

14/96
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie - Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Analyse des vibrations libres
des plaques raidies par
la méthode des éléments finis
Elaboration d'un logiciel*

Proposé par :
M^r ALI NOUR

Etudié par :
M^r N. ZERGOLIG

Dirigé par :
A. Nour

PROMOTION
1996

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je remercie en premier et en dernier DIEU le tout puissant.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon promoteur Mr A. NOUR.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à ma soeur Haféda et ses collègues pour leurs précieuses aides dans la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin, je remercie tous mes amis entre autres H. Omar, H. Mohamed, K. Omar et G. Mourad ... qui m'ont aidé de près ou de loin.

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents.

A mes frères et soeurs.

A toute la famille.

A tous mes amis.

الموضوع: تحليل الاهتزازات الحرة للصنائح المضلعة باستخدام

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

طريقة العناصر المحدودة
مختصا في الصنائح المضلعة من أهم المنشآت التي نجدها
في شتى الميادين خاصة في الهندسة المدنية والصناعية
والطيران وفي البناء البحري. نظرًا لصعوبة إيجاد الحلول
التحليلية لهذه المنشآت فإن اللجوء إلى الاستراتيجيات
العددية مثل طريقة العناصر المحدودة التي تساعد على
إيجاد التصرف الحقيقي لهذه الأخيرة.

أما عمليات إيجاد القيم والأشعة الذاتية لمثل هذه
المنشآت فتتكون بطريقة الحسابات التكرارية
في الفضاء الجزئي وفي هذا الإطار تم تحضير برنامج
(إعلام آلي) خاص بالصنائح المضلعة وذلك
باستعمال ثلاث نماذج عددية مختلفة.

SUBJECT : *Finite element free vibration analysis of stiffened plates .*

ABSTRACT : Stiffened plates are structures which are encountered in civil and industries engineering , aeronautics and shipbuilding . Analytical solution of this structures are very hard if not impossible , only numerical technics have been used , such as finite element method which can describe the real behaviour of this structures . The computation of the eigenvalues and eigenvectors of such structures will be determined by the subspace iteration method . In this context , three models FEM(M2) , FEM(M1) and orthotropic formulation are implemented in computer program .

SUJET : *Analyse des vibrations libres des plaques raidies par la méthode des éléments finis.*

RESUME : Les plaques raidies sont rencontrées dans plusieurs disciplines d'engineering, principalement dans la construction civile , industrielle ainsi qu'en aéronautique et en constructions navales. La solution analytique de ce type de structures est très difficile voire impossible , seul le recours à des stratégies numériques tel que la méthode des éléments finis aiderait à prédire le comportement réel de ces structures . Cette étude concerne l'analyse des vibrations de ces structures où le problème de valeurs et vecteurs propre est résolu par la méthode d'itération sur sous espace. Dans ce contexte un programme d'éléments finis à été développé en utilisant trois approches de calcul FEM(M1), FEM(M2) et la formulation orthotrope.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre 1: NOTIONS D'ELASTICITE

1-1 INTRODUCTION	1
1-2 ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT	1
1-3 EQUATIONS D'EQUILIBRE D'UN POINT	2
1-4 ETAT DE DEFORMATION	3
1-5 EQUATIONS DE COMPTABILITE.....	3
1-6 LOI DE COMPORTEMENT	3
1-7 ELASTICITE PLANC.....	5

Chapitre 2 : NOTIONS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES

INTRODUCTION.....	6
2-2 CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PHENOMAIN DYNAMIQUE	6
2-3 FORMATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT.....	7
2-3-1 PRINCIPE DE HAMILTON	7
2-3-2 EQUATION DE LAGRANGE	8
2-4 SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE	8
2-4-1 FORMATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT.....	9
2-4-2 OSCILATIONS LIBRES.....	10
2-5 SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTES	10
2-5-1 EQUATION D'EQUILIBRE DYNAMIQUE	10
2-5-2 METHODE DE SUPERPOSITION MODALE.....	11
2-5-3 VIBRATION LIBRES NON AMORTIES.....	12

Chapitre 3: THEORIE DES PLAQUES

3-1 DEFINITION	13
3-2 HYPOTHESES FONDAMENTALES	13
3-3 PLAQUES CHARGEES DANS SON PLAN.....	13
3-4 PLAQUES CHARGEES TRANSVERSALEMENT.....	14
3-5 THEORIE DE KIRCHOFF.....	15
3-5-1 RELATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS.....	15
3-5-2 CONTRAINTES ET EFFORTS RESULTANTS	16

3-5-3 EQUATION D'EQUILIBRE	19
3-5-4 CONDITIONS AUX LIMITES	19
3-7 VIBRATION LIBRE D'UNE PLAQUE	21
3-7-1 THEORIE DE KIRCHOFF	21
3-7-2 EXEMPLE D'UNE PLAQUE MINCE SIMPLEMENT APPUYEE	22
3-7-3 THEORIE DE MINDLIN	23

Chapitre 4: PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

4-1 INTRODUCTION	24
4-2 PRINCIPE DE LA METHODE	24
4-2-1 DISCRETISATION DE LA STRUCTURE	25
4-2-2 APPROXIMATION DU CHAMP DE DEPLACEMENT	25
4-2-3 CHOIX DES VARIABLES PHYSIQUES	25
4-4 EVALUATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE	26
4-5 EVALUATION DE LA MATRICE DE MASSE ELEMENTAIRE	27
4-6 FORMULATION ISOPARAMETRIQUE	28
4-6-1 ELEMENT DE REFERENCE	28
4-6-2 ELEMENT ISOPARAMETRIQUE	28
4-7 INTEGRATION NUMERIQUE	29
4-8 TECHNIQUE DE STOCKAGE	29
4-9 INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES	31
4-10 CONVERGENCE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	32

Chapitre 5 : METHODE DE RESOLUTION

5-1 INTRODUCTION	33
5-2 PROPRIETES FONDAMENTALES DES SYSTEMES PROPRES	33
5-3 ANALYSE DE RAYLEIGH-RITZ	34
5-4 METHODES DE RESOLUTION	36
5-4-1 METHODES D'ITERATIONS VECTIRIELLES	37
5-4-2 METHODES DE TRANSFORMATION-METHODE DE JACOBI	40
5-5 RESOLUTION DES PROBLEMES A MATRICE LARGE- METHODE DU SOUS -ESPACE	42

Chapitre 6 : ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES DES PLAQUES RAIDIE PAR LA METHODES DES ELEMENTS FINIS

6-1 INTRODUCTION	44
6-2 ELEMENTS FINIS	44
6-2-1 ELEMENTS BASES SUR LES HYPOTHESES DE KHIRCHOFF	45
6-2-2 ELEMENT DASS SUR LA THEORIE DE HENCKY -MINDLIN	45
6-2-3 CHOIX DE L'ELEMENT DE PLAQUE	45
6-2-4 EQUATIONS CONSTITUTIVES	46
6-2-4 -1 EVALUATION DE MATRICE RIGIDE ELEMENTAIRE	46
6-2-4 -2 EVALUATION DE LAMATRICE MASSE ELEMENTAIRE	48
a- Matrice masse cohérente	49
b- Matrice diagonale à coefficient égaux	49
c- Matrice masse diagonale à coefficients variables	49
6-3 ELEMENT FINIS POUTRE	50
6-3-1 CHOIX DE L'ELEMENT DE POUTRE	50
6-4 INTEGRATION NUMERIQUE REDUITE	50
6-5 ANALYSE DES PLAQUES RAIDIES PAR MEF	51
6-5-1 ANALYSE DES PLAQUES RAIDIES PAR POUTRES EXENTREES	51
6-5-1-1 FORMULATION FEM (M1)	52
• Matrice masse cohérente	54
• Matrice masse diagonale à coefficients variables	54
6-5-1-2 FORMULATION FEM (M2)	54
• Matrice masse cohérente	57
• Matrice masse diagonale à coefficients variables	57
6-5-2 ANALYSE DES PLAQUE RAIDIES PAR ASSIMILATION A DES PLAQUES ORTHOTROPES	57
6-5-2-1 MATRICE RIGIDE DE LA PLAQUE ORTHOTROPE	57
6-5-2-2 MATRICE MASSE DE LA PLAQUE ORTHOTROPE	60
• Matrice masse cohérente	54
• Matrice masse diagonale à coefficients égaux	54
6-6 SYNTHESE	61

Chapitre 7: PRESTATION ET APPLICATIONS DU PROGRAMME

7-1 INTRODUCTION	64
7-2 PRESENTATION DU PROGRAMME	64
7-2-1 ALLOCATION PSEUDO-DYNAMIQUE DES TABLES	64
7-2-2 STOCKAGE DES MATRICES PAR LA TECHNIQUE DE "SKYLINE"	65
7-2-3 STRUCTURE GLOBALE DU PROGRAMME INFORMATIQUE	66

A- ORGANIGRAMME DU PROGRAMME PRINCIPALE	66
B- ORGANIGRAMME DE LA SUBROUTINE "STIFPS"	67
C- ORGANIGRAMME DE LA SUBROUTINE "MASSE"	68
D-ROLE DE DES SUBROUTINES	69
7-3 APPLICATION DE VALIDATION	70
APPLICATION N°1: VALIDATION DE LA SUBROUTINE «SSPACE» (Effet Membranaire)	70
APPLICATION N°2: ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES DES PLAQUES ISOTROPE	71
APPLICATION N° 3: ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES D'UNE PLAQUE CARREE RAIDIE AVEC UN RAIDISSEUR AU MILIEU.....	77
APPLICATION N ° 4 : ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES D'UNE PLAQUE CARREE MUNIE DE DEUX RAIDISSEURS SUIVANT L'AXE X	79
APPLICATION N°5 : ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE DOUBLEMENT RAIDIES (APPROCHE ORTHOTROPE) ..	80
APPLICATION N°6 : COMPARAISON ENTRE LES FORMULATIONS FEM(M2) ET ORTHOTROPE	81

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

ET

PRESENTATION DU SUJET

INTRODUCTION ET PRESENTATION DU SUJET

Les projets que l'ingénieur est amené à réaliser deviennent, du fait de l'évolution actuelle de la technologie de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères.

En Génie Civil, l'ingénieur est souvent en présence de structures complexes telles que les plaques raidies qui sont rencontrées dans les planchers de bâtiments, ponts à poutres, dans la construction navale et Aéronautique.

La solution analytique de ces derniers est rare voire impossible, seul le recours à des stratégies numériques telles que la méthode des éléments finis aiderait à prédire le comportement réel de ces structures; cette méthode multidisciplinaire a connu un développement considérable soutenu par la disponibilité d'outils informatiques performants qui sont actuellement utilisés en statique et en dynamique pour résoudre les problèmes de structures en domaine linéaire et non linéaire.

Cette présente étude est intitulée:

Analyse des vibrations libres des plaques raidies par la méthode des éléments finis.

Le problème de valeurs et vecteurs propres est résolu en utilisant la méthode de l'itération du sous-espace "SUBSPACE ITERATION".

A cet effet un programme informatique a été développé où trois techniques sont implémentées: FEM(M1), FEM(M2) et l'approche orthotrope.

Le mémoire est principalement divisé en sept (07) chapitres:

- Le premier chapitre est consacré aux notions d'élasticité, qui englobent l'état de contraintes et de déformations en un point.
- Dans le second chapitre (02) on expose quelques notions fondamentales de la dynamique des structures.
- Le chapitre (03) concerne la présentation de la théorie des plaques minces et épaisses.
- Le chapitre (04) on présentera brièvement la méthode des éléments finis.
- Le chapitre (05) est consacré à la présentation des méthodes de résolution des valeurs propres en faisant option à la méthode de l'itération du sous-espace.

Le chapitre (06) présente la partie principale de ce mémoire , on expose l'analyse des vibrations libres des plaques raidies par la M.E.F en utilisant trois approches , FEM(M1) , FEM(M2)

[Méthode d'assemblage plaque-poutre] et l'approche orthotrope (plaque équivalente).

- Dans le chapitre (07) on présentera le programme informatique développé , ainsi que des applications de validations avec les solutions analytique , expérimentales et numériques.

Enfin , en terminera par des conclusions et des recommandations qui peuvent constituer une suite à ce travail où des perspectives à de futures recherches.

CHAPITRE 1

NOTIONS D'ELASTICITE

CHAPITRE 1: NOTIONS D'ELASTICITE

1-1 INTRODUCTION

La théorie d'élasticité permet d'obtenir une information plus détaillée et plus précise sur l'état des contraintes et des déformations en un point quelconque de l'intérieur du corps que ne permet la Résistance des Matériaux.

Cependant la Théorie de l'élasticité requiert des notions mathématiques plus avancées que celle ayant servi dans la Résistance des Matériaux.

Dans ce chapitre nous exposerons quelques notions fondamentales de la théorie d'Elasticité.

1-2 ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT

Le vecteur contrainte sur un élément de surface Δs avec la normale extérieure \vec{n} en un point Q d'un milieu continue est définie par [2]:

$$\vec{t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\vec{\Delta f}}{\Delta s} \right]_{(k)} \quad (1-1)$$

tel que Δs représente une suite de portion de la surface s de tel sorte que $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_k$ tendent vers zéro et chaque élément de cette suite contient le point Q (quant $k \rightarrow \infty, \Delta s \rightarrow Q$) (voir Fig.(1-1)).

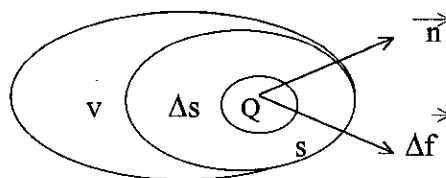


Fig. 1-1: Vecteur contrainte

Le vecteur contrainte sur un plan arbitraire de normal \vec{n} en un point peut être exprimé en fonction de trois vecteurs contraintes donnés selon des directions différentes $\vec{t}^{(1)}, \vec{t}^{(2)}, \vec{t}^{(3)}$. Les trois vecteurs représentent le tenseur de contrainte $[\sigma]$ au point considéré tel que $\vec{t}^{(n)} = [\sigma] \cdot \vec{n}$

Les composantes scalaires des $\vec{t}^{(1)}, \vec{t}^{(2)}, \vec{t}^{(3)}$ notées σ_{ij} sont les neuf composantes du tenseurs $[\sigma]$ (voir Fig.(1-2)).

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est symétrique d'après Cauchy c'est à dire $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

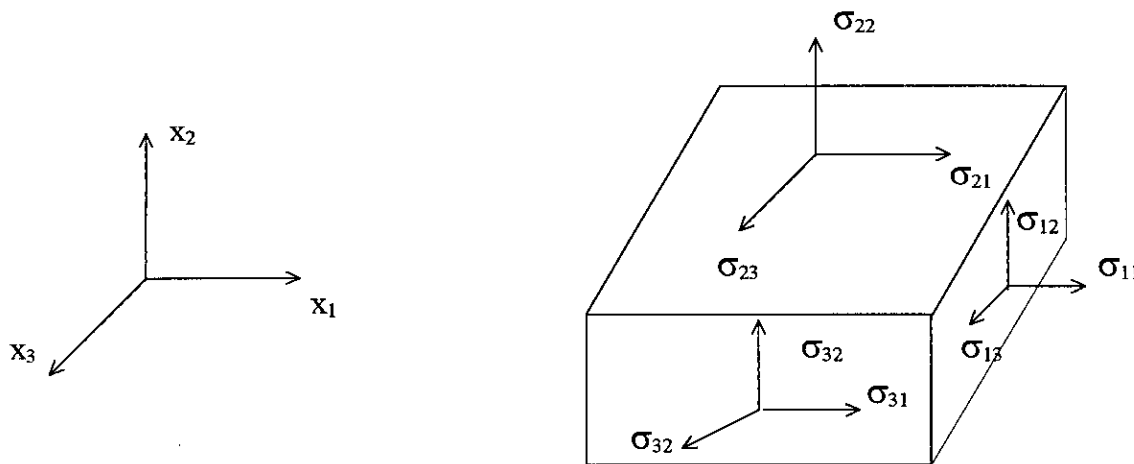


Fig.1-2: Tenseur de contrainte

1-3 EQUATIONS D'EQUILIBRE D'UN SOLIDE

Soit : - Un solide défini dans un domaine D de volume V de surface extérieure.

- \vec{t} vecteur contrainte le long de S
- \vec{f} vecteur de forces volumique agissant dans V.

L'équilibre en un point courant de D est [2]:

$$\iint_s t ds + \iiint_v f dv = 0 \tag{1-2}$$

Ce qui se traduit par les trois équations suivantes:

$$f_i + \sigma_{ij,j} = 0 \quad i,j= 1,2,3 \tag{1-3}$$

En dynamique les équations d'équilibre s'écrivent en ajoutant les forces d'inerties

$$f_i + \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \tag{1-4}$$

ou ρ : masse volumique.

\ddot{U}_i : accélération suivant la direction i.

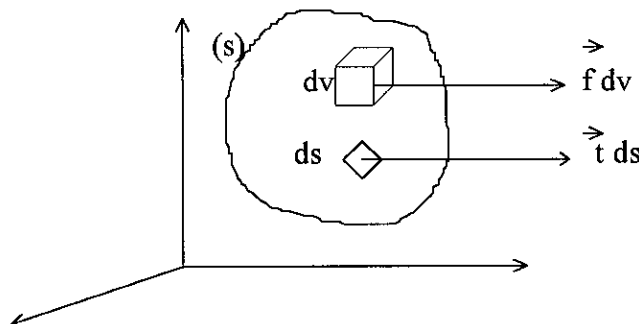


Fig. 1-3: Equilibre d'un solide

1-4 ETAT DE DEFORMATION

On dit qu'un corps est déformé, quant les positions relatives entre les points appartenant à ce corps changent en fonction du système de force appliqué. Dans le cas général deux types de déformations peuvent exister :

- Déformation directe dans une direction donnée définie comme étant le rapport de variation de longueur par la largeur d'une fibre originalement orientée dans cette direction [1].

