

11/96
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Genie Civil

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

SUJET

ANALYSE DYNAMIQUE DE
L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

PAR LA M.E.F.

Proposé par :

M^r B. TILIOUINE

Étudié par :

F. SIMERABET
A. R. SERIR

Dirigé par :

M^r B. TILIOUINE

PROMOTION

JUIN 1996

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

Genie Civil

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE DYNAMIQUE DE
L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

PAR LA M.E.F

Proposé par :

M^f B. TILIOUINE

Etudié par :

F. SIMERABET
A.R. SERIR

Dirigé par :

M^f B. TILIOUINE

PROMOTION

JUIN 1996

Dédicaces



À ma très chère mère

à mon père

à mon frère Zino

à ma petite sœur Imane

et à tous mes proches.

Fodil

*À ma très chère mère, faible témoignage de mon affection
et mon profond dévouement pour tous ses sacrifices*

*à mon très cher père, qui a toujours su me conseiller
et m'encourager, lui la source de ma réussite*

à mes frères et sœurs

à ma grand mère

à mes oncles et tantes

et à tous mes proches et mes amis.

R achid

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre profonde gratitude au Professeur B.TILIOUINE , notre promoteur et encadreur, pour nous avoir estimé capable de traiter ce sujet, ses conseils efficaces et pour les efforts qu'il n'a pas ménagé pour le bon déroulement de notre travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à Monsieur A.SEGHIR pour avoir généreusement mis à notre disposition son savoir faire informatique, et sa documentation scientifique.

Que tous nos enseignants, nos amis et ceux qui nous ont aidé de proche où de loin trouvent ici l'expression de nos remerciements et profonde reconnaissance.

Résumé: Nous présentons un modèle éléments finis à 2 D d'interaction fluide-structure pour l'analyse sismique d'un barrage poids en béton. Le problème aux valeurs propre est plus compliqué dans ce cas, que dans l'analyse des structures ordinaires, puisque la formulation produit des matrices couplées non symétriques. L'histoire de réponse est obtenue dans l'hypothèse d'un barrage élastique à comportement linéaire et d'un réservoir à fonds horizontal avec prise en compte de la compressibilité de l'eau, des ondes de surfaces et de la dissipation d'ondes au niveau de la limite de radiation.

Abstract: We present a 2 D finite element model for seismic analysis of concrete gravity dam including hydrodynamics pressures. The eigenproblem is more complicated for ordinary structural analyses, as the formulation produces non symmetric matrix. The time history response response is obtained in the assumption of elastic dam with linear behaviour and of horizontal bottom of reservoir including water compressibility, gravity waves and the waves dissipation at the radiation boundary.

SOMMAIRE

1. Introduction générale.....	1
2. Généralités sur les barrages.....	3
2.1. Définition d'un barrage.....	3
2.2. Objectifs d'un barrage.....	3
2.3. Différent types de barrages.....	3
2.4. Avantages et inconvénients.....	5
2.5. Sol de fondation.....	5
2.6. Actions auxquelles sont soumis les barrages poids.....	5
3. Système couplé.....	8
3.1. Introduction.....	8
3.2. Définition.....	8
3.3. Classification des systèmes couplés.....	8
3.4. Couplage hydrodynamique.....	9
3.4.1. Solution de Westergaard.....	9
3.4.2. Inclinaison du parement amont.....	11
3.4.3. Critique.....	12
3.4.4. Solution semi-analytique.....	12
4. Présentation de la M.E.F.....	17
4.1. Introduction.....	17
4.2. Les codes généraux de la méthode.....	17
4.3. Formulation intégrale.....	21
4.4. Principe du travail virtuel.....	23
4.5. Intégration numérique de Gauss.....	23
4.6. Formulation matricielle.....	25
4.7. Assemblage.....	28
4.8. Critères de convergence.....	29
5. Modélisation.....	31
5.1. Développement des équations.....	31
5.2. Equations de mouvement.....	33
5.2.1. Equation du barrage.....	33
5.2.2. Equation du fluide.....	35
5.3. Système couplé.....	42
5.3.1. Système libre non amorti.....	42

6. Problème aux valeurs et vecteurs propres.....	43
6.1. Introduction.....	43
6.2. Propriétés fondamentales des systèmes propres.....	44
6.3. Méthodes de calcul des valeurs propres.....	46
6.4. Application aux calculs des grands systèmes.....	48
6.5. Système couplé.....	49
7. Résolution de l'équation d'équilibre dynamique.....	50
7.1. Introduction.....	50
7.1.1. Méthodes d'intégration pas-à-pas.....	50
8. Présentation générale des programmes.....	53
8.1. Introduction.....	53
8.2. Module d'entrées des données.....	54
8.3. Calcul des matrices élémentaires.....	57
8.4. Résolution.....	61
8.5. Calcul des contraintes.....	62
8.6. Fonctinnement.....	64
9. Etude pramétrique.....	65
9.1. Introduction.....	65
9.2. Consiération du barrage.....	65
9.3. Analyse modale.....	66
9.4. Analyse temporel.....	71
Conclusions.....	
Bibliographie.....	
Annexes.....	

NOTATION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

- \mathbf{U} : vecteur déplacement (colonne)
 σ : tenseur des contraintes en vecteur colonne
 ε : tenseur des déformations en vecteur colonne
 \mathbf{D} : matrice d'élasticité
 \mathbf{n} : vecteur normal
 Ω : désigne un domaine (volume)
 Γ : désigne un contour
 δ : fonction de Dirac
 δ_{ij} : symbole de Kronecker
 \mathbf{P} : pression
 \mathbf{V} : vitesse
 \mathbf{F} : force de chargement
 ρ : masse volumique
 \mathbf{N} : fonction de forme en vecteur ligne
 $\dot{}$: dérivée par rapport au temps
 $\cdot_{,i}$: dérivée par rapport à l'indice

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



CHAPITRE-I

INTRODUCTION

Introduction

Les grands barrages comptent parmi les plus anciennes constructions humaines, car l'eau a été l'élément le plus précieux de la vie, et dans de nombreux pays, défavorisés pour l'irrégularité des pluies, l'accumulation de l'eau pour l'irrigation a été de tout temps une nécessité. Mais depuis le début du siècle, la production de l'électricité leurs a donné un essor nouveau.

Ce n'est que depuis une vingtaine d'années que d'importants progrès ont été réalisés dans le domaine de l'étude dynamique des barrages qui implique à la fois une meilleure évaluation du risque sismique, une détermination délicate en laboratoire et in situ des propriétés dynamiques des matériaux de la fondation et du barrage, et des modèles mathématiques complexes permettant d'évaluer le comportement statique et la réponse dynamique du barrage une fois les caractéristiques de l'accélérogramme du projet établit.

L'Algérie est un pays semi-aride, aride (200 à 400 mm) dans lequel les ressources en eau sont généralement faibles, mal réparties et surtout extrêmement irrégulières et localisées. Les oueds Algériens sont caractérisés par un débit instantané très faible qui peut s'abaisser jusqu'à 1 m³ /s, puis peut remonter avec des crues d'une violence exceptionnelle en atteignant parfois 5 000 m³ /s provoquant des crues dévastatrices.

L'apport total des précipitations en Algérie serait de l'ordre de 130 milliards de m³ par année. L'apport moyen calculé sur 25 ans pour le Tell seul est évalué à 65 milliards de m³ parmi lesquels 47 milliards s'évaporent dans l'atmosphère, 3 milliards s'infiltrent et 15 s'écoulent dans la mer. Actuellement les déficits à combler s'établissent à 0.492 milliards de m³ en eau potable et industrielles et à 0.162 milliards en eau d'irrigation. Deux (2) millions de m² de la surface totale du pays est soit désertique soit semi-désertique et ainsi nécessite, pour être fertilisée, un apport d'eau.

C'est dans cette optique qu'est devenu nécessaire le stockage de l'eau pendant la période humide qui est très courte et sa distribution au moment convenable et surtout pendant la période sèche.

Le contenu de la thèse est organisé en 9 chapitres:

Après une introduction générale, les chapitres 2 et 3 présentent des généralités sur les barrages et les systèmes couplés.

Le 4^{ème} chapitre est consacré à la méthode des éléments finis

Le chapitre 5 comporte l'utilisation de la méthode des éléments finis et les procédures numériques pour la construction des matrices élémentaires et globales et par suite les systèmes algébriques gouvernants du solide et du fluide.

Le problème aux valeurs propres est traité au chapitre 6, nous présentons dans ce chapitre quelques caractéristiques du problème et les méthodes utilisées pour le calcul des valeurs et vecteurs propres. Puis nous décrivons au chapitre 7 la méthode de résolution du problème dans le domaine temporel.

Dans le chapitre 8 nous présenterons les différents organigrammes utilisés.

Le chapitre 9 est consacré aux résultats pour différents paramètres affectant le système barrage-fluide du barrage de l'Oued Fodda.

Le travail se termine par une conclusion générale.

Comme l'analyse des structures par éléments finis conduit à des manipulations des opérations mathématiques et numériques, aussi un rappel des intégrations sur volume et contour et intégration par partie est donné en annexes.



CHAPITRE-II

GENERALITES SUR LES BARRAGES

2.1. Définition d'un barrage:

Un barrage est un ouvrage fixe construit en travers d'un cours d'eau, soit pour dévier soit pour élever ou pour mettre en réserve des débits surabondants; Cette retenue d'eau constitue un réservoir.

Ainsi les barrages sont des ouvrages hydrauliques destinés à retenir et à stocker de l'eau pour la restituer au moment voulu aux différents utilisateurs.

2.2. Objectifs d'un barrage:

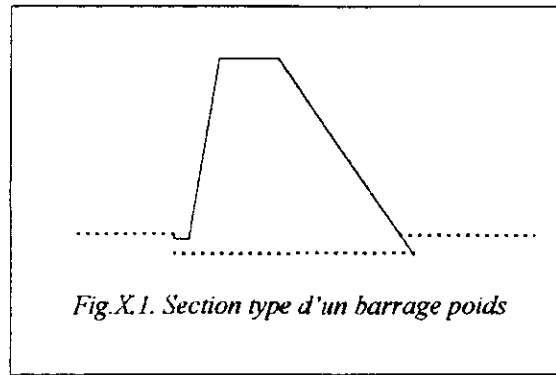
L'objectif principal d'un barrage d'après sa définition est le stockage et l'accumulation des eaux, cette accumulation sert à compenser l'inégalité des apports de la rivière et à adapter l'utilisation et la consommation de l'eau aux besoins:

- ♦ Constitution de réserves en période sèche;
- ♦ Production d'énergie électrique;
- ♦ Satisfaction des besoins en eaux domestique, agricoles ou industriels;
- ♦ Secrètement des crues et des ruissellements d'orage des zones urbaines.

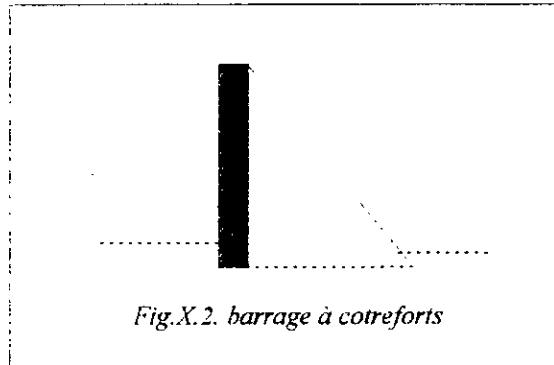
2.3. Différents types de barrages en béton:

Parmi les barrages en béton on peut distinguer trois types selon leurs formes et leur comportement mécanique.

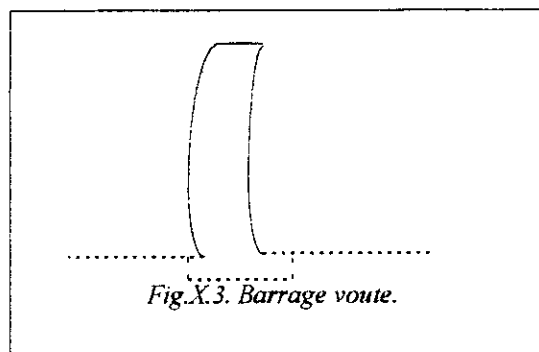
a) Barrage poids: Massif, ces barrages de section transversale triangulaire, résistent à la poussée de l'eau par leurs poids, à ce type de barrage on peut rattacher les barrages-poids précontraints, les barrages poids évidés dans lesquels certains évidements ont été ménagés, et enfin les barrages mobiles.



b) Barrages à contreforts: De formes très variées, ils ont en communs de résister pour l'ensemble par leur poids et par leurs formes constituer d'un voile en amont qui reporte la poussée de l'eau sur les contreforts; Ils utilisent moins de béton que les barrages poids.



c) Barrages voûtés:



c-1. A voûtes simples: Ils résistent grâce à leurs formes à la poussée de l'eau qu'ils reportent sur le terrain d'appuis en rive et en thalweg. Constituer d'une voûte parfois très mince, à simple ou à double courbure,

les barrages voûtés transmettent au rocher d'appui des efforts nettement plus élevés que les autres types de barrages ce qui nécessite un sol de très bonne qualité.

c-2. A voûtes multiples: Ces derniers, sans que leur poids ne soit prépondérant, reportent en définitive les efforts sur le sol de fondation. Les poussées de voûtes, la mise en œuvre délicate, la haute qualité des matériaux le constituant fait que son prix soit élevé.

2.4. Avantage et inconvénients des différents types de barrages:

Les barrages béton exercent des pressions sur le sol plus intenses que les digues simples. Ils nécessitent donc un sol de très bonne qualité, en général de la roche saine. le barrage poids est plus facile à réaliser que le barrage voûté (moins de coffrage, main d'œuvre pas de haute qualification).

les barrages poids sont essentiellement menacés par les sous pressions, d'où la nécessité d'un drainage soigné et souvent important. Le barrage voûte, utilisant la capacité de résistance de la maçonnerie à la compression conduit à l'économie maximum de matériaux. Il s'applique donc aux gorges étroites et peut procurer dans le cas le plus favorable, une économie de 2/3 par rapport aux barrages poids correspondant.

2.5. Sol de fondation:

le sol de fondation des barrages en béton doit être en mesure de fournir un appui largement suffisant pour absorber les efforts transmis par la structure. Il doit être exempt des déformations, même moindres différentielles par rapport aux zones avoisinantes à fin d'éviter des conséquences nuisibles sur la structure :

2.6. Actions auxquelles sont soumis les barrages poids:

2.6.1- Action de l'eau:

2.6.1-a- Poussé hydrostatique de l'eau: C'est la pression que l'eau exerce directement sur le parement amont de l'ouvrage à une profondeur z .

2.6.1-b- Sous pression: C'est l'action de l'eau qui a pénétré dans les interstices de la fondation ou sur les sections horizontales de la structure.

2.6.1-c- Autre forme de l'action de l'eau: L'action de l'eau peut prendre diverses formes notamment:

- Une partie de l'ouvrage peut être déversante et l'impact de l'eau en aval peut alors provoquer des affouillements dangereux pour la stabilité de l'ouvrage si leur confinement n'est pas assuré;
- L'eau en s'écoulant à forte vitesse sur des parois en béton peut provoquer l'érosion rapide;
- L'arrivée d'une crue d'importance imprévue peut d'abord provoquer une montée anormale du plan d'eau qui se traduira par une augmentation notable de pression de l'eau en amont.
- Enfin l'eau peut agir chimiquement sur le béton du parement amont.

2.6.2- Action du poids propre du barrage:

Cette action est favorable à la stabilité de l'ouvrage, il convient par conséquent d'évaluer le poids volumique du béton que l'on est assuré d'atteindre à la mise en œuvre.

On peut en générale compter sur un poids volumique de béton de 2400 Kg/m^3 sauf dans le cas où l'on doit utiliser des granulats lourds tels que le basalte et un compactage énergétique donnant au béton un poids spécifique de 2500 Kg/m^3 .

2.6.3- Action des séismes:

Elles tiennent compte des effets des secousses telluriques horizontales et verticales sur le poids propre et sur l'action de l'eau.

2.6.4- Variation de température (Retrait et gonflement du béton):

Les variations de température, le retrait et le gonflement du béton ont des actions analogues sur l'ouvrage. Ces trois actions se traduisent par des variations dimensionnelles (dilatation ou contraction) qui, si elles se trouvent gainées, provoquent des contraintes supplémentaires dans le béton.

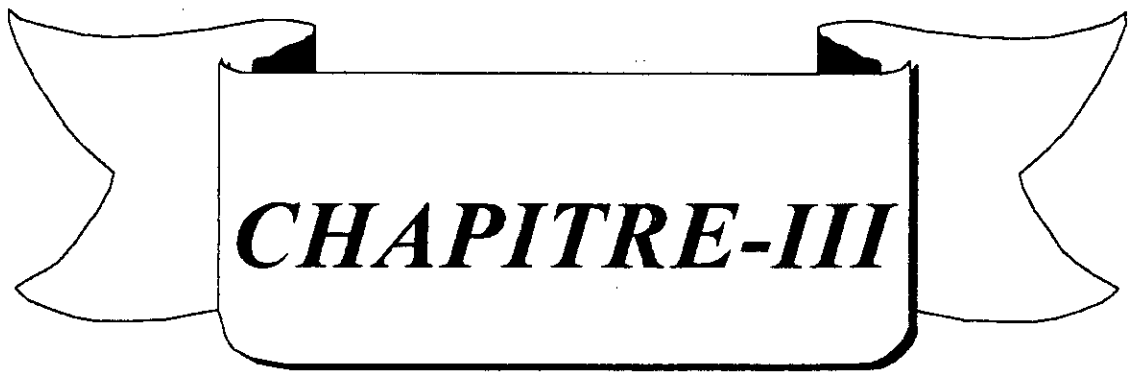
Le coefficient de dilatation thermique du béton dépend essentiellement des granulats utilisés.

Le retrait est un phénomène de raccourcissement qui accompagne la prise et le durcissement du béton, la valeur limite n'étant parfois atteinte qu'au bout de plusieurs années.

Le gonflement est un phénomène inverse puisqu'il se produit lorsque on humidifie un béton préalablement soumis à une poussée. Ce phénomène peut se produire sur le parement amont.

2.6.5- Actions diverses:

d'autres phénomènes peuvent influencer sur les barrages, tels que le dépôt de terres par transport (envasement).



CHAPITRE-III

SYSTEME COUPLE

3.1. Introduction:

L'analyse du comportement dynamique des barrages présente un certain nombre de traits spécifiques, indépendants du type particulier de l'ouvrage: barrage-voûte, barrage-poids en béton ou en maçonnerie, barrage en remblai...

Tout d'abord, le comportement d'un barrage dépend des propriétés de sa fondation. Il en résulte systématiquement, lors d'un séisme, un couplage dynamique entre le barrage et sa fondation se traduisant par une interaction importante entre le sol et l'ouvrage proprement dit.

La deuxième particularité des barrages est de contenir un réservoir. Ici encore, il est nécessaire de prendre en compte l'interaction dynamique entre l'eau du réservoir et le barrage.

3.2. Définition:[23]

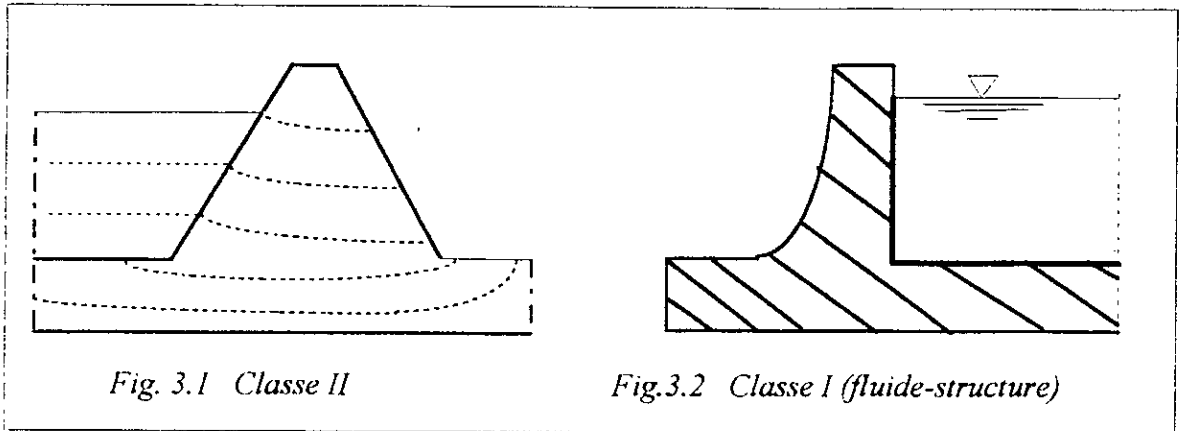
Les systèmes couplés sont ceux applicables à plusieurs domaines, où les variables dépendantes permettent souvent (mais pas toujours) de décrire différents phénomènes physiques.

3.3. Classification des systèmes couplés:

Les problèmes couplés sont classés en deux (2) catégories [23]:

Classe I: Problèmes où le couplage se produit dans l'interface, via les conditions aux limites imposées. Généralement les domaines décrivent différentes situations physiques mais il est possible de considérer le couplage entre plusieurs domaines physiquement similaires où on a utilisé différents procédés de discrétisation.

Classe II: Ici le couplage se produit à travers les équations différentielles gouvernantes décrivant différents phénomènes physiques.

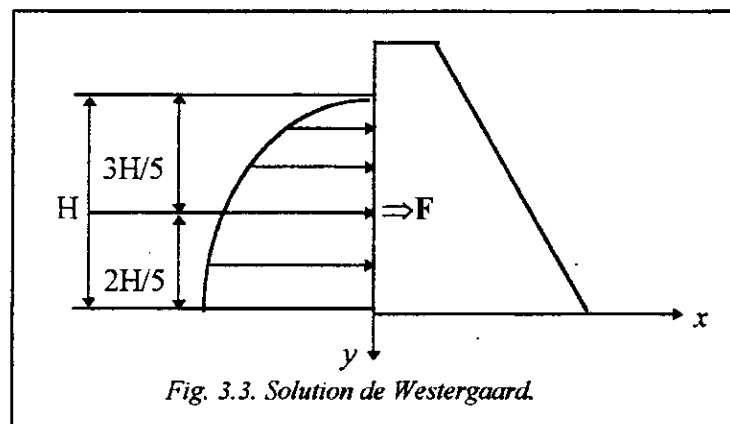


3.4. Couplage hydrodynamique:

3.4.1 Solution de Westergaard [21]:

Pendant la secousse sismique, les parois du réservoir (fond de la retenue et parement amont du barrage) sont soumises à des mouvements. Ces mouvements génèrent dans l'eau du réservoir des ondes de pression.

