

5/96

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT: Génie Civil

**PROJET DE FIN D'ETUDES**  
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'Etat en *GENIE CIVIL*

المعرض الوطنية المتعددة التجهيزات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Sujet

**ANALYSE DU PHENOMENE D'INTERACTION  
SOL-FONDATION CIRCULAIRE PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS ET COUPLAGE  
ELEMENTS FINIS-ELEMENTS INFINIS**

*Proposé par:*

Pr B. TILIOUINE  
Mr M. DEMIDEM

*Etudié par:*

Mr M. CHEIKH-TOUAMI  
Mr M.R. BOUDA

*Dirigé par:*

Mr M. DEMIDEM  
Pr B. TILIOUINE

*Promotion: Juin 1996*

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi El-Harrach - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT: Génie Civil

**PROJET DE FIN D'ETUDES**  
pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'Etat en *GENIE CIVIL*

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Sujet

**ANALYSE DU PHENOMENE D'INTERACTION  
SOL-FONDATION CIRCULAIRE PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS ET COUPLAGE  
ELEMENTS FINIS-ELEMENTS INFINIS**

*Proposé par:*

Pr B. TILIOUINE  
Mr M. DEMIDEM

*Etudié par:*

Mr M. CHEIKH-TOUAMI  
Mr M.R. BOUDA

*Dirigé par:*

Mr M. DEMIDEM  
Pr B. TILIOUINE

*Promotion: Juin 1996*

**E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi El-Harrach - ALGER**

الموضوع: تحليل ظاهرة التأثير المتبادل بين التربة و الأساسات الدائرية بطريقة العناصر المنتهية و طريقة الجمع بين العناصر المنتهية و العناصر اللامنتهية.

الهدف: تهدف هذه الدراسة إلى تحليل ظاهرة التأثير المتبادل بين التربة و الأساسات الدائرية و ذلك باستعمال طريقة العناصر المنتهية و العناصر اللامنتهية ، لهذا الغرض قدمنا عدداً معتبراً من الأمثلة لتوضيح أهمية هذه الظاهرة و تأثيرها على سلوك التربة و المنشأة معاً. و تم استخلاص نتائج جد مهمة.

**SUBJECT:** Analysis of soil-circular foundation interaction phenomenon, using finites elements methode (F.E.M.) and a combination between finites elements and infinites elements (I.E.M.)

**ABSTRACT:** The present work consists in a soil-foundation interaction study using (F.E.M.) and a combination finites elements-infinites elements; for this purpose, several examples are presented to demonstrate the importance of this phenomenon and its effects on the soil and the structure behaviour.

Some interesting results are deduced.

**SUJET:** Analyse du phénomène d'interaction sol-fondation circulaire par la méthode des éléments finis et couplage éléments finis-éléments infinis.

**RESUME:** Le présent travail consiste à étudier le phénomène d'interaction sol-fondation circulaire en utilisant la méthode des éléments finis et le couplage éléments finis-éléments infinis. A cet effet, plusieurs exemples sont présentés pour illustrer l'importance de ce phénomène et son effet sur le comportement du sol et de la structure.

Des résultats très intéressants ont été déduits.

## DÉDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

*A mes très chers parents.*

*A mes frères .*

*A mes soeurs.*

*A tous mes proches.*

*A mon ami et compagnon dans l'élaboration de ce travail ;*

*Mohamed.*

*A tous ceux qui me sont chers.*

*Je dédie ce modeste travail*

*Mohamed Rédha*

## DÉDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*A la lumière qui règne sur toute ma vie : ma mère.*

*A la mémoire de l'être le plus cher, que je n'aurais jamais la chance de revoir dans cette vie : mon père.*

*A mes frères et soeurs.*

*A tous mes amis : M'hamed, Karim, Mohamed Rédha, Ali, Nesreddine, ...*

*A tous ceux qui me sont chers*

*Je dédie ce travail*

*Mohamed*

## **REMERCIEMENTS**

*Nous tenons à remercier tout d'abord nos promoteurs le professeur B. TILIOUINE et Mr M.DEMIDEM d'avoir suivi le déroulement de notre travail avec un grand soin. Nous leur sommes profondément reconnaissant pour l'aide qu'ils nous ont apportée et pour les précieux conseils qu'ils nous ont prodigués.*

*Nous remercions également Mrs M.K.BERRAH, Mr M. HAMMOUTENE et Mr B.ZEGHLACHE pour leurs encouragements et soutien permanent durant la période de notre travail.*

*Nos remerciements vont aussi aux étudiants de poste graduation du département Génie-Civil pour leur serviabilité et leur disponibilité, en particulier Mr S. BOUZIANE.*

*Que tous les enseignants qui ont contribué à notre formation, sans oublier les gens du centre de calcul et de la bibliothèque, trouvent l'expression de notre gratitude, ainsi que tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.*

## SOMMAIRE

<b>CHAPITRE I: INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE II: ELASTICITE</b>	
II-1 Introduction	4
II-2 Hypothèses simplificatrices	4
II-3 Les lois de comportement	5
II-4 Equations d'équilibre	6
II-4-1 Equations déformations-déplacements	7
II-4-2 Equations de compatibilité	8
II-4-3 Equations contraintes-déformations	9
II-5 Problèmes axisymétriques	11
<b>CHAPITRE III: INTERACTION SOL-STRUCTURE</b>	
III-1-1 Introduction	15
III-1-2 Modèle de Winkler	15
III-1-3 Modèle éléments finis	16
III-1-4 Modèle finis - éléments infinis	17
III-1-5 Interaction par la théorie de l'élasticité	17
III-2 Comportement et mécanique des sols	20
III-2-1 Problème principal	20
III-2-2 Pressions de contact	20
III-2-3 Tassement des sols	20
III-2-4 Chargement	21
III-2-5 Résultats	22

III-3 Théorie de Boussinesq	23
III-3-1 Hypothèses de la théorie de Boussinesq	23
III-3-2 Formulation	24

#### **CHAPITRE IV: METHODE DES ELEMENTS FINIS**

IV-1 Introduction	28
IV-2 Historique	29
IV-3 Formulation M.E.F.	31
IV-3-1 Formulation déplacements	31
IV-4 Evaluation de la matrice de rigidité	32
IV-5 Convergence	37
VI-5-1 Convergence monotone	38
IV-5-2 Convergence non monotone	39
IV-6 Etude des structures à symétrie axiale	40
IV-7 Eléments isoparamétriques	41

#### **CHAPITRE V: ELEMENTS INFINIS**

V-1 Introduction	47
V-2 Historique	47
V-3 Formulation des éléments infinis	48
V-3-1 Approche directe	48
V-3-2 Approche inverse	49
V-3-2-1 Construction de la fonction de transformation	50
a- Cas unidimensionnel	50
b- Cas bidimensionnel	51

#### **CHAPITRE VI: PRESENTATION DES PROGRAMMES**

VI-1 Introduction	56
VI-2 Programmation des éléments finis	56



## CHAPITRE VII: APPLICATIONS

VII-1 Application 1	65
VII-1-a Modèle A	
VII-1-b Modèle B	
VII-2 Application 2	75
VII-2-a Modèle C	
VII-3 Application 3	80
VII-3-a Modèle D	
VII-3-b Modèle E	
VII-4 Interprétations	85

## CHAPITRE VIII: CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

VIII-1 Conclusions	87
VIII-2 Recommandations	89

## BIBLIOGRAPHIE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION GENERALE

## CHAPITRE I

# *INTRODUCTION GENERALE*

La négligence de certains facteurs qui rentrent en jeu d'une manière ou autre dans le comportement globale d'un édifice quelconque engendre des problèmes au niveau de l'interprétation des résultats, et si le taux de négligence augmente, la situation peut s'avère préjudiciable.

Dans le calcul des structures, on suppose souvent que ces dernières (les structures) sont encastées au sol, chose qui est loin d'être accepté dans certains cas.

En pratique, la solution de ce problème consiste à l'analyse de l'influence mutuelle de l'action de la structure sur le sol et vice-versa.

Cette influence est connue sous le nom "Interaction sol-structure" ou sol-fondation. Pour des structures importantes, l'hypothèse selon laquelle les fondations sont infiniment rigides ne reflète pas exactement la réalité physique. Une étude rationnelle, dicte la prise en compte des paramètres définissant les rigidités correspondantes aux sol et structure.

L'étude du sol, qui est un milieu semi-infini, nécessite une limitation du domaine d'étude pour pouvoir contrôler le comportement avec toute ses spécificités le maximum possible et donner la formulation mathématique adéquate afin de trouver la solution désirée à travers l'outil informatique, qui est indispensable pour ce genre de calculs.

Dans le souci d'analyser le phénomène d'interaction sol-fondation et donner plus d'informations sur ses différentes détails, le présent travail a été élaboré pour contribuer à l'étude de ce phénomène pour un cas de géométrie de fondation particulière, les fondations circulaires.

Nous avons utilisé pour cette tâche la méthode des éléments finis et le couplage entre éléments finis et éléments infinis. Ces deux méthodes ont une capacité énorme dans la résolution des problèmes très complexes. Les résultats obtenus ont été très concluants.

Le plan suivi dans le présent travail est comme suit:

- Chapitre I:

Une introduction générale sert à situer le travail de la thèse et de donner une présentation générale de ses détails.

- Chapitre II:

Un rappel de quelques notions de base de la théorie de l'élasticité linéaire.

- Chapitre III:

Se compose de deux parties, la première traite les méthodes numériques, et la seconde donne une formulation détaillée de la théorie de Boussinesq et quelques notions de la mécanique des sols.

\* Chapitre IV:

Nous présentons dans ce chapitre d'une manière détaillée la méthode des éléments finis.

\* Chapitre V:

Nous exposons quelques formulations de base concernant le couplage éléments finis-éléments infinis.

\* Chapitre VI:

Nous donnons une présentation des organigrammes et quelques définitions de sous-routines suivies lors de l'élaboration des programmes.

\* Chapitre VII:

Ce chapitre est destiné aux applications et à la validation des modèles et interprétations.

\* Chapitre VIII:

Conclusions et recommandations

## **CHAPITRE II**

### **ELASTICITE LINEAIRE**

## CHAPITRE II

# *ELASTICITE*

### II.1 Introduction:

Tout corps solide est à une certaine limite susceptible de se comporter d'une manière élastique, en d'autre terme; il peut reprendre sa forme et sa taille initiales après que les forces qui provoquent le changement; que se soit sur le plan taille ou forme; cessent d'agir, éventuellement c'est le cas pour des changements non importants.

Dans la théorie de l'élasticité, en plus de l'hypothèse de l'élasticité, le matériau est supposé continu, homogène et isotrope, ainsi que les composantes du vecteur déplacements sont très petites pour rester dans le contexte de petites déformations.

La théorie de l'élasticité est l'une des branches les plus vigoureuses de la mécanique des milieux continus déformables. Ses lois régissent l'étude de tous les corps solides qui environnent, du point de vue de leur équilibre et de leur mouvement.

### II.2 Hypothèses simplificatrices:

#### 1- Hypothèse d'hyperélasticité:

Le travail mécanique nécessaire pour déformer le corps dépend seulement de son état initial et de son état final.

#### 2- Hypothèse de linéarité physique:

Les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations.

#### 3- Hypothèse de linéarité géométrique:

Les contraintes sont des fonctions linéaires des dérivées des déplacements.

#### 4- Hypothèse d'isotropie:

Les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec la direction autour du point.

#### 5- Hypothèse d'homogénéité:

Les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec le point dans le corps.

### II.3 Les lois de comportement:

Les milieux, surtout solides, ont un comportement tellement complexe qu'il n'est pas possible de mettre au point une équation, ni même un système d'équations qui décrit le comportement compte tenu de tous les paramètres intervenant.

En pratique, on procède à une formulation séparée d'équations (chacune des équations mathématiques a pour but l'approximation d'observation physique de la réponse d'un milieu réel dans un domaine limité).

#### - Solide élastique Hookéen idéal:

C'est un matériau idéal souvent utilisé en calcul de structures, il est supposé suivre la loi de HOOKE, qui est pour un état de contrainte uniaxial, prend la forme suivante:

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

Exprimant une relation linéaire entre la contrainte axiale et la déformation axiale.

Pour des situations de cisaillement pure, la loi de HOOKE prend une forme similaire :

$$\tau = \gamma G$$

- $\tau$  : contrainte de cisaillement;
- $\gamma$  : déformation angulaire;
- $G$  : module de cisaillement.

Et pour un chargement plus général, la théorie de l'élasticité utilise la loi de HOOKE généralisée.

#### II-4 Equations d'équilibre:

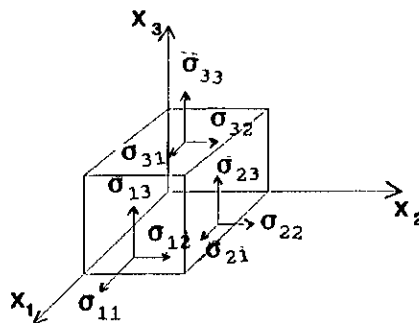
Un corps est dit en équilibre si, sous l'action de forces extérieures, il est au repos ou bien s'il est en mouvement suivant une ligne droite à vitesse constante.

Ils existent en général deux types de forces extérieures:

- Forces réparties sur la surface du corps; comme la pression hydrostatique. Ces forces sont appelées des Forces de surface et sont exprimées par unité de surface (  $N/m^2$  ).

- Forces réparties sur tout le volume du corps, comme la force gravitationnelle. Ces forces sont appelées Forces massiques ou Forces volumiques et sont exprimées par unité de volume (  $N/m^3$  ).

Soit l'état de contrainte en un point du corps défini par le tenseur de contrainte suivant:



Tenseur des contraintes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



Sachant que  $\sigma_{ij}$  est symétrique, c'est à dire:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Pour pouvoir dire qu'un milieu continu en 3D est en équilibre statique, il faut que les composants du tenseur de contrainte satisfassent l'équation différentielle suivante:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

où  $F_i$  : représente les composantes des forces volumiques suivant la direction  $i$  .

Les équations d'équilibre sont satisfaites par les équations suivantes:

$$P_i = \sigma_{ij} n_j ; i = 1, 3 ; j = 1, 3$$

où  $n$ : sont les cosinus directeurs de la normale  $n$  par rapport à la direction  $x$ .

$P$ : représente les forces surfaciques prescrites sur la frontière.

#### II.4.1 Equations déformation-déplacement:

L'état de déformation  $[e]$  en un point est défini tel que:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

Il est à noter que ce tenseur de déformation est symétrique:

$$e_{ij} = e_{ji}$$

Les équations reliant déformation-déplacement pour la théorie linéaire sont données par le système d'équations suivant :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ( U_{i,j} + U_{j,i} ) \quad (*)$$

avec :  $i = 1, \dots, 3$   
 $j = 1, \dots, 3$

#### II.4.2 Equations de compatibilité:

Les composantes de la déformation en un point quelconque sont complètement déterminées par trois (3) composantes de déplacements, ce ne sont pas donc des fonctions arbitrairement choisies de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , mais des fonctions qui dépendent des relations (\*).

Il existe six composantes de déformation  $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}$  ; et ils existent trois composantes de déplacements  $U_{11}, U_{22}, U_{33}$  ; et il est possible de se donner trois fonctions suffisamment dérivables et d'en déduire les six fonctions  $\epsilon_{ij}$  .

Par contre, il n'est pas possible de se donner arbitrairement six fonctions  $\epsilon_{ij}$  et d'en déduire les trois fonctions de déplacement. Il devrait par conséquent exister trois relations liant les  $\epsilon_{ij}$  d'un point de vue mathématique.

Ces relations expriment les restrictions sur la forme de  $\epsilon_{ij}$  pour que le système d'équations différentielles soit intégrable.

Les conditions d'intégrabilité sont appelées conditions de compatibilité. Elles assurent l'existence du champ de déplacement et de son unicité.

En fait, les déplacements sont obtenus à des constantes près qui sont déterminées par les conditions aux limites.

Les équations de compatibilité sont les suivantes:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{XY}}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 \epsilon_X}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_Y}{\partial X^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{YZ}}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 \epsilon_Y}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_Z}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{XZ}}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial^2 \epsilon_X}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_Z}{\partial X^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_X}{\partial Y \partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\partial \gamma_{XY}}{\partial Z} + \frac{\partial \gamma_{XZ}}{\partial Y} - \frac{\partial \gamma_{YZ}}{\partial X} \right]$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_Y}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{\partial \gamma_{XY}}{\partial Z} + \frac{\partial \gamma_{YZ}}{\partial X} - \frac{\partial \gamma_{XZ}}{\partial Y} \right]$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_Z}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{\partial \gamma_{XZ}}{\partial Y} + \frac{\partial \gamma_{YZ}}{\partial X} - \frac{\partial \gamma_{XY}}{\partial Z} \right]$$

IL est à noter que:

- Ces équations reliant les composantes de déformation entre elles traduisent la continuité dans le matériau en respectant les conditions initiales d'homogénéité, d'isotropie et d'élasticité.
- Quoique les équations de compatibilité sont au nombre de six, elles ont un degré d'indépendance égale à trois.

#### II.4.3 Equations Contraintes-déformations

Le tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$  et l'état de déformation  $\epsilon_{ij}$  sont liés par une relation linéaire telle que :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (**)$$

où  $C_{ijkl}$  : est un tenseur d'ordre 4 à 81 termes et représente

les fonctions réponses du matériau, pour un matériau isotrope le tenseur  $C_{ijkl}$  est indépendant du repère.

Etant donné que:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jilk} \\ \epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{cases}$$

alors les termes de  $C_{ijkl}$  deviennent 36 au lieu de 81 et le système (\*\*) devient:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix}$$

Pour un cas isotrope:

Les matériaux isotropes n'ont pas de direction privilégiée à l'état initial, alors le calcul ne fait finalement qu'avec deux constantes indépendantes :  $\lambda$  et  $\mu$ , qui sont appelés coefficients de Lamé et sont fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  et le coefficient de cisaillement  $G$ : tel que :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

D'où la matrice  $C$  devient en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  comme suit:

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda+2\nu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$$

et la loi de HOOKE généralisée pour un matériau isotrope s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{pp} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$e_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{pp} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}$$

$$e_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

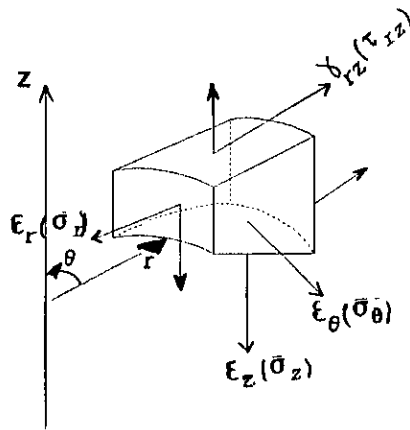
Avec :  $\sigma_{pp}$  : Trace du tenseur contraintes;  
 $e_{pp}$  : trace du tenseur déformation;  
 $\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker.

## II-5 Problèmes axisymétriques :

La résolution des problèmes axisymétriques revêt un très grand intérêt pratique; cas des solides de révolution . Si le chargement est également axisymétrique , alors à trois dimensions se ramène de façon évidente à un problème bidimensionnel fonctions des coordonnées r et z .

Le problème théorique est analogue à celui des contraintes planes ou des déformations planes car il est encore, bidimensionnel.

Pour des raisons de symétrie, les deux composantes du déplacement dans toute section plane contenant l'axe de symétrie définissent complètement le champ des déformations et donc des contraintes.



