

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Electronique
Laboratoire Signal et Communications



Thèse

Présentée en vue de l'obtention du titre de

Docteur en Sciences

en Electronique

par

SAHNOUNE Ahmed

Magister en Electronique de l'ENP

Intitulé :

Analyse des Signaux Chaotiques : Application aux Codes Correcteurs d'Erreurs Avancés

Soutenue publiquement le 12 mai 2019 à 10h devant le jury composé de :

LARBES Cherif	Professeur	ENP	Président
BERKANI Daoud	Professeur	ENP	Directeur de thèse
GUESSOUM Abderrezak	Professeur	Université de BLIDA	Examineur
DJENDI Mohamed	Professeur	Université de BLIDA	Examineur
MITICHE Lahcene	Professeur	Université de Djelfa	Examineur
HAMAMI Latifa	Professeur	ENP	Examineur

ENP 2019

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Electronique
Laboratoire Signal et Communications



Thèse

Présentée en vue de l'obtention du titre de

Docteur en Sciences

en Electronique

par

SAHNOUNE Ahmed

Magister en Electronique de l'ENP

Intitulé :

Analyse des Signaux Chaotiques : Application aux Codes Correcteurs d'Erreurs Avancés

Soutenue publiquement le 12 mai 2019 à 10h devant le jury composé de :

LARBES Cherif	Professeur	ENP	Président
BERKANI Daoud	Professeur	ENP	Directeur de thèse
GUESSOUM Abderrezak	Professeur	Université de BLIDA	Examineur
DJENDI Mohamed	Professeur	Université de BLIDA	Examineur
MITICHE Lahcene	Professeur	Université de Djelfa	Examineur
HAMAMI Latifa	Professeur	ENP	Examineur

ENP 2019

Dédicaces

A la mémoire de mon père,

A ma chère mère,

A mes frères et sœurs,

A tous mes amis.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Mr **Daoud BERKANI** Professeur à l'ÉNP qui a su m'encourager et me conseiller durant ces années de thèse. Sa confiance en moi et son soutien humain et scientifique m'ont beaucoup aidé à accomplir ce travail.

Je tiens aussi à exprimer mes sincères remerciements à Mr **Cherif LARBES**, Professeur à l'ÉNP qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie également Mr **Abderrezak GUESSOUM**, Professeur à l'Université de BLIDA, Mr **Mohamed DJENDI**, Professeur à l'Université de BLIDA, Mr **Lahcene MITICHE**, Professeur, à l'Université de Djelfa, ainsi que Mme **Latifa HAMAMI**, Professeur à l'ÉNP, d'avoir bien voulu examiner ce travail et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie tous ceux qui ont contribué à la préparation et la rédaction de ma thèse.

Finalement, j'exprime ma profonde reconnaissance envers mes amis et les membres de ma famille.

ملخص

الإشارات الفوضوية، أي الإشارات التي تولدها الأنظمة الديناميكية غير الخطية في الحالة الفوضوية (الأنظمة الفوضوية)، تمثل فئة جذابة من الإشارات لنمذجة الظواهر الفيزيائية وتوليد فئات جديدة من الإشارات للاتصالات. نظرًا لأن شفرات التيريو تدخل في نظم مختلفة معروفة، فمن المثير للاهتمام دراسة كفاءة الإشارات الفوضوية في تصميم شفرات التيريو. يعد المبعثر جزءًا أساسيًا من تصميم شفرات التيريو ويلعب دورًا مهمًا في أدائها، وبالتالي فإن العثور على المبعثرات المثلى يمثل مشكلة في تصميم الكود.

في هذه الأطروحة، ركزنا على تصميم المبعثر لشفرات التيريو باستخدام الإشارات الفوضوية بهدف تقليل تعقيد التنفيذ مع تحسين الأداء. لتحقيق هذا الهدف، قمنا بتحليل الإشارات التي تولدها الأنظمة الفوضوية باستخدام القياس بين هذه الإشارات والعمليات العشوائية. على وجه الخصوص، استنتجنا التعبيرات التحليلية للخصائص الإحصائية للإشارات الفوضوية التي تولدها التحولات أحادية البعد. كما عرضنا الخصائص الإحصائية للإشارات الفوضوية التي تولدها التحولات الفوضوية ثنائية البعد من خلال المحاكاة الرقمية. وفي الأخير استخدمنا هذه التحولات الفوضوية في تصميم المبعثر لشفرات التيريو.

كلمات مفتاحية: الإشارات الفوضوية، التحولات أحادية البعد، التحولات ثنائية البعد، الخصائص الإحصائية، شفرات التيريو، المبعثر.

Abstract

Chaotic signals, i.e, signals generated by nonlinear dynamical systems in the chaotic state (chaotic systems), represent an attractive class of signals for modeling physical phenomena and synthesizing new classes of signals for communications. Since Turbo codes are involved in different well-known standards, it is interesting to investigate the efficiency of chaotic signals in Turbo codes design. The interleaver is a fundamental part of the turbo-codes design and plays a critical role in the performance of turbo-coding, so the finding of optimal interleavers is a code design problem.

In this thesis, we focused on the design of the interleaver for Turbo-codes using chaotic signals with the aim of reducing the implementation complexity while improving the performance. For this goal, we analyzed the signals generated by chaotic systems using an analogy between such signals and stochastic processes. In particular, we have derived analytic expressions of the statistical properties for chaotic signals generated by one-dimensional maps. We also presented the statistical properties of chaotic signals generated by two-dimensional chaotic maps through numerical simulations. Finally, we used these chaotic transformations in the design of the interleaver for turbo-codes.

Keywords: Chaotic signals, 1-D maps, 2-D maps, statistical properties, turbo codes, interleavers.

Résumé

Les signaux chaotiques, c.-à-d. les signaux générés par les systèmes dynamiques non linéaires dans l'état chaotique (systèmes chaotiques) représentent une classe attractive de signaux pour la modélisation de phénomènes physiques et la synthèse de nouvelles classes de signaux pour les communications. Étant donné que les turbo-codes sont impliqués dans différentes normes bien connues, il est intéressant d'étudier l'efficacité des signaux chaotiques dans la conception des turbo-codes. L'entrelaceur est un élément fondamental de la conception des turbo-codes et joue un rôle essentiel dans les performances du turbo-codage. La recherche d'entrelaceurs optimaux est un problème de conception de code.

Dans cette thèse, nous nous sommes concentrés sur la conception de l'entrelaceur pour les turbo-codes utilisant des signaux chaotiques dans le but de réduire la complexité d'implémentation tout en améliorant les performances. Pour ce faire, nous avons analysé les signaux générés par les systèmes chaotiques en utilisant une analogie entre ces signaux et les processus stochastiques. En particulier, nous avons dérivé des expressions analytiques des propriétés statistiques des signaux chaotiques générés par des transformations unidimensionnelles. Nous avons présenté également les propriétés statistiques des signaux chaotiques générés par des transformations chaotiques bidimensionnelles via simulations numériques. Enfin, nous avons utilisé ces transformations chaotiques dans la conception de l'entrelaceur pour les turbo-codes.

Mots clés : signaux chaotiques, transformations unidimensionnelles, transformations bidimensionnelles, propriétés statistiques, turbo codes, entrelaceurs.

Table des matières

Liste des Figures

Liste des Abréviations

Introduction générale.....	13
1. Systèmes dynamiques et Théorie du chaos.....	15
1.1 Introduction	15
1.2 Systèmes dynamiques non linéaires discret.....	15
1.2.1 Orbites.....	15
1.2.2 Points fixes.....	16
1.2.3 Points périodiques et p-cycles.....	16
1.3 Etude de stabilité.....	16
1.3.1 Stabilité du point fixe.....	17
1.3.2 Stabilité des points périodiques.....	17
1.4 Bifurcations.....	18
1.4.1 Définition.....	18
1.4.2 Types de bifurcation.....	18
1.5 Théorie du chaos.....	19
1.5.1 Définition du chaos.....	19
1.5.1.1 Définition de Li et Yorke.....	19
1.5.1.2 Définition de Devaney.....	20
1.5.2 Caractéristiques du chaos.....	20
1.5.3 Sensibilité aux conditions initiales.....	21
1.5.4 Exposants de Lyapunov.....	21
1.5.5 Attracteur étrange.....	23
1.5.6 Routes vers le chaos.....	23
1.5.6.1 Intermittence vers le chaos.....	23
1.5.6.2 Le doublement de période.....	23
1.5.6.3 La quasi-périodicité.....	24
1.5.7 Densité de probabilité invariante d'une transformation chaotique	24
1.5.8 Conjugaison.....	26
1.5.9 Signal chaotique.....	26
1.6 Corrélation.....	26
1.7 Densité spectrale de puissance.....	27

1.8 La transformation logistique.....	28
1.8.1 Etude de la transformation logistique.....	28
1.8.2 Points fixes.....	28
1.8.3 Orbites périodiques.....	29
1.8.4 Exposant de lyapunov.....	30
1.8.5 Régime chaotique.....	30
1.8.6 Densité de probabilité.....	31
1.8.7 Fonction d'autocorrélation.....	33
1.8.8 Transformation Quadratique.....	33
1.8.9 Densité de probabilité.....	33
1.8.10 Densité spectrale de puissance.....	35
1.9 Conclusion.....	35
2 Analyse des signaux issus des transformations unidimensionnelles.....	36
2.1 Introduction.....	36
2.2 Skew Tent Map.....	36
2.2.1 Densité de probabilité.....	37
2.2.2 Exposant de Lyapunov.....	38
2.2.3 Fonction d'autocorrélation.....	39
2.2.4 Densité spectrale de puissance.....	41
2.3 Transformation skew tent multimodale.....	42
2.3.1 Densité de probabilité.....	43
2.3.2 Exposant de Lyapunov.....	44
2.3.3 Fonction d'autocorrélation	45
2.3.4 Densité spectrale de puissance.....	46
2.3.4 Cas particulier.....	48
2.3.4.1 transformation bimodale.....	48
2.3.4.2 Transformation symétrique multimodale.....	50
2.4 Conclusion.....	50
3. Analyse de signaux issus des transformations bidimensionnelles.....	51
3.1 Introduction.....	51
3.2 Transformation de Hénon.....	51
3.2.1 Fonction densité de probabilité.....	53
3.2.2 Aspect aléatoire.....	53

3.2.3 Matrice jacobienne.....	54
3.2.4 Points fixes.....	54
3.2.5 Stabilité.....	54
3.2.6 Diagramme de bifurcation.....	55
3.2.7 Exposant de Lyapunov.....	55
3.3 Transformation de Lozi	56
3.3.1 Fonction densité de probabilité.....	57
3.3.2 Aspect aléatoire.....	58
3.3.3 Matrice jacobienne.....	58
3.3.4 Points fixes.....	58
3.3.5 La Stabilité.....	59
3.3.5.1 Stabilité de p_1	59
3.3.5.2 Stabilité de p_2	59
3.3.6 Diagramme de bifurcation.....	60
3.3.7 Exposant de Lyapunov.....	60
3.3.8 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance.....	61
3.4 Conclusion.....	64
4. Conception d'un entrelaceur chaotique pour turbo-code.....	65
4.1 Introduction	65
4.2 Turbo Codeur.....	66
4.2.1 Codeurs constituants.....	67
4.2.2 L'entrelaceur.....	67
4.2.2.1 L'entrelaceur de bloc.....	68
4.2.2.2 L'entrelaceur aléatoire.....	69
4.2.2.3 L'entrelaceur semi aléatoire.....	69
4.2.2.4 L'entrelaceur quadratique.....	69
4.2.2.5 L'entrelaceur d'or (GI)	69
4.2.2.6 L'entrelaceur DGI.....	71
4.2.2.7 L'entrelaceur chaotique.....	71
4.2.3 Perforation	71
4.3 Turbo-décodage.....	73
4.3.1 Logarithme des rapports de vraisemblance.....	74
4.3.2 Algorithme MAP	76

4.3.2.1 Introduction et préliminaires mathématiques	76
4.3.2.2 Calcul récursif en avant de $\alpha_k(s)$	80
4.3.2.3 Calcul récursif en arrière de $\beta_k(s)$	81
4.3.2.4 Calcul de $\gamma_k(s', s)$	81
4.3.3 Simplifications de l'algorithme MAP	82
4.3.3.1 Algorithme Max-Log-MAP	82
4.3.3.2 Algorithme Log-MAP	83
4.3.4 Principe de turbo-décodage	83
4.3.4.1 Préliminaires mathématiques	83
4.3.4.2 Turbo-décodage	85
4.4 Simulation et analyse des résultats	86
4.4.1 Performances du turbo-code pour un canal AWGN	86
4.4.2 Performances du turbo-code pour un canal de rayleigh	88
4.5 Conclusion	89
Conclusion Générale et Perspectives	90
Bibliographie	90

Liste des Figures

Figure 1.1 Evolution de x_n pour $\beta = 3,3$ et $x_0 = 0.5$	29
Figure 1.2 (a) Evolution de x_n pour $\beta = 3,5$ et $x_0 = 0.5$; (b) Evolution de x_n pour $\beta = 3,55$ et $x_0 = 0.5$	29
Figure 1.3 (a) Diagramme de bifurcation de la logistique ; (b) Exposant de Lyapunov.....	30
Figure 1.4 Orbites de la logistique pour $\beta = 4$, $x_0 = 0.1$ et $x_0 = 0.100001$ illustrant la sensibilité aux conditions initiales.....	31
Figure 1.5 Transformation inverse de l'intervalle $[0, x]$ par la transformation logistique.....	31
Figure 1.6 La densité invariante $p(x)$ de la transformation logistique pour $\beta = 4$...	32
Figure 2.1 Transformation skew tent.....	37
Figure 2.2 transformation skew tent inverse de l'intervalle $[-1; x]$	38
Figure 2.3 Evolution de deux trajectoires $x(n, a)$, pour $x_0 = -0.5$ (ligne pointillé) et $x_0 = -0.50000001$ (ligne continue).....	39
Figure 2.4 a fonction d'autocorrélation des signaux chaotiques générés par la transformation Skew Tent.....	41
Figure 2.4 b densité spectrale de puissance des signaux chaotiques générés par la transformation Skew Tent.....	42
Figure 2.5 Transformation skew tent multimodale.....	43
Figure 2.6 transformation skew tent multimodale inverse de l'intervalle $[-1; x]$	44
Figure 2.7 Transformation skew tent Bimodal	48
Figure 2.8 a Fonction d'autocorrélation des signaux chaotiques générés par la transformation bimodale.....	49
Figure 2.8 b Densité spectrale de puissance des signaux chaotiques générés par la transformation bimodale.....	49
Figure 3.1 : transformation de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$	52
Figure 3.2 densité d'états de la transformation de Hénon pour 1000000 valeurs itérées.....	53
Figure 3.3 représentation graphiques de l'aspect aléatoire à long terme de la transformation de Hénon.....	53

Figure 3.4 Diagramme de bifurcation de Hénon par rapport à a pour $b = 0.3$	55
Figure 3.5 exposé de Lyapunov pour la transformation de Hénon par rapport à a pour $b = 0.3$	56
Figure 3.6 : transformation de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$	57
Figure 3.7 densité d'états de la transformation de Lozi pour 1000000 valeurs itérées.	57
Figure 3.8 représentation graphiques de l'aspect aléatoire à long terme de la transformation de Lozi.....	58
Figure 3.9 Diagramme de bifurcation de Lozi par rapport à a pour $b = 0.5$	60
Figure 3.10 exposé de Lyapunov pour la transformation de Lozi par rapport à a pour $b = 0.5$	61
Figure 3.11 Orbites, histogramme, attracteur, fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance des orbites de (a) application de Hénon $(a, b) = (0.6, 0.3)$, (b) application de Lozi $(a, b) = (1.2, 0.5)$	62
Figure 3.12 Orbites, histogramme, attracteur, fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance des orbites de (a) application de Hénon $(a, b) = (1.085, 0.3)$, (b) application de Lozi $(a, b) = (1.53, 0.5)$	63
Figure 3.13 Orbites, histogramme, attracteur, fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance des orbites de (a) application de Hénon $(a, b) = (1.4, 0.3)$, (b) application de Lozi $(a, b) = (1.7, 0.5)$	63
Figure 4.1 schéma de principe du turbo-codec	66
Figure 4.2 schéma de principe d'un turbo-codeur	66
Figure 4.3 codeur convolutif systématique récursif $(1\ 5/7)_8$	67
Figure 4.4 principe de la section d'or.....	70
Figure 4.5 structure du Turbo-codeur, utilisant des codeurs convolutifs $(7, 5)_8$...	72
Figure 4.6 Schéma de principe d'un turbo-décodeur.....	73
Figure 4.7 Transitions possibles pour un RSC de $K=3$	78
Figure 4.8 Treillis d'un décodeur pour un RSC de $K=3$	79
Figure 4.9 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 169 pour un canal AWGN.....	87

Figure 4.10 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 1024 pour un canal AWGN.....	87
Figure 4.11 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 4096 pour un canal AWGN.....	87
Figure 4.12 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 169 pour un canal de Rayleigh.....	88
Figure 4.13 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 1024 pour un canal de Rayleigh.....	88
Figure 4.14 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 4096 pour un canal de Rayleigh.....	89

Liste des Abréviations

AWGN : Additive White Gaussien Noise
BPSK : Binary Phase Shift Keying
BER: Bit Error Rate
FER: Frame Error Rate
RSC: récursif systématique convolutif
BCJR: Bahl, Cocke, Jelinek et Ravive
MAP : Maximum a Posteriori
LLR : Log Likelihood Ratio
SISO : Soft-Input, Soft-Output
GI: Golden Interleaver
DGI: Dithred Golden Interleaver
TFTD : Transformée de Fourier à Temps Discret

Introduction Générale

Les systèmes dynamiques non linéaires ont déjà été appliqués à un certain nombre de problèmes non linéaires importants allant de la physique et la chimie à l'écologie et à l'économie. Les signaux chaotiques, c-à-d, les signaux générés par des systèmes dynamiques non linéaires présentant un comportement chaotique, sont des candidats attractifs pour utilisation dans divers contextes d'ingénierie.

Au cours des dernières années, une grande attention a été portée à l'application des systèmes chaotiques et les signaux qu'ils génèrent dans le traitement du signal et les communications [1, 2]. Le comportement aperiodique des signaux chaotiques dans un contexte complètement déterministe s'est avéré utile dans les communications numériques. Certaines applications proposées de ce type comprennent l'utilisation de systèmes chaotiques comme générateurs de nombres aléatoires et comme générateurs de formes d'ondes pour les systèmes de communication.

Après l'article de Pecora et al. [3] sur la possibilité de synchroniser les systèmes chaotiques, de nombreuses recherches ont été dédiées à l'application des concepts de synchronisation du chaos aux communications. Dans [4], un circuit analogique a été développé pour la transformation de Lorenz afin de réaliser la synchronisation du chaos lors de la transmission et de la réception de la parole. Différents schémas de modulation sont ensuite proposés pour développer des communications efficaces basées sur le chaos susceptibles de présenter un intérêt pratique [5]. Certains chercheurs suggèrent d'utiliser des signaux chaotiques pour remplacer les séquences pseudo-aléatoires en raison des bonnes propriétés de corrélation des transformations chaotiques [6]. Dans [7], le chaos est appliqué pour développer des codes correcteurs d'erreurs analogiques comme une alternative aux codes numériques conventionnels.

Outre les applications de chaos mentionnées ci-dessus, la sécurité [8-11] et le tatouage [12,13] sont d'autres domaines qui présentent un intérêt pour les chercheurs en traitement du signal.

Les systèmes chaotiques ont été introduits presque dans tous les domaines des communications numériques. Cependant, jusqu'à présent, très peu de rapports sont disponibles sur l'application de systèmes chaotiques au codage/décodage. Puisque les turbo-codes sont impliqués dans différentes normes bien connues, il est intéressant d'étudier la possibilité d'utiliser les signaux chaotiques dans la conception des turbo-codes. L'objectif

de cette thèse porte sur la conception d'un entrelaceur pour les Turbo-codes par un embrouillage chaotique visant à réduire la complexité du système tout en améliorant ses performances. Pour cela, nous allons décrire la structure statistique et géométrique d'une classe utile de systèmes chaotiques en utilisant une analogie avec les processus aléatoires [14].

Le présent manuscrit de thèse est structuré en quatre chapitres.

Le chapitre 1 synthétise les définitions des concepts utilisés le long de ce manuscrit. Nous introduisons les principales notions importantes pour les signaux chaotiques comme l'exposant de Lyapunov, le diagramme de bifurcation, la densité de probabilité et la densité spectrale de puissance en donnant l'exemple de la transformation logistique.

Le chapitre 2 donne les calculs analytiques de la fonction densité de probabilité, l'exposant de Lyapunov, l'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance de signaux issus de transformations unidimensionnelles.

Le chapitre 3 donne les calculs numériques de la densité de probabilité, l'exposant de Lyapunov, l'autocorrélation et la densité spectrale de puissance des transformations bidimensionnelles (transformation de Hénon et transformation de Lozi).

Le chapitre 4 présente la conception d'entrelaceurs pour turbo-code à base des transformations chaotiques étudiées dans les chapitres précédents. Nous simulons la performance du turbo-code à base des entrelaceurs ainsi conçus pour différentes longueurs de trame. Enfin, une conclusion générale et des perspectives de ce travail sont données.

Chapitre 1

Systèmes Dynamiques et Théorie du Chaos

1.1 Introduction

Le domaine des mathématiques s'intéresse depuis longtemps aux systèmes dynamiques, mais au cours de ces dernières années, de multiples applications dans différents domaines des sciences de l'ingénieur ont été introduites.

L'un des apports de la théorie du chaos à la communauté du traitement du signal est la notion qu'un comportement complexe et irrégulier rencontré dans divers contextes peut être le résultat de systèmes déterministes, non linéaires. La modélisation précise des signaux issus de ces systèmes a une importance fondamentale pour diverses applications de traitement du signal. Cependant, l'analyse de tels modèles non linéaires nécessite généralement des outils mathématiques et des concepts qui ne sont pas utilisés dans les techniques de traitement du signal classiques [15]. Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats de la théorie des systèmes non linéaires qui sont les plus utiles dans le reste de la thèse. Nous allons nous concentrer sur les propriétés des signaux générés par les systèmes dynamiques discrets.

1.2 Systèmes dynamiques discrets

Un système dynamique discret est représenté par une équation aux différences finies comme suit :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1.1)$$

Où $x_n \in \mathbb{R}^p, n \in \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction au moins continue ou continue par morceaux qui définit la dynamique du système discret.

1.2.1 Orbites

L'évolution temporelle du système dynamique (1.1) génère l'ensemble des vecteurs d'état, appelé l'orbite ou la **trajectoire** de x_0 [16], de la forme :

$$O(x_0) = \{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{x_0, f(x_0), f^{(2)}(x_0), f^{(3)}(x_0), \dots\}.$$

Où $f^{(n)}$ est f composée avec elle-même n fois.

1.2.2 Points fixes

On appelle "point fixe" d'un système dynamique discret f tout point x^* tel que

$$f^{(r)}(x^*) = x^*, \quad r = 0, 1, 2 \quad (1.2)$$

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre.

1.2.3 Points périodiques et p-cycles

S'il existe $r \geq 1$, tel que $f^{(r)}(x^*) = x^*$, on dit que x^* est un point **périodique**. La période d'un point périodique x^* est le plus petit entier $r \geq 1$ tel que :

$$f^{(r)}(x^*) = x^* \quad (1.3)$$

Un ensemble $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_{r-1}^*\}$ forme un cycle d'ordre r (ou une orbite périodique d'ordre r , ou encore un r -cycle), si :

$$\begin{cases} f(x_i^*) = x_{i+1}^*, & i = 0, 1, \dots, r-1, \\ f(x_{r-1}^*) = x_0^*. \end{cases} \quad (1.4)$$

Autrement dit, si chaque point d'un cycle d'ordre r est un point fixe pour $f^{(r)}$ où $f^{(r)}(x_i^*) = x_i^*$ pour $i = 0, \dots, r-1$ et n'est pas un point fixe pour $f^{(n)}$ si $n < r$.

1.3 Etude de stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques [17].

Soit $D \subset I$, on dit que D est invariant par f si $f(D) = D$.

On dit que D est attracteur si D est invariant par f , et s'il existe un voisinage V de D tel que pour $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 converge vers D . Le voisinage V est appelé le bassin d'attraction de D .

On dit que D est répulsif ou instable s'il existe un voisinage V de D tel que pour tout $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 s'éloigne de D .

On dit que D est fractal (ou un attracteur étrange) si l'orbite de x est dense dans D pour tout $x \in D$ et est sensible aux conditions initiales.

