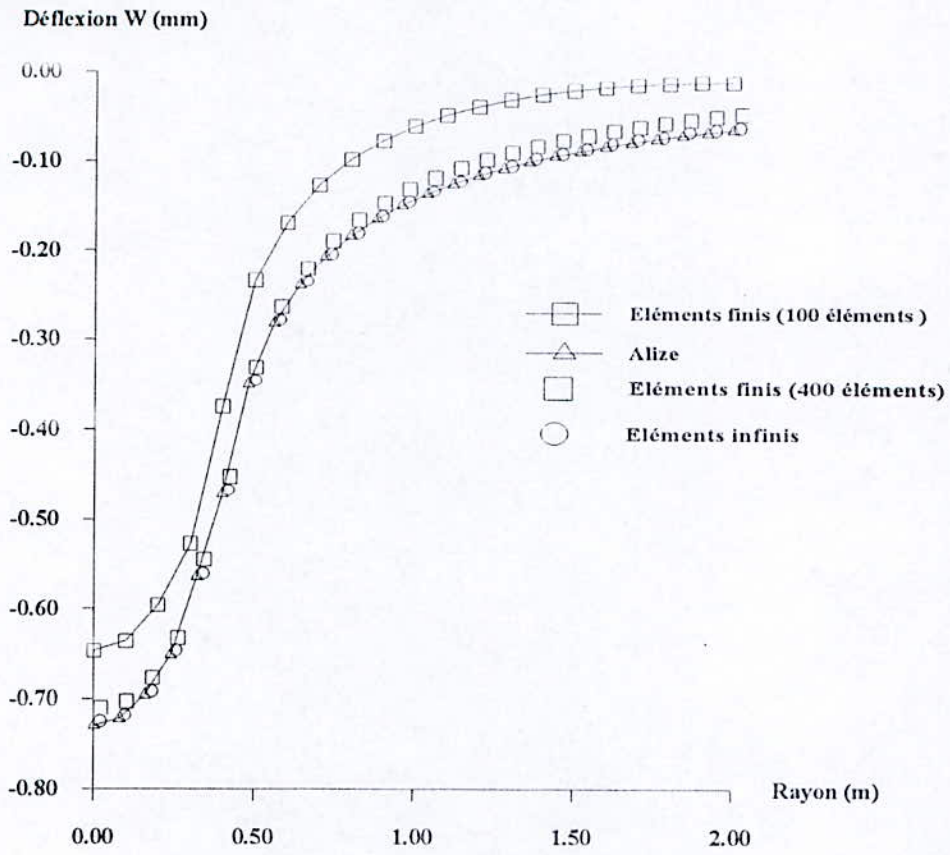


Fig.8-16- Massif homogène en élasticité linéaire déplacement en surface.