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-5a)$$

où u, v, w représentent les déplacements d'un point suivant x, y, z respectivement.

- Déformation de cisaillement définit comme étant la variation de l'angle droit formé par les deux axes [1].

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\epsilon_{xy} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\epsilon_{yz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\epsilon_{yz} \end{aligned} \quad (1-5b)$$

Il est à noter que $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$; $i, j = x, y, z$.

On obtient ainsi le tenseur de déformation symétrique dont les composantes sont ϵ_{ij} .

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \text{Sym} & & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

1-5 EQUATIONS DE COMPTABILITE

Les équations de comptabilité sont les conditions d'intégrabilité des déformations qui assurent l'existence des déplacements.

Sous forme indicielle ces équations peuvent s'exprimer par:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (1-6)$$

1-6 LOI DE COMPORTEMENT

Sous l'action d'une sollicitation donnée un solide devient le siège d'un champ de

contraintes et d'un champ de déformation parfaitement déterminé, ce qui implique l'existence d'une relation entre ces deux champs .

Pour un matériau élastique, cette relation se traduit par la formule généralisée de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-7)$$

Les composantes C_{ijkl} font intervenir les caractéristiques physiques du matériau.

Les tenseurs $[\epsilon]$ et $[\sigma]$ étant symétriques nous avons alors :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \text{et} \quad C_{ijkl} = C_{jilk}$$

Ainsi, nous écrivons $[\sigma] = [C][\epsilon]$

où $[C]$ est une matrice symétrique de dimension 6×6 .

-SYMETRIE ELASTIQUE

En général les coefficients C_{ij} dépendent de l'orientation du système de coordonnées. On appelle un plan de symétrie élastique lorsque les constantes élastiques C_{ij} ont les même valeurs pour tout paire de système de coordonnées qui sont une réflexion l'un de l'autre par rapport à ce plan.

Un matériau possédant trois plan est un plan de symétrie est dit *orthotrope*, ce qui réduit les constantes à neuf.

Un matériau ou tout plan est un plan de symétrie élastique est dit *isotrope*, ce qui entraîne l'existence de deux constantes indépendantes.

- LOI DE HOOKE: CAS ISOTROPE

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1-8)$$

tel que:
$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

ou bien :
$$\epsilon_{ij} = - \frac{\nu}{E} \epsilon_{pp} \delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E} \delta_{ij} \quad (1-9)$$

avec E: Module de Young.

ν : Coefficient de Poisson.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

1-7 ELASTICITE PLANE

Se sont deux cas particuliers importants de problèmes ou les équations sont simplifiées de façon à pouvoir interpréter raisonnablement un problème physique tridimensionnel dont la solution rigoureuse n'existe que pour des cas simples.

Il s'agit des problèmes de déformations planes ou de contraintes planes.

a - Contraintes planes:

Ce modèle est une approximation qui convient aux structures minces de types poutres, plaques, coques etc ...

Les conditions de contraintes planes sont:

$$\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} \quad \text{d'où} \quad \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$$

$$\text{et} \quad \epsilon_z = - \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

On aura donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

b- Déformations planes

Ce modèle est valable pour les structures tel que barrage, mûr de soutènement ... Il est caractérisé par [1,2]:

$$\epsilon_z = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

avec $\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$

on aura donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

CHAPITRE 2

NOTIONS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES

CHAPITRE 2: NOTIONS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES

2-1 INTRODUCTION

La dynamique des structures a pour objet l'analyse des structures sous l'action des charges variables avec le temps où les forces d'inerties ne sont pas négligeables.

On peut rencontrer la charge dynamique dans une large variété de problèmes d'engineering, surtout en Génie Civil où la charge peut être appliquée directement à la structure comme le cas d'un choc ou les vibrations des machines tournantes, ou bien celle qui proviennent du sol qui peut être générée par un séisme ou par une explosion souterraine [4].

Pour résoudre le système différentielle des équations du mouvement d'un problème dynamique, deux façons différentes peut être envisager [3,4].

Il s'agit de la méthode de superposition modale applicable aux problèmes linéaire et pratique où l'étendue de la charge est en basse fréquence, ou bien les techniques d'intégration directe pas à pas qui sont valables pour les structures à comportement non linéaire et très pratique pour les problèmes de propagation d'ondes (haute fréquence).

Dans ce présent projet on va s'intéresser qu'à l'étude des fréquences propres de vibrations libres des structures linéaires et leurs modes propres correspondants.

2-2 CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PHENOMENE DYNAMIQUE

Un phénomène de dynamique des structures se distingue du problème statique par deux caractéristiques importantes. La première est que le problème dynamique n'a pas qu'une solution, car la charge et la réponse varient avec le temps. La deuxième est que la charge dynamique produit des accélérations qui à leur tour produisent des forces supplémentaire appelées forces d'inerties; cela est illustrés par la figure (2-1).

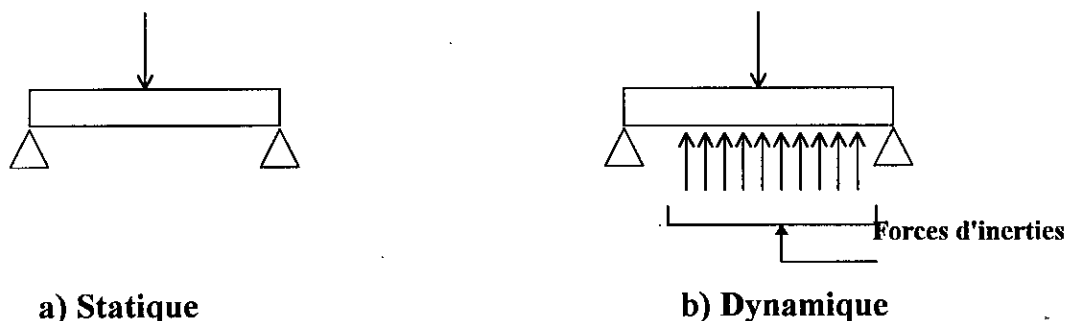


Fig. 2-1 Distinction entre une charge statique et une charge dynamique.

2-3 FORMATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les expressions mathématiques qui définissent le problème dynamique sont appelées équations du mouvement de la structure dont la résolution donne les histoires de déplacement recherchés.

La formulation des équations du mouvement d'un système dynamique peut constituer la phase la plus importante de toute l'étude.

Trois méthodes peuvent être utilisées pour formuler ces équations [3]:

- Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe de l'Alembert.
- Principe des déplacement virtuels.
- Principe de Hamilton.

La formation énergétique, qui est fondée sur le principe de Hamilton peut s'avérer plus commode car elle n'utilise pas directement les grandeurs vectorielles (forces) mais, les grandeurs scalaires (énergie cinétique, et potentielle).

2-3-1 PRINCIPE DE HAMILTON

Le mouvement d'un système élastique non conservatif entre deux instants t_1 et t_2 s'effectue de telle sorte que la fonctionnelle

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt$$

soit stationnaire, c'est à dire:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} W_{nc} dt = 0 \tag{2-1}$$

où: T est l'énergie cinétique totale du système,

V est l'énergie potentielle totale (énergie de déformation et énergie potentielle de toutes les forces conservatrices extérieures).

W_{nc} est le travail de forces non conservatrices.

2-3-2 EQUATION DE LAGRANGE

En pratique, on cherche à obtenir des solutions approchées du problème continu en le réduisant à un problème discret à un nombre fini de degrés de liberté.

Les équations de Lagrange sont obtenues en appliquant le principe variationnel de Hamilton après qu'on défini une approximation sur les déplacements comme suit:

$$U_j(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x,y,z)q_i(t) \tag{2-2}$$

avec $q_i(t)$ coordonnées généralisées.

$\phi_i(x,y,z)$ fonction de base de l'approximation.

On peut ainsi exprimer l'énergie et le travail en fonction des coordonnées généralisées et de leurs dérivées

$$\begin{aligned} T &= T(\dot{q}_i, q_i) \\ V &= V(q_i) \\ \delta W_{nc} &= \phi_i \delta q_i \end{aligned} \tag{2-3}$$

Où : ϕ_i force généralisée correspondant à la coordonnées q_i .

En substituant les équations (2-3) dans l'équation (2-1) et en intégrant par partie les termes dépendants de la vitesse on obtient:

$$\int_{t_2}^{t_1} \left\{ \left[- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \phi_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0 \tag{2-4}$$

Cette équation ne peut être satisfaite que si les termes entre crochets sont nuls ce qui donne les équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \phi_i \tag{2-5}$$

2-4 SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE

Les caractéristiques physiques essentielles de toute structure élastique linéaire soumise à des charges dynamiques sont ; sa masse, ses propriétés élastiques (rigidité ou souplesse), son amortissement et la source d'excitation extérieure.

On peut représenter ces caractéristiques par le modèle le plus simple à un degré de liberté:

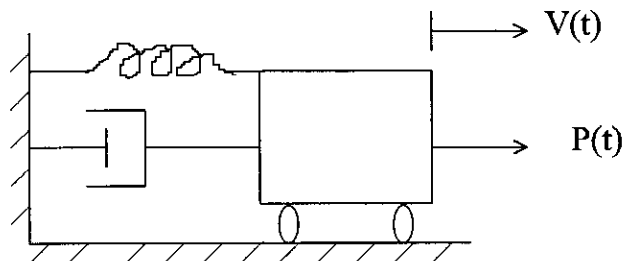


Fig. 2-2 Modèle masse - ressort - amortissement

2-4-1 FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

L'équation du mouvement du système de la Fig. 2-2 peut s'obtenir par n'importe lequel des trois procédés précédemment exposés.

Dans notre cas, nous nous limiterons qu'au principe de Hamilton qui s'avère le plus commode.

- L'énergie cinétique du système vaut:

$$U = \frac{1}{2} M \dot{V}^2 \tag{2-6}$$

- L'énergie potentielle qui représente l'énergie de déformation du ressort est:

$$T = \frac{1}{2} KV^2 \tag{2-7}$$

La variation du travail des forces non conservatrices (amortissement et charge appliquée)

$$\delta W_{nc} = P(t) - (\dot{V}) \delta V \tag{2-8}$$

et en appliquant le principe de Hamilton, on aura:

$$\int_{t_1}^{t_2} [M \dot{V} \delta \dot{V} - C \dot{V} \delta - KV \delta V + P(t) \delta V] dt = 0 \tag{2-9}$$

on intègre le 1^{er} terme par partie:

$$\int_{t_1}^{t_2} M \dot{V} \delta \dot{V} dt = M \dot{V} \delta V - KV \delta V \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} M \ddot{V} \delta V dt \tag{2-10}$$

or l'hypothèse du principe de Hamilton est; δV est nulle aux bornes d'intégration, l'équation (2-9) devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} [- M \ddot{V} - C \dot{V} - KV + P(t)] \delta V . dt = 0 \tag{2-11}$$

qui n'est satisfaite que si l'expression entre crochets est nulle, d'où:

$$M \ddot{V} + C \dot{V} + KV = P(t) \tag{2-12}$$

2-4-2 OSCILLATIONS LIBRES

La solution de l'équation (2-12) sera obtenue en considérant d'abord l'équation homogène obtenue en annulant le second membre:

$$M\ddot{V} + C\dot{V} + KV = P(t) \quad (2-13)$$

Les mouvements du système sont alors appelés oscillations libres.

Ces oscillations peuvent être aussi non amorties, c'est à dire $C = 0$ et l'équation (2-13) devient:

$$\ddot{V} + \omega^2 V = 0 \quad (2-14)$$

où la solution de ce système est de forme sinusoïdale, avec $\omega^2 = \frac{K}{M}$ qui représente la fréquence propre du système.

$$V(t) = \frac{\dot{V}(0)}{\omega} \sin\omega t + V(0) \cos\omega t \quad (2-15)$$

2-5 SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTES :

Lorsque les caractéristiques mécaniques d'un système sont telles qu'une coordonnée unique suffit à exprimer son mouvement et qu'aucun autre mouvement n'est possible, alors le système est à un (01) degré de liberté et la résolution de l'équation en question conduit à la réponse dynamique exacte. Par contre, la structure possédant plus d'un mode de déplacement mais qu'on la représente toujours par un modèle à un degré de liberté, la résolution de cette équation unique ne conduira qu'à une représentation approchée de son comportement dynamique.

En général, la réponse d'une structure ne pourra pas être exprimée de manière précise par un modèle à un seul degré de liberté, donc il est nécessaire de décrétiser la structure et ceci revient à une modélisation de celle-ci par plusieurs coordonnées de déplacement qui peuvent représenter correctement son comportement dynamique.

2-5-1 EQUATION D'EQUILIBRE DYNAMIQUE

L'équation d'équilibre d'un système à plusieurs degrés de libertés est entièrement équivalente à celle à un degré de liberté.

$$[M] \{ \ddot{V} \} + [C] \{ \dot{V} \} + [K] \{ V \} = \{ P(t) \} \quad (2-16)$$

avec : $[M]$, $[K]$, $[C]$ représentent les matrices masse, rigidité et amortissement respectivement.

$\{ \ddot{V} \}$, $\{ \dot{V} \}$, $\{ V \}$, vecteurs d'accélération, de vitesse et de déplacement respectivement.

$\{ P(t) \}$ vecteur de force.

L'intégration de ce système d'équations différentielles simultanées couplées par les termes non diagonaux de M,K,C se fait d'une manière approchée pour obtenir la réponse $\{ V(t) \}$, en utilisant des méthodes numériques tel que la méthode d'intégration directe (pas à pas) ou la méthode de superposition modale.

Pour cette étude on abordera uniquement la méthode de superposition modale.

2-5-2 METHODE DE SUPERPOSITION MODALE

Cette méthode consiste à transformer le système couplé (2-16) en un système découplé grâce à la transformation suivante:

$$\{ V(t) \} = [X] \{ U(t) \} \tag{2-17}$$

où la matrice de transformation est constituée par les n vecteurs propres $\{ X_i \}$ des modes des vibrations libres définie par :

$$[M] \{ \ddot{X} \} + [K] \{ X \} = \{ 0 \} \tag{2-18}$$

$$[X] = [\{ X_1 \} \{ X_2 \} \dots \{ X_n \}] \tag{2-19}$$

Les vecteurs propres satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\{ X_i \}^T [K] \{ X_i \} = \lambda_i \delta_{ij} \tag{2-20}$$

$$\{ X_i \}^T [K] \{ X_i \} = \delta_{ij} \tag{2-21}$$

Le système (2-16) transformé par (2-17) s'écrit sous la forme des équations découplées en considérant que la structure est peu amortie c'est à dire $[C] = [0]$.

$$\{ \ddot{U}(t) \} + [\lambda] \{ U(t) \} = \{ F(t) \} \tag{2-22}$$

Chaque équation découplée de ce système peut être intégrée explicitement pour donner $U_i(t)$ et la solution cherchée $\{ V(t) \}$ est le superposition des contributions modale grâce à (2-17).

En pratique, il n'est pas nécessaire d'utiliser tous les vecteurs et valeurs propres, on se contente d'une matrice $[X]$ rectangulaire contenant seulement les modes dominants.

Dans notre cas, nous nous limiterons seulement à résoudre le problème de valeurs et vecteurs propre correspondants.

2-5-3 VIBRATIONS LIBRES NON AMORTIES

Nous avons vu que la résolution du système (2-18) (vibrations libres non amorties) est une étape vitale pour rendre un système couplé en un système découplé.

Par analogie avec le comportement des systèmes à un seul degré de liberté, la solution du système (2-18) peut être exprimé sous forme :

$$\{ X(t) \} = \{ \hat{X} \} \sin (\omega t + \theta) \quad (2-23)$$

Substituant (2-23) dans (2-18) on obtient le problème général des valeurs et vecteurs propres:

$$[K] \{ \hat{X} \} = \omega^2 [M] \{ \hat{X} \} \quad (2-24)$$

où ce système d'équations donne les n solutions propres $(\omega_1^2, X_1), (\omega_2^2, X_2) \dots$ une solution triviale n'est possible que si

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (2-25)$$

Cette expression est le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ d'ordre n en λ ($\lambda = \omega^2$) dont sa construction et sa résolution est difficile pour de grands systèmes, il faut donc utiliser des méthodes itératives que l'on verra ultérieurement.

CHAPITRE 3

THEORIE DES PLAQUES

CHAPITRE 3: THEORIE DES PLAQUES

3-1 DEFINITION

Une plaque est un solide dont une dimension selon l'épaisseur h est petite devant les deux autres et qui généralement comporte un plan de symétrie appelé plan moyen.

Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène et isotrope ou par un matériau anisotrope.

On définit une plaque orthotrope comme une plaque dont les propriétés physiques et géométriques suivant deux directions (xx) et (yy) sont différentes.