La première approche de ce phénomène a été apportée par WESTERGAARD, qui a calculé la répartition de pression sur un écran vertical limitant un réservoir semi-infini de profondeur constante dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran de période T .



La solution exacte est donnée sous forme d'un développement en série de sinus:

$$P = \frac{8\alpha\gamma_w h}{\Pi^2} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 C_n} \sin \frac{n\Pi y}{2h} \quad (3.1)$$

$$\text{avec: } C_n = \left(1 - \frac{16\gamma_w h^2}{n^2 gkT^2}\right)^{1/2} = \left[1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right]^{1/2} \quad (3.2)$$

- où: P : pression sur l'écran
 α : coefficient sismique
 γ_w : poids volumique de l'eau
h : profondeur du réservoir
k : module de compressibilité de l'eau
T : période du mouvement du mur supposé harmonique
 $T_0 = \frac{4h}{C}$: période propre du réservoir
C : célérité des ondes de compression dans l'eau ($C \approx 1440$ m/s).

On constate que le terme correctif $\frac{1}{n^2} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2$, dû à la compressibilité de l'eau est négligeable, dès que T_0 la période propre du réservoir est petite devant celle du mur.

Dans le cas où la compressibilité de l'eau peut être légitimement négligée, on peut établir une expression parabolique approchée du résultat, indépendante de la période de vibration de l'écran:

$$P(y) = \frac{7}{8} \alpha \gamma_w (hy)^{1/2} \quad (3.3)$$

La force totale appliquée sur l'écran est égale à:

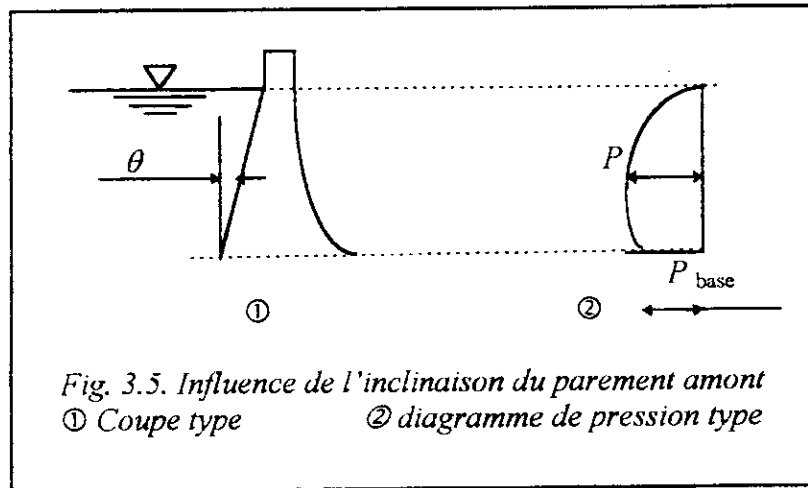
$$F = \frac{7}{12} \alpha \gamma_w h^2 \quad (3.4)$$

Elle s'applique en un point situé au 2/5 de la hauteur en partant du bas (voir fig 3.3).

3.4.2. Inclinaison du parement amont [8]:

L'influence du fruit du parement amont a été étudiée par ZANGAR, par la méthode de l'analogie électrique pour la résolution de l'équation de Laplace régissant l'évolution de la pression dans le réservoir.

Les résultats expérimentaux ont fait l'objet d'une formulation analytique approchée, pour permettre un calcul rapide de la force hydrodynamique sur le parement incliné (fig 3.5).



La pression à une profondeur y , est donnée par la formule:

$$P(y) = \frac{1}{2} \alpha \gamma_w h C_m \left[\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) + \left(\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) \right)^{1/2} \right] \quad (3.5)$$

où C_m est une fonction de l'angle du parement amont avec la verticale.

Pour une inclinaison variable du parement amont, la distribution de pression $P(y)$ peut aisément être calculée par la méthode des éléments finis.

3.4.3. Critique.

Dans l'analyse précédente, la structure est supposée rigide et se déplace avec le fond de la retenue. Cette hypothèse est acceptable lorsque la fréquence du séisme est petite devant la fréquence propre de la structure, qui suit le mouvement de la fondation.

En fait, la déformabilité de la structure modifie l'interaction fluide-structure, et un paramètre supplémentaire, la période fondamentale de vibration du barrage, s'introduit.

Les ondes de pression sur le mur modifient le mouvement du mur qui lui-même influe sur la répartition des pressions dans le fluide. On est en présence d'un phénomène de couplage.

Dans la méthode de Westergaard, ce couplage n'est pas pris en compte puisque le mouvement du mur est donné à priori.

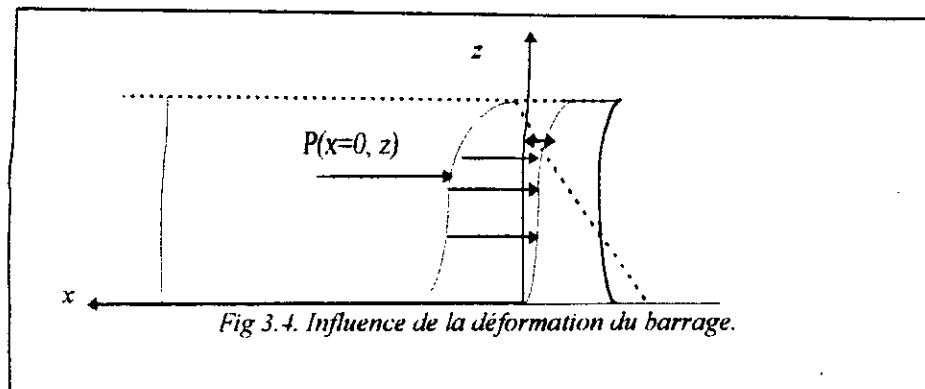
3.4.4. Solution semi-analytique [5]:

La méthode de calcul développée par CHAKRABARTI et CHOPRA permet de prendre en compte l'influence du réservoir sur les caractéristiques modales de la structure et sur la réponse du système couplé à une sollicitation sismique: les équations dans la structure sont résolues par un programme d'analyse de structure (SAP IV) et les équations dans le réservoir sont résolues analytiquement.

3.4.4.1 Equation de la structure:

L'équation du mouvement régissant la structure couplée soumise à un séisme horizontal est du type:

$$M\ddot{r}(t) + C\dot{r}(t) + Kr(t) = -M\gamma_e(t) + R(t) \quad (3.6)$$



$r(t)$: vecteur des déplacements relatifs nodaux

$\dot{r}(t)$: vecteur des vitesses relatives nodales

$\ddot{r}(t)$: vecteur des accélérations relatives nodales

M : matrice de masse de la structure

C : matrice d'amortissement de la structure

K : matrice de rigidité de la structure

M_t : masse totale de la structure

$\gamma_e(t)$: accélération d'entraînement = accélération au fond de la retenue

$R(t)$: vecteur des forces hydrodynamiques

$r(t)$ se décompose dans la base des vecteurs propres Φ_K de la structure sans fluide, normé par la matrice de masse, de la façon suivante:

$$r(t) = \sum_{K=1}^N Y_k(t) \Phi_K \quad (3.7)$$

où Y_k est la coordonnée modale n° K.

Φ_K déformée modale n°K de la paroi.

N équations découplées sont alors obtenues:

$$\ddot{Y}_k(t) + 2 \xi \omega_k \dot{Y}_k(t) + \omega_k^2 Y_k(t) = \Phi_k [R(t) - M_t \gamma_e(t)] \quad (3.8)$$

L'accélération absolue normale à la paroi de l'interface vaut:

$$\ddot{U}(z,t) = \ddot{r}(z,t) + \gamma_e(t) \quad (3.9)$$

3.4.4.2. Equation dans le fluide:

A l'intérieur du fluide, supposé incompressible, les équations s'écrivent:

$$\nabla^2 P = 0 \quad (3.10)$$

Les conditions aux limites s'écrivent:

-A l'interface entre le fluide et la structure:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, z, t) = -\rho \ddot{U}(z, t) = -\rho [\sum \ddot{Y}_k(t) \Phi_k(0, z) + \gamma_e(t)] \quad (3.11)$$

-Pression nulle à la surface du réservoir, ce qui suppose qu'il n'y a pas d'ondes de surfaces:

$$P(x, H, t) = 0 \quad (3.12)$$

-Condition de radiation des ondes par l'extrémité de la retenue.

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x = \infty, z, t) = 0 \quad (3.13)$$

Par linéarité, la solution peut s'écrire sous la forme:

$$P(x, z, t) = \sum_{K=1}^N \ddot{Y}_K(t) P_K(x, z) + P_0(x, z) \gamma_e(t) \quad (3.14)$$

$P_0(x, z)$ est la répartition des pressions dans le fluide lorsque la paroi a une accélération unité.

Les équations vérifiées par $P_K(x, z)$, sont indiquées sur la figure 3.4. Les équations vérifiées par $P_0(x, z)$, sont identiques, $\Phi_K(x, z)$ étant remplacé par le déplacement horizontal rigide de la structure. La solution analytique de ces équations s'écrit:

$$P_K(0, z) = \frac{2\rho}{H} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^H \Phi_K(0, z) \cos \lambda_i z dz \right) \frac{\cos \lambda_i z}{\lambda_i} \quad (3.15)$$

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2H} \quad (3.16)$$

et

$$P_0(0, z) = -\frac{2\rho}{H} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{\cos \lambda_i z}{\lambda_i^2} \quad (3.17)$$

Le vecteur des forces hydrodynamiques s'obtient alors par intégration des pressions sur la hauteur du barrage:

$$R(t) = \int_0^H P(0, z, t) dz = \sum_{K=1}^N Y_K(t) \int_0^H P_K(0, z) dz + \gamma_e \int_0^H P_0(0, z) dz \quad (3.18)$$

$$R(t) = \sum R_K \ddot{Y}_K(t) + R_0 \gamma_e(t) \quad (3.19)$$

Le vecteur des forces hydrodynamiques apparaît ainsi comme la somme de deux termes:

$R_0 \gamma_e(t)$ est la solution obtenue par la méthode de Westergaard, dans laquelle on suppose que le mouvement relatif de l'eau et de la structure est une translation horizontale, sans déformation de la structure. Ce terme est en phase avec les forces d'inertie agissant sur la structure, il apparaît donc comme un terme de masse ajoutée.

$\sum_{K=1}^N R_K \ddot{Y}_K(t)$ est la somme des contributions des différents modes de vibration de la structure. Ce terme traduit l'influence de la déformabilité de la structure.



CHAPITRE-IV

***PRESENTATION DE
M.E.F.***

4.1. Introduction:

L'évolution de la technologie a amené l'ingénierie à réaliser des projets de plus en plus coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères (projets spatiaux). Ainsi grâce à de nombreuses recherches, les chercheurs ont établi une méthode de discrétisation qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique appelée méthode des éléments finis.

Le concept d'éléments finis fut introduit pour la première fois par 'TURNER, MART et TROP' en 1956, ils représentent un milieu élastique à deux (2) dimensions par un assemblage d'éléments finis. Le comportement de chaque élément est caractérisé par une matrice de rigidité élémentaire, et à partir de ces matrices, la technique classique des structures conduit à la résolution.

Pendant les vingt dernières années la méthode des éléments finis est devenue la procédure standard pour l'analyse des structures complexes, notamment dans le cas de l'étude du comportement sismique des structures présentées par des modèles bidimensionnels. Elle est devenue pratiquement la seule capable d'évaluer les contraintes dynamiques dans les barrages et dans les structures spatiales de type complexes.

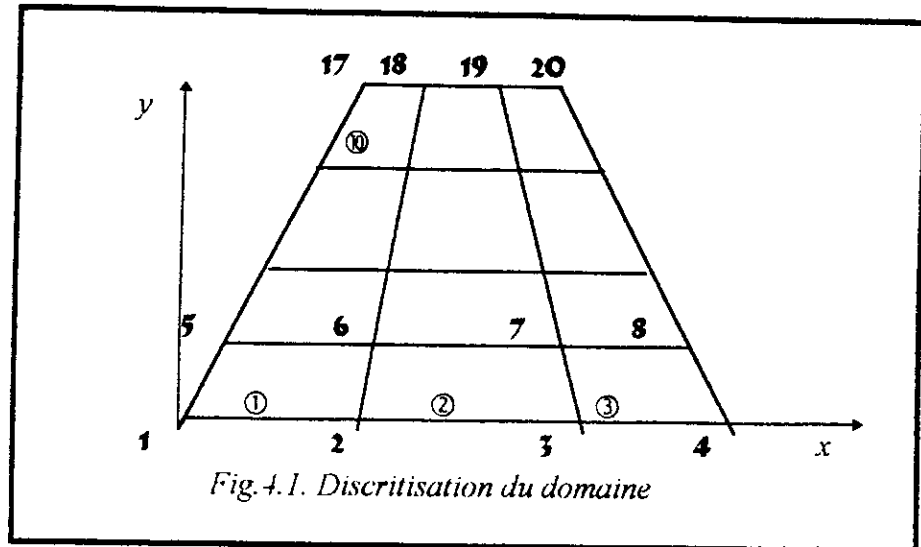
Dans ce qui suit, nous essayerons de présenter de manière succincte des étapes d'application de la méthode, et les outils nécessaires dans le cas bidimensionnel.

4.2. Les codes généraux de la méthode.

4.2.1. Discretisation du domaine

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaine, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier par des lignes imaginaires en éléments finis supposés liés les un

aux autres en un nombre finis de nœuds se trouvant aux coins des éléments ou tout le long de leurs frontières, puis on numérote les nœuds et les éléments le long de la largeur qui comporte moins de nœuds, afin d'avoir une matrice de rigidité bandée.



L'étape suivante consiste à exposer la technique d'approximation, et à introduire des notions de fonctions d'interpolations, élément de référence et transformation géométrique.

4.2.2. Concept d'approximation.

Il n'est pas toujours possible de trouver une fonction exacte pour décrire un phénomène physique, ce qui nous amène à trouver une fonction approchée, grâce à laquelle, nous pouvons remplacer le système continue par un système discrétisé équivalent.

Dans les domaines où le nombre de nœuds est important, la construction d'une fonction approchée est difficile, et elle se complique encore si le domaine a une forme géométrique complexe.

De manière à simplifier la construction, intervenant l'approximation sur chaque élément.

Représentons les approximations des déplacements U en chaque point de l'élément selon:

$$U = \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = N U_n \quad (4.1)$$

où les composantes de N sont des fonctions choisies des coordonnées du point (fonction de forme) et où U_n représente l'ensemble des déplacements nodaux. avec:

$$U = \begin{Bmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad U_i = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} . \quad (4.2)$$

La manipulation et la formulation des expressions telles que dérivées et intégrales dans le cas des éléments complexes deviennent complexe, afin de simplifier le problème, introduisons la notion de l'élément de référence.

4.2.3. Élément de référence:

Un élément de référence est un élément très simple repéré dans un espace de référence qui peut être transformé en chaque élément réel, par une transformation géométrique τ^e bijective définit les coordonnées $X \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ de l'élément réel, à partir des coordonnées $\xi \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}$ du point correspondant de l'élément de référence.

La transformation τ^e dépend de la forme et de la géométrie de l'élément, il y a donc de transformation pour chaque élément.

$$\tau^e : \xi \longrightarrow X^e = X(\xi)$$

$$X(\xi) = \langle \bar{N}(\xi) \rangle X_n \quad (4.3.)$$

où X_n : les coordonnées de l'élément;

$\bar{N}_i(\xi)$: fonctions de transformation géométrique.

La méthode la plus simple pour déterminer les fonctions de transformations géométriques et d'utiliser des éléments isoparamétriques qui sont définis par des fonctions d'interpolations et de transformations identiques.

$$\bar{N}(\xi) = N(\xi)$$

d'où on peut écrire:

$$X = \langle N \rangle \{ X_n \} \quad (4.3.a)$$

$$U = \langle N \rangle \{ U_n \} \quad (4.3.b)$$

où $N(\xi)$ dite aussi fonction de forme, déterminé en remplaçant l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence.

Ces fonctions de formes sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel, donc les mêmes fonctions $N(\xi)$ peuvent être utilisé pour tous les éléments possédant le même élément de référence.

Les termes des fonctions de formes d'un élément isoparamétrique à quatre (4) nœuds sont:

$$N_1(\xi) = N_1(\xi, \eta) = 1/4 (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_2(\xi) = N_2(\xi, \eta) = 1/4 (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_3(\xi) = N_3(\xi, \eta) = 1/4 (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$N_4(\xi) = N_4(\xi, \eta) = 1/4 (1 - \xi) (1 + \eta)$$

4.3. Formulation intégrale:

L'ingénierie et la physique donnent naissance à d'autres problèmes continus posé en terme d'équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Pour poser le problème à résoudre dans les termes les plus généraux, nous cherchons une fonction u qui satisfasse un certain nombre d'équations différentielles.

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

dans un domaine Ω (volume, surface,.....ect) (voir Fig.4.1.), ainsi que les conditions aux limites:

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

sur le bord Γ du domaine.

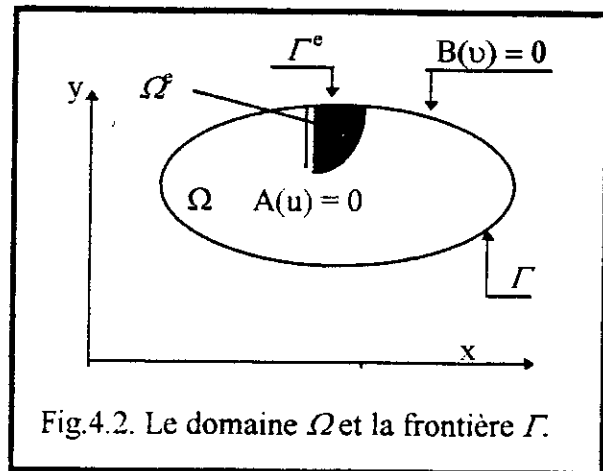


Fig.4.2. Le domaine Ω et la frontière Γ .

Et pour conduire à un système algébrique les équations doivent être reformulées sous forme intégrale.

Pour toute fonction de pondération Ψ , la forme intégrale s'écrit:

$$\int_{\Omega} \Psi A(u) d\Omega = 0 \tag{4.6}$$

Cette équation est appelée forme intégrale forte. En faite, la résolution a encore plus de portée, nous pouvons affirmer que si l'équation (4.6) est satisfaite pour tous Ψ , alors les équations différentielles (4.4) et (4.5) sont satisfaites en tout point du domaine Ω [22].

Dans la pratique, il est possible d'intégrer l'équation (4.6) par partie, on a:

$$\int_{\Omega} C(\Psi) D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(\Psi) F(u) d\Gamma = 0 \tag{4.7}$$

ou: C, D, E et F sont des opérateurs qui contiennent des dérivées moins élevée. Cette formulation est la formulation faible.

La fonction de pondération est en générale choisie en disposant la méthode des résidus pondérés connue sous le nom de la méthode de GALERKINE.

4.4. Principe du travail virtuel:

Actuellement le principe du travail virtuel est bien connu et est très répandu, il se traduit par l'égalité du travail des forces extérieures au travail des contraintes développées par le système. Sous forme intégrale le principe du travail virtuel n'est autre qu'une formulation faible des équations d'équilibres [22].

4.5. Intégration numérique de Gauss:

L'idée de base de cette méthode consiste à répondre à la question suivante: si le choix de l'expression:

$$\int_a^b y \, dx = \sum_{i=1}^r W_i y(x_i) \quad (4.8)$$

appliquée à 'r' points d'abscisses x_i est fait, il serait intéressant de savoir s'il est possible de choisir les x_i et W_i pour avoir des formules de quadratures qui assureraient la précision la plus grande. Pour répondre d'une manière affirmative à cette question, on a utilisé les polynômes orthogonaux, et ce à cause de certaines de leurs propriétés.

Les polynômes les plus utilisés sont ceux de Legendre. Ces derniers étant définis dans l'intervalle $[-1, +1]$, il est donc nécessaire d'effectuer un changement de variable linéaire transformant $x \in [a, b]$ en $\xi \in [-1, +1]$, la transformation en question est:

$$x_i = (b+a)/2 + (b-a) \xi_i / 2$$

où les ξ_i sont les racines du polynôme de Legendre, qui est défini par la relation de récurrence:

$$P_0(\xi) = 1$$

$$P_1(\xi) = \xi$$

$$P_K(\xi) = \frac{2K-1}{K} \xi P_{K-1}(\xi) - \frac{K-1}{K} P_{K-2}(\xi) \quad r \geq K \geq 2. \quad (4.9)$$

Les poids W_i s'écrivent:

$$W_i = \frac{2(1-\xi_i^2)}{(rP_{r-1}(\xi_i))^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.10)$$

$$\int_{-1}^1 y(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r W_i y(\xi_i) \quad (4.11)$$

L'intégration à deux (2) dimensions consiste à réaliser dans chaque direction ξ et η une intégration numérique à une dimension. Si nous utilisons r_1 points dans le sens ξ et r_2 points dans le sens η , la méthode de Gauss intégrera exactement le produit d'un polynôme en ξ d'ordre $2r_1 - 1$ et d'un polynôme en η d'ordre $2r_2 - 1$.

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^r W_i y(\xi_i, \eta_i) \quad (4.12)$$

Formule intégrant exactement des polynômes d'ordre m incluant des monômes ξ^i, η^j telle que $i+j \leq m$.

4.5.1. choix du nombre des points d'intégration:

Le choix du nombre de points d'intégration dépend du type de l'élément utilisé et de la matrice que l'on construit. En pratique, on choisit

le plus souvent un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul.[22], [7]

L'expérience a montré que l'intégration réduite, peut donner de meilleurs résultats que l'intégration exacte. Par contre il existe pour chaque type d'éléments, un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel la singularité de la matrice K peut se produire. Pour ces raisons les quadratures à quatre points (4) sont maintenant, d'usage presque universel pour les éléments quadratiques.

4.6. formulation matricielle:[22] [7]

Pour effectuer un calcul par la méthode des éléments finis, nous devons déterminer les matrices caractérisant les propriétés de l'élément, c'est-à-dire les matrices de raideur et de masse.