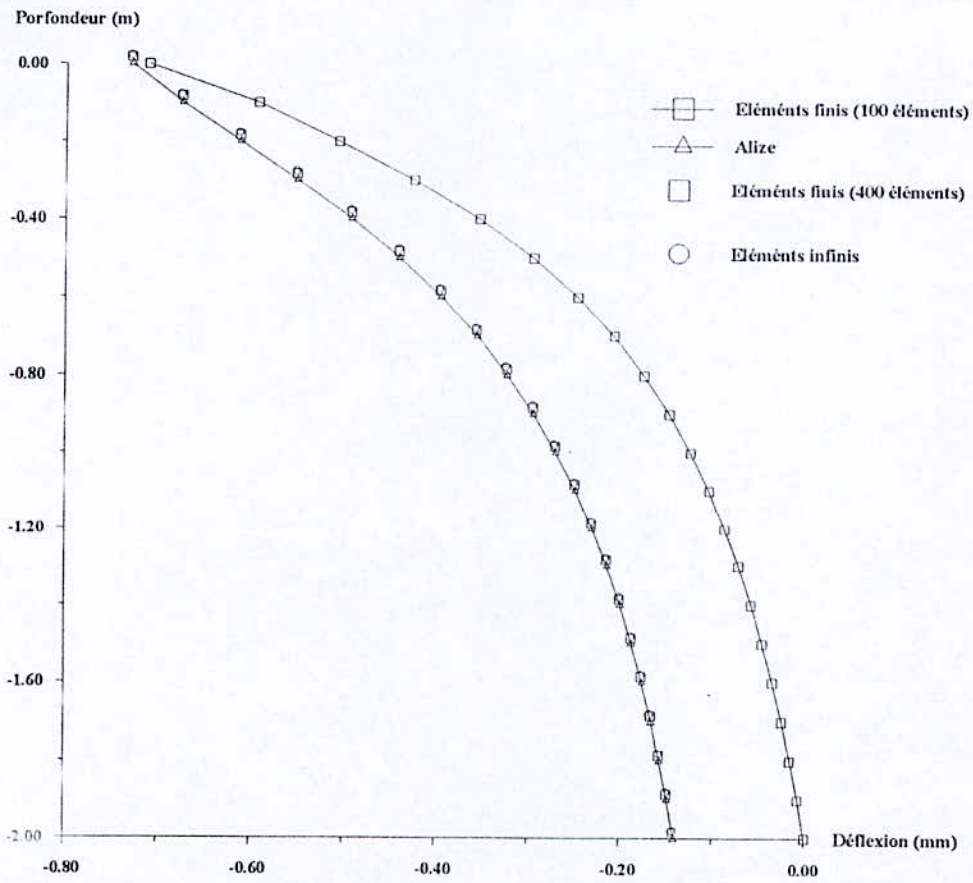
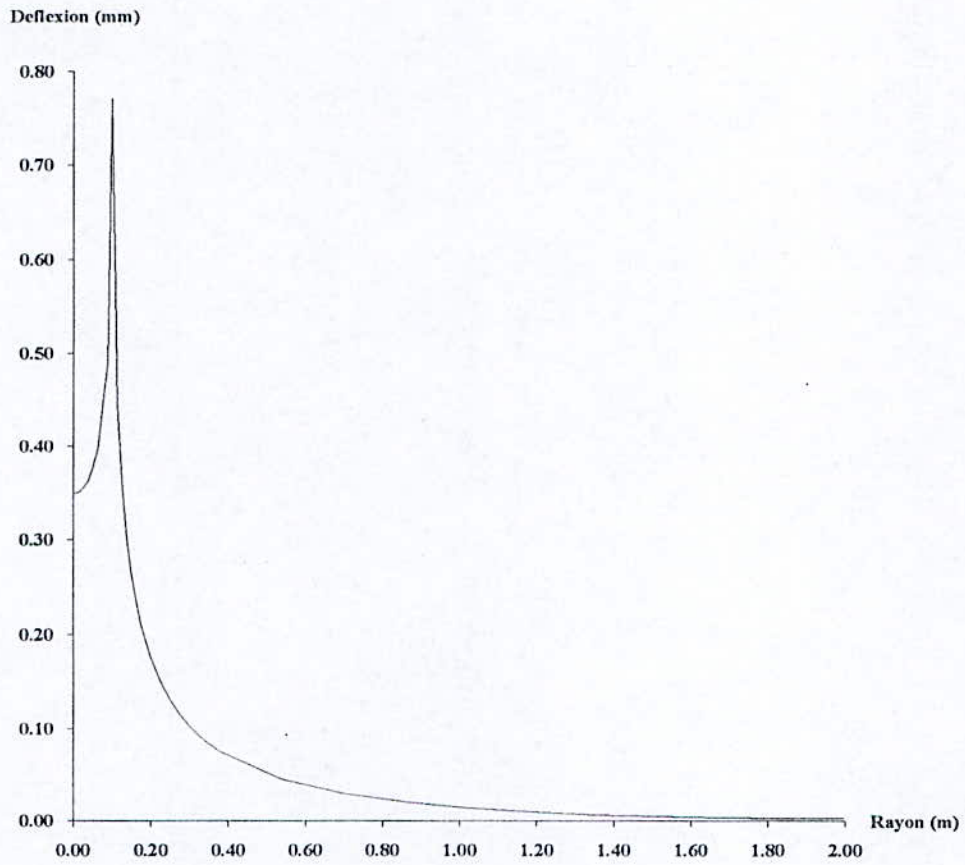


Fig.8-17- Massif homogène en élasticité linéaire déplacement sous l'axe de la charge.