3-2 HYPOTHESES FONDAMENTALES

Les théories des plaques reposent sur les hypothèses suivantes:

- H_1 : L'hypothèse de contraintes planes ($\sigma_z \approx 0$).
- H_2 : L'hypothèse de déformation transversale transversale ϵ_z nulle.
- H_3 : La géométrie et les matériaux de la plaque sont tels que les phénomènes de membrane et de flexion sont découplés; ceci permet de considérer l'état de déformation comme la superposition de déformation de membrane et de la déformation de flexion.

$$[\epsilon] = [\epsilon]_M + [\epsilon]_F \tag{3-1}$$

3-3 PLAQUES CHARGEE DANS SON PLAN

Considérons l'équilibre d'un élément de plaque infinitésimal de côtés dx , dy .

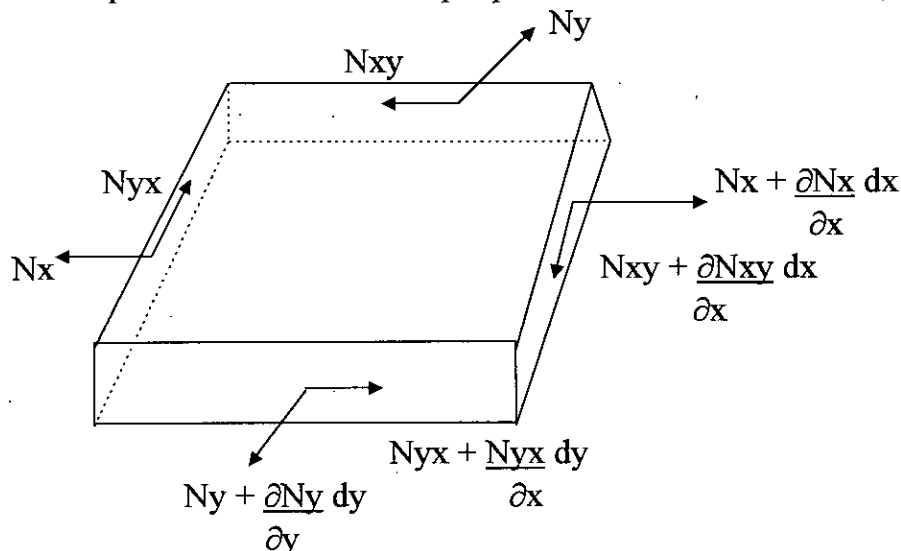


Fig. 3-1 Equilibre d'un élément différentiel.

Sous l'effet du chargement dans le plan (x,y) de densité $\vec{P}(P_x, P_y, 0)$ seul les efforts internes de membranes N_x, N_y, N_{xy} sont non nuls [1].

Le tenseur de contrainte $[\sigma]$ est en tout point sous la forme suivante:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

dont les composantes sont indépendantes de Z , par conséquent vérifient les égalités suivantes:

$$N_x = h \cdot \sigma_x \quad , \quad N_{xy} = N_{yx} = h \cdot \tau_{xy} \quad , \quad N_y = h \cdot \sigma_y \quad (3-2)$$

Les équations d'équilibre de l'élément sont [1] :

$$\begin{aligned} P_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ P_y + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

3-4 PLAQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

Dans ce cas les forces extérieures se réduisent au chargement $\vec{P}(0, 0, P_z)$, on a donc en tout points du plan moyen $N_x = N_y = N_{xy} = 0$ [1].

On peut classer les plaques en deux catégories [5,6]:

- Plaques minces si la contribution de l'énergie de cisaillement transversale est négligeable; pour une plaque isotrope, on doit vérifier l'élanement de $l/h > 20$. Ce type de plaque est étudié par la théorie de Kirchoff.
- Plaques épaisses si la contribution de l'énergie de cisaillement transversale n'est pas négligeable par rapport à l'énergie flexionnelle. Pour une plaque isotrope, on doit vérifier l'élanement de $4 < l/h < 20$.

Ce type de plaque est étudié par la théorie de Hencky-Mindlin.

l : longueur caractéristique.

h : épaisseur de la plaque.

3-5 THEORIE DE KIRCHOFF

Les hypothèses de Kirchoff sont :

- H1 et H2 énoncées précédemment
- H4: Il n'ya pas de déformation dans le plan moyen avant, pendant, après déformation
- H5: Les sections initialement planes et normales à la surface moyenne restent planes et normales à cette surface après déformation, ceci revient à négliger le cisaillement transversal ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).

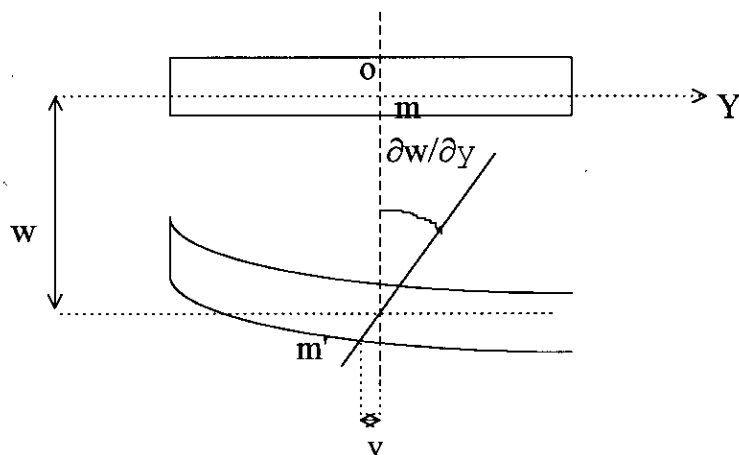


Fig.3-2 Déformation d'élément linéaire

3-5-1 RELATIONS DEFORMATIONS - DEPLACEMENTS

Selon les hypothèses faites:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \text{d) } \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \text{b) } \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \text{e) } \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\
 \text{c) } \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \text{f) } \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0
 \end{array} \quad (3-3)$$

d'après l'équation (d), w est indépendante de z donc $w = w(x,y)$.

En intégrant les équations (e) et (f) et en tenant compte de H4, on obtient:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3-4)$$

En substituant ces équations dans les équations a, b, c, on obtient:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3-5)$$

3-5-2 CONTRAINTES ET EFFORTS RESULTANTS

En utilisant les formules de la loi de Hook pour un état de contraintes planes et en introduisant les équations (3-5), on obtient:

$$\sigma_x = -z \left[\frac{E_x}{(1-\nu_x\nu_y)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu_x E_y}{(1-\nu_x\nu_y)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$\sigma_y = -z \left[\frac{E_y}{(1-\nu_x\nu_y)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\nu_y E_x}{(1-\nu_x\nu_y)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3-6)$$

$$\tau_{xy} = -2z G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

avec: E_x, E_y : modules de Young dans les sens x,y.

ν_x, ν_y : coefficients de poisson dans les directions x et y .

G_{xy} : module d'élasticité transversal.

Les contraintes varient lineairement suivant l'épaisseur produisant des moments de flexion, de torsion et des efforts tranchants par unité de longueur.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \quad , \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dy \quad \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \quad (3-7)$$

En introduisant les équations (3-6) dans (3-7) et après intégration on obtient:

$$M_x = (D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})$$

$$M_y = (D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \quad (3-8)$$

$$M_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Avec:

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} \quad , \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} \quad , \quad D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12}$$

Pour une plaque isotrope :

$$D_x = D_y = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \nu_x = \nu_y = \nu, \quad D_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2}$$

Les efforts de cisaillements Q_x et Q_y agissant sur les surfaces normales aux directions x et y sont donnés par :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (3-9)$$

La détermination des composants σ_z , τ_{xz} et τ_{yz} en utilisant la loi de Hooke est impossible. On les évalue à partir des équations différentielles d'équilibre (1-3).

$$a) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$b) \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (3-10)$$

$$c) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$(a) \Rightarrow \tau_{xz} = \int_z^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz$$

$$\tau_{xz} = - \left[\left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left[\frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{\nu_x E_x}{1-\nu_x \nu_y} + 2G_{xy} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \right] \quad (3-11a)$$

de même on obtient :

$$\tau_{yz} = - \left[\left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left[\frac{E_y}{1-\nu_x \nu_y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\frac{\nu_y E_y}{1-\nu_x \nu_y} + 2G_{xy} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \right] \quad (3-11b)$$

En substituant les équations (3-11) dans (3-9) on obtient :

$$Q_x = - \left[D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2D_{xy} + \nu_x \nu_y) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (3-12)$$

$$Q_y = - \left[D_x \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2D_{xy} + \nu_y \nu_x) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]$$

3-5-3 EQUATION D'EQUILIBRE

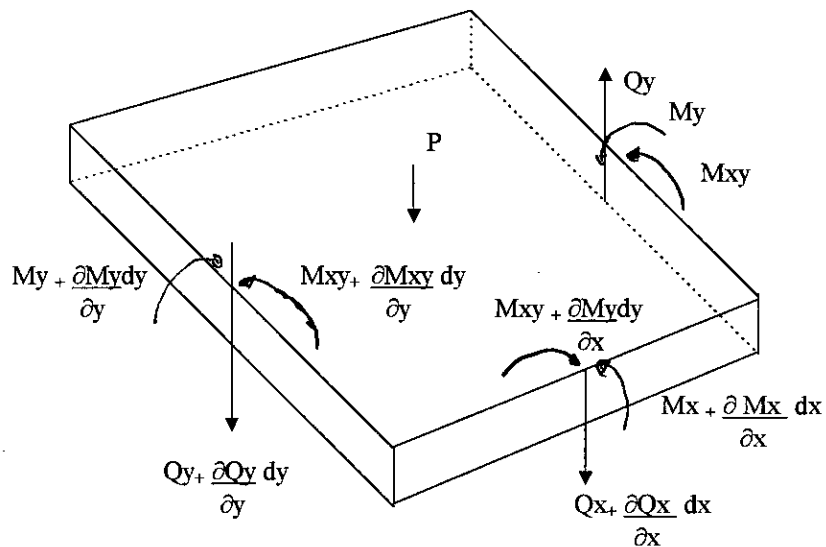


Fig. 3-3 Equilibre d'un élément différentiel

Considérant l'équilibre d'un élément ($dx dy$) de la plaque soumis à une charge répartie par unité de surface $P(x,y)$, on obtient:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \tag{3-13}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$$

En combinaison ces trois équations, on obtient:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial xy} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P \tag{3-14}$$

C'est l'équation différentiel d'équilibre d'une plaque mince en flexion.

En remplaçant les expressions du système (3-8) dans l'équation (4-14), on obtient :

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P \tag{3-15}$$

avec

$$H = \frac{2D_{xy} + U_y D_x + U_x D_y}{2}$$

Pour une plaque isotrope, on procède de la même façon et on obtient:

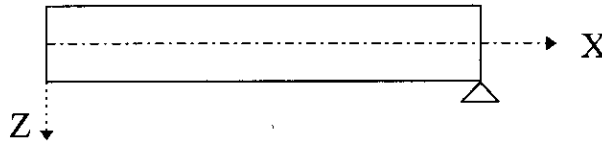
$$\frac{\partial^4 w}{\partial w^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (3-16)$$

3-5-4 CONDITIONS AUX LIMITES

La solution de l'équation fondamentale de la plaque dépend de son mode d'appuis, c'est à dire des conditions aux limites.

- Bord simplement appuyé:

pour $x = a, w = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w^2}{\partial y^2} = 0$



En plus $M_x /_{x=a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w^2}{\partial x^2} = 0$

Remarque:

Dans chaque coin de plaque simplement appuyé l'action du moment de torsion (car $M_{xy} = M_{yx}$) fait apparaitre de force concentré.

$$F_c = 2M_{xy} \quad (x = a, y = b)$$

- Bord encastré:

Dans ce cas la flèche et les rotations sont nulles

pour $x = a, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

- Bord libre :

Dans ce cas les forces et les moments sont nuls

$$Q_x = M_x = M_{xy} = 0 \quad \text{pour } x = a$$

3-6 PLAQUES EPAISSES - THEORIE DE HENCKY- MINDLIN

Pour ce type de plaques les hypothèses s'énoncent comme suit:

- H1, H2, H4 énoncées précédemment.
- H6 : Une section initialement plane et normale à la surface moyenne reste plane mais pas forcément normale à celle-ci après déformation. Cela veut dire

que les déformations de cisaillement ne sont pas négligeable.

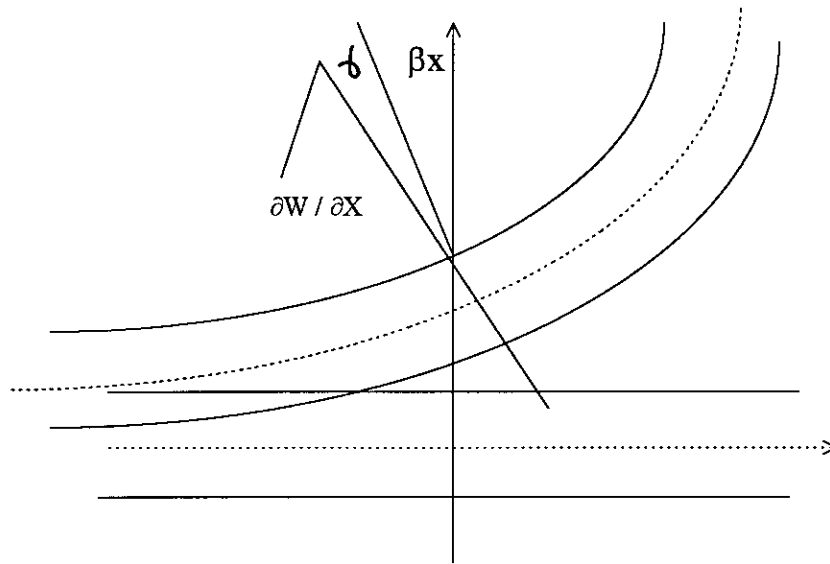


Fig. 3-4: Déformation d'un élément linéaire

3-6-1 DEPLACEMENTS, DEFORMATIONS ET CONTRAINTES

Le déplacement d'un point n'appartenant pas au plan moyen n'est plus gouverner par les rotations $\partial w / \partial x$ et $\partial w / \partial y$ mais par β_x et β_y qui représentent les rotations d'une ligne normale à la surface moyenne.

On a alors:

$$U = Z \cdot \beta_x(x,y) \quad , \quad V = Z \cdot \beta_y(x,y) \quad , \quad W = W(x,y) \quad (3-17)$$

Les déformations de flexion sont donc:

$$\epsilon_x = Z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad , \quad \epsilon_y = Z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad , \quad 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \quad (3-18)$$

Le cisaillement transversal est supposé constant sur toute l'épaisseur.

$$2\epsilon_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \quad 2\epsilon_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y}$$

En procédant de la même façon que pour les plaques minces, on aboutit aux équations d'équilibres suivants:

$$Kh \left[G_{xz} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + G_{yz} \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = -P$$

$$2D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} \right) + D_y \left(\frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} \right) + U_y D_x \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} \right) = KhGyz \left(\beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3-19)$$

$$2D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) + D_x \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} \right) + U_x D_y \left(\frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) = KhGyz \left(\beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3-20)$$

Où K est le facteur de cisaillement introduit pour corriger l'hypothèse selon laquelle le cisaillement est constant à travers l'épaisseur pour les plaques isotropes $K = 5/6$.

Pour le cas de l'isotropie, on aura:

$$D \left[\left(\frac{1-U}{2} \right) \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \left(\frac{1+U}{2} \right) \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right] = KG \cdot h \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right)$$

$$D \left[\left(\frac{1-U}{2} \right) \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \left(\frac{1+U}{2} \right) \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} \right] = KG \cdot h \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) \quad (3-21)$$

$$KGh \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right] = -P$$

dont il est possible d'aboutir à :

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \frac{D}{KGh} \left[\frac{\partial^2 (wP)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (wP)}{\partial y^2} \right] = P \quad (3-22)$$

3-7 VIBRATION LIBRE D'UNE PLAQUE

Comme en statique, on peut étudier en dynamique les plaques selon la théorie de Kirchoff ou celle de Mindlin [σ].

3-7-1 THEORIE DE KIRCHOFF

En appliquant les équations du mouvement (1-4) où on négligera les cisaillements et les inertie de rotation, on aboutira à l'équation du mouvement de la plaque suivante:

$$D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (3-23)$$

où
$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

et
$$\nabla^4 = (\nabla^2) (\nabla^2)$$

3-7-2 EXEMPLE D'UNE PLAQUE MINCE SIMPLEMENT APPUYEE

Un exemple de résolution de cette équation est considéré pour une plaque mince simplement appuyée le long de ses bords de dimension ($a \times b \times h$).

Pour cela , on effectue une séparation des variables comme suit:

$$w = \phi (x,y) T(t) \tag{3-24}$$

en substituant cette équation dans l'équation (3-22), on obtient deux équations aux dérivées partielles l'une dépend du temps et l'autre des coordonnées (x,y) qui sont:

$$\ddot{T}/T = - \omega^2 \quad (a) \quad \text{et} \quad D\nabla^4\phi = \omega^2 \quad (b) \tag{3-25}$$

où leurs solutions sont:

$$T = A \cos\omega t + B \sin\omega t \quad (a)$$

$$\text{et} \quad \phi (x,y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (b) \tag{3-26}$$

on a les conditions aux limites:

$$W = M_x = 0 \quad \text{pour } x = 0; x = a$$

$$W = M_y = 0 \quad \text{pour } y = 0; y = b$$

et en substituant l'équation (3-25b) dans (3-24a), on obtient:

$$\left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^4 + \frac{\omega_{nm}^2}{\beta^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = 0 \tag{3-27}$$

$$\text{et donc } \omega_{nm} = \beta\pi^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right] \tag{3-28}$$

où ω_{nm} est la pulsation propre du mode (m,n).