Comme on le verra plus tard celles-ci sont de la forme:

$$K^e = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (4.13)$$

$$M^e = \int_{\Omega} N^T \rho N d\Omega \quad (4.14)$$

où les matrices B_i s'écrivent:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

en utilisant la notation indicielle:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = N_{i,x}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Pour calculer ces matrices, remarquons que deux (2) opérations sont nécessaires. Premièrement, comme N_i est exprimée en fonction de l'élément de référence, nous devons déterminer les coordonnées globales (l'élément réel) en fonction des dérivées locales.

Deuxièmement, l'élément de volume sur lequel l'intégration s'effectue, doit être exprimé en fonction des coordonnées locales.

4.6.1. Transformation des dérivées:

Selon les règles de calcul des dérivées partielles on aura:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (4.17)$$

sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

la matrice J s'appelle matrice jacobienne.

Pour retrouver les dérivées par rapport au système de coordonnées globales, nous inversons J et nous écrivons:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Nous pouvons écrire explicitement la matrice J , en utilisant la transformation des coordonnées, on a:

$$\begin{aligned} x &= \langle N \rangle \{x_n\} \\ y &= \langle N \rangle \{y_n\} \end{aligned}$$

nous obtenons:

$$J = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\xi} \rangle \{y_n\} \\ \langle N_{,\eta} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{y_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_n\} \\ \{y_n\} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

La transformation du domaine d'intégration s'écrit:

$$d\Omega = dx dy = \det J d\xi d\eta$$

donc les équations (4.13) et (4.14) s'écrivent:

$$K^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T D B \det J d\xi d\eta \quad (4.21)$$

$$M^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N^T \rho N \det J d\xi d\eta. \quad (4.22)$$

4.7. Assemblage:

Une fois la construction des matrices élémentaires est effectuée, nous procédons à l'assemblage des matrices élémentaires pour former les matrices globales. La technique est de situer la matrice élémentaire de chaque élément dans la matrice globale.

4.7.1 Conditions aux limites:

Le traitement des conditions aux limites se traduit par des opérations effectuées sur les matrices globales du système à résoudre.

4.7.1.1 Méthode du terme diagonal dominant:

cette méthode est efficace et facile à programmer, elle consiste à ajouter une très grande valeur α au coefficient K_{ii} et remplacer le second membre par $\alpha \bar{U}_i$. La $i^{\text{ème}}$ équation s'écrit:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} U_j + \alpha U_i = \alpha \bar{U}_i \Leftrightarrow \bar{U}_i = \frac{\sum_{j=1}^n K_{ij} U_j}{\alpha} + U_i \quad (4.23)$$

et puisque α est très grand:

$$\frac{\sum K_{ij} U_j}{\alpha} \longrightarrow 0$$

on obtient:

$$U_i = \bar{U}_i \quad (4.24)$$

4.7.1.2 Méthode du terme unité sur la diagonale:

Cette méthode ne pose pas les problèmes numériques, par contre elle est très complexe à programmer.

Elle consiste à modifier, pour chaque relation $U_i = \bar{U}_i$ le vecteur force et la matrice K.

4.7.1.3 Méthode de suppression des lignes et des colonnes:

Elle consiste à supprimer les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté imposés dans les différentes matrices du système à résoudre. Elle a comme avantage de réduire le nombre d'inconnues du système, par contre, elle est compliquée à programmer.

4.8. Critères de convergence:

La méthode des éléments finis, fournit une solution approchée, et pour assurer la convergence vers la solution exacte, simples conditions doivent être vérifiées et pour poser ces conditions, ZIENCHIEWICZ annonce trois (3) critères que la fonction d'interpolation doit satisfaire.

Critère n°1:

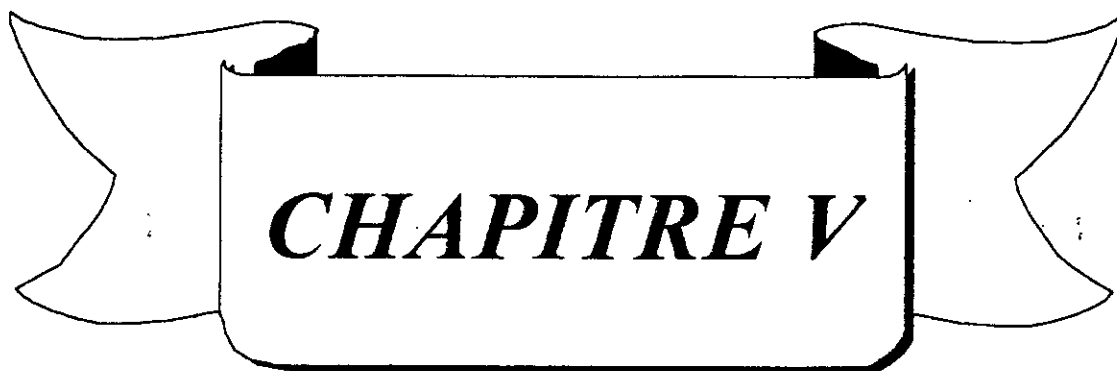
La fonction représentative des déplacements (fonction d'interpolation) doit être telle qu'il soit impossible qu'un élément se déforme quand les déplacements de ses nœuds sont causés par un mouvement de corps solide. Pour satisfaire cette condition on doit choisir avec soins les fonctions d'interpolations.

Critère n°2:

Lorsque la hauteur des éléments tend vers zéro (0) (élément très petit), les déformations vont être à peu près constantes, il est très souhaitable, pour une bonne précision de l'approximation, que les éléments de taille finie permettent leur représentation exacte. Il existe des fonctions qui satisfassent au premier terme, mais qui en même temps entraînent une variation des déformations à l'intérieur de l'élément, de telles fonctions ne conduiront pas en générale à une bonne convergence, donc la fonction représentative des déplacements doit être telle que, si les déplacements nodaux correspondant à des déformations constantes on obtient effectivement ces déformations constantes.

Critère n°3:

La fonction représentative des déplacements doit être choisie de telle sorte que les déformations aux interfaces entre élément restent bornées.



MODELISATION

5.1. Développement des équations:

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse statique et dynamique nécessite la connaissance des équations de base de la théorie d'élasticité.

5.1.1. Equation d'élasticité dans le cas bidimensionnel:

5.1.1.1 Déformations:

Une fois les déplacements connus en tous points, les déformations sont déterminées en fonction de ces déplacements par les équations classiques:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon = \mathbf{S} \mathbf{U} \quad (5.1)$$

De l'approximation par élément finis on a:

$$\mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{U}_n \quad (5.2)$$

Nous pouvons écrire:

$$\varepsilon = \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{U}_n \quad (5.3)$$

posons $\mathbf{S} \mathbf{N} = \mathbf{B}$, on obtient:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

5.1.2.2. Contraintes:

De la loi de HOOKE, on peut écrire:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

ou sous forme matricielle:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon = \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{U} \quad (5.5)$$

avec :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

et D est la matrice d'élasticité:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

La matrice D sera simplement obtenue à partir des équations usuelles entre contraintes et déformations:

Cas contraintes planes:

$$d_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (5.6.a)$$

$$d_2 = \nu d_1 \quad (5.6.b)$$

$$d_3 = \frac{d_1 - d_2}{2} \quad (5.6.c)$$

Cas déformations planes:

$$d_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.7.a)$$

$$d_2 = \frac{\nu d_1}{(1-\nu)} \quad (5.7.b)$$

$$d_3 = \frac{d_1 - d_2}{2} \quad (5.7.c)$$

5.2. Equations de mouvements:

L'équation d'équilibre pour un corps infinitésimal s'écrit:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \gamma_i \quad (5.8)$$

5.2.1 Equation du barrage:

Dans le but d'obtenir une expression décrivant le comportement du solide (barrage), analogue à celle du travail virtuel utilisé par la méthode des éléments finis, réécrivons l'équation d'équilibre sous forme intégrale faible:

$$W = \int_{\Omega} \Psi (\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \gamma_i) d\Omega = 0 \quad (5.9)$$

En choisissant $\Psi = \delta U$ (méthode des résidus pondérés, connue sous le nom de méthode de GALERKINE).

$$W = \int_{\Omega} \delta U (\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \gamma_i) d\Omega = 0 \quad (5.10)$$

$$W = \int_{\Omega} \delta U_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta U_i F_i d\Omega + \int_{\Omega} \delta U_i (-\rho) \gamma_i d\Omega = 0$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 \quad (5.11)$$

Sachant que:

$$\int_{\Omega} (\delta U_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} \delta U_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta U_i \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (5.12)$$

donc:

$$W_1 = \int_{\Omega} \delta U_i \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta U_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \delta U_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (5.13)$$

En utilisant le théorème de Gauss:

$$\int_{\Omega} (\delta U_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} \delta U_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (5.14)$$

D'où:

$$W_1 = \int_{\Gamma} \delta U_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta U_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (5.15)$$

5.2.1.1 Conditions aux limites:

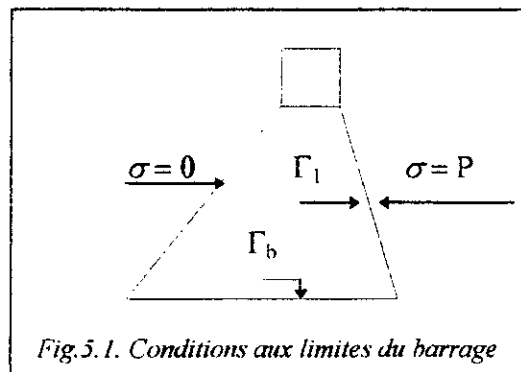
a) A la base du barrage (Γ_b):

Les déplacements à la base, sont considérés nuls.

b) Sur le parement amont (Γ_1):

Le chargement étant la pression hydrodynamique:

$$\sigma = P \quad (5.16)$$



c) Sur le reste du contour du barrage:

Etant donnée qu'il n'y a pas de chargement, les contraintes sont supposées nulles:

$$\sigma = 0$$

En tenant compte des conditions aux limites, l'expression de W devient:

$$W = \int_{\Gamma} \delta U_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta U_{ij} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta U_i F_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta U_i \rho \gamma_i d\Omega = 0 \quad (5.17)$$

Sous formes matricielles:

$$I_1 = \int_{\Gamma} \delta U_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta U \sigma \bar{n} d\Gamma$$

$$I_2 = \int_{\Omega} \delta U_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \epsilon \sigma d\Omega \quad (U_{ij} = \epsilon_{ij})$$

$$I_3 = \int_{\Omega} \delta U_i F_i d\Omega = \int_{\Omega} \delta U F d\Omega$$

$$I_4 = \int_{\Omega} \delta U_i \rho \gamma_i d\Omega = \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega \quad (\gamma_i = \ddot{U})$$

$$W = \int_{\Gamma} \delta U \sigma \bar{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \delta U F d\Omega - \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega = 0 \quad (5.18)$$

Nous développons cette dernière équation terme par terme, en introduisant l'approximation par éléments finis des déplacements dans le barrage, et pression dans le fluide:

$$U = N_u U_n \quad \Rightarrow \quad \delta U = N_u \delta U_n = \delta U_n^T N_u^T$$

$$P = N_p P_n \quad \Rightarrow \quad \delta P = N_p \delta P_n = \delta P_n^T N_p^T$$

$$* \quad I_1 = \int_{\Gamma_1} \delta U P \bar{n} d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_1} \delta U_n^T N_u^T \bar{n} N_p P_n d\Gamma$$

$$= \delta U_n^T Q P_n$$

$$(5.19)$$

$$Q = \int_{\Gamma_1} N_u^T \bar{n} N_p d\Gamma \quad (5.20)$$

$$* \quad I_2 = \int_{\Omega} \delta S U D S U d\Omega = \int_{\Omega} \delta (S N_u U_n) D (S N_u U_n) d\Omega$$

On a $B = S N$ d'où $\delta (S N_u U_n) = \delta U_n^T N_u^T S^T = \delta U_n^T B^T$

$$I_2 = \int_{\Omega} \delta U_n^T B^T D B d\Omega U_n$$

$$= \delta U_n^T K U_n \quad (5.21)$$

avec:

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (5.22)$$

$$* \quad I_4 = \int_{\Omega} \delta U_n^T N_u^T \rho N_u \ddot{U} d\Omega = \delta U_n^T M \ddot{U}_n \quad (5.23)$$

avec:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u d\Omega \quad (5.24)$$

En remplaçant les équations (5.19), (5.22), et (5.24) dans l'équation (5.18), on obtient:

$$\mathbf{W} = \delta \mathbf{U}_n^T \mathbf{Q} \mathbf{P}_n - \delta \mathbf{U}_n^T \mathbf{K} \mathbf{U}_n - \delta \mathbf{U}_n^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_n = 0 \quad (5.25)$$

d'où:

$$\mathbf{W} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

Pour un chargement sismique à la base d'accélération $\ddot{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma_b} \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} \rho \ddot{\mathbf{x}} d\Gamma \quad (5.27)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (5.28)$$

où (5.28) représente l'équation du mouvement du barrage du système non amorti dont:

M: représente la matrice masse;

K: matrice de rigidité;

Q: matrice d'interaction;

F: vecteur force.

Dans le cas d'un système amorti, l'équation du mouvement devient:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (5.29)$$

où **C** représente la matrice d'amortissement.

L'amortissement de la structure est supposé du type Rayleigh:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

et de Bathe [1]:

$$\alpha + \beta \omega_i^2 = 2 \xi_i \omega_i$$

En utilisant deux (2) fréquences (ω_i , ω_j) prises comme intervalle d'étude, et en associant une valeur d'amortissement ξ_i , les valeurs de α et β peuvent être calculées.

5.2.2. Equation du fluide:

Le fluide serait modélisé en ayant comme hypothèses:

- a/ subit de petits déplacements;
- b/ fluide non visqueux;
- c/ semi-infini;

L'équation d'équilibre du fluide est donc:

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} = \rho \dot{V} = -\nabla P \quad (5.30)$$

En associant les équations suivantes:

équation de continuité (équation de conservation de la masse):

$$\rho \operatorname{div} V = \rho \nabla V = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.31)$$

équation de compressibilité:

$$d\rho = \frac{\rho}{K} dP \quad (5.32)$$

et en multipliant (5.32) par $\partial/\partial t$, on obtient:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5.33)$$

En substituant (5.33) dans (5.31), on aura:

$$\rho \nabla V = -\frac{\rho}{K} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5.34)$$

et en multipliant (5.34) par d/dt , on obtient:

$$\rho \nabla \dot{V} = -\frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (5.35)$$

$$\rho \nabla \dot{V} = -\nabla^2 P \quad (5.36)$$

En égalisant les deux équations, on obtient:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{(K/\rho)} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (5.37)$$

en posant $C = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$: célérité des ondes sonores dans le fluide.

L'équation (5.37) devient:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (5.38)$$

Cette équation est celle qui régit la propagation d'ondes sonores dans le fluide (équation de HELMOLTZ).

5.2.2.1. Formulation variationnelle des équations du fluide:

Dans le but d'obtenir une expression décrivant le comportement du fluide, analogue à celle du travail virtuel utilisé par la méthode des éléments finis, réécrivant l'équation (5.38) sous forme intégrale faible:

$$W = \int_{\Omega} \Psi \left(\nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0 \quad (5.39)$$

En utilisant la méthode de GALERKINE:

$$\Psi = \delta P \quad (\delta \text{ fonction de DIRAK})$$

la forme faible est obtenue en intégrant l'équation (5.39) par partie, en utilisant le théorème de GREEN (voir annexe 5):

$$W = \int_{\Omega} \delta P \nabla^2 P d\Omega - \int_{\Omega} \delta P \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega = 0 \quad (5.40)$$

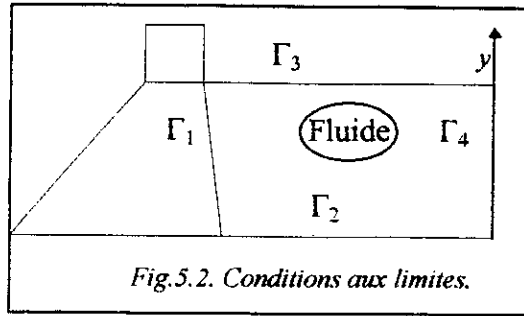
$$W = - \int_{\Omega} \delta \nabla P \nabla P d\Omega + \int_{\Gamma} \delta P \nabla P d\Gamma - \int_{\Omega} \delta P \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega = 0 \quad (5.41)$$

Conditions aux limites:

① Sur l'interface Γ_1 :

Les vitesses des points appartenants à cette limite, sont imposées. L'application de l'équation dynamique du fluide donne:

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \dot{V}_n = -\rho \ddot{U}_n \quad (5.42)$$



② Sur Γ_2 :

Sur cette limite on suppose qu'il n'y a que des mouvements horizontaux

$$V_y = 0$$

③ Sur la surface libre Γ_3 :

La solution la plus simple serait de prendre $P = 0$, mais elle ne prend pas en compte les ondes de surfaces, et pour les inclure on prend comme approximation une surface moyenne où $P = 0$.

Pour une élévation h :

$$P = \rho g h \quad (5.43)$$

Pour un abaissement h :

$$P = -\rho g h. \quad (5.44)$$

En appliquant l'équation dynamique:

$$V_y = \frac{\partial n}{\partial t} = \dot{h} \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \ddot{h} \quad (5.46)$$

de (5.43) on obtient:

$$h = \frac{P}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad \ddot{h} = \frac{1}{\rho g} \ddot{P}$$

on aura donc:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{g} \ddot{P} \quad (5.47)$$

Cette condition permet approximativement aux ondes de gravité d'être incorporées dans l'analyse. Elle est connue sous le nom de condition d'ondes de surface linéarisée.

④ Sur la limite de radiation Γ_4 :

Cette limite termine un domaine physiquement infini, donc une approximation tenant compte de cet effet est nécessaire.

La solution de l'équation d'onde n'est composée que de la partie incidente, puisqu'il n'existe aucune réflexion à partir du domaine infini. Si on ne considère que la variation horizontale la solution de l'équation de HELMOLTZ (5.38) est:

$$P = F(x-ct) + G(x+ct) \quad (5.48)$$

La solution sur Γ_4 se traduit par:

$$G(x + ct) = 0$$

donc on peut écrire:

$$P = F(x-ct)$$

d'où:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial x} = F' \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -cF' \quad (5.50)$$

donc:

$$F' = \frac{-1}{c} \frac{\partial P}{\partial t}$$

En remplaçant F' dans (5.49), on trouve:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5.51)$$

donc on aura:

$$\int_{\Gamma} \delta P \nabla P d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \delta P (-\rho \dot{U}_n) d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta P \left(-\frac{1}{g} \ddot{P}\right) d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta P \left(-\frac{1}{C} \frac{\partial P}{\partial t}\right) d\Gamma \quad (5.52)$$

En réécrivant l'expression de W , de l'équation (5.41) avec:

$$P = N_p P_n \Rightarrow \delta P = N \delta P_n \text{ et } \nabla P = \nabla N P_n :$$

$$\begin{aligned} W = & -\int_{\Omega} \delta P_n^T \nabla N_p^T \nabla N_p P_n d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta P_n^T N_p^T (-\rho n) N_u \dot{U}_n d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta P_n^T N_p^T \left(-\frac{1}{g}\right) N_p \ddot{P}_n \\ & + \int_{\Gamma_4} \delta P_n^T N_p^T \left(-\frac{1}{C}\right) N_p \dot{P}_n d\Gamma - \int_{\Omega} \delta P_n^T N_p^T \frac{1}{C^2} N_p \ddot{P}_n d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned}
W = \delta P_n^T & \left[\left(\int_{\Omega} \nabla N_p^T \nabla N_p d\Omega \right) P_n + \left(\int_{\Gamma_1} N_p^T \rho n N_u d\Gamma \right) \ddot{U}_n + \left(\int_{\Gamma_3} N_p^T \frac{1}{g} N_p d\Gamma + \int_{\Omega} N_p^T \frac{1}{C^2} N_p d\Omega \right) \ddot{P}_n \right. \\
& \left. + \left(\int_{\Gamma_4} N_p^T \frac{1}{C} N_p d\Gamma \right) \dot{P}_n \right] = 0
\end{aligned} \quad (5.54)$$

donc:

$$W = S\ddot{P} + \tilde{C}\dot{P} + HP + Q_p \ddot{U} = 0 \quad (5.55)$$

Dans le cas d'un séisme incliné ou de fond irrégulier, le système serait égal à un vecteur force q chargé le long du fond:

$$S\ddot{P} + \tilde{C}\dot{P} + HP + Q_p \ddot{U} = q \quad (5.56)$$

avec:

$$S = \int_{\Gamma_3} N_p^T \frac{1}{g} N_p d\Gamma + \int_{\Omega} N_p^T \frac{1}{C^2} N_p d\Omega \quad (5.57)$$

$$\tilde{C} = \int_{\Gamma_4} N_p^T \frac{1}{C} N_p d\Gamma$$

$$H = \int_{\Omega} \nabla N_p^T \nabla N_p d\Omega$$

$$Q_p = \int_{\Gamma_1} N_p^T \rho n N_u d\Gamma = \rho Q^T$$

$$q = \int_{\Gamma_2} N_p^T \rho \ddot{x} n d\Gamma$$

L'équation gouvernante dans le fluide devient:

$$S\ddot{P} + \tilde{C}\dot{P} + HP + \rho Q^T \ddot{U} = q \quad (5.58)$$

5.3. Système couplé:

5.3.1 Système libre non amortie:

Réécrivons les deux équations (solide, fluide):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{F}$$

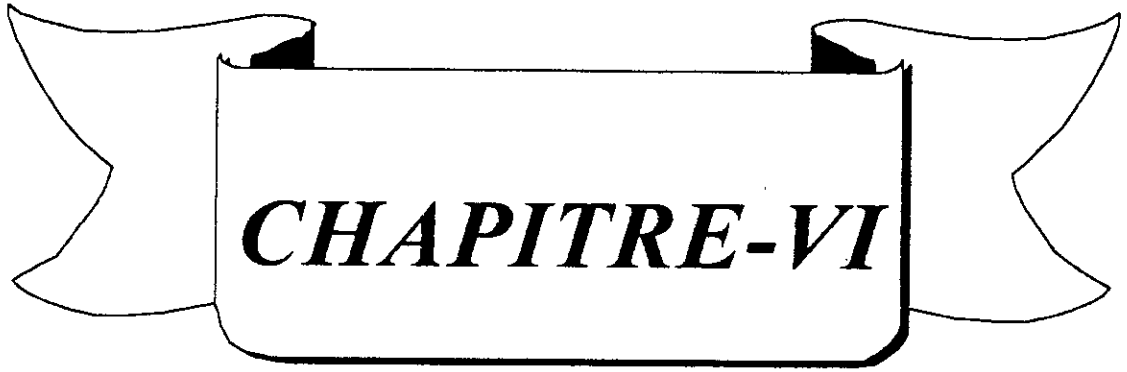
$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{H}\mathbf{P} + \rho\mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{q}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \rho\mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (5.59)$$

Si on néglige tous les termes d'amortissement et en supposant le chargement nul, on pourra écrire:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \rho\mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.60)$$



CHAPITRE-VI

***PROBLEME AUX VALEURS
ET VECTEURS PROPRES***

6.1. Introduction:

L'évaluation des valeurs propres constitue une phase de calcul difficile nécessitant généralement le plus de temps de calcul, aussi trouve-t-on dans la littérature spécialisée, de nombreux algorithmes permettant de résoudre les problèmes aux valeurs et vecteurs propres.