1.3.1 Stabilité du point fixe

Un point fixe $x^* \in D$ est stable, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow \forall n \geq 0 : |x_n - x^*| < \varepsilon$$

Pour les transformations unidimensionnelles, $f : \square \rightarrow \square$ la pente $f'(x^*)$ de la tangente au point fixe x^* qui détermine le type de point fixe.

Pour $f : \square \rightarrow \square$ le point fixe est :

1. attractif (ou stable) si $|f'(x^*)| < 1$
2. répulsif (ou instable) si $|f'(x^*)| > 1$
3. on peut rien dire si $|f'(x^*)| = 1$
4. super attractif (ou super stable) si $|f'(x^*)| = 0$

En dimension p , pour décider si un point fixe x^* est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobéenne $Df(x) = J(x)$.

Si toutes les valeurs propres de $Df(x) = J(x)$ sont à l'intérieur du disque unité, x^* est stable.

Si une de ces valeurs propres a un module plus grand que un, x^* est instable.

1.3.2 Stabilité des points périodiques

Une orbite périodique est un attracteur si chacun de ses points est un attracteur. Comme les points périodiques d'ordre r sont des points fixes de $f^{(r)}$ alors :

Pour les transformations unidimensionnelles, la dérivée de $f^{(r)}$ au point x_0^* s'écrit :

$$\begin{aligned} [f^{(r)}]'(x_0^*) &= f'(f^{(r-1)}(x_0^*)) f'(f^{(r-2)}(x_0^*)) \dots f'(x_0^*) \\ &= f'(x_{r-1}^*) f'(x_{r-2}^*) \dots f'(x_0^*) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Pour $f : \square \rightarrow \square$ le point fixe est :

1. attractif (ou stable) si $|f'(x_{r-1}^*) f'(x_{r-2}^*) \dots f'(x_0^*)| < 1$.
2. répulsif (ou instable) si $|f'(x_{r-1}^*) f'(x_{r-2}^*) \dots f'(x_0^*)| > 1$.
3. on peut rien dire si $|f'(x_{r-1}^*) f'(x_{r-2}^*) \dots f'(x_0^*)| = 1$.
4. super attractif (ou super stable) si $|f'(x_{r-1}^*) f'(x_{r-2}^*) \dots f'(x_0^*)| = 0$.

En dimension p , si le spectre de la matrice $Df^{(r)}(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable ; si une des valeurs propres a un module plus grand que un, le cycle est instable.

1.4 Bifurcations

1.4.1 Définition

Soit le système dynamique non-linéaire suivant

$$x_{n+1} = f(x_n, \beta) \quad (1.6)$$

Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution du système (1.6) lorsqu'on modifie le paramètre de contrôle β ; c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.

1.4.2 Types de bifurcation

Ce type de système dynamique possède trois types de bifurcations à un paramètre : **doublément de période**, **nœud-col**, et **Neimark-Sacker**.

1. lorsque une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte (ou rentre dans) le cercle unité à -1 , on a alors une bifurcation fourche (ou **doublément de période**, ou **flip**).
2. lorsque une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte (ou rentre dans) le cercle unité à $+1$, on a alors une bifurcation **nœud-col** (ou **tangente**, ou **pli**).

3. lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées de $Df(x)$ quittent (ou rentrent dans) le cercle unité simultanément à $e^{\pm i\theta}$, on a alors une bifurcation de **Neimark-Sacker**.

1.5 Théorie du chaos

La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques sensibles aux changements de conditions initiales. Ce comportement est connu sous le nom de chaos déterministe, ou tout simplement le chaos. En 1889, le mathématicien et physicien français Henri Poincaré à découvert pour la première fois le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude du problème des trois corps.

En 1963, le météorologue Edward Lorenz lors des expériences de prévision des phénomènes météorologiques observa qu'une modification infime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de mettre en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales que l'on connaît sous le nom d'effet papillon, le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas [18].

En 1975, Li et Yorke [19], ont traduit le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, par le terme chaos, et depuis lors les systèmes répondant à cette propriété sont dénommés systèmes chaotiques.

1.5.1 Définition du chaos

La première définition mathématique du chaos a été fournie par Li et Yorke dans [19]. Depuis lors, de nombreuses définitions du chaos ont été introduites.

1.5.1.1 Définition de Li et Yorke

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Supposons que f à une orbite périodique de trois périodes. Dans l'article bien connu, Li et Yorke [19] ont prouvé que

1. f à des orbites périodiques de chaque période ;
2. il y à un ensemble indénombrable $S \subset I$ tel que $O(x)$ soit apériodique et instable pour tout $x \in S$.

Les transformations de ce type sont appelées chaotiques au sens de Li-Yorke, sans préciser si le comportement chaotique doit être considéré dans tout l'intervalle I ou simplement dans la fermeture S .

L'un des avantages évidents de cette définition est qu'il est facile de vérifier graphiquement, si une transformation continue a une orbite périodique de période trois. De plus, la propriété (ii) aborde, au moins en partie, la question de l'imprévisibilité du système, car les orbites partant des points de S sont instables.

1.5.1.2 Définition de Devaney

La définition du chaos largement connue est celle de Devaney [20]. Une transformation continue $f : I \rightarrow I$ sur un espace métrique compact (I, d) est chaotique au sens de Devaney si :

1. f est topologiquement transitive : Pour tous ensembles U et V non vides et ouverts dans I , il existe un nombre entier $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. La transitivité est une condition d'irréductibilité.
2. L'ensemble des points périodiques de f est dense dans I . La densité est une condition de régularité.
3. f possède une sensibilité aux conditions initiales, de sorte qu'il y ait une constante positive (constante de sensibilité) $\delta > 0$ tel que pour chaque $x \in I$, il y a un point y et un nombre entier $k \geq 0$ tel que $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$. La sensibilité est une condition d'imprévisibilité.

Bien qu'il n'existe pas de définition mathématique universellement acceptée de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante.

1.5.2 Caractéristiques du chaos

Le chaos est un comportement dynamique non linéaire, déterministe, borné, irrégulier et extrêmement sensible aux conditions initiales [15-19]. Nous discuterons chacune des caractéristiques du chaos à tour de rôle.

1. La non-linéarité : le comportement aperiodique d'un système chaotique est dû aux non linéarités.

2. le déterminisme : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Le système chaotique présente un comportement irrégulier sans aucun caractère aléatoire.

3. L'irrégularité : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché (ordre dans le désordre) forme l'infrastructure des systèmes chaotiques.

4. La sensibilité aux conditions initiales : le système présente une très grande sensibilité aux changements de conditions initiales.

5. L'imprévisibilité : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

1.5.3 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du XIX^e siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, des petites variations de leur condition initiale peuvent rapidement prendre d'énormes proportions. Le mathématicien russe Alexander Lyapunov a introduit une quantité permettant de mesurer la vitesse à laquelle ces petites variations peuvent s'amplifier. Cette quantité appelée "exposant de Lyapunov" mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique.

1.5.4 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov servent à mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines et permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre des exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases [21-28].

Soit le système dynamique non linéaire discret décrit par (1.1) pour $x_n \in \mathbb{R}^n$, nous considérons une trajectoire particulière de référence $O_1 = \{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ issue d'une condition initiale x_0 et une trajectoire $O_2 = \{f^n(\tilde{x}_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ issue de la version perturbée de la condition initiale $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$ (δx_0 étant supposé infinitésimal). Alors l'évolution de l'écart entre les deux trajectoires initialement voisines après une itération est donnée par :

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \delta x_1 = f(x_0 + \delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\delta x_0 \quad (1.7)$$

où f' désigne la première dérivée de f par rapport à la variable x . La distance entre les deux trajectoires après une itération est donnée par

$$|\delta x_1| = |f'(x_0)\delta x_0| = |f'(x_0)| \cdot |\delta x_0| \quad (1.8)$$

La distance entre les deux trajectoires après une seconde itération est donnée par

$$|\delta x_2| = |f'(x_1)\delta x_1| = |f'(x_1)| \cdot |f'(x_0)| \cdot |\delta x_0| \quad (1.9)$$

et après N itérations nous obtenons

$$|\delta x_N| = \left(\prod_{n=0}^{N-1} |f'(x_n)| \right) \cdot |\delta x_0| \quad (1.10)$$

L'évolution de la perturbation autour d'un point fixe x^* est $|\delta x_N| = \left[|f'(x^*)| \right]^N \cdot |\delta x_0|$. Pour une trajectoire arbitraire l'évolution de la perturbation par rapport à l'évolution sans perturbation donne un écart $|\delta x_N| = \gamma^N \cdot |\delta x_0|$, l'évolution est obtenue par un taux effectif γ par pas d'itération

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=0}^{N-1} |f'(x_n)| \right)^{1/N} \quad (1.11)$$

En prenant le logarithme, nous obtenons l'exposant de l'évolution

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log \left(|f'(x_n)| \right) \quad (1.12)$$

Cet exposant, appelée exposant de Lyapunov, se présente donc comme la moyenne temporelle du taux local de divergence $\log \left(|f'(x)| \right)$ prise le long de la trajectoire de référence.

Si λ est négatif : le système est stable.

Si λ est nul : le system est sur le point de bifurcation.

Si λ est positif : le système est dite chaotique.

1.5.5 Attracteur étrange

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions sont restrictives [29, 31].

Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage V de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans V vérifiant les propriétés suivantes :

1. Attraction : V est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans V ; est entièrement contenue dans V .
2. A indécomposable, c.-à-d., la trajectoire devrait visiter chaque point sur l'attracteur au cours du temps.
3. Les orbites dont le point initial est dans V sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.
4. A est un objet fractal.

1.5.6 Routes vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle "bifurcations". Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos [32-34] :

1.5.6.1 Intermittence vers le chaos

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

1.5.6.2 Le doublement de période

Ce scénario a été observé dans les années 60 par R.May en dynamique de populations sur l'application logistique. Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée

par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

1.5.6.3 La quasi-périodicité

Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnel, le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.

1.5.7 Densité de probabilité invariante d'une transformation chaotique

Nous verrons que de nombreux systèmes non linéaires peuvent être considérés dans le même cadre que des processus aléatoires utilisant les outils de la théorie ergodique. La propriété clé du système non linéaire f de (1.1) qui permet d'appliquer la théorie ergodique est qu'il existe une distribution de probabilités invariante à f ; c'est-à-dire qu'à chaque instant n , le vecteur d'état x_n est distribué selon $p(x)$ appelée densité invariante. La propriété de la densité invariante permet d'étudier les signaux chaotiques comme des fonctions échantillonnées d'un processus aléatoire [35-38], c'est-à-dire, qu'une séquence chaotique avec une condition initiale aléatoire est un processus aléatoire chaque fois que le système non linéaire est une transformation mesurable [14]. Vue l'importance de la densité invariante dans ce qui suit, nous la définissons plus précisément et décrivons certaines de ses propriétés.

Considérons la transformation $f : U \rightarrow U$, $U = [0,1]$. Prenant N conditions initiales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0$ distribués sur l'intervalle U et en faisant une itération de chaque condition à l'aide de la transformation $f(\cdot)$, alors on obtient N nouveaux points $x_1^1 = f(x_1^0), x_2^1 = f(x_2^0), \dots, x_N^1 = f(x_N^0)$.

Pour déterminer la densité initiale et finale, il est intéressant d'utiliser la fonction indicatrice 1_Δ d'un ensemble $\Delta \subset U$ définie par :

$$1_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Delta \\ 0 & \text{if } x \notin \Delta \end{cases} \quad (1.13)$$

On dit que $p_0(x)$ est une fonction de densité de probabilité pour un ensemble de N conditions initiales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0$, si pour tout intervalle $\Delta_0 \subset U$ on a :

$$\int_{\Delta_0} p_0(u) du \square \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{\Delta_0}(x_j^0) \quad (1.14)$$

De la même façon, la fonction densité de probabilité $p_1(x)$ pour les valeurs $x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1$ satisfaite :

$$\int_{\Delta} p_1(u) du \square \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{\Delta}(x_j^1) \quad (1.15)$$

pour tout $\Delta \subset U$

Pour trouver une relation entre p_1 et p_0 , il est nécessaire d'introduire le concept de fonction inverse d'un intervalle $\Delta \subset U$ en utilisant la transformation $f(\cdot)$. La fonction inverse d'un intervalle $f^{-1}(\Delta)$ est l'ensemble des points dont l'image par f appartient à Δ .

Donc

$$f^{-1}(\Delta) = \{x : f(x) \in \Delta\} \quad (1.16)$$

Ainsi, pour tout $\Delta \subset U$

$$x_j^1 \in \Delta \text{ si et seulement si } x_j^0 \in f^{-1}(\Delta)$$

Alors on a la relation suivante :

$$1_{\Delta}(f(x)) = 1_{f^{-1}(\Delta)}(x) \quad (1.17)$$

Alors, on peut réécrire l'équation (1.15) comme suit :

$$\int_{\Delta} p_1(u) du \square \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{f^{-1}(\Delta)}(x_j^0) \quad (1.18)$$

En utilisant les deux équations (1.14) et (1.18), nous obtenons :

$$\int_{\Delta} p_1(u) du = \int_{f^{-1}(\Delta)} p_0(u) du \quad (1.19)$$

Soit l'intervalle $\Delta \subset U$, avec $\Delta = [a, x]$, nous obtenons une représentation explicite de p_0 .

Dans ce cas, l'équation (1.19) devient :

$$\int_a^x p_1(u) du = \int_{f^{-1}[a,x]} p_0(u) du \quad (1.20)$$

En dérivant par rapport à x , nous obtenons :

$$p_1(x) = \frac{d}{dx} \int_{f^{-1}[a,x]} p_0(u) du \quad (1.21)$$

Il est clair que p_1 dépend de p_0 , ce qui est indiqué par $p_1 = Pp_0$. De manière plus générale, l'équation (1.21) peut être réécrite sous la forme :

$$Pp(x) = \frac{d}{dx} \int_{f^{-1}[a,x]} p(u) du \quad (1.22)$$

L'équation (1.22) définit l'opérateur de Frobenius-Perron P associé à la transformation $f(\cdot)$. Il est beaucoup utilisé dans l'étude de l'évolution des densités qui peuvent s'approcher de la densité invariante [36].

1.5.8 Conjugaison

On dit que Les transformations $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont conjuguées si elles sont liées par la relation suivante $h \circ f(\cdot) = g(\cdot) \circ h$ avec h bijective et continue [15]. Les signaux générés par des transformations conjuguées possèdent les mêmes caractéristiques

1.5.9 Signal chaotique

Un signal chaotique est défini comme un signal à valeur continue avec un taux d'entropie positive fini et un taux de redondance infini [39]. Un signal chaotique est simplement généré par un système chaotique. Leurs propriétés sont définies par le système dynamique qui le génère et le comportement de ses trajectoires dans l'espace des phases [40].

1.6 Corrélation

La fonction de corrélation exprime la relation entre les signaux en fonction du décalage temporel, de sorte que par exemple les signaux périodiques continuent à corrélérer

parfaitement chaque période, alors que le bruit blanc ne se corrèle pas même pour le plus petit retard [41,42]. La fonction d'autocorrélation donne une mesure de la similitude d'un signal avec lui-même. Pour les processus stationnaires, toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, alors la fonction d'autocorrélation $R(k)$ d'un entier k est défini par :

$$R(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|k|} x_n x_{n+|k|} \quad (1.23)$$

qui est indépendant du temps n , et est fonction de déplacement k seulement. Pour un processus ergodique les moyennes temporelles du type (1.23) sont identiques aux moyennes d'ensemble du type (1.24)

$$R(k) = E[x_n x_{n+k}] \quad (1.24)$$

La fonction de corrélation est l'équivalent de la fonction spectrale dans le domaine temporel, qui leur sont liées par une transformée de Fourier.

1.7 Densité spectrale de puissance

L'analyse spectrale des signaux est cruciale dans le traitement du signal et communications. Malgré cet intérêt dans ces domaines, il y'a peu d'études concernant les caractéristiques spectrales des signaux chaotiques.

Dans [12], S. Tsekeridou et al. Ont détaillé le calcul de l'autocorrélation et du spectre de signaux issus de la transformation de Bernoulli pour une utilisation dans le tatouage. Dans [43], Eisenkraft et al. Ont obtenu des expressions analytiques de la fonction d'autocorrélation, de la densité spectrale de puissance et de la bande passante de signaux chaotiques générés par la transformation Skew Tent. Ils ont constaté que lorsque le paramètre de bifurcation varie alors il y a des modifications du spectre entre passe-bas large bande et passe haut.

Dans le but de généraliser ces résultats, da Costa et al. [44] ont déduit des expressions analytiques de la fonction d'autocorrélation, de la densité spectrale de puissance et de la bande passante de signaux chaotiques issus d'une transformation linéaire par morceaux avec plusieurs segments. Les signaux générés par tel transformation sont des signaux à spectre passe bas.

La densité spectrale de puissance $S(\omega)$ est définie comme étant la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de la fonction d'autocorrélation $R(k)$. En calculant la TFTD de l'équation (1.23), nous obtenons :

$$s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \rho(k) e^{-j\omega k} \quad (1.25)$$

1.8 La transformation logistique

On présente ici un modèle de classe de systèmes dynamiques non linéaires à temps discret. Ce modèle est appelé application **quadratique** (ou **logistique**).

1.8.1 Etude de la transformation logistique

Considérons l'application f qui est définie de $[0,1]$ dans lui-même par l'itération suivante :

$$f(x_n) = \beta x_n (1 - x_n), x_n \in [0,1] \quad (1.26)$$

f est la fonction logistique, elle s'annule pour $x=0$ et $x=1$, et sa dérivée s'annule pour $x = \frac{1}{2}$ donc atteint le maximum à $x = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\beta}{4}$.

1.8.2 Points fixes

Les points fixes de f sont les solutions de l'équation :

$$x = \beta x(1-x), \beta > 0 \text{ d'où } x_1^* = 0 \text{ et } x_2^* = 1 - \frac{1}{\beta}.$$

La dynamique de cette application présente un comportement très différent selon la valeur du paramètre de contrôle β :

Lorsque $\beta \in [0,1]$, la transformation logistique possède un point fixe attractif $x_1^* = 0$ pour toute condition initiale.

Si $\beta \in [1,3]$, on obtient une convergence rapide vers un point fixe $x_2^* = 1 - \frac{1}{\beta}$.

1.8.3 Orbites périodiques

Si $\beta \in [3, 1 + \sqrt{6}]$, la trajectoire converge vers un cycle d'ordre-2 (x_n, x_{n+1}) , comme dans la Figure 1.1. Lorsque β dépasse la valeur de $1 + \sqrt{6} = 3.45$, le cycle d'ordre-2 devient instable et nous obtenons un cycle d'ordre-4 $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3})$, puis un cycle d'ordre-8 (x_n, \dots, x_{n+7}) qui sont illustrés dans la Figure 1.2 (a) et (b).

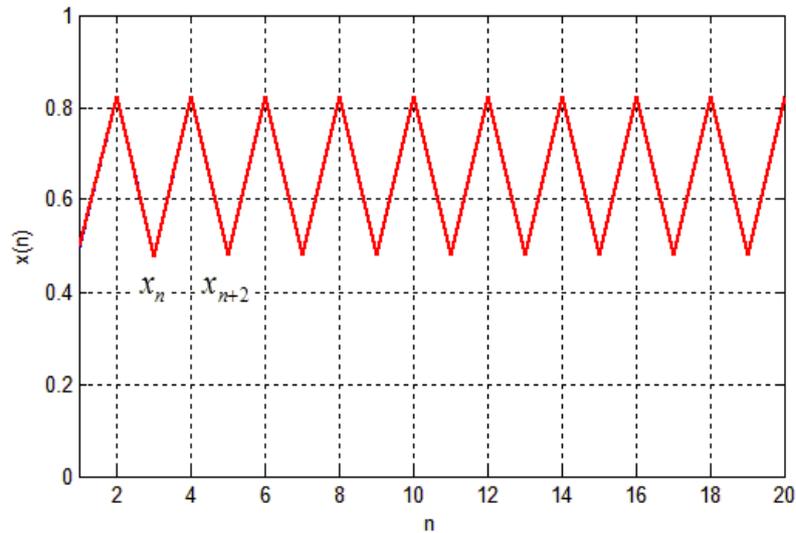


Figure 1.1 Evolution de x_n pour $\beta = 3,3$ et $x_0 = 0,5$.

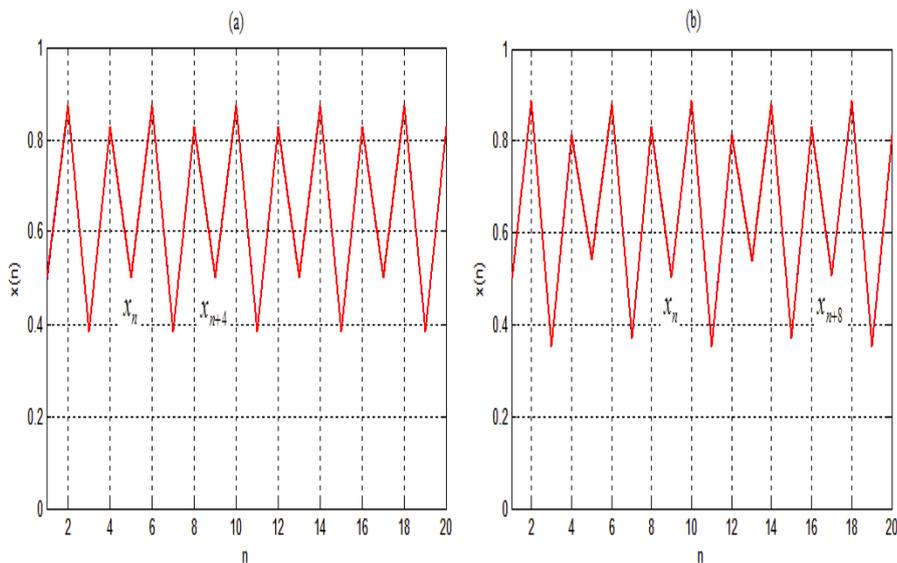


Figure 1.2 (a) Evolution de x_n pour $\beta = 3,5$ et $x_0 = 0,5$; (b) Evolution de x_n pour $\beta = 3,55$ et $x_0 = 0,5$.

1.8.4 Exposant de lyapunov

Dans la figure 1.3 nous donnons la représentation de l'exposant de lyapunov pour la transformation logistique. On peut ainsi visualiser la transition vers le chaos pour ce système en ajoutant le diagramme de bifurcation. Un exposant de lyapunov positif est "la signature du chaos".

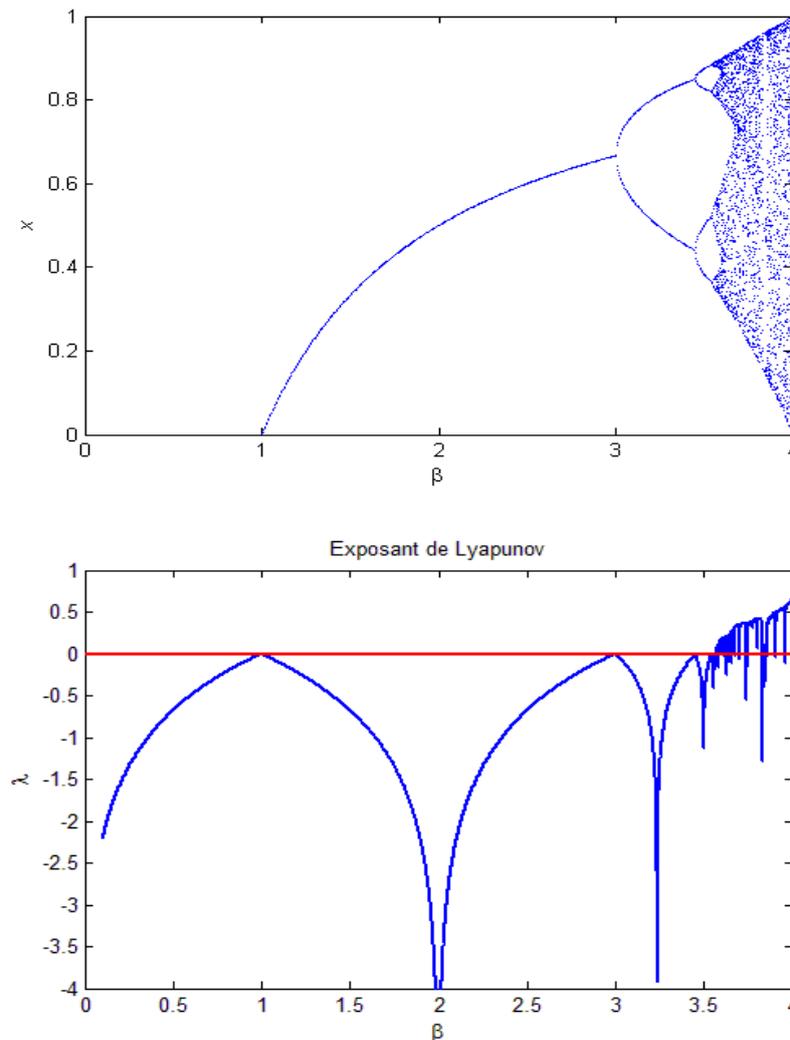


Figure 1.3 (a) Diagramme de bifurcation de la logistique ; (b) Exposant de Lyapunov

1.8.5 Régime chaotique

Pour des valeurs critique β supérieurs à la valeur critique β_c on pénètre dans le régime chaotique : le résultat de l'itération de f conduit à une orbite qui ne converge vers aucun attracteur usuel. L'attracteur obtenu est dense (**attracteur étrange**). Nous pouvons remarquer que le paramètre β joue un grand rôle dans l'évolution de la dynamique vers le chaos, ce paramètre est appelé paramètre de bifurcation.