**Fig.8-18- Déplacement en surface sous une charge annulaire.**

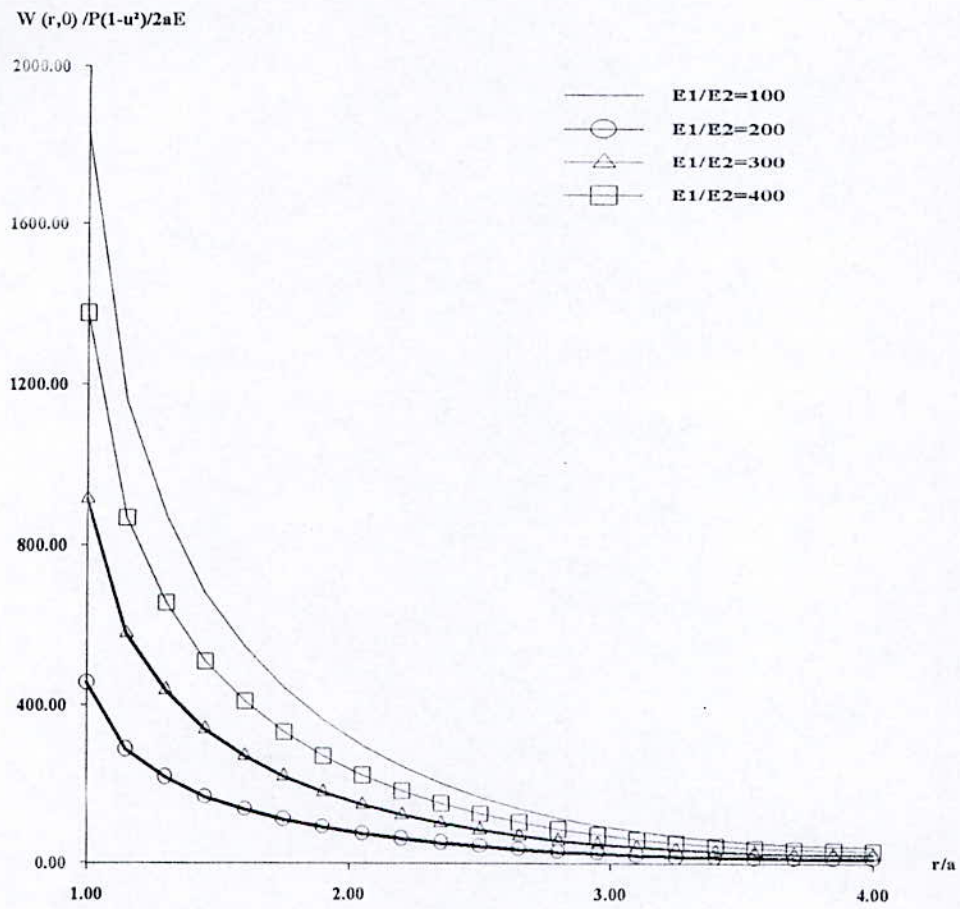


Fig.8-19- Semelle rigide.



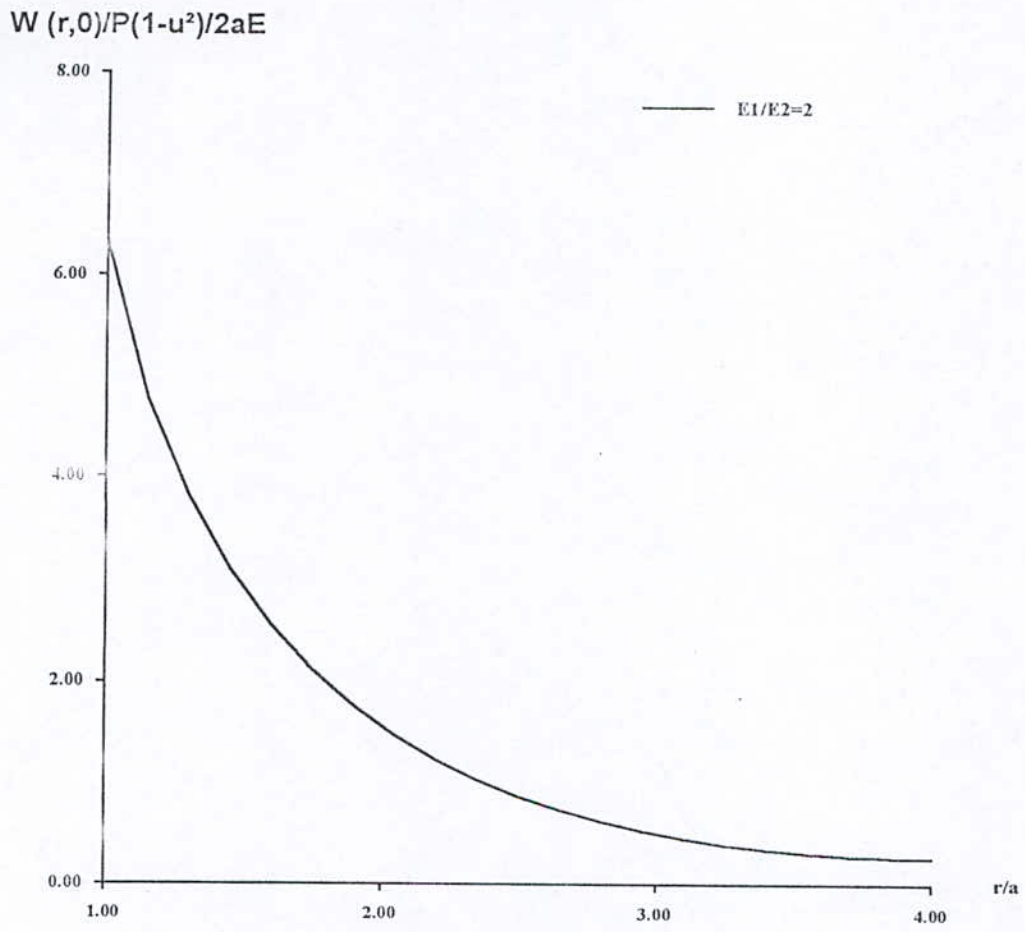


Fig.8-20- Semelle élastique.