En effet, résoudre un problème de valeurs propres consiste à trouver des couples (λ_i, Φ_i) qui satisfont la relation suivante:

$$K \Phi_i = \lambda_i M \Phi_i \quad (6.1)$$

Ce type de problème apparaît lors de la détermination des modes propres d'une structure dans la quelle:

K : est la matrice de rigidité de la structure;

λ : est la matrice masse;

Φ_i : est le vecteur des déplacements de la structure définissant le $i^{\text{ème}}$ mode de vibration.

$\lambda_i = \omega^2$ est le carré de la pulsation correspondante .

Les méthodes de résolution de tels problèmes peuvent être subdivisées en 4 groupes

- ♦ Les méthodes itératives vectorielles;
- ♦ Les méthodes de transformations;
- ♦ Les techniques itératives polynomiales;
- ♦ Les méthodes de résolution des polynômes caractéristiques par la suite de STURM

Il est à remarquer que toutes les méthodes disponibles sont de nature itératives. En effet, la résolution du problème aux valeurs propres (6.1) est équivalent au calcul des racines du polynôme $P(\lambda)$, qui à un ordre égale à celui de K et M , et qu'elles sont toutes basées sur les propriétés

fondamentales des systèmes propres. Nous nous contenterons ici de rappeler brièvement les propriétés du système (6.1) sans démonstration et de présenter trois méthodes de résolutions très utilisées : Itération inverse, Jacobi et méthode du sous-espace.

6.2. Propriétés fondamentales des systèmes propres:

6.2.1. Valeurs propres:

Il existe n valeurs propres réelles λ_i , distinctes ou non, qui satisfont (6.1). Si les deux matrices sont définies positives, les valeurs λ_i sont positives. Nous pouvons les ordonner:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Réécrivant (6.1) sous la forme:

$$(K - \lambda M) \Phi = 0 \quad (6.2)$$

Il existe des vecteurs Φ non nuls satisfaisant (6.2) que si $K - \lambda M$ est singulière:

$$\det (K - \lambda M) = P(\lambda) = 0 \quad (6.3)$$

Cette expression est un polynôme caractéristique d'ordre n en λ , qu'il est difficile de construire explicitement pour des grands systèmes. La recherche des valeurs propres λ_i est donc identique à la recherche des racines d'un polynôme d'ordre n . Il n'existe pas des méthodes directes pour $n > 4$, Il faut utiliser des méthodes itératives.

6.2.2. Vecteurs propres:

A chaque valeur λ_i correspond un vecteur propre Φ_i solution de:

$$(K - \lambda_i M) \Phi = 0 \quad (6.4)$$

Les vecteurs propres satisfont les relations d'orthogonalités suivantes:

$$\Phi_i^T K \Phi_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad (6.5)$$

$$\Phi_i^T M \Phi_j = \delta_{ij} \quad (6.6)$$

avec:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

nous dirons que les vecteurs propres sont K-orthogonaux et M-orthonormés.

Ou sous forme matricielle:

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (6.7)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (6.8)$$

où Φ : matrice stockant les vecteurs propres par colonnes;

Λ : matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres.

6.2.3. Quotient de Rayleigh:

Le quotient de Rayleigh d'un vecteur quelconque Φ est:

$$\rho(\Phi) = \frac{\Phi^T K \Phi}{\Phi^T M \Phi} \quad (6.9)$$

Si K et M sont définies positives, alors:

$$0 < \lambda_1 < \rho(\Phi) < \lambda_n < \infty$$

De plus, si Φ coïncide avec un des vecteurs propres Φ_i alors $\rho\Phi_i$ coïncide avec la valeur propre correspondante λ_i .

6.2.4. Décalage des valeurs propres (shifting):

le décalage sert à améliorer la vitesse de convergence en transformant la matrice K en $\tilde{K} = K - \rho M$. où ρ est la valeur du décalage.

Ainsi l'équation (6.1) devient:

$$\tilde{K} \Psi = \mu M \Psi \quad (6.10)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi &= \Psi \\ \lambda &= \mu + \rho \end{aligned}$$

6.3. Méthodes de calcul des valeurs propres:

6.3.1. Méthode de Jacobi:

Elle permet de calculer les n valeurs et vecteurs d'un système de dimensions limités. La méthode est applicable aux systèmes générants des matrices K et M définies positives, elle consiste à transformer la base de leur écriture de manière à avoir à la fin des matrices diagonales. A partir des termes des diagonales, sont déduites les valeurs propres:

$$\omega_i^2 = K_{ii} / M_{ii}. \quad (6.11)$$

La diagonalisation des matrices exige un processus itératif se basée sur les valeurs des termes non diagonaux de K et M ; le but étant de les annuler.

Pour ce faire, on calcule à chaque itération (k), les termes d'une matrice de passage Q_k , chaque itération permet à deux (2) termes non diagonaux de K et M d'approcher la valeur nulle.

Inconvénient: Les matrices de passage conservent la symétrie des matrices mais n'assurent pas leurs caractéristiques initiales de stockage, c'est à dire que si K et M sont stockées d'une certaine manière (bande ou ligne de ciel), les matrices transformées ne gardent plus ces caractéristiques, ce qui limite considérablement le champ d'utilisation de la méthode le réduisant aux systèmes de petite dimension.

Avantage: Elle présente, l'avantage de pouvoir traiter en même temps les matrices K et M , elle évite donc une standardisation des problèmes.

6.3.2. Méthode de l'itération inverse:

Elle permet de calculer la plus petite valeur propre ω_1^2 et son vecteur propre correspondant Φ_1 d'un système. Elle exige que K soit définie positive, sinon il est nécessaire d'utiliser un décalage tel que K soit définie positive. Elle peut être utilisée avec le shifting pour calculer les autres valeurs propres et leurs vecteurs propres correspondants.

La vitesse de convergence du processus de l'itération inverse dépend fortement de l'éloignement des ω_i^2 les une des autres (plus il est grand, plus la convergence est rapide)

Un décalage λ_0 peut améliorer sensiblement la convergence s'il est bien choisi.

Une procédure de recherche successive peut être appliquée en éliminant le mode déjà déterminé d'où réduction au fur et à mesure de la dimension du système, on dit dans ce cas que l'on a appliqué une déflation.

6.4. Application aux calculs des grands systèmes:

L'approche adoptée généralement est d'essayer de modéliser les structures avec le plus grand nombre de degrés de liberté possible pour reproduire son comportement d'une façon idéale et c'est à ce niveau qu'interviennent les contraintes de calcul (en temps donc en coût). En effet, l'augmentation du nombre de degrés de libertés engendrera la croissance des tailles des matrices M et K qui quelque soient les conditions de stockage, prendront de plus en plus d'espace et augmenteront le nombre d'opérations surtout en calcul dynamique qui voit se répéter plusieurs processus de résolution.

Donc une solution, qui réduit le temps de calcul et l'espace mémoire pour l'exécution, s'impose sous forme:

- ♦ réduire les tailles de K et M en les écrivant dans une autre base, ce qui revient à projeter sur un autre espace.
- ♦ calcul des premières valeurs propres du système projeté.
- ♦ tester les valeurs calculées sur espace original. On devra adopter un processus itératif qui porte le nom de méthode du sous espace.

6.4.1 Méthode du sous espace.

Cette méthode est en effet, une combinaison des méthodes de l'itération inverse, de Jacobi et une méthode de projection dite de RITZ qui permet l'écriture de K et M dans un espace de dimension réduite (d'où le nom de sous espace) tout en contraignant les vecteurs propres Φ_i à former une base orthogonale.

Cette méthode est très largement utilisée pour calculer les p premières valeurs propres d'un système de grande dimension. elle consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de RITZ en améliorant les vecteurs de RITZ par itération inverse. La méthode de RITZ force les vecteurs Φ à rester orthogonaux entre eux, alors que l'itération inverse ajuste la base

vectorielle de RITZ, de manière à assurer la convergence vers les vecteurs propres correspondants aux plus petites valeurs propres.

6.5. Système couplé:

Récrivons les équations du système couplé (5.57) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}$$

Si on néglige tous les termes d'amortissement et en supposant le chargement nul on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.12)$$

Notons que le système n'est pas symétrique (non définie positif) donc on ne peut appliquer les méthodes de calcul des valeurs propres. Cependant il est possible d'arriver à une forme symétrique par de simple manipulation.

Posons $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}e^{i\omega t}$, $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}e^{i\omega t}$ nous récrivons le système précédent:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{Q}\bar{\mathbf{P}} - \omega^2 \mathbf{M}\bar{\mathbf{U}} &= 0 \\ \mathbf{H}\bar{\mathbf{P}} - \omega^2 \mathbf{S}\bar{\mathbf{P}} - \omega^2 \rho \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{U}} &= 0 \end{aligned}$$

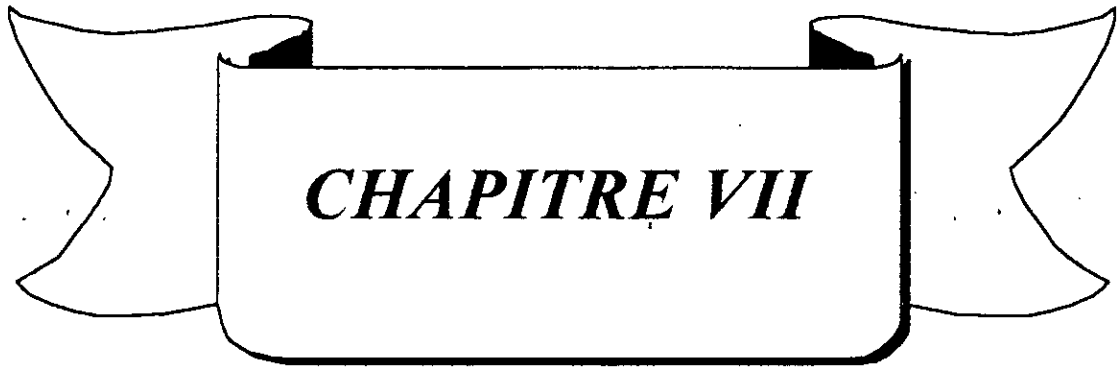
En introduisant une nouvelle variable \mathbf{q} telle que $\bar{\mathbf{P}} = \omega^2 \bar{\mathbf{q}}$.

Le système (6.12) devient

$$\left\{ \begin{bmatrix} \rho \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \rho \mathbf{M} & 0 & \rho \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \mathbf{S} \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{S}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{P}} \\ \bar{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = 0$$

ce système est symétrique. Maintenant \mathbf{q} peut être éliminée du système par une condensation statique et le système restera symétrique contenant les variables de bases. Le système obtenu est:

$$\begin{bmatrix} \rho \mathbf{M} + \rho^2 \mathbf{Q} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}^T & \rho \mathbf{Q} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S} \\ \rho \mathbf{S} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.13)$$



***RESOLUTION DE L'EQUATION
D'EQUILIBRE DYNAMIQUE***

7.1. Introduction:

La discrétisation d'un problème par la méthode des éléments finis, conduit à un système d'équations différentielles en temps, de la forme:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad (7.1)$$

Résoudre le système de l'équation (7.1) consiste à trouver un ensemble de fonction $U(t)$ qui satisfait l'équation en tout instant, ainsi que les conditions initiales imposées $t = t_0$.

Parmi les méthodes souvent utilisées:

- méthodes d'intégrations directes;
- méthode de superposition modales.

Nous présentons dans ce qui suit, la méthode d'intégration *pas-à-pas*.

7.1.1. Méthodes d'intégrations pas-à-pas [1], [15]:

Ces méthodes consistent à construire numériquement, à partir de U_0 , une suite de valeurs de la solution aux instants successifs $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$, ..., $t_0 + n\Delta t$.

Connaissant le comportement du système durant la petite augmentation du temps, des déplacements vitesses et accélérations, dans les prochains points, peuvent être aussi évaluées.

$$U(t_0) \rightarrow U(t_0 + \Delta t) \rightarrow \dots \rightarrow U(t_0 + n\Delta t)$$

Pour l'étude de la réponse dynamique, on utilise diverses méthodes *pas-à-pas* inconditionnellement stables, l'une des plus simple utilisée dans ce travail est la méthode de NEWMARK.

7.1.1.1 Méthode de NEWMARK:

Elle permet de relier les variables déplacements, vitesses et accélération à la fin du pas du temps à d'autres quantités par deux (2) paramètres dont dépends de sa stabilité.

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \Delta t((1-a)\ddot{U}_t + a\ddot{U}_{t+\Delta t}) \quad (7.2)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t\dot{U}_t + \Delta t^2\left(\frac{1}{2} - b\right)\ddot{U}_t + b\ddot{U}_{t+\Delta t} \quad (7.3)$$

L'équation d'équilibre (7.1) devient:

$$\bar{K}U_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} \quad (7.4)$$

avec:

$$\bar{K} = M + \Delta t a C + \frac{\Delta t^2}{2} b K \quad (7.5)$$

$$R_{t+\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{2} b F_{t+\Delta t} + M \left[U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2} (1-b) \ddot{U}_t \right] + \left[\Delta t a U_t + \frac{\Delta t^2}{2} (2a-b) \dot{U}_t + \frac{\Delta t^3}{2} (a-b) \ddot{U}_t \right] \quad (7.6)$$

où a et b sont les paramètres de la méthode sélectionnée pour produire la stabilité de la précision désirée.

La méthode est inconditionnellement stable si:

$$a \geq 0.5; \quad b \geq 0.25(a + 0.5)$$

Lorsque $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{6}$ les relations (7.2) et (7.3) correspondent à une accélération linéaire.

Newmark a proposé comme schema inconditionnellement stable si:

$$a = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{4}$$

Algorithme de la méthode:**a/ Calculs préliminaires**

1- Formation de la matrice de rigidité K , matrice masse M et matrice d'amortissement C ;

2- Initialisation de U_0 , \dot{U}_0 et \ddot{U}_0 (\ddot{U}_0 peut être évaluée grâce à (7.1));

3- Choix du pas Δt , paramètres a et b , et calcul des constantes d'intégration;

$$a \geq 0.5; b \geq 0.25(0.5 - a)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{b\Delta t^2} ; a_1 = \frac{a}{b\Delta t} ; a_2 = \frac{1}{b\Delta t} ; a_3 = \frac{1}{2b} - 1 ; a_4 = \frac{a}{b} - 1 ;$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{a}{b} - 2 \right) ; a_6 = \Delta t(1 - a) ; a_7 = a\Delta t.$$

4- Formation de la matrice $\bar{K} = K + a_0 M + a_1 C$;

5- Triangularisation de \bar{K} : $\bar{K} = LDL^t$;

b/ Pour chaque pas de temps:

1- Calcul de la charge effective au temps $t + \Delta t$:

$$R = F_{t+\Delta t} + M(a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t) + C(a_1 U_t + a_4 \dot{U}_t + a_5 \ddot{U}_t);$$

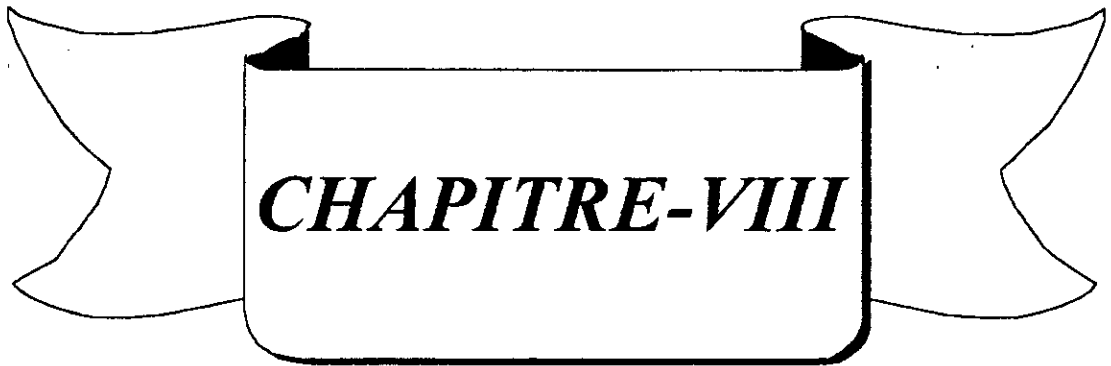
2- Calcul des déplacements au temps $t + \Delta t$:

$$LU\bar{K} = R$$

3- Calcul des accélérations et vitesses au temps $t + \Delta t$:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = a_0 (U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t + a_7 \ddot{U}_{t+\Delta t}.$$



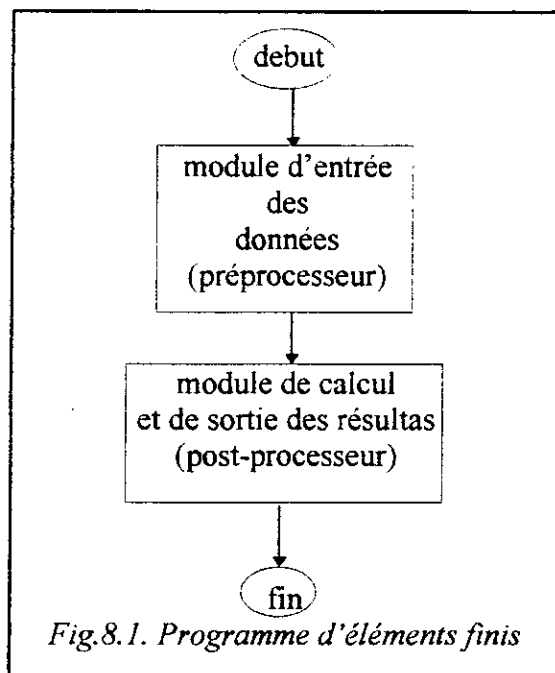
***PRESENTATION GENERALE
DES
PROGRAMMES***

8.1. Introduction:

La limitation majeure d'un programme en éléments finis est évidemment la mémoire disponible: il n'est pas possible de garder simultanément en mémoire tous les tableaux nécessaires. Une gestion relativement simple, décrite par R.L TAILOR, des fichiers et de la mémoire permet de manipuler les grands tableaux contenant la matrice globale, et tous les résultats intermédiaires relatifs aux éléments.

les programmes d'éléments finis peuvent être décomposés essentiellement en deux (2) parties:

- ❑ module d'entrée des données (Préprocesseur)
- ❑ calcul et sortie des résultats (fig.8.1)



Nous examinerons dans ce chapitre quelques-unes des étapes du développement d'un programme de calcul par éléments finis mettant en œuvre la théorie des chapitres précédents.

8.2. Module d'entrée des données:

Le module d'entrée des données représenté sur la figure 8.1. doit transmettre aux autres modules les informations nécessaires à la résolution d'un problème. Dans ce programme, le module d'entrée sert à lire, à partir d'un fichier, les données relatives à la géométrie, aux matériaux, types du problème (contrainte plane ou déformation plane) de façon à créer tous les tableaux nécessaires.

8.2.1. Données des éléments et des nœuds (Maillage):

Dans le cas d'un grand maillage, la préparation de ces données peut devenir un travail laborieux, il serait donc bon, qu'un programme fournisse ces données (maillage automatique).

Une méthode simple pour créer des nœuds consiste à se donner la longueur d'une ligne et à définir les nœuds intérieurs par un certain procédé. Par exemple soit le trapèze de la figure 8.2.

8.2.1.1. Coordonnées:

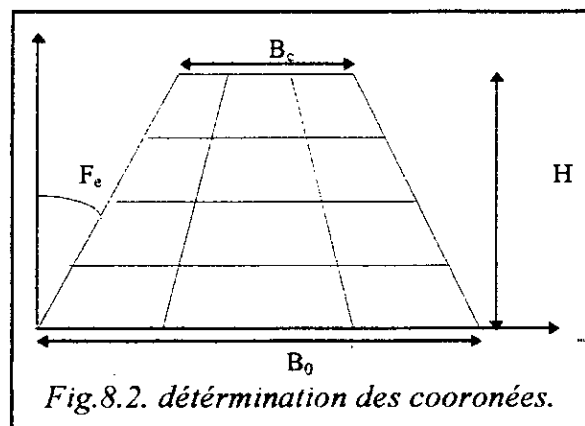
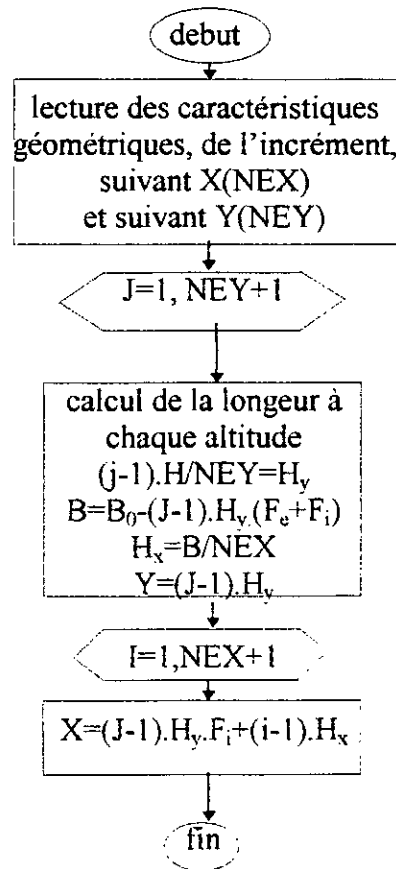


Fig.8.2. détermination des coordonnées.

Les coordonnées du point J sera déduite des caractéristiques géométriques du trapèze.