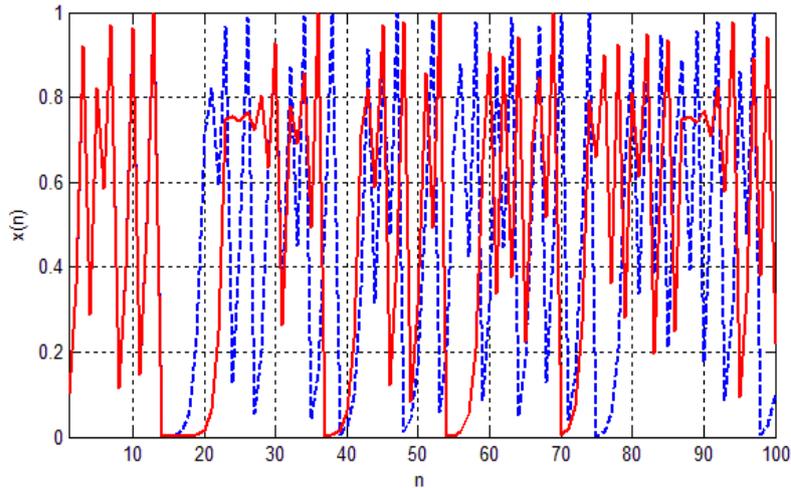


Figure 1.4 Orbites de la logistique pour $\beta = 4$, $x_0 = 0.1$ et $x_0 = 0.100001$ illustrant la sensibilité aux conditions initiales

1.8.6 Densité de probabilité

Pour appliquer l'opérateur de Frobenius-Perron (1.22) sur la transformation logistique tel que $\beta = 4$ il faut commencer par trouver la transformation inverse de l'intervalle $[0, x] \subset [0, 1]$:

$$f^{-1}([0, x]) = [0, x_0] \cup [x_1, 1] \quad (1.27)$$

Avec $x_0 = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2}$ et $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2}$. Les valeurs x_0 et x_1 peuvent être obtenues grâce aux équations de la transformation $f(x)$ comme l'indique la Figure 1.5.



Figure 1.5 Transformation inverse de l'intervalle $[0, x]$ par la transformation logistique

En appliquant l'opérateur de Frobenius Perron sur la logistique :

$$\begin{aligned} P(p(x)) &= \frac{d}{dx} \int_0^{x_0} p(u) du + \frac{d}{dx} \int_{x_1}^1 p(u) du \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left[p\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right) + p\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

Nous choisissons la densité initiale $p(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors,

$$P(p(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad (1.29)$$

Après Remplacement de l'expression $p(x)$ dans (1.28) par $P(p(x))$ nous obtenons :

$$P(P(p(x))) = P^2(p(x)) = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{1-x}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}} \right\} \quad (1.30)$$

En continuant ainsi et en prenant la limite $n \rightarrow \infty$, on obtient la densité invariante de la transformation logistique :

$$p^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad (1.31)$$

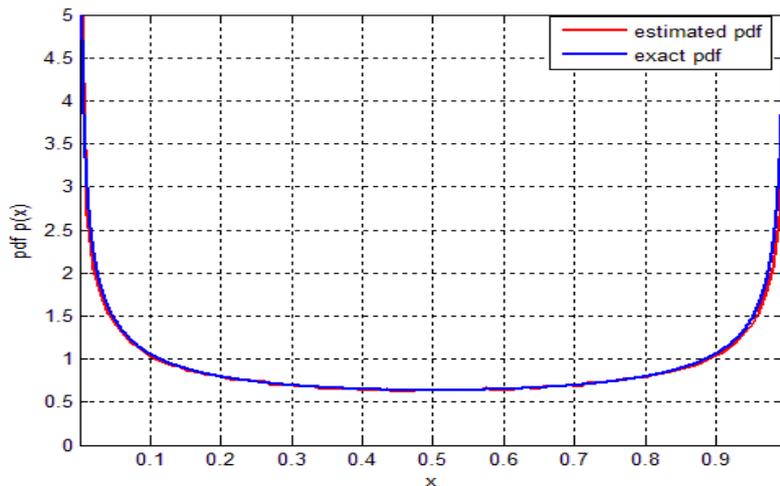


Figure 1.6 La densité invariante $p(x)$ de la transformation logistique pour $\beta = 4$.

1.8.7 Fonction d'auto-corrélation

L'évaluation analytique de la fonction d'autocorrélation de la transformation logistique est difficile à cause de la distribution non uniforme de la densité invariante sur l'intervalle $[0,1]$ lorsque le paramètre de bifurcation β varie. Pour $\beta = 4$ la fonction d'autocorrélation peut être obtenue à l'aide des conditions d'orthogonalité des polynômes de Tchebychev d'ordre 2 qui est la transformation conjuguée de la transformation logistique.

1.8.8 Transformation Quadratique

Avec la transformation $y = \frac{1}{2}(1-x)$ on voit facilement que la transformation logistique de l'éq. (1.26) est topologiquement conjugué à une transformation Quadratique définie par $f_Q : I \rightarrow I$, $I = [-1, 1]$:

$$f_Q = 2x^2 - 1 \quad (1.32)$$

$$x_{k+1} = T_n(x_k) \quad (1.33)$$

1.8.9 Densité de probabilité

La densité de probabilité des signaux issus de la transformation quadratique est donnée par [45] :

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad x \in [-1,1] \quad (1.34)$$

La valeur moyenne des signaux générés par $f_Q(x)$ est définie par

$$\mu_x = \int_{-1}^1 xp^*(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx \quad (1.35)$$

Le changement de variable $x = \cos(\theta)$ nous à donner :

$$\mu_x = \int_{\pi}^0 \frac{\cos(\theta) \cdot (-\sin(\theta))}{\pi\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{\pi} d\theta = 0 \quad (1.36)$$

Et leur puissance est donné par

$$\sigma_x^2 = \int_{-1}^1 x^2 p^*(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx \quad (1.37)$$

Le changement de variable $x = \cos(\theta)$ nous à donner :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos^2(\theta) \cdot (-\sin(\theta))}{\pi \sqrt{1-\cos^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos^2(\theta)}{\pi} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Il est commode de représenter les polynômes de Tchebychev sous la forme :

$$T_n(x) = \cos(n \arcsin x), \quad x \in [-1, 1] \quad (1.39)$$

Il est maintenant facile de montrer que :

$$x_{k+2} = \cos(n^2 \arcsin x_k) \quad (1.40)$$

et plus généralement

$$x_k = \cos(n^k \arcsin x_0) = T_{n^k}(x_0) \quad (1.41)$$

Alors, la fonction d'autocorrélation de la transformation logistique est obtenue à partir de la condition d'orthogonalité des polynômes de Tchebychev comme suit :

$$\begin{aligned} R(k) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} T_1(x) T_{n^k}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \delta_{0,k} \end{aligned} \quad (1.42)$$

La normalisation de (1.42) par rapport à son maximum en $k = 0$, c'est-à-dire $\rho(k) = \frac{R(k)}{R(0)}$,

donne la fonction d'autocorrélation normalisée

$$\rho(k) = \delta_{0,k} \quad (1.43)$$

1.8.10 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance est la Transformée de Fourier Discrète de la fonction d'autocorrélation (1.43) :

$$s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \rho(k) e^{-j\omega k} = 1 \quad (1.44)$$

Le processus généré par une transformation logistique pour $\beta = 4$ a les propriétés statistiques et spectrales du bruit blanc.

1.9 Conclusion

Le but de ce chapitre était d'introduire les principales notions de base sur les systèmes dynamiques, les caractéristiques des systèmes chaotiques et également d'étudier le spectre des signaux générés par des systèmes dynamiques discrets. Les travaux [12, 43] nous ont donné l'idée de généraliser les résultats obtenus pour les signaux issus de la transformation skew tent. Dans le chapitre suivant, nous étudions des transformations unidimensionnelles, à savoir la transformation skew tent et la transformation skew tent multimodale.

Chapitre 2

Analyse des Signaux Issus des Transformations Unidimensionnelles

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à des transformations unidimensionnelles. La méthode analytique de dérivation de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance proposée dans les travaux [43, 46] et présentée dans la section 2.2 nous a motivés pour trouver d'autres types de transformations chaotiques et faire des recherches concernant les caractéristiques statistiques et spectrales dans le but de généraliser les résultats obtenus. La méthode de calcul utilisée dans [43] et proposée originalement dans [47] est un peu compliquée, alors nous avons dérivé la fonction densité de probabilité, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de signaux issus d'une transformation de Skew tent par une méthode simple. Ensuite, nous généralisons ces résultats à la transformation skew tent multimodale.

2.2 Skew Tent Map

La transformation skew tent (voir Figure 2.1) est étudiée dans [43] et elle est définie par

$f_T : I \rightarrow I$, $I = [-1, 1]$:

$$f_T(x) = \begin{cases} f_0(x) = \frac{2x-a+1}{1+a}, & \text{if } x \in [-1, a] \\ f_1(x) = \frac{-2x+a+1}{1-a}, & \text{if } x \in [a, 1] \end{cases} \quad (2.1)$$

Les itérations successives de (2.1), génère un système dynamique à temps discret

$$x_{n+1} = f_T(x_n) = f_T^{(n)}(x_0) \quad (2.2)$$

x_0 : Condition initiale.

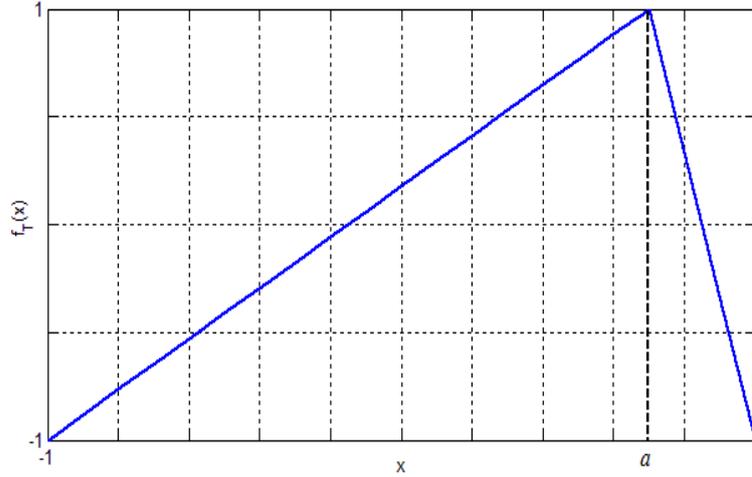


Figure 2.1 Transformation skew tent

2.2.1 Densité de probabilité

La densité de probabilité de la transformation skew tent map est le point fixe de leur opérateur de Frobenius-Perron. Déterminons la transformation inverse (voir Figure 2.2) de l'intervalle $[-1, x] \in I$.

$$f_T^{-1}([-1, x]) = [-1, x_0]; [x_1, 1] \quad (2.3)$$

$$\text{Avec } x_0 = f_0^{-1}(x) = \frac{(a+1)x + (a-1)}{2} \text{ et } x_1 = f_1^{-1}(x) = \frac{-(1-a)x + (1+a)}{2}$$

En appliquant l'opérateur de Frobenius Perron à la transformation skew tent, nous obtenons:

$$\begin{aligned} P_{f_m} p(x) &= \frac{d}{dx} \int_{f_m^{-1}([-1, x])} p(u) du \\ &= \sum_{j=0}^1 \left| \frac{d}{dx} f_j^{-1}(x) \right| p(f_j^{-1}(x)) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left| \frac{(a+1)}{2} \right| p(x_1) + \left| \frac{-(1-a)}{2} \right| p(x_2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(a+1)}{2} p(x_1) + \frac{(1-a)}{2} p(x_2) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

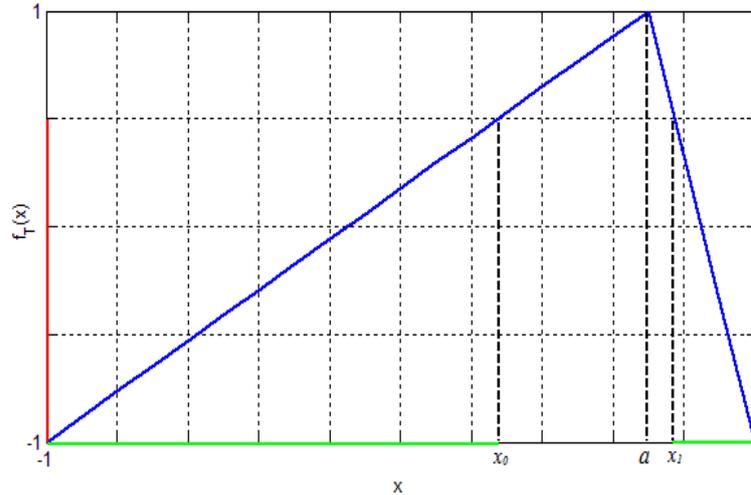


Figure 2.2 transformation skew tent inverse de l'intervalle $[-1; x]$

Lorsqu'on utilise l'équation (2.4) avec $p(x) = \frac{1}{2}$, nous obtenons $P_{f_T} p(x) = \frac{1}{2}$. Donc, la densité de probabilité de f_T est uniforme est donnée par :

$$p^*(x) = \frac{1}{2}, x \in [-1, 1] \quad (2.5)$$

La valeur moyenne des signaux générés par $f_T(x)$ est définie par

$$\mu_x = \int_{-1}^1 x p^*(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad (2.6)$$

Et leur puissance est donné par

$$\sigma_x^2 = \int_{-1}^1 x^2 p^*(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (2.7)$$

2.2.2 Exposant de Lyapunov

Une quantité importante qui caractérise les systèmes dynamiques est l'exposant de Lyapunov, cette quantité mesure la sensibilité aux conditions initiales (voir Figure 2.3). Un exposant de Lyapunov positif indique un comportement chaotique, ce qui signifie que deux orbites initialement proches se sépareront très rapidement [21].

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log \left(\left| f_T'(x_n) \right| \right) \\
&= \int_{-1}^1 \log \left(\frac{df_T(x)}{dx} \right) p^*(x) dx \\
&= \frac{1+a}{2} \log \left(\frac{2}{1+a} \right) + \frac{1-a}{2} \log \left(\frac{2}{1-a} \right) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

L'exposant de Lyapunov est toujours positif, donc $f_T(x)$ génère des signaux chaotiques.

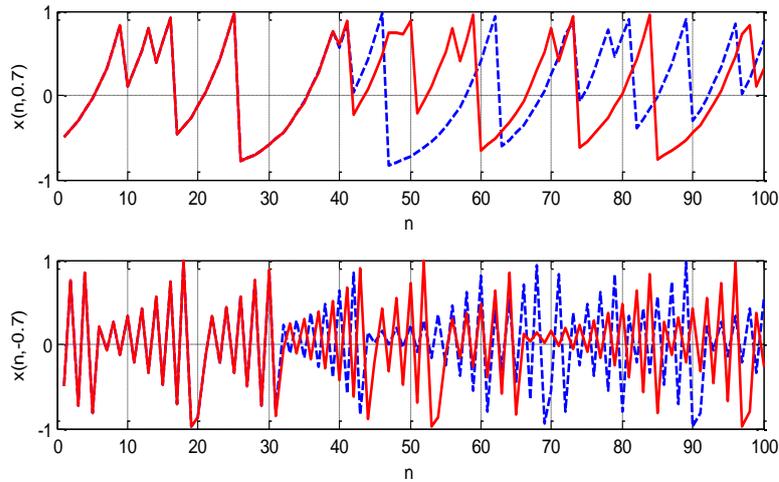


Figure 2.3 Evolution de deux trajectoires $x(n, a)$, pour $x_0 = -0.5$ (ligne pointillé) et $x_0 = -0.50000001$ (ligne continue).

2.2.3 Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation du processus unidimensionnel à temps discret $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, qui est généré à partir de (2.2) est alors donnée par :

$$R(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|k|} x_n x_{n+|k|} \tag{2.9}$$

Selon le théorème d'ergodicité [36], les moyennes temporelles peuvent être remplacées par des moyennes statistiques. Alors on peut écrire l'équation (2.9) comme suit :

$$R(k) = E[x_n x_{n+k}] \tag{2.10}$$

Ou, $x_{n+k} = f_T^{(k)}(x_n)$ et la fonction de densité conjointe de (x_n, x_{n+k}) est $p(x_n, x_{n+k})$.

Supposons que : $x_n = x, x_{n+k} = y$ et $p(x, y) = p^*(x)\delta(y - f_T^{(k)}(x))$, alors

$$R(k) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x.y.p(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 x.p^*(x).f_T^{(k)}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x.f_T^{(k-1)}(f_T(x)) dx \quad (2.11)$$

En remplaçant (2.1) dans (2.11), l'équation (2.11) devient

$$R(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^a x.f_T^{(k-1)}(z_0) dx + \frac{1}{2} \int_a^1 x.f_T^{(k-1)}(z_1) dx \quad (2.12)$$

$$\text{Avec: } z_0 = \frac{2x - a + 1}{1 + a} \text{ et } z_1 = \frac{-2x + a + 1}{1 - a}.$$

En changeant la variable x dans (2.12) on obtient l'expression suivante

$$R(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(a+1)}{2} \cdot \left[\frac{(a+1)z_0 + (a-1)}{2} \right] f_T^{(k-1)}(z_0) dz_0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(a-1)}{2} \cdot \left[\frac{(a-1)z_1 + (a+1)}{2} \right] f_T^{(k-1)}(z_1) dz_1 \quad (2.13)$$

Après réarrangement des termes (2.13) devient :

$$R(k) = \left[\frac{(a+1)}{2} \right]^2 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} z_0 f_T^{(k-1)}(z_0) dz_0}_{R(k-1)} - \left[\frac{(a-1)}{2} \right]^2 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} z_1 f_T^{(k-1)}(z_1) dz_1}_{R(k-1)} + \frac{(a^2 - 1)}{4} \left[\underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} f_T^{(k-1)}(z_0) dz_0}_{\mu_x=0} - \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} f_T^{(k-1)}(z_1) dz_1}_{\mu_x=0} \right] \quad (2.14)$$

La fonction d'autocorrélation peut s'écrire sous la forme récursive par :

$$R(k) = aR(k-1) \quad (2.15)$$

La résolution de l'équation (2.15) conduit à la fonction d'autocorrélation

$$R(k) = R(0) \cdot a^{|k|} \quad (2.16)$$

La normalisation de (2.16) par rapport à son maximum en $k = 0$, c'est-à-dire $\rho(k) = \frac{R(k)}{R(0)}$,

donne la fonction d'autocorrélation normalisée

$$\rho(k) = a^{|k|} \quad (2.17)$$

2.2.4 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance normalisée est définie comme étant la transformée de Fourier à temps discret de la fonction d'autocorrélation normalisée :

$$s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \rho(k) e^{-j\omega k} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(\omega)} \quad (2.18)$$

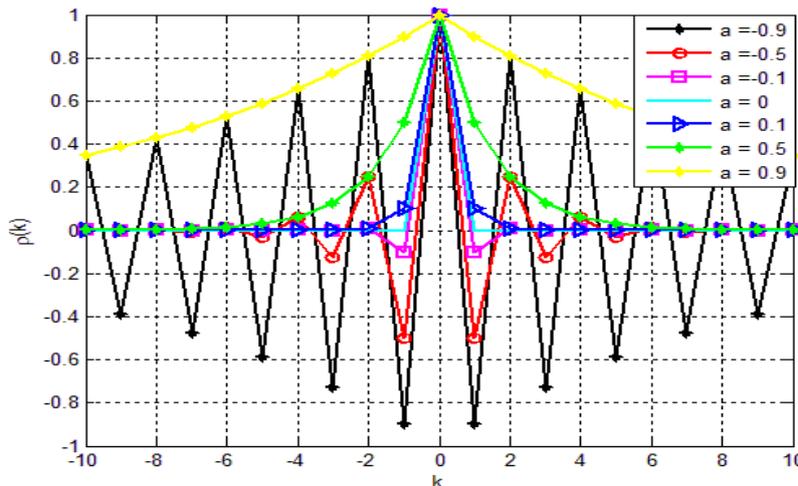


Figure 2.4 a fonction d'autocorrélation des signaux chaotiques générés par la transformation Skew Tent

La Figure 2.4 a présente les courbes de la fonction d'autocorrélation normalisée pour différentes valeurs de a . Nous observons qu'il y a un changement d'allure de $\rho(k)$ lorsque a varie dans l'intervalle $[-1,1]$. $\rho(k)$ décroît de façon monotone pour les valeurs positives de a , possède des oscillations pour les valeurs négatives de a et à une forme impulsive pour la valeur nulle de a .