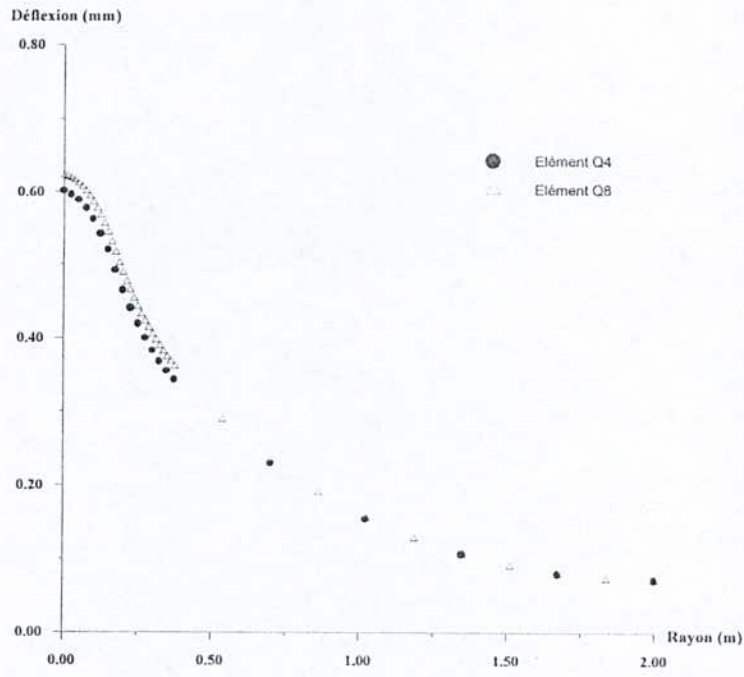


Fig.8-21-a-Coparaison de la deflexion en surface entre éléments Q4 et Q8

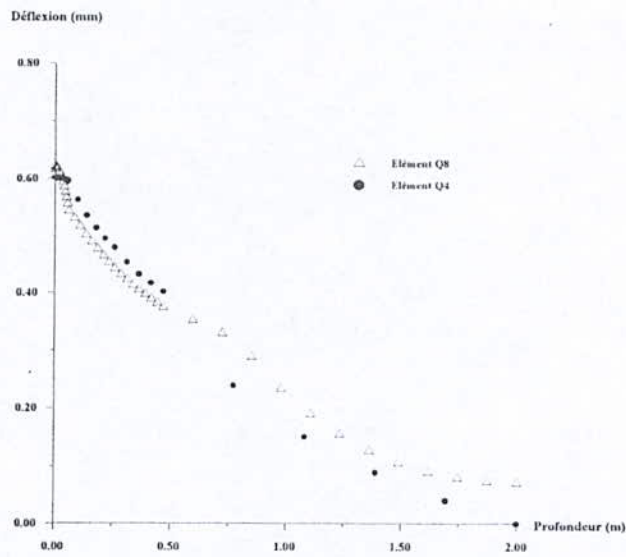


Fig.8-21-b--Comparaison de la déflexion en profondeur entre éléments Q4 et Q8.

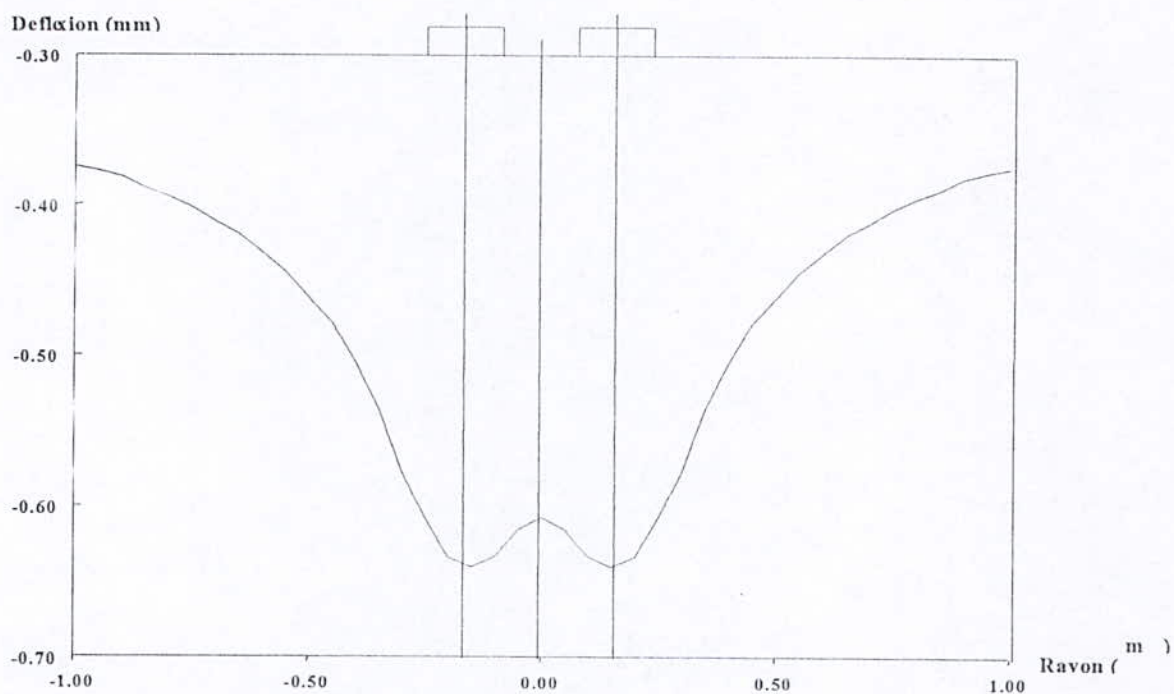


Fig.8-22- Prise en considération d'un jumelage.

Cette partie de l'étude sera consacrée à l'interprétation des résultats obtenus par les programmes d'éléments finis et infinis élaborés, d'autres résultats obtenus avec les logiciels SAP90 et ALIZE (qui se base sur la solution analytique de **Burmister**) serviront pour la comparaison.