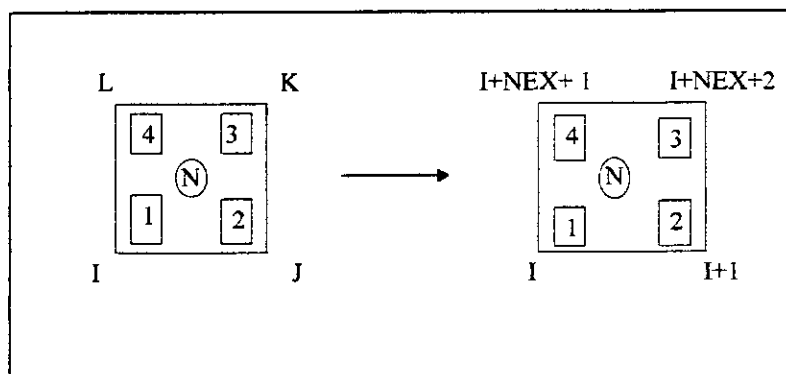
Organigramme:



organigramme du maillage automatique

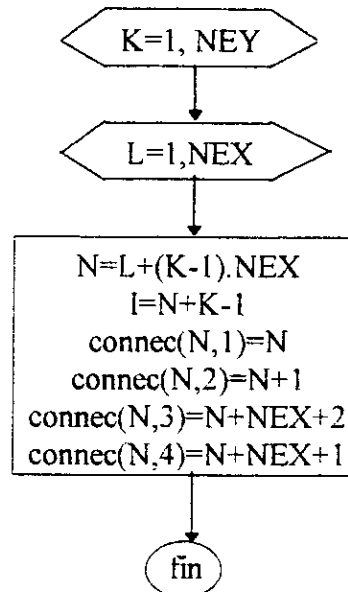
8.2.1.2. Connectivité:

Chaque élément N est lié par une relation simple avec nœud bas gauche (I) ainsi, sachant le nombre d'éléments suivant X (NEX), on déduit automatiquement les numéros des trois (3) autres nœuds.



- \boxed{i} : n° local du nœud
- I : n° global du nœud
- \textcircled{N} : n° de l'élément.

Il est à remarquer que la construction de la table de connectivité des éléments se fait indépendamment de la géométrie du milieu à mailler.

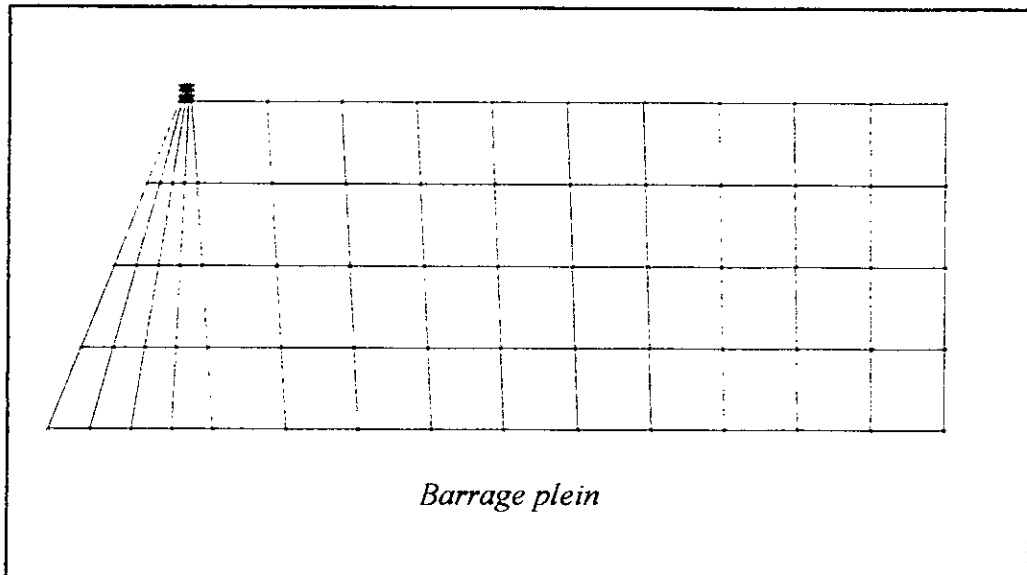
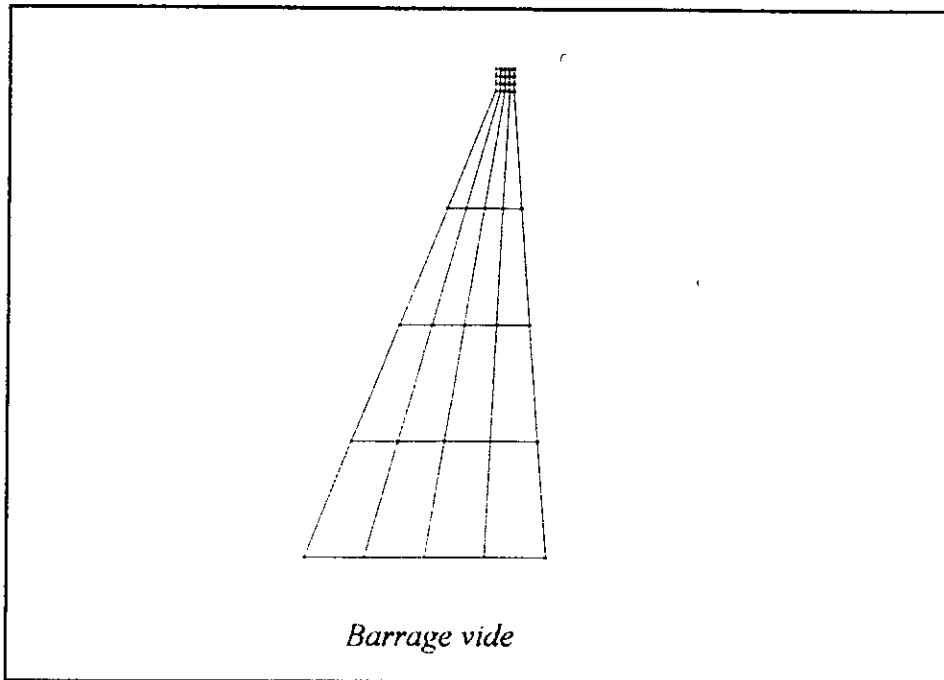


Organigramme de connectivité

8.2.1.3. Vérification du maillage:

Une fois introduites toutes les données relatives à la géométrie, aux matériaux et aux chargement, le programme peut aborder l'exécution du module de résolution.

Avant d'en arriver là cependant, il est en général préférable d'effectuer quelques vérifications sur l'introduction des données. La vérification la plus simple est l'examen visuel. Elle consiste à visualiser automatiquement le maillage à une échelle donnée.



Visualisation du maillage

8.2.2. Donnée des propriétés des matériaux:

Ce qui précède était relatif aux seuls tableaux de coordonnées des nœuds et de connexion des éléments. Il est nécessaire de spécifier aussi les propriétés du matériau de chaque élément.

A chaque élément sont associées les propriétés du matériau qui le constituent: Module de Yong et le coefficient de Poisson. Le barrage est constitué d'un seul matériau (béton), nous n'avons besoin que d'un seul ensemble de propriétés de ce matériau et chaque élément se référera à cet ensemble. De même, pour le domaine réservoir, tous les éléments fluides seront associés à la masse volumique de l'eau (ρ). Il faut choisir un ensemble, cohérent d'unités pour toutes les quantités qui doivent intervenir.

8.3. Calcul des matrices élémentaires:

les sous-programmes de calcul des matrices élémentaires contiennent toute une combinaison de méthodes numériques.

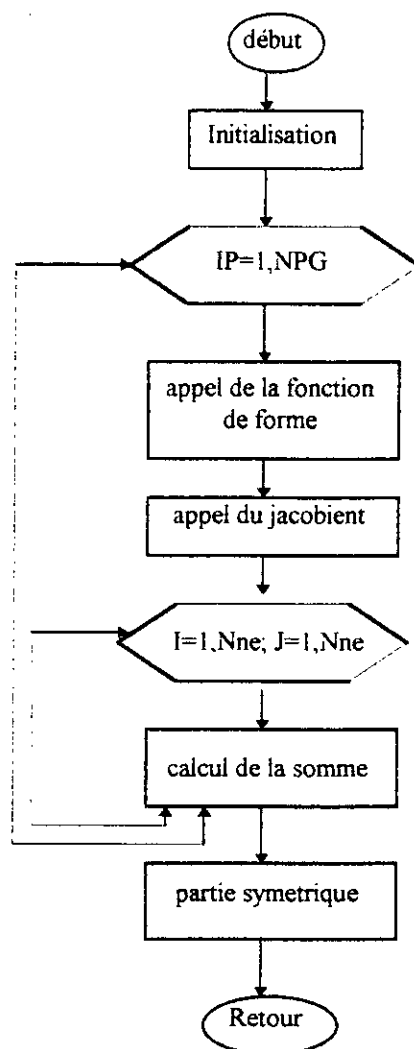
Les pièces maîtresses en sont: l'intégration numérique, l'utilisation des fonctions de forme et un calcul des produits matriciels.

Nous utilisons habituellement les formules de Gauss pour calculer toutes les intégrales, car elles offrent le meilleur rapport précision-complexité (voir intégration numérique §4). Les points et les poids d'intégration qui sont stockés dans un tableau peuvent être disponibles en faisant appel au sous programme QUAD.

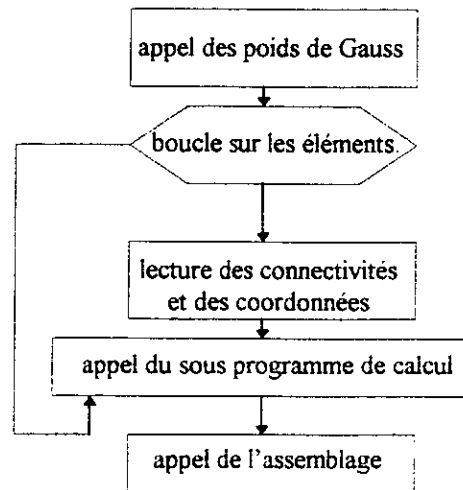
Le sous programme de fonction de forme FFQN permet le calcul des fonctions de forme et ces dérivées dans le repère locale, tandis que le sous programme JACOBIEN permet le calcul de la matrice Jacobienne de son

déterminant ainsi que les fonctions de forme et leurs dérivées dans le repère globale.

Tous les algorithmes ont la même structure générale donnée par:



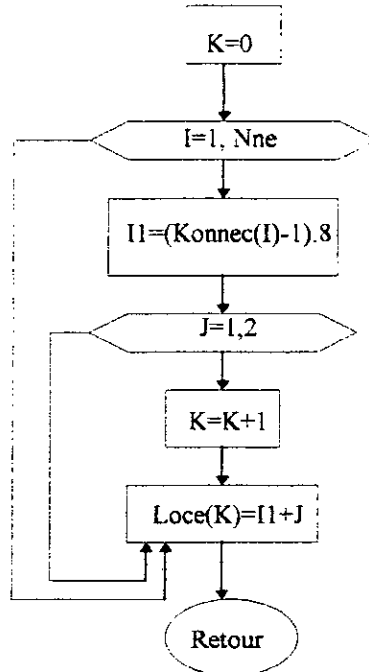
La structure des modules de contrôles est donnée par l'organigramme suivant:



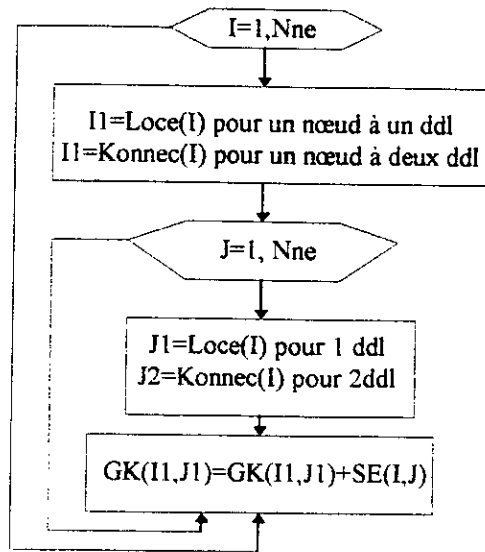
8.3.1 L'assemblage:

Nous allons assembler deux types de variables: l'un a un degré de liberté (P) et l'autre a deux degrés de libertés (u, v), donc il faut faire deux programmes d'assemblages: Le premier se base sur les localisations et l'autre sur les connectivités.

Les localisations sont calculées comme suit:



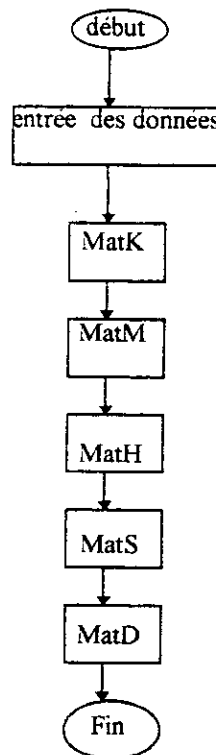
Et l'assemblage devient donc:

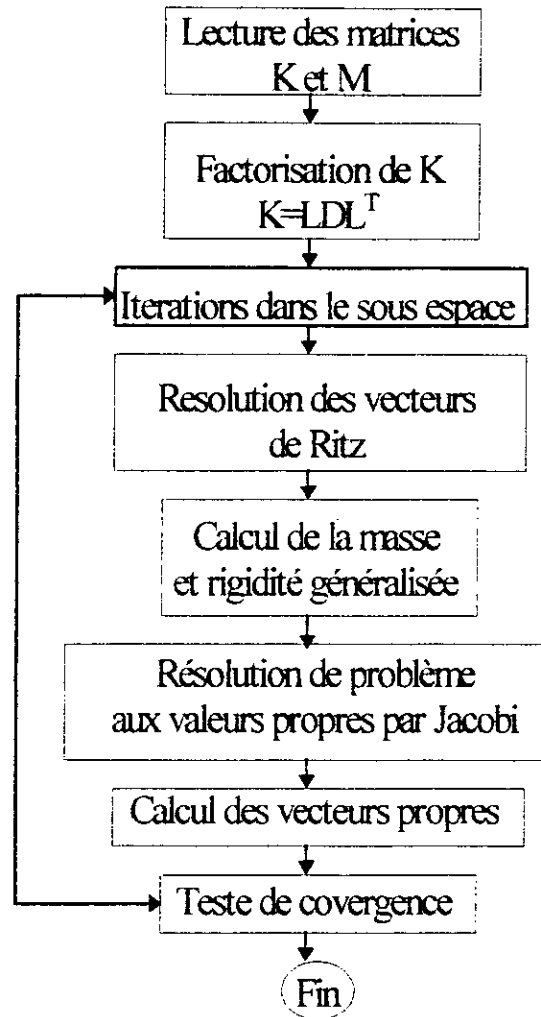


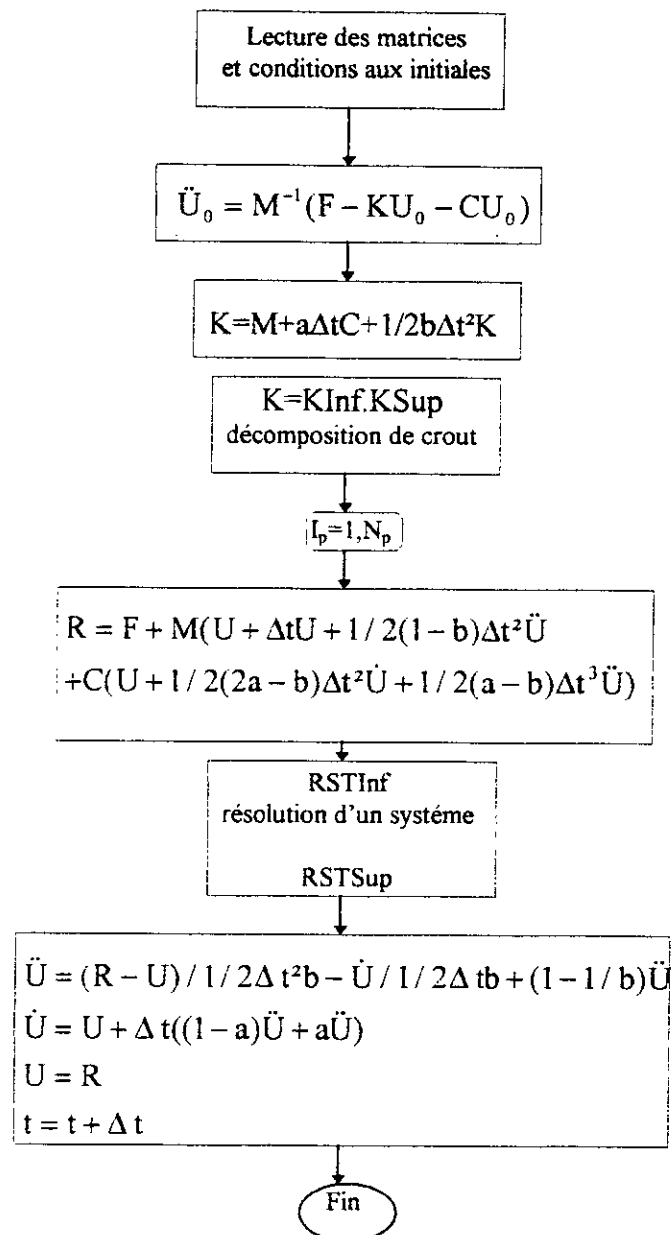
Avec: GK matrice globale

SE matrice élémentaire

En fin, avec cette structure, le programme de construction des matrices se présente sous la forme:



8.4. Résolution:*Organigramme de la méthode du sous espace.*



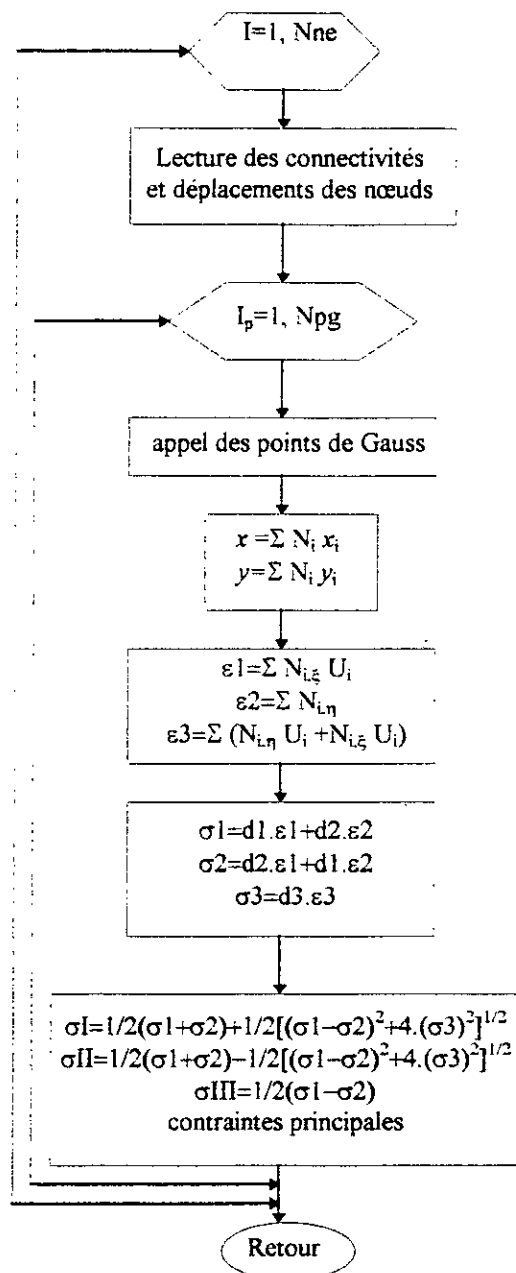
Organigramme de la méthode de Newmark

8.5. Calcul des contraintes:

Un programme optionnel de calcul des contraintes est ajouté pour déterminer les efforts internes à n'importe quel moment de l'histoire de la réponse du barrage. Il suffit de sauvegarder les déplacements correspondants.

Pour se faire, il faut utiliser les fichiers des données du maillage et le fichier des déplacements, ainsi que les modules de calcul du programme de construction des matrices globales.

Les calculs sont fait au points de Gauss pour éviter leur répétition d'un élément à l'autre. On procède de la manière suivante:



8.6 Fonctionnement:

Le programme est un ensemble de programmes (modules) exécutés dans un ordre déterminé. La disposition de ces modules et les phases d'exécution sont illustrées dans la figure 8.3.

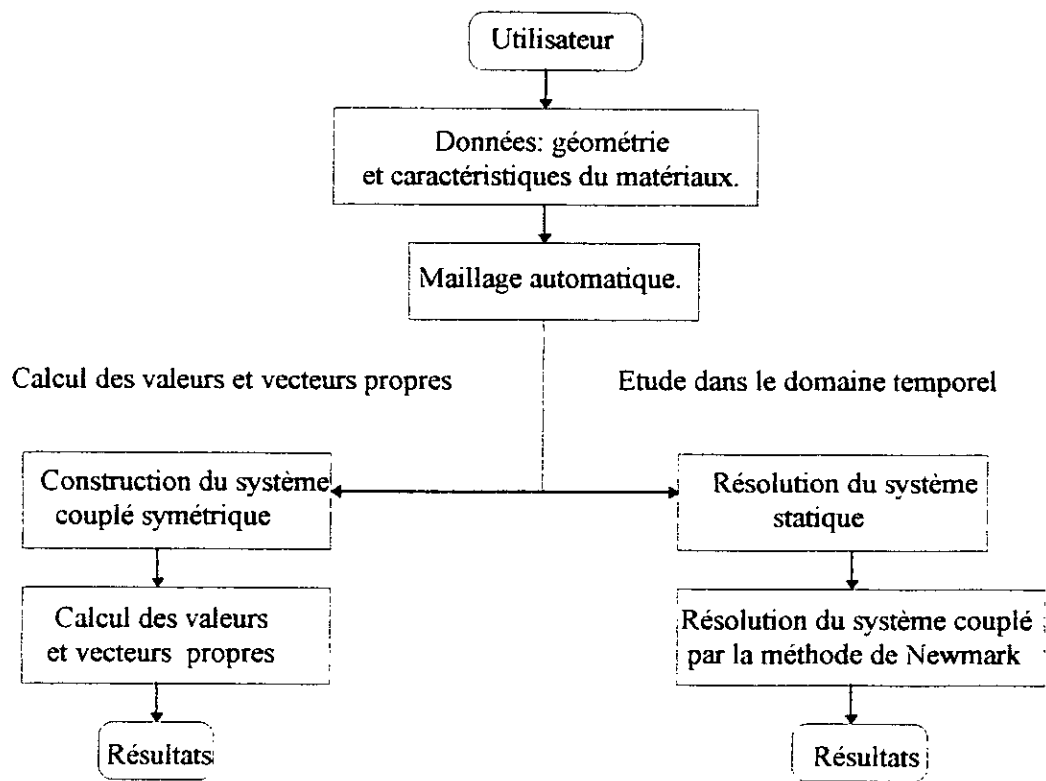
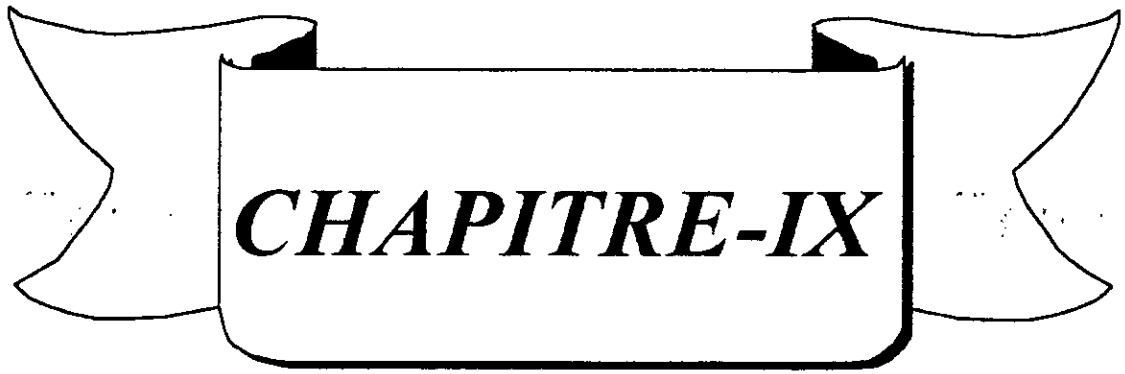


Fig.8.3. Modules du programme.