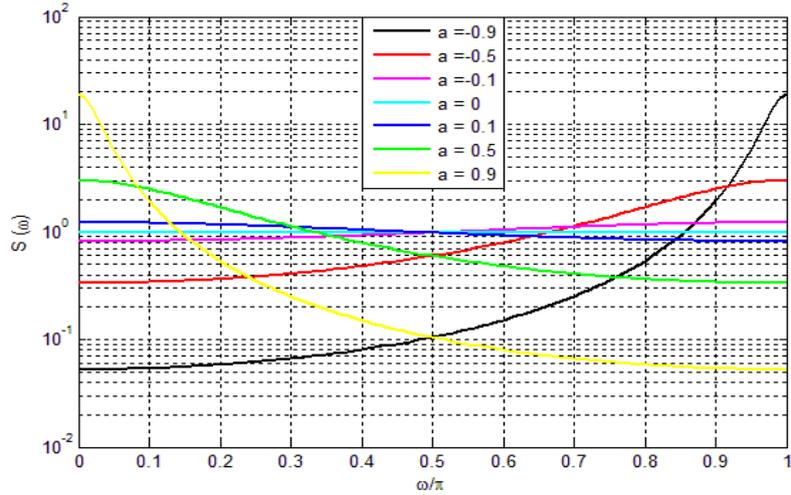


Figure 2.4 b densité spectrale de puissance des signaux chaotiques générés par la transformation Skew Tent

La Figure 2.4 b présente la densité spectrale de puissance pour différentes valeurs de a . Le spectre change d'allure passe-bas au passe-haut en passant par un spectre à large bande lorsque a varie dans l'intervalle $[-1, 1]$. La densité spectrale de puissance des signaux générés par des transformations pour des valeurs opposées de a présente une symétrie par rapport à $\omega = \frac{\pi}{2}$

2.3 Transformation skew tent multimodale

Soit $a_0 = -1 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = 1$ des nombres réelles, la transformation skew tent multimodale tel que définie par Sahnoune et berkani [48] (voir Figure 2.5) est une transformation unidimensionnelle à l modes définie par $f_m : I \rightarrow I$, $I = [-1, 1]$:

$$f_m(x) = \begin{cases} f_{2j} = \frac{2x - (a_{2j+1} + a_{2j})}{(a_{2j+1} - a_{2j})}, & \text{if } x \in [a_{2j}, a_{2j+1}] \\ f_{2j+1} = \frac{-2x + (a_{2j+2} + a_{2j+1})}{(a_{2j+2} - a_{2j+1})}, & \text{if } x \in [a_{2j+1}, a_{2j+2}] \end{cases}, j = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1 \quad (2.19)$$

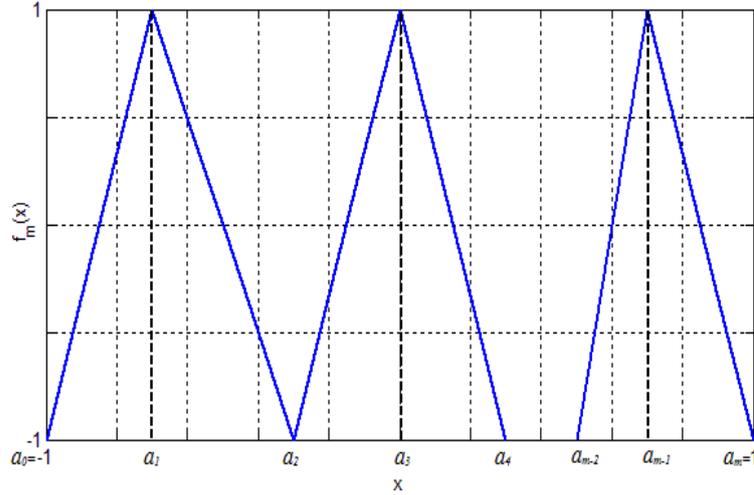


Figure 2.5 Transformation skew tent multimodale

2.3.1 Densité de probabilité

La densité de probabilité de $f_m(x)$ est le point fixe de leur opérateur de Frobenius-Perron.

$$P_{f_m} p(x) = \frac{d}{dx} \int_{f_m^{-1}([-1, x])} p(u) du = \sum_{j=0}^{m-1} \left| \frac{d}{dx} f_j^{-1}(x) \right| p(f_j^{-1}(x)) \quad (2.20)$$

ou $f_m^{-1}([-1, x])$, la transformation inverse de l'intervalle $[-1, x]$ (voir Figure 2.6).

$$f_m^{-1}([-1, x]) = \bigcup_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \left([a_{2j}, x_{2j}] ; [x_{2j+1}, a_{2j+2}] \right) \quad (2.21)$$

avec:

$$x_{2j} = f_{2j}^{-1}(x) = \frac{(a_{2j+1} - a_{2j})x + (a_{2j+1} + a_{2j})}{2} \quad (2.22)$$

et

$$x_{2j+1} = f_{2j+1}^{-1}(x) = \frac{-(a_{2j+2} - a_{2j+1})x + (a_{2j+2} + a_{2j+1})}{2} \quad (2.23)$$

Le remplacement de (2.22) et (2.23) dans (2.20), donne

$$P_{f_m} p(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \left[(a_{2j+1} - a_{2j}) p(x_{2j}) + (a_{2j+2} - a_{2j+1}) p(x_{2j+1}) \right] \quad (2.24)$$

Pour $p(x) = \frac{1}{2}$, on à

$$P_{f_m} p(x) = \frac{1}{4} \left(\underbrace{1 + a_2 + a_4 - a_2 + \dots - a_{m-2} + 1}_{=2} \right) = \frac{1}{2} = p(x) \quad (2.25)$$

La valeur moyenne des signaux générés par $f_m(x)$ est définie par :

$$\mu_x = \int_{-1}^1 x p^*(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad (2.26)$$

Et leur puissance est donné par

$$\sigma_x^2 = \int_{-1}^1 x^2 p^*(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (2.27)$$

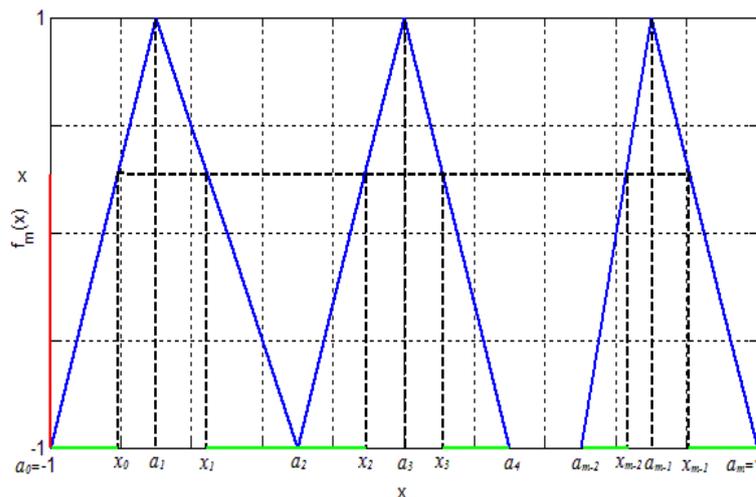


Figure 2.6 transformation skew tent multimodale inverse de l'intervall [-1; x]

2.3.2 Exposant de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log \left(\left| f_m'(x_n) \right| \right) = \int_{-1}^1 \log \left(\left| \frac{df_m(x)}{dx} \right| \right) p^*(x) dx \quad (2.28)$$

La solution de (2.28), donne le résultat ci-dessous :

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log \left(\left| f_m'(x_n) \right| \right) = \int_{-1}^1 \log \left(\left| \frac{df_m(x)}{dx} \right| \right) p^*(x) dx \quad (2.29)$$

$$\lambda = \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \int_{a_{2j}}^{a_{2j+1}} \frac{1}{2} \log \left(\left| \frac{2}{a_{2j+1} - a_{2j}} \right| \right) dx + \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \int_{a_{2j+1}}^{a_{2j+2}} \frac{1}{2} \log \left(\left| \frac{2}{a_{2j+2} - a_{2j+1}} \right| \right) dx \quad (2.30)$$

$$\lambda = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(a_{j+1} - a_j)}{2} \log \left(\left| \frac{2}{a_{j+1} - a_j} \right| \right) \quad (2.31)$$

L'exposant de Lyapunov est toujours positif, donc $f_m(x)$ génère des signaux chaotiques.

2.3.3 Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation du processus unidimensionnel à temps discret $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, généré par l'itération de (2.19) est alors donnée par [47]

$$R(k) = \int_{-1}^1 x \cdot p^*(x) \cdot f_m^{(k)}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \cdot f_m^{(k-1)}(f_m(x)) dx \quad (2.32)$$

En remplaçant (2.19) dans (2.32), l'équation (2.32) devient

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \left[\int_{a_{2j}}^{a_{2j+1}} x f_m^{(k-1)}(z_{2j}) dx + \int_{a_{2j+1}}^{a_{2j+2}} x f_m^{(k-1)}(z_{2j+1}) dx \right] \quad (2.33)$$

$$\text{avec, } z_{2j} = \frac{2x - (a_{2j+1} + a_{2j})}{(a_{2j+1} - a_{2j})} \text{ et } z_{2j+1} = \frac{-2x + (a_{2j+2} + a_{2j+1})}{(a_{2j+2} - a_{2j+1})}$$

En changeant la variable x dans (2.33) on obtient l'expression suivante

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{(a_{2j+1} - a_{2j})}{2} \left[\frac{(a_{2j+1} - a_{2j})z_{2j} + (a_{2j+1} + a_{2j})}{2} \right] f_m^{(k-1)}(z_{2j}) dz_{2j} -$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \int_{-1}^1 \frac{-(a_{2j+2} - a_{2j+1})}{2} \left[\frac{-(a_{2j+2} - a_{2j+1})z_{2j+1} + (a_{2j+2} + a_{2j+1})}{2} \right] f_m^{(k-1)}(z_{2j+1}) dz_{2j+1} \quad (2.34)$$

Après réarrangement des termes (2.34) devient :

$$\begin{aligned}
R(k) &= \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{(a_{2j+1} - a_{2j})}{2} \right]^2 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} z_{2j} f_m^{(k-1)}(z_{2j}) dz_{2j}}_{R(k-1)} - \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{(a_{2j+2} - a_{2j+1})}{2} \right]^2 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} z_{2j+1} f_m^{(k-1)}(z_{2j+1}) dz_{2j+1}}_{R(k-1)} + \\
&\sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \frac{(a_{2j+1}^2 - a_{2j}^2)}{4} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} f_m^{(k-1)}(z_{2j}) dz_{2j}}_{\mu_X=0} + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \frac{(a_{2j+2}^2 - a_{2j+1}^2)}{4} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{2} f_m^{(k-1)}(z_{2j+1}) dz_{2j+1}}_{\mu_X=0} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation a la forme récursive suivante :

$$R(k) = \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{(a_{2j+1} - a_{2j})}{2} \right]^2 - \left[\frac{(a_{2j+2} - a_{2j+1})}{2} \right]^2 \right\} R(k-1) \quad (2.36)$$

la résolution de (2.36), donne l'expression générale de la fonction d'autocorrélation :

$$R(k) = \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{(a_{2j+1} - a_{2j})}{2} \right]^2 - \left[\frac{(a_{2j+2} - a_{2j+1})}{2} \right]^2 \right\}^{|k|} R(0) \quad (2.37)$$

La normalisation de (2.37) par rapport à son maximum en $k = 0$, c'est-à-dire $\rho(k) = \frac{R(k)}{R(0)}$,

donne la fonction d'autocorrélation normalisée

$$\rho(k) = \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{(a_{2j+1} - a_{2j})}{2} \right]^2 - \left[\frac{(a_{2j+2} - a_{2j+1})}{2} \right]^2 \right\}^{|k|} \quad (2.38)$$

2.3.4 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance normalisée est définie comme étant la transformée de Fourier à temps discret de la fonction d'autocorrélation normalisée :

$$s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \rho(k) e^{-j\omega k} = \frac{1 - \phi^2}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos(\omega)} \quad (2.39)$$

$$\phi = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{(a_{2j+1} - a_{2j})}{2} \right]^2 - \left[\frac{(a_{2j+2} - a_{2j+1})}{2} \right]^2 \quad (2.40)$$

Ces résultats sont similaires à ceux obtenus dans [43]. Les équations (8) et (9) obtenues par Eisenkraft et al. [43] sont respectivement similaires à f_{2^j} et $f_{2^{j+1}}$. De plus, l'équation (11) peut être réécrite

$$R(k) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \left[\left(\frac{a_k(i) - b_k(i-1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_k(i) - b_k(i)}{2} \right)^2 \right] \quad (2.41)$$

La normalisation de (2.41) conduit à

$$\rho_u(k) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \left[\left(\frac{a_k(i) - b_k(i-1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_k(i) - b_k(i)}{2} \right)^2 \right] = (\alpha)^k \quad (2.42)$$

ce qui est similaire à l'équation (2.40).

Pour la transformation multimodale, nous sélectionnons arbitrairement les $\{a_j\}_{j=0}^{m-1}$, où m est le nombre de branches. Cependant, pour la transformation unimodale les $a_{k+1}(\square)$ sont les racines de $f_2^k(x) = \alpha$. (Voir Figure 2 [43]).

L'évolution de la transformation unimodale (voir Figure 1 [43]) d'une itération à l'autre est : $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^k$, ainsi, la $K^{\text{ième}}$ itération de la transformation unimodale (voir Figure 1d [43]) donne une transformation $2^{(k-1)}$ -modale tandis que l'évolution de la transformation multimodale d'une itération à l'autre est : $m^1, m^2, m^3, \dots, m^k$.

Nous distinguons deux cas de figure :

1^{er} cas $m = 2^l$: l'évolution de la transformation $2^{(k-1)}$ -modale d'une itération à l'autre est $2^{1l}, 2^{2l}, 2^{3l}, \dots, 2^{kl}$. Dans le cas où $\rho_u(l) = \phi$ on peut écrire la fonction d'autocorrélation normalisée de la transformation $2^{(l-1)}$ -modale comme suit :

$$\rho(k) = (\rho_u(l))^k = (\alpha)^{k \cdot l} \quad (2.43)$$

où ρ_u est la fonction d'autocorrélation normalisée de la transformation unimodale. Cette équation prouve que plus le nombre de modes est élevé, plus la fonction d'autocorrélation est proche d'une impulsion unitaire. Le processus généré par une transformation $2^{(l-1)}$ -

modale est statistiquement identique à un processus généré par une transformation unimodale et échantillonné à $k \cdot l, k = 1, 2, \dots$

2^{ème} cas $m \neq 2^l$: le processus généré par la transformation multimodale ne peut pas être dérivé du processus généré par la transformation unimodale.

2.3.4 Cas particulier

Cette section est consacrée à l'analyse de certains cas particuliers de l'expression (2.38). Nous considérons la transformation bimodale et la transformation multimodale symétrique.

2.3.4.1 transformation bimodale

Dans cette section nous considérons la transformation bimodale (voir Figure 2.7), avec $a_0 = -1, a_1 = -a, a_2 = 0, a_3 = b, a_4 = 1; a, b \in [0, 1], a, b \neq 0$

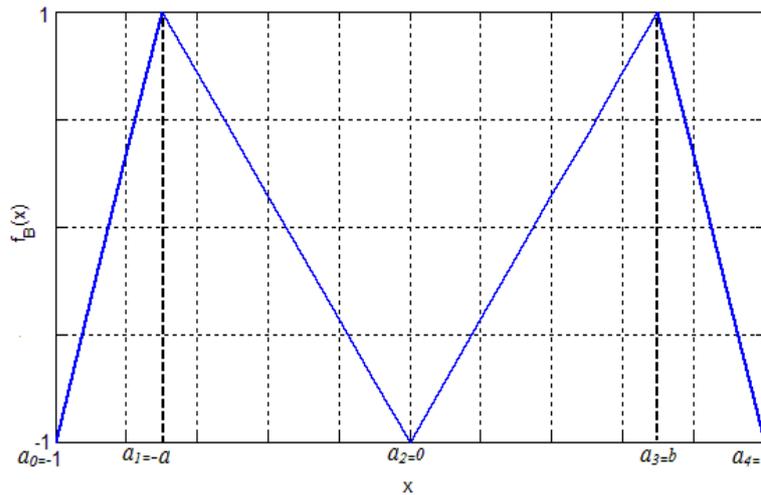


Figure 2.7 Transformation skew tent Bimodal

Le remplacement de a_j dans (2.38) conduit à

$$\phi = \sum_{j=0}^1 \left[\frac{(a_{2j+1} - a_{2j})}{2} \right]^2 - \left[\frac{(a_{2j+2} - a_{2j+1})}{2} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[(1-a)^2 - a^2 + b^2 - (1-b)^2 \right] = \frac{(b-a)}{2} \quad (2.44)$$

Supposons que $b - a = c$, la fonction d'autocorrélation de la transformation bimodale est donnée par :

$$\rho(k) = \left(\frac{c}{2} \right)^{|k|} \quad (2.45)$$

En prenant la DTFT de (2.45), on obtient la densité spectrale de puissance normalisée.

$$s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \rho(k) e^{-j\omega k} = \frac{4-c^2}{4+c^2-4c \cos(\omega)} \quad (2.46)$$

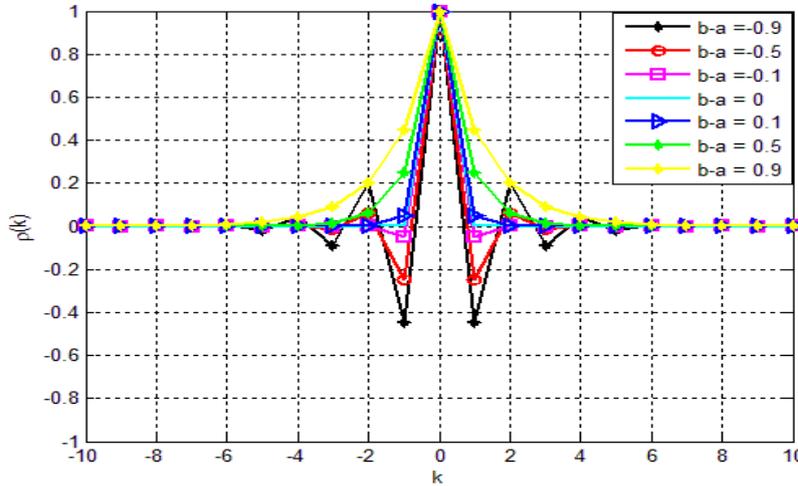


Figure 2.8 a Fonction d'autocorrélation des signaux chaotiques générés par la transformation bimodale

Figure 2.8 a présente la forme de la fonction d'autocorrélation pour différentes valeurs de c . La forme de $\rho(k)$ change quand c varie dans la plage $[-1,1]$. $\rho(k)$ a une forme oscillatoire amortie pour des valeurs négatives de c , des déclinaisons monotones pour des valeurs positives et a une forme impulsive pour la valeur nulle de c .

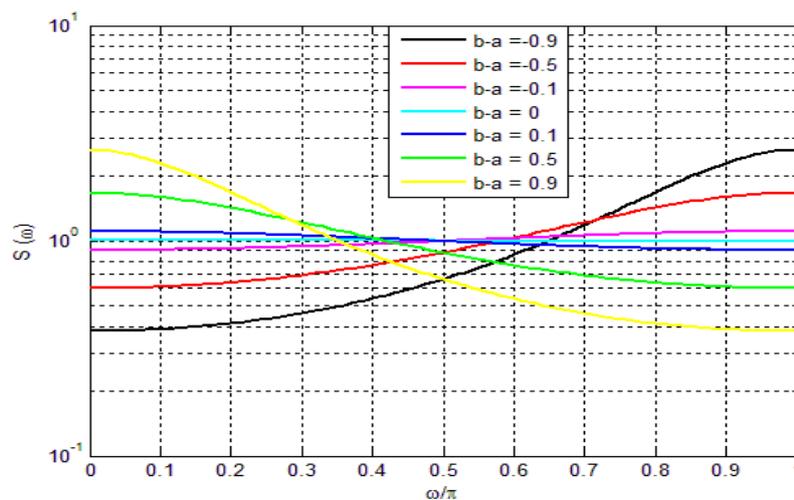


Figure 2.8 b Densité spectrale de puissance des signaux chaotiques générés par la transformation bimodale

à partir de la Figure 2.8 b, nous observons l'influence de c sur la forme de la densité spectrale de puissance. Il convient de noter que le spectre du signal admet une caractéristique passe-haut pour c négatif, une caractéristique passe-bas pour c positif et une caractéristique passe-tout pour $c = 0$. La densité spectrale de puissance des signaux générés par une telle transformation pour des valeurs opposées de c présente une symétrie par rapport à $\omega = \frac{\pi}{2}$

2.3.4.2 Transformation multimodale symétrique

Considérons la transformation multimodale avec $(a_{2j+1} - a_{2j}) = (a_{2j+2} - a_{2j+1})$, donc la fonction d'autocorrélation a une forme impulsive et donnée par

$$\begin{cases} \rho(k) = \delta(k) \\ s(\omega) = 1 \end{cases} \quad (2.47)$$

Les transformations symétriques possèdent les propriétés statistiques et spectrales du processus de bruit blanc.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la transformation Skew Tent et la transformation Skew Tent multimodale. Nous dérivons la densité de probabilité et l'exposant de Lyapunov. De plus nous déterminons les expressions analytiques de la fonction d'auto-corrélation et de la densité spectrale de puissance des signaux chaotiques générés par ces transformations. Nos résultats démontrent que le processus généré par une transformation skew tent multimodale peut être généré par échantillonnage du processus généré par la transformation skew tent. Nos résultats révèlent que les signaux générés par une transformation skew tent multimodale ont des propriétés spectrales similaires à ceux générés par une transformation skew tent unimodale.

Chapitre 3

Analyse des Signaux Issus des Transformations Bidimensionnelles

3.1 Introduction

En 1963, Lorenz proposa un système de trois équations différentielles couplées, plus tard connu sous le nom de flux de Lorenz. Le flux de Lorenz a été introduit pour la première fois dans la prévision météorologique. Cependant, d'autres explorations du flux de Lorenz ont révélé plus d'avantages. Pour illustrer le chaos déterministe, le flux de Lorenz a été largement exploré et étudié. Motivé par les équations de Lorenz, Hénon a introduit une transformation simple en deux dimensions en 1976 [49]. Grâce à sa forme simple, la transformation de Hénon nous a fourni un moyen de mener une exploration plus détaillée de la dynamique chaotique. Bien que la transformation de Hénon soit présentée comme un modèle mathématique, elle correspond à la dynamique de certains systèmes physiques Biham et al. [50].

En 1978, Lozi a présenté dans une courte note [51] une transformation en deux dimensions dont les équations et les attracteurs ressemblent à ceux de la célèbre transformation de Hénon [49]. Simplement, le terme quadratique dans ce dernier est remplacé par une fonction linéaire par morceaux dans le premier. Depuis lors, ces transformations ont été étudiées dans de nombreux travaux tels que [52-57]. Cependant, il existe quelques travaux sur les propriétés statistiques et spectrales de ces transformations. Dans ce chapitre, les propriétés statistiques et spectrales de ces transformations ont été étudiées numériquement.

3.2 Transformation de Hénon

En 1969, Hénon a montré dans [58] que les propriétés essentielles des systèmes dynamiques définies par des équations différentielles peuvent être conservées par des transformations soigneusement définies. Inspiré par la même idée, Hénon a proposé la célèbre transformation en deux dimensions comme une approche réduite pour étudier la dynamique du système de Lorenz. La transformation de Hénon est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = H_{(a,b)} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, n \geq 0 \quad (3.1)$$

Avec $(x_0, y_0)^T$ conditions initiales, et $H_{(a,b)} : \square^2 \rightarrow \square^2$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Partant d'un point du plan de coordonnées $(x_0, y_0)^T$ on peut calculer les coordonnées $(x_1, y_1)^T$ du point suivant, et ainsi de suite.

a et b étant deux paramètres réels appelés paramètres de bifurcation, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Pour les valeurs typiques $a = 1.4$ et $b = 0.3$, le système présente un comportement chaotique (voir Fig 5).

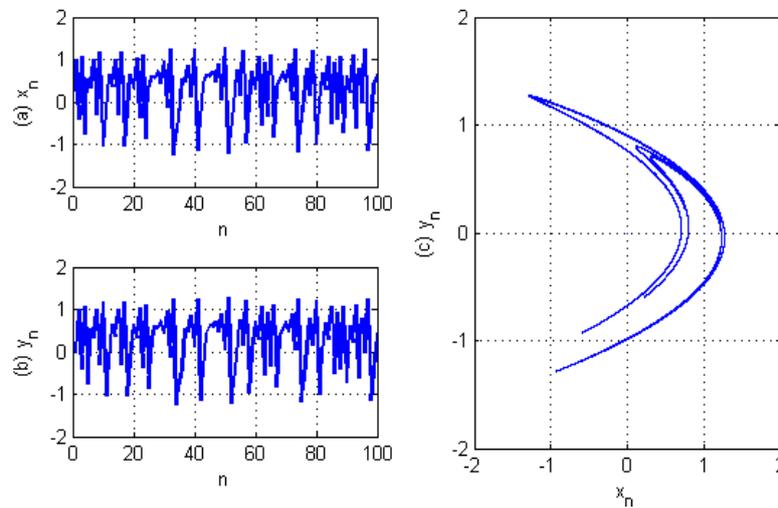


Figure 3.1 : transformation de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$: (a) et (b) Orbites

$\{(x_n, y_n)^T, n = 0, 1, \dots\}$ partant du point $(x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$, (c) attracteur chaotique.

Prenant note que lorsque $b = 0$, l'application de Hénon se réduit à la transformation quadratique unidimensionnelle [52] donnée par :

$$Q(x) = 1 - ax^2 \quad (3.3)$$

3.2.1 Fonction densité de probabilité

La PDF des séquences chaotiques générées par itération de la transformation de Hénon avec pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ est démontrée dans la Figure 3.2, qui est non uniforme.

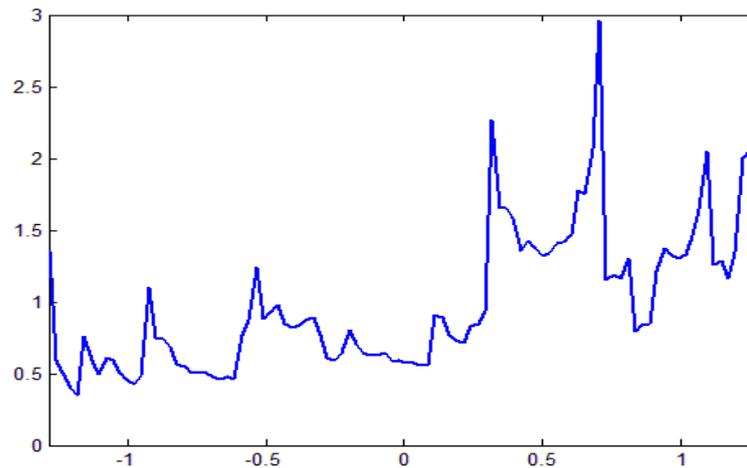


Figure 3.2 densité d'états de la transformation de Hénon pour 1000000 valeurs itérées

3.2.2 Aspect aléatoire

L'aspect aléatoire à long terme est une caractéristique principale du chaos : l'orbite du système dans l'espace des phases ne converge pas vers les points fixes, vers les orbites périodiques ou quasi-périodiques lorsque le temps tend vers l'infini.