Tous les résultats sont présentés sous forme de graphes.

Pour être plus claire, cette partie sera divisée en deux parties :

- Partie I : l'interprétation des contraintes.
- Partie II : l'interprétation des déplacements.

Il est à noter que pour la modélisation des structures de chaussées, nous avons choisi comme seul paramètre de souplesse, l'épaisseur du béton-bitumineux, on a donc choisi trois types de structures qui diffèrent uniquement par l'épaisseur de leur couche de roulement, elles sont notées respectivement S1, S2 et S3 pour des épaisseurs de 2, 6 et 12 cm respectivement.

Dans la première partie, les contraintes ne sont calculées que pour la structure S2, cette dernière étant celle qui s'approche le mieux des structures de chaussées algériennes.

#### Partie I :

Comme nous l'avons déjà mentionné, le dimensionnement des chaussées se fait par comparaison entre les déformations ou contraintes déterminées et celles admissibles, pour notre part nous présentons les graphes des contraintes calculées.

La figure 8-1- représente la variation des contraintes dans la couche de G-N-T1.

On note l'existence :

- D'une contrainte verticale : qui est une contrainte de compression, elle est symétrique et elle s'annule assez vite si on s'éloigne de la charge. Par rapport aux autres contraintes, elle est la plus importante.

- D'une contrainte radiale : c'est une contrainte de traction sous la charge, au - delà de la charge elle s'annule.
- Une contrainte tangentielle : c'est une contrainte de traction, elle est antisymétrique, elle s'annule sous l'axe de la charge et atteint son maximum à une distance voisine du rayon de charge.

Il est à noter que les deux premières contraintes se rejoignent à une distance supérieure au rayon de charge.

La figure 8-5 représente la variation de la contrainte radiale dans les différentes couches de chaussée.

On remarque bien que cette contrainte est une contrainte de traction pour une distance inférieure au rayon de charge, et devient une contrainte de compression au-delà ; elle est très importante dans la couche de béton bitumineux et est considérée comme un paramètre déterminant pour le dimensionnement des chaussées. Elle diminue en profondeur jusqu'à ce qu'elle devienne insignifiante au niveau du sol-support.

La figure 8-6 représente la variation de la contrainte tangentielle dans les différentes couches de la chaussée.

Il est à noter que cette contrainte est toujours nulle et ce pour toutes les couches sous l'axe de la charge, et que contrairement aux autres contraintes, elle est antisymétrique ; sa valeur diminue en fonction de la profondeur et elle est presque nulle dans la couche de sol- support , cette contrainte atteint son maximum pour une distance voisine du rayon de charge.

La figure 8-7 représente la variation de la contrainte verticale dans les différentes couches de la chaussée.

On constate que la contrainte verticale est une contrainte de compression qui s'annule assez vite si on s'éloigne de la charge ; dans la couche de roulement cette contrainte est très élevée et même si elle devient moins importante dans les autres couches, elle reste néanmoins

non négligeable au niveau du sol-support et son calcul est très important pour le dimensionnement.

Bien que qu'il ne soit pas systématique lors de la modélisation d'une chaussée, le calcul de la contrainte circonférencielle permet de noter des remarques très intéressantes en le comparant avec celui de la contrainte radiale.

La figure 8-9 représente la variation des contraintes radiales et circonférencielles sous la couche de roulement.

on constate qu'on peut donner est que les deux contraintes sont égales sous l'axe de la charge.

Ce sont des contraintes de traction pour une distance inférieure au rayon de la charge sauf que la contrainte radiale devient une contrainte de compression importante, lorsqu'on s'éloigne de la charge.

La figure 8-13 représente la variation de la contrainte horizontale à la base de la couche de roulement dans le cas d'un jumelage.

Pour ce cas la contrainte horizontale est :

- Symétrique par rapport à l'axe de jumelage.
- Une contrainte de compression très importante sous l'axe du jumelage, elle s'annule pour une distance égale au rayon de charge puis devient une contrainte de traction qui atteint son maximum sous l'axe de la charge, elle s'annule à nouveau lorsqu'on s'éloigne de la charge et redevient une contrainte de compression, sans toutefois atteindre la valeur maximale qui correspond à l'axe du jumelage.

## Partie II :

La figure 8-13 montre la déflexion en surface pour les trois structures S1, S2 et S3 :

La déflexion est plus importante pour S1 à cause de sa rigidité relativement faible, pour les structures S2 et S3, la rigidité de la couche de roulement devient plus importante ce qui induit une déflexion moins importante.

Les figures 8-14, 8-15 représentent la déflexion pour un massif homogène due à une charge uniforme et à une charge ponctuelle respectivement, nous pouvons voir que la solution par éléments infinis est beaucoup plus proche de la solution analytique que ne l'est la solution par éléments finis, qui naturellement, prévoit un déplacement nul à l'endroit de la frontière, pour une charge uniforme.

Le déplacement tend vers l'infini sous la charge concentrée. De plus la solution par éléments infinis a nécessité beaucoup moins d'éléments donc elle est beaucoup plus économique que la solution par éléments finis (on a utilisé 400 éléments finis pour celle-ci).