Le mouvement de vibrations libres d'une plaque est la superposition de tous les modes:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} \tag{3-29}$$

$$\text{où} \quad w_{nm} = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} (A_{nm} \sin\omega_{nm}t + B_{nm} \cos\omega_{nm}t) \tag{3-30}$$

3-7-2 THEORIE DE MINDLIN

Cette fois ci on tiendra compte de l'effet de cisaillement et les inerties de rotation , ce qui conduit à l'équation du mouvement de la plaque suivante:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\rho}{KG} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(D \nabla^2 - \frac{\rho h^3 \partial^2}{12 \partial t^2} \right) w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3-31)$$

CHAPITRE 4

PRESENTATION DE LA METHODE

DES ELEMENTS FINIS

CHAPITRE 4 : PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

4-1 INTRODUCTION:

Le progrès de l'intelligence informatique que l'on a connu ces dernières années ont favorisé énormément le développement des techniques de calcul, motivées par le besoin d'analyser des structures constituées souvent par des milieux continus à géométrie les plus diverses pour lesquels on possède pas de solutions analytiques et que les méthodes traditionnelles ne permette pas d'analyser.

La méthode des éléments finis [7, 8, 9, 10, 11] est parmi les techniques les plus utilisées pour l'analyse des structures dont la complexité rend vaines les méthodes classiques.

4-2 PRINCIPE DE LA METHODE

Cette méthode consiste à subdiviser une structure continue en sous-domaines de forme relativement simple appelés "élément finis ". Ces derniers sont liées entre eux par un nombre fini de points dits "noeuds". Le comportement ainsi défini donne une approximation à celui de la structure.

Dans une analyse par éléments finis, on distingue trois aspects fondamentaux [9,11]:

- 1 - Discrétisation de la structure en éléments.
- 2 - Choix d'une approximation (champs de déplacement dans notre approche) pour chaque élément.
- 3 - Choix des variables généralisées " physiques " (déplacement nodaux) pour chaque élément.

4-2-1 DISCRETISATION DE LA STRUCTURE (choix d'un maillage)

L'aspect discrétisation par élément finis est illustré par la figure (4 -1) :

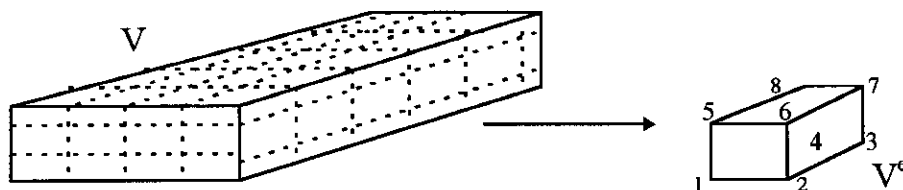


Fig. 4-1 Discrétisation d'une structure continue

4-2-2 APPROXIMATION DU CHAMP DE DEPLACEMENTS:

Un modèle mathématique d'une structure fait intervenir plusieurs variables ou fonctions dites exactes telles que les déplacements $q(x)$, ceux-ci sont représentés par des fonctions "approchées" $q(x)$, tel qu'à l'intérieur de chaque élément V^e , on aura:

$$\{q(m)\}^e = [P(m)]^e \{a\}^e \quad (4-1)$$

avec $m(x, y, z) \in V^e$.

$P(m)$: matrice des fonctions de base de l'approximation.

$\{a\}$: vecteur des variables généralisées.

4-2-3 CHOIX DES VARIABLES PHYSIQUES

Du moment que les variables généralisées variaient d'un élément à l'autre, la relation (4-1) ne peut être utilisée pour résoudre le problème globale. Donc afin d'assurer la comptabilité des déplacements, il est nécessaire d'adopter de nouvelles variables physiques qui ne sont que les déplacements aux noeuds de l'élément V^e ; $\{q\}^e$ soit:

$$\{q(m)\}^e = [N(m)]^e \{q\}^e \quad (4-2)$$

avec $[N(m)]$ matrice d'interpolation du champ de déplacement de l'élément Les fonctions $N(m)$ sont déterminées de deux manière différentes.

a - METHODE INDIRECTE

On choisi les fonctions $N(m)$ de manière à être facile à évaluer sur ordinateur, à intégrer ou à dériver explicitement, le plus souvent ces fonctions sont linéaires en a_i :

$$q(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i x^j y^k z^l \quad (4-3)$$

ou sous forme matricielle:

$$\{q(m)\} = [P_n(m)] \{a_i\} \quad (4-4)$$

n : degré du polynôme.

Si le nombre de variables généralisées est égal au nombre de degré de liberté de l'élément, on peut écrire:

$$\{q(m)\}^e = [P_n(m)]^e [P(x_i, y_i, z_i)]^{e-1} \{q\}^e \quad (4-5)$$

x_i, y_i, z_i coordonnées nodales

De l'équation (4-2), on aura :

$$[N(m)]^e = [P_n(m)]^e [P(x_i, y_i, z_i)]^{e-1} \quad (4-6)$$

b- METHODE DIRECTE

Elle consiste en la construction directe des matrices d'interpolation en utilisant par exemple les polynômes de Lagrange, qui sont définis dans les cas unidimensionnel par l'expression [9-11]:

$$N_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (x_i - x_j)} \quad (4-7)$$

4-4 EVALUATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

La détermination de la matrice de rigidité d'un élément de structure peut s'effectuer à partir de son énergie de déformation.

$$U^e = \frac{1}{2} \int_v (\varepsilon^T \cdot \sigma)^e dv \quad (4-8)$$

En raison de l'élasticité du corps, on aura :

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (4-9)$$

$$\{\varepsilon\} = [L] \{q(m)\} \quad (4-10)$$

[E] : matrice d'élasticité.

[L] : matrice opérateur différentiel

En substituant l'équation (4-2) dans l'équation (4-9), on aura:

$$[\varepsilon]^e = [B]^e \{q\}^e \quad (4-11)$$

avec $[B]^e = [L] [N]$

En substituant l'équation (4-9) dans (4-8), on aura:

$$\{\sigma\}^e = [E][B]\{q\}^e \quad (4-12)$$

La relation (4-8) devient alors:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_v \{q\}^{eT} [B]^T [E][B]\{q\}^e dv \quad (4-13)$$

Cette relation est de la forme:

$$U^e = \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [k]^e \{q\}^e \quad (4-14)$$

avec $[k]^e$ matrice de rigidité élémentaire

tel que:
$$[k] = \int_v [B]^{eT} [E] [B]^e dv \quad (4-15)$$

4-5 EVALUATION DE LA MATRICE DE MASSE ELEMENTAIRE

La matrice de masse est déterminée grâce à l'énergie cinétique pour un élément de structure:

$$T^e = \frac{1}{2} \rho \int_{v^e} \{\dot{q}(m)\}^{eT} \{\dot{q}(m)\}^e dv \quad (4-16)$$

M^e matrice masse cohérente de l'élément.

Avec $\dot{q}(m)$ vecteur vitesse en un point quelconque de l'élément, dont grâce à la relation (4-2), on peut écrire :

$$\{\dot{q}(m)\} = [N] \{\dot{q}\}^e \quad (4-17)$$

La relation (4-16) devient alors:

$$T^e = \frac{1}{2} \rho \{\dot{q}\}^{eT} M^e \{\dot{q}\}^e \quad (4-18)$$

avec

$$M^e = \rho \int_{v^e} [N]^T [N] dv \quad (4-19)$$

M^e matrice masse cohérente de l'élément.

Cependant il existe deux autres types de matrice de masse plus simple, utilisées dans les calculs par éléments finis [4, 7, 8, 9, 10]:

- Matrice masse concentrée, qui est déterminée en affectant à chaque degré de liberté de translation une masse obtenue en répartissant la masse totale équitablement à tous les noeuds de l'élément.
- Matrice masse diagonale qui a été développée par Hinton et al [12] déterminée à partir de la matrice masse cohérente en utilisant que les termes diagonaux qui sont scaler de telle façon que la masse totale de l'élément soit préservée.

4-6 FORMULATION ISOPARAMETRIQUE

4-6-1 ELEMENT DE REFERENCE

C'est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique:

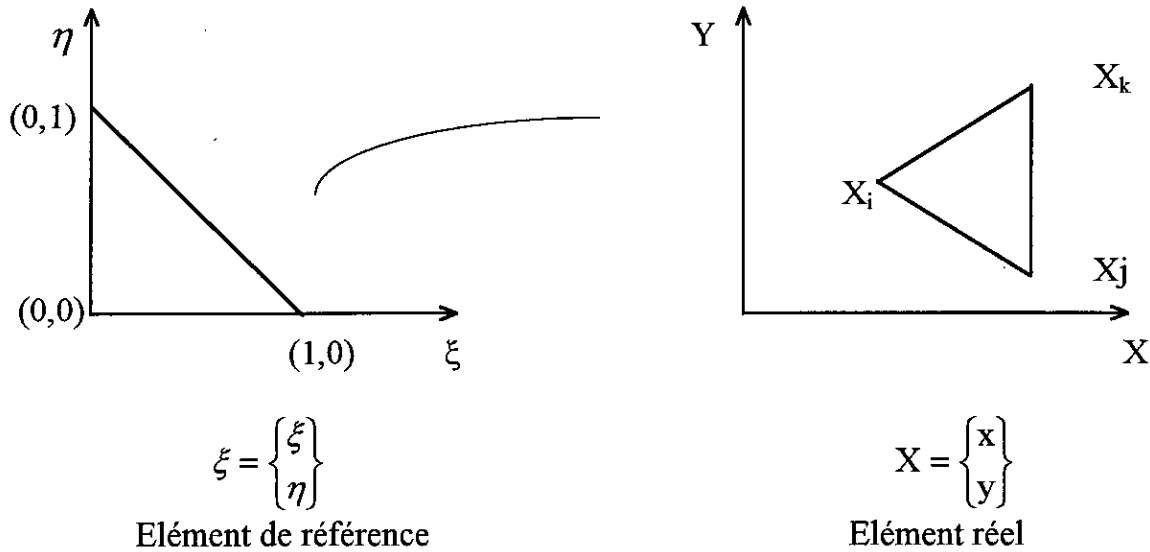


Fig. 4-2

La relation entre coordonnées intrinsèques (élément de référence) et physique (élément réel) pour un cas bidimensionnel s'écrit:

$$\begin{aligned} X(\xi, \eta) &= [\bar{N}(\xi, \eta)]\{X\} \\ Y(\xi, \eta) &= [\bar{N}(\xi, \eta)]\{Y\} \end{aligned} \tag{4-20}$$

avec $[\bar{N}]$ matrice d'interpolation géométrique.

Le champ de déplacement en coordonnée intrinsèque est défini par:

$$\{q(\xi, \eta)\}^e = [N(\xi, \eta)]\{q\}^e \tag{4-21}$$

4-6-2 ELEMENT ISOPARAMETRIQUE

Un élément fini est dit isoparamétrique si les fonctions de transformation géométrique \bar{N} sont identiques aux fonctions d'interpolation N . Ceci implique que les noeuds géométriques sont confondus avec les noeuds d'interpolation des déplacements [4].

Les équations du problème physique étudiées sont écrites dans le domaine réel, elles font intervenir les fonctions inconnues et leur dérivées en coordonnées réelles, or, lorsque l'élément est compliqué, on travaille sur l'élément de référence.

Toutes les expressions impliquant des dérivées en x,y sont transformées en ξ,η grâce à la matrice de transformation dite matrice Jacobienne J .

$$J = \begin{bmatrix} \partial X / \partial \xi & \partial Y / \partial \xi \\ \partial X / \partial \eta & \partial Y / \partial \eta \end{bmatrix} \tag{4-22}$$

Si la distorsion de l'élément est acceptable cette transformation est bijective ($\det J \neq 0$), on peut écrire alors:

$$ds = dx dy = \det J d\xi d\eta \tag{4-23}$$

4-7 INTEGRATION NUMERIQUE

Le calcul des éléments de la matrice de rigidité et de masses par intégration explicite est généralement difficile pour les éléments de formes complexes. Dans ce cas l'intégration numérique doit être utilisée. Parmi les méthodes d'intégration numérique les plus utilisées, on retrouve la méthode de Gauss qui peut s'appliquer comme suit:

- Intégration à une dimension:

$$I = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i F(\xi_i)$$

- Intégration à deux dimensions:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j \cdot (\xi_i, \eta_j)$$

avec:

n : Nombre de points d'intégration de Gauss.

W_i : Coefficients de pondération des points d'intégration de Gauss.

ξ_i, η_i : Coordonnées des points d'intégration de Gauss.

4-8 TECHNIQUE DE STOCKAGE

L'une des techniques de stockage des matrices symétriques et creuses probablement la plus performante est la méthode dite ligne de ciel (Sky-line) qui consiste à ronger dans un tableau à une seule dimension les termes $K(i,j)$ de la matrice K , compris entre la diagonale et les lignes de ciel de la matrice [10,11].

Ces lignes de ciel $m_j; j=1,2,\dots,n$ représentées sur la figure (4-3) sont définies comme étant les premiers termes non nuls de chaque colonne de K . Ainsi:

$$K(i,j) = 0 \quad \forall \quad i < m_j \quad j=1,2,\dots,n$$

Les différences $j - m_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ définissent les hauteurs de colonnes de K .
 Connaissant les hauteurs de colonnes, celles-ci en incluant les termes diagonaux sont successivement rangées dans le tableau A comme le montre la figure:

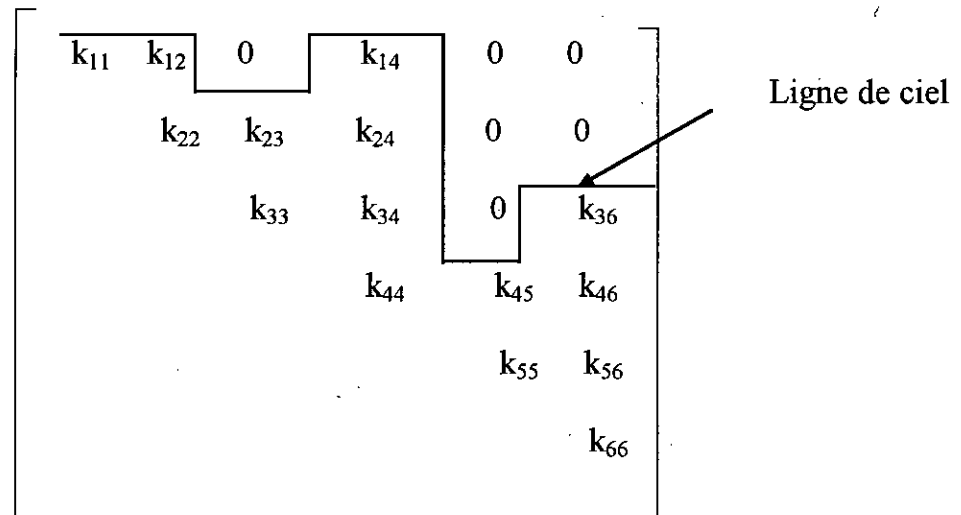


Fig. 4-3

$$K = \begin{bmatrix} A(1) & A(3) & & & & A(9) \\ & A(2) & A(5) & & & \\ & & A(4) & A(7) & & A(15) \\ & & & A(6) & A(11) & A(14) \\ & & & & A(10) & A(13) \\ & & & & & A(12) \end{bmatrix}$$

$$\text{Maxa (A)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Cette méthode nécessite en plus du tableau A un autre tableau Maxa dont les éléments diagonaux sont les entiers qui indiquent les adresses des termes diagonaux, c'est à dire l'indice de i élément diagonal de K(i,j) dans A est max. A(i).

Ayant défini le tableau Max. a, tout élément K(i,j) de K peut être représenté dans A par:

$$K(i,j) = A(\text{Maxa}(i) + j - 1)$$

Les éléments de Maxa sont reliés aux lignes de ciel par:

$$\text{Maxa}(j+1) = \text{Maxa}(j) + j - m_j + 1$$

4-9 INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'introduction des conditions aux limites aux problèmes des valeurs et vecteurs propres peut se faire comme suit:

- Soit en séparant les d.d./ indépendants, alors les matrices de rigidités et de masse deviennent sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{ll} & K_{lp} \\ K_{bl} & K_{bb} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{ll} & M_{lb} \\ M_{bl} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{ll} \\ \phi_{bb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-24)$$

ll : indices des d.d./ libres.

bb : indices des d.d./ bloqués.

et puisque $\phi_{bb} = 0$, on ne résoud que le système réduit donné pour les d.d./ libres suivants:

$$[K_{ll}] - \omega^2 [M_{ll}] \{\phi_{ll}\} = \{0\} \quad (4-25)$$

- • Soit en introduisant un terme diagonal dominant dans la matrice de rigidité globale si on utilise l'itération inverse, ce qui induit des valeurs propres infinies en cas d.d./ bloqués pour le i^{ème} d.d./ bloqué le terme k_{ii} devient $(k_{ii} + \alpha)$ où α est un nombre très grand de l'ordre 10^{35} .

Par contre, si on utilise l'itération directe le terme diagonal dominant est introduit dans la matrice Masse.

Cette technique est équivalente à attacher à la structure un ressort de rigidité infinie aux d.d./ bloqués.

4-10 CONVERGENCE DE METHODE DES ELEMENTS FINIS

Pour obtenir une convergence monotone de la méthode des éléments finis, on doit satisfaire les propriétés suivantes:

- **Complétude:**

Un élément fini est dit complet lorsque l'approximation de la solution de l'élément permet de représenter à la limite n'importe quelle valeur de déformation, ainsi les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter les modes rigide et les états de déformation constantes.