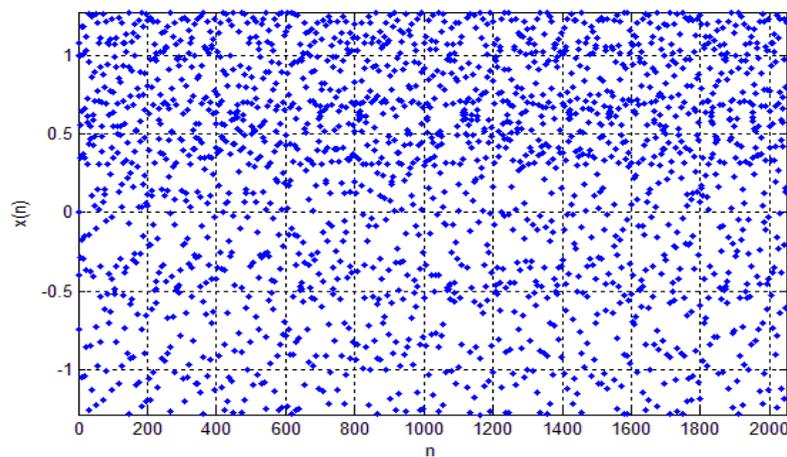


Figure 3.3 représentation graphique de l'aspect aléatoire à long terme de la transformation de Hénon.

3.2.3 Matrice jacobienne

La matrice jacobienne ici a pour expression [59] :

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égal à $|J| = -b$, avec $0 < b < 1$.

3.2.4 Points fixes

Cette application a deux points fixes [33].

A partir de la relation $H_{(a,b)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on peut calculer les points fixes de l'application de

Hénon

$$x_1 = \frac{b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_1 = bx_1 \quad (3.5)$$

$$x_2 = \frac{b-1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_2 = bx_2 \quad (3.6)$$

Le déterminant $(1-b)^2 + 4a$ est négative si $a < -\frac{(1-b)^2}{4} = -0.1225$; dans ce cas il n'y a pas des points fixes.

3.2.5 Stabilité

La matrice jacobienne J a pour valeurs propres, les valeurs données par :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2 x^2 + b} \quad (3.7)$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieure à 1, tandis que la plus grande est inférieure, égale ou supérieur à 1 suivant que $|x|$ inférieure, égale ou supérieur à $\frac{(1-b)}{2a}$, on en déduit que le

point fixe (x_2, y_2) est un point selle. L'autre point fixe est stable si $a < \frac{3(1-b)^2}{4} = 0.3675$.

3.2.6 Diagramme de bifurcation

Pour étudier l'évolution de la transformation de Hénon, nous présentons le diagramme de bifurcation pour différentes valeurs du paramètre a lorsque $b = 0.3$ (voir Figure 3.4). Pour $a \in [0, 1.4]$ la sortie de ce système dynamique est un nombre réel compris dans l'intervalle $[-1.5, 1.5]$.

La partie stable se situe dans l'intervalle $[0, 0.3675]$. Une orbite périodique de période deux apparaît à $a = 0.3675$ et de période quatre à $a = 0.9$. La période sera doublée en fonction de l'augmentation du paramètre a , c'est-à-dire, 8, 16, 32, On parle alors de cascade de doublement de période, et au-delà de cette cascade, l'orbite périodique disparaît au profit de l'orbite chaotique si le paramètre $a = 1.4$.

L'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$; $b = 0.3$ est représenté dans la Figure 3.1(c).

La structure de l'attracteur se répète identiquement à elle-même aux échelles d'observation successives, alors l'attracteur de Hénon est une structure fractale itérée.

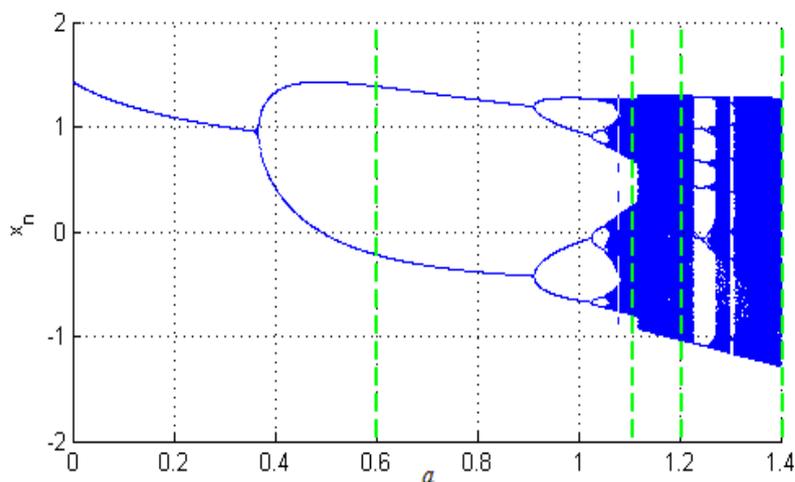


Figure 3.4 Diagramme de bifurcation de Hénon par rapport à a pour $b = 0.3$.

3.2.7 Exposant de Lyapunov

On a pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$, l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov $h_1 = 0.42205$; $h_2 = -1.626$. La Figure 3.5 représente la variation de l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre de bifurcation pour l'application de Hénon.

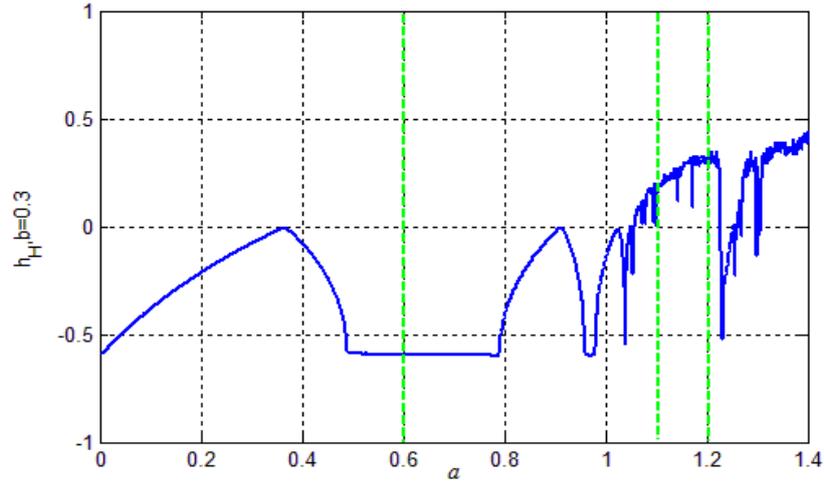


Figure 3.5 exposent de Lyapunov pour la transformation de Hénon par rapport à a pour $b = 0.3$.

3.3 Transformation de Lozi

Dans le but de simplifier l'attracteur de Hénon, René Lozi a introduit dans une courte note [51] une application bidimensionnelle dont les équations et les attracteurs ressemblent à ceux de la célèbre application de Hénon.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = L_{(a,b)} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, n \geq 0 \quad (3.8)$$

Avec $(x_0, y_0)^T$ conditions initiales, et $L_{(a,b)} : \square^2 \rightarrow \square^2$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - a|x| + y \\ bx \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Pour les paramètres $a = 1.7$ et $b = 0.5$ la suite de points itérés par l'application de Lozi converge vers un attracteur chaotique représenté par la Figure 3.6 (c).

Prenant note que lorsque $b = 0$, la transformation de Lozi se réduit à la transformation de tente unidimensionnelle [59] donnée par :

$$T(x) = 1 - a|x| \quad (3.10)$$

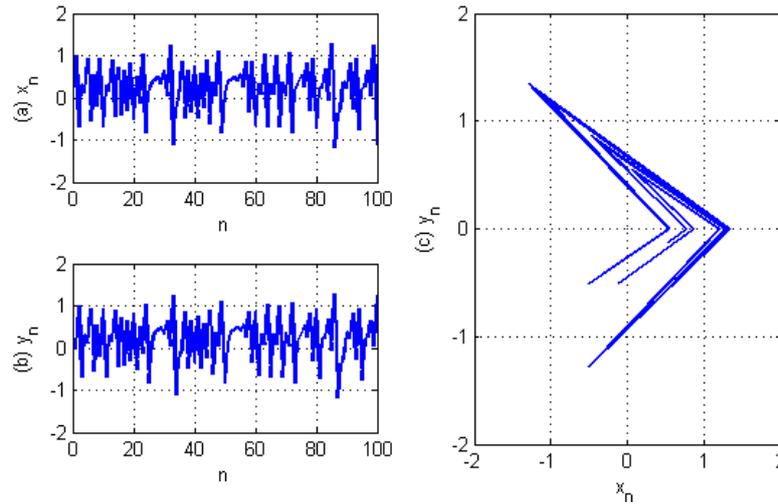


Figure 3.6 : transformation de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$: (a) et (b) Orbites $\{(x_n, y_n)^T, n = 0, 1, \dots\}$ partant du point $(x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$, (c) attracteur chaotique.

3.3.1 Fonction densité de probabilité

La Figure 3.7 illustre la densité de probabilité des séquences chaotiques générées par itération de la transformation de Lozi avec $a = 1.7$ et $b = 0.5$, qui est également non uniforme.

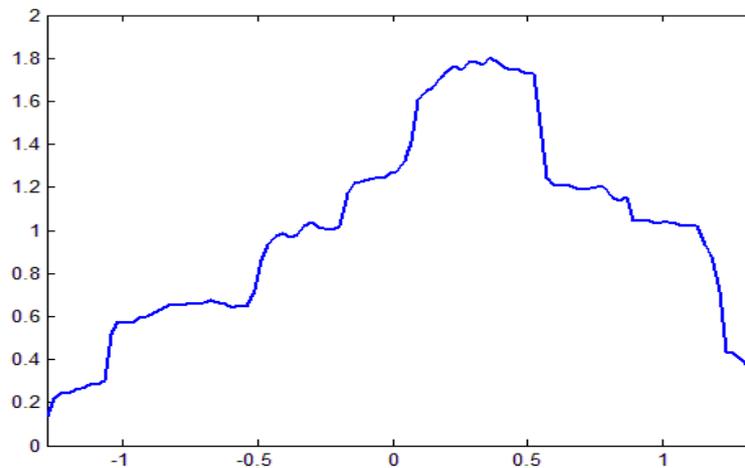


Figure 3.7 densité d'états de la transformation de Lozi pour 1000000 valeurs itérées

3.3.2 Aspect aléatoire

La Figure 3.8 présente l'aspect aléatoire à long terme des trajectoires issues de la transformation de Lozi avec $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

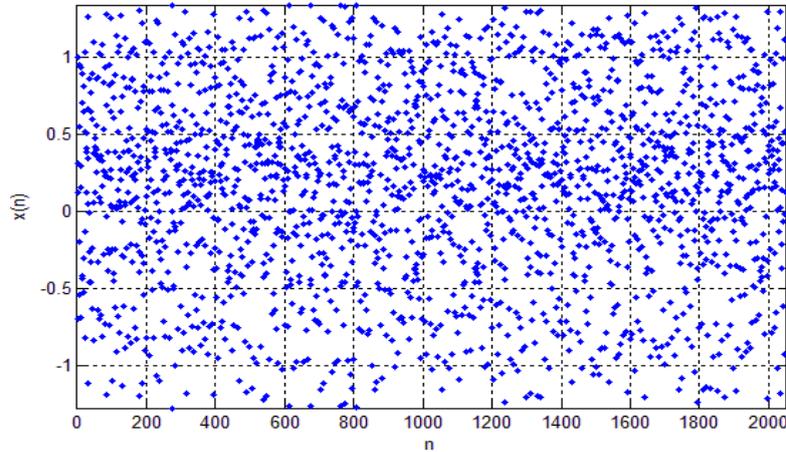


Figure 3.8 représentation graphique de l'aspect aléatoire à long terme de la transformation de Lozi

3.3.3 Matrice jacobienne

La matrice jacobienne de correspondance à l'application de Lozi a pour expression :

$$J = \begin{pmatrix} -a \frac{\partial |x|}{\partial x} & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égal à $|J| = -b$.

3.3.4 Points fixes

Cette application possède deux points fixes hyperbolique définis par :

$$\begin{cases} p_1 = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b} \right), & \text{si } b < a+1 \\ p_2 = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b} \right), & \text{si } b < -a+1 \end{cases} \quad (3.12)$$

On peut déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne [33]:

3.3.5 La Stabilité

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est :

$$\begin{aligned} \lambda^2 + a\lambda - b & \text{ pour } p_1 \\ \lambda^2 - a\lambda - b & \text{ pour } p_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3.5.1 Stabilité de p_1

Pour $b > -\frac{a^2}{4}$, les valeurs propres sont des réelles

Pour $b < -\frac{a^2}{4}$, les valeurs propres sont des complexes.

Elles sont de module inférieur à 1 si :

$b > -1, b < a+1, b < 1-a$. Et le point fixe p_1 est stable.

Les valeurs propres sont de module supérieur à un si :

$b < -1, b < a+1, b < 1-a$. Et le point fixe p_1 est instable.

$|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si :

$b > a+1$ et $b > 1-a$, alors le point fixe p_1 est une point selle ou col.

3.3.5.2 Stabilité de p_2

L'équation caractéristique pour p_2 est défini par $\lambda^2 - a\lambda - b$, alors $\Delta = a^2 + 4b$.

L'existence de p_2 est pour $b > 1-a$, alors $\Delta = a^2 + 4b > 0$ et les valeurs propres sont toujours des réelles. Elles sont de modules supérieurs à un si :

$b > 1-a$ et $b > a+1$, et le point fixe p_2 est instable.

$|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si :

$b > a+1$ et $b > 1-a$, alors le point fixe p_2 est une point selle ou col.

3.3.6 Diagramme de bifurcation

Contrairement au cas de l'application de Hénon, la route vers le chaos par l'application de Lozi n'est pas une bifurcation de doublement de période. A $a=0.5$, le point fixe perd sa stabilité et la solution saute brusquement à une période stable de cycle 2 d'amplitude finie. Le cycle 2 reste stable jusqu'à ce que, à $a=1.5$, le système saute brusquement dans un attracteur chaotique à quatre bandes. Avec une augmentation supplémentaire de a , l'attracteur à quatre bandes subit une bifurcation homoclinique dans laquelle les quatre bandes fusionnent en deux et, finalement, en une seule bande (voir Fig 9).

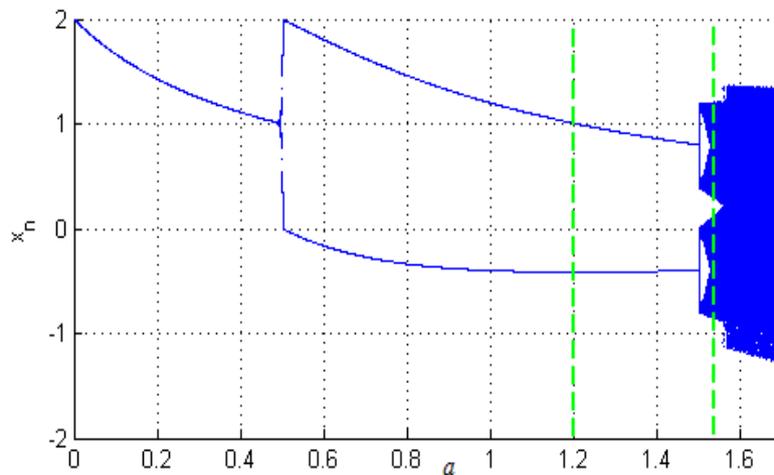


Figure 3.9 Diagramme de bifurcation de Lozi par rapport à a pour $b = 0.5$.

3.3.7 Exposant de Lyapunov

Pour $a=1.7$ et $b=0.5$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov $h_1 = 0.69314$ qui est positif, $h_2 = -1.204$. La Figure 3.10 représente la variation de l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre de bifurcation pour l'application de Lozi.

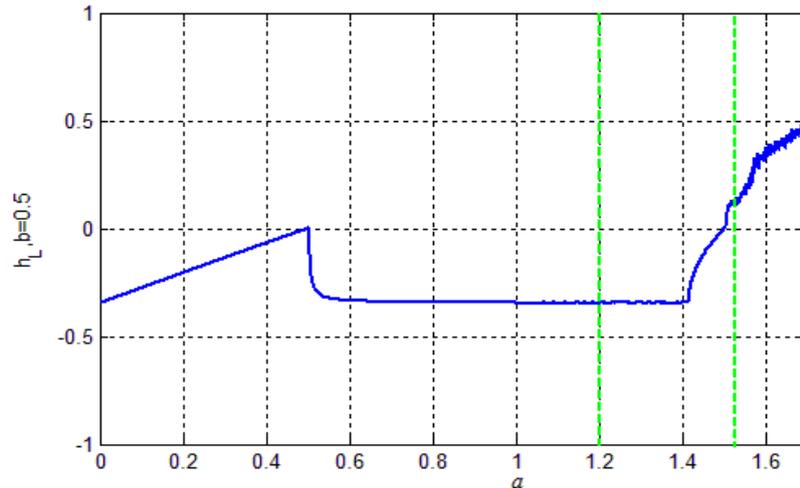


Figure 3.10 exposant de Lyapunov pour la transformation de Lozi par rapport à a pour $b = 0.5$.

3.3.8 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance

La méthode analytique détaillée dans le deuxième chapitre n'est pas applicable dans le calcul du spectre des transformations bidimensionnelles en raison de la densité invariante non uniforme de ces transformations.

Cette section est consacrée à l'étude des propriétés statistiques et spectrales des transformations (3.2), (3.9) par simulation numérique basée sur le logiciel Matlab. Nous présentons seulement les propriétés de la série x , les propriétés de la série y correspondantes sont similaires. La densité spectrale de puissance estimée est obtenue via la méthode de Welch avec $N = 5 \times 10^5$. Nos résultats numériques correspondant à différents paramètres de bifurcation sont résumés dans les figures 3.11, 3.12 et 3.13. Ces figures contiennent l'orbite, l'histogramme, l'attracteur, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance. Nous pouvons distinguer : le cycle périodique, l'attracteur chaotique à deux bandes et enfin l'attracteur chaotique à bande unique.

La Figure 3.11 montre le cas périodique (période 2) : (a) transformation de Hénon $(a, b) = (0.6, 0.3)$ et (b) transformation de Lozi $(a, b) = (1.2, 0.5)$, la distribution des points est donnée en deux points et la fonction d'autocorrélation des orbites est périodique. Les pics de la densité spectrale de puissance correspondent à la fréquence $\omega = \pi$ et à ses harmoniques.

Dans le cas des attracteurs chaotiques à deux bandes (voir Figure 3.12) : (a) transformation de Hénon $(a, b) = (1.085, 0.3)$ et (b) transformation de Lozi $(a, b) = (1.53, 0.5)$, la distribution

des points est donnée à deux intervalles et les points d'une orbite alternent entre deux attracteurs. La fonction d'autocorrélation à une forme oscillatoire amortie lente et les pics à bande étroite se distinguent à la fréquence $\omega = \frac{\pi}{2}$ et ses harmoniques dans la densité spectrale de puissance.

Dans le cas d'un attracteur chaotique à une seule bande (voir Figure 3.13) : (a) transformation de Hénon $(a,b) = (1.4, 0.3)$ et (b) transformation de Lozi $(a,b) = (1.7, 0.5)$, les points sont répartis dans un intervalle unique, les deux pièces ont fusionné pour former un attracteur monobloc et la fonction d'autocorrélation a une forme oscillatoire amortie non impulsif. Les pics de fréquences ont disparu et les orbites des derniers attracteurs ont des propriétés passe-haut.

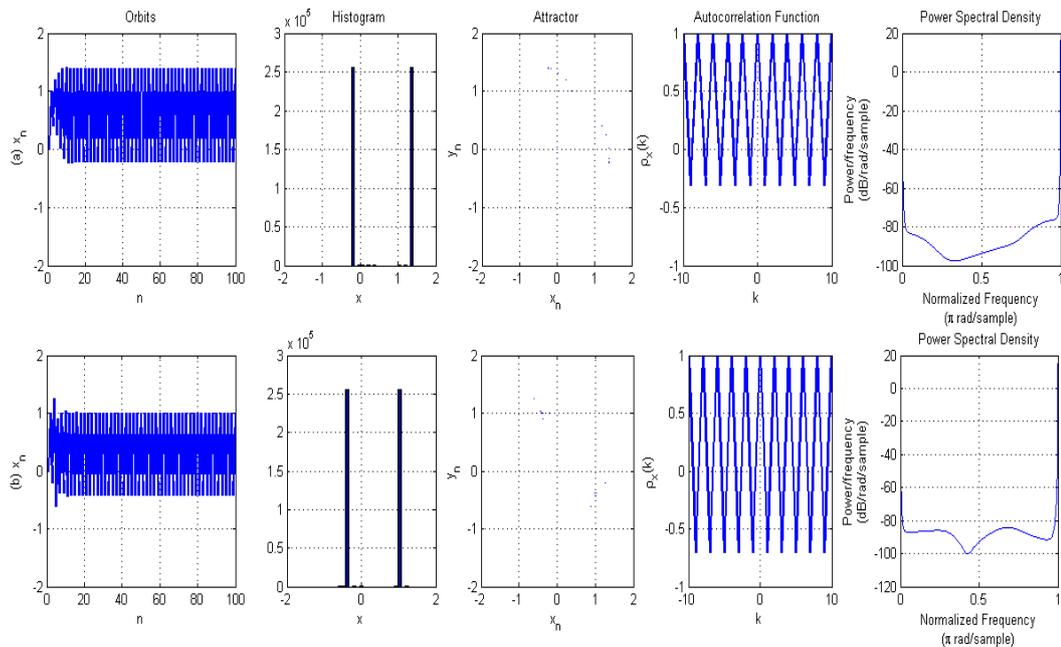


Figure 3.11 Orbites, histogramme, attracteur, fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance des orbites de (a) application de Hénon $(a,b) = (0.6, 0.3)$, (b) application de Lozi $(a,b) = (1.2, 0.5)$.

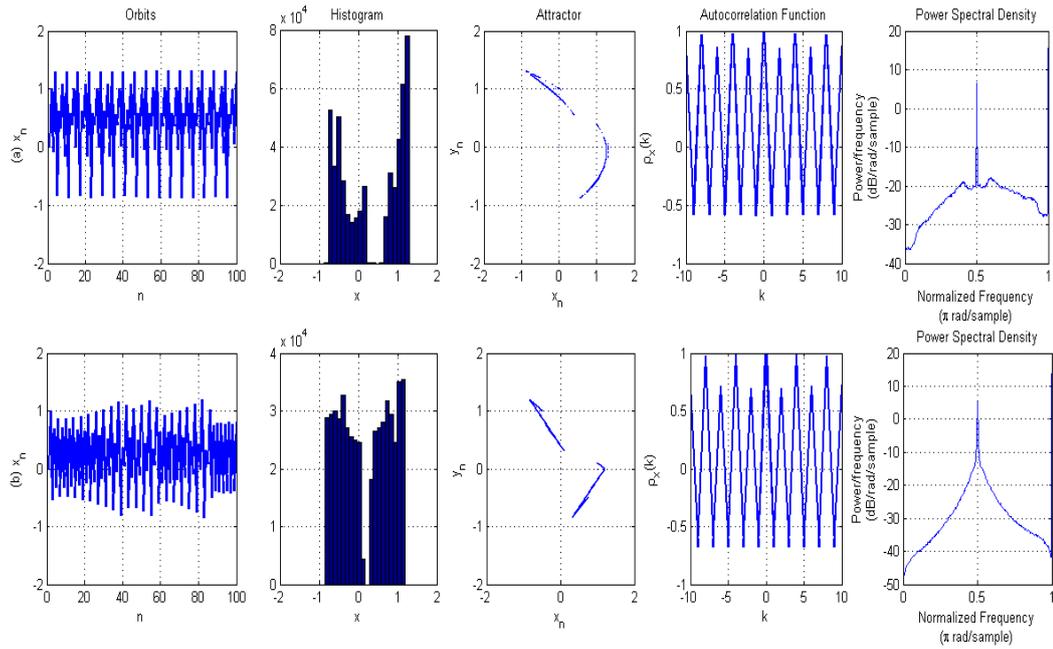


Figure 3.12 Orbites, histogramme, attracteur, fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance des orbites de (a) application de Hénon $(a,b) = (1.085, 0.3)$, (b) application de Lozi $(a,b) = (1.53, 0.5)$.