- : Fichier
- : Programme



ETUDE PARAMETRIQUE

9.1. Introduction:

La réponse sismique ainsi que le comportement d'un barrage durant un séisme, dépendent essentiellement de ses caractéristiques dynamiques: Périodes naturelles, formes propres, amortissements et conditions de sol de fondation.

Vue son importance lors d'un calcul de la réponse dynamique d'un barrage, le calcul des périodes propres revêt un intérêt particulier. Ce chapitre est organisé en deux parties:

Analyse modales;
analyse temporelle.

Dans les deux parties, on montrera l'influence des paramètres suivants:

Effet de la barrière;
Effet des ondes de surfaces;
Compressibilité de l'eau;
Rigidité du barrage;
Influence du parement amont;
Fréquence d'excitation.

Le barrage est représenté par un maillage en éléments finis bidimensionnel isoparamétrique du type quadrilatère. Chaque nœud est considéré possédant deux degrés de libertés, Représentant le déplacement horizontale et vertical. Le fluide est mailler par le même type d'élément, possédant un degré de liberté par nœud.

9.2. Considération du barrage:

Le barrage choisit pour cette étude est le barrage de l'Oued Fodda. Il est le premier en date des grands ouvrages modernes construits en Algérie, le début de sa mise en eau remonte à la fin de l'année 1932. C'est aussi le plus élevé (101m), et le volume de sa retenue (228 millions de m³) le place

immédiatement après le barrage du Gribe (280 millions de m³) au point de vue capacité.

Le comportement du béton dans le barrage est supposé linéaire, élastique avec les propriétés suivantes:

Masse volumique	2640 Kg/m ³
Coefficient de poisson	0.2
Module de Yong	24600 Mpa

9.2.1. Données techniques du barrage:

D'après la commission internationale des grands barrages (juin 1952)

Type et caractéristiques du barrage	Barrage poids en béton
Altitude de la retenue maxima	370.50 m
Surface de la retenue au niveau maximum	700 ha
Capacité totale du réservoir	228 Hm ³
Hauteur maxima au dessus du point le plus bas	101 m
Hauteur de la crête de barrage au dessus de la crête du réservoir	4.60 m
Largeur maxima au niveau des fondations	67.5 m
Pentes des parements : parement amont	1/10
parement aval	0.675
Largeur au couronnement	5 m
Longueur au couronnement	181.40
Rayon de courbure du couronnement	R = ∞
Volume du corps du barrage	273 000 m ³

9.3. Analyse modales:

Dans cette partie le barrage sera supposé flexible, et le fluide incompressible.

9.3.1. Barrage vide:

La détermination d'un maillage optimal offrant une précision acceptable avec un minimum de degrés de libertés se pose. En faisant varier le nombre d'éléments selon la base puis selon la hauteur, on obtient les résultats répertoriés dans les tableaux 9.1 et 9.2.:

MODE	nombre d'éléments suivants $y = 7$ (NEY)			
	NEX=3	7	11	13
	Périodes (sec)			
1	0.2510	0.2516	0.2517	0.2518
2	0.0957	0.0963	0.0964	0.0964
3	0.0890	0.0903	0.0904	0.0904
4	0.0463	0.0466	0.0467	0.0467
5	0.0390	0.0392	0.0392	0.0392

Tableau.9.1.

MODE	NEX = 4			
	ney=6	ney=10	ney=14	ney=16
	Périodes (sec)			
1	0.2410	0.2640	0.2680	0.2690
2	0.0939	0.1050	0.1099	0.1109
3	0.0827	0.0935	0.0939	0.0940
4	0.0403	0.0570	0.0618	0.0630
5	0.0376	0.0408	0.0413	0.0416

Tableau.9.2

On remarque que le raffinement selon la direction de la base influe peu, sur les modes propres de vibrations, tandis que la variation des périodes est plus importante lorsque le raffinement est dans le sens de la hauteur.

En se basant sur ces résultats et ceux d'une étude de simulation [18], tous les calculs seront effectués sur le barrage modélisé comme suit:

Nombres d'éléments suivants la base = 4 (NEX)

Nombres d'éléments suivant la hauteur = 7 (NEY)

Les résultats des cinq premiers modes obtenus par le programme et ceux du logiciel SAP90 sont comparés dans le tableau 9.3.

	prog	sap90
Mode	Periodes (s)	
1	0.2513	0.2535
2	0.0960	0.1038
3	0.0900	0.0931
4	0.0465	0.0593
5	0.0391	0.0435

Tableau.9.3

9.3.2. Barrage plein:

Dans la formulation du fluide on a supposé que la frontière (Γ_4), limite un domaine infini. Nous essayerons d'apprécier l'effet de la position de cette barrière sur les modes propres de vibrations.

9.3.2.1. Effet de la position de la barrière:

En gardant un nombre d'éléments constants dans le fluide, on varie la longueur du fluide (Position de la barrière). Les résultats obtenus pour les cinq premiers modes sont répertoriés dans le tableau 9.4.

Mode	Longueur du fluide							
	0.5H	H	1.5H	2H	3H	4H	6H	8H
	Periodes (s)							
1	0.3452	0.3227	0.3153	0.3111	0.3056	0.3017	0.2960	0.2921
2	0.1210	0.1140	0.1170	0.1105	0.1089	0.1078	0.1062	0.1050
3	0.0938	0.0935	0.0934	0.0933	0.0931	0.0931	0.0929	0.0928
4	0.0547	0.0523	0.0515	0.0511	0.0505	0.0501	0.0496	0.0493
5	0.0405	0.0399	0.0398	0.0397	0.0396	0.0396	0.0395	0.0395

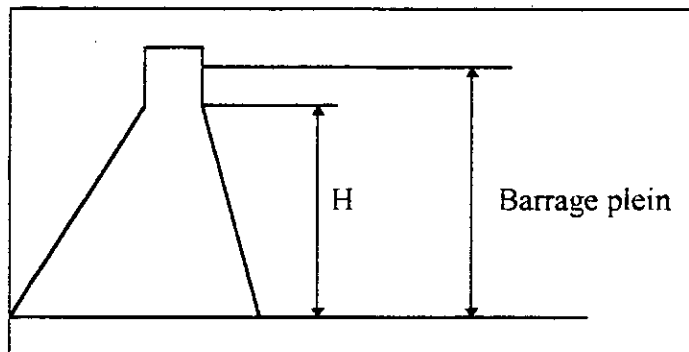
Tableau.9.4

On remarque que les périodes diminues de 5% lorsque la longueur du fluide passe du simple au triple pour les modes 1, 2 et 4. Elles diminues de 1% pour les modes 3 et 5.

9.3.2.2. Effet de la retenue:

Pour différents cas de remplissage du barrage, on obtient les résultats du tableau 9.5.

Mode	H/4	H/2	3H/4	H	barrage plein
1	0.2513	0.2517	0.2578	0.2734	0.3056
2	0.0961	0.0688	0.1000	0.1030	0.1089
3	0.0900	0.0905	0.0913	0.0919	0.0931
4	0.0465	0.0475	0.0483	0.0494	0.0505
5	0.0391	0.0391	0.0392	0.0393	0.0396



On constate que les périodes augmentent sensiblement, dès que la hauteur de remplissage est supérieure à H/2.

9.3.2.3. Effet du raffinage selon la direction de la base:

La longueur du fluide est maintenue constante, on augmente le nombre d'éléments. On obtient les résultats du tableau 9.6

Mode	Nombre d'éléments suivant X dans le fluide				
	5	10	15	20	25
	Pérides (s)				
1	0.2930	0.3056	0.3111	0.3146	0.3172
2	0.1054	0.1089	0.1105	0.1115	0.1122
3	0.0928	0.0931	0.0933	0.0933	0.0932
4	0.0493	0.0505	0.0511	0.0514	0.0517
5	0.0395	0.0396	0.0397	0.0398	0.0398

Tableau 9.6.

On remarque une augmentation de 8% du premier, deuxième et quatrième mode et moins de 1% pour les autres modes.

9.3.2.4. Effet des ondes de surface:

Les cinq premières périodes sont comparées dans le tableau 9.7, en négligeant une fois les ondes de surfaces ($P = 0$ sur la surface libre) et une fois en les prenant en compte.

mode	P=0	P ≠ 0
1	0.3056	0.3050
2	0.1089	0.1100
3	0.0931	0.0931
4	0.0505	0.0505
5	0.0396	0.0397

Tableau 9.7.

On constate que les périodes sont très peu affectées par les ondes de surface.

9.3.2.5. Effet du parement amont:

L'effet du parement amont sur les 5 premiers modes est montré. La longueur du fluide est fixée, le nombre d'éléments est constant. Pour 3 valeurs du fruits amont on obtient les résultats du tableau 9.8.

Mode	Fruit amont		
	n = 0	n = 0.1	n = 0.5
1	0.3131	0.3056	0.3156
2	0.1100	0.1089	0.1109
3	0.0942	0.0931	0.0921
4	0.0506	0.0505	0.0514
5	0.0404	0.0396	0.0390

Tableau 9.8.

On constate que la période est maximale lorsque le parement est vertical.

9.3.2.6. Comparaison des résultats:

Nous comparerons les résultats obtenus par le programme avec ceux obtenus par le SAP90.

prog	SAP90
0.3056	0.3283
0.1089	0.1314
0.0931	0.0941
0.0505	0.0787
0.0396	0.0633

Tableau.9.9.

Pour introduire l'effet hydrodynamique dans le SAP90 on utilisera la théorie de Westergaard (Principe de masse ajoutée). Les résultats du SAP90 sont nettement supérieurs que ceux obtenus par le programme. Cela est dû sans doute à une surestimation de la masse ajoutée.

9.4. Analyse temporelle:

Le but de l'analyse dynamique est de déterminer, pour tout éléments situé dans le barrage, les réponses sismiques: Déplacements, accélérations, contraintes.

Les accélérogrammes disponibles comme chargement d'excitation dans l'analyse du comportement sismique du barrage de l'Oued-Fodda sont:

La réplique d'El-Asnam dont l'accélération maximale est de 0.16 g, enregistrée le 29 Novembre 1980 (fig.9.1);

Accélération de Loma-Prieta (Californie), dont l'accélération maximale est de 0.6 g , enregistrée le 17 Octobre 1989 (fig.9.1).

L'accélérogramme utilisé est celui d'El-Asnam

Dans cette partie le barrage est considéré flexible retenant un fluide compressible.

9.4.1 Distribution de la pression sur le parement amont:

On étudiera la répartition des pressions sur le parement amont dans les cas suivants:

1. Barrage non rigide, fluide compressible;
2. Barrage non rigide, fluide incompressible;
3. Barrage rigide, fluide compressible;
4. Barrage rigide, fluide incompressible.

La rigidité et l'incompressibilité sont intégrées dans le modèle en augmentant la valeur de la célérité des ondes dans l'eau et le module de rigidité du barrage, et en imposant une accélération égale à tous les nœuds du barrage.

la figure 9.2 montre que les pressions sont plus grandes dans le cas où le barrage est flexible. Par contre la pression diminue lorsque la compressibilité du fluide est négligée. L'erreur commise dans ce cas est de l'ordre de 50% et peut dépasser 60% selon O'Connor. L'auteur indique aussi que si la fréquence fondamentale du système est proche de celle du réservoir, alors la réponse est fortement résonnante et l'erreur de négliger la compressibilité devient très grande. Cela est dû au fait que la compressibilité provoque un effet de battement dans le comportement de la réponse.

9.4.2. Distribution des pression sur le parement amont en fonction de la position de la barrière:

Pour chaque longueur du fluide ($0.5H$, H , ...) on calcule la distribution de la pression sur le parement amont. La figure 9.3. montre cette distribution. La pression maximal au fond du réservoir augmente à chaque fois que l'on augmente la longueur du fluide.

9.4.3. Influence du parement amont:

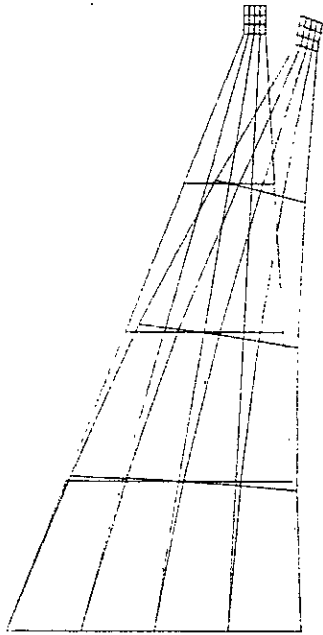
La figure 9.4. montre la distribution de la pression pour différents fruits amont. La pression maximale est obtenue dans le cas du parement vertical.

9.4.4. Résonance:

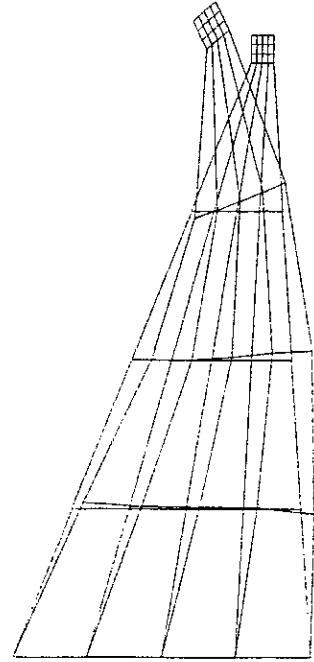
La résonance est obtenue en excitant le système (fluide-barrage) avec un chargement ayant la même pulsation. La figure 9.5 montre la distribution de la pression sur le parement amont dans le cas de fluide compressible puis dans le cas de fluide incompressible. On remarque que la pression dans ce cas est moins importante que lorsqu'il n'y a pas de résonance. La négligence de la compressibilité de l'eau dans ce cas conduit à une erreur de 95% (fig9.6).

9.4.5. Déplacements:

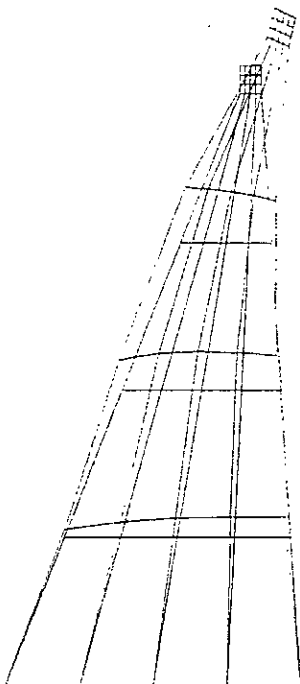
La figure 9.7. montre le déplacement de la crête en fonction du temps. On remarque que la variation du déplacement dans le temps a la même allure dans le cas d'un fluide compressible et d'un fluide incompressible. Les déplacements, dans le cas d'un fluide compressible, sont légèrement supérieurs à ceux obtenus dans le cas d'un fluide incompressible.