## Déformations et contraintes axisymétriques

### II-5-1 Matrice d'élasticité (D):

Cette matrice sert à lier les déformations aux contraintes comme suit:

$$\sigma = D \epsilon$$

### II-5-2 Matériau anisotrope:

Nous pouvons réécrire les équations qui donnent:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_2} - \frac{\nu_2 \sigma_r}{E_2} - \frac{\nu_2 \sigma_\theta}{E_2}$$

$$\epsilon_r = - \frac{\nu_2 \sigma_z}{E_2} + \frac{\sigma_r}{E_1} - \frac{\nu_1 \sigma_\theta}{E_1}$$

$$\epsilon_\theta = - \frac{\nu_2 E_2}{E_2} - \frac{\nu_1 \sigma_r}{E_1} + \frac{\sigma_\theta}{E_1}$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\tau_{zr}}{G_2}$$

On pose:  $\frac{E_1}{E_2} = n$  ;  $\frac{G_2}{E_2} = m$

La résolution par rapport aux contraintes conduit à :

$$D = \frac{E_2}{(1+v_1)(1-v_1-2v_2^2)} \begin{bmatrix} 1-v_1^2 & nv_2(1+v_1) & nv_2(1+v_1) & 0 \\ nv_2(1+v_1) & n(1-nv_2^2) & (v_1+nv_2^2)n & 0 \\ nv_2(1+v_1) & (v_1+nv_2^2)n & n(1-nv_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n(1+v_1)(1-v_1-2nv_2^2) \end{bmatrix}$$

### III-5-3 Matériau isotrope :

Pour un matériau isotrope on a :

$$E_1 = E_2 = E \Rightarrow n = 1$$

et  $v_1 = v_2 = v$

alors :

Reportons ces valeurs dans dans la matrice D, on aura:

$$D = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{1(1-v)} \end{bmatrix}$$

**CHAPITRE III**  
**INTERACTION SOL-STRUCTURE**



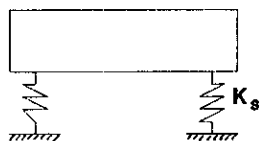
## INTERACTION SOL-STRUCTURE

### III-1-1 Introduction:

Tout en négligeant la moindre des données peut engendrer des dégâts énormes et parfois inévitables; surtout si c'est le cas d'un édifice de valeur; et bien entendu les édifices de grandes dimensions, parmi les données qu'il ne faut jamais négliger on a , l'interaction sol-structure. Ce phénomène est principalement dû à un mécanisme d'échange d'énergie entre la structure et le sol, et comme le moyen de transmission des efforts de la structure au sol, et le contraire se fait à travers la fondation; on s'intéresse alors par le comportement mutuel entre le sol d'un côté et la fondation de l'autre côté.

### III-1-2 Modèle de Winkler:

Le calcul de la distribution des contraintes et des tassements sous une surface chargée devient très difficile lorsque la surface en question n'est pas parfaitement flexible.



Modèle de Winkler

Ce modèle est couramment utilisé pour tenir compte du phénomène de l'interaction sol-fondation.

Il suppose que pour un déplacement d'un ressort, la pression de contact  $q$  est donnée par:

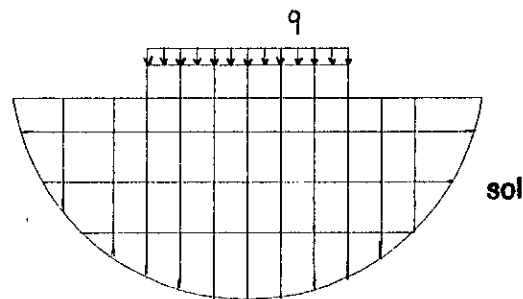
$$q = K_g \cdot \delta$$

où  $K_g$  : est le coefficient de réaction sous fondation.  
Dans ce modèle, la fondation est ainsi représentée par un certain nombre de ressorts tous indépendants les uns des autres.

Les hypothèses de Winkler supposent que  $K_g$  ne dépend pas de l'intensité du chargement; mais il dépend de la nature du sol.

L'avantage de ce modèle réside dans sa simplicité de mise en oeuvre; mais le problème majeur est la détermination de  $K_g$ .

### III-1-3 Modèle éléments finis:

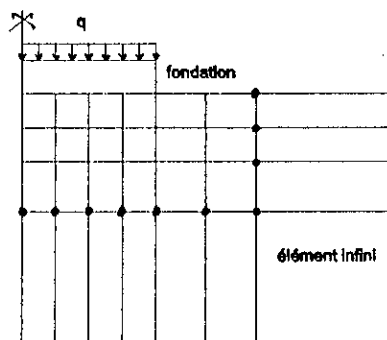


Modèle éléments finis

La méthode est détaillée dans le quatrième chapitre et elle reflète mieux la continuité du milieu et permet de prendre en compte toute éventuelle complexité comme le cas des multicouches.

Et les modules ou les paramètres du sol  $E$  ; module de Young et  $\nu$  ; coefficient de Poisson sont plus faciles à obtenir sur le plan expérimental que le coefficient  $K_g$  dans le modèle de Winkler.

### III-1-4 Modèle éléments finis-éléments infinis:



### Modèle éléments finis-éléments infinis

La méthode des éléments finis a parmi ses inconvénients le raffinement du maillage à l'approximité des points d'application des charges; ce raffinement exige une mémoire énorme pour le calculateur et même le temps d'exécution qui devient important si la structure est compliquée, bien entendu le type de chargement également.

Tous ces inconvénients ont poussé les chercheurs à trouver une solution pour ce problème.

La solution réside dans l'idée de couplage entre la méthode des éléments finis et celle des éléments infinis.

### III-1-5 Intéraction par la théorie de l'élasticité:

La théorie de l'élasticité suppose qu'une relation linéaire entre les déformations et les contraintes, établie par la loi de HOOKE, qui s'exprime pour un cas tridimensionnel comme suit:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad \text{(III-a)}$$

et  $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$  ;  $\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$  ;  $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$

Si on additionne membre à membre ces équations on aura:

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1}{E} (1 - 2\nu) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

ou bien avec la notation indicielle:

$$\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} (1 - 2\nu) \sigma_{jj}$$

Comme dans notre cas on s'intéresse par le type axisymétrique; les déformations en question sont:

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu (\sigma_z + \sigma_\theta)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)] \\ \epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu (\sigma_r + \sigma_z)] \\ \gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} \end{cases} \quad \text{(III-b)}$$

On peut obtenir maintenant les contraintes en fonction des déformations en inversant uniquement le système d'équations (III-b) , on aura donc:

$$\begin{cases} \sigma_r = 2G\epsilon_r + \lambda\epsilon_{jj} \\ \sigma_z = 2G\epsilon_z + \lambda\epsilon_{jj} \\ \sigma_\theta = 2G\epsilon_\theta + \lambda\epsilon_{jj} \\ \tau_{rz} = G\gamma_{rz} \end{cases} \quad \text{(III-c)}$$

avec :

$$\epsilon_{jj} = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z$$

$$\begin{cases} G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases}$$

Le système (III-c) est appelé système d'équations de Lamé. Et à partir des équations (III-c), on peut exprimer les contraintes en fonction des déformations autrement dit : par l'intermédiaire de la matrice d'élasticité [D] déduite du système (III-d) suivant :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_\theta + \epsilon_z) \\ \sigma_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_r + \epsilon_\theta) \\ \tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz} \\ \sigma_\theta = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_\theta + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_r + \epsilon_z) \end{cases} \quad \text{(III-d)}$$

D'où la matrice [D] sera comme suit :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## III-2 Comportement et mécanique des sols:

### III-2-1 Problème principal:

Parmi les problèmes principaux de la mécanique des sols relatifs aux fondations des structures est l'étude de la relation entre les facteurs suivants:

- charge;
- surface de chargement;
- profondeur de la fondation;
- le tassement de la fondation;
- la durée du chargement.

Grâce à la grande diversité des propriétés des sols et pas mal de variables qui interviennent dans les problèmes de la stabilité des sols et structures; les relations entre tous ces facteurs sont vraiment très compliquées; et dans les études théoriques seules, on est forcé dans plusieurs cas de supposer des conditions idéales et des simplifications, sinon il faut étudier la mécanique des sols expérimentalement.

### III-2-2 Pressions de Contact:

Les contraintes dans le sol sont causées par deux facteurs principaux :

- Le poids propre du sol;
- Les contraintes appliquées sur le sol par la charge de la structure.

### III-2-3 Tassement des sols:

Quand un sol est soumis à des charges (fondations, barrages,...), il se produit des déformations dans le milieu. Comme généralement ces charges sont verticales, alors les déformations produites sont particulièrement marquées dans la même direction des charges appliquées; les déformations verticales du sol prennent alors le nom de tassement.

Le tassement du sol présente une influence directe et inévitable du sol sur la structure et il doit être étudié pour ne pas engendrer des dégâts.

Pour traiter certains problèmes de fondations ( par exemple le problème des bi-couches) ; il est nécessaire de connaître la répartition des contraintes dans un plan vertical à différentes profondeurs, pour se rendre compte rapidement de l'influence des charges sur les diverses couches.

### III-2-4 Chargement :

Sous chargement quasi-statique monotone le comportement des sols est schématisé par la figure (III-1) qui regroupe des courbes effort-déformation obtenues à l'appareil triaxial pour trois chemins de contraintes différents :

- Courbe A: Essai triaxial classique à contrainte radiale constante.
- Courbe B: Essai à déformation latérale nulle .
- Courbe C: Compression isotrope.

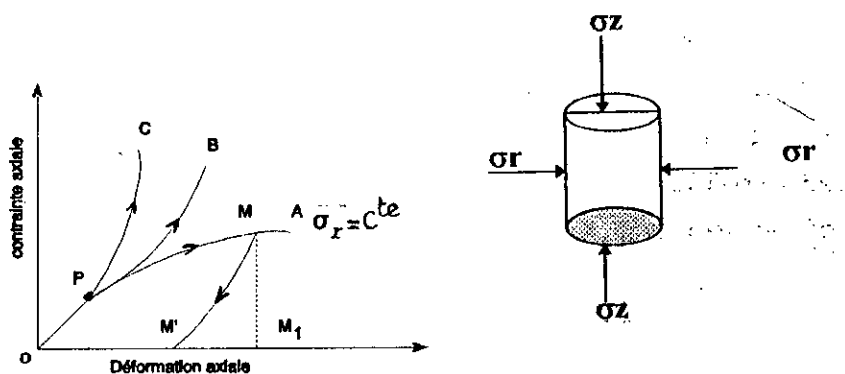


Fig (III-1)

Courbe contraintes-déformations

L'analyse de ces résultats expérimentaux montre que: pour des déformations faibles: le sol a un comportement élastique linéaire.

L'essai montre que tant que les déformations relatives linéaires ou angulaires, restent inférieures à une limite que l'on peut estimer à  $10^{-4}$ , on peut alors considérer cette valeur comme étant une limite d'un domaine élastique conventionnel à l'intérieur duquel le comportement du sol reste linéaire.

Au delà d'un certain seuil de contrainte et quelque soit le chemin de contraintes suivi, le comportement du sol cesse d'être linéaire. Mais malgré cette non linéarité, l'hypothèse du comportement élastique du sol reste maintenue.

A partir d'une contrainte relativement élevée ( le point M sur la courbe A); il y a apparition d'une déformation résiduelle si on effectue une décharge de l'échantillon. Alors la déformation au point M est la somme d'une déformation élastique récupérable après déchargement de l'échantillon; et d'une déformation résiduelle OM', d'où le comportement du sol est dit: élasto-plastique.

Pour certains trajet de chargement ( courbe A ) la déformation devient très importante pour une valeur finie de contrainte appliquée. Le sol atteint un état de rupture.

### III-2-5 Résultats:

Sous chargement quasi statique monotone le comportement du sol est caractérisé par un domaine d'élasticité, et au delà du quel apparaissent des déformations plastiques irréversibles. Pour certains chemins de contraintes le sol peut atteindre un état de rupture.



### III-3 Théorie de Boussinesq:

#### III-3-1 Hypothèses de la théorie de Boussinesq:

La théorie de distribution des contraintes est basée sur les résultats donnés par la théorie mathématique de l'élasticité pour le cas simple d'un chargement d'un solide, homogène, élastique, isotrope, cas d'un milieu semi-infini.

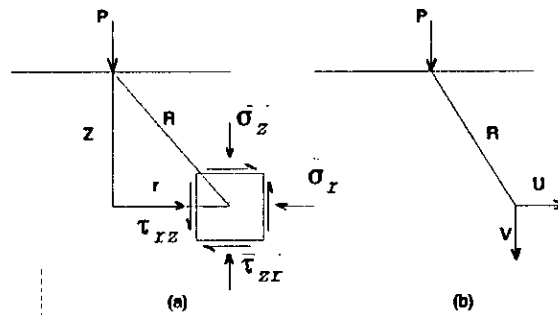
Les hypothèses de Boussinesq, sont:

- Le sol est un milieu élastique, homogène, isotrope, semi-infini étendu dans un demi-espace et obéit à la loi de HOOKE.
- Le poids du sol n'est pas pris en considération.
- Au préalable, avant l'application de la seule charge concentrée; le sol n'était pas sujet de toute autre contrainte.
- La distribution des contraintes, qui prennent naissance après l'application de la charge concentrée, est indépendante du type du matériau qui constituant le corps homogène élastique isotrope.

Pour le sol; le changement en volume après d'application de la contrainte est négligé.

- \* Dans ce milieu; la loi de la distribution des contraintes, linéaire est valable.
- \* Il existe une continuité de contrainte.
- \* La distribution des contraintes est symétrique par rapport à l'axe porteur de la charge.

### III-3-2 Formulation:



Fig(III-2)

(Demi-espace élastique soumis à une charge concentrée)

Pour une charge concentrée, les contraintes et les déplacements sont symétriques axialement et il est plus commode d'exprimer les résultats en termes du système de contraintes cylindriques  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  voir figure III-2 (a) où  $\sigma_\theta$  pour l'élément sur la figure est normale à la page; les solutions de Boussinesq sont:

- Les contraintes:

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi R^2} \left[ 3 \frac{r^2 z}{R^3} - (1-2\nu) \frac{R}{(R+z)} \right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi R^2} \left[ 3 \left( \frac{z}{R} \right)^3 \right]$$

$$\sigma_{rz} = \frac{P}{2\pi R^2} \left[ 3 \frac{r z^2}{R^3} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{P}{2\pi R^2} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{z}{R} - \frac{R}{(R+z)} \right) \right]$$

- Les déplacements:

$$V = \frac{P}{2\pi ER} (1+\nu) \left[ \left(\frac{Z}{R}\right)^2 + 2(1-\nu) \right]$$

$$U = \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[ \frac{rZ}{R^2} - (1-2\nu) \frac{r}{(R+Z)} \right]$$

Au dessus de l'axe de la fondation on a :

$$R = Z \quad \text{et} \quad r = 0$$

Alors:

$$\sigma_{rr} = -\frac{P(1-2\nu)}{2\pi R(R+Z)}$$

$$= -\frac{P(1-2\nu)}{4\pi R^2}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{3}{2\pi} \frac{P}{R^2}$$

$$\sigma_{rz} = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{P}{4\pi R^2} [(1-2\nu)]$$

et les déplacements sont:

$$V = \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} [3-2\nu]$$

$$U = 0$$

#### III.4 Remarques:

1) Les équations de Boussinesq tiennent au fait que le matériau est élastique, homogène et obéit complètement à la loi de Hooke et l'une parmi les hypothèses de cette théorie est que la contrainte soit proportionnelle à la déformation.

2) les équations de Bousinesq sont applicable à l'état d'équilibre élastique d'un milieu non pesant, semi-infini, homogène et isotrope.

3) L'équation de la containte verticale pour une charge concentrée sur le sol produit une contrainte infiniment grande à l'approximation du point d'application de la charge concentrée. Cette équation ne donne pas les contraintes réelles au points proches du point d'application, même pour les matériau qui sont élastique.

4) La variation du volume des grains argileux est pratiquement nulle sous l'action des contraintes relativement faibles que l'on rencontre généralement en mécanique des sols et par conséquent toute diminution de volume d'un échantillon d'argile saturé ne peut être obtenu qu'au prix d'une expulsion d'eau.

## **CHAPITRE IV**

### **LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

## *LA METHODE DES ELEMENTS FINIS*

### IV.1 Introduction:

Le calcul des structures et en particulier les milieux continus, couvre une grande variété d'application dans les secteurs industriels de la construction génie-civil, mécanique, aéronautique, ... etc.

Ce domaine a pour objet, la modélisation théorique au stade de la conception d'une structure ou d'un système mécanique, ce qui permet de faire la simulation du comportement et d'enchaîner ainsi une procédure d'optimisation des forces et des dimensions, compte tenu des fonctions de la structure et du choix du matériau.

Pour la modélisation, il existe plusieurs méthodes qui permettent de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Parmi ces méthodes on a: la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est une technique pour la résolution de ces derniers par le biais d'une approximation simple des variables inconnues afin d'avoir des équations algébriques simples à résoudre.

Le système continu est discrétisé par une subdivision du domaine en un grand nombre d'éléments de formes arbitraires (Généralement rectangulaire ou triangulaire) liés entre eux par des noeuds.

Dans plusieurs cas on peut utiliser une subdivision graduelle en éléments pour permettre une étude plus détaillée des régions

de la structure où l'on attend une grande concentration de contrainte, par exemple autour des ouvertures et près des charges concentrées, une telle distribution sélective d'éléments est efficace et peut économiser le temps de calcul sans perte de précision.

Quant au nombre d'éléments requis pour donner des solutions satisfaisantes, il est impossible de généraliser car cela dépend du problème considéré.

Le choix d'une subdivision convenable doit, si possible être basée sur des essais. Sinon, on doit alors mettre en oeuvre un grand nombre de résolutions faisant intervenir différentes dimensions de mailles pour tester la convergence de la solution.

En résumé, on peut dire que pour tout problème d'engineering, il y a lieu de considérer les 4 étapes subséquentes:

1- Idéalisatation du système à analyser, c'est à dire de le représenter à l'aide d'un modèle pouvant simplifier le traitement du problème.

2- Position des équations gouvernantes: Il s'agit d'équations algébriques ( gouvernant le système idéalisé: discrétisé ) et non différentielles ( gouvernant le système continu ).

3- Résolution des équations gouvernantes.

4- Interprétation des résultats, qui est absolument nécessaire pour justifier le choix du modèle et des étapes de résolution.

#### **IV.2 Historique:**

La méthode des éléments finis se base d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

Concernant les théorèmes énergétiques de l'élasticité, leur formulation a été effectuée au siècle dernier grâce aux travaux de NAVIER ( 1819 ) sur les structures hyperstatistiques puis MAXWELL ( 1864 ) et CASTIGLIANO ( 1878 ) qui établissent de façon complète les théorèmes de l'énergie.

Cependant, les applications de cette formulation au calcul des structures complexes ont été inexistantes à cause de l'indisponibilité de moyen de calcul.

Il faut noter qu'en 1932, l'établissement par H. CROSS d'une méthode rendant possible l'analyse de systèmes de poutres avec les moyens de calcul de l'époque ( distribution des moments ). Cependant, ces techniques ne permettent pas jusqu'alors la résolution de problèmes de milieux continus, rendue possible uniquement par la discrétisation du problème continu à l'aide de méthodes d'approximation adéquates.

C'est au début du 20ème siècle qu'ont été acquis les résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de RITZ ( 1908 ) et GALERKIN ( 1915 ), puis en 1943 COURANT établit les bases de la M.E.F. en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible, en effectuant une discrétisation spatiale du domaine, tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Avec le développement de l'ordinateur, après la 2ème guerre mondiale, cela a provoqué un retour aux méthodes classiques d'analyse, de là nait " la méthode matricielle ", permettant de traiter des problèmes assez complexes. Parmi les contributions les plus importantes, citons celles de LEVY (1947) GARVEY (1951) pour la méthodes des forces et LEVY (1953) pour la méthode des déplacements. En 1955, ARGYRIS présente une approche unifiée des méthodes des déplacements et des forces, puis l'année suivante, TURNET et GLOUGH publient une présentation systématique de la méthode des déplacements.



Dès 1960, la M.E.F. subit un développement rapide dans plusieurs directions:

- création d'éléments de haute précision.
- construction d'une base mathématique de la M.E.F.
- utilisation de la méthode de la M.E.F. pour la résolution de problèmes non linéaires, non stationnaires.

#### IV.3 FORMULATION M.E.F.

##### 1. FORMULATION CONTRAINTES OU EQUILIBRE:

Dans laquelle on se donne une approximation soit sous forme d'un champ de contraintes en équilibre ou soit sous forme d'une fonction de contraintes. Elle se base sur la théorie de l'énergie complémentaire.