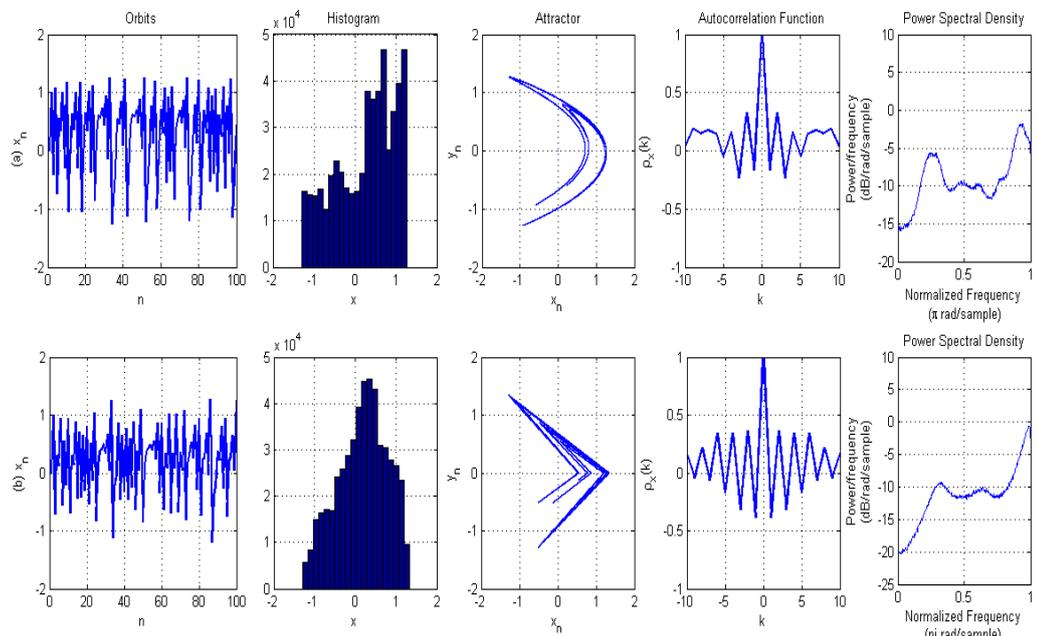


Figure 3.13 Orbites, histogramme, attracteur, fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance des orbites de (a) application de Hénon $(a,b) = (1.4, 0.3)$, (b) application de Lozi $(a,b) = (1.7, 0.5)$.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les transformations bidimensionnelles. Nous avons analysé à travers des simulations numériques la densité de probabilité invariante, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance des signaux générés par ces transformations. Les simulations suggèrent que ces transformations ayant des densités invariantes non uniformes, peuvent être utilisées pour générer des signaux chaotiques à bande étroite et passe-haut, ce qui peut être pertinent pour les communications chaotiques.

Chapitre 4

Conception d'un Entrelaceur Chaotique pour Turbo-Code

4.1 Introduction

Les turbo-codes ont été introduits en 1993 par Berrou, Glavieux et Thitimajshima dans leur article révolutionnaire " Near Shannon limit error-correcting coding and decoding : Turbo-codes " [60]. L'article présentait plusieurs idées et résultats dans le domaine du codage de canal, des résultats d'abord considérés avec doutes dans la communauté du codage de canal, mais actuellement impliqué dans de nombreuses normes internationales. Les résultats de performance présentés étaient significativement meilleurs que ce qui avait été vu précédemment et, plus important, de ce qui était prévu. En fait, l'article présentait des résultats inférieurs à 1 dB au-dessus de la limite inférieure prévue par Shannon.

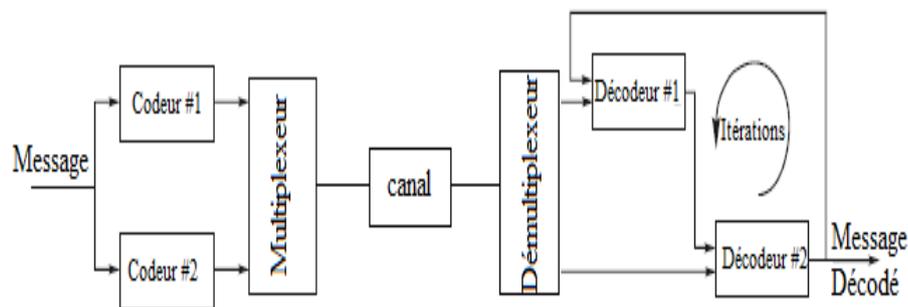


Figure 4.1 schéma de principe du turbo-codage

Berrou et al. [60] ont apporté des contributions importantes à la fois au problème du choix des codes et au problème du décodage efficace. Le principe de base du turbo-codage est illustré à la Figure 4.1 Le même message est codé par deux codeurs. Le décodeur est divisé de manière correspondante en deux décodeurs séparés, chaque décodeur décode sa partie du mot code concaténé. Les décodeurs échangent des informations sur leurs résultats de décodage et coopèrent pour trouver le mot code correct. En utilisant des algorithmes de décodage itératifs, les auteurs ont comparé le processus itératif d'utilisation de la sortie d'une unité comme entrée dans la suivante avec la fonctionnalité d'un Turbo moteur à combustion. La définition des turbo-codes n'est pas précise, Il est possible de concaténer plusieurs codeurs en parallèle. Dans les recherches rapportées dans cette thèse nous nous référons exclusivement à la concaténation parallèle de deux codeurs récursifs systématiques

convolutifs (RSC) via un entrelaceur. La concaténation de deux codeurs récursifs via un entrelaceur apporte une solution à deux problèmes importants associés au codage : (1) la création de codes avec de bonnes propriétés de distance qui (2) peuvent être décodés de manière efficace, par décodage itératif. Les entrelaceurs peuvent être classés en deux grandes catégories : les entrelaceurs aléatoires et les entrelaceurs déterministes. Il a été démontré dans [60] que des performances proches de la limite de Shannon peuvent être atteintes avec des entrelaceurs aléatoires de grandes tailles, néanmoins ces entrelaceurs nécessitent une table d'entrelacement enregistrée dans le codeur et le décodeur. Les entrelaceurs déterministes peuvent éviter les tables d'entrelacement, car l'entrelacement et le désentrelacement peuvent être effectués de manière algorithmique. La conception d'un entrelaceur déterministe avec les performances d'un entrelaceur aléatoire (entrelaceur chaotique) est le sujet de ce chapitre.

4.2 Turbo-Codeur

La structure générale d'un turbo-codeur est composée de trois blocs de base : deux codeurs élémentaires, un entrelaceur et une unité de perforation. Les codeurs constituants sont concaténés en parallèle à travers un entrelaceur qui réorganise les symboles d'information avant de les introduire dans le deuxième codeur. L'unité de perforation est utilisée pour atteindre des taux de codage plus élevés. Dans ce qui suit, les blocs utilisés dans le turbo-codeur, tels que présentés dans la Figure 4.2, sont décrits.

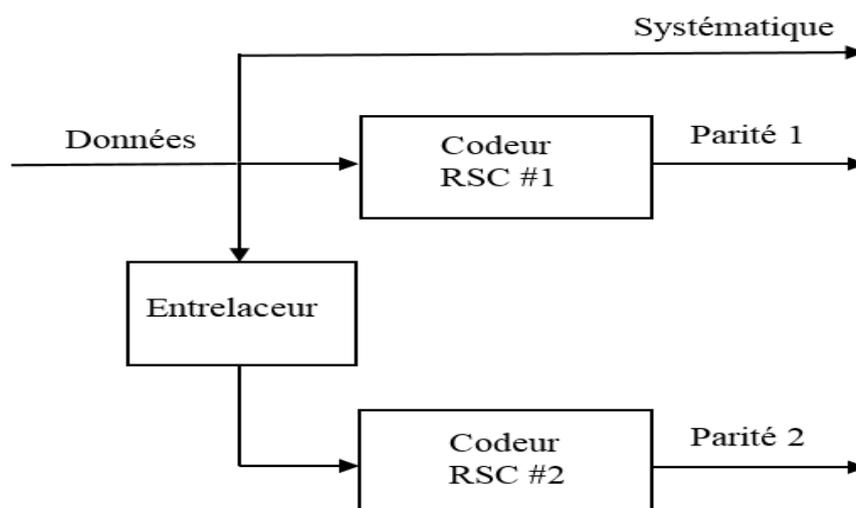


Figure 4.2 schéma de principe d'un turbo-codeur

4.2.1 Codeurs constituants

Les codeurs constituants sont des codeurs récurrents systématiques convolutifs (RSC). Un tel codeur avec mémoire composée de deux éléments est représenté sur la Figure 4.3. Pour les codes systématiques, la séquence d'information fait partie du mot code, ce qui correspond à la connexion directe de l'entrée à l'une des sorties. Pour chaque bit d'entrée, le codeur génère deux bits de mot code : le bit systématique et le bit de parité. Ainsi, le taux de code est $1/2$. Les bits d'entrée et de parité du codeur sont respectivement désignés par u et c .

Un moyen commode de spécifier un codeur convolutif est d'utiliser la représentation octale du polynôme en D qui décrit le codeur. L'opérateur de retard D indique un retard d'un temps de symbole ; D^n indique un retard de n fois le temps de symbole. Ainsi, le polynôme en D qui décrit le bit de parité de la Figure 4.3, en fonction du contenu de la mémoire du codeur, est $1 + D^2$. De même, le polynôme de rétroaction est $1 + D + D^2$. La matrice génératrice de ce codeur, en représentation polynomiale est $G(D) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{pmatrix}$. La représentation binaire des polynômes de parité et de rétroaction est respectivement donnée par 101_2 et 111_2 , ce qui est équivalent à 5_8 et 7_8 en représentation octale. Une représentation compacte du codeur de la Figure 4.3 est donc $(1\ 5/7)_8$.

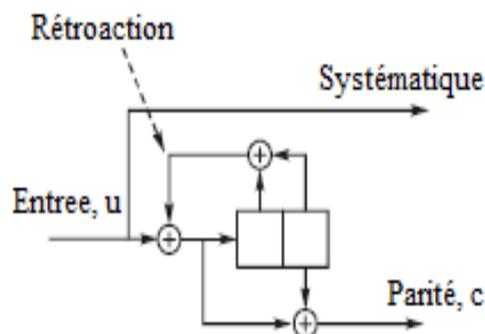


Figure 4.3 codeur convolutif systématique récurrent $(1\ 5/7)_8$

4.2.2 L'entrelaceur

L'entrelaceur est une partie fondamentale de la conception de turbo-code et joue un rôle essentiel dans la performance du turbo-codage. L'entrelacement est une fonction d'indexation qui prend des symboles d'un alphabet d'entrée et produit les symboles identiques dans un ordre différent. L'entrelaceur fournit des informations "embrouillées" au deuxième codeur et décorrèle les entrées des deux décodeurs afin qu'un algorithme de décodage itératif basé sur un échange d'informations "non corrélé" entre les deux décodeurs puisse être appliqué. Ceci est essentiel, car les entrées voisines corrélées ont une influence néfaste sur les performances de décodage. Généralement, la taille de l'entrelaceur a une influence sur les propriétés du code et sur les performances de décodage itératif [60,61].

L'entrelaceur peut être représenté par l'utilisation du vecteur π de longueur N , contenant les positions prises par chaque symbole d'entrée après entrelacement. Ainsi, $\pi(i)$ est la position à laquelle le bit d'entrée i est permuté. Alternativement, l'entrelaceur peut être exprimé par sa fonction d'indice.

$$\pi(i) = j, \quad 0 \leq i, j < N \quad (4.1)$$

4.2.2.1 L'entrelaceur de bloc

L'entrelaceur le plus commun est l'entrelaceur de bloc. Ce type d'entrelaceur est caractérisé par un processus d'écriture/lecture dans les lignes/colonne d'une matrice d'information de taille $N = m \times n$. La fonction de transfert de cet entrelaceur est :

$$\pi(i) = ni + \left[\frac{i}{m} \right] \bmod N, \quad 0 \leq i, j < N \quad (4.2)$$

Où $[x]$ est le plus grand nombre entier inférieur à x . La fonction $\left[\frac{i}{m} \right]$ rend l'entrelaceur difficile à analyser, cette fonction est remplacée par un entier dans la version linéarisée de la fonction de transfert de l'entrelaceur de bloc [62].

$$\pi(i) = ki + u \bmod N, \quad 0 \leq i, j < N \quad (4.3)$$

Avec k et u sont des nombres entiers fixes et k (coefficient angulaire de l'entrelaceur linéaire) est relativement primaire à N . Les entrelaceurs de bloc peuvent réaliser de bonnes valeurs de distance libre, mais ils échouent à produire un spectre des distances très étroit.

4.2.2.2 L'entrelaceur aléatoire

Un entrelaceur "aléatoire" simple sélectionne les mémoires de façon aléatoire et lit leur contenu [63]. Cet entrelaceur est construit à partir d'une permutation aléatoire basée sur une source de bruit aléatoire. Par exemple, un vecteur de bruit de longueur N est généré et la permutation qui met le vecteur de bruit dans un ordre trié est utilisée pour générer l'entrelaceur. En pratique, le vecteur de bruit lui-même peut être généré par un générateur de bruit pseudo-aléatoire [64-66].

4.2.2.3 L'entrelaceur semi aléatoire

On dispose aussi pour améliorer la performance du turbo-code dans l'intervalle entre les valeurs moyennes et grandes du rapport signal sur bruit des entrelaceurs semi aléatoires [63], ce qui évite explicitement d'étaler des indices proches à l'entrée aux indices proches à la sortie. Ils sont produits de façon analogue aux entrelaceurs aléatoires, choisissant chaque incrément $\pi(i)$ aléatoirement et testant si $\pi(i) - \pi(l) \leq T$ pour tout $i - S < l < i$, c'est-à-dire en contrôlant tous les choix précédents. Si un choix d'indice ne remplit pas cette condition, il est rejeté et un nouvel indice est choisi. Le processus continue jusqu'à ce que tous les N indices aient été choisis. Évidemment, le temps de recherche pour un entrelaceur approprié augmente avec S et T , et l'algorithme peut même ne pas se terminer avec succès.

Cependant, selon la référence [63], des valeurs de $S, T < \sqrt{\frac{N}{2}}$ finissent l'indexage dans un temps raisonnable.

4.2.2.4 L'entrelaceur quadratique

Takeshita et Costello [62] ont conçu ce qu'ils ont appelé les entrelaceurs quadratiques, qui sont définis par la fonction quadratique d'indice suivante :

$$\pi(i) = \frac{ki(i+1)}{2} \bmod N \quad (4.4)$$

4.2.2.5 L'entrelaceur d'or (GI)

La section d'or a l'application dans beaucoup de problèmes mathématiques. La section d'or est la proportion qui s'obtient par égalité des deux rapports, la plus petite à la plus grande

et la plus grande à la somme des deux $\frac{g}{1} = \frac{1-g}{g}$. La figure 4.4 illustre le principe de section d'or.

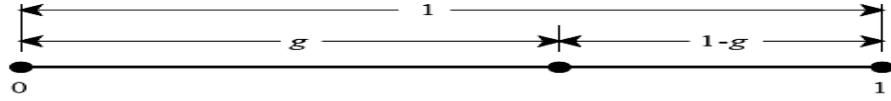


Figure 4.4 principe de la section d'or.

La solution de cette équation quadratique pour g donne la valeur de la section d'or

$$g = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \quad (4.5)$$

Cette valeur sera utilisée dans la construction des deux entrelaceurs suivants.

L'entrelaceur d'or est généré par les nombres réels triés issus de la valeur de la section d'or.

La procédure de construction de l'entrelaceur d'or peut être décrite comme suit :

Étape 0 : initialisation des paramètres

b : valeur initiale, $m = 1$ or 2 , $j = 0$, $r = 1$.

Entrée la valeur de la section d'or $g = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618$.

Calculer la valeur $c = N(g^m + j)/r$.

Étape 1 : la séquence d'entiers $\{n\}_{n=1}^N \in \mathbb{Z}$ est transformée en une séquence de nombre réels

$\{v(n)\}_{n=1}^N \in \mathbb{R}$ en utilisant la fonction :

$$v(n) = nc + b \pmod{N} \quad (4.6)$$

Étape 2 : $\{v(n)\}_{n=1}^N$ est transformée en une autre séquence d'entiers $\{s(n)\}_{n=1}^N \in \mathbb{Z}$, $s(n)$ est la position de l'indice $v(n)$ dans le tri descendant de $\{v(n)\}_{n=1}^N$.

Étape 3 : les indices de l'entrelaceur d'or sont donnés par : $\pi(\{s(n)\}_{n=1}^N) = \{n\}_{n=1}^N$.

4.2.2.6 L'entrelaceur DGI

Dans le but d'améliorer la propriété aléatoire de l'entrelaceur d'or, une composante aléatoire a été incluse dans ce dernier. Cette composante aléatoire est uniformément distribuée entre 0 et ND , où D est une largeur normalisée. Pour les turbo-codes, la valeur expérimentale de D est fixée à 0,01 selon [67]. Ainsi, la fonction d'indexation devient :

$$v(n) = nc + b + d(n) \pmod{N} \quad (4.7)$$

Pour construire l'entrelaceur d'or perturbé, nous utilisons (4.7) au lieu de (4.6) dans la procédure de construction de l'entrelaceur d'or.

4.2.2.7 L'entrelaceur chaotique

La conception de l'entrelaceur par brouillage chaotique a pour but de réduire le retard et la complexité du système tout en améliorant les performances en terme de BER du système, l'entrelaceur ainsi conçu est appelé entrelaceur chaotique.

L'entrelaceur chaotique est similaire à l'entrelaceur aléatoire, la seule différence est que la fonction chaotique remplace la permutation aléatoire.

Le processus d'entrelacement basé sur des transformations chaotiques peut être illustré comme suit :

Étape 1 : la séquence d'entiers $\{n\}_{n=1}^N \in Z$ est transformée en une séquence de nombres réels $\{x(n)\}_{n=1}^N \in \mathbb{R}$ en utilisant la fonction (3.9).

Étape 2 : $\{x(n)\}_{n=1}^N$ est transformée en une autre séquence d'entiers $\{s(n)\}_{n=1}^N \in Z$, $s(n)$ est la position de l'indice $x(n)$ dans le tri descendant de $\{x(n)\}_{n=1}^N$.

Étape 3 : les indices de l'entrelaceur chaotique sont donnés par : $\pi\left(\{s(n)\}_{n=1}^N\right) = \{n\}_{n=1}^N$

4.2.3 Perforation

La perforation est le processus consistant à supprimer certains symboles du mot code, réduisant ainsi la longueur du mot code et augmentant le taux de codage global. Typiquement, afin de générer un code avec un taux $R = 1/2$, proposition originale du turbo-code, la moitié des bits de parité provenant de chaque codeur sont perforés. L'alternative la plus courante consiste à ne pas perforer les bits de parité des deux codeurs, ce qui donne un code avec un taux $R = 1/3$. Par conséquent, le codeur correspondant aux hypothèses ci-dessus est montré dans la Figure 4.5.

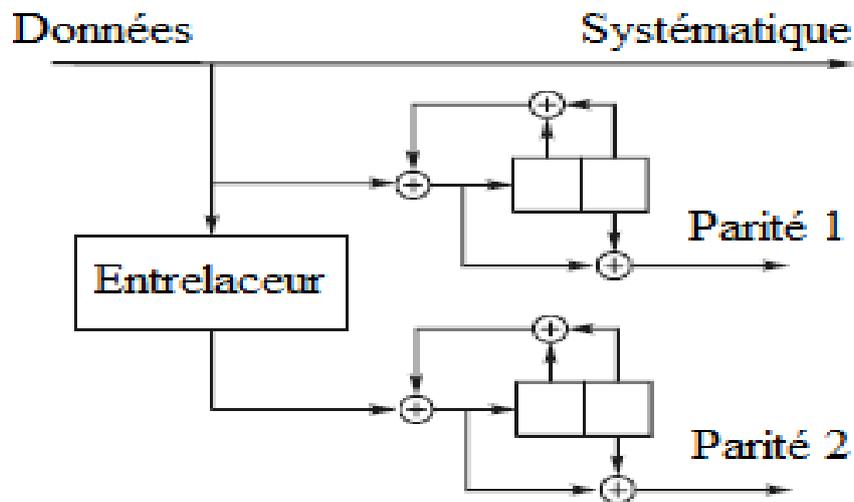


Figure 4.5 structure du Turbo-codeur, utilisant des codeurs convolutifs $(7, 5)_8$

4.3 Turbo-décodage

Le turbo-décodeur est composé de décodeurs élémentaires de type SISO (Soft-Input Soft-Output) fonctionnant de manière itérative. La structure générale d'un turbo-décodeur telle que montrée dans la Figure 4.6, est constituée de deux décodeurs élémentaires liés par des entrelaceurs dans une structure semblable à celle du turbo-codeur. Chaque décodeur reçoit trois entrées, les bits systématiques, les bits de parité transmis du codeur associé et l'information a priori dérivée de l'autre décodeur. Les décodeurs doivent fournir des sorties soft pour les bits décodés et donner les probabilités associées pour chaque bit qu'il a été correctement décodé. Les sorties soft sont typiquement représentées par le logarithme du rapport de vraisemblance (LLR). Dans ce qui suit, on s'intéressera aux concepts et algorithmes de décodage itératif des turbo-codes [68].

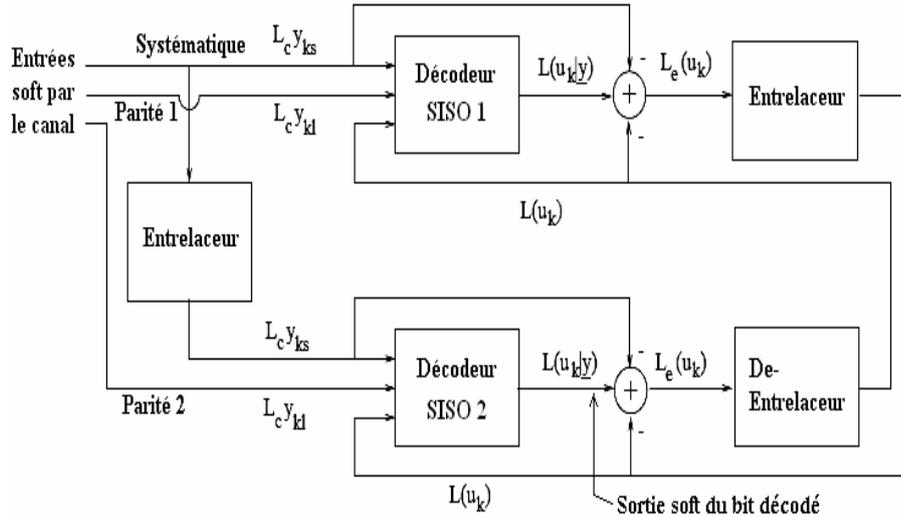


Figure 4.6 Schéma de principe d'un turbo-décodeur [68].

4.3.1 Logarithme du rapport de vraisemblance

Le concept du logarithme du rapport de vraisemblance (LLR) a été montré par Robertson [69] pour simplifier le passage d'information du premier décodeur au deuxième décodeur dans l'opération du décodage itératif des turbo-codes. Le LLR d'un bit u_k de données est dénoté par $L(u_k)$ et est défini pour être simplement le logarithme du rapport des probabilités du bit prenant ses deux valeurs possibles, on a alors :

$$L(u_k) \square \ln \left(\frac{p(u_k = +1)}{p(u_k = -1)} \right) \quad (4.8)$$

Noter que les deux valeurs possibles pour le bit u_k sont prises pour être +1 et -1, plutôt que 1 et 0. Cette définition ne fait aucune différence conceptuelle, mais elle simplifie légèrement les mathématiques dans les dérivations qui suivent. Etant donné le LLR $L(u_k)$, il est possible de calculer la probabilité de $u_k = +1$ ou $u_k = -1$ comme suit.

$$p(u_k = \pm 1) = \left(\frac{e^{-L(u_k)/2}}{1 + e^{-L(u_k)}} \right) \cdot e^{\pm L(u_k)/2} \quad (4.9)$$

Comme le LLR $L(u_k)$ est basé sur les probabilités sans conditions $P(u_k = \pm 1)$, nous sommes également intéressés par le calcul du LLR basé sur des probabilités conditionnelles. Par exemple, dans la théorie du codage de canal nous sommes intéressés par la probabilité

de $u_k = \pm 1$ conditionnée par la séquence reçue \underline{y} . Le LLR conditionnel $L(u_k/\underline{y})$ est défini par :

$$L(u_k/\underline{y}) \square \ln \left(\frac{p(u_k = +1/\underline{y})}{p(u_k = -1/\underline{y})} \right) \quad (4.10)$$

Les probabilités conditionnelles $P(u_k = \pm 1/\underline{y})$ sont connues comme étant des probabilités a posteriori du bit décodé u_k . Indépendamment du LLR conditionnel $L(u_k/\underline{y})$ basé sur les probabilités a posteriori $P(u_k = \pm 1/\underline{y})$, nous employons également le LLR conditionnel basé sur la probabilité pour que la sortie du canal soit y_k étant donné que le x_k transmis correspondant au bit +1 ou -1. Ce LLR conditionnel est noté par $L(y_k/x_k)$ et est défini par :

$$L(y_k/x_k) \square \ln \left(\frac{p(y_k/x_k = +1)}{p(y_k/x_k = -1)} \right) \quad (4.11)$$

Noter la différence conceptuelle entre les définitions de $L(u_k/\underline{y})$ dans l'équation (4.10) et $L(y_k/x_k)$ dans l'équation (4.11).