- **Compatibilité:**

Un élément fini est compatible s'il assure la continuité des déplacements aux noeuds et à l'interface de l'élément.

Remarque:

Les éléments ne satisfaisant pas la condition de compatibilité sont dit éléments non conformes, un autre critère peut remplacer la condition de comptabilité qui assure une convergence non monotone est le patch-test.

CHAPITRE 5

RESOLUTION DES PROBLEMES

DE VALEURS ET VECTEURS PROPRES

CHAPITRE 5: METHODES DE RESOLUTION

5-1 INTRODUCTION

Dans la résolution des problèmes dynamiques par superposition modale, c'est la recherche des solutions propres qui constituent la phase de calcul la plus difficile et qui nécessite un temps machine important; généralement, on s'intéresse qu'aux premiers modes.

Le but de ce présent chapitre est de décrire quelques procédures de calcul des valeurs et vecteurs propres.

5-2 PROPRIETES FONDAMENTALES DES SYSTEMES PROPRES

Autre que les propriétés sur les valeurs et vecteurs propres que l'on a déjà vu dans le chapitre 2, il est nécessaire d'assimilés quelques autres propriétés sur les quelles toutes méthodes de résolution sont essentiellement basées.

5-2-1 QUOTIENT DE RAYLEIGH

Le quotient de Rayleigh d'un vecteur quelconque v est défini comme suit [10,11]:

$$R(v) = \frac{V^T K V}{V^T M V} \tag{5-1}$$

Si la matrice M est définie positive alors $R(v)$ a des valeurs finies telles que:

$$0 < \lambda_1 \leq f(v) \leq \lambda_n < \infty \tag{5-2}$$

De plus, lorsque v coïncide avec un des vecteurs propres, $R(v)$ coïncide avec la valeur propre correspondante.

5-2-2 DECALAGE DES VALEURS PROPRES

Le décalage est une technique qui améliore la vitesse de convergence en transformant la matrice K en [10] :

$$\bar{K} = K - \mu M \tag{5-3}$$

Où μ est la valeur du décalage.

De ce fait, on obtient:

$$\bar{K}\phi = \bar{\lambda} M\phi \quad \text{ou} \quad K\phi = (\mu + \bar{\lambda}) M\phi \tag{5-4}$$

Les vecteurs propres de ce système sont identiques à ceux du problème initial par contre les valeurs propres $\bar{\lambda}$ ont subi un décalage de μ par rapport aux valeurs propres λ du système initial.

$$\bar{\lambda} = \lambda - \mu \tag{5-5}$$

5-3 ANALYSE DE RAYLEIGH- RITZ

La technique la plus utilisée pour approcher les plus petites valeurs et vecteurs propres du problème $K\phi = \lambda M\phi$ est l'analyse de Rayleigh-Ritz.

On suppose que les matrices K et M sont toutes les deux définies positives, ce qui nous assure que les valeurs propres sont finies et positives.

On considère le principe de minimisation du quotient de Rayleigh-Ritz qui stipule que:

$$\lambda_1 = \min R(v) \tag{5-6}$$

ou le minimum est pris parmi tous les vecteurs possibles V, R(v) est le quotient de Rayleigh-Ritz.

Dans l'analyse de Rayleigh-Ritz, on considère un ensemble de vecteurs $\bar{\phi}$ qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs de Ritz $\psi_i, i= 1, \dots, q$ c'est à dire [10]:

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i \tag{5-7}$$

Où x_i sont les coordonnées de Ritz.

$\bar{\phi}$ n'est pas un vecteur arbitraire mais il appartient au sous-espace engendré par les vecteurs de Ritz qui doivent être linéairement indépendants.

Le but de l'analyse de Rayleigh-Ritz est de déterminer les vecteurs spécifiques qui, en plus de leur appartenance au sous- espace de Ritz, approchent les vecteurs recherchés de la meilleur façon. Dans ce but, on évoque le principe de minimisation du quotient de Rayleigh qui détermine dans quel sens la solution donne une bonne approche des vecteurs propres recherchés.

Le quotient de Rayleigh du vecteur $\bar{\phi}$ est [10]:

$$R(\bar{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{k}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{m}_{ij}} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \tag{5-8}$$

$$\tilde{k}_{ij} = \psi_i^T k \psi_j \quad (5-9)$$

$$\tilde{m}_{ij} = \psi_i^T m \psi_j \quad (5-10)$$

La condition de minimisation de $R(\bar{\phi})$ s'écrit:

$$\frac{\partial R(\bar{\phi})}{\partial x_i} = \frac{2\tilde{m} \sum_{j=1}^q x_j \tilde{k}_{ij} - 2\tilde{k} \sum_{j=1}^q x_j \tilde{m}_{ij}}{\tilde{m}^2} \quad (5-11)$$

En substituant $\bar{\lambda} = \tilde{k} / \tilde{m}$ cette condition s'écrit:

$$\sum_{j=i}^q (\tilde{k}_{ij} - \bar{\lambda} \tilde{m}_{ij}) x_j = 0 \quad i=1, \dots, q \quad (5-12)$$

ou sous forme matricielle:

$$\tilde{K}x = \lambda \tilde{M}x \quad (5-13)$$

où \tilde{K} et \tilde{M} sont d'ordre $q \times q$ dont les éléments sont définis en (5-9) et (5-10) respectivement.

La résolution de l'équation donne q valeurs propres qui sont des approximations aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et q vecteurs propres x_1, \dots, x_n qui sont utilisé pour calculer les vecteurs propres $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_q$ qui approche les vecteurs propres ϕ_1, \dots, ϕ_q .

$$\bar{\phi}_i = \sum_{j=1}^q x_j \psi_j \quad (5-14)$$

La caractéristique importante des valeurs propres calculées $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_q$ est quelles constituent des approximations aux bornes supérieures de celle que l'on recherche :

$$\lambda_1 \leq \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_q \leq \bar{\lambda}_q \leq \lambda_n \quad (5-15)$$

Pour calculer $\bar{\lambda}_1$, on a recherché le minimum de $R(\bar{\phi})$ que l'on peut atteindre en combinant linéairement tous les vecteurs de Ritz possibles. Pour calculer $\bar{\lambda}_2$, on opère de la même façon, c'est à dire $\bar{\lambda}_2 = \min R(\bar{\phi})$ avec en plus la condition d'orthogonalité $\bar{\phi}^T M_j = 0$.

D'une façon similaire pour obtenir $\bar{\lambda}_i$ et $\bar{\phi}_i$, on minimise $R(\bar{\phi})$ avec la condition $\bar{\phi}^T M \bar{\phi}_j = 0$ pour $j=1, \dots, i-1$.

On applique maintenant la procédure que l'on vient de déduire à l'analyse d'un problème dynamique. Les vecteurs de Ritz peuvent être calculés à partir de la solution du problème statique : $k\Psi = R$. Ou Ψ est une matrice $n \times q$ qui stocke les q vecteurs de Ritz, $\Psi = [\Psi_1, \dots, \Psi_q]$.

On projete ensuite K et M sur le sous espace de Ritz, c'est à dire:

$$\tilde{K} = \psi^T K \psi \tag{5-16}$$

$$\tilde{M} = \psi^T \tilde{M} \psi \tag{5-17}$$

On résoud après le système propre:

$$\tilde{K}X = \tilde{M}XP \tag{5-18}$$

Où P est une matrice diagonale stockant les $\bar{\lambda}_i$ et X est une matrice contenant les M -orthogonaux vecteurs x_i , $i = 1, \dots, q$. Le calcul des approximations des vecteurs propres de $K\phi = \lambda M\phi$ se fait selon:

$$\bar{\phi} = \Psi X \tag{5-19}$$

5-4 METHODE DE RESOLUTION

Avant d'entamer la présentation de quelques méthodes de résolution, il est important de rappeler que toutes les méthodes sont de nature itérative, car résoudre un problème de valeurs propres revient à calculer les racines d'un polynôme $P(\lambda)$ du même ordre que les matrices K et M .

L'expérience montre qu'il n'existe pas d'algorithme qui donne toujours une bonne solution au problème considéré. En effet un algorithme peut s'avérer performant pour un problème et tout à fait inadéquat pour un autre.

Les procédures de résolution peuvent être subdivisées en deux catégories, selon les propriétés sur lesquelles est basé l'algorithme de résolution.

- Les méthodes qui opèrent sur les vecteurs propres où la propriété de base est:

$$K \phi_i = \lambda_i M \phi_i \tag{5-20}$$

- Les méthodes de transformation qui opèrent directement sur les matrices où les propriétés de bases sont:

$$\phi^T K \phi = A \tag{5-21}$$

$$\phi^T K \phi = I \tag{5-22}$$

Où ϕ est une matrice contenant les vecteurs propres et A est une matrice diagonale contenant les vecteurs propres λ_i .

5-4-1 METHODES D'ITERATIONS VECTORIELLES

5-4-1-1 METHODE DE L'ITERATION INVERSE

Cette méthode permet de calculer la plus petite valeur propre λ_1 du système (5-20), ainsi que le vecteur propre correspondant. Il faut que K soit définie positive, sinon il est possible d'utiliser un décalage (5-3) tel que \bar{K} soit définie positive.

La procédure consiste à supposer un vecteur initial x_1 et à évaluer à chaque itération k , $k = 1, 2, \dots$

$$K\bar{x}_{k+1} = Mx_k \tag{5-23}$$

$$x_{k+1} = \frac{\bar{x}_{k+1}}{\left(x_{k+1}^T M \bar{x}_{k+1}\right)^{1/2}} \tag{5-24}$$

et en supposant que x_1 n'est pas M orthogonal à ϕ_1 , on doit avoir

$$x_{k+1} \longrightarrow \phi_1 \text{ quant } k \longrightarrow \infty$$

L'étape essentielle de l'itération inverse est la résolution de l'équation (5-23) dans laquelle on évalue un vecteur \bar{x}_{k+1} qui a une direction plus proche de celle du vecteur de l'itération précédente x_k . L'équation (5.24) assure la M -normalité de x_{k+1} c'est à dire : $x_{k+1}^T M x_{k+1} = 1$

En pratique, il est plus commode d'opérer comme suit [10] :

$$K\bar{x}_{k+1} = y_k \tag{5-25}$$

$$\bar{y}_{k+1} = M\bar{x}_{k+1} \tag{5-26}$$

$$R(\bar{x}_{k+1}) = \frac{-x_{k+1}^T y_k}{-x_{k+1}^T \bar{y}_{k+1}} \tag{5-27}$$

$$y_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1}}{\left(-x_{k+1}^T \bar{y}_{k+1}\right)^{1/2}} \tag{5-28}$$

et avec la condition $y_1^T \phi_1 \neq 0$

$$y_{k+1} \longrightarrow M\phi_1 \text{ et } R(\bar{x}_{k+1}) \longrightarrow \lambda_1 \text{ quand } k \longrightarrow \infty$$

5-4-1-2 ITERATION DIRECTE

Cette méthode est complémentaire à celle de l'itération inverse du fait qu'elle est utilisée pour calculer la plus grande valeur propre et le vecteur propre correspondant. Celle-ci consiste à appliquer la méthode d'itération inverse au système:

$$Mx = \frac{1}{\lambda} Kx = \lambda' Kx \quad (5-29)$$

Ceci exige que M soit définie positive, si elle ne l'est pas, on peut utiliser un décalage tel que \bar{M} soit définie positive, ici $\lambda' = 1/\lambda$.

5-4-1-3 RECHERCHE D'UNE VALEUR PROPRE INTERMEDIAIRE

Des valeurs propres intermédiaires λ_p comprises entre λ_1 et λ_n peuvent être obtenues par itération inverse, à condition d'utiliser un décalage $a \simeq \lambda_p$. Par contre, il est parfois difficile de prévoir le numéro p de la valeur propre vers laquelle nous conduira un décalage a donné, c'est pour cette raison qu'une technique d'orthogonalisation lui est supplée.

Dans un cas général, supposons que m vecteurs propres sont connus et que l'on s'intéresse au calcul de ϕ_{m+1} . Pour cela on considère un vecteur \tilde{x}_1 qui soit M-orthogonal aux vecteurs propres $\phi_i, i=1, \dots, m$.

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \sum_{i=1}^m x_i \phi_i \quad (5-30)$$

Où les x_i sont obtenus en utilisant les relations : $\phi_i^T M \tilde{x}_1 = 0 \quad i=1, \dots, m$ et $\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij}$

En multipliant par $\phi_i^T M$ on obtient :

$$x_i = \phi_i^T M x_1 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (5-31)$$

L'itération inverse est alors exécutée en prenant \tilde{x}_1 comme vecteur initial à la place de x_1 et en supposant que $\tilde{x}_1^T M \phi_{m+1} \neq 0$, l'algorithme converge vers le couple $(\lambda_{m+1}, \phi_{m+1})$.

On remarque enfin, que cette technique d'orthogonalisation exige une grande précision numérique dans le calcul de λ_i et ϕ_i .

5-4-1-5 CONVERGENCE

L'équation fondamentale de l'itération inverse en ne tenant pas compte de la normalisation est [10] :

$$Kx_{k+1} = M_{xk} \quad (5-32)$$

Pour établir la convergence du processus, il est plus commode d'effectuer un changement de base en écrivant l'équation (5-32) dans la base formée par les vecteurs propres. En conséquence, on peut écrire pour un vecteur x_k :

$$x_k = \phi Z_k \tag{5-33}$$

où ϕ est la matrice modale $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$

En substituant (5-33) dans (5-32) on obtient :

$$k \phi Z_{k+1} = M \phi Z_k \tag{5-34}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (5-34) à gauche par ϕ^T et en utilisant les relations d'orthogonalité $\phi^T k \phi = A$ et $\phi^T M \phi = I$, on obtient:

$$AZ_{k+1} = Z_k \tag{5-35}$$

En comparant (5-32) et (5-35), on voit que les itérations sont de la même forme, avec $K = A$ et $M = I$ sauf qu'il est plus facile de rechercher les propriétés de convergence du système de l'équation (5-35) puisque les valeurs propres sont les éléments diagonaux de la matrice A et les vecteurs propres sont des vecteurs unitaires e_i avec:

$$e_i^T = [0 \dots 1 \dots 0] \tag{5-36}$$

\uparrow
*i*ème composante

Dans la présentation de l'algorithme de l'itération inverse, il était supposé que le vecteur x_1 n'est pas M-orthogonal à ϕ_1 . De même Z ne doit pas être M-orthogonal à e_1 .

On suppose:

$$Z_i^T = [1, \dots, 1] \tag{5-37}$$

En utilisant (5-35) pour $k = 1, \dots, l$, on obtient :

$$Z_{l+1}^T = [1/\lambda_1^l, \dots, 1/\lambda_n^l] \tag{5-38}$$

et en multipliant Z_{l+1}^T par λ_1^l

$$\bar{Z}_{l+1}^T = [\lambda_1(\lambda_1/\lambda_2)^l \dots (\lambda_1/\lambda_n)^l] \tag{5-39}$$

On remarque que si λ est la plus petite valeur alors:

$$\bar{Z}_{l+1} \longrightarrow e_1 \text{ quand } l \longrightarrow \infty$$

L'ordre et la vitesse de la convergence est:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|\bar{Z}_{l+1} - e_1|}{|\bar{Z}_p - e_1|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (5-40)$$

De là, on voit que la convergence se fait linéairement avec une vitesse égale à λ_1/λ_2 .

Cette vitesse de convergence est montrée dans le vecteur itératif \tilde{Z}_{l+1} comme tant sa plus grande composante qui doit s'annuler.

On obtient aussi une approximation de la valeur propre λ_1 donnée par le quotient de Rayleigh :

$$R(Z_{k+1}) = \frac{Z_{k+1}^T Z_k}{Z_{k+1}^T Z_{k+1}} \quad (5-41)$$

En considérant la dernière itération pour laquelle $k = l$:

$$R(Z_{k+1}) = \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^n (\lambda_1 / \lambda_i)^{2l-1}}{\sum_{i=1}^n (\lambda_1 / \lambda_i)^{2l}} \quad (5-42)$$

$$\text{et } \lim_{l \rightarrow \infty} R(Z_{k+1}) = \lambda_1$$

La convergence est également linéaire mais avec une vitesse $(\lambda_1/\lambda_2)^2$.

5-4-2 METHODE DE TRANSFORMATION: METHODE DE JACOBI

La méthode de Jacobi a été développée pour résoudre le problème standard $K\phi = \lambda\phi$ ($M=I$), néanmoins cette méthode s'applique au problème général $K\phi = \lambda M\phi$ ($K \neq I$).

Elle consiste à transformer les matrices K et M en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives:

ainsi, si $K_1 = K$ et $M_1 = M$ alors:

$$K_{k+1} = P_k^T K_k P_k \quad (5-44)$$

$$M_{k+1} = P_k^T M_k P_k \quad (5-45)$$

On doit donc avoir: $K_{k+1} \longrightarrow A$ et $M_k \longrightarrow I$ quand $k \longrightarrow \infty$

En pratique, il n'est pas nécessaire que M_{k+1} converge vers I ni K_{k+1} vers A mais on a seulement besoin que ces deux matrices tendent vers une forme diagonale, c'est à dire:

$$K_{k+1} \longrightarrow \text{diag}(K_r) \text{ et } M_{k+1} \longrightarrow \text{diag}(K_r) \text{ quand } k \longrightarrow \infty$$

et en désignant par l la dernière itération:

$$A = \text{diag} \left(\frac{K_r^{(l+1)}}{M_r^{(l+1)}} \right) \tag{5-44}$$

et

$$\phi = P_1 P_2 \dots P_p \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_r^{l+1}}} \right) \tag{5-47}$$

Chaque matrice P_k est choisie de façon à annuler un terme (i,j) non diagonal et non nul des matrices K_k et M_k .