Les figures 8-16, 8-17 représentent les déflexions en surface et sous l'axe pour un massif homogène en élasticité linéaire, le but de cette simulation est d'appliquer le modèle de Boussinesq pour le cas d'une chaussée monocouche et qui peut être une méthode simple de dimensionnement.

Pour cette simulation on met en évidence le gain en éléments de discrétisation que l'on peut réaliser en utilisant des éléments infinis (couplage éléments finis- infinis ). On a pris un massif de 2 m, le premier calcul est fait par élément finis de 100 éléments, le second est fait de la même méthode mais avec 400 éléments et des dimensions de massif plus importantes, et enfin le dernier est fait par éléments infinis. Tous ces calculs sont comparés aux résultats obtenus par le logiciel **Alize**.

On remarque que les résultats obtenus par le programme d'éléments infinis sont très proches des résultats du logiciel (**Alize**), le modèle de 400 éléments finis donne aussi de très bons résultats mais avec un temps de calcul plus important, tandis que les résultats obtenus avec le

premier calcul sont peu précis. On peut ainsi apprécier le gain réalisé en éléments par un couplage (éléments finis-éléments infinis).

Il est à noter que d'autres problèmes axisymétriques ont été traité dans cette partie de l'étude, une première modélisation concerne une charge annulaire appliquée sur un massif homogène et la deuxième, le cas d'une plaque (rigide ou élastique) posée sur le sol.

La figure 8-18 représente le déplacement en surface dû à une charge annulaire, cette simulation a été réalisée avec le logiciel SAP90, on peut voir que la déflexion a la même allure que celle due à une charge concentrée pour une distance égale à  $R_c$  (rayon de charge), cette déflexion devient très faible à partir de  $2 R_c$  ou elle tend vers zéro. Pour une distance inférieure à  $R_c$  cette déflexion augmente jusqu'à une valeur maximale.

Un autre problème axisymétrique est traité dans les figures 8-19 et 8-20, en effet nous avons modéliser deux types de semelles (ou plaques) rigides et élastiques. La rigidité de la plaque est d'autant plus importante que le rapport  $E_1/E_2$  est élevé ( $E_1$  et  $E_2$  représentent respectivement les modules d'élasticité de la semelle et du sol).

On remarque que le déplacement des semelles rigides diminue progressivement avec l'augmentation du rapport  $E_1/E_2$ .

Les déplacements pour une semelle élastique gardent la même allure mais sont beaucoup plus importants.

Les figures 8-21-a et 8-21-b représentent les déplacements en surface et en profondeur dans le cas d'un massif homogène, cette simulation a été réalisée avec deux types d'éléments finis : l'élément fini à 8 nœuds et l'élément fini à 4 nœuds, il est bien clair que le déplacement calculé avec un même nombre d'éléments Q4 et Q8 est moins précis pour le premier cité

Dans la figure 8-22, on tente d'approcher le problème réel par la prise en compte d'un jumelage à partir des résultats obtenus par un calcul axisymétrique.

On note, en comparant la déflexion en surface pour un jumelage à celle due à une charge simple (axisymétrie), que la première citée est moins importante sous l'axe de la charge. Mais à partir d'une distance d'environ  $d/2$  ( $d$  étant l'entre-axe des roues du jumelage) les déflexions deviennent égales.



*CONCLUSION  
GENERALE*

Au cours de ce travail, l'étude du comportement d'une chaussée souple a été abordée par la modélisation d'une structure multicouche par éléments finis.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce travail, la complexité du calcul est accrue, d'une part, parce que le comportement d'une chaussée a un caractère aléatoire, en effet, les propriétés des sols- supports et des matériaux de chaussée sur une section donnée sont dispersées, et la rupture par fatigue d'un matériau est un phénomène aléatoire, et d'autre part, le dimensionnement d'une chaussée nécessite la prise en compte d'un grand nombre de paramètres qui ne sont pas toujours faciles à identifier avec précision.

Néanmoins une suite d'approximations et d'hypothèses simplificatrices permet une schématisation simple de la structure de chaussées, ainsi que du chargement appliqué, afin de pouvoir mettre en œuvre un modèle de calcul par éléments finis.

Le modèle mis en œuvre se base sur une formulation déplacement en axisymétrie, le milieu est supposé élastique, homogène et isotrope.

Dans un premier temps, les différentes simulations ont été réalisées avec le modèle d'éléments finis élaboré, les résultats obtenus, qui ont été comparés avec ceux donnés par le code de calcul **ALIZE**, largement utilisé de nos jours dans le dimensionnement des chaussées, sont satisfaisants sous réserve d'utiliser un maillage assez fin pour la discrétisation de la structure.

Ensuite, nous avons montré que l'utilisation d'éléments semi-infinis sur la frontière du domaine maillé en éléments finis permettait de réaliser un gain en éléments de discrétisation, et donc en temps d'exécution.