Si nous supposons que le bit transmis $x_k = \pm 1$ a été envoyé en employant un canal gaussien ou un canal d'évanouissement en utilisant la modulation BPSK, alors nous pouvons écrire la probabilité de y_k à la sortie du canal comme :

$$p(y_k/x_k = +1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-E_b}{2\sigma^2}(y_k - a)^2\right)} \quad (4.12)$$

Où E_b est l'énergie transmise par bit, σ^2 est la variance de bruit et a est l'amplitude d'évanouissement (nous avons $a=1$ pour le canal AWGN). De même, nous avons :

$$p(y_k/x_k = -1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-E_b}{2\sigma^2}(y_k + a)^2\right)} \quad (4.13)$$

Par conséquent, si nous utilisons la modulation BPSK dans un canal gaussien (probablement à évanouissement), nous pourrions réécrire l'équation (4.11) comme suit :

$$L(y_k/x_k) = \frac{E_b}{2\sigma^2} 4a \cdot y_k = L_c \cdot y_k \quad (4.14)$$

Avec :

$$L_c = \frac{E_b}{2\sigma^2} 4a \quad (4.15)$$

L_c est défini comme étant la valeur de fiabilité du canal, et dépend seulement du SNR et de l'amplitude d'évanouissement du canal. Par conséquent, pour la BPSK utilisée dans un canal gaussien (probablement à évanouissement), le LLR conditionnel $L(y_k/x_k)$, qui est désigné sous le nom de sortie soft du canal, est simplement y_k à la sortie du canal multiplié par la valeur de fiabilité du canal L_c .

Après avoir donné l'expression du logarithme du rapport de vraisemblance, nous procédons maintenant à décrire l'algorithme MAP [70], qui est l'un des algorithmes d'entrée soft et sortie soft (SISO), ces derniers peuvent être utilisés dans le turbo-décodage [68].

4.3.2 Algorithme MAP

4.3.2.1 Introduction et préliminaires mathématiques

L'algorithme MAP (Maximum A Posteriori) a été proposé pour la première fois en 1974 par Bahl, Cocke, Jelinek et Raviv pour estimer les probabilités a posteriori des états et les transitions d'une source de Markov observée en présence de bruit sans mémoire. Cet algorithme est également devenu l'algorithme de BCJR, baptisé des noms de ses inventeurs. En communication numérique, l'algorithme de Viterbi [71] minimise la probabilité d'erreur par mot de code (FER : Frame Error Rate) tandis que l'algorithme MAP [70] minimise la probabilité d'erreur par bit (BER : Bit Error Rate). Néanmoins, comme indiqué par Bahl [70], dans la plupart des applications les performances des deux algorithmes seraient presque identiques. Pour cette raison et à cause de la complexité de sa mise en œuvre, l'algorithme MAP était ignoré pour longtemps et il n'était pas utilisé jusqu'à l'arrivée des turbo-codes. L'algorithme MAP fournit la séquence de bits estimés et les probabilités associées pour chaque bit correctement décodé. Ceci est essentiel pour le décodage itératif des turbo-codes proposé par Berrou et al. [60], et le décodage MAP a donc été utilisé dans cet article.

Nous employons la règle de Bayes à plusieurs reprises dans toute cette section. Cette règle donne la probabilité conjointe de a et de b, $P(a \wedge b)$, en termes de probabilité conditionnelle de a si b donnée, comme :

$$p(a \wedge b) = p(a/b) \cdot p(b) \quad (4.16)$$

Une conséquence utile de règle de Bayes est que :

$$p((a \wedge b)/c) = p(a/(b \wedge c)) \cdot p(b/c) \quad (4.17)$$

L'algorithme MAP donne, pour chaque bit décodé u_k , la probabilité que ce bit est +1 ou -1 si la séquence reçue \underline{y} est donnée. Comme expliqué dans la section 4.3.1, ceci est équivalent à trouver le LLR a posteriori $L(u_k/\underline{y})$, où :

$$L(u_k/\underline{y}) = \ln \left(\frac{p(u_k = +1/\underline{y})}{p(u_k = -1/\underline{y})} \right) \quad (4.18)$$

La règle de Bayes nous permet de réécrire cette équation comme suit :

$$L(u_k/\underline{y}) = \ln \left(\frac{p(u_k = +1 \wedge \underline{y})}{p(u_k = -1 \wedge \underline{y})} \right) \quad (4.19)$$

Maintenant considérons la Figure 4.7 qui montre les transitions possibles de l'RSC (7, 5), que nous avons employée comme composant du turbo-codeur dans ce travail. Pour $K = 3$, on a quatre états possibles. Etant donné un code binaire, on a pour chaque état deux transitions possibles, une si le bit d'entrée est -1 (montrée par une ligne continue) et l'autre si le bit d'entrée est +1 (montrée par une ligne discontinue). On peut voir de la Figure 4.7 que si l'état précédent S_{k-1} et l'état présent S_k sont connus, alors la valeur de bit d'entrée u_k causée par la transition de S_{k-1} à S_k est aussi connue.

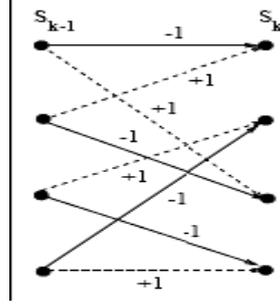


Figure 4.7 Transitions possibles pour un RSC de K=3 [68].

Les quatre transitions possibles de S_{k-1} à S_k quand $u_k = +1$ sont montrées avec des lignes discontinues. C'est-à-dire que ces transitions sont mutuellement exclusives (une seule peut être réalisée par le RSC). La probabilité pour que $u_k = +1$ est égale à la somme des probabilités des quatre transitions possibles causées par le bit d'entrée +1. Le même raisonnement s'applique dans le cas de $u_k = -1$. Ainsi, on peut réécrire l'équation (4.19) comme suit :

$$L(u_k / \underline{y}) = \ln \left(\frac{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = +1} p(S_{k-1} = s' \wedge S_k = s \wedge \underline{y})}{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = -1} p(S_{k-1} = s' \wedge S_k = s \wedge \underline{y})} \right) \quad (4.20)$$

Où $(s', s) \Rightarrow u_k = +1$ est l'ensemble des transitions possibles de l'état précédent S_{k-1} à l'état présent S_k faites par l'entrée de bit +1 au RSC. Le même raisonnement s'applique pour $(s', s) \Rightarrow u_k = -1$. Pour réduire l'écriture on va remplacer l'écriture $P(S_{k-1} = s' \wedge S_k = s \wedge \underline{y})$ par l'écriture $P(s' \wedge s \wedge \underline{y})$.

On peut diviser la séquence \underline{y} en trois sections : \underline{y}_k le mot code reçu associé avec la transition présente, $\underline{y}_{j < k}$ la séquence reçue avant cette transition et $\underline{y}_{j > k}$ la séquence reçue après la transition. Cette division est montrée dans la Figure 4.8. Ainsi, on peut écrire la probabilité $P(s' \wedge s \wedge \underline{y})$ comme suit :

$$P(s' \wedge s \wedge \underline{y}) = P(s' \wedge s \wedge \underline{y}_{j < k} \wedge \underline{y}_k \wedge \underline{y}_{j > k}) \quad (4.21)$$

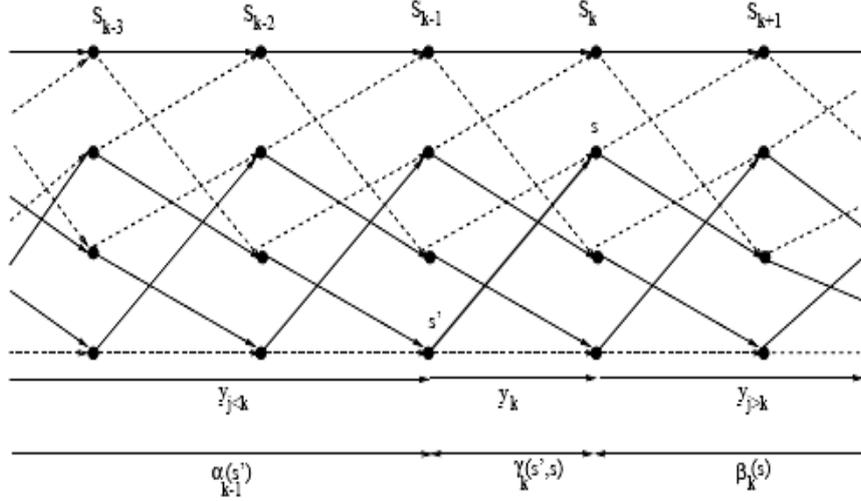


Figure 4.8 Treillis d'un décodeur pour un RSC de K=3 [68].

Si on suppose que le canal est sans mémoire, alors $y_{\underline{j}>k}$ ne dépend que de l'état présent s et non de s' . A l'aide de la règle de Bayes $P(a \wedge b) = P(a/b)P(b)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 P(s' \wedge s \wedge \underline{y}) &= P\left(\underline{y}_{\underline{j}>k} / \left(s' \wedge s \wedge \underline{y}_{\underline{j}<k} \wedge \underline{y}_k\right)\right) \cdot P\left(s' \wedge s \wedge \underline{y}_{\underline{j}<k} \wedge \underline{y}_k\right) \\
 &= P\left(\underline{y}_{\underline{j}>k} / s\right) \cdot P\left(P\left(s' \wedge s \wedge \underline{y}_{\underline{j}<k} \wedge \underline{y}_k\right)\right) \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Encore avec la règle de Bayes l'équation (4.22) peut se réduire à :

$$\begin{aligned}
 P(s' \wedge s \wedge \underline{y}) &= P\left(\underline{y}_{\underline{j}>k} / s\right) \cdot P\left[\left(\underline{y}_{\underline{j}<k} \wedge s\right) / s'\right] \cdot P\left(s' \wedge \underline{y}_{\underline{j}<k}\right) \\
 &= \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s', s) \cdot \alpha_{k-1}(s') \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Où

$$\alpha_{k-1}(s') = P\left(S_{k-1} = s' \wedge \underline{y}_{\underline{j}<k}\right) \quad (4.24)$$

C'est la probabilité que le treillis est en état s' à l'instant $k-1$ et la séquence reçue par le canal à cet instant est $\underline{y}_{\underline{j}<k}$, comme il est montré dans la Figure 4.8, et que :

$$\beta_k(s) = P\left(\underline{y}_{\underline{j}>k} / S_k = s\right) \quad (4.25)$$

C'est la probabilité que le treillis est en état s à l'instant k et la séquence future à recevoir par le canal est $\underline{y}_{\underline{j}>k}$. Finalement on a :

$$\gamma_k(s', s) = P\left[\left(\underline{y}_k \wedge S_k = s\right) / S_{k-1} = s'\right] \quad (4.26)$$

C'est la probabilité que le treillis était en état s' à l'instant $k-1$, déplaçant vers s à l'instant k et la séquence reçue par le canal pour cette transition est \underline{y}_k .

L'équation (4.23) montre qu'on peut diviser le calcul de probabilité $P(s' \wedge s \wedge \underline{y})$ en trois calculs : α , β et γ . L'algorithme MAP permet le calcul de $\alpha_k(s)$ et $\beta_k(s)$ pour tous les états s dans tout le treillis, c'est-à-dire pour $k=0, 1, 2, \dots, N-1$, et $\gamma_k(s', s)$ pour toutes transitions possibles de l'état $S_{k-1} = s'$ à l'état $S_k = s$, pour $k=0, 1, 2, \dots, N-1$. Ces valeurs sont utilisées pour trouver la probabilité $P(S_{k-1} = s' \wedge S_k = s \wedge \underline{y})$ de l'équation (4.23), qui est utilisée dans l'équation (4.20) pour donner $L(u_k / \underline{y})$ pour chaque bit u_k . Dans ce qui suit, nous allons décrire comment le calcul des coefficients $\alpha_k(s)$, $\beta_k(s)$ et $\gamma_k(s', s)$ se fait [68].

4.3.2.2 Calcul récursif en avant de $\alpha_k(s)$:

De l'équation (4.24) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_k(s) &= P\left(S_k = s \wedge \underline{y}_{j < k+1}\right) \\ &= \sum_{\text{tous } s'} P\left(s \wedge s' \wedge \underline{y}_{j < k} \wedge \underline{y}_k\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Utilisant la règle de Bayes et avec la supposition que le canal est sans mémoire on peut encore développer $\alpha_k(s)$ comme suit :

$$\alpha_k(s) = \sum_{\text{tous } s'} \gamma_k(s', s) \cdot \alpha_{k-1}(s') \quad (4.28)$$

Ainsi, une fois que les valeurs de $\gamma_k(s', s)$ sont connu, les valeurs de $\alpha_k(s)$ seront calculées récursivement utilisant l'équation (4.28). Supposant que le treillis à l'état initial $S_0 = 0$, les conditions initiales pour cette récursivité sont :

$$\begin{cases} \alpha_0(S_0 = 0) = 1 \\ \alpha_0(S_0 = s) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tous } s \neq 0 \quad (4.29)$$

4.3.2.3 Calcul récursif en arrière de $\beta_k(s)$:

De l'équation (4.25) nous pouvons écrire :

$$\beta_{k-1}(s') = P\left(\underline{y}_{j>k-1} / S_k = s'\right) \quad (4.30)$$

Utilisant la règle de Bayes sous la forme de l'équation (4.17) et avec la supposition que le canal est sans mémoire on peut encore développer $\beta_{k-1}(s')$ comme suit :

$$\beta_{k-1}(s') = \sum_{\text{tous } s} \beta_k(s) \gamma_k(s', s) \quad (4.31)$$

Ainsi, une fois que les valeurs de $\gamma_k(s', s)$ sont connues, on peut calculer $\beta_{k-1}(s')$ récursivement en arrière par les valeurs de $\beta_k(s)$ utilisant l'équation (4.31).

Si on suppose que le treillis se termine à l'état $S_0 = 0$, alors les valeurs initiales sont $\beta_N(0) = 1$ et $\beta_N(s) = 0$ pour tous les états $s \neq 0$, comme l'avez utilisé Berrou dans [60]. Par contre si on suppose que le treillis est sans terminaisons, c'est-à-dire que la probabilité que le treillis se termine à un état $s, \forall s$, est équiprobable. Alors les valeurs initiales sont $\beta_N(s) = 1/2^{k-1}$ [68].

4.3.2.4 Calcul de $\gamma_k(s', s)$:

L'utilisation de la définition de $\gamma_k(s', s)$ de l'équation (4.26) et la règle de Bayes sous la forme de l'équation (4.17) nous donne :

$$\begin{aligned} \gamma_k(s', s) &= P\left[\left(\underline{y}_k \wedge s\right) / s'\right] \\ &= P\left[\underline{y}_k / (s' \wedge s)\right] \cdot P(u_k) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Où u_k est le bit d'entrée nécessaire pour faire la transition de $S_{k-1} = s'$ à $S_k = s$, et $P(u_k)$ est la probabilité a priori de ce bit. Dans le cas d'un canal AWGN ou un canal à évanouissement. L'équation (4.32) peut être écrite comme suit :

$$\gamma_k(s', s) = C \cdot \exp(u_k L(u_k)/2) \cdot \exp\left(\frac{L_c}{2} \sum_{l=1}^n y_{kl} \cdot x_{kl}\right) \quad (4.33)$$

C, est une constante dans la sommation en numérateur et dénominateur de l'équation (4.20).

De l'équation (4.20) et (3.23) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
L(u_k/\underline{y}) &= \ln \left(\frac{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = +1} p(S_{k-1} = s' \wedge S_k = s \wedge \underline{y})}{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = -1} p(S_{k-1} = s' \wedge S_k = s \wedge \underline{y})} \right) \\
&= \ln \left(\frac{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = +1} \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')}{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = -1} \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')} \right) \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Finalement, $L(u_k/\underline{y})$ est le LLR conditionnel délivré par le décodeur MAP [68].

4.3.3 Simplifications de l'algorithme MAP

Le décodage selon le critère MAP a pour principal inconvénient sa complexité de calcul, imposée notamment par les multiplications et les opérations exponentielles. En pratique, il existe plusieurs algorithmes sous optimaux qui ont pour objectif de faciliter l'implémentation.

4.3.3.1 Algorithme Max-Log-MAP

Pour contourner les opérations arithmétiques très complexes citées au-dessus, l'une des méthodes efficaces permettant de simplifier ces opérations est de transférer le problème dans un espace logarithmique et l'utilisation de l'approximation :

$$\ln \left(\sum_i e^{x_i} \right) \approx \max_i (x_i) \quad (4.35)$$

Où $\max_i (x_i)$ prend le maximum des x_i . $A_k(s)$, $B_k(s)$, $\Gamma_k(s',s)$ sont définis comme suit :

$$A_k(s) \square \ln(\alpha_k(s)) \quad (4.36)$$

$$B_k(s) \square \ln(\beta_k(s)) \quad (4.37)$$

$$\Gamma_k(s',s) \square \ln(\gamma_k(s',s)) \quad (4.38)$$

Cette modification permet de transformer respectivement les multiplications et les opérations exponentielles en additions et multiplications. Nous pouvons écrire le LLR a posteriori $L(u_k/\underline{y})$ par le Max-Log-MAP comme suit :

$$\begin{aligned}
L(u_k/\underline{y}) &= \ln \left(\frac{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k=+1} \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')}{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k=-1} \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')} \right) \\
&= \ln \left(\frac{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k=+1} \exp(B_k(s) \cdot \Gamma_k(s',s) \cdot A_{k-1}(s'))}{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k=-1} \exp(B_k(s) \cdot \Gamma_k(s',s) \cdot A_{k-1}(s'))} \right) \\
&= \max_{(s',s) \Rightarrow u_k=+1} (A_{k-1}(s') \cdot B_k(s) \cdot \Gamma_k(s',s)) \\
&\quad - \max_{(s',s) \Rightarrow u_k=-1} (A_{k-1}(s') \cdot B_k(s) \cdot \Gamma_k(s',s)) \tag{4.39}
\end{aligned}$$

4.3.3.2 Algorithme Log-MAP

L'algorithme Max-Log-MAP donne une légère dégradation des performances par rapport à l'algorithme MAP à cause de l'approximation de l'équation (3.35). Quand elle est utilisée en turbo-décodage, Robertson [72] trouvait que cette dégradation est de 0.35 dB. Cependant, l'approximation de l'équation (3.35) peut être rendu exacte par l'utilisation de logarithme Jacobien :

$$\begin{aligned}
\ln(e^{x_1}, e^{x_2}) &= \max(x_1, x_2) + \ln(1 + e^{-|x_1 - x_2|}) \\
&= \max(x_1, x_2) + f_c(x_1 - x_2) \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Où $f_c(x)$ peut être considéré comme un terme de correction. Les paramètres Log-MAP sont des approximations très proches des paramètres MAP et, par conséquent, les performances de l'algorithme Log-MAP sont proches de celles de l'algorithme MAP.

4.3.4 Principe de turbo-décodage

4.3.4.1 Préliminaires mathématiques

Dans cette section nous expliquons le concept de l'information extrinsèque et intrinsèque comme il a été utilisé par Berrou [60], et le décodage itératif des turbo-codes avec les algorithmes SISO (exp. MAP).

L'équation (4.34) peut être décomposée en une somme de trois termes :

$$\begin{aligned}
L(u_k/\underline{y}) &= \ln \left(\frac{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = +1} \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')}{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = -1} \beta_k(s) \cdot \gamma_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')} \right) \\
&= L(u_k) + L_c y_{ks} + \ln \left(\frac{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = +1} \beta_k(s) \cdot X_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')}{\sum_{(s',s) \Rightarrow u_k = -1} \beta_k(s) \cdot X_k(s',s) \cdot \alpha_{k-1}(s')} \right) \\
&= L(u_k) + L_c y_{ks} + L_e(u_k) \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Ou

$$X_k(s',s) = e^{\left(\frac{L_c}{2} \sum_{l=2}^n y_{kl} x_{kl} \right)} \tag{4.42}$$

Ainsi nous pouvons voir que le LLR a posteriori $L(u_k/\underline{y})$ calculé en utilisant l'algorithme MAP peut être considéré comme étant une somme de trois termes $L(u_k)$, $L_c y_{ks}$ et $L_e(u_k)$. Le LLR a priori $L(u_k)$ est dérivé de $P(u_k)$ dans l'expression de $\gamma_k(s',s)$ dans l'équation (4.32). Cette probabilité est dérivée d'une source indépendante (émetteur) et est appelée la probabilité a priori du kième bit étant +1 ou -1. Dans plusieurs cas on ne sait pas la valeur de cette probabilité, donc on prend le LLR $L(u_k)$ égale à zéro c'est-à-dire $P(u_k) = 0.5$. Cependant, en turbo-décodage, chaque décodeur SISO peut fournir à l'autre décodeur le LLR $L(u_k)$ estimé. Le second terme $L_c y_{ks}$ dans l'équation (4.41) est la sortie soft du canal du bit systématique u_k , qui a été transmis directement à travers le canal et reçu comme étant y_{ks} . Le dernier terme dans l'équation (4.41) $L_e(u_k)$ est extrait de la soustraction de $L(u_k)$ et $L_c y_{ks}$. C'est donc la décision propre de décodeur SISO. Alors $L_e(u_k)$ s'appelle le LLR extrinsèque.

L'équation (4.41) montre que l'information extrinsèque $L_e(u_k)$ du décodeur MAP peut être obtenue par la soustraction de l'information a priori $L(u_k)$ et l'entrée systématique de canal $L_c y_{ks}$, de la sortie soft $L(u_k/\underline{y})$ du décodeur SISO [68].

4.3.4.2 Turbo-décodage

Nous allons décrire maintenant le fonctionnement du turbo-décodage. Considérons premièrement le premier décodeur dans la première itération. Ce décodeur reçoit la séquence du canal $L_c \underline{y}^{(1)}$ qui contient la forme reçue des bits systématiques $L_c y_{ks}$ et les bits de parité du premier codeur $L_c y_{kl}$. Pour un taux de codage $1/2$ on insère des zéros à la place des bits de parité perforés. Le premier décodeur (décodeur 1) peut traiter alors les entrées soft par canal et estimer le LLR conditionnel $L_{11}(u_k/\underline{y})$ des bits de donnée $\{u_k\}_{k=0}^N$. L'indice 11 de $L_{11}(u_k/\underline{y})$ indique qu'il est le LLR a posteriori de la première itération du premier décodeur. Notons qu'en première itération le premier décodeur n'aurait pas l'information a priori des bits, donc $L(u_k)$ est nul. Ceci correspondant à la probabilité a priori égale à 0,5.

Deuxièmement le second décodeur entre dans l'opération. Il reçoit la séquence du canal $L_c \underline{y}^{(2)}$ qui contient la forme reçue des bits systématiques entrelacés et les bits de parité du second codeur. En plus de la séquence reçue du canal $L_c \underline{y}^{(2)}$, le décodeur peut utiliser le LLR conditionnel $L_{11}(u_k/\underline{y})$ fourni par le premier décodeur pour générer le LLR a priori $L(u_k)$ pour l'utiliser dans le second décodeur. Après soustraction des $L_c y_{ks}$, $L(u_k)$ du décodeur 1 et l'entrelacement, on obtient l'information extrinsèque $L_e(u_k)$. Ainsi le second décodeur utilise $L_c \underline{y}^{(2)}$ et le LLR a priori $L(u_k)$ (dérivé d'entrelacement de l'information extrinsèque $L_e(u_k)$ du premier décodeur) pour produire le LLR a posteriori $L_{12}(u_k/\underline{y})$. Ceci est la fin de la première itération.

Pour la deuxième itération, le premier décodeur traite encore la séquence du canal reçue $L_c \underline{y}^{(1)}$, avec la présence du LLR a priori $L(u_k)$ fourni par l'information extrinsèque $L_e(u_k)$ du LLR a posteriori $L_{12}(u_k/\underline{y})$ fourni par le second décodeur, d'où on peut produire un LLR a posteriori $L_{21}(u_k/\underline{y})$ amélioré. Le second décodeur utilisant le LLR a posteriori $L_{21}(u_k/\underline{y})$ amélioré du premier décodeur et délivre un LLR a priori $L(u_k)$ amélioré qui est utilisé avec la séquence reçue du canal $L_c \underline{y}^{(2)}$ pour calculer $L_{22}(u_k/\underline{y})$. Ce processus itératif va continuer et à chaque nouvelle itération le BER moyen s'améliore [68].

4.4 Simulation et analyse des résultats

La conception d'entrelaceurs pour les turbo-codes est loin d'être une science exacte, aussi les méthodes de conception ne peuvent-elles être validées que par simulation. Cependant, chaque résultat de simulation ne montre que les performances de l'entrelaceur pour un choix particulier de turbo-codeur et de turbo-décodeur.