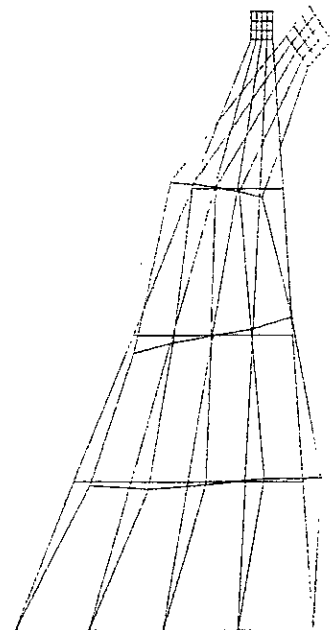
Mode 1



Mode 2



Mode 3



Mode 4

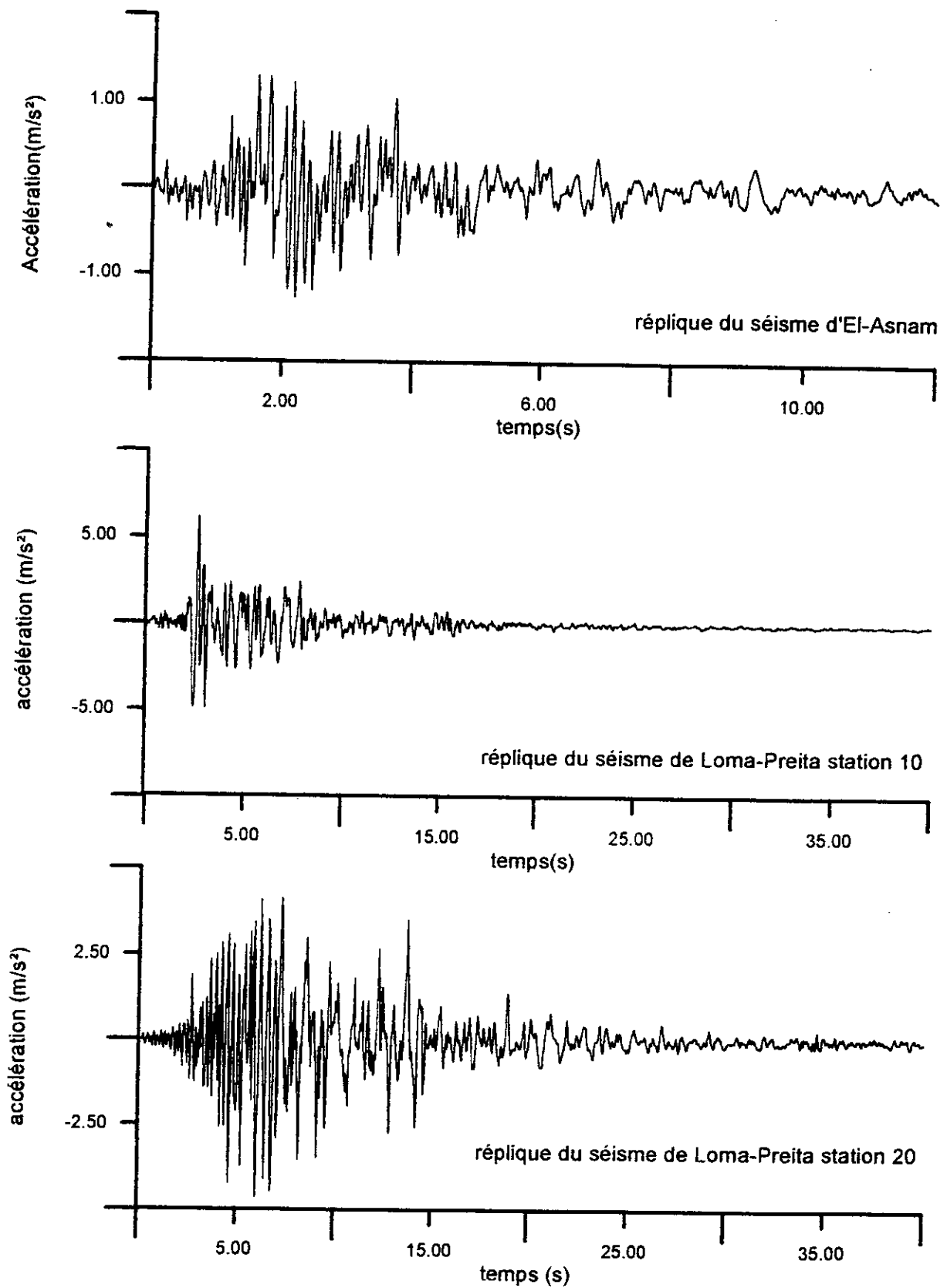


Fig.9.1. Accélérogrammes de séismes naturels

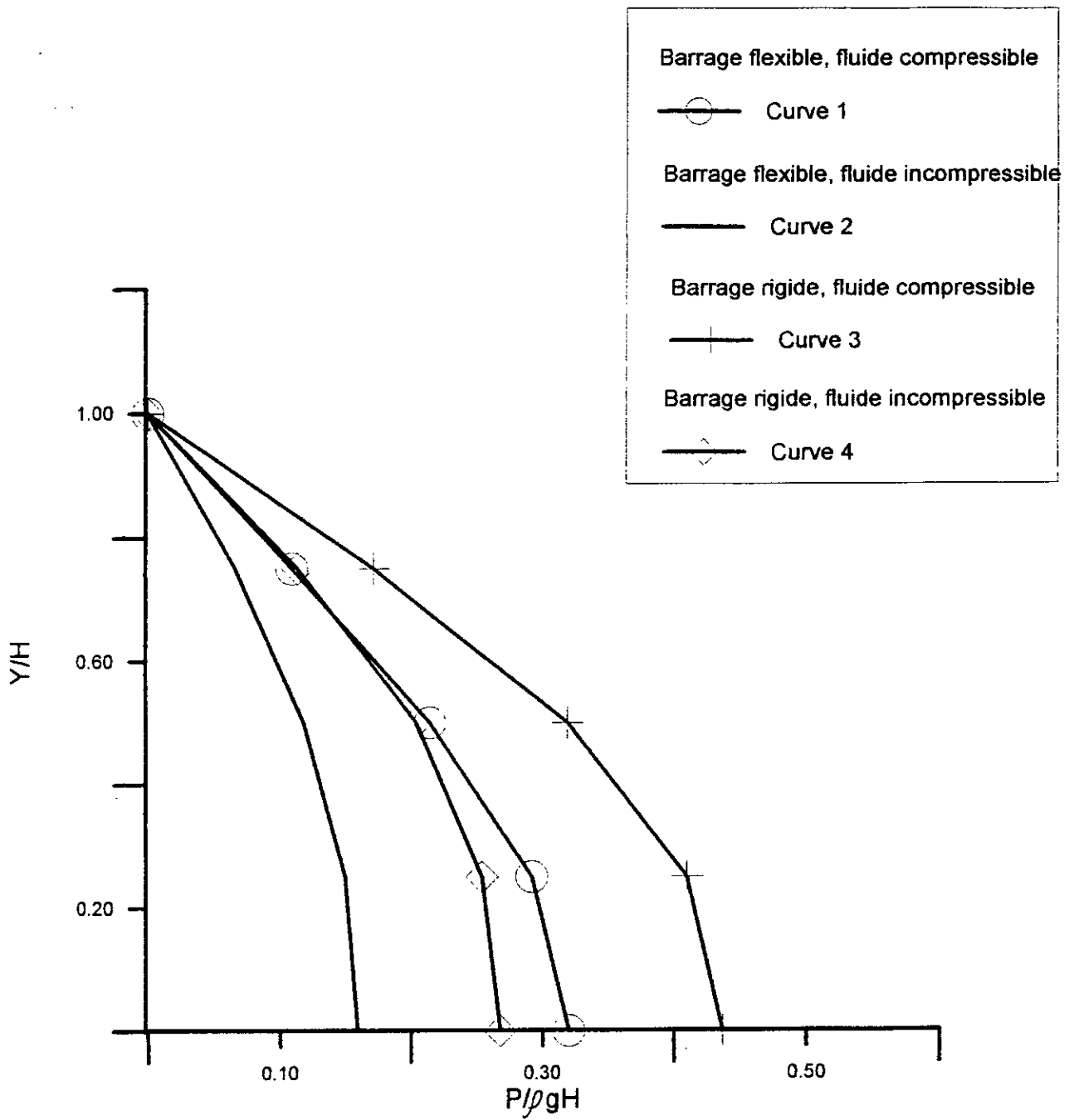


fig.9.2. Distribution des pressions sur le parement amont

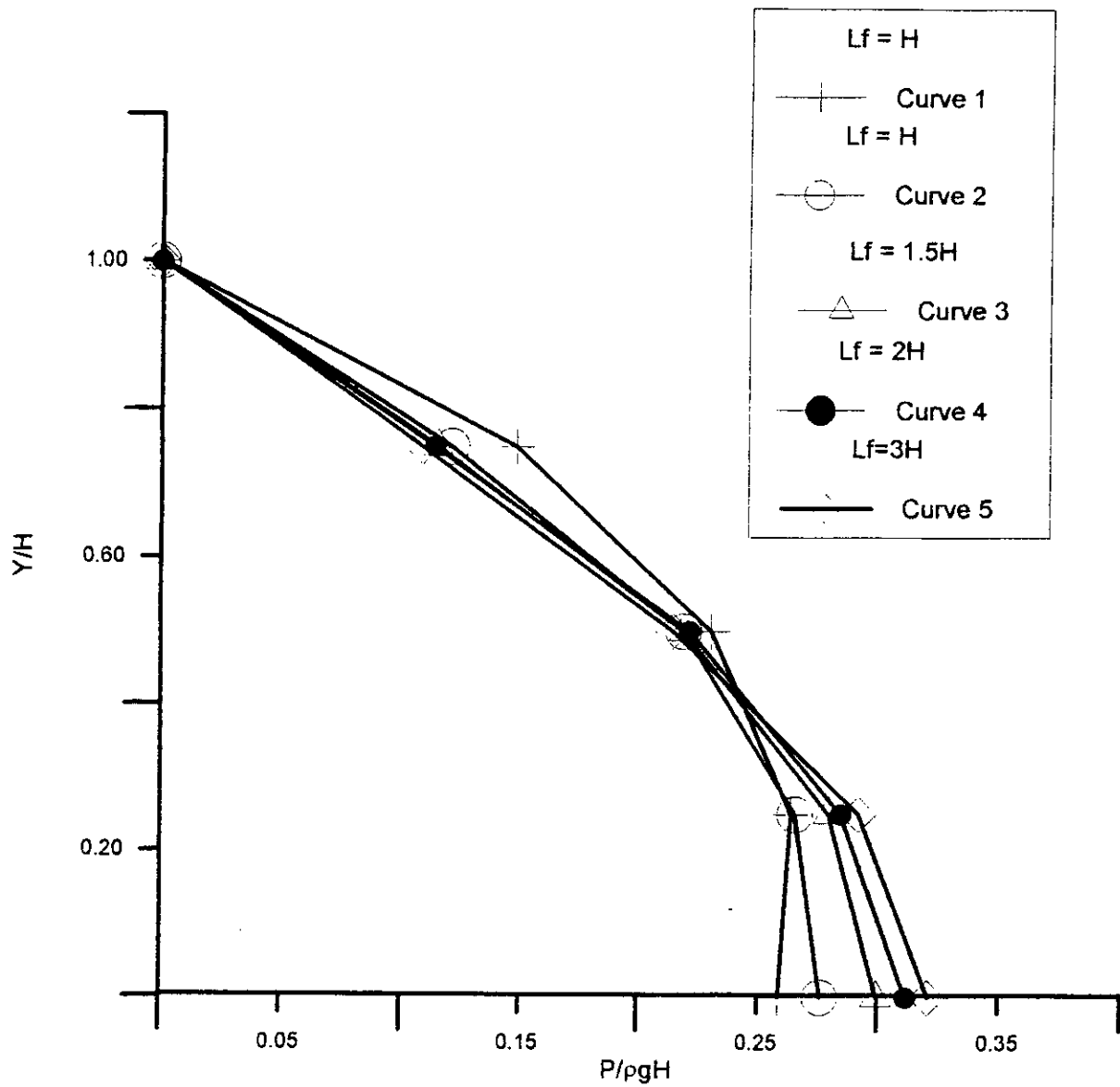


Fig.9.3. distribution de la pression en fonction de la position de la barriere

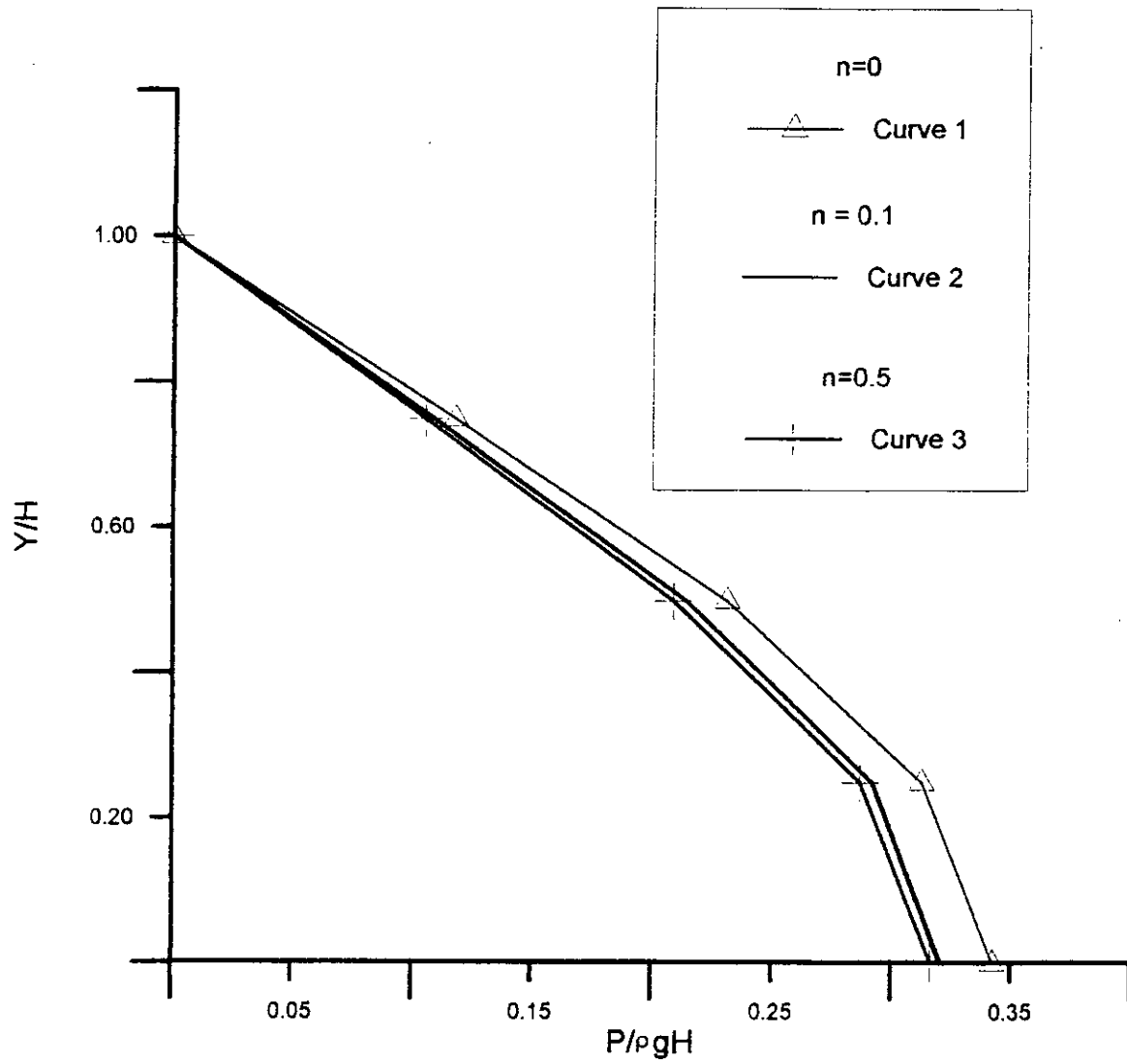


Fig.9.4. Influence du parement amont (n)

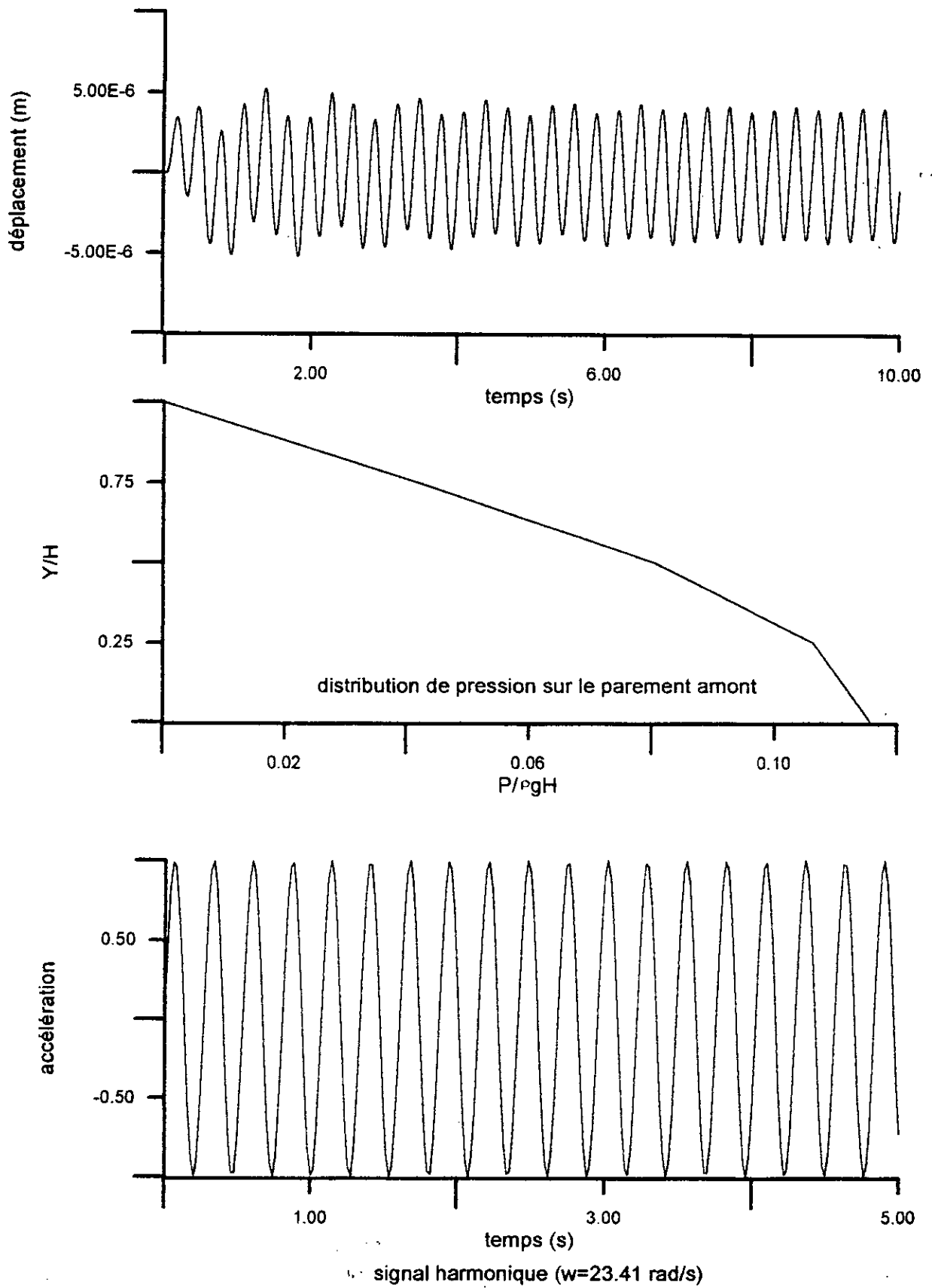


Fig.9.5. résonance du système dans le cas de fluide compressible

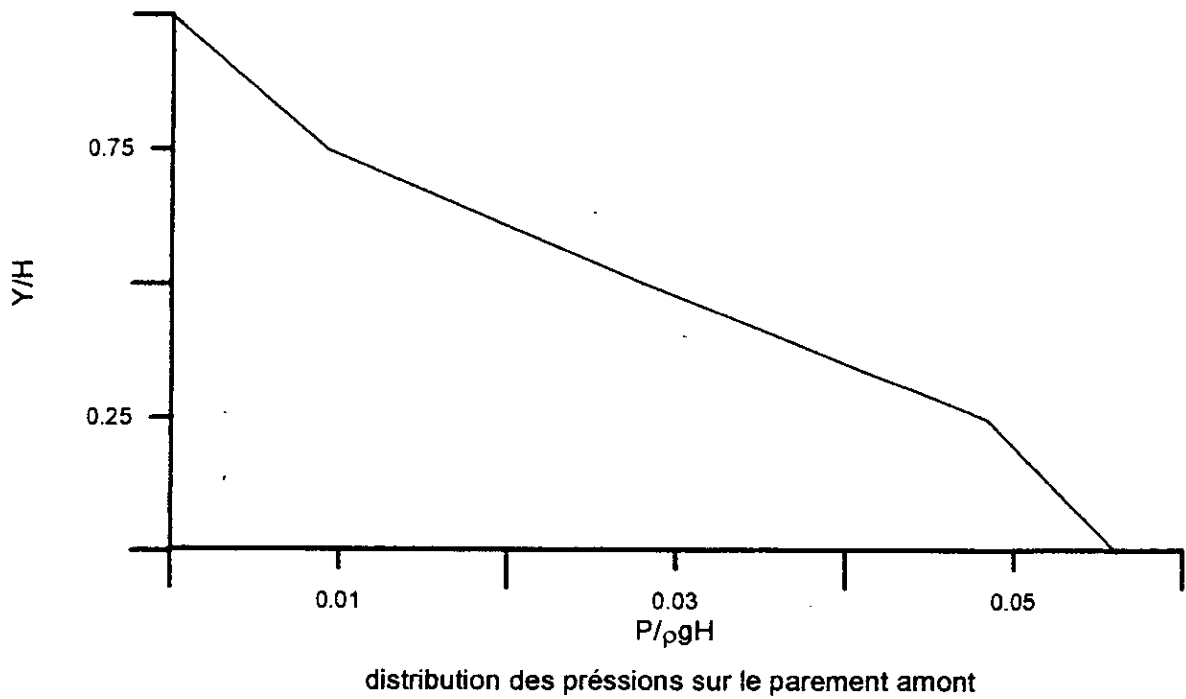
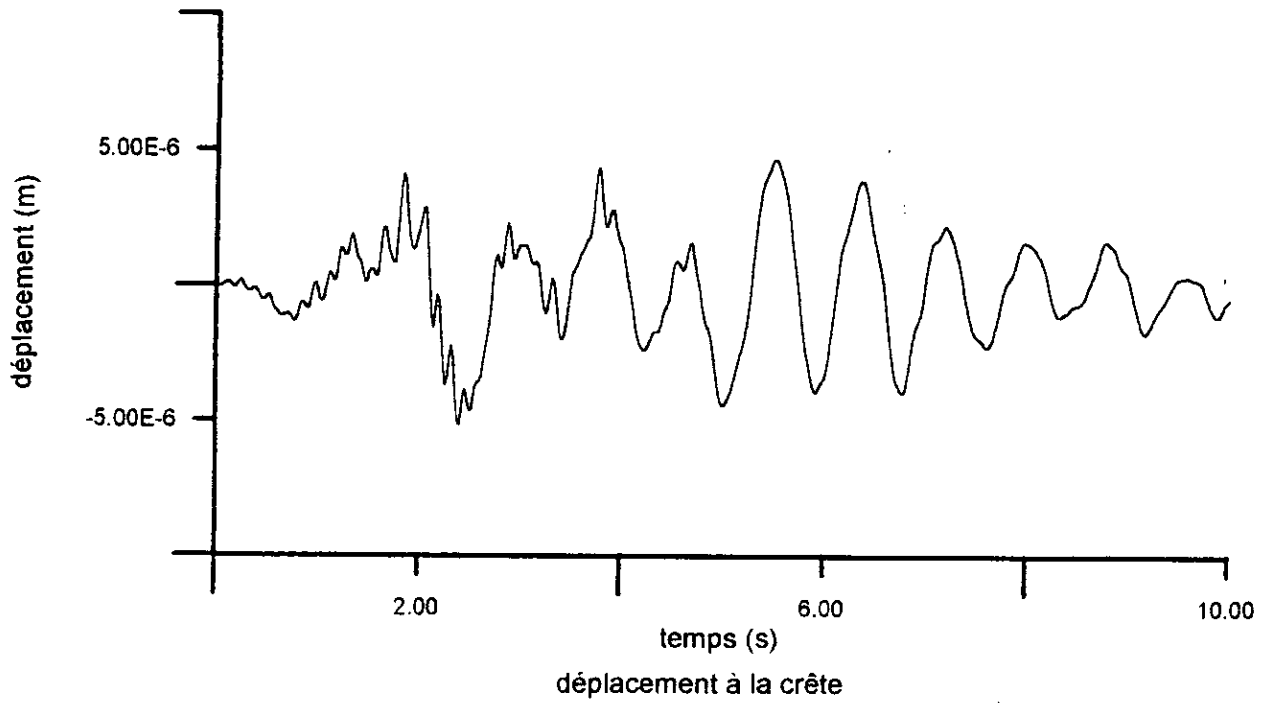
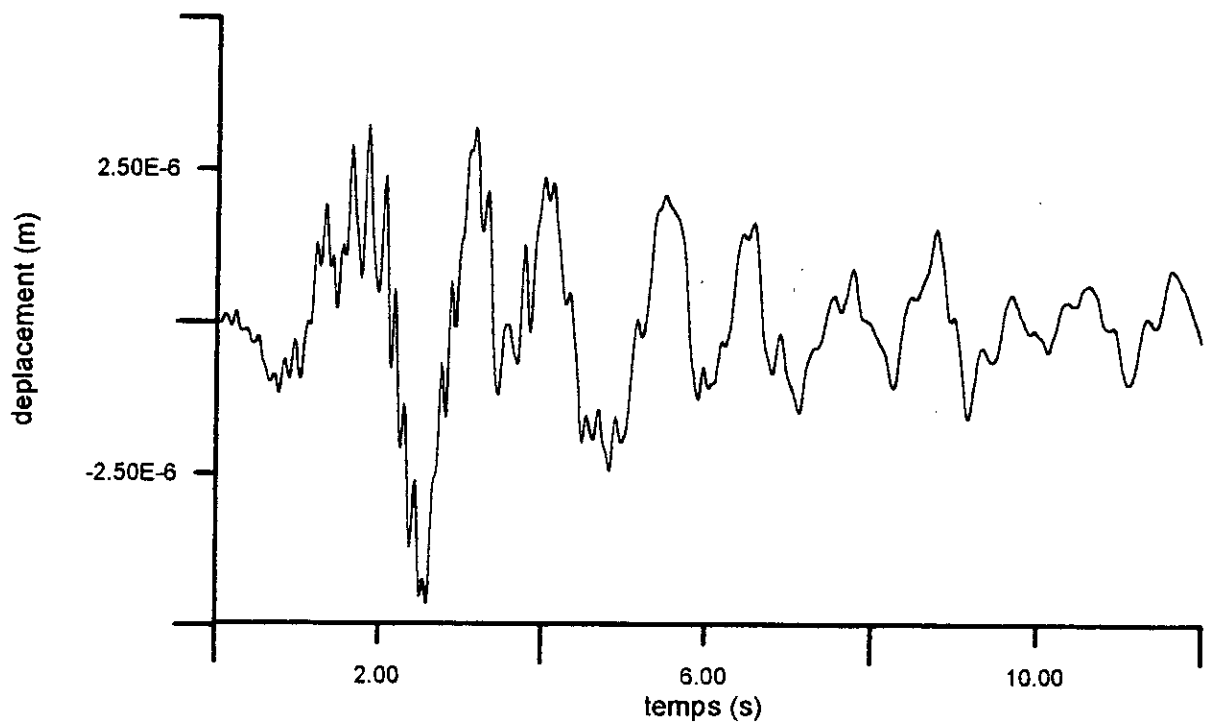
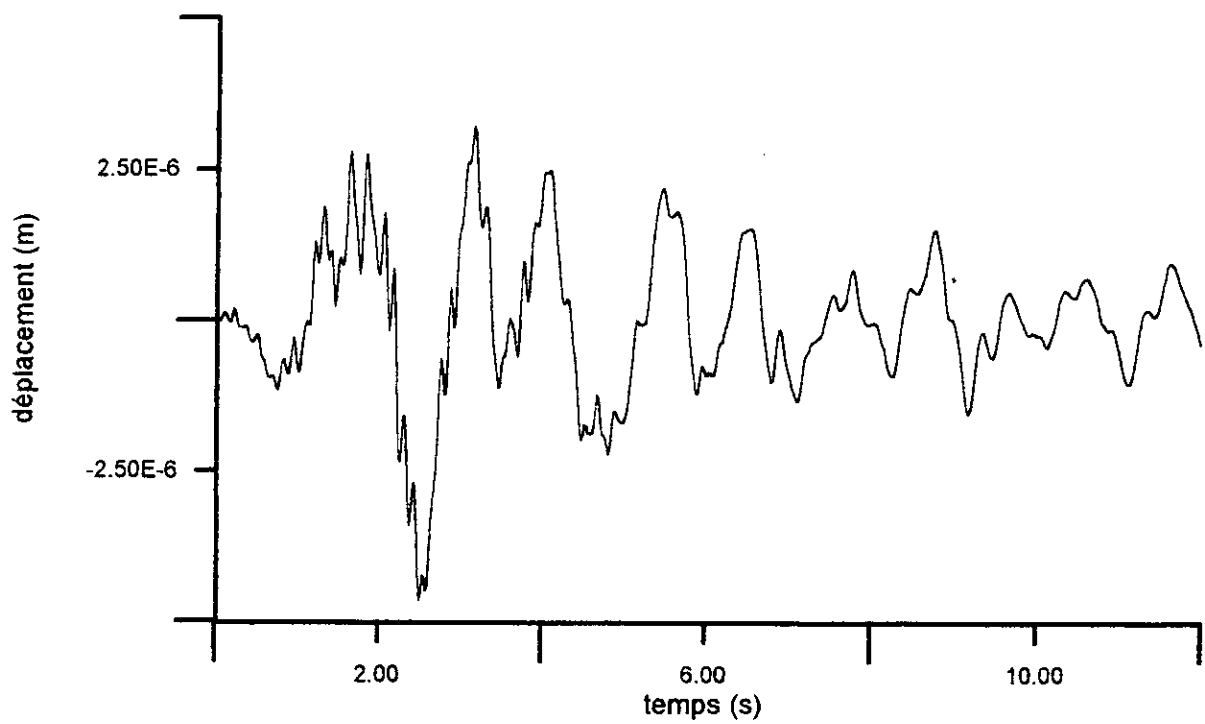