##### 2. FORMULATION DEPLACEMENTS:

Dans laquelle on se donne une approximation du champ de déplacement, elle se base sur la stationnarité de l'énergie potentielle.

##### 3. FORMULATION MIXTE:

Dans laquelle on considère le champ de déplacements et de contraintes comme inconnus primaires du problème; d'où le nom mixte.

On considère la formulation basée sur la méthode des déplacements.

##### IV.3.1 FORMULATION DEPLACEMENT:

Dans cette formulation on suppose que le champ de déplacement comme inconnu primaire du problème, à partir desquels seront déterminées les contraintes et les déformations en tout point du milieu, utilisant les relations d'élasticité.

Cette formulation peut être résumée dans les étapes suivantes:

- subdivision du milieu à étudier par des lignes ( cas plan ) ou par des plans ( cas tri-dimensionnel ) imaginaires, ce qui donne un certain nombre d'éléments finis.
- ces éléments sont supposés reliés entre eux par un nombre fini de points appelés " points nodaux " ou " noeuds " dont leurs déplacements seront les inconnus du problème.
- on choisit une fonction ( ou plusieurs ) appelée(s) "fonction(s) de forme ", qui définira au mieux possible le champ de déplacement de ces noeuds.
- on détermine le système de forces concentrées aux noeuds, équivalent à l'ensemble des charges appliquées au milieu.
- on évalue la matrice de rigidité  $[K^e]$  de chaque élément fini, puis celle du milieu entier par assemblage des matrices élémentaires.
- on résout le système d'équations pour déterminer les déplacements au noeuds, puis les déformations et les contraintes.

#### IV.4 EVALUATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE:

##### IV.4.1 CHOIX DE LA FONCTION DEPLACEMENT:

Comme la formulation choisie est une formulation déplacement, on doit donc imposer un champ de déplacement qui remplit les conditions suivantes:

a) Les fonctions choisies doivent être continues au sein de l'élément, ainsi qu'au passage des frontières entre les éléments, lorsque les éléments adjacents sont de même type ou possèdent les mêmes fonctions de déformation sur les frontières.

b) Les équations force-déplacement découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement de corps rigide.

c) Les fonctions choisies doivent permettre la représentation des valeurs uniformes pour toutes les contraintes ou déformations.

d) Le nombre de termes indépendants dans le polynôme doit être égal au nombre de composantes des déplacements qui sont à calculer.

#### IV.4.2 CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE:

La détermination de la matrice de rigidité peut d'effectuer à l'aide de théorème du minimum d'énergie potentielle totale.

$$\delta\pi = \delta(U - W) = 0 \Rightarrow \delta U = \delta W \quad (\text{IV-1})$$

où l'énergie de déformation virtuelle est:

$$\delta U = \int_V \{ \sigma \}^T \{ \delta \epsilon \} dv \quad (\text{IV-2})$$

et l'énergie accomplie par les forces extérieures pour un déplacement virtuel est :

$$\delta W = \{ F \}^T \cdot \{ \delta U \} \quad (\text{IV-3})$$

Avec:  $\{ \sigma \}$  : vecteur contrainte .  
 $\{ \delta \epsilon \}$  : vecteur des déformations virtuelles.  
 $\{ F \}$  : vecteur des forces nodales .  
 $\{ \delta U \}$  : vecteur des déplacements nodaux virtuels.

En raison de l'élasticité du corps et en absence de tout champ thermique on a :

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \}$$

et

$$\{ \epsilon \} = [L] \{ U \} \quad (\text{IV-4})$$

Avec:  $[D]$  Matrice d'élasticité.  
 $[L]$  Matrice opérateur différentiel ( particulière à chaque type de structure).  
 $\{U\}$  Vecteur champ déplacements.

Or:  $\{U\} = [N]\{\theta\}$

$$\Rightarrow \{\epsilon\} = [L] \cdot [N] \cdot \{\theta\} \quad (\text{IV-5})$$

si on pose  $[B] = [L] \cdot [N]$  on aura :

$$\{\epsilon\} = [B] \{\theta\} \quad (\text{IV-6})$$

d'où

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{\theta\} \quad (\text{IV-7})$$

Avec :  $\{\theta\}$  : Vecteur déplacement nodaux  
 $[N]$  : Matrice fonctions d'interpolation.  
de l'équation IV-1 et IV-2 on trouve :

$$\{F\}^T \{\delta \theta\} = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \epsilon\} dv \quad (\text{IV-8})$$

En injectant (IV-6) et (IV-7) dans (IV-8) on obtient:

$$\{F\}^T \{\delta \theta\} = \int_V \{\theta\}^T [B]^T [D] [B] dv \{\delta \theta\}$$

Or les équations d'équilibre sont définies par:

$$\{F\} = [K] \{\theta\}$$

$$\Rightarrow \{F\}^T = \{0\}^T [K] = \{0\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dv$$

d'où:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (IV-9)$$

#### IV-4-3 PROPRIETE DE LA MATRICE DE RIGIDITE:

La matrice de rigidité est :

- 1) symétrique en vertu du théorème de MAXWELL-BETTI ,
- 2) singulière avant l'introduction des déplacements aux limites, ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément.
- 3) définie positive, ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle.

#### IV-4-4 ETAPES DE BASE POUR LA DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DE RIGIDITE D'UN ELEMENT :

L'élaboration de la matrice de rigidité passe par les étapes suivantes:

Etape 1: {

- Identifier le type de problème
- Choisir un système de coordonnées convenable
- Numérotter les noeuds.

Etape 2: Choisir une fonction d'interpolation , c'est à dire déterminer l'ordre du polynôme.

Etape 3: Obtenir l'état des déplacements en chaque point en fonction des déplacements nodaux.

**Etape 4:** Relier les déformations en chaque point avec les déplacements.

**Etape 5:** Relier les contraintes avec les déformations puis avec les déplacements.

**Etapes 6:** Ecrire l'égalité du travail virtuel avec l'énergie de déformation virtuelle et tirer par identification la matrice de rigidité de l'élément.

#### IV-4-5 Règle d'assemblage:

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices  $[K]$  et  $\{F\}$  de la structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments  $[K^e]$ ,  $\{F^e\}$  préalablement calculées. En utilisant l'approche énergétique, on peut définir la méthode d'assemblage.

Soit  $\pi$  l'énergie potentielle totale de l'élément  $e$  :

$$\pi^e = \frac{1}{2} \{0^e\}^T [K^e] \{0^e\} - \{0^e\}^T \{F^e\} \quad (\text{IV-10})$$

SI les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par des énergies potentielles totales élémentaires, soit:

$$\pi = \sum_{\text{éléments}} \pi^e = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \{0^e\}^T [K^e] \{0^e\} - \{0^e\}^T \{F^e\} \right\} \quad (\text{IV-11})$$

La comptabilité des déplacements nodaux de la structure est obtenu en écrivant pour chaque élément une relation matricielle de type:

$$\{O^e\} = [B^e]\{O\} \quad (IV-12)$$

Avec:  $[B^e]$  matrice de localisation ou de connectivité géométrique dont les éléments sont des 0 ou des 1.

Chaque relation (IV-3) permet de repérer ou de localiser les d.d.L de chaque élément dans l'ensemble des d.d.L de la structure.

En utilisant les relations (IV-10) et (IV-12) on peut écrire:

$$\pi = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{O\}^T [B^e]^T [K^e] [B^e] \{O\} - \{O\}^T [B^e] \{F^e\}$$

d'où : 
$$\pi = \frac{1}{2} \{O\}^T [K] \{O\} - \{O\}^T \{F\}$$

Avec:

$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [B^e]^T [K^e] [B^e]$$

$$\{\hat{F}\} = \sum_{\text{éléments}} [B^e] \{F^e\}$$

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous-matrices de rigidité nodale de chaque élément.

#### IV-5 Convergence:

Dans les discussions de la convergence d'une solution M.E.F., il y a des propriétés nécessaires ou tout au moins souhaitables au niveau de l'élément afin d'obtenir une solution aussi proche que possible de la solution exacte.

Au fur et à mesure qu'on augmente le nombre d'éléments, la solution converge vers l'exacte, mais aussi, le choix du modèle, du type d'éléments, ... etc., interviennent comme facteurs influant sur la convergence.

Par ailleurs, il importe de préciser que plusieurs sources d'erreurs peut affecter le processus de convergence:

- Erreur dues à la précision,
- Erreurs sur les équations constitutives,
- Erreurs sur les itérations de certaines équations.

La convergence de la solution n'est pas toutefois toujours monotone, c'est pourquoi on rencontre 2 types de convergences: monotone et non monotone.

#### IV-5-1 Convergence monotone

Pour qu'elle soit ainsi, deux critères sont à satisfaire: la complétude et la compatibilité

##### a) La complétude:

Un élément fini est dit complet s'il satisfait les deux conditions suivantes:

- Les fonctions qui représentent le déplacement à l'intérieur d'un élément ne doit pas donner lieu à des déformations lorsque les déplacements nodaux correspondent à un déplacement de corps rigide.
- Les fonctions qui représentent le déplacement doivent pouvoir représenter un état de déformation constante à l'intérieur de l'élément.

##### b) Compatibilité:

Un élément est dit compatible s'il permet la définition d'un champ compatible, c'est à dire une continuité des déplacements au sein des éléments et aux frontières de ces derniers, et une continuité des déplacements et de leurs dérivées premières pour les problèmes de flexion. Physiquement, la compatibilité peut s'expliquer par le fait qu'aucun vide n'apparait entre les éléments lorsque l'assemblage est chargé.



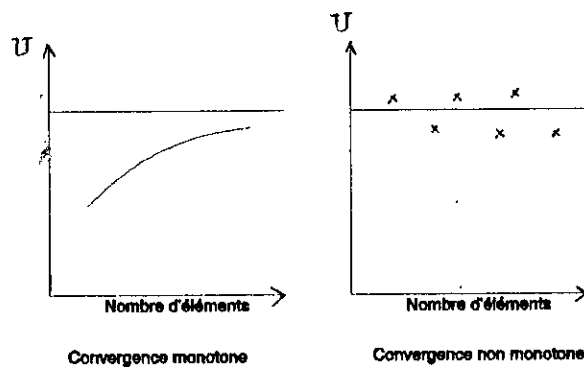
### Remarques:

- Généralement, des difficultés relatives à la compatibilité apparaissent lorsque les degrés de liberté d'un noeud quelconque sont dépendant (cas de flexion des coqs, des plaques, ...).
- Il est à remarquer que la convergence se fait par valeur inférieur:  $U^{app} < U^{exacte}$ . Si on décrit trop on risque de rigidifier l'élément.

### IV-5-2 Convergence non monotone:

Certains éléments ne satisfassent pas toutes les conditions de complétude comme condition essentielle, mais en la remplaçant par un autre critère de complétude sur un groupe d'éléments. Le test de complétude collective est appelé "Patch-test".

On constate que les éléments complets et incompatibles qui satisfassent ce test convergent.



### IV-6 Etude des structures à symétrie axiale:

L'étude des structures à symétrie axiale est d'une importance considérable dans un grand nombre de problèmes en technologie. Parmi ces problèmes on peut citer: Les enceintes sous pression, certaines parties de machines comme les pistons, les bases des colonnes sur le sol, les corps et les têtes de fusées, ... où à la fois la forme de la structure et les charges appliquées ont une symétrie axiale.

Quand un solide de révolution est soumis à un chargement axisymétrique, il ne possède que deux composantes indépendantes de déplacement, le problème est donc bi-dimensionnel.

L'étude de ces problèmes par la M.E.F. nécessite des éléments de révolution en forme d'anneaux. Un type d'élément de section rectangulaire est donné par la figure (IV-1) qui représente un tube épais chargé par une pression radiale  $p$  et une pression axiale  $q$  où seule la section radiale est subdivisée en éléments finis.

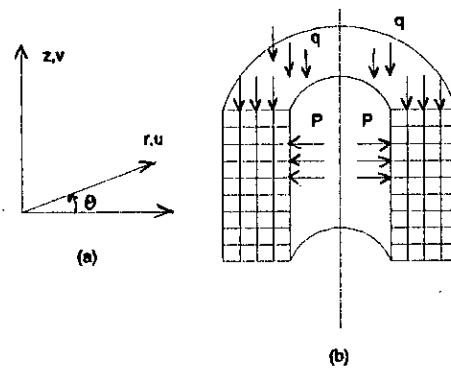


Fig (IV-1)

Dans ce type de problème, le système des coordonnées cylindriques est le plus commode ( Fig. a).

La matrice de rigidité élémentaire:

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] r dr d\theta dz \quad (IV-a)$$

Quand on l'intègre sur un radian (1) devient:

$$[K] = \iint [B]^T [D] [B] r dr dz$$

où les relations déformations déplacements sont données par:  
(Timoshenko et Goodier, 1951)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-b})$$

ou bien  $[\epsilon] = [L] \{U\}$

et les relations contraintes-déformations sont données par:

$$[\sigma] = [D] \{\epsilon\}$$

avec:

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### IV-7 Éléments isoparamétriques:

##### IV-7-1 Introduction:

Souvent la modélisation d'une structure génère des éléments de forme irrégulière cela est dû à la forme arbitraire de cette dernière, donc on a recours à d'autres éléments qui peuvent mieux discrétiser le domaine, ces éléments sont appelés: éléments isoparamétriques, superparamétriques et subparamétriques.

Les éléments isoparamétriques sont ceux pour lesquels les fonctions de déplacements sont les mêmes que les fonctions de forme. Si la fonction de forme est d'ordre supérieur à la fonction d'interpolation (déplacement), l'élément est superparamétrique, dans le cas contraire il est subparamétrique.

#### IV-7-2 Avantage de l'élément Isoparamétrique:

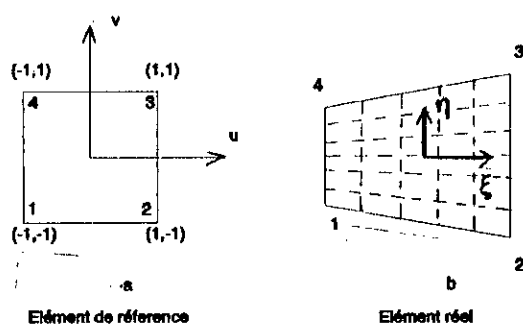
- 1- Diversité de la géométrie des éléments
- 2- Grande simplification des calculs
- 3- Facilité des côtés courbes
- 4- Possibilité de confectionner des éléments d'ordre s supérieur.

#### IV-7-3 Eléments Isoparamétriques quadrilatéral huit d.d.l:

Les fonctions de déplacement sont:

$$U(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$V(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$



Fig(IV-2)

Fig III-1: Elément isoparamétrique quadrilatérale

Les déplacements internes (  $U$  ) en fonction des déplacements  
nodaux  $\hat{U}_i$

$$U = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \hat{U}_i = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \hat{U}_3 \\ \hat{U}_4 \end{Bmatrix}$$

$$V = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) V_i = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

Les fonctions de forme sont données par:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4} (1-x) (1-y)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{4} (1+x) (1-y)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{4} (1+x) (1+y)$$

$$N_4(x, y) = \frac{1}{4} (1-x) (1+y)$$

La transformation du système de coordonnées se fait comme suit:

$$U = \sum_1^4 N_i(\xi, \eta) \hat{U}_i$$

$$V = \sum_1^4 N_i(\xi, \eta) V_i$$

avec:  $N_i(\xi, \eta) = N_i(x, y)$

La fonction  $N_i$  prend la valeur 1 au point  $i$  et 0 ailleurs.  
 En utilisant le principe des travaux virtuels, on obtient la matrice de rigidité

$$[K] = \iint_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$$

La matrice  $[D]$  est la matrice des rigidités physiques.  
 La matrice  $[B]$  est la matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux:

Pour un problème à symétrie axiale on a:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{\theta\theta} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \\ \frac{U}{X} \\ \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \\ \frac{N_i}{X} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_i}{\partial X} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{e\} = [B] \{U\}$$

Puisque  $N_i$  est défini en fonction de  $(\xi, \eta)$  on doit changer les dérivées:

$$\frac{\partial}{\partial X} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial Y} \quad \text{par} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \eta}$$

On obtient:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{bmatrix}$$

avec :  $[J]$  : matrice de JACOBI ( 2 x 2 )

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 & Y1 \\ X2 & Y2 \\ X3 & Y3 \\ X4 & Y4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 1-\eta & 1+\eta & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & 1+\xi & 1-\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 & Y1 \\ X2 & Y2 \\ X3 & Y3 \\ X4 & Y4 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité  $[K]$  devient alors :

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] [J] \partial \xi \partial \eta$$

**CHAPITRE V**  
**ELEMENTS INFINIS**



## CHAPITRE V

# ELEMENTS INFINIS

### V-1 Introduction:

La plupart des méthodes analytiques modélisent le sol par un milieu homogène et de géométrie semi-infini.

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour ce type de problème consiste à faire un maillage qui donne une infinité d'éléments finis. Le problème n'est donc pas adapté à une résolution numérique. Il serait alors plus adéquat de considérer des éléments infinis, pourvu que les quantités à intégrer restent finies.

Dans ce chapitre, on présente la méthode de couplage des éléments finis à des éléments infinis qui modélisent d'une façon très satisfaisante le comportement à l'infini du matériau.

### V-2 Historique:

L'idée de base dans la formulation de la méthode des éléments infinis est l'utilisation des éléments non bornés qui modélisent d'une façon efficace un domaine infini ou semi-infini.

En se basant sur cette idée, plusieurs chercheurs ont commencé dès 1973 à proposer des formulations de ces éléments.

Ungless et Anderson ont construit le premier élément infini, en se basant sur l'utilisation d'une fonction de décroissance de forme  $(1/1+r)$  dans la direction radiale.

Le premier travail publié sur ce type d'éléments était celui de Zienkiewicz et Bettess en 1975. Dans cette formulation, le domaine de l'élément est étendu jusqu'à l'infini. Les fonctions de forme sont multipliées par des fonctions décroissantes et qui sont choisies suivant le type de problème étudié.

En 1981, Medina utilise un terme de la forme  $(1/1+r)$  pour la résolution des problèmes d'axisymétrie. Dans la même année Beer et Meek ont utilisé une transformation incluant un terme de la forme  $\frac{1}{1+\xi}$  et qui transforme le domaine  $\xi$  en un domaine  $x$  infini.

En 1983, Bando à utiliser une nouvelle formulation des éléments infinis pour des excavations. Cette formulation est basée sur la transformation de l'élément infini à un domaine fini.

En 1984, Marques et Owen ont publié plusieurs articles sur ces éléments.

En 1984, Rajapalska et Karasudhi ont publié un article sur l'utilisation des éléments infinis élastoplastiques pour les domaines semi-infinis multicouches.

Jusqu'à présent des recherches et des publications se poursuivent afin de trouver des formulations qui solutionnent le mieux possible un tel problème.

### V-3 Formulation des éléments infinis:

Dans la formulation des éléments infinis, il existe deux approches:

- Approche directe.
- Approche inverse.

#### V-3-1 Approche directe:

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est étendu à l'infini dans la direction considérée (Fig. V-1).

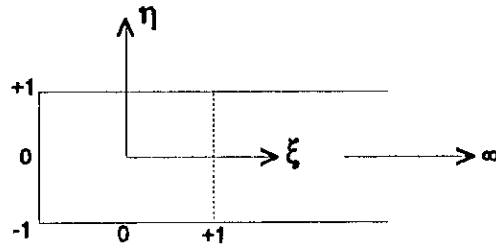


Fig (V-1) Géométrie de l'élément infini.

Les variables inconnues sont exprimées en termes de fonctions de forme descendantes, et qui tendent vers zéro à l'infini.

Les fonctions de forme de l'élément infini sont données par l'expression:

$$M_i(\xi, \eta) = f_i(\xi, \eta)N_i(\xi, \eta)$$

Avec:

$N_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de forme standard.

$f_i(\xi, \eta)$  : sont des fonctions décroissantes.

$M_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de forme de l'élément infini.

### V-3-2 Approche inverse:

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est maintenu. Des fonctions de forme ascendantes sont utilisées pour la transformation géométrique, et qui sont singulières à l'extrémité du plan naturel  $\xi=+1$ .