La matrice P_k a la forme:

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & a & \\ & b & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots \longrightarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \downarrow j^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{matrix} \tag{5-48}$$

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que $K_{ij}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0$ soit, en supprimant par simplicité l'indice k+1:

$$aK_{ii} + (1+ab) K_{ij} + bK_{jj} = 0 \tag{5-49}$$

$$aM_{ii} + (1+ab) M_{ij} + bM_{jj} = 0 \tag{5-50}$$

et

$$a = \frac{C_2}{x} \quad b = -\frac{C_1}{x} \tag{5-51}$$

où

$$C_1 = K_{ij}M_{ij} - M_{ii}K_{ij} \tag{5-52}$$

$$C_2 = K_{jj}M_{ij} - M_{jj}K_{ij} \tag{5-53}$$

$$C_3 = K_{ii}M_{ij} - M_{ii}K_{jj} \tag{5-54}$$

et

$$x = \frac{C_3}{2} + \text{signe}(C_3) \sqrt{\left(\frac{C_3}{2}\right)^2 + C_1 C_2} \tag{5-55}$$

5-5 RESOLUTION DES PROBLEMES A MATRICES LARGES: METHODE DU SOUS-ESPACE

Cette méthode est très largement utilisée pour calculer les p premières valeurs propres d'un système de grande dimension. Elle consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de Ritz en améliorant les vecteurs de Ritz par itération inverse.

La méthode de Ritz force les vecteurs x_i à rester orthogonaux entre eux, alors que l'itération inverse ajuste la base vectorielle de Ritz, de manière à assurer la convergence vers les vecteurs propres correspondant aux plus petites valeurs propres.

La méthode du sous-espace enchaîne les opérations suivantes [10]:

a) Choisir p vecteurs initiaux rangés dans la matrice X_1 .

b) Exécuter une itération inverse pour calculer simultanément les p vecteurs de Ritz q_i en résolvant :

$$Kq_i = MX_i \quad i= 1, \dots, p \quad (5-56)$$

ou
$$K\varphi = MX_1 \quad (5-57)$$

c) Appliquer la méthode Ritz pour chercher les vecteurs propres dans le sous-espace de Ritz et résoudre le problème réduit:

$$\bar{K}\psi = \bar{M}\psi A \quad (5-58)$$

où
$$\bar{K} = \varphi^T K \varphi \quad (5-59)$$

$$\bar{M} = \varphi^T M \varphi \quad (5-60)$$

d) Tester la convergence de λ_i et répéter si nécessaire les opérations b,c,d .

N'importe quelle procédure peut être appliquée pour résoudre le problème de l'équation (5-58), mais tenant compte du fait que ces matrices tendent de plus en plus vers des matrices diagonales d'une itération à l'autre, la méthode de Jacobi est la méthode qui s'adapte le mieux.

Enfin, on calcule les nouveaux vecteurs normalisés et orthogonalisés par:

$$X_2 = \varphi\psi \quad (5-61)$$

En pratique, on utilise l'algorithme de la méthode de sous-espace suivant:

$$K\bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (5-62)$$

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Y_k \quad (5-63)$$

$$\bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1} \quad (5-64)$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1} \quad (5-65)$$

$$K_{k+1} \phi_{k+1} = M_{k+1} \phi_{k+1} A_{k+1} \quad (5-66)$$

$$Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} \phi_{k+1} \quad (5-67)$$

Avec la condition que les vecteurs dans X_1 ne sont orthogonaux à aucun des vecteurs propres recherchés, on a:

$$A_{k+1} \rightarrow A \quad \text{et} \quad \bar{X}_{k+1} \phi_{k+1} \rightarrow \phi \quad \text{quand} \quad k \rightarrow \infty$$

CHAPITRE 6

ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES

DES PLAQUES RAIDIES

PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

CHAPITRE 6 : ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES DES PLAQUES RAIDIES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

6-1 INTRODUCTION

La modélisation d'une structure consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des matériaux, c'est à cette étape que s'opère l'option fondamentale du choix de la théorie d'une part et des équations constitutives décrivant le matériau d'autre part.

Les plaques nervurées excentrées sont rencontrées souvent dans les structures, tant dans le domaine aéronautique ou naval que dans les constructions du génie civil.

Vu la complexité de la géométrie de telles structures et pour les quelles les solutions analytiques se font rares, la méthode des éléments finis s'impose comme étant un outil très puissant qui permet d'approcher d'une excellente manière le comportement réel de ces structures.

Dans ce contexte, plusieurs formulations ont été développées par de nombreux auteurs, [15,16,17] cependant et dans notre présente étude, on s'intéressera particulièrement à deux approches principales qui semblent être les mieux adaptées au calcul de ce genre de structures.

La première approche consiste à considérer la plaque raidie comme étant un assemblage plaque-poutre [15,16,17]; la deuxième approche plus restrictive, consiste, à assimiler la plaque raidie à une plaque orthotrope d'une épaisseur uniforme [15].

Il est à noter aussi, l'existence d'une approche qui consiste à analyser les plaques nervurées par les éléments finis coques, mais elle est abandonnée en dépend des autres vu qu'elle exige un temps machine et une place mémoire très important en modélisant la plaque et la nervure par élément finis coque.

Cependant, avant d'entamer d'analyse des plaques raidies et du fait que celles-ci sont composées élémentairement d'une plaque et d'un ensemble de poutres, il est capital de formuler les deux éléments s'eparement, cela constituera l'objet des premiers paragraphes de ce chapitres.

6-2 ELEMENTS FINIS PLAQUES

Les éléments de plaque en flexion de type déplacement peuvent être classés en deux catégories [9] :

- Eléments basés sur la théorie de Kirchoff (sans effet de cisaillement transverse).

- Eléments basés sur la théorie de Hencky-Mindlin (avec effet de cisaillement transverse).

6-2-1 ELEMENTS BASES SUR LES HYPOTHESES DE KIRCHOFF

Les éléments basés sur la théorie de Kirchoff sont en principe les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces, leur formulation ne nécessite que l'approximation de la composante transverse du déplacement w , cependant on remarque que les dérivées secondes des déplacements interviennent dans l'expression de l'énergie de déformation.

La condition de compatibilité inter-éléments correspond à la continuité C1 du déplacement transverse, c'est à dire à la continuité de w et de la pente normale. Cette condition ne peut généralement être satisfaite et c'est ce qui rend de tels éléments non conformes.

6-2-2 ELEMENT BASE SUR LA THEORIE DE HENCKY-MINDLIN (Plaque épaisse)

Les éléments de plaque d'épaisseur modérée sont basés sur la théorie de Hencky-Mindlin qui tient compte des légères déformations dues aux efforts tranchants, la normale tourne donc d'un angle différent et indépendant de la pente, et c'est là que réside tout l'avantage : on peut définir les rotations indépendamment des translations ce qui fait disparaître tous les problèmes de conformité aux interfaces, du moment que cette conformité ne requiert que la continuité C^0 de w , θ_x et θ_y .

Dans ces éléments les modes rigides sont toujours satisfaits, et la convergence vers la solution exacte des plaques d'épaisseur modérée est sur, pour cela il sont les plus intéressants pour le calcul pratique, le fait qu'il tiennent compte de l'effort tranchant est d'ailleurs une qualité de plus, puisque cet effort existe réellement.

6-2-3 CHOIX DE L'ELEMENT DE PLAQUE

Pour formuler les éléments de plaque, on utilisera les éléments isoparamétriques à huit noeuds qui par excellence s'adaptent parfaitement aux hypothèses de la théorie de Mindlin, cela est dû principalement aux nombreuses qualités qu'ils présentent:

- Ils sont isoparamétriques, donc les mêmes fonctions de forme qui sont utilisées pour interpoler la géométrie et les déplacements.
- Leurs interfaces contiennent trois noeuds de ce fait il peuvent simuler aussi bien les frontières courbe que droites.
- Du fait que la convergence est fonction de la taille des éléments et du degré du polynôme choisi, pour une même taille d'éléments il est préférable d'adopter un

champ de déplacement quadratique (ce qui est du ressort de l'élément isoparamétrique) qu'un champ de déplacements linéaires (élément à quatre nœuds).

- Pour ces éléments, les termes de rigidités sont intégrés numériquement.

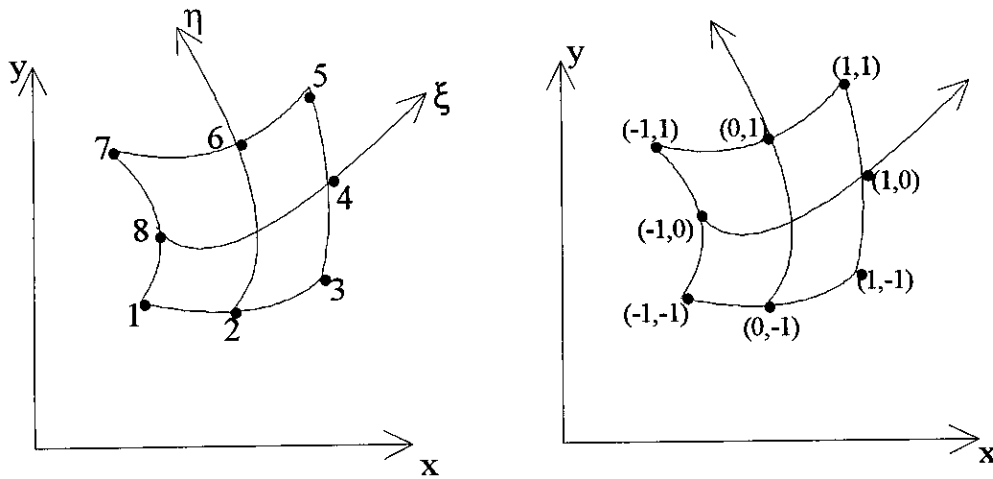


Fig. 6-1. Élément bidimensionnel quadratique à huit nœuds de la famille SERENDIP

Pour cet élément, les fonctions de forme sont:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad i=1,3,5,7 \quad (6-1)$$

$$N_i = \frac{1}{2}\xi_i^2(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i^2(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \quad i=2,4,6,8$$

6-2-4 EQUATIONS CONSTITUTIVES

6-2-4-1 EVALUATION DE MATRICE RIGIDITE ELEMENTAIRE

Nous avons vu précédemment au chapitre trois, dans l'une des hypothèses que la construction et les matériaux de la plaque sont tels que des phénomènes de membrane et de flexion sont découplés, mais cela ne reste vrai que dans les plaques isotropes, dans le cas général ces deux phénomènes peuvent être couplés au niveau des équations constitutives, c'est le cas d'ailleurs des plaques à raidissage continue excentré.

L'énergie de déformation d'un élément de plaque est donnée par:

$$U_p = \frac{1}{2} \int \{\epsilon_p\}^T \cdot \{\sigma_p\} dA \quad (6-2)$$

Les déplacements généraux sont liés aux déplacements nodaux par la relation:

$$\{q_p\} = [N]\{q_n\}^e \quad (6-3)$$

[N]: étant la matrice des fonctions de formes données par (6-1).

L'élément étant isoparamétrique, sa géométrie est définie par les mêmes fonctions d'interpolation.

$$X = \sum_{i=1}^8 N_i X_i \tag{6-4}$$

$$Y = \sum_{i=1}^8 N_i Y_i$$

$$\{q_p\}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad i=1,8 \quad \text{définit les déplacement nodaux}$$

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \quad i=1,8 \quad \text{coordonnées nodaales}$$

La relation générale liant les déformations aux déplacements pour l'élément de plaque est donnée par $\{\epsilon_p\} = [B_p] \{q_p\}^e$.

Où $[B_p]$ est la matrice d'interpolation des déformations qui contient les dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées (x,y).

Dans le cas des éléments isoparamétriques, les fonctions N_i sont exprimées en fonction des coordonnées locales (ξ, η), on devra donc évaluer la matrice Jacobienne.

En utilisant la relation (6-4), alors la matrice Jacobienne de (4-22) devient

$$J = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} Y_i \end{bmatrix} \tag{6-5}$$

Si la matrice J est non singulière, alors:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{6-6}$$

Les déformations de l'élément de plaque sont définies par:

$$\{\epsilon_p\} = \begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y & 0 & 0 & 0 \\ -\partial/\partial Y & -\partial/\partial X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial/\partial X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial/\partial Y \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial Y & \partial/\partial X \\ 0 & 0 & \partial/\partial X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial/\partial Y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6-7)$$

d'où

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial Y & 0 & 0 & 0 \\ -\partial N_i/\partial Y & -\partial N_i/\partial X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial N_i/\partial X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial N_i/\partial Y \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial Y & \partial N_i/\partial X \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial X & N_i & 0 \\ 0 & 0 & -\partial/\partial Y & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

La matrice élastique (8×8) E_p contient les contributions de l'effet membranaire et flexionnel, les termes non-nuls sont:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{E h}{1-\nu^2} = E_{22} & ; & & E_{12} = \nu \cdot E_{11} = E_{21} & ; & & E_{33} = Gh \\ E_{44} &= \frac{h^2}{12} E_{11} = E_{55} & ; & & E_{45} = \frac{h^2}{12} E_{12} = E_{54} & & & (6-9) \\ E_{66} &= \frac{1-\nu}{2} \cdot E_{44} & ; & & E_{77} = \frac{Gh}{k} = E_{88} \end{aligned}$$

La matrice de rigidité élémentaire, comme on la vu au chapitre 4 et en utilisant le Jacobien, est donnée par:

$$K_p^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_p]^T [E_p] \det J \cdot h \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (6-10)$$

Cette matrice sera calculée par intégration numérique.

6-2-4-2 EVALUATION DE LA MATRICE MASSE ELEMENTAIRE

Comme on l'a déjà exposé dans le chapitre 4, il existe trois modèles de masses qu'on va évaluer.

a- Matrice masse cohérente:

L'énergie cinétique pour un élément de plaque en tenant compte des inerties de rotations peut être écrit par:

$$T^e = \int_{V^e} \{\dot{q}\}^{eT} m_p \{\dot{q}\} dv \tag{6-11}$$

où m_p est une matrice qui fait intervenir les translations et les rotations considérées:

$$m_p = \rho \begin{bmatrix} h & & & & & \\ & h & & & & \\ & & h & & & \\ & & & \frac{h^3}{12} & & \\ & & & & \frac{h^3}{12} & \\ & & & & & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix}$$

ρ : désigne la densité.

Si la fonction d'interpolation utilisée pour décrire la variation du champ accélération à travers l'élément est la même que celle utilisée pour décrire le déplacement alors, la matrice masse est appelée matrice cohérente, elle est déterminée par:

$$M^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T m_p N \det J. d\xi. d\eta$$

b- Matrice diagonale à coefficient égaux

La masse de l'élément est équitablement répartie sur ses noeuds où les inerties de rotation sont ignorés.

Le terme diagonal de la matrice masse associé au déplacement U, V, W du noeud i est donné par:

$$m_{ii} = \frac{1}{8} \int_s \rho h ds \tag{6-13}$$

c- Matrice masse diagonale à coefficients variables

Pour cette matrice développer par Hinton et Al [12] ou encore les inerties de rotation sont négligées, les termes diagonaux sont:

$$m_{ii} = \frac{\int \rho h N_i N_i ds. \int \rho h ds}{\sum_{i=1}^8 \int \rho h N_i N_i ds} \tag{6-14}$$

6-3 ELEMENT FINIS POUTRE

Pour modéliser les raidisseurs passant soit aux interfaces où carrément à l'intérieur des éléments de plaques, on utilisera les éléments unidimensionnels de poutres, qui comme dans le cas des plaques peuvent être formulés selon deux théories distinctes, la première est celle des poutres minces pour les quelles l'énergie de cisaillement est négligée, la deuxième celle des poutres d'épaisseur plus ou moins modérée et dont l'énergie de cisaillement ne peut être négligée du fait qu'elle est presque du même ordre que l'énergie de flexion

6-3-1 CHOIX DE L'ELEMENT DE POUTRE

On choisit l'élément de poutre isoparamétrique à trois (03) noeuds qui s'adapte aussi bien aux éléments de poutres épaisses que minces et qui a les mêmes avantages que ceux du type Serendip cités auparavant.

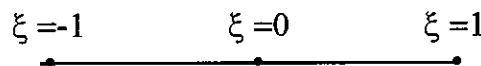


Fig. (6-2) : Élément unidimensionnel quadratique à trois noeuds

Les fonctions d'interpolation associées à chaque noeud sont:

$$\begin{aligned}
 N_i &= \xi \xi_i (1 + \xi \xi_i) / 2 & i &= 1, 3 \\
 N_i &= (1 - \xi^2) & i &= 2
 \end{aligned}
 \tag{6-15}$$

6-4 INTEGRATION NUMERIQUE REDUITE

Le traitement conventionnelles plaques minces basé sur les hypothèses de Kirchoff définit les déplacements généraux en fonction du déplacement latéral de la surface moyenne, cependant de grandes difficultés apparaissent quant à la satisfaction de la continuité des pentes aux interfaces et l'inhabilité de telles formulations à prendre en compte le cisaillement transverse.