Fig.9.6. résonance dans le cas de fluide incompressible

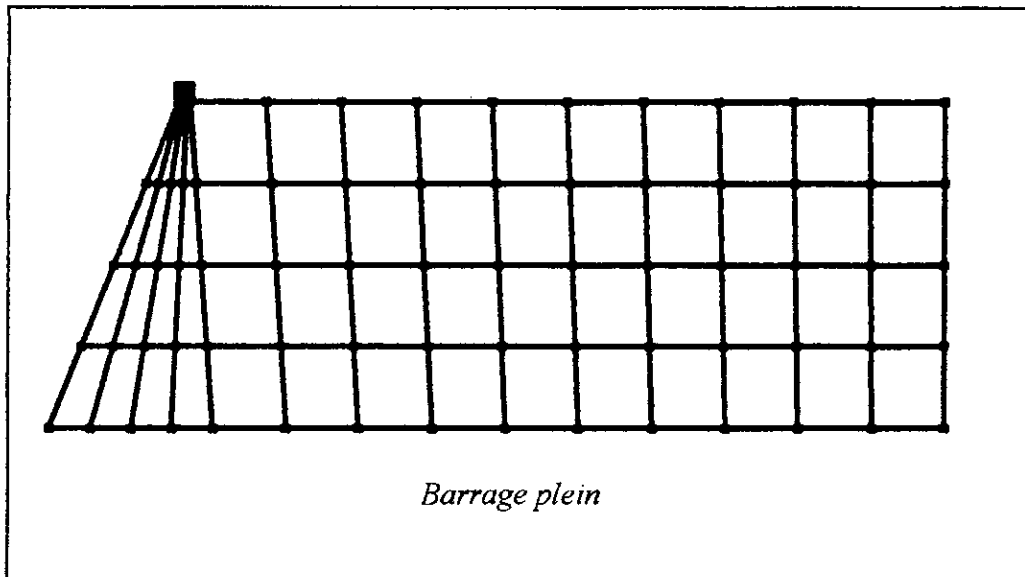
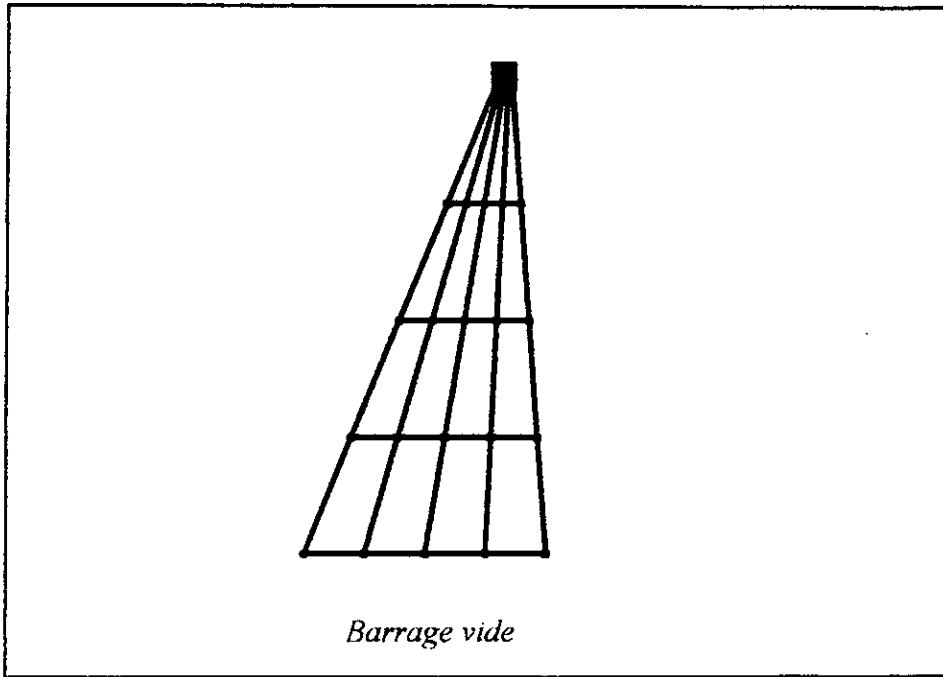


fluide compressible

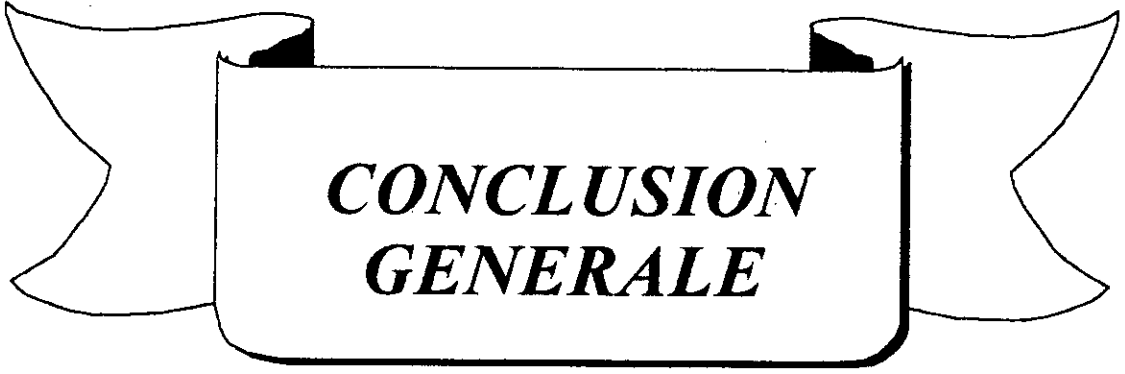


fluide incompressible

Fig.9.7. Déplacements à la crête



Visualisation du maillage



***CONCLUSION
GENERALE***

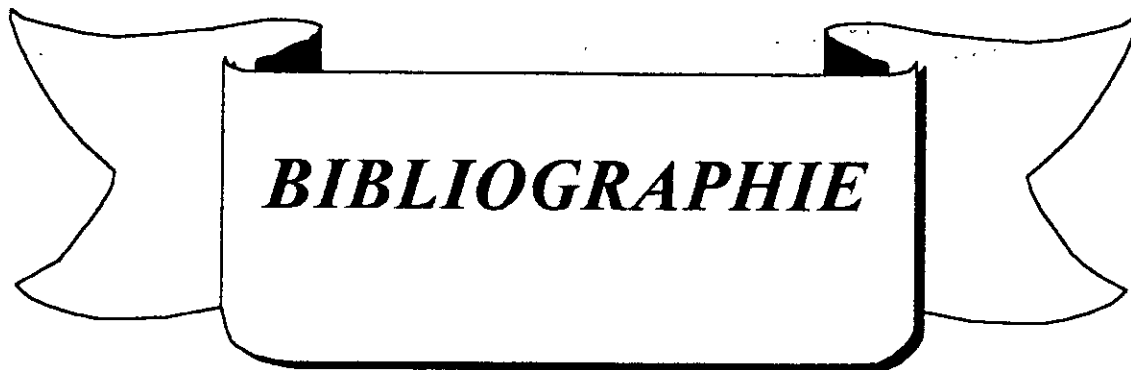
Conclusion

Un modèle d'éléments finis isoparamétriques à 2 D d'interaction fluide structure pour l'analyse sismique d'un barrage poids en béton a été présenté. Pendant le déroulement du travail on a constaté:

- ♦ Le raffinement du maillage dans la direction de la base n'a pas de grande influence sur les modes de vibrations dans le cas d'un barrage plein et celui d'un barrage vide.
- ♦ La position de la barrière a une influence négligeable sur les modes de vibrations. Son éloignement conduit à une augmentation de la pression au fond du réservoir.
- ♦ L'inclinaison du parement amont du barrage, influe sur les périodes propres comme aussi sur la distribution des pressions.
- ♦ L'effet de la compressibilité ne peut être négligé. La négliger conduit à une sur estimation des contraintes.
- ♦ L'effet des ondes de surface peut être négligé.

- ♦ Les période de vibration augmentent considérablement dès que le taux de remplissage dépasse 50%. Elles augmentent de 10% lorsque le taux de remplissage augmente de 98% à 100%. Pour un taux de remplissage inférieur ou égale à 50%, la variation des périodes du système sont négligeables.

- ♦ La prise en considération de l'interaction fluide-structure, basée sur le concept de la masse ajoutée (résultats SAP90), conduit à une augmentation considérable à celle basée sur la modélisation du fluide par éléments finis(programme).



BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

[1] **K.J.BATHE**, 'Finite Element Procedures in Engineering Analysis'. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1982).

[2] **K.J.BATHE & WILSON**, 'Numerical Methods in Finite Element Analysis', Prentice-Hall,(1976).

[3] **C.A. BREBIA & A.J. FERRANTE**, 'Computational Methods for the Solution of Engineering Problems', Pentech Press Limited, (1979)

[4] **B. CARNAHAN, H.A. LUTHER & J.O. WILKES**, 'Applied Numerical Methode', John Wiley (1969)

[5] **P.CHACRABARTI & A.K.CHOPRA**, 'Earthquake Analysis of Gravity Dams Including Hydrodynamic interaction', Earthquake Engineering Structural Dynamics Vol2, P143-160 (1973).

[6] **Y.C. DAS & F.A. AKL**, 'Hydrodynamic Pressure on Dams', International journal modeling and simulation vol8, N°1 P33-37,(1988)

[7] **G.DHATT & G.TOUZOT**, 'Une Presentation de la Methode des Eléments Finis', 2^{ème} edition Maloine S.A. éditeur (1984).

[8] **V.DAVIDOVICI**, 'Génie Parasismique', Presse de l'école national des ponts et chaussés (1985).

[9] **GERMAIN**, 'Mécanique des Milieux Continus', edition MASSON, Paris (1962)

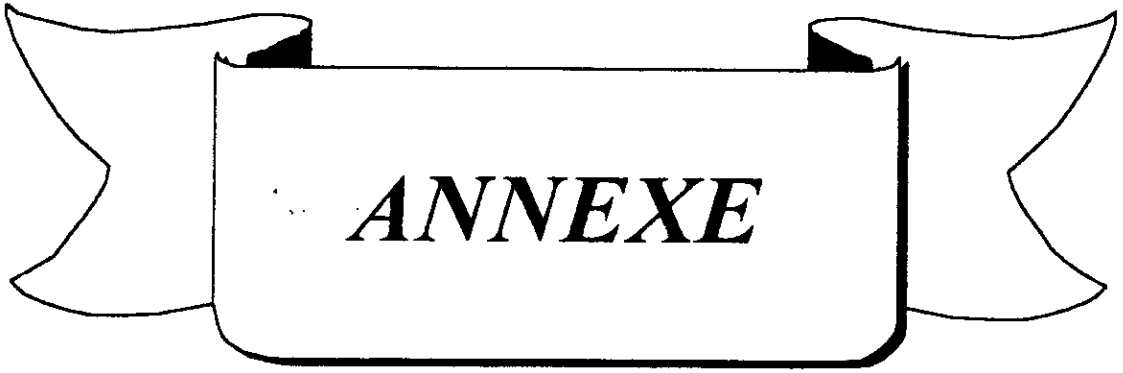
[10] **H.C. MARTIN & J.F. CAREY**, 'Introduction to Matrix Methodes of Structural Analysis', Mc Grauw-Hill (1973)

- [11] **S.MOUSSAOUI**, 'Investigation du comportement sismique des systèmes sols-barrages par la technique des vecteurs de RITZ', Thèse de magistère E.N.P (1995)
- [12] **J.P.E. O'CONNOR & J.C. BOOT**, 'Solution Procedure for the Earthquake analysis of Arch Dam-Reservoir systems with compressible water', Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol16 P757-773, (1980).
- [13] **L. OLSON & T. VANDINI**, 'Eigenproblems from Finit Element Analysis of Fluid-Structure Interaction', Computers & Structures Vol33 N°3 P679-687 (1989)
- [14] **J. PENZIEN & R.W. CLOUGH**, 'dynamique des structures'
- [15] **O. RAHMANI & S. KEBDANI**, 'Introduction à la Méthode des Eléments Finis pour les Ingénieurs', O.P.U. (1991)
- [16] **K.C. ROKEY, H.R. EVANS & W. GRIFFITHS**, 'Introduction des Eléments Finis', EYROLLES (1979).
- [17] **D.SAIS**, 'Analyse Dynamique des Barrages Poids en Béton en tenant compte de l'Intéraction Sol-Structure', Thèse de Magister ENP (1992).
- [18] **A. SEGHIR & A. SOUFARI**, 'Intéraction Fluide-Structure, cas des barrages poids', P.F.E. E.N.P. (1995).
- [19] **G.B. WARBURTON**, 'Assessment of Errors in the Newmark Method in Structural dynamics', Earthquake Engineering and Structural dynamics, Vol19 P457-467 (1990).
- [20] **H.M. WESTERGAARD**, ' Water pressures on dams durring earthquakes', A.S.C.E. P1303-1318 (1933).

[21] **E. WILSON**, 'Logiciel SAP90'.CSI,(1990)

[22] **O.C. ZIENKIEWICZ & R.L. TAYLOR**, 'La Méthode des Eléments Finis, Formulations de Base et problemes linéaires', 4^{ème} édition Traduction du volume 1, A.F.N.O.R. (1991)

[23] **O.C. ZIENKIEWICZ & R.L. TAYLOR**, 'The Finit Element Methode, Solide and Fluide dynamics Dynamics and non-Linearity', Fourth Edition Vol2.(1991).



ANNEXE

ANNEXE 1

Equations de base

deplacements

$$U = \Sigma N U_n$$

deformations

$$\varepsilon = S U = \Sigma B_i U_n = B U$$

$$B_i = S N_i$$

$$B = S N$$

relation cotraintes-déformations

$$\sigma = D \varepsilon$$

Equations d'équilibre

système discrets:

$$\text{solide: } \sigma_{ij} + f_i = \rho \gamma_i$$

$$\text{fluide: } \nabla^2 P = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Solide: } M\ddot{U} + C\dot{U} + KU - Q\ddot{P} = F$$

$$\text{fluide: } S\ddot{P} + D\dot{P} + HP + \rho Q^T \ddot{U} = q$$

Système couplé

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho Q^T & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -Q \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ q \end{Bmatrix}$$

ANNEXE 2

Eléments utilisés

Elément quadrilatéral à 4 nœuds

fonctions de formes:

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)$$

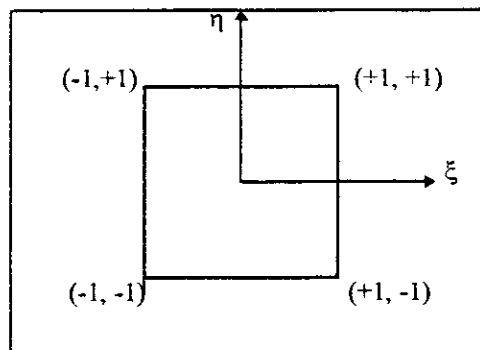
$$N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)$$

① Elément solide (2 degrés de liberté):

$$U = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \dots \\ U_8 \\ V_8 \end{Bmatrix}$$

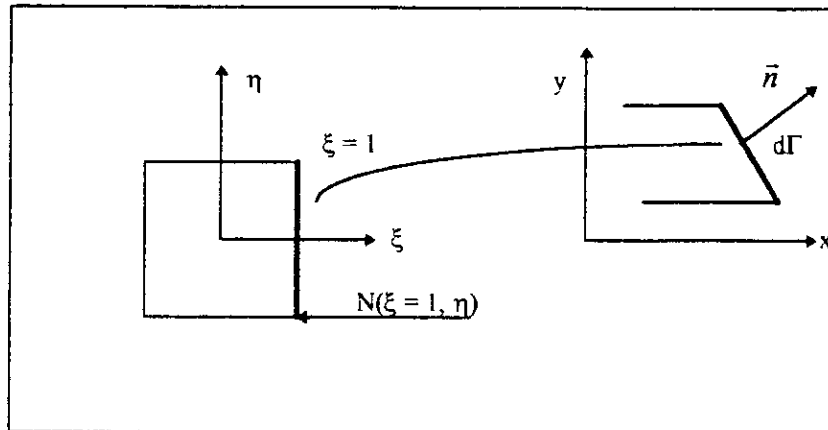
② Elément fluide (1 degré de liberté):

$$U = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_4 \end{Bmatrix}$$



ANNEXE 3

Integrale sur contour



$$d\Gamma^2 = dx^2 + dy^2 \quad \Rightarrow \quad d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$x = \langle N_i(\xi = 1, \eta) \rangle \{x_n\} \Rightarrow dx = \left\langle \frac{\partial N_i(\xi = 1, \eta)}{\partial \eta} d\eta \right\rangle \{x_n\}$$

$$y = \langle N_i(\xi = 1, \eta) \rangle \{y_n\} \Rightarrow dy = \left\langle \frac{\partial N_i(\xi = 1, \eta)}{\partial \eta} d\eta \right\rangle \{y_n\}$$

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\left\langle \frac{\partial N_i(\xi = 1, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle \{x_n\} \right)^2 + \left(\left\langle \frac{\partial N_i(\xi = 1, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle \{y_n\} \right)^2} d\eta$$

$$d\Gamma = J_s d\eta$$

ANNEXE 4

: Integration sur volume

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} dx dy$$

on sait que

$$x = \langle N \rangle \{x_n\}$$

$$y = \langle N \rangle \{y_n\}$$

$$dx = \langle dN \rangle \{x_n\}$$

$$dy = \langle dN \rangle \{y_n\}$$

$$dN = \frac{\partial N}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial N}{\partial \eta} d\eta$$

d'ou

$$dx = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial N}{\partial \eta} d\eta \right\rangle \{x_n\}$$

$$dy = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial N}{\partial \eta} d\eta \right\rangle \{y_n\}$$

sous forme matricielle:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \langle x_n \rangle \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} & \langle x_n \rangle \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} \\ \langle y_n \rangle \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} & \langle y_n \rangle \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \\ &= [J]^T \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'ou: } dx dy &= \det[J]^T d\xi d\eta \\ dx dy &= \det[J] d\xi d\eta \end{aligned}$$

ANNEXE 5

Intégration par parties (théorème de GREEN)

Une dimension:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi \frac{dU}{dx} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi}{dx} U dx + (\Psi U) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi \frac{d^2U}{dx^2} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2\Psi}{dx^2} U dx + \left(\Psi \frac{dU}{dx} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Deux dimension:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Psi \frac{\partial U}{\partial x} dx dy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} U dx dy + \int_{\Gamma} \Psi U dy \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} U dx dy + \int_{\Gamma} \Psi U \rho d\Gamma \end{aligned}$$

\vec{n} : positif vers l'extérieur.

$$l = \vec{n} \cdot \vec{i} = \cos \theta$$

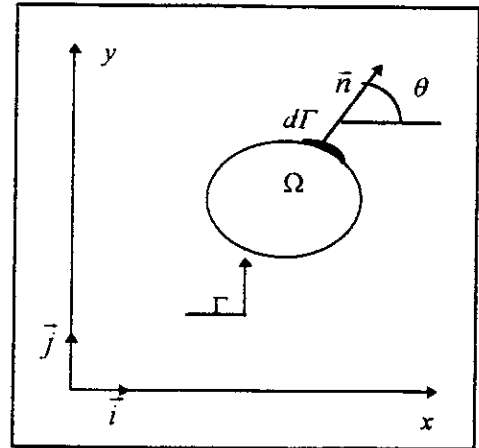
$$m = \vec{n} \cdot \vec{j} = \sin \theta$$

$$d\Omega = dx dy$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y}$$

$$dx = -m d\Gamma$$

$$dy = l d\Gamma$$



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Psi \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dx dy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial y} U dx dy - \int_{\Gamma} \Psi U dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial y} U dx dy + \int_{\Gamma} \Psi U m d\Gamma \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \Psi \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dx dy + \int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial U}{\partial x} l d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} (\Psi \Delta U - U \Delta \Psi) dx dy = \int_{\Gamma} \left(\Psi \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\Gamma \quad \text{où: } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$