Les valeurs des coordonnées physiques tendent vers l'infini à l'extrémité du plan naturel, ainsi les éléments infinis représentent un milieu infini.

L'avantage principal de cette approche est qu'elle garde les points d'intégration originaux de Gauss-Legendre.

### V-3-2-1 Construction de la fonction de transformation:

#### a) Cas unidimensionnel:

Considérons la transformation unidimensionnelle, dans laquelle le point  $x_1$  est étendue à  $x_3$  ( $x_3$  tend vers l'infini) à travers un point  $x_2$ .

Considérons la fonction suivante:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \left( \frac{-2\xi}{1-\xi} \right) x_1 + \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) x_2 \quad (V-1)$$

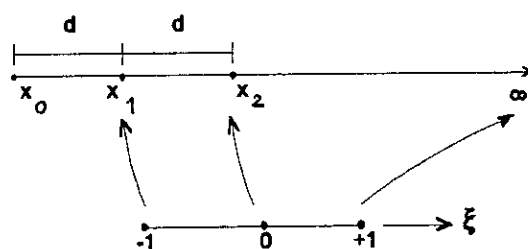


Fig (V-3): Elément infini unidimensionnel.

Dans cette formulation, on peut remarquer que:

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\Rightarrow x = x_2 \\ \xi = -1 &\Rightarrow x = x_1 \\ \xi = +1 &\Rightarrow x = \infty \end{aligned}$$

De plus on a :

$$N_1 + N_2 = \sum_{i=1}^2 N_i = 1 \quad (\text{V-2})$$

En résolvant l'équation (V-1) en  $\xi$  , on trouve :

$$\xi = \frac{x - x_2}{x - 2x_1 + x_2} = 1 - \frac{2(x_2 - x_1)}{x - 2x_1 + x_2} \quad (\text{V-3})$$

Avec une valeur:  $x_2 = 2x_1$  , l'équation (V-3) devient :

$$\xi = 1 - \frac{2x_1}{x} \quad (\text{V-4})$$

On a obtenu donc une transformation entre un domaine infini  $x$  et un domaine fini  $\xi$  .

La généralisation de cette interpolation pour n'importe quelle ligne droite dans l'espace  $(x, y, z)$  nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^2 N_i y_i \\ z = \sum_{i=1}^2 N_i z_i \end{array} \right.$$

avec :

$N_i$  sont les transformations infinies à une dimension.

#### b) Cas bidimensionnel :

La généralisation de cette formulation pour le cas 2D se fait par le produit des transformations infinies à une dimension avec des fonctions de forme standard en  $\eta$  (direction finie).

Par conséquent les fonctions de forme sont données par:

$$M_i(\xi, \eta) = N_i(\xi)N_i(\eta)$$

Avec:

$N_i(\xi)$  : transformation infinie à une dimension.

$N_i(\eta)$  : fonction de forme standard en  $\eta$  .

$M_i(\xi, \eta)$  : fonction de forme de l'élément infini.

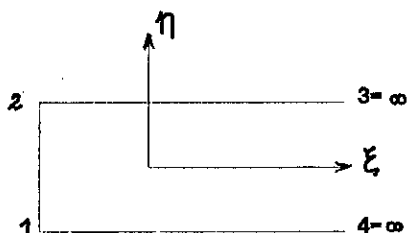
#### b-1) Eléments infinis dans le sens x:

La fonction de transformation pour le cas bidimensionnel suivant l'axe des  $x$  s'écrit sous la forme:

$$x = \sum_{i=1}^4 M_{ix}(\xi, \eta) x_i \quad (V-b-1)$$

Avec:

$$\sum_{i=1}^4 M_{ix}(\xi, \eta) = 1 \quad (V-b-2)$$



Les fonctions de forme de l'élément infini dans le sens  $x$  pouvant être données par:

$$M_{1x} = \frac{-\xi(1-\eta)}{(1-\xi)} \quad (\text{V-b-3})$$

$$M_{2x} = \frac{-\xi(1+\eta)}{(1-\xi)} \quad (\text{V-b-4})$$

⋮

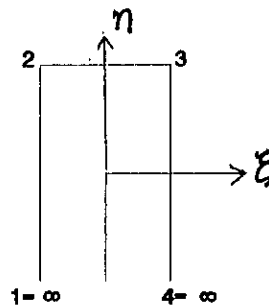
b-2) Éléments infinis dans le sens y:

La fonction de transformation pour le cas bidimensionnel suivant l'axe des y s'écrit sous la forme:

$$y = \sum_{i=1}^4 M_{iy}(\xi, \eta) y_i \quad (\text{V-b-5})$$

Avec:

$$\sum_{i=1}^4 M_{iy}(\xi, \eta) = 1 \quad (\text{V-b-6})$$



Les fonctions de forme de l'élément infini dans le sens y peuvent être données par:

$$M_{1y} = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(1+\eta)} \quad (\text{V-b-7})$$

$$M_{2y} = \frac{(1+\xi)\eta}{(1+\eta)} \quad (\text{V-b-8})$$

⋮

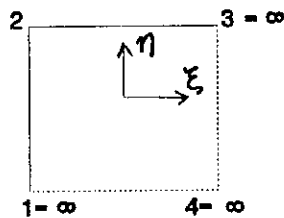
b-3) Eléments infinis dans les directions x et y:

Dans ce cas les fonctions de forme de l'élément infini peuvent être données par:

$$M_{1xy} = \frac{-2\xi(1-\eta)}{(1-\xi)(1+\eta)}$$

$$M_{2xy} = \frac{-4\xi\eta}{(1+\xi)(1+\eta)}$$

·  
·  
·





**CHAPITRE VI**

**PRESENTATION DES  
PROGRAMMES (M.E.F. & M.E.I.)**

## CHAPITRE VI

# PRESENTATION DES PROGRAMMES

## (M.E.F et M.E.I)

### VI-1 Introduction:

L'utilisation de la méthode des éléments finis (M.E.F) et la méthode des éléments infinis (M.E.I) nécessite une manipulation de matrices et vecteurs de grandes tailles, ce qui rend l'informatique un outil indispensable pour la résolution des systèmes d'équations de forme:

$$[A]\{X\}=\{B\}$$

### VI-2 Programmation des éléments finis:

Pour remédier au problème d'axisymétrie en tenant compte de l'interaction sol-fondation, on a élaboré un programme en utilisant la méthode des éléments finis.

#### V-2-1 Entrée des données:

Les données sont constituées principalement d'informations sur les noeuds (nombre de noeuds total, conditions d'appuis conditions de chargement...), sur les éléments (nombre d'éléments dans la direction x, dans la direction y, nombre d'éléments de la fondation, taille des éléments) et les caractéristiques géométriques et mécaniques des différentes couches.

Pour cela on a utilisé le sous programme:  
Subroutine **FMDRAD**: Pour le calcul de la matrice d'élasticité [D] et l'introduction des caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux.

## V-2-2 Assemblage des matrices $[K^e]$ et vecteurs $\{F^e\}$ :

Pour l'assemblage, on utilise principalement les sous programmes suivants:

### \* Subroutine FOMNF:

Cette subroutine se charge de numérotter les degrés de liberté actifs et d'annuler les inactifs pour chaque noeud (dans l'ordre de leurs numérotation). Ces informations sont stockées dans un tableau appelé [NF].

### \* Subroutine VGEOM:

Dans cette subroutine, pour chaque élément, un vecteur de localisation élémentaire est défini. Ce vecteur  $\{G\}$  permet de positionner chaque degré de liberté des noeuds de l'élément dans le repère globale.

Elle permet donc un transfert de chaque terme  $k_{ij}$  de la matrice de rigidité élémentaire en  $K_{ij}$  de la matrice globale et également le transfert de chaque terme  $f_i$  du vecteur force élémentaire en  $F_i$  de vecteur force globale.

Lors de notre détermination de  $[K]$  on a choisi un sens bien déterminé. Il est donc important de spécifier pour chaque élément, son premier noeud, deuxième, troisième et quatrième (dans le sens trigonométrique) qui seront déduits automatiquement.

### \* Subroutine FORMKV:

Comme l'opération de la localisation exige l'introduction des conditions aux limites et qu'elle affecte la valeur zéro au degrés de liberté inactifs, seuls les degrés de liberté actifs sont numérotés, et n'est donc plus nécessaires de passer par l'opération d'expansion des matrices de rigidité élémentaires pour effectuer l'assemblage.

L'opération d'assemblage se fera donc par un simple transfert de chaque terme  $k_{ij}$  des matrices de rigidités en  $K_{ij}$  de la matrice globale, ainsi que les termes  $f_i$  en  $F_i$ , grâce au vecteur de localisation élémentaire dont les composantes nulles sont automatiquement éliminées.

L'assemblage s'effectue comme suit:

Pour tout  $G(i) = 0$  et pour tout  $G(j) = 0$  faire:

$$K_{ij} = K_{IJ} + k_{ij}$$

$$F_i = F_I + f_i$$

ou:  $I = G(i)$        $i = 1, \text{DOF}$

$J = G(j)$        $j = 1, \text{DOF}$

avec:

DOF: nombre de degrés de liberté par élément.

Après assemblage, on résolve le système d'équation  $[K]\{U\} = \{F\}$ , ce qui permet de calculer les déplacements des degrés de libertés actifs et par la suite on calcule les contraintes et les déformations. L'organigramme suivant (Fig VI-1) présente les grandes étapes du programme éléments finis.

### VI-3 Programmation des éléments infinis:

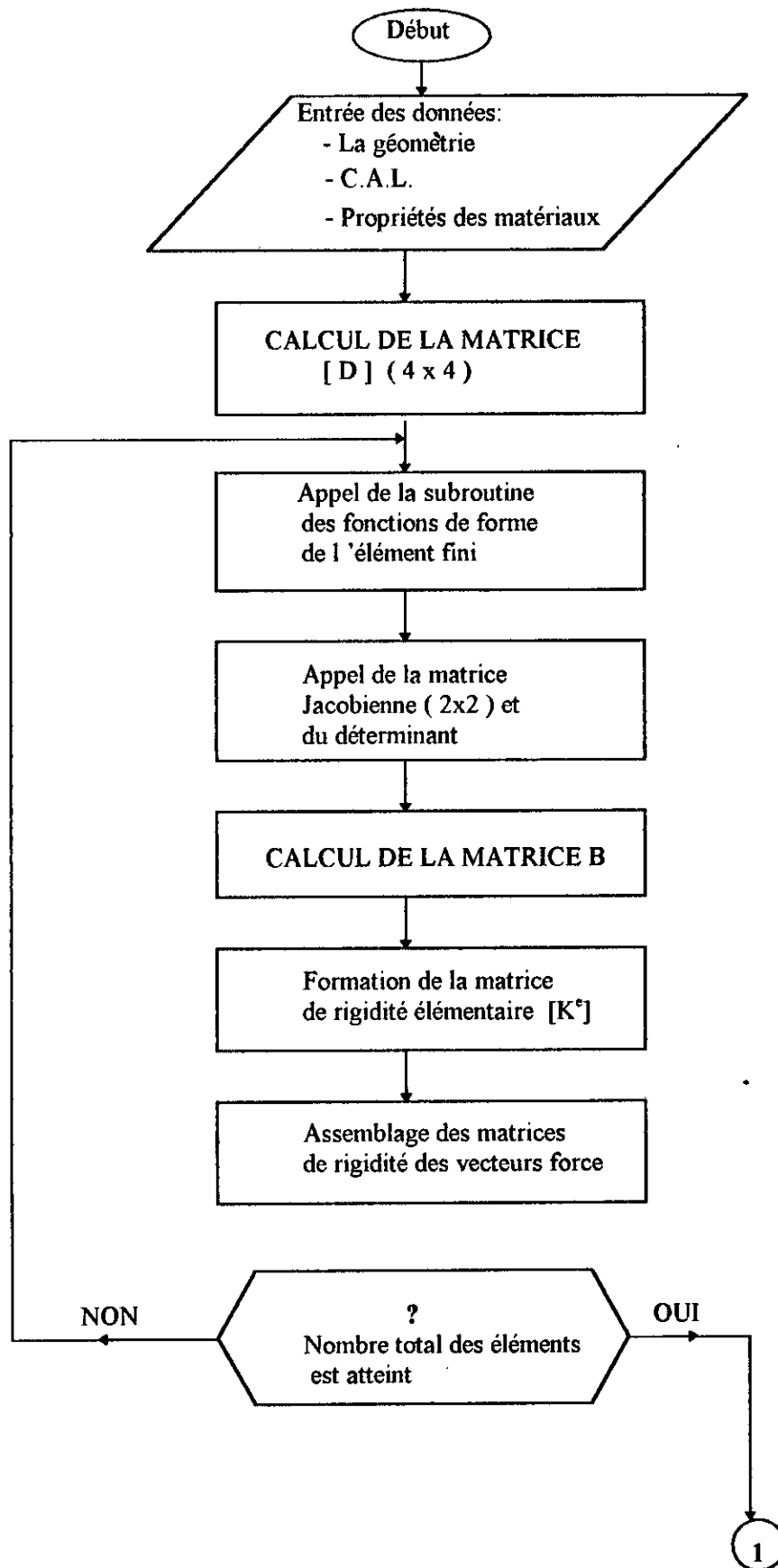
L'étude de l'interaction sol-structure nous amène à faire une hypothèse réaliste et qui consiste à considérer le sol comme étant un milieu semi infini.

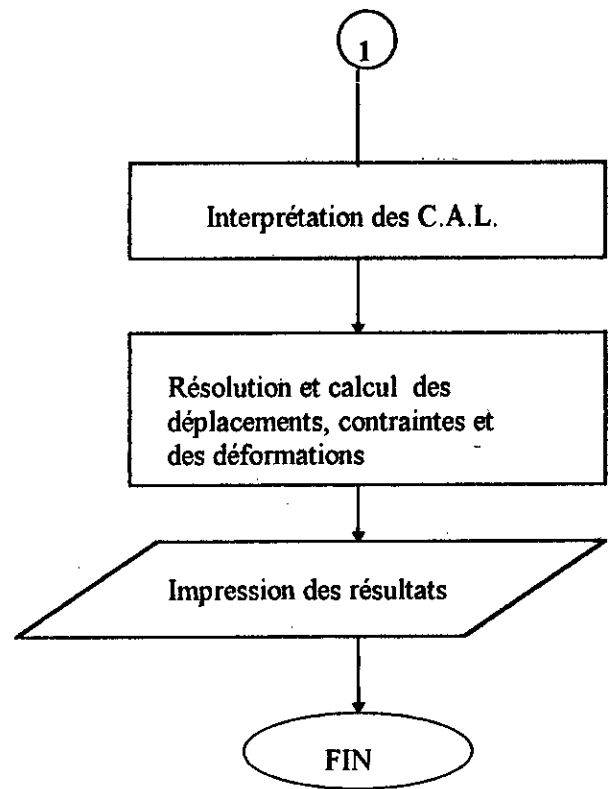
Le problème en éléments finis est qu'on impose des C.A.L générant des déplacements nuls aux frontières. La question immédiate qui se pose est: comment choisir ces frontières ? La réponse évidente qu'on peut donner est d'utiliser des éléments infinis et par conséquent on ait sûr d'avoir des déplacements nuls aux frontières.

#### VI-3-1 Calcul de la matrice de rigidité:

En utilisant l'approche inverse, la matrice de rigidité de l'élément infini peut être calculée par la formule:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$



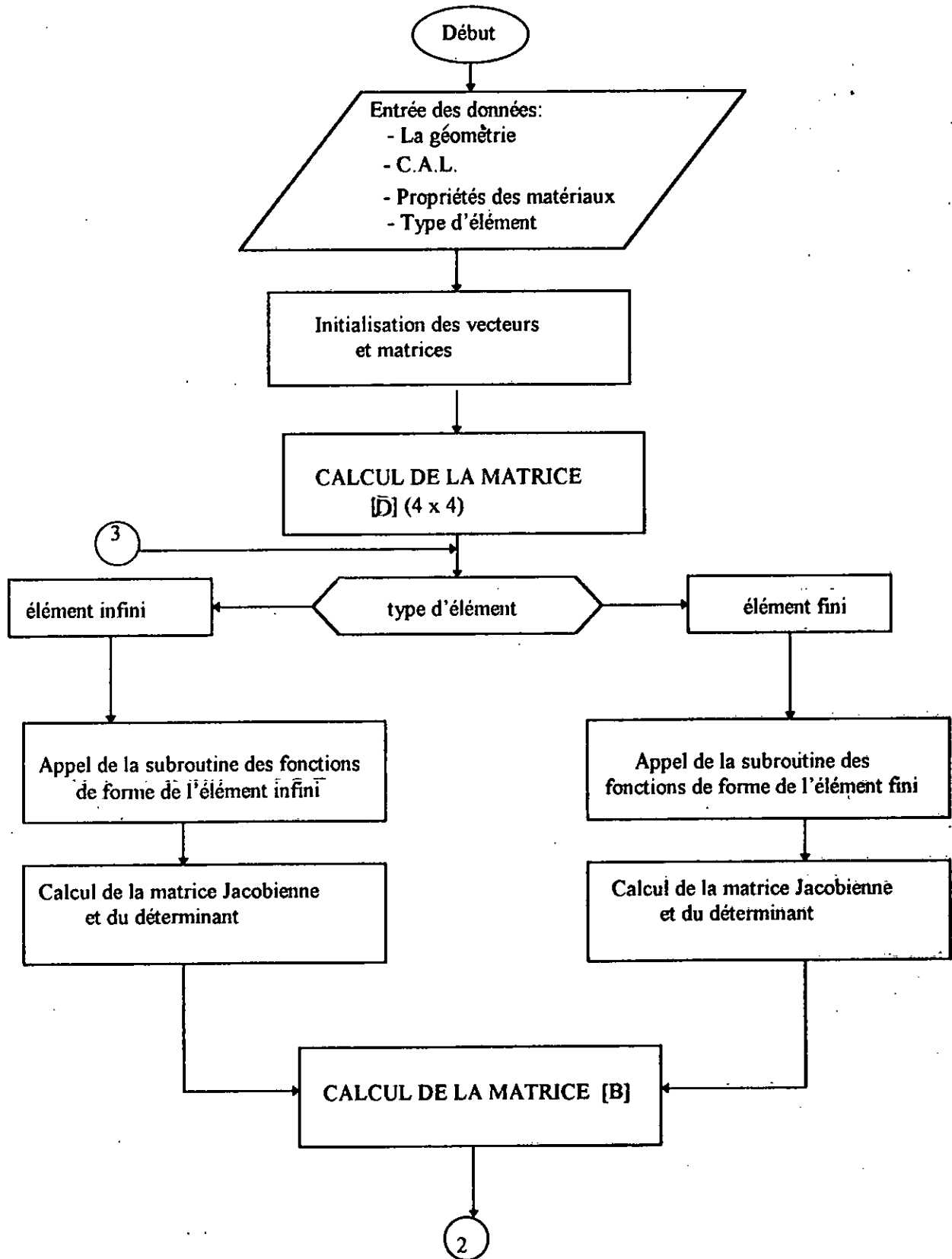


Fig(vj-1)

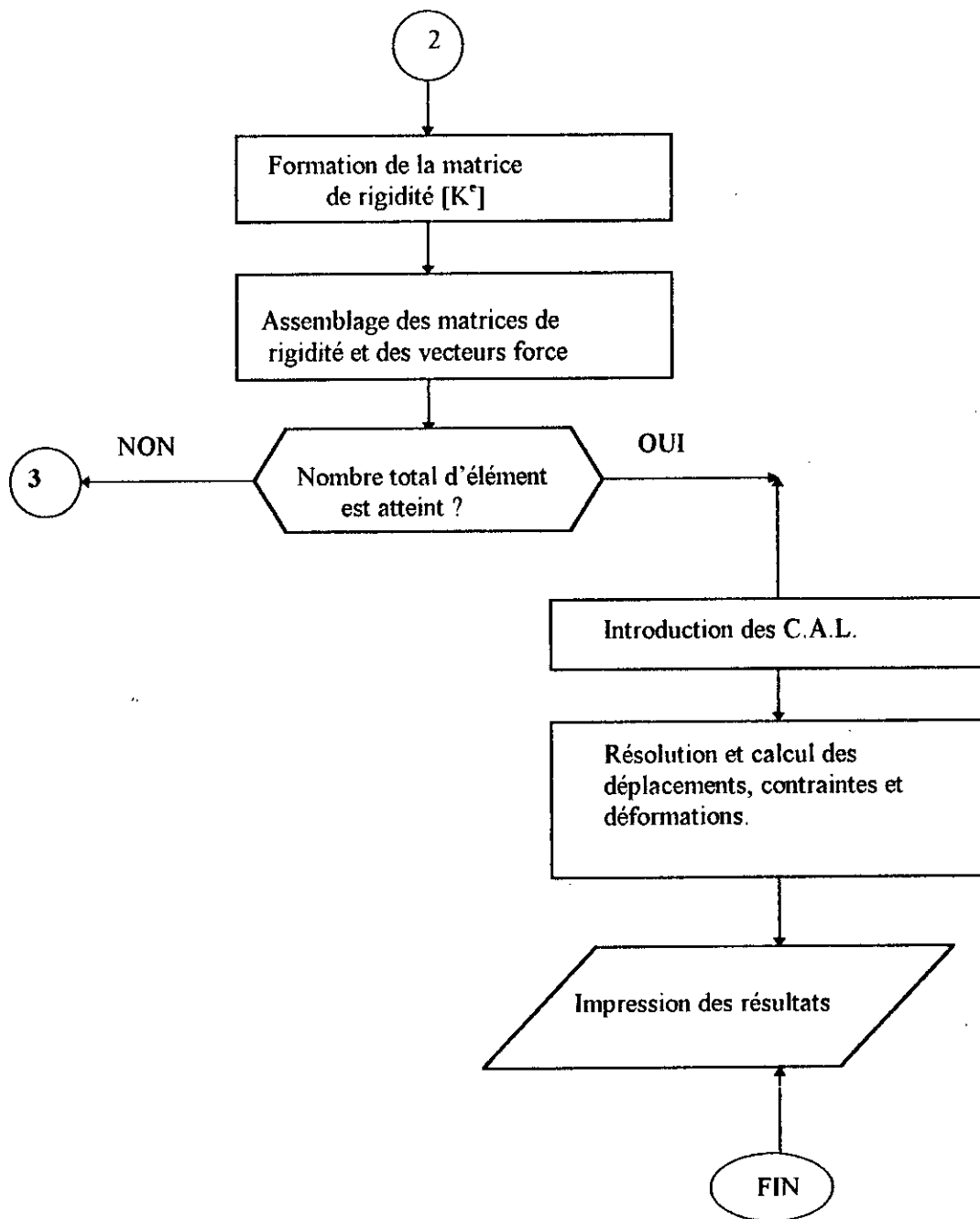
Et cela en utilisant la méthode d'intégration de Gauss-Legendre.