Pour contrecarrer de tels obstacles, on abandonne l'hypothèse des sections normales, en prescrivant indépendamment les déplacements de la surface moyenne et les rotations de la normale, mais il a été découvert que l'application de tels éléments pour les plaques minces n'est pas du tout satisfaisant du fait qu'il y'a surestimation de la rigidité due aux contributions du cisaillement; mais par suite on a découvert que leurs qualités de convergence s'améliorait considérablement lorsque, au cours du calcul de leur matrice de rigidité par intégration numérique on choisissait l'ordre intégration juste inférieur à celui strictement nécessaire pour l'intégrer exactement.

Cette technique dite " intégration réduite " s'avère particulièrement favorable aux éléments de degré plus élevé (linéaire, parabolique, cubique); physiquement elle réduit considérablement la rigidité parasite due à la prise en compte du cisaillement transverse, connu sous le nom de verrouillage ou " Locking ".

Ainsi, dans la suite les matrices de rigidité et de masse sont évaluées utilisant une interrogation numérique sur 2×2 de points au lieu de 3×3 , [18] pour les raidisseurs on utilise une intégration sur deux points de points au lieu de trois.

6-5 ANALYSE DES PLAQUES RAIDIES PAR LA MEF

L'analyse des plaques raidies par éléments finis peut se formuler selon deux approches différentes:

- L'approche qui considère la plaque raidie comme étant l'assemblage d'une plaque et des nervures excentrées [15, 16, 17].
- L'approche orthotrope [15].

Cependant, pour toutes les approches, on admettra les hypothèses suivantes:

- 1- On adopte la théorie de Mindlin, le cisaillement transversal est pris en compte et il est le même pour la plaque et pour les raidisseurs au niveau de la jonction plaque - poutre.
- 2- Les raidisseurs sont supposés symétriques par rapport à un plan vertical passant par leur centre de gravité.
- 3- La flexion des raidisseurs, dans le plan parallèle au plan de la plaque est négligée.
- 4- Les gradients des déformations sont supposés petits permettant ainsi une analyse élastique et linéaire.

6-5-1 ANALYSE DES PLAQUES RAIDIES PAR POUTRES EXCENTREES

L'analyse de ce type de structure est complexe et difficile; c'est pourquoi on adopte un modèle plus réaliste qui consiste à subdiviser le système en leur composants élémentaires dont le comportement peut être facilement compris, ainsi l'analyse des plaques raidies peut être approchée par l'assemblage des deux comportements respectifs des plaques et des poutres en introduisant l'influence mutuelle entre les deux composants.

Dans cette approche, deux formulations indiquées FEM(M1) et FEM(M2) [15] sont discutées, dans la formulation FEM(M1) les raidisseurs sont modélisés en poutres et sont placés le long des frontières inter-éléments, dans FEM(M2), les raidisseurs modélisés aussi en poutres sont placés à l'intérieur des éléments sans pour autant perturber le maillage général de la structure.

6-5-1-1 FORMULATION FEM(M1)

Dans cette formulation, on va voir comment obtenir les matrices de masses et rigidité pour les deux éléments poutres et plaques assemblés.

L'assemblage consiste à additionner les rigidités et les masses équivalentes des poutres aux degrés de liberté communs avec ceux de la plaque.

Les déplacements du raidisseur peuvent être décrits par un vecteur de composants:

$$\{q_R\} = \{u_R, w_R, \theta_{XR}, \theta_{YR}\} \quad (6-16)$$

En adoptant la même démarche que celle utilisée pour instaurer la formulation d'un élément plaque sauf qu'ici on est dans un cas unidimensionnel.

Les déplacements généraux sont liés aux déplacements nodaux par la relation :

$$\{q_R\} = [N]\{q_R\}^e \quad (6-17)$$

avec: N : matrice de fonction d'interpolation de l'élément poutre
 $\{q_R\}^e$: déplacement nodaux du raidisseur.

L'élément isoparamétrique interpole la géométrie et les déplacements par les mêmes fonctions de forme, pour cela on a :

$$x(\xi) = x_1 N_1(\xi) + x_2 N_2(\xi) + x_3 N_3(\xi) \quad (6-18)$$

Les déformations sont liées aux déplacements par la relation :

$$\{\epsilon_R\} = [B_R]\{q_R\}^e \quad (6-12)$$

Le Jacobien est donné par l'expression suivante :

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (6-20)$$

Si le noeud intermédiaire est positionné au milieu de l'élément, le Jacobien aura pour valeur:

$$J = \frac{x_3 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (6-21)$$

Où L : longueur de l'élément .

Les déformations sont définies en termes de déplacements nodaux et les dérivées de fonctions d'interpolation par l'expression :

$$\{\epsilon_R\} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial \theta_x / \partial x \\ \partial \theta_y / \partial x \\ \theta_x - \partial w / \partial x \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i / \partial x \\ 0 & -\partial N_i / \partial x & N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 [B_R]_i q_R \}^e \quad (6-22)$$

Les contraintes sont liées aux déformations par:

$$\{\sigma_R\} = [E_R] \{\epsilon_R\} \quad (6-23)$$

Les composantes non nulles de la matrice élastique $[E_R]$, sont données ci-dessous:

$$\begin{aligned} E_{11} &= E_x A_x & ; & & E_{33} &= G_x J_{Rx} \\ E_{22} &= E_x I_{Rx} & ; & & E_{44} &= K_x G_x A_x \end{aligned} \quad (6-24)$$

E_x : Module de Young.

G_x : Module de cisaillement transversal.

I_{Rx} : Inertie à la flexion du raidisseur.

J_{Rx} : Inertie polaire (rigidité à la torsion)

K_p : Coefficient d'uniformisation de la répartition des contraintes de cisaillement transverse.

L'énergie de déformation d'un élément de poutre est donnée par:

$$U_R = \frac{1}{2} \int EA (\partial u / \partial x)^2 dx + \frac{1}{2} \int EI (\partial w / \partial x)^2 dx + \frac{1}{2} \int GA (\theta_x - \partial w / \partial x)^2 dx + \frac{1}{2} \int GJ (\partial \theta_y / \partial x)^2 dx \quad (6-25)$$

La relation suivante définit la transformation des degrés de liberté du raidisseur aux degrés de liberté de la plaque:

$$\{q_{Rx}^e\} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i = T_{Rx} q_P^e \quad (6-26)$$

e_x : Excentricité du centre de gravité des raidisseurs par rapport à celui de la plaque .

De là, on peut définir les matrices élémentaires de rigidités.

$$[K_{Rx}]^e = T_{Rx}^T \left[\int B_{Rx}^T E_{Rx} B_{Rx} dx \right] T_{Rx} \quad (6-27)$$

et par analogie:

$$[K_{Ry}]^e = T_{Ry}^T \left[\int B_{Ry}^T E_{Ry} B_{Ry} d_y \right] T_{Ry} \quad (6-28)$$

• **Matrice masse cohérente:**

L'énergie cinétique d'un élément de poutre peut être écrit comme suit:

$$T_{Rx} = \frac{1}{2} \int \dot{q}_{Rx}^T m_{Rx} \dot{q}_{Rx} dx \quad (6-29)$$

Avec:

$$m_{Rx} = \rho_{Rx} \begin{bmatrix} A_{Rx} & & & 0 \\ & A_{Rx} & & \\ & & J_{Rx} & \\ 0 & & & I_{Rx} \end{bmatrix} \quad (6-30)$$

En utilisant les mêmes fonctions de formes N_{Rx} et en appliquant la transformation (6-26) on peut définir alors la matrice cohérente par:

$$M_{Rx}^e = \int_{-1}^1 T_{Rx}^T \cdot m_{Rx} \cdot N_{Rx} \cdot T_{Rx} \det J \cdot d\xi \quad (6-31)$$

• **Matrice masse diagonale à coefficients variables:**

Les termes diagonaux de la matrice masse sont:

$$m_{ij} = \frac{\int_{-1}^1 \rho_{Rx} A_{Rx} N_i N_j \det J \cdot d\xi \cdot \int_{-1}^1 \rho_{Rx} A_{Rx} \det J \cdot d\xi}{\int \sum_{i=1}^3 \rho_{Rx} A_{Rx} N_i N_i \det J \cdot d\xi} \quad (6-32)$$

6-5-1-2 FORMULATION FEM(M2):

Dans cette formulation de champ des déplacements le long de la nervure est pris comme une " extrapolation " du champ de la plaque, de sorte que la conduite des déplacements est assurée tout le long du contrat plaque-nervure, l'extrapolation de ce champ linéaire assure automatiquement la satisfaction de l'hypothèse " les sections planes avant déformation restent planes après ".

Par contre la rotation de section de la nervure travaille selon le modèle poutre avec effet du cisaillement.

Les déplacement du raidisseur peut être décrit par:

$$q_{Rx} = \begin{Bmatrix} u_{Rx} \\ w_{Rx} \\ \theta_{x,Rx} \\ \theta_{y,Rx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u - Z\theta_x \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6-33)$$

Ce champ de déplacement donne les composantes de déformation suivantes:

$$\varepsilon_{Rx} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - Z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6-34)$$

d'où l'énergie de déformation du raidisseur est obtenue par:

$$U_{Rx} = \frac{1}{2} \int \left[GA \left(\theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + GJ \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - Z_0 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (6-35)$$

Par conséquent les composantes de déformation généralisés du raidisseur sont:

$$\varepsilon_{Rx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -Z_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6-36)$$

d'où

$$B_{Rx} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -Z_0 \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6-37)$$

De ce fait, la matrice de rigidité pour un raidisseur dans la direction x est donnée par:

$$K_{Rx}^e = \int_{-1}^1 B_{Rx} E_{Rx} B_{Rx} \det J. d\xi \tag{6-37}$$

et par analogie, on obtient la matrice de rigidité par un raidisseur dans la direction y par:

$$K_{Ry}^e = \int_{-1}^1 B_{Ry} E_{Ry} B_{Ry} \det J. d\xi \tag{6-38}$$

Les intégrales (6-37) et (6-36) seront évaluées numériquement en utilisant deux points de Gauss.

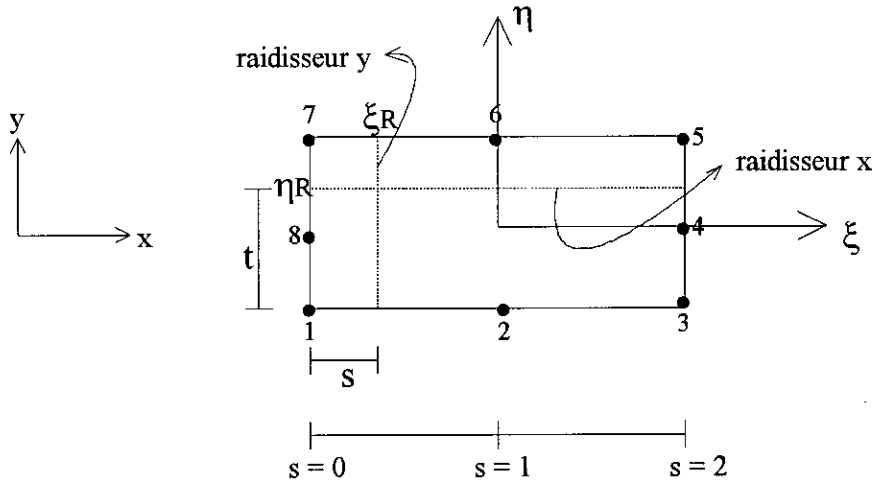


Fig. (6-3): Emplacement des raidisseurs à l'intérieur de l'élément

$$\xi = \begin{cases} s-1 & \text{si } s < 1 \text{ ou } s > 1 \\ 0 & \text{si } s = 1 \end{cases} \tag{6-39}$$

avec

$$s = \frac{2 \cdot X_R - X_1}{X_3 - X_1} \tag{6-40}$$

X_R : coordonnée du raidisseur R_y dans le repère xy .

X_3, X_1 : coordonnées des noeuds 1 et 3.

$$\eta = \begin{cases} t-1 & \text{si } t < 1 \text{ ou } t > 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases} \tag{6-41}$$

$$t = \frac{2 \cdot y_R - y_3}{y_5 - y_3} \tag{6-42}$$

• **Matrice masse cohérente:**

$$M_{Rx}^e = \int_{-1}^1 N^T m_{Rx} N \det J. d\xi \tag{6-43}$$

avec:

$$B_{Rx} = \rho_{Rx} A_{Rx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & e_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_x & 0 & e_x^2 + J_{Rx}/A_{Rx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{Rx}/A_{Rx} \end{bmatrix} \tag{6-44}$$

• **Matrice masse diagonale à coefficients variables:**

Le terme diagonal de la matrice masse associé aux déplacements u, v, w du noeud i est:

$$m_{ii} = \frac{\int_{-1}^1 \rho_{Rx} A_{Rx} N_i N_i \det J. d\xi \int_{-1}^1 \rho_{Rx} A_{Rx} \det J. d\xi}{\int \sum_{i=1}^8 \rho_{Rx} A_{Rx} N_i N_i \det J. d\xi} \tag{6-45}$$

6-4-2 ANALYSE DES PLAQUES RAIDIES PAR ASSIMILATION A DES PLAQUES ORTHOTROPES

La méthode qu'on va adopter dans cette étude est une méthode qui consiste à remplacer une plaque réelle par une plaque de géométrie homogène avec une orthotropie fictive présentant les mêmes rigidités moyennes de flexion et de torsion.

Cette méthode étale continûment les rigidités des nervures sur une largeur égale à leur entracte et ignore de ce fait les efforts concentrés dans les nervures.

Dans cette approche et en plus des hypothèses adoptées précédemment, on ajoute celle-ci:

- Les raidisseurs sont parallèles aux cotés de la plaque et sont également et étroitement espacés.
- Les raidisseurs doivent être à section ouverte, ainsi ils contribuent sans signification à la rigidité et à la torsion de la plaque.

6-4-2-1 MATRICE DE RIGIDITE DE LA PLAQUE ORTHOTROPE

Le champ de déplacement de n'importe quel point du plan est:

$$q = \{ u, v, w, \theta_x, \theta_y \}^T \tag{6-46}$$

On a donc:
$$\begin{aligned} U &= u - Z\theta_x \\ V &= v - Z\theta_y \\ W &= w \end{aligned} \tag{6-47}$$

Comme dans le cas isotrope l'energie de deformation est:

$$U_{p0} = \frac{1}{2} \int_s \varepsilon_0^T E_m \varepsilon_0 ds + \frac{1}{2} \int_s K^T E_f k ds + \frac{1}{2} \int_s \gamma^T E_c \gamma ds \tag{6-48}$$

Les composantes du vecteur deformation sont donc:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-T} &= \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right\} \tag{6-49} \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right), \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right], \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right), \left(-\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \right\} \end{aligned}$$

Les relations générales contraintes - déformations peuvent être dérivées en étalant continûment la rigidité des raidisseurs le long de la plaque, on aura donc: $\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$ où ε_0 sont identique à ε_p définie dans les relations (6-7).

Les éléments non-nuls de la matrice E_0 pour une plaque (voir Fig. (6-4)) renforcée par une série de raidisseurs équidistants dans les deux direction et ayant la s ction en T   sont:

$$E_{11} = \nu E_p h / (1 - \nu^2) + \frac{r_x}{b_{tx}} E_{Rx} (b_x \cdot d_x + b_{tx} \cdot d_x)$$

$$E_{12} = E_{21} = \nu E_p h / (1 - \nu^2)$$

$$E_{14} = E_p h / (1 - \nu^2) + \frac{r_x}{b_{ty}} E_{Ry} (b_{ty} \cdot d_{ty} + b_y \cdot d_y)$$

$$E_{25} = E_{52} = \frac{1}{2} E_{Ry} \frac{r_y}{b_{ty}} [b_y d_y (d_y + 1) + b_{ty} d_{ty} (2d_y + h + d_{ty})]$$

$$E_{33} = Gh$$

$$E_{44} = \frac{E_p h^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{1}{3} E_{Rx} \cdot \frac{r_x}{b_{tx}} \left[b_x \left(\left(d_x + \frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) + b_{tx} \left(d_x + \frac{h}{2} + d_{tx} \right)^3 - \left(d_x + \frac{h}{2} \right)^3 \right]$$

$$E_{45} = E_{54} = \frac{\nu E_p}{12(1-\nu^2)}$$

$$E_{55} = \frac{E_p h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{1}{3} E_{Ry} \cdot \frac{r_y}{b_{ty}} \left[b_y \left(\left(d_y + \frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) \right]$$

$$E_{66} = \frac{E_p h^3}{24(1+\nu)}$$

$$E_{77} = \frac{5}{6} Gh + \frac{2}{3} \frac{r_x}{b_{tx}} G_{Rx} (b_{tx} d_{tx} + b_x d_x)$$

$$E_{88} = \frac{5}{6} Gh + \frac{2}{3} \frac{r_y}{b_{ty}} G_{Ry} (b_{ty} d_{ty} + b_y d_y)$$

$$r_x = \frac{M_{Rx} \cdot b_{tx}}{L_y}$$

$$r_x = \frac{M_{Rx} \cdot b_{tx}}{L_x}$$

r_x, r_y étant les facteurs qui permettent d'étaler contûment les rigidités des raidisseurs sur les longueur de la plaque.