Les simulations ont été effectuées pour des turbo-codes formés par deux codeurs récursifs systématiques convolutifs (RSC) identiques, parallèles $(7,5)_{oct}$ en tant que polynômes générateurs et à taux de codage fixe de $R = 1/2$. La terminaison est appliquée sur le premier RSC. Les performances des turbo-codes utilisant l'algorithme de décodage Log-MAP à 5 itérations sont étudiées pour différents schémas d'entrelacement. Des longueurs de trame de 169 bits, 1024 bits et de 4096 bits ont été choisies pour la comparaison. La modulation BPSK est utilisée dans toutes les simulations et cent trames erronées sont comptées pour arrêter la simulation.

4.4.1 Performances du turbo-code pour un canal AWGN :

Les figures 4.9, 4.10 et 4.11 illustrent les performances de différents entrelaceurs sur un canal AWGN. Sur la figure 4.9 ($N = 169$ bits), on peut remarquer que, pour les faibles valeurs de E_b / N_0 , les performances de tous les entrelaceurs sont presque identiques. Cependant, pour les valeurs les plus élevées, l'entrelaceur chaotique est plus performant que l'entrelaceur aléatoire. Pour un $TEB = 2,56 \times 10^{-3}$, nous avons un rapport $E_b / N_0 = 2$ dB pour un entrelaceur aléatoire et un rapport $E_b / N_0 = 1,882$ dB pour un entrelaceur chaotique, ce qui correspond à une différence de 0,118 dB.

Sur la figure 4.10 ($N = 1024$ bits), on peut remarquer que les performances de tous les entrelaceurs sont presque identiques.

Sur la figure 4.11 ($N = 4096$ bits), on peut observer que, pour les faibles valeurs de E_b / N_0 , les performances de tous les entrelaceurs sont presque identiques. Toutefois, pour les valeurs les plus élevées, l'entrelaceur chaotique est plus performant que l'entrelaceur DGI.

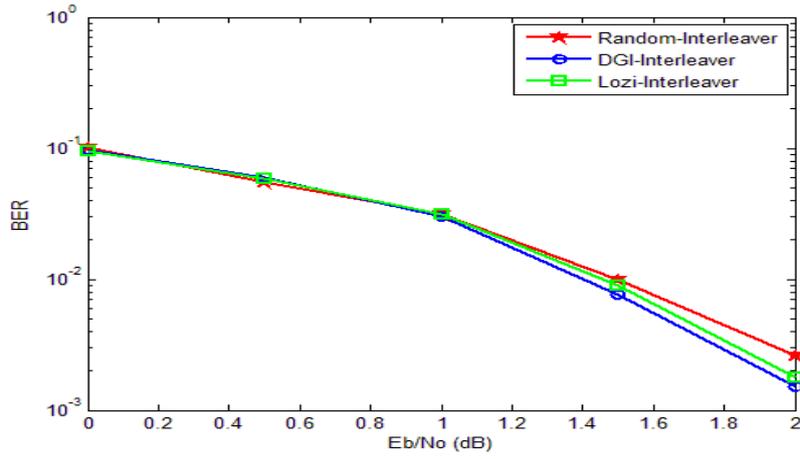


Figure 4.9 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 169 pour un canal AWGN.

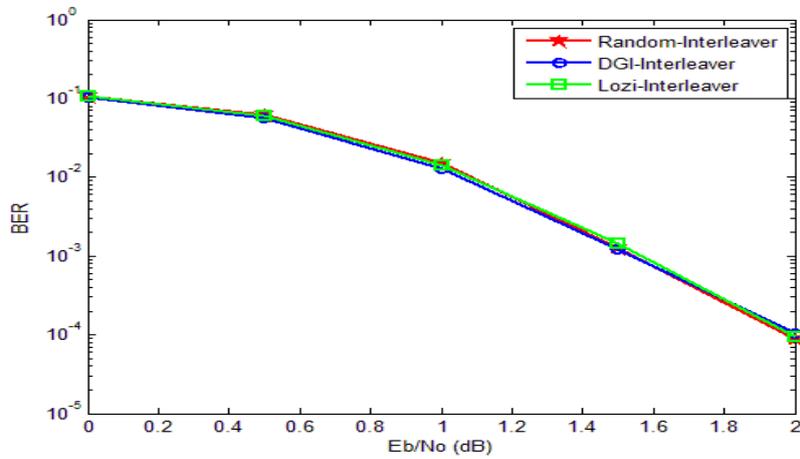


Figure 4.10 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 1024 pour un canal AWGN.

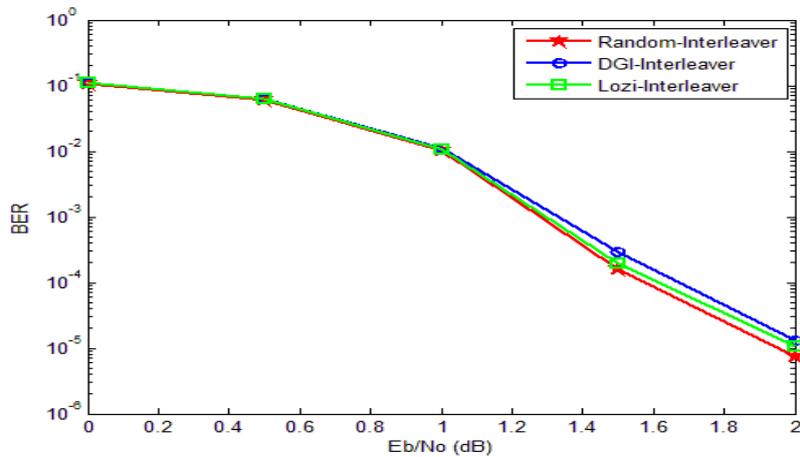


Figure 4.11 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 4096 pour un canal AWGN.

4.4.2 Performances du turbo-code pour un canal de Rayleigh

Les figures 4.12, 4.13 et 4.14 présentent les performances de différents entrelaceurs sur le canal de Rayleigh. Les figures 4.12 ($N = 169$ bits) et 4.13 ($N = 1024$ bits) montrent que tous les entrelaceurs utilisés ont des performances similaires et qu'aucune différence significative n'est observée.

La figure 4.14 ($N = 4096$ bits) montre que l'entrelaceur chaotique est plus performant que l'entrelaceur DGI, en particulier lorsque E_b / N_0 dépasse 4,5 dB. Pour un $TEB = 1,946 \times 10^{-5}$, on trouve $E_b / N_0 = 5$ dB pour l'entrelaceur DGI et 4,864 dB pour l'entrelaceur chaotique, ce qui correspond à une différence de 0,136 dB. Plus la longueur de l'entrelaceur est longue, meilleure est la performance de l'entrelaceur chaotique.

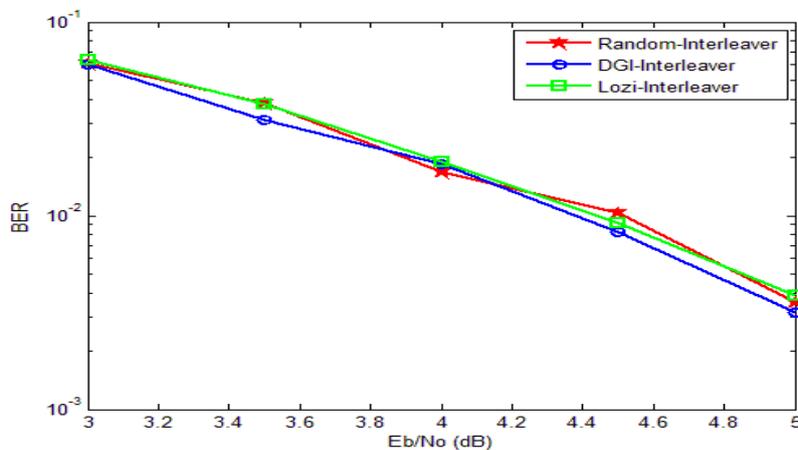


Figure 4.12 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 169 pour un canal de Rayleigh.

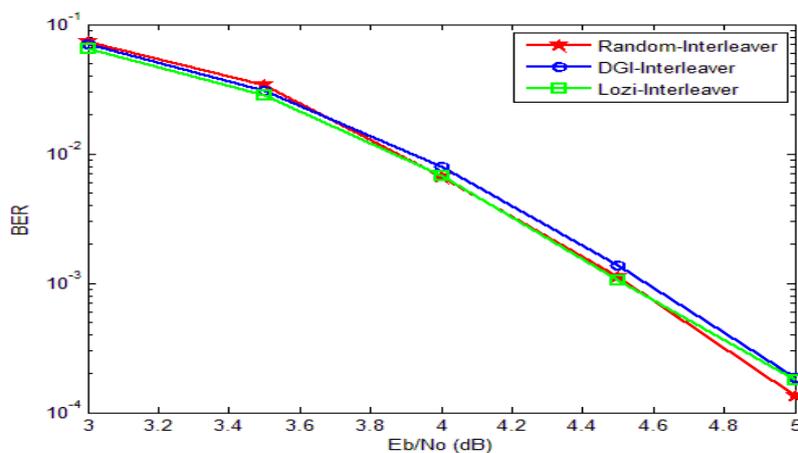


Figure 4.13 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 1024 pour un canal de Rayleigh.

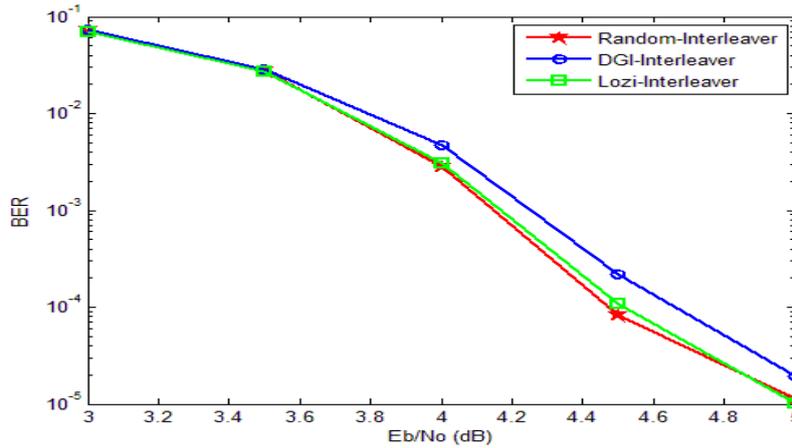


Figure 4.14 Performances du turbo-code avec les entrelaceurs de longueur 4096 pour un canal de Rayleigh.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons simulé les performances des entrelaceurs pour turbo-code conçus par les transformations étudiées dans les chapitres précédents. Nous avons trouvé que L'entrelaceur chaotique pour turbo-code est efficace pour les systèmes à grande longueur de trame ainsi que pour les systèmes à courte longueur. De plus, quelques paramètres sont nécessaires pour être transférés de l'émetteur au récepteur. Ainsi, non seulement nous pouvons économiser le volume du canal pour transmettre davantage de données source, mais aussi diminuer la probabilité d'erreur lors de la transmission du signal.

Conclusion Générale

L'objectif principal de cette thèse était l'étude des propriétés statistiques des signaux chaotiques. En plus de ce but théorique, cette thèse apporte aussi une contribution expérimentale en montrant le potentiel de ces signaux dans l'amélioration des performances des turbo-codes. Tous les résultats présentés sont résumés ici, divisés en résultats théoriques et résultats expérimentaux.

Résultats théoriques

Après un résumé des concepts de base nécessaires pour l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Nous avons déterminé analytiquement la densité de probabilité invariante, l'exposant de Lyapunov, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance des signaux issus des transformations unidimensionnelles par une méthode simple. Nous avons déduire une relation d'échantillonnage entre les processus générés par les transformations skew tent multimodale et celles générés par la transformation skew tent. Nos résultats révèlent que ces transformations ont les mêmes spectres (passe-bas, passe-haut et large bande). Il n'est pas possible de calculer analytiquement l'autocorrélation et la densité spectrale de puissance des transformations bidimensionnelles (transformation de Hénon et transformation de Lozi), puisque la densité de probabilité de ces transformations n'est pas uniforme. De ce fait nous avons intéressé à quelques simulations numériques pour analyser les signaux obtenus. Ces transformations peuvent générer des signaux à bande étroite et passe-haut.

Résultats expérimentaux

La conception des entrelaceurs chaotiques pour les turbo-codes est la principale contribution expérimentale. Nos résultats révèlent que L'entrelaceur chaotique pour les turbo-codes est efficace pour les systèmes à grande longueur de trame ainsi que pour les systèmes à courte longueur.

Perspectives

Les travaux menés dans cette thèse conduisent à plusieurs perspectives. Nous pouvons

- optimiser les entrelaceurs chaotiques pour améliorer les performances des codes turbo.
- utiliser les propriétés des transformations linéaires par morceaux pour la triade des communications - le codage source, le codage de canal et la cryptographie.

References

- [1] LAU FCM, TSECK. Chaos-based Digital Communication Systems: Operating Principles, Analysis Methods, and Performance Evaluation. 2003.
- [2] STAVROULAKIS, Peter (ed.). Chaos applications in telecommunications. CRC press, 2005.
- [3] PECORA, Louis M. et CARROLL, Thomas L. Synchronization in chaotic systems. Physical review letters, 1990, vol. 64, no 8, p. 821-824.
- [4] CUOMO, Kevin M. et OPPENHEIM, Alan V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. Physical review letters, 1993, vol. 71, no 1, p. 65-68.
- [5] DEDIEU, Herve, KENNEDY, Michael Peter, et HASLER, Martin. Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 1993, vol. 40, no 10, p. 634-642.
- [6] HEIDARI-BATENI, Ghobad et MCGILLEM, Clare D. A chaotic direct-sequence spread-spectrum communication system. IEEE Transactions on communications, 1994, vol. 42, no 234, p. 1524-1527.
- [7] CHEN, Brian et WORNELL, Gregory W. Analog error-correcting codes based on chaotic dynamical systems. IEEE Transactions on Communications, 1998, vol. 46, no 7, p. 881-890.
- [8] BAPTISTA, M. S. Cryptography with chaos. Physics letters A, 1998, vol. 240, no 1-2, p. 50-54.
- [9] ZHOU, Yicong, BAO, Long, et CHEN, CL Philip. A new 1D chaotic system for image encryption. Signal processing, 2014, vol. 97, p. 172-182.
- [10] DACHSELT, Frank et SCHWARZ, Wolfgang. Chaos and cryptography. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2001, vol. 48, no 12, p. 1498-1509.

- [11] JAKIMOSKI, Goce et KOCAREV, Ljupco. Chaos and cryptography: block encryption ciphers based on chaotic maps. IEEE transactions on circuits and systems I: fundamental theory and applications, 2001, vol. 48, no 2, p. 163-169.
- [12] TSEKERIDOU, Sofia, SOLACHIDIS, Vassilios, NIKOLAIDIS, Nikos, et al. Statistical analysis of a watermarking system based on Bernoulli chaotic sequences. Signal Processing, 2001, vol. 81, no 6, p. 1273-1293.
- [13] TEFAS, Anastasios, NIKOLAIDIS, Athanasios, et al. Performance analysis of correlation-based watermarking schemes employing Markov chaotic sequences. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, vol. 51, no 7, p. 1979-1994.
- [14] WERNDL, Charlotte. Are deterministic descriptions and indeterministic descriptions observationally equivalent?. Studies in history and philosophy of science part B: studies in history and philosophy of modern physics, 2009, vol. 40, no 3, p. 232-242.
- [15] ALLIGOOD, Kathleen T., SAUER, Tim D., et YORKE, James A. Chaos. Springer New York, 1996.
- [16] KAPITANIAK, Tomasz. Controlling chaos. In: Chaos for Engineers. Springer, Berlin, Heidelberg. p. 111-135, 2000.
- [17] ROBINSON, Clark. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. CRC press, 1998.
- [18] LORENZ, Edward. Predictability: does the flap of a butterfly's wing in Brazil set off a tornado in Texas?. na, 1972.
- [19] LI, Tien-Yien et YORKE, James A. Period three implies chaos. The American Mathematical Monthly, 1975, vol. 82, no 10, p. 985-992.
- [20] DEVANEY, Robert. An introduction to chaotic dynamical systems. Westview press, 2008.
- [21] WOLF, Alan, et al. Quantifying chaos with Lyapunov exponents. Chaos, 1986, vol. 16, p. 285-317.
- [22] STEFAŃSKI, Andrzej et KAPITANIAK, Tomasz. Estimation of the dominant Lyapunov exponent of non-smooth systems on the basis of maps synchronization. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, vol. 15, no 2, p. 233-244.

- [23] FEIT, Sidnie Dresher. Characteristic exponents and strange attractors. *Communications in Mathematical Physics*, 1978, vol. 61, no 3, p. 249-260.
- [24] WOLF, Alan, SWIFT, Jack B., SWINNEY, Harry L., et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, vol. 16, no 3, p. 285-317.
- [25] ECKMANN, J.-P., KAMPHORST, S. Oliffson, RUELLE, David, et al. Liapunov exponents from time series. *Physical Review A*, 1986, vol. 34, no 6, p. 4971-4979.
- [26] STEFANSKI, Andrzej. Estimation of the largest Lyapunov exponent in systems with impacts. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2000, vol. 11, no 15, p. 2443-2451.
- [27] SANO, Masaki et SAWADA, Yasuji. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Physical review letters*, 1985, vol. 55, no 10, p. 1082-1085.
- [28] SANDRI, Marco. Numerical calculation of Lyapunov exponents. *Mathematica Journal*, 1996, vol. 6, no 3, p. 78-84.
- [29] GREBOGI, Celso, OTT, Edward, PELIKAN, Steven, et al. Strange attractors that are not chaotic. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1984, vol. 13, no 1-2, p. 261-268.
- [30] SCHUSTER, Heinz Georg et JUST, Wolfram. *Deterministic chaos: an introduction*. John Wiley & Sons, 2006.
- [31] OTT, Edward. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [32] ELHADJ, Zeraoulia. *Lozi Mappings: Theory and Applications*. CRC Press, 2013.
- [33] ZERAOULIA, Elhadj et CLINTON, Sprott Julien. *2-D quadratic maps and 3-D ODE systems: A Rigorous Approach*. World Scientific, 2010.
- [34] HILBORN, Robert C., et al. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press on Demand, 2000.
- [35] PAPOULIS, Athanasios. *Probability Random Variables*. Stochastic Proc, 1965.
- [36] CHOE, Geon Ho. *Computational ergodic theory*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [37] LASOTA, Andrzej et MACKEY, Michael C. *Probabilistic properties of deterministic systems*. Cambridge university press, 1985.

- [38] LASOTA, Andrzej et MACKEY, Michael C. Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics. Springer Science & Business Media, 2013.
- [39] KUBIN, Gernot. What is a chaotic signal?. na, 1995.
- [40] EISENCRAFT, Marcio, ATTUX, Romis, et SUYAMA, Ricardo (ed.). Chaotic signals in digital communications. CRC Press, 2013.
- [41] PAPOULIS, Athanasios. Signal analysis. New York : McGraw-Hill, 1977.
- [42] BROERSEN, Petrus MT. Automatic autocorrelation and spectral analysis. Springer Science & Business Media, 2006.
- [43] EISENCRAFT, Marcio, KATO, Daniela Mitie, et MONTEIRO, L. H. A. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. Signal Processing, 2010, vol. 90, no 1, p. 385-390.
- [44] DA COSTA, Rafael Alves, LOIOLA, Murilo Bellezoni, et EISENCRAFT, Marcio. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. Signal Processing, 2017, vol. 133, p. 187-191.
- [45] GEISEL, T. et FAIREN, V. Statistical properties of chaos in Chebyshev maps. Physics Letters A, 1984, vol. 105, no 6, p. 263-266.
- [46] DA COSTA, Rafael A., LOIOLA, Murilo B., et EISENCRAFT, Marcio. Spectral properties of chaotic signals generated by the bernoulli map. Journal of Engineering Science and Technology Review, 2015, vol. 8, no 2, p. 12-16.
- [47] SAKAI, HIDEAKI et TOKUMARU, HIDEKATSU. Autocorrelations of a certain chaos. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1980, vol. 28, no 5, p. 588-590.
- [48] SAHNOUNE, Ahmed et BERKANI, Daoud. On the correlation of chaotic signals generated by multimodal skew tent map. Signal, Image and Video Processing, 2018, vol. 12, no 7, p. 1273–1278.
- [49] HÉNON, Michel. A two-dimensional mapping with a strange attractor. In : The Theory of Chaotic Attractors. Springer, New York, NY, 1976. p. 94-102.
- [50] BIHAM, Ofer et WENZEL, Wolfgang. Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers. Physical review letters, 1989, vol. 63, no 8, p. 819-822.

- [51] LOZI, R. Un attracteur étrange (?) du type attracteur de Hénon. *Le Journal de Physique Colloques*, 1978, vol. 39, no C5, p. C5-9-C5-10.
- [52] BORGES, Ernesto P. et TIRNAKLI, Ugur. Two-dimensional dissipative maps at chaos threshold: sensitivity to initial conditions and relaxation dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2004, vol. 340, no 1-3, p. 227-233.
- [53] GREBOGI, Celso, OTT, Edward, et YORKE, James A. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. *Science*, 1987, vol. 238, no 4827, p. 632-638.
- [54] MISIUREWICZ, Michal. Strange attractors for the Lozi mappings. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1980, vol. 357, no 1, p. 348-358.
- [55] ISHII, Yutaka et SANDS, Duncan. Monotonicity of the Lozi family near the tent-maps. *Communications in mathematical physics*, 1998, vol. 198, no 2, p. 397-406.
- [56] GRASSBERGER, P., KANTZ, H., et MOENIG, U. On the symbolic dynamics of the Hénon map. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1989, vol. 22, no 24, p. 5217-5230.
- [57] AZIZ-ALAOUI, M. A., ROBERT, Carl, et GREBOGI, Celso. Dynamics of a Hénon–Lozi-type map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, vol. 12, no 12, p. 2323-2341.
- [58] HÉNON, Michel. Numerical study of quadratic area-preserving mappings. *Quarterly of applied mathematics*, 1969, p. 291-312.
- [59] ZHUSUBALIYEV, Zhanybai T. et MOSEKILDE, Erik. Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems. World Scientific, 2003.
- [60] BERROU, Claude, GLAVIEUX, Alain, et THITIMAJSHIMA, Punya. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes. 1. In: *Proceedings of ICC'93-IEEE International Conference on Communications*. IEEE, 1993. p. 1064-1070.
- [61] VUCETIC, Branka et YUAN, Jinhong. *Turbo codes: principles and applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [62] TAKESHITA, Oscar Y. et COSTELLO, Daniel J. New deterministic interleaver designs for turbo codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, vol. 46, no 6, p. 1988-2006.

- [63] DOLINAR, Sam et DIVSALAR, Dariush. Weight distributions for turbo codes using random and nonrandom permutations. TDA Progress Report, 1995, pp. 56–65.
- [64] HEEGARD, Chris et WICKER, Stephen B. Turbo coding. Springer Science & Business Media, 2013.
- [65] DIVSALAR, Dariush et POLLARA, Fabrizio. Turbo codes for PCS applications. In: Proceedings IEEE International Conference on Communications ICC'95. IEEE, 1995. p. 54-59.
- [66] BLAZEK, Zeljko, GULLIVER, T. Aaron, et BHARGAVA, Vijay K. On random interleavers for turbo codes. In: 2001 IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing (IEEE Cat. No. 01CH37233). IEEE, 2001. p. 111-114.
- [67] CROZIER, S., LODGE, J., GUINAND, P., et al. Performance of Turbo-codes with relative prime and golden interleaving strategies. In :IMSC'99- International Mobile Satellite Conference, 6 th, Ottawa, Canada. 1999. p. 268-275.
- [68] HANZO, Lajos, LIEW, Tong Hooi, et YEAP, Bee Leong. Turbo coding, turbo equalisation and space-time coding. John Wiley & Sons, 2002.
- [69] ROBERTSON, P. Illuminating the structure of parallel concatenated recursive systematic (Turbo) codes [A]. IEEE Globecom Conference. 1994, vol. 3, pp. 1298–1303.
- [70] BAHL, Lalit, COCKE, John, JELINEK, Frederick, et al. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (corresp.). IEEE Transactions on information theory, 1974, vol. 20, no 2, p. 284-287.
- [71] FORNEY, G. David. The viterbi algorithm. Proceedings of the IEEE, 1973, vol. 61, no 3, p. 268-278.
- [72] ROBERTSON, Patrick, VILLEBRUN, Emmanuelle, HOEHER, Peter, et al. A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in the log domain. In: IEEE International Conference on Communications. INSTITUTE OF ELECTRICAL ENGINEERS INC (IEE), 1995. p. 1009–1013.