Dans la présente étude des éléments finis isoparamétriques à 4 noeuds sont couplés à des éléments infinis à 4 noeuds. Les éléments finis sont utilisés pour modéliser la fondation et une partie du sol, pour le reste on utilise des éléments infinis.

Le programme de couplage éléments finis et éléments infinis est présenté par l'organigramme suivant:







**CHAPITRE VII**

**APPLICATIONS**

## CHAPITRE VII

# APPLICATIONS

### VII-1 Application 1:

#### VII-1-a Modèle A:

- $a=b= 10 \text{ m}$
- Nombre d'éléments =324
- $E_s= 80.0 \text{ MPa}$
- $\nu = 0.33$
- $P= 1 \text{ MN}$

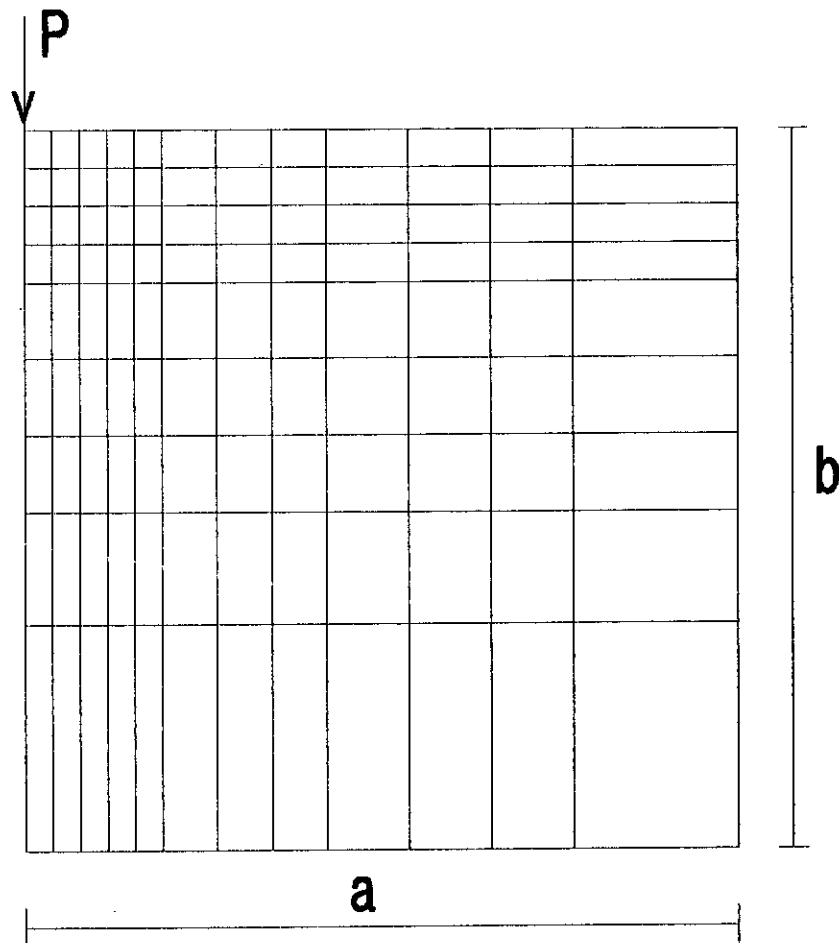
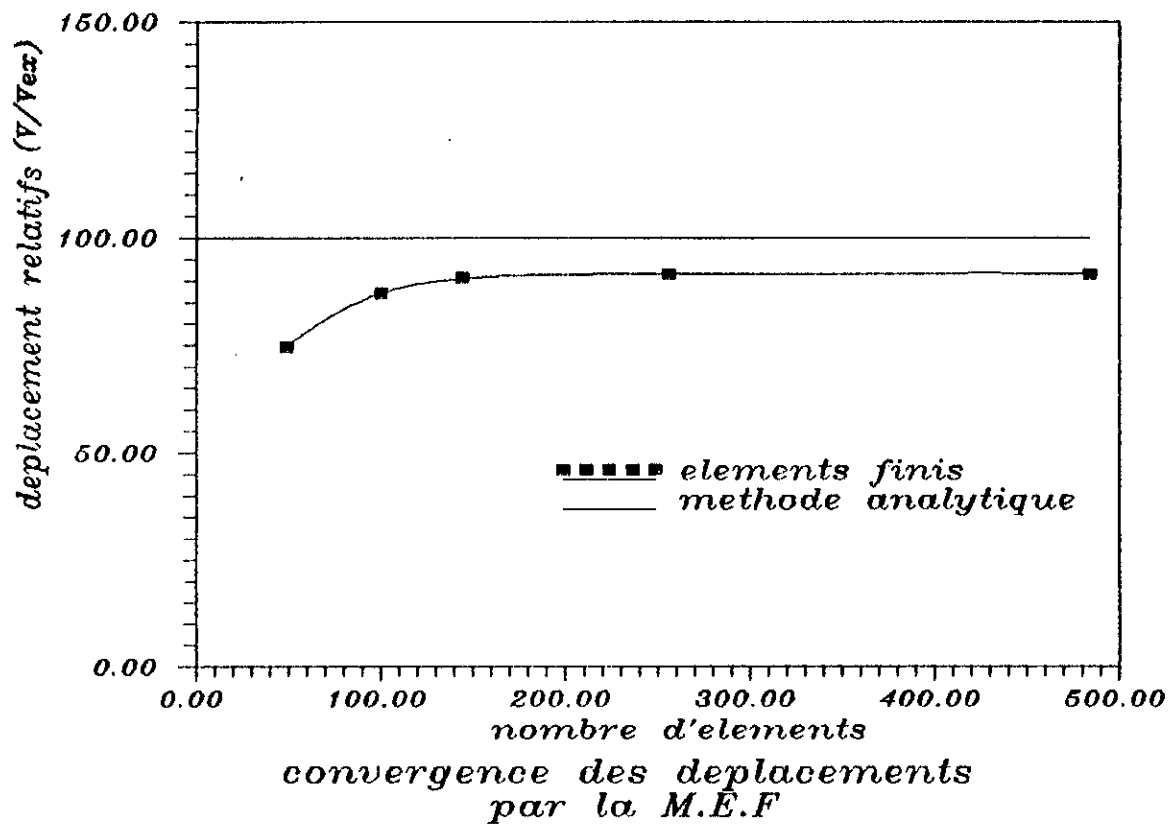


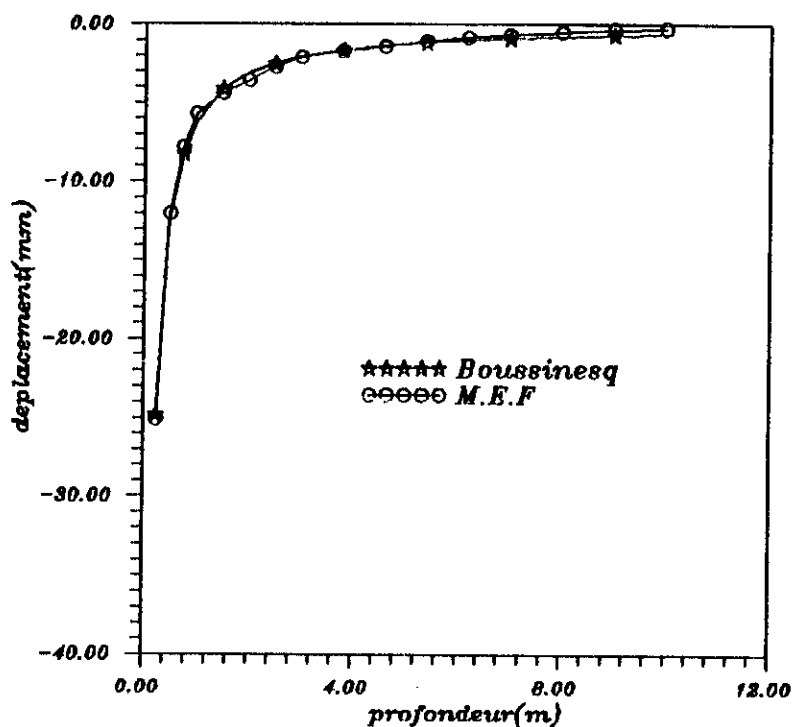
Fig (7-1-a)

A-1: Convergence de la M.E.F.



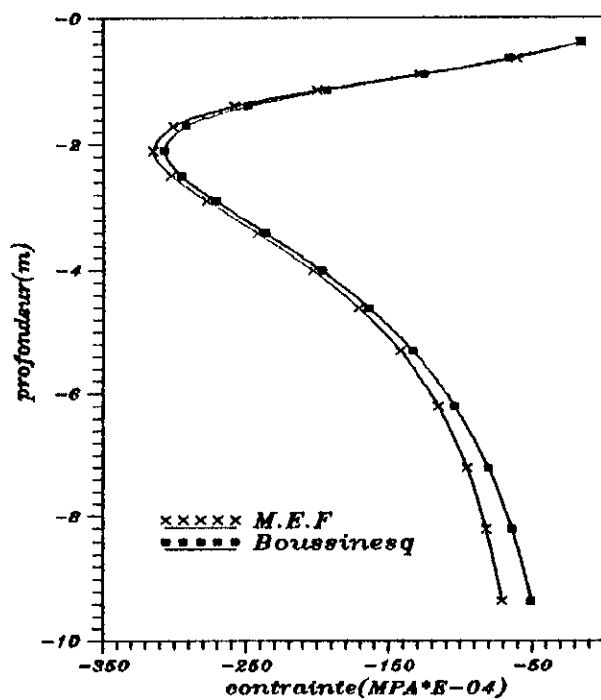
Fig(A-1)

A-2: Comparaison des contraintes et des déplacements obtenus par la M.E.F par les resultats de Boussinesq



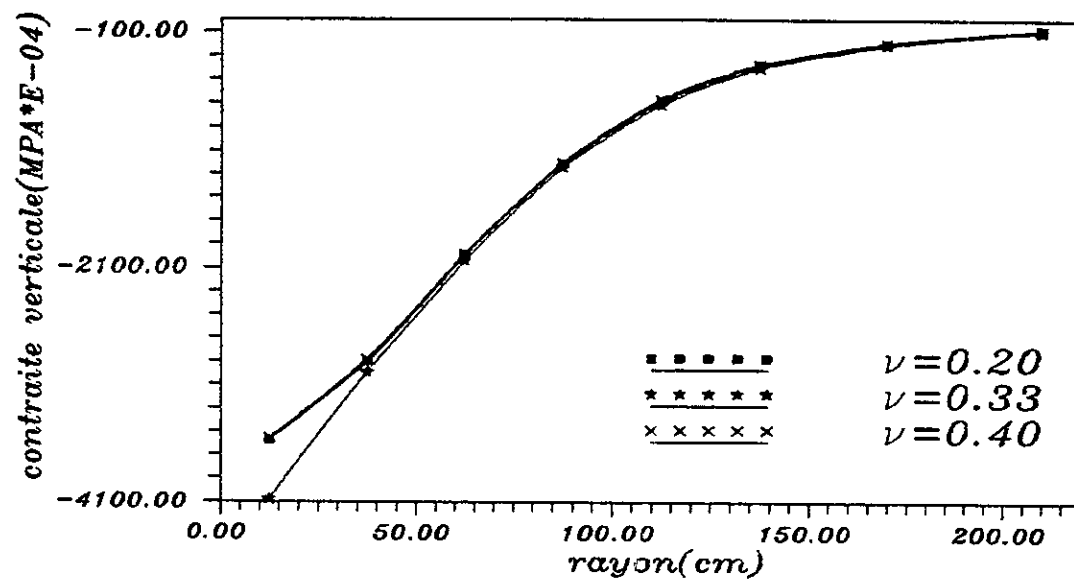
comparaison des déplacements entre la M.E.F et les resultats de BOUSSINESQ. sous l'axe de la fondation

Fig(A-2)



contrainte verticale dans une section verticale par Boussinesq et par la M.E.F

Fig(A-3)



effet du coefficient de Poisson  
pour une section horizontale.

FIG(A-4)

A-3: L'influence du coefficient de Poisson sur les contraintes  
verticales

VII-1-b Modèle B: Influence de la rigidité de la fondation  
et du sol

- $a=b= 10$  m
- Nombre d'éléments =324
- $q= 1$  MPa

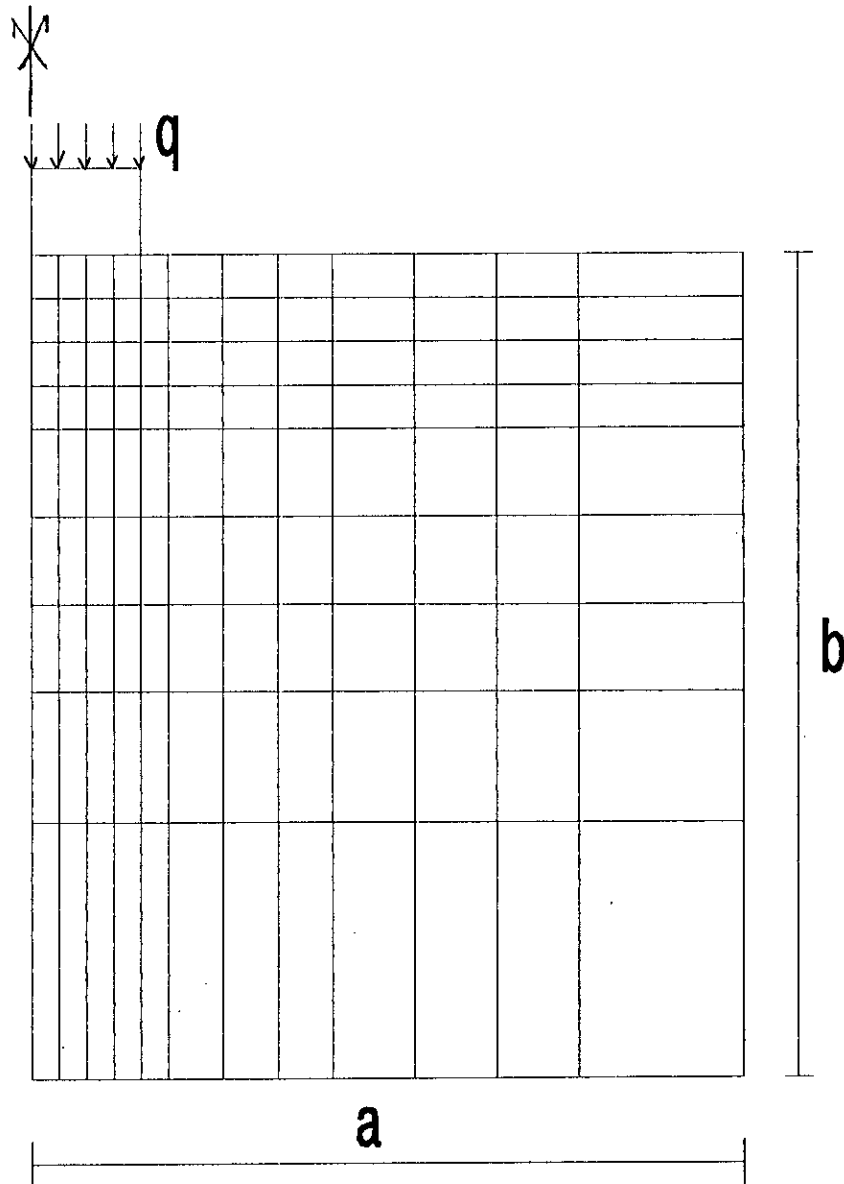
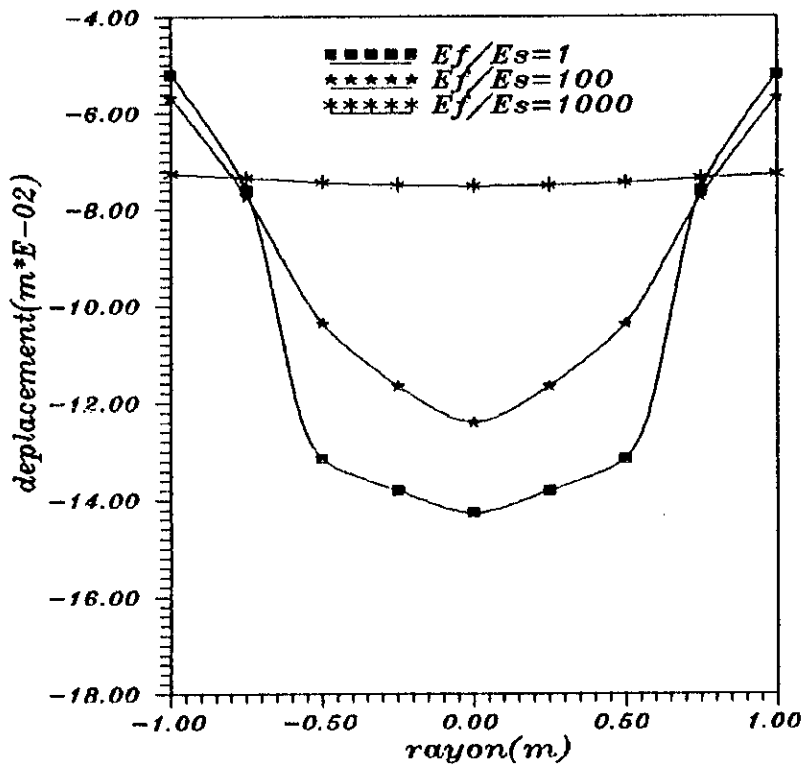