Nous avons aussi présenté une méthode approchée, utilisant une formulation axisymétrique pour analyser le comportement d'une structure de chaussée souple sous l'effet d'un jumelage, cette méthode simplifiée qui a pour but d'approcher le problème réel, qui est en fait tridimensionnel, permet de donner rapidement une évaluation des variables de dimensionnement des chaussées souples.

Nous avons aussi brièvement abordé l'étude en laboratoire des propriétés des matériaux de chaussée, en présentant l'essai de plaque, cet essai, qui fait partie d'une multitude d'essais servant à déterminer les données à introduire dans les modèles de calcul nous a permis de réaliser l'importance de la modélisation du comportement des matériaux et du sol-support, qui est en fait une partie tout a fait essentielle pour le dimensionnement des chaussées, et qui pose actuellement encore beaucoup de problèmes.

Cette étude, qui est en fait limité aux hypothèses émises, permet de rendre compte avec une approximation satisfaisante du comportement des chaussées souples sous trafic, néanmoins un calcul tridimensionnel en comportement élasto-plastique et non-linéaire permettrait de donner une idée plus précise sur le comportement réel des chaussées souples, ce type de calcul qui nécessite des programmes volumineux et donc des moyens informatiques plus importants, constituerait une bonne suite à notre étude.

*ANNEXE*

## Utilisation de SAP 90 :

### Introduction :

Lors de cette étude de nombreux modèles de structures de chaussées, ainsi qu'une application à un modèle de semelle (rigide et élastique) et au problème de

**BOUSSINESQ**, ont été traités par le logiciel SAP 90, qui appartient à la famille des programmes SAP, lesquels ont acquis une notoriété incontestable dans le domaine de l'analyse des structures par éléments finis, et ce, depuis plus de 25 ans.

### Préparation :

L'utilisation des logiciels SAP 90 nécessite tout d'abord une préparation des données spécifiques de la structure à analyser :

Le fichier de données, qui doit se conformer aux spécifications du programme, porte un nom sans extension ( MHEL etc. ...) et a été préparé par un éditeur de textes.

### Fonctionnement :

Le programme SAP 90 est un ensemble de modules, qui sont exécutés dans un ordre déterminé (fig.)

Le module SAP 90 est toujours exécuté en premier, pour cela il faut lui spécifier le nom du fichier de données de la structure à traiter (MHEL) si ce module est exécuté sans erreur, il va créer le fichier GO.BAT qui comporte une série de modules pour le traitement de la structure, pour exécuter ces modules il faut lancer GO alors le programme procédera à l'analyse de la structure.

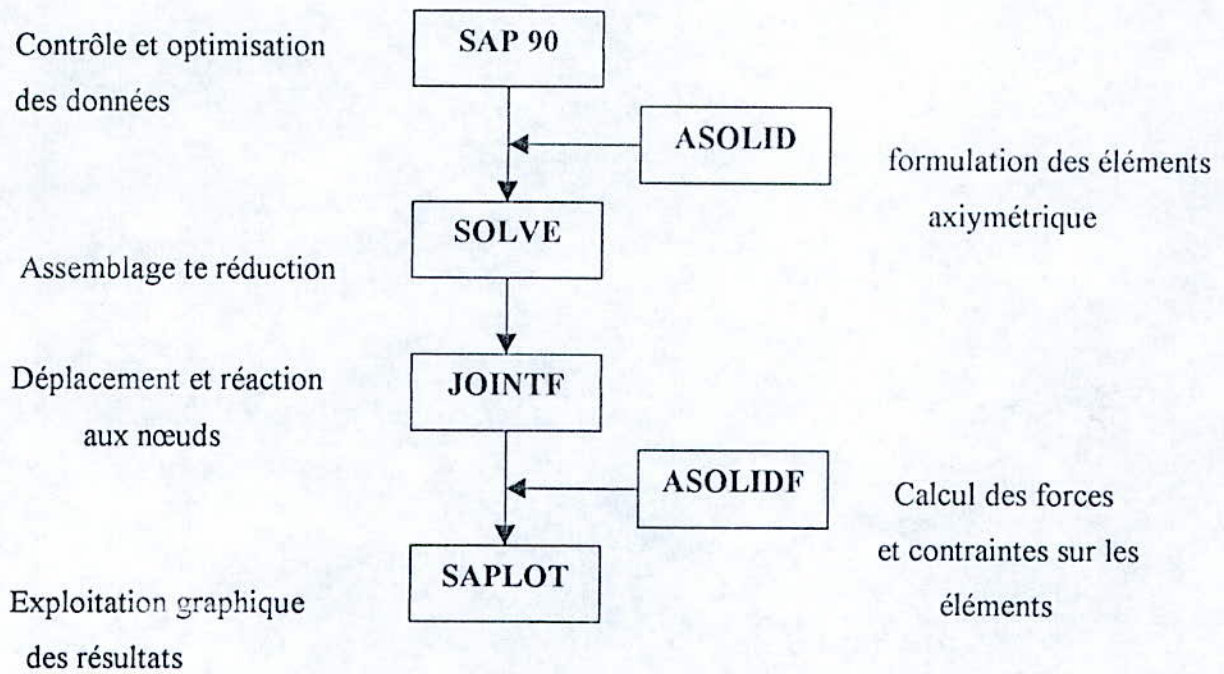


Fig. Modules de SAP 90 exécuté dans notre étude.