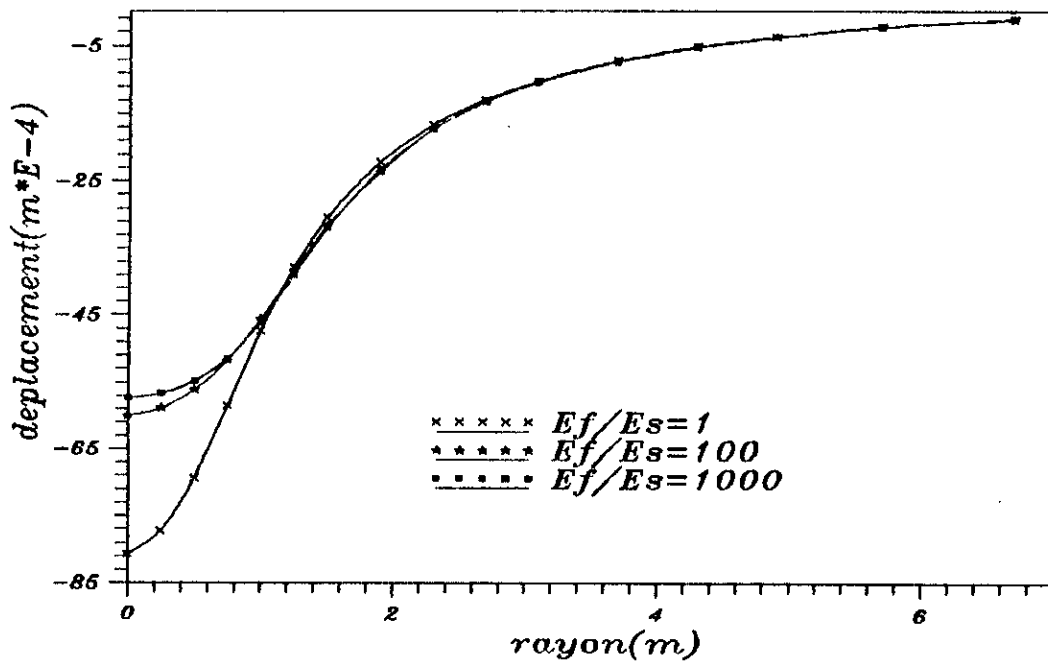
Fig (7-1-b)

B-1: Influence de la rigidite de la fondation sur les déplacements



comparaison des déplacements sous fondation pour des rigidites differentes ( $E_f$ )

Fig(B-1)

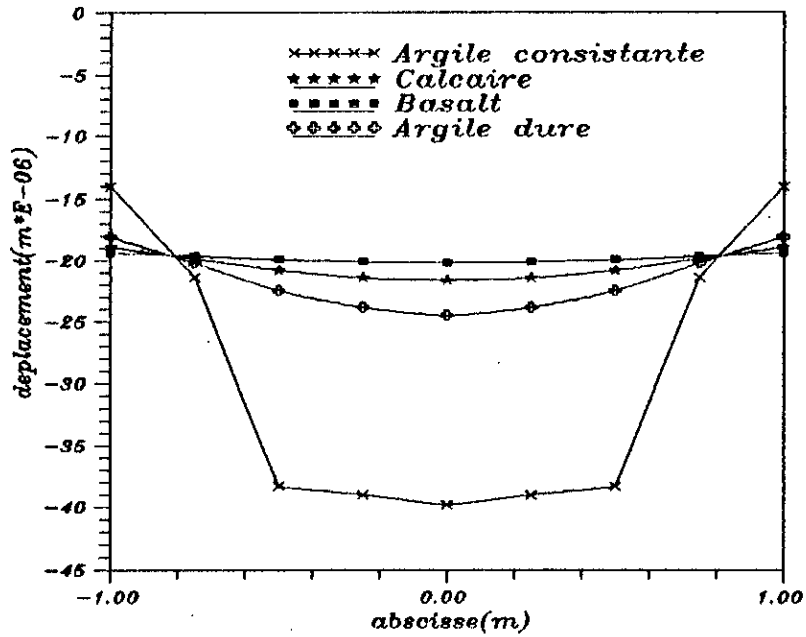


Deplacement vertical dans une section horizontale pour differentes rigidites ( $E_f$ )

Fig(B-2)



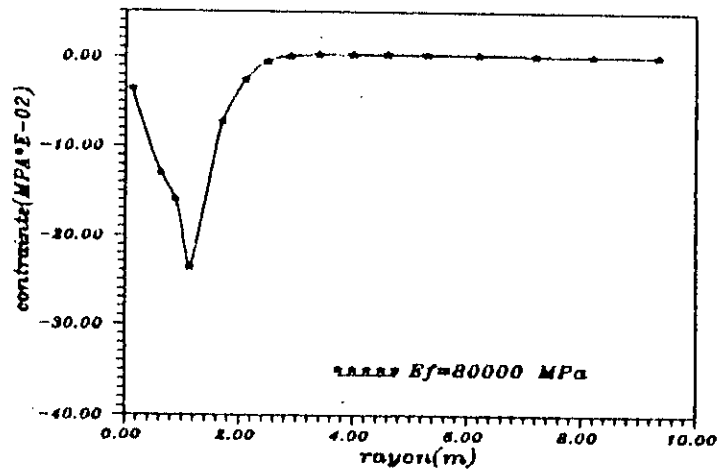
B-2: Influence de la rigidite du sol sur les déplacements



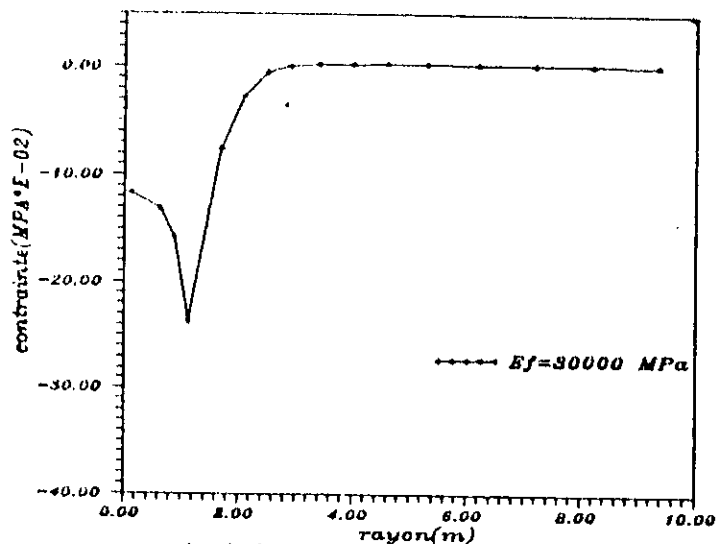
comparaison des déplacements pour des rigidites des sols differents avec  $E_f$  fixe

Fig(B-3)

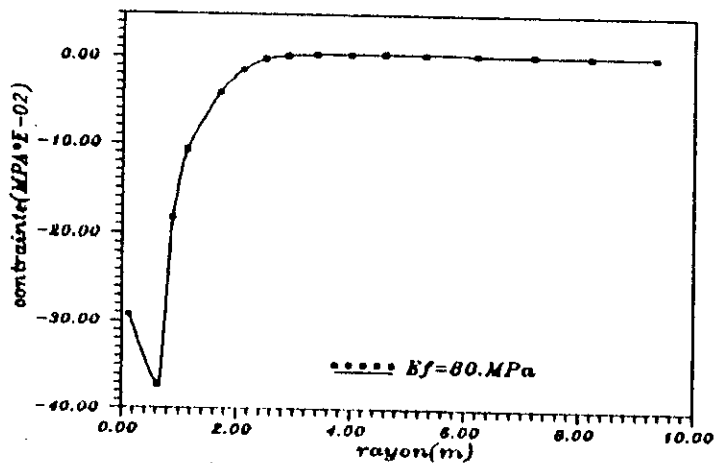
B-3: Influence de la rigidite de la fondation sur les contraintes radiales



contrainte radiale dans une section horizontale



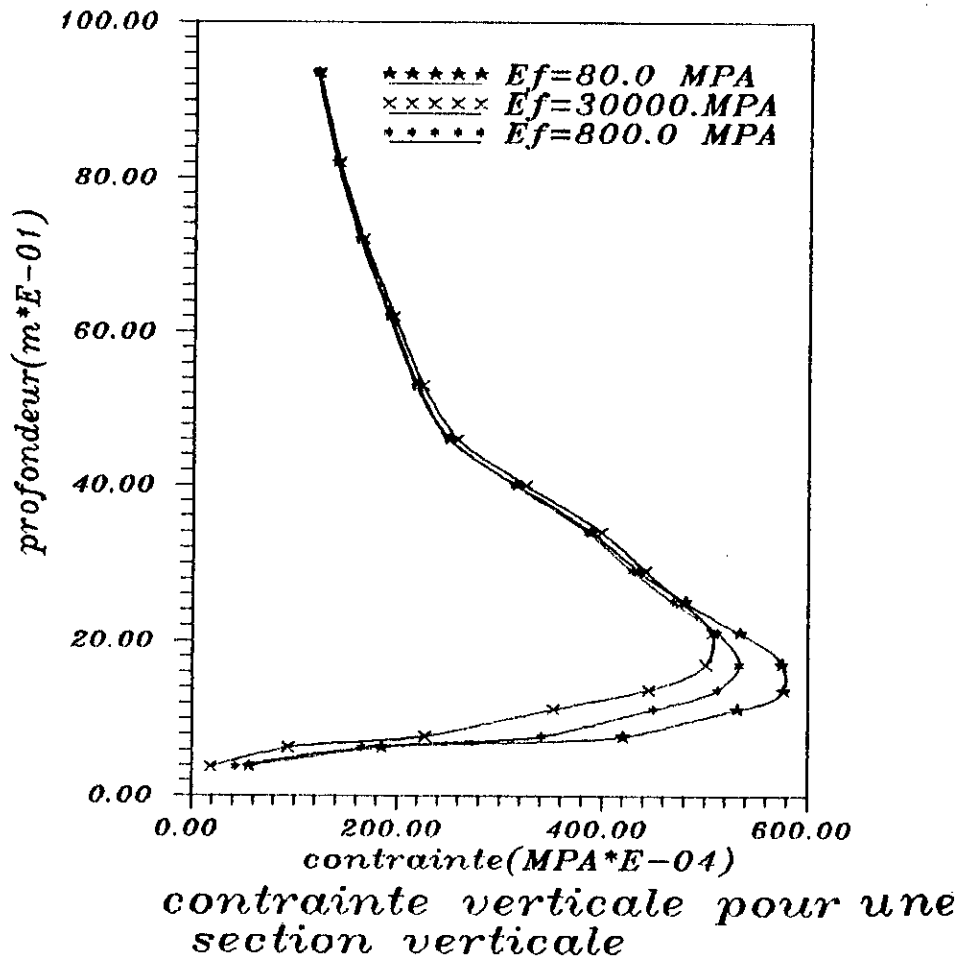
contrainte radiale dans une section horizontale



contrainte radiale dans une section horizontale

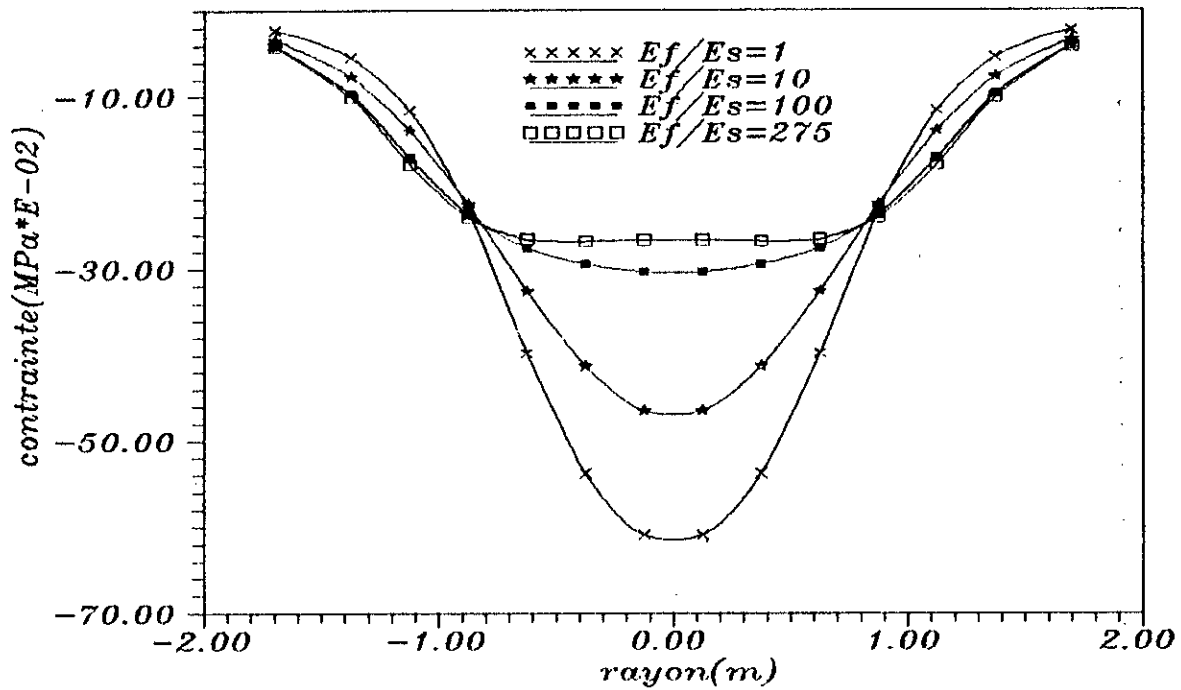
Fig(B-4)

B-4: L'effet de la rigidite de fondation sur les contraintes verticales



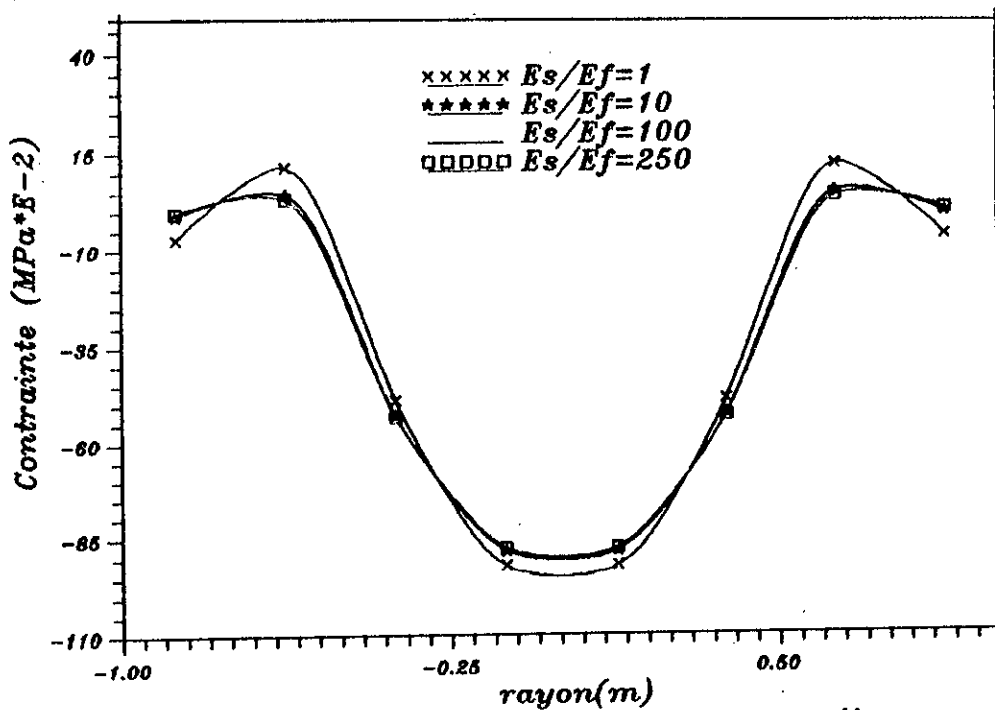
Fig(B-5)

B-5: Influence de la rigidite du sol et de fondation sur les contraintes verticales



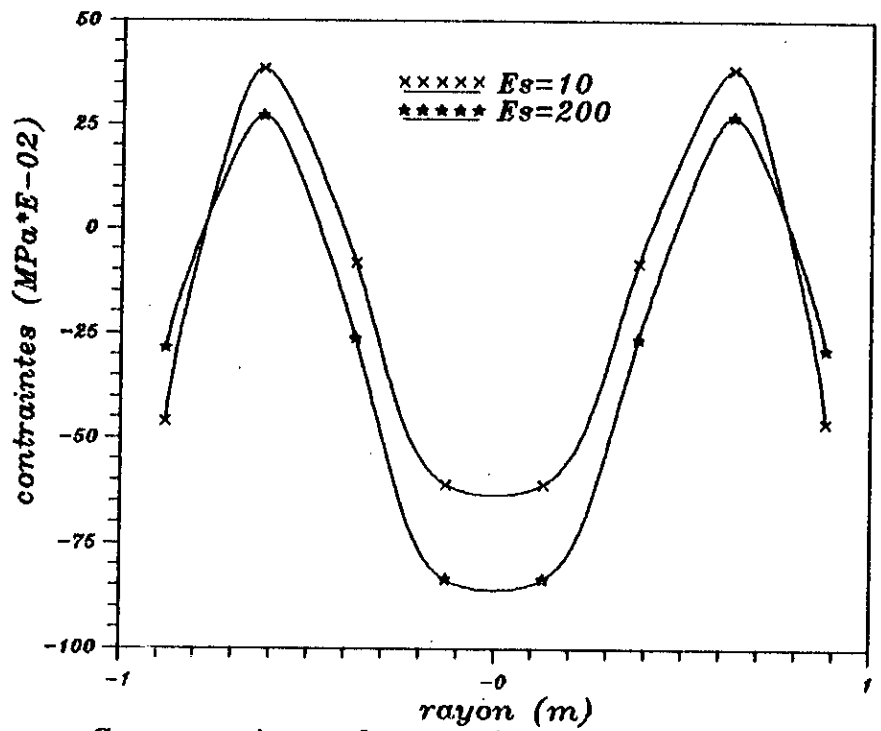
Comparaison des contraintes dans une section horizontale sous fondation rigide pour differents  $E_s$

Fig(B-6)



Comparaison des contraintes dans une section horizontale de fondation pour differents  $E_f$

Fig(B-7)



Comparaison des contraintes dans la fondation pour différentes rigidités de sol

Fig(B-8):

VII-2 Application 2: Influence de l'épaisseur d'une couche molle sur la diffusion des contraintes.

VII-2-a Modèle C:

- Sol stratifié à 3 couches
- $h_3 = \text{cste}$
- $h_1$  et  $h_2$  variables
- Nombre d'éléments = 324
- $E_1 = 60 \text{ MPa}$ ,  $E_2 = 10 \text{ MPa}$  (Argile molle ou très mole),  $E_3 = 80 \text{ MPa}$ .

$$E_{\text{moy}} = \frac{\sum E_i h_i}{\sum h_i}, \quad \nu_{\text{moy}} = \frac{\sum \nu_i h_i}{\sum h_i}$$

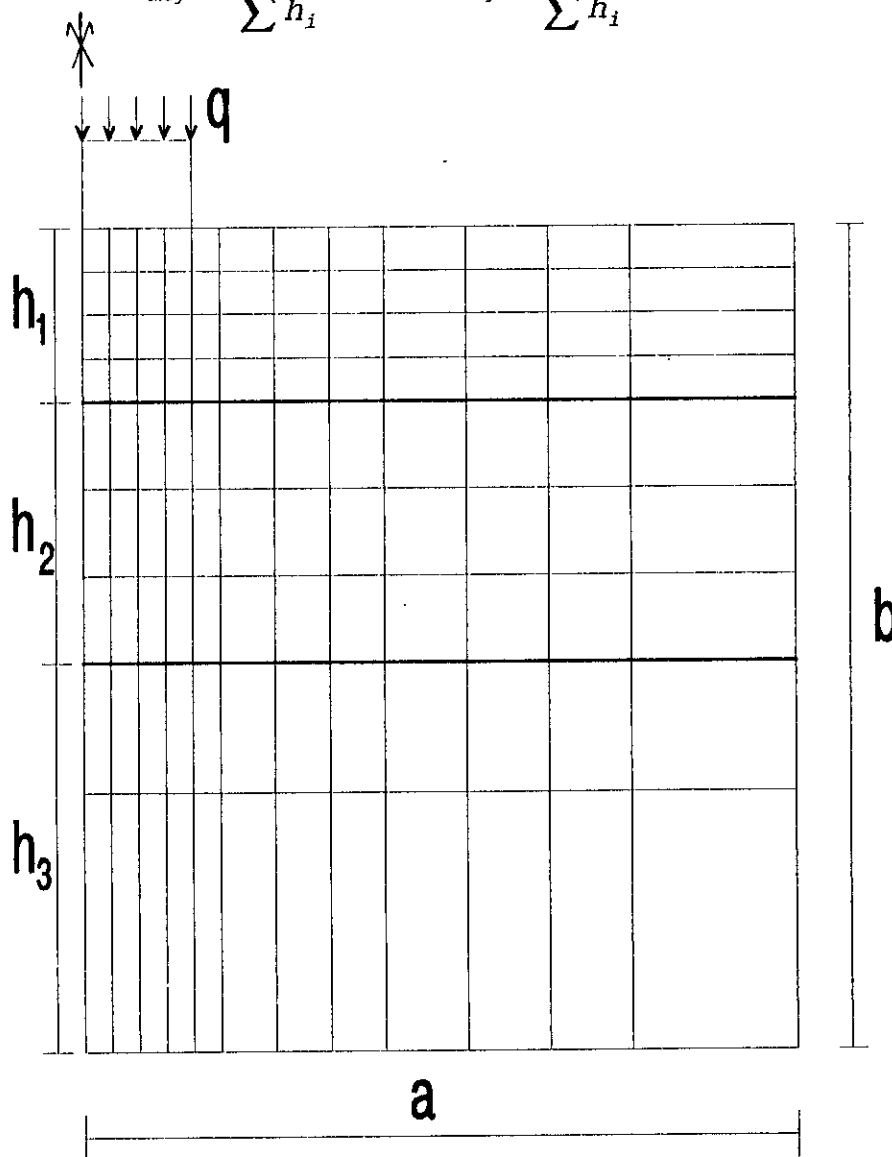
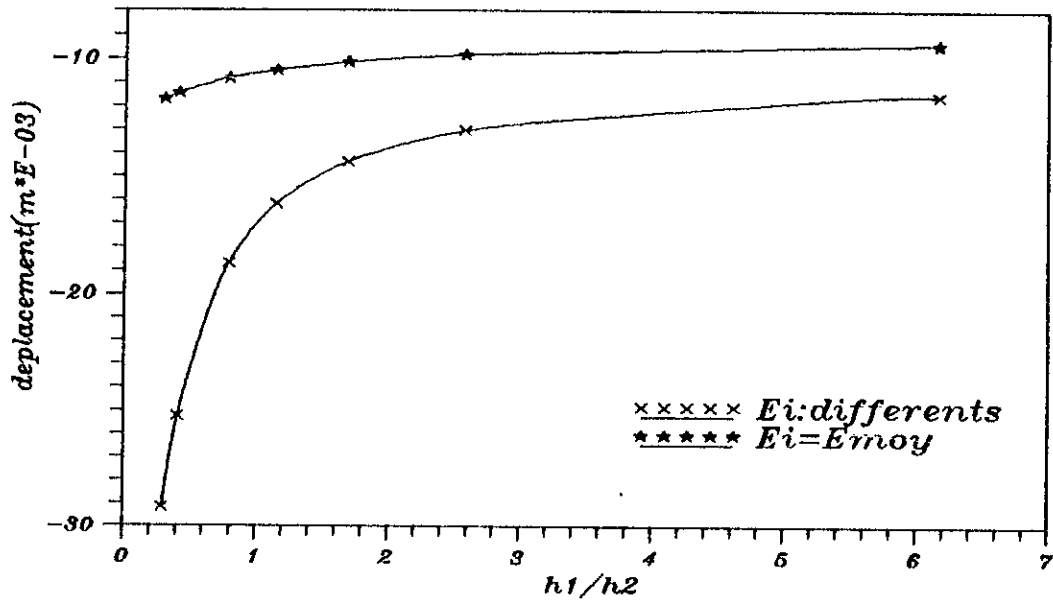


Fig (7-2)

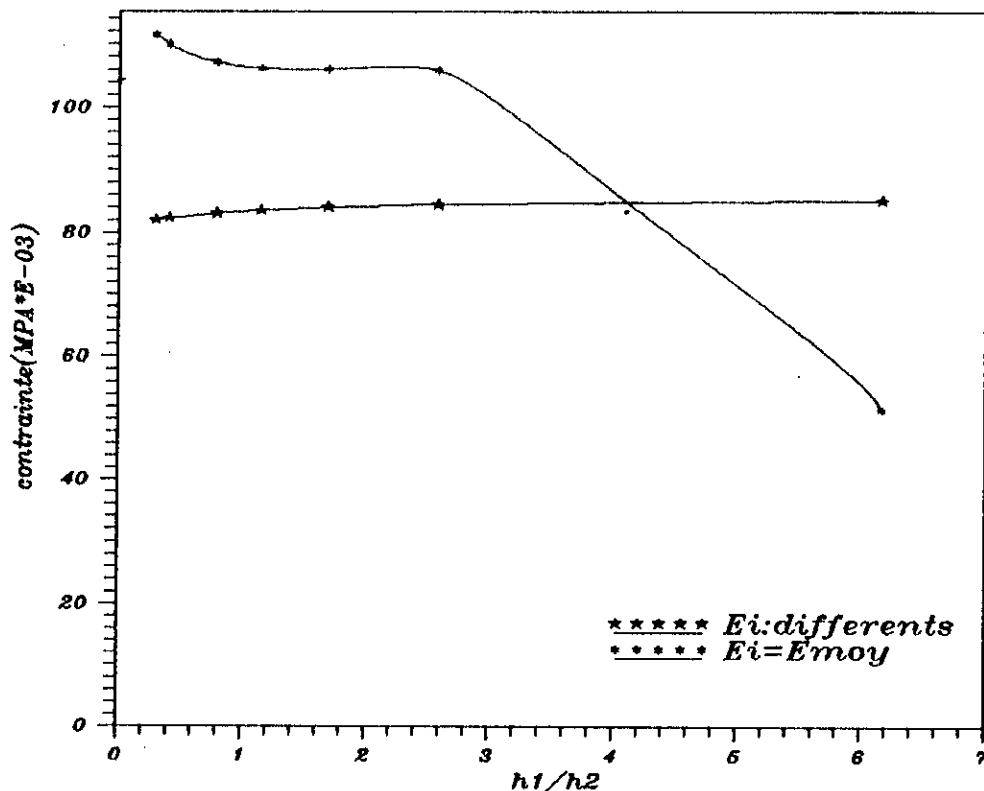
C-1: Influence de l'épaisseur d'une couche molle sur la diffusion des contraintes et des déplacements dans un sol stratifié

c-1-1:  $E_{moy} = (\sum h_i E_i) / Ht$



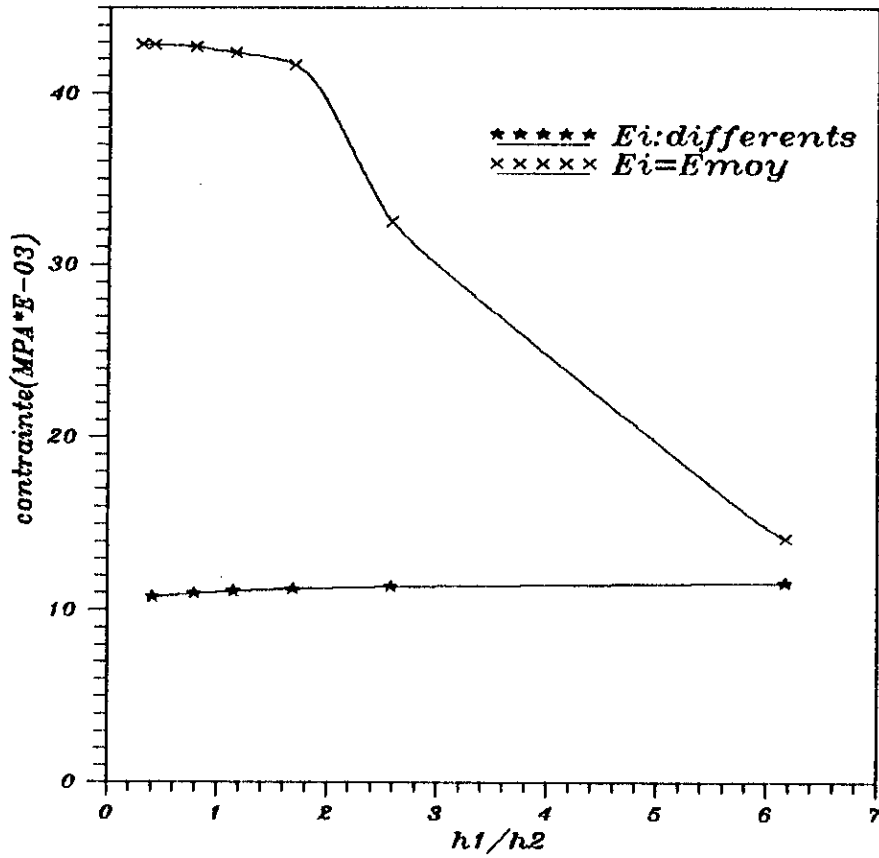
comparaison des déplacements verticaux max pour différentes valeurs de ( $h_1/h_2$ )

Fig(C-1)



variation de la contrainte verticale pour différentes valeurs de ( $h_1/h_2$ )

Fig(C-2)

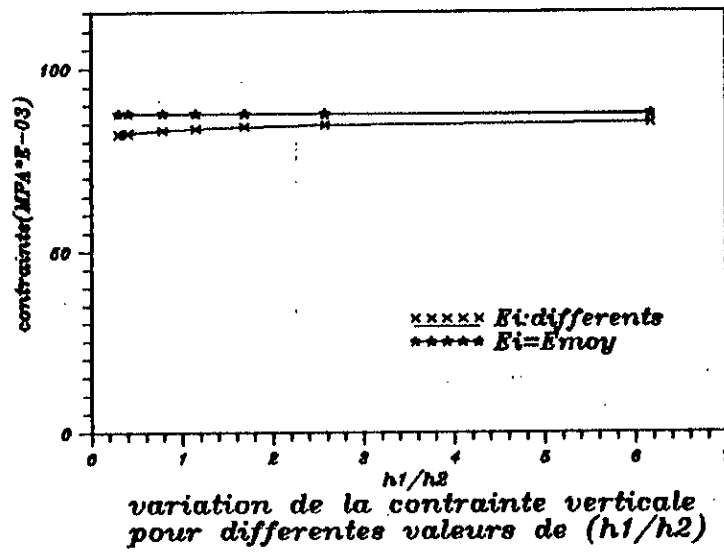


variation de la contrainte radiale pour différentes valeurs de  $(h_1/h_2)$

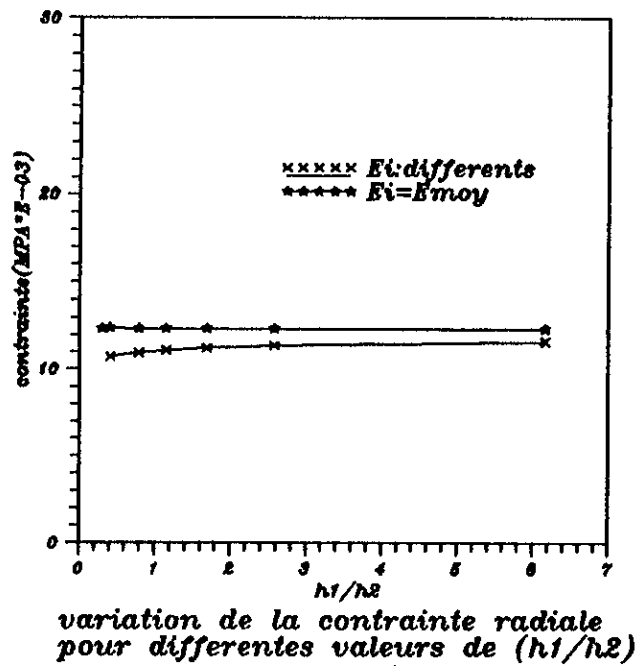
Fig(C-3)



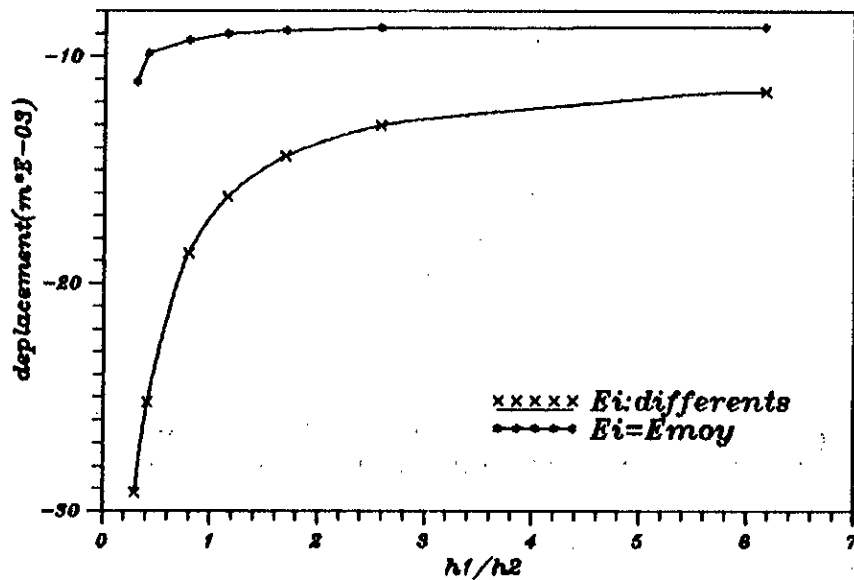
$$C-1-2: E_{moy} = (\sum h_i^2 E_i) / \sum h_i^2$$



Fig(C-4)



Fig(C-5)



comparaison des déplacements verticaux max pour différentes valeurs de  $(h_1/h_2)$

Fig(C-6)

### VII-3 Application 3: Eléments infinis

#### VII-3-a Modèle D:

- $a=b= 10 \text{ m}$
- Nombre d'éléments =20
- $E_S= 80 \text{ MPa}$
- $\nu = 0.33$
- $P= 1 \text{ MN}$

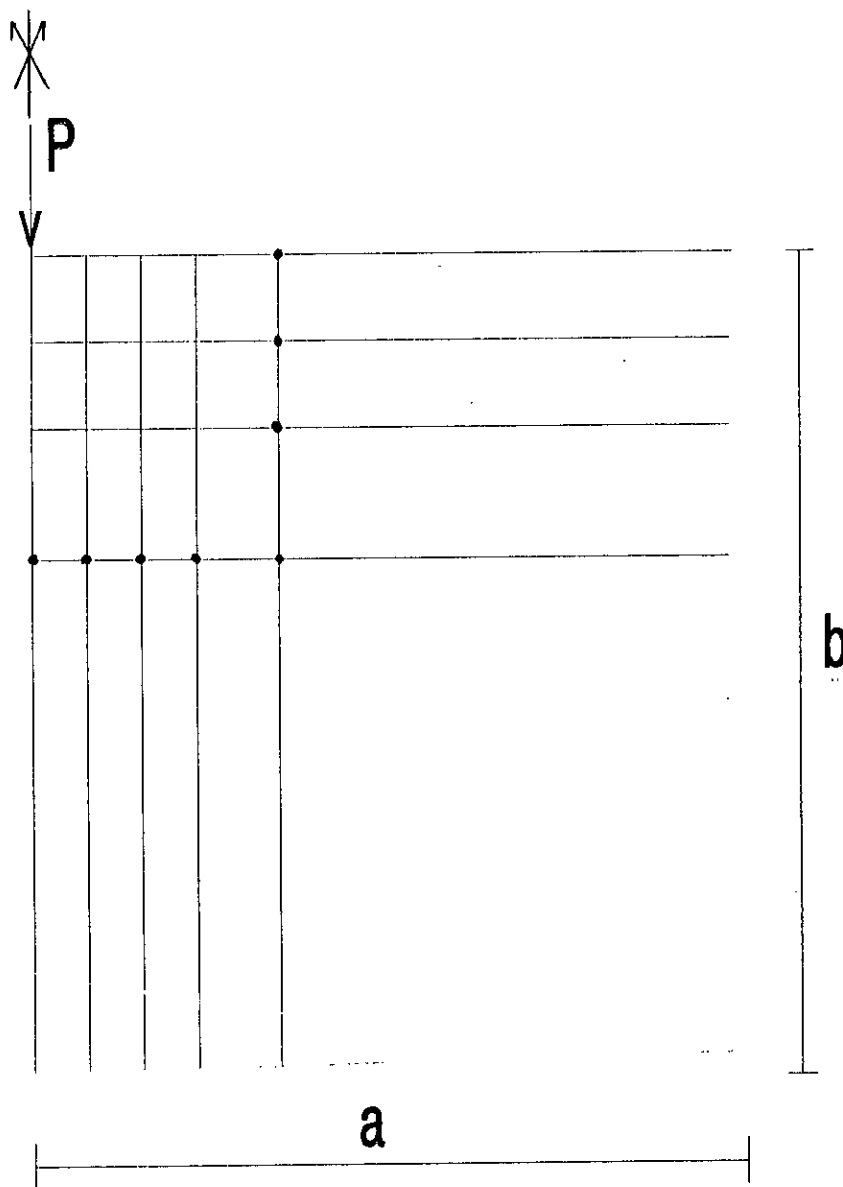
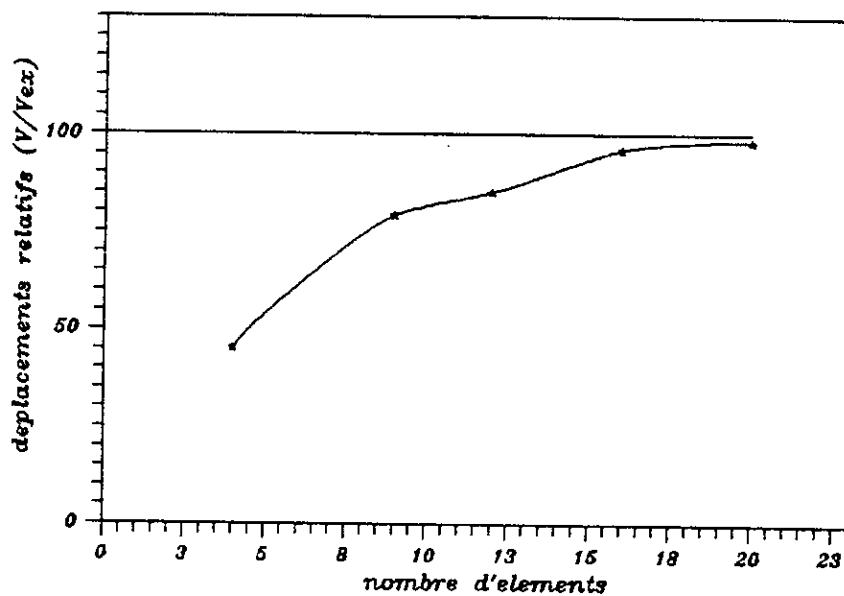