### Résultats :

Une fois l'exécution de SAP 90 et GO terminée et sans erreurs, une série de fonctions de résultats de la forme MHEL.\*\*\* pour être éditée et imprimée.

Pour les structures analysées au cours de notre étude 5 fichiers résultats vont être créés (fig. a-2).

L'exécution du module SAPLOT, après spécification du nom du fichier de données de la structure, permet une présentation graphique de la structure déformée et indéformée ainsi que les diagrammes des forces et des contraintes, des représentations graphiques qui peuvent

être imprimées permettent une meilleur présentation et interprétation des résultats de l'analyse.

MEHL.SAP	Image ordonnée du fichier données.
MEHL.SOL	Déplacements et réactions aux nœuds.
MEHL.FEF	Forces sur les nœuds d'un élément.
MEHL.F5F	Forces sur l'élément axisymétrique.
MEHL.ERR	Erreurs et avertissements.

Fig. a-2. Fichier de résultats.

*REFERENCES*  
*BIBLIOGRAPHIQUES*



- 1) J. L. BATOZ, G. DHATT  
« **Modélisation des structures par éléments finis** » **Vol.1 : Solides élastiques**  
*HERMES EDITEUR 1990.*
- 2) P. BETTESS, J.A BETTESS  
« **Infinite elements for static problems** »  
*Eng. Comput. Vol. 1. Sept 1983.*
- 3) D. BOUMEZRANE, A.MEKAOUI  
« **Etude par élément finis du comportement des chaussées** »  
*Thèse d'ingénieur, E-N-P 1996.*
- 4) CHEIKH. TOUAMI, R. BOUDA  
« **Analyse du phénomène d'interaction sol-fondation circulaire par la méthode des éléments finis et couplage éléments finis-infinis** »  
*Thèse d'ingénieur E-N-P 1996.*
- 5) G. DHATT, G.TOUZOT  
« **Une présentation de la méthode des éléments finis** »  
*MALOINE EDITEUR 1984.*
- 6) S. GUEZOULI  
« **Comportement des chaussées souples ; modélisation et simulation numérique** »  
*Thèse de doctorat, Université de NANTES 1994.*
- 7) A. HABIBULLAH, E.L. WILSON  
« **Manuel de l'utilisation du SAP90** »  
*Computures and structures INC 1995.*
- 8) J.F. IMBERT  
« **Analyse des structures par éléments finis** »  
*Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace «Toulouse».*
- 9) J.P. MARCHAND  
« **Conditions d'utilisation du programme ALIZE dans le cas des routes françaises** »
- 10) C.PEYRONNE, G.CAROFF  
« **Dimensionnement des chaussées** »  
*Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées 1984.*
- 11) S.S. RAO  
« **The finite element method in engineering** »  
*PERGAMON PRESS 1982.*

12) L. ROCKEY, W. GRIFFITHS

« Introduction à la méthode des éléments finis »

*Edition EYROLLES 1979.*

13) F. SCHLOSSER

« Élément de mécanique des sols »

*Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées 1988.*

14) O. SEKLAOUI, A. KHENANE

« Analyse de fondation par la méthode des éléments infinis »

*Article : Algérie Equipement n° 26 Dec. 1996.*

15) TRADUCTION DE LA DIN 18134

« Essai de plaque »

*Document L.N.T.P.*

16) S.P. TIMOSHENKO, J.N. GOODIER

« The theory of elasticity »

*McGRAW-HILL 1934.*

17) O.C. ZENKIEWICZ

« La méthode des éléments finis, formulation de base et problèmes linéaires ».

*Tome 1 Edition AFNOR, Paris 1991.*

**Sujet :** Simulation numérique du comportement des chaussée souple.

**Résumé :** Le présent travail consiste en l'analyse du comportement mécanique des chaussées souples.

Un essai de plaque a été utilisé pour déterminer le module du sol-support. Deux modèles de calcul basés sur une formulation axisymétrique ont été développés, le premier en éléments finis et l'autre par couplage d'éléments finis-infinis.

L'applicabilité de ces deux modèles est établie par comparaison systématique a des logiciels de calcul universels

---

**Subject :** Numerical simulation of a flexible road pavement behaviour.

**Abstract :** This work consists in an analysis of the mechanical behaviour of a flexible road pavement.

A plate loading test was used to obtain the support-soil moduls, two models based on an axisymetric formulation are implemented, the first one using finite elements, and the second one a combination of finite-infinite elements.

The applicability of this two models is established by comparision to a general purpose programs.

---

**الموضوع:** المماثلة الرقمية لتصرف الطرقات المرنة .

**الملخص:** تهدف هذه الدراسة إلى تحليل التصرف الميكانيكي للطرق المرنة .

تمت تجربة اللافتة للحصول على عامل مرونة التربة الحاملة . لهذا الغرض

تم وضع نموذجين محوري التناظر باستعمال العناصر المحدودة والجمع بين

العناصر المحدودة واللامحدودة .

تطبيق هذين النموذجين كان بالمقارنة مع عدة برامج عالمية .