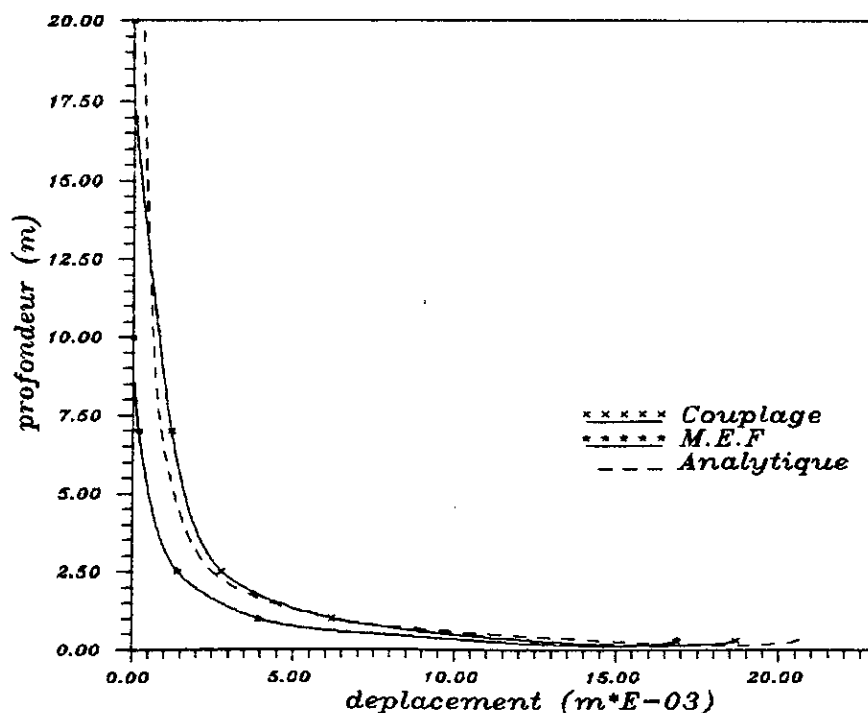
Fig (7-2-a)

D-1: Convergence de la methode de couplage



Fig(D-1) Convergence de la methode du couplage

D-2: Comparaison des deplacements verticaux sous l'axe de la fondation par differentes methodes



Comparaison des deplacements verticaux par differentes methodes

Fig(D-2)

VII-3-b Modèle B: Influence de la rigidité de la fondation  
et du sol

- $a=b= 10$  m
- Nombre d'éléments = 64
- $q= 1$  MPa

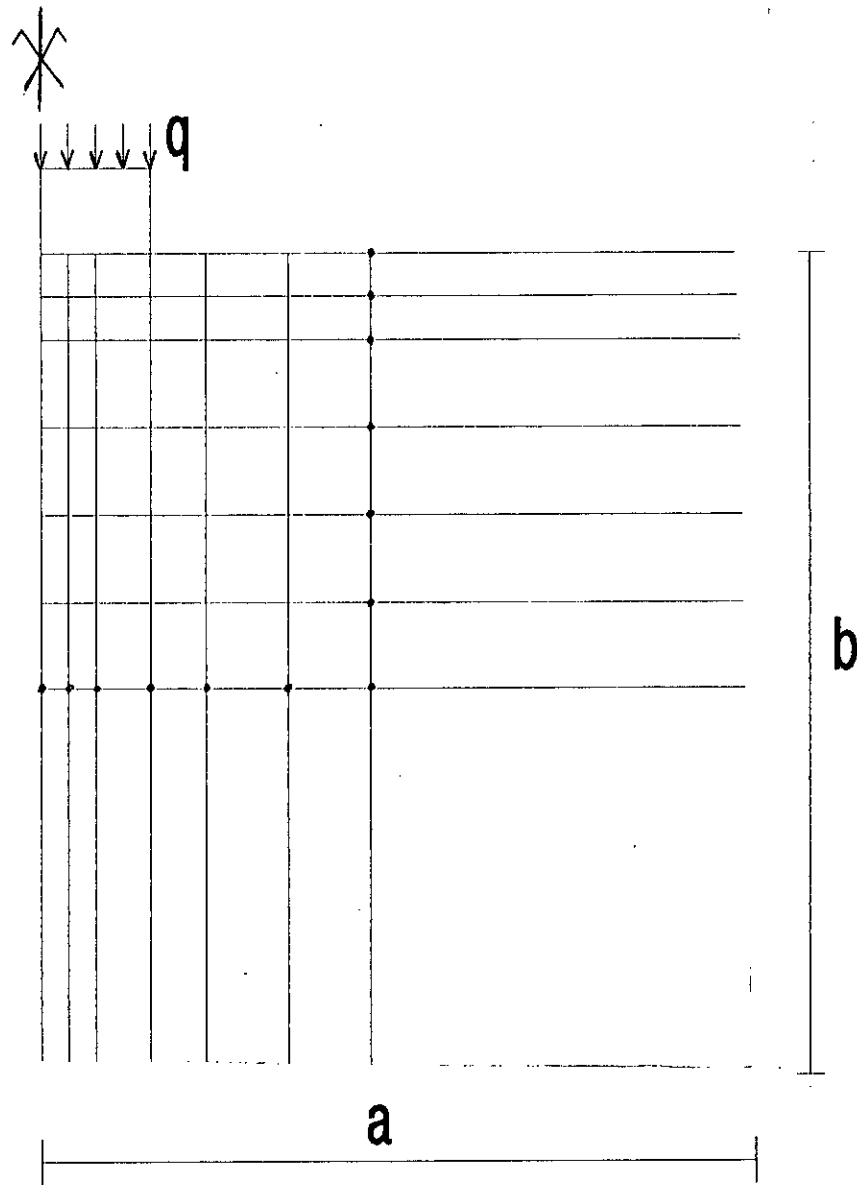
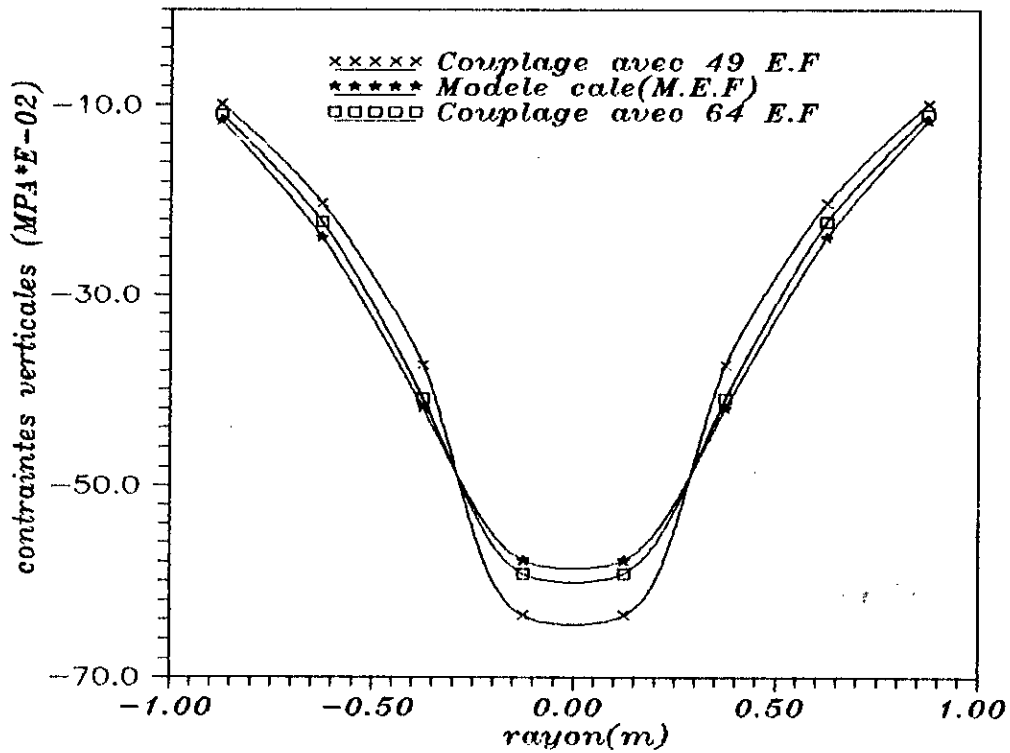


Fig (7-2-b)

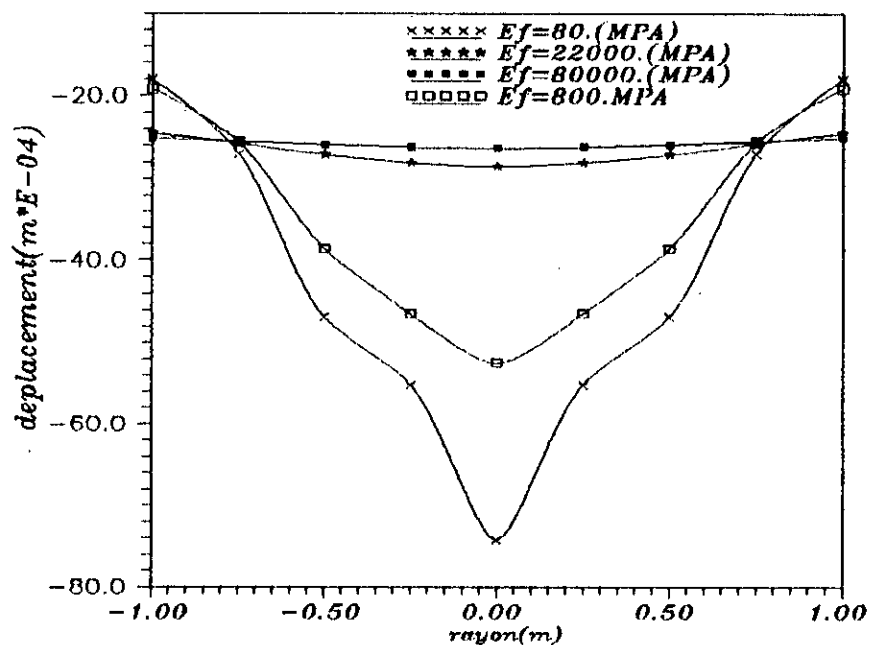
E-1: Comparaison des contraintes verticales calculees par differents methodes



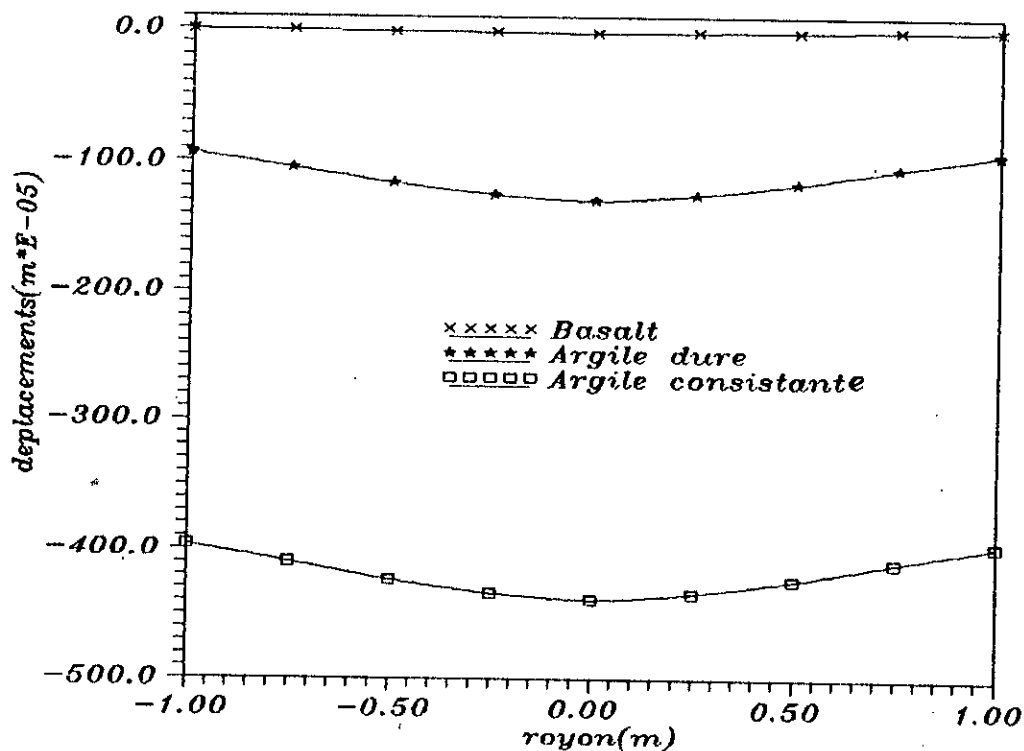
Comparaison des contraintes verticales dans une section horizontale calculees par differents modeles.

Fig(E-1)

E-2: Influence de la rigidite du sol et de fondation sur les déplacements



Fig(E-2) Comparaison des déplacements sous fondation pour différents  $E_f$  avec  $E_s = \text{constant}$  par la méthode de couplage



comparaison des déplacements sous fondation pour différents  $E_s$  avec  $E_f = \text{constant}$  par la méthode de couplage

Fig(E-3)

#### VII-4 Interprétations:

Pour arriver à adopter un modèle de dimensions nécessaires pour le problème traité, nous avons testé plusieurs modèles que se soit pour la méthode des éléments finis ou pour le cas du couplage éléments finis-éléments infinis. Le modèle définitif ainsi présenté est considéré étant "idéal", avec une erreur relative minime.

Il est à noter en premier lieu que la convergence des déplacements obtenue par la M.E.F ou par le couplage éléments finis-éléments infinis par rapport à la solution analytique est très satisfaisante.

La zone de concentration des contraintes n'est pas gouvernée par les lois de l'élasticité, d'ailleurs le principe de SAINT-VENANT préconise l'application des lois de la théorie de l'élasticité linéaire en s'éloignant de la zone d'application de la charge. Cet effet est dû principalement au comportement non élastique et beaucoup plus non linéaire de la zone à l'approximité de la charge.

Par contre pour une zone loin de la zone d'application de la charge, on a remarqué d'après les courbes de comparaison des contraintes par M.E.F (Fig.A-3) ou par le couplage (Fig.E-1), une identification quasi-parfaite avec les résultats analytiques de Boussinesq.

Dans la première partie de l'application, on a étudié l'effet de la rigidité au sein d'un massif sol. On a constaté que pour des fondations flexibles la courbe des déplacements sous fondation a une allure presque parabolique avec des très petites valeurs aux bords et un extremum de la parabole au centre de la fondation. Quant à l'allure de la distribution des contraintes est presque uniforme avec un légère concentration aux bords.

Cette concentration est due au fait que le sol manifeste une résistance considérable au cisaillement, c'est à dire à l'enfoncement "poinçonnement" de la fondation dans le sol.



Pour le cas des sols très rigides, on a remarqué que les déplacements sous la fondation sont pratiquement nuls, et à ce moment là, la structure est considérée comme étant encastree au sol, chose qui n'est pas vraie pour des rigidités inférieures des sols, d'où s'avère très utile l'étude de l'interaction sol-fondation.

Quoique l'effet du coefficient de Poisson sur les contraintes radiales et les déplacements est loin d'être négligeable, mais à partir d'une certaine distance du point d'application du chargement, les contraintes verticales sont pratiquement indépendantes du coefficient de Poisson. Ce qui est en accord avec la formulation de Boussinesq.

Ainsi que la distribution des contraintes verticales sur des plans horizontaux et pour tout matériau élastique isotrope a la même allure; elle est sous forme d'une cloche, et pour des plans verticaux l'étude montre sa diminution après qu'elle atteigne une valeur maximale, tout en s'éloignant du point d'application de la charge.

Pour la partie du sol multicouches, la diffusion des contraintes augmente tout en diminuant l'épaisseur de la couche molle. En ce qui concerne les déplacements calculés par  $E=E_{\text{moy}}$  sont généralement sous-estimés.

**CHAPITRE VIII**

**CONCLUSIONS  
ET RECOMMANDATIONS**

## CHAPITRE VIII

# CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

### VIII-1 CONCLUSIONS:

Dans la présente étude, nous avons mis en évidence le phénomène de l'interaction sol-fondation circulaire en tenant compte des caractéristiques physiques du sol et de la fondation, ainsi que du comportement du sol à l'infini.

Le modèle adopté est validé par les résultats des exemples traités.

Le phénomène d'interaction sol-fondation joue un rôle très important au niveau du comportement des structures (en statique et en dynamique) et notamment celles de grande importance telles que: bâtiments de grandes hauteurs, les barrages, les centrales nucléaires...).

La méthode des éléments finis qu'on a adopté (approche globale) nous a permis la prise en compte de l'interaction sol-structure tout en déterminant simultanément, la réponse dans le sol et dans la structure, ce qui montre l'utilité de la méthode.

Pour prendre en considération les conditions aux limites d'une manière plus efficace, on a utilisé la technique de couplage éléments finis-éléments infinis, qui modélise d'une façon très satisfaisante le comportement à l'infini du sol.

Aussi, on a étudié la distribution des contraintes, ainsi que le calcul des déplacements pour le cas de sol multicouches par la M.E.F et on a comparé les résultats obtenus à ceux déterminés par des modèles approximatifs des caractéristiques mécaniques du sol à trois couches de hauteurs différentes.

Enfin, on en conclut que:

- 1- En faisant une comparaison entre les deux modèles, éléments finis et couplage éléments finis finis-éléments infinis, on remarque que ce dernier converge rapidement vers la solution exacte et donne des résultats plus précis avec un nombre réduit d'éléments en comparaison avec le modèle éléments finis.
- 2- Le maillage du modèle éléments finis-éléments infinis nécessite un bon choix de l'emplacement des éléments infinis pour optimiser les calculs tout en ayant une très bonne précision.
- 3- L'utilisation des deux méthodes numériques éléments finis et couplage éléments finis-éléments infinis, nous a permis de mieux voir l'influence de la structure sur le comportement du sol et vis-versa, ce qui traduit une bonne analyse de l'interaction sol-structure.
- 4- La concentration des contraintes dans le sol ou dans la structure est inversement proportionnelle à la rigidité de l'un ou l'autre.
- 5- Les contraintes horizontales dans l'infrastructure sont plus importantes pour le cas d'un sol flexible que pour un sol rigide.
- 6- Les contraintes verticales dans la structure sont plus importantes pour le cas d'un sol rigide que pour un sol flexible.
- 7- L'hypothèse selon laquelle les structures sont supposées encastées à leur base est sécuritaire pour les éléments de la structure. Cependant, celle-ci sous-estime les efforts dans le sol.

8- Pour les sols multicouches, l'utilisation de  $E_{moy} = \frac{\sum h_i^2 E_i}{\sum h_i^2}$

donne généralement des résultats dans le sens de sécurité plus

proche aux résultats du modèle stratifié que  $E_{moy} = \frac{\sum h_i E_i}{\sum h_i}$ .

#### VIII-2 RECOMMANDATIONS:

1- Pour se rapprocher mieux du comportement réel du sol, on suggère (à toutes fins utiles) une étude de l'interaction sol-structure prenant en considération la non linéarité du sol.

2- Une étude paramétrique plus générale prenant en considération plusieurs couches de caractéristiques mécaniques différentes.

3- Une étude tridimensionnelle du problème d'axisymétrie dans le cas de chargement excentré.

## **BIBLIOGRAPHIE**

## BIBLIOGRAPHIE

[1] ATKINSON .J.H " Fondations and stopes :An introduction to applications of state soil mechanics" .  
Mc GRAW-HILL BOOK Company (UK) limited ( 1981)

[2] BELKHEIR. K, ABCHICHE.H."Investigation numeriques du phenomene d'interaction sol-fondation" P.F.E proposé par Mr.k.BERRAH et M.DEMIDEM E.N.P. ALGER (1995)

[3] BERRAH.M.K. NOTES DE COURS "M.M.C" E.N.P,ALGER(1995)

[4] BESCOND, BOTTERO.A et TOUZOT.G,"Fondations sur sols bicouches table de calcul des tassements", Les P.U.Q. EYROLLES (1974).

[5] BOUZIANE .S "Moélisation non linéaire du comportement du sol par couplage éléments finis-éléments d'interface et éléments infinis " Thèse de magistère ,ENP, Alger (1996).

[6] COSTET.J ET SANGLERAT "cours pratique de mécanique des sols" Tome II , 3ème édition,DUNOD,PARIS,(1981).

[7] COSTET.J et SANGLERAT.G "Cours pratiques de mécanique des sols" Tome 2 , 3ème édition, Dunod , Paris ( 1981).

[8] COURBON.J " Calcul des structures " Dunod, Paris, ( 1972 ).

[9] DEMIDEM.M Notes de cours "Méthodes numériques" 1ère année P.G. , E.N.P Alger (1996).

[10] DEMIDEM.M Notes de cours "Calcul automatique des structures" 4ème année , E.N.P Alger (1995).

[11] DHATT.G, TOUZOT.G , "Une présentation de la méthode des éléments finis" Maloine édition (1984 ).