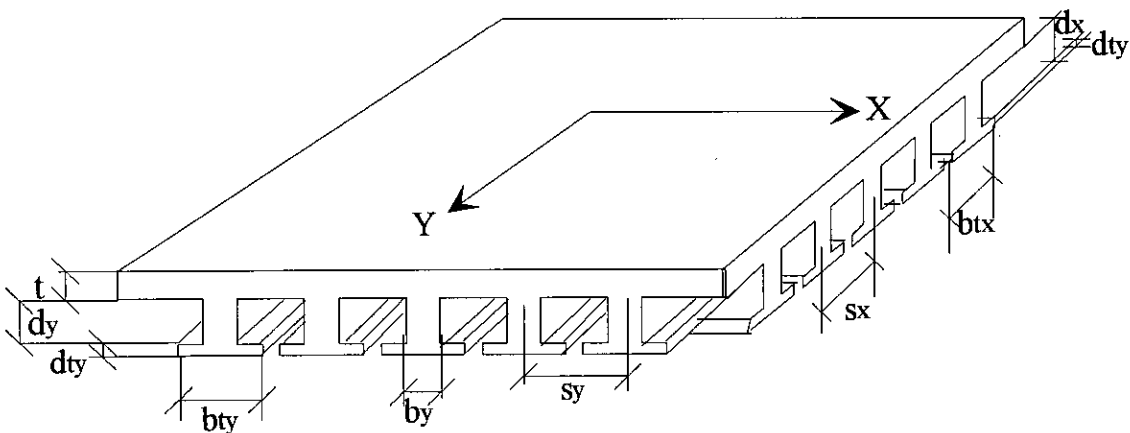


Fig. (6-4): Géométrie d'une plaque orthotrope

6-4-2-2 MATRICE MASSE DE LA PLAQUE ORTHOTROPE

• Matrice masse cohérente:

$$M^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T m_{po} N d\xi \eta \cdot \det J$$

avec:

$$m_{po} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{52} & 0 & 0 & m_{55} \end{bmatrix}$$

avec:

$$m_{11} = \rho_p h + \rho_{Rx} \frac{Mx}{Ly} (b_x d_y + b_{tx} - d_{tx})$$

$$m_{22} = \rho_p h + \rho_{Ry} \frac{My}{Lx} (b_y d_x + b_{ty} - d_{ty})$$

$$m_{33} = \rho_p h + \rho_{Rx} \frac{Mx}{Ly} (b_x d_y + b_{tx} \cdot d_{tx}) + \rho_p h + \rho_{Ry} \frac{My}{Lx} (b_y d_x + b_{ty} \cdot d_{ty})$$

$$m_{14} = m_{41} = \frac{1}{2} \rho_{Rx} \frac{Mx}{Ly} (b_x d_x (d_x + h) + b_{tx} d_{tx} (2d_x + h + d_{tx}))$$

$$m_{44} = \rho_p \frac{h^3}{12} + \frac{1}{3} \rho_{Rx} \frac{Mx}{Ly} \left(b_x \left(\left(d_x + \frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) + b_{tx} \left(d_x + \frac{h}{2} + d_{tx} \right)^3 - \left(d_x + \frac{h}{2} \right)^3 \right)$$

$$m_{25} = m_{52} = \frac{1}{2} \rho_{Ry} \frac{My}{Lx} (b_y d_y (d_y + h) + b_{ty} d_{ty} (2d_y + h + d_{ty}))$$

M_x, M_y nombre de raidisseur / x / y.

Matrice masse diagonale à coefficients égaux:

$$• m_{ii} = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\rho_p h + \rho_{Rx} \frac{Mx}{Ly} (d_x b_x + b_{tx} \cdot d_{tx}) + \rho_{Ry} \frac{My}{Lx} (b_y \cdot d_y + b_{ty} \cdot d_{ty}) \right] \det J \cdot d\xi d\eta$$

• **Matrice masse diagonale à coefficients variables:**

Soient:

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\rho_p h + \rho_{Rx} \frac{M_x}{L_y} (d_x b_x + b_{tx} \cdot d_{tx}) + \rho_{Ry} \frac{M_y}{L_x} (b_y d_y + b_{ty} d_{ty}) \right) N_i N_i \times \det J \cdot d\xi d\eta$$

$$B = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\rho_p h + \rho_{Rx} \frac{M_x}{L_y} (d_x b_x + b_{tx} \cdot d_{tx}) + \rho_{Ry} \frac{M_y}{L_x} (b_y d_y + b_{ty} d_{ty}) \right) \cdot \det J \cdot d\xi d\eta$$

$$C = \sum_{i=1}^8 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\rho_p h + \rho_{Rx} \frac{M_x}{L_y} (d_x b_x + b_{tx} \cdot d_{tx}) + \rho_{Ry} \frac{M_y}{L_x} (b_x d_y + b_{ty} d_{ty}) \right) N_i N_i \times \det J \cdot d\xi d\eta$$

on a :

$$m_{ii} = (A-B)/C$$

6-5 - SYNTHESE

Tout au long de ce chapitre nous avons décrit trois formulations principales dans l'analyse des plaques raidies par éléments finis qui sont basées sur :

L'approche orthotrope et l'approche qui consiste à assembler les nervures à la plaque, cet assemblage peut se faire suivant deux formulations différentes FEM (M1) et FEM (M2) dans l'analyse dynamique des plaques raidies.

Pour le choix de la formulation il est évident que les formulations FEM(M1) et FEM(M2) aboutissent à de meilleurs résultats comparés à ceux de l'approche orthotrope car cette dernière revêt un caractère restrictif. Cependant il est parfois préférable de l'utiliser pour raison d'économie de temps machine surtout pour analyse non linéaire ainsi que la simplicité apparente d'entrée des données. Malheureusement ce modèle ne permet d'obtenir que des efforts globaux sans préciser quelle est la part de ces efforts qui passé respectivement dans la plaque et la nervure.

Mais si on examine de plus près ces formulations on constate que la formulation au réseau d'éléments indépendants de la géométrie des nervures s'avère nettement supérieure à celle qui consiste à lier rigidement aux noeuds de l'élément plaque des poutres excentrées. Car cette dernière n'assure malheureusement la continuité des déplacements qu'aux noeuds de l'élément d'une part et d'autre part le long du contact plaque - nervure. le flux de cisaillement est nul et l'égalité des contraintes normales n'est pas satisfaite figure (6-5).

Ceci entraîne des erreurs considérables , mêmes des valeurs calculées aux noeuds.

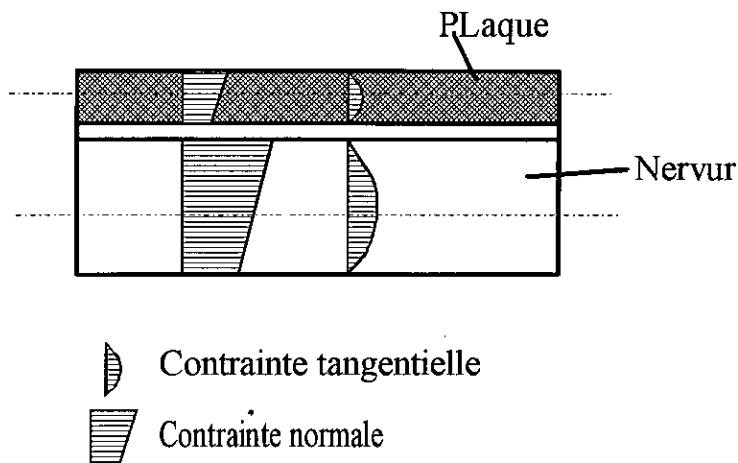


Fig.(6-5):Inégalité des contraintes normales et flux de cisaillement nul au contact plaque - nervure.

Par contre la première formulation assure la continuité des déplacements en tout point de contact plaque nervure assure pratiquement la continuité des contraintes normales et permet de calculer le flux de cisaillement entre la plaque et la nervure voir fig (6-15). Ce flux a une importance considérable dans certaines constructions (calcul des correcteurs d ans les ponts mixtes et les ponts sur poutres etc...)

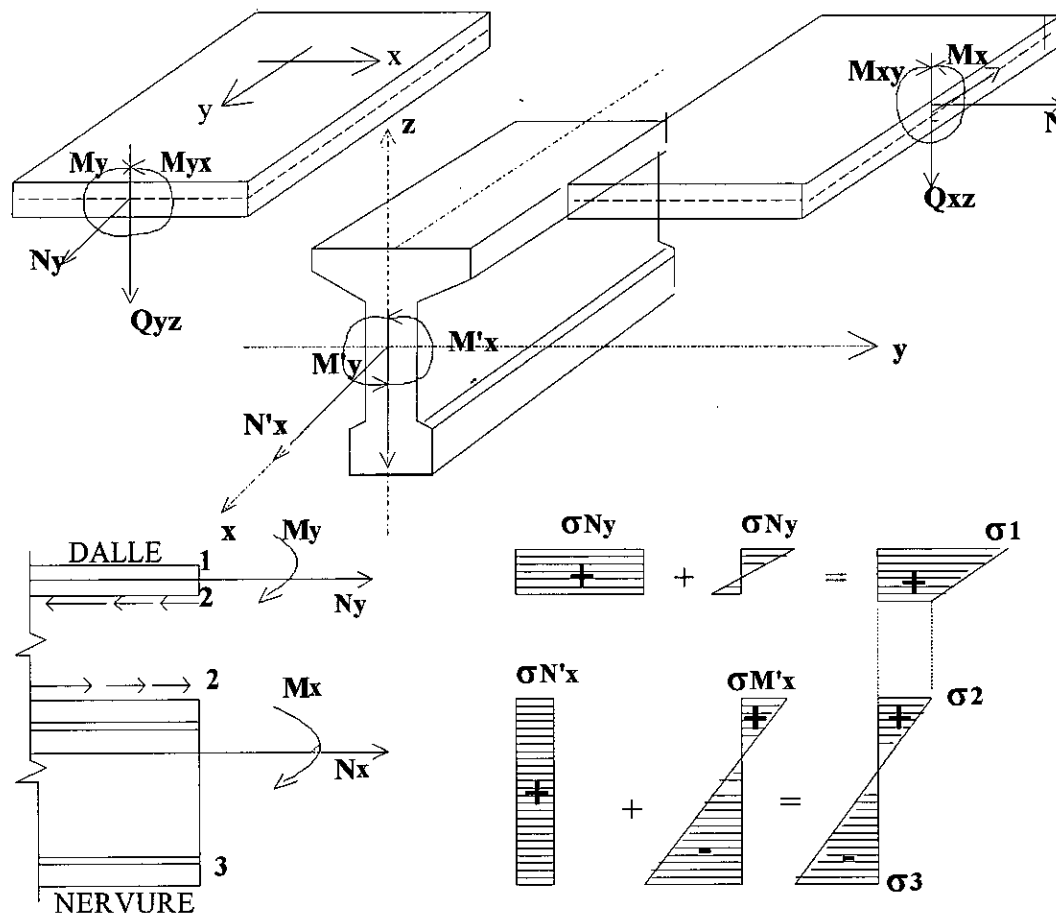


Fig. (6-6) Liaison plaque nervure et continuité des contraintes

De plus elle assure un gain appréciable non seulement des données mais aussi du temps d'exécution ceci est dû au fait qu'il n'est pas nécessaire de définir de nouveaux noeuds pour prendre en compte les nervures et que par conséquent leur présence n'accroît pas le nombre d'inconnues du système d'équation .

Dans ce sens nous avons développé un programme permettant de calculer les plaques raidies avec les trois formulations ainsi que les plaques minces et épaisse dans le modèle dynamique.

CHAPITRE 7

APPLICATIONS ET

PRESENTATION DU PROGRAMME

CHAPITRE 7: PRESENTATION ET APPLICATIONS DU PROGRAMME

7-1 INTRODUCTION

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de structures exige la disponibilité d'un outil informatique performant, la manipulation des matrices de grandes taille et l'implémentation de plusieurs procédures mécaniques.

Dans ce chapitre on présente le programme informatique développée pour l'analyse des vibrations libres des plaques à nervures excentrée par éléments finis en implémentant les trois techniques exposé dans le chapitre 6; où le système de valeurs et vecteurs propres est résolue par la méthode du sous-espace : les matrices de rigidité et de masse sont stockée en utilisant la technique de ligne de ciel « SKY LINE » avec une allocation pseudo dynamique de la majeure partie des tables utilisées dans le programme.

Le programme est ensuite validé par des exemples simples et par des applications traitées par plusieurs auteurs.

7-2 PRESENTATION DU PROGRAMME

Le programme a été conçu pour l'analyse des plaques nervurées, en vue d'entreprendre la recherche des premiers modes propres.

Il a été développé en utilisant le langage Fortran 77 et a été exécuté sur un micro-ordinateur [486-DX4-100 MHz] sous le système d'exploitation OS/2 « OS386VM » en utilisant le compilateur «Lahey computer système» version 4.00 pour raison d'incapacité du système d'exploitation «MS DOS » de manipuler les matrices à grandes tailles.

7-2-1 ALLOCATION PSEUDO-DYNAMIQUE DES TABLES

Cette particularité est très intéressante définie le mode d'attribution de l'emplacement des différents tableaux. Ces derniers sont positionnés dans le common bloc, par l'intermédiaire d'une fonction régissant la position des pointeurs de début du tableau.

Cette fonction (MPOINT) dépend des trois paramètres suivants :

- Dimensions des tableaux utilisés.
- Précision de la machine utilisée (simple ou double précision).
- Position du pointeur du tableau précédent.

Lors de « l'appel » de cette fonction, le pointeur est déplacé de la quantité nécessaire pour l'emplacement du tableau; ensuite, la nouvelle position devient l'origine et ainsi de suite, cela se traduit donc par un déplacement de l'origine du vecteur à chaque exécution de cette fonction; le tableau en s'insérant dans le common bloc, déplace la pointeur de la quantité lui étant nécessaire.

7-2-2 STOCKAGE DES MATRICES PAR LA TECHNIQUE DE «SKYLINE »

Cette méthode est l'une des techniques de stockage des matrices globales symétriques et creuses; elle nous permet d'économiser un pourcentage assez élevé d'espace mémoire qui consiste à ranger dans un tableau A à une seule dimension les termes $K(i,j)$ de la matrice K compris entre la diagonale et les lignes de ciel de la matrice.

Ces lignes de ciel $m_j : j = 1,2,\dots,n$ représentées sur la Figure (7-1) sont définies comme étant les premiers termes non nuls de chaque colonne de K. Ainsi :

$$K(i,j) = 0 \quad \forall i < m_j \quad j = 1,2, \dots, n \tag{7-1}$$

Les différences $j - m_j : j = 1,2,\dots,n$ définissent les hauteurs de colonnes de la matrice K.

Connaissant les hauteurs de colonnes, celles-ci, en incluant les termes diagonaux, sont successivement rangées dans le tableau A comme le montre la figure (7-1)

$$K = \begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\
 & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 \\
 & & K_{33} & K_{34} & 0 & K_{36} \\
 & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\
 & & & & K_{55} & K_{56} \\
 & & & & & K_{66}
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 A(1) & A(3) & 0 & A(9) & 0 & 0 \\
 & A(2) & A(5) & A(8) & 0 & 0 \\
 & & A(4) & A(7) & 0 & A(15) \\
 & & & A(6) & A(11) & A(14) \\
 & & & & A(10) & A(13) \\
 & & & & & A(12)
 \end{bmatrix}
 \quad \text{NDIAG} = \begin{bmatrix}
 1 \\
 2 \\
 4 \\
 6 \\
 10 \\
 12 \\
 16
 \end{bmatrix} \tag{7-2}$$

Fig.(7-1): Technique de stockage en ligne de ciel

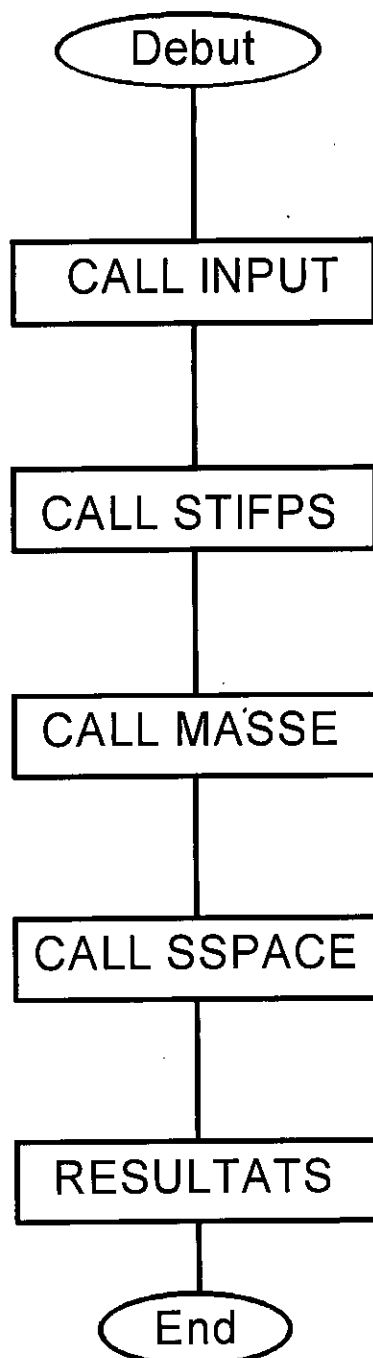
7-2-3 STRUCTURE GLOBALE DU PROGRAMME INFORMATIQUE

Dans ce qui suit, on présente les différents organigramme ainsi le rôle de quelques sous-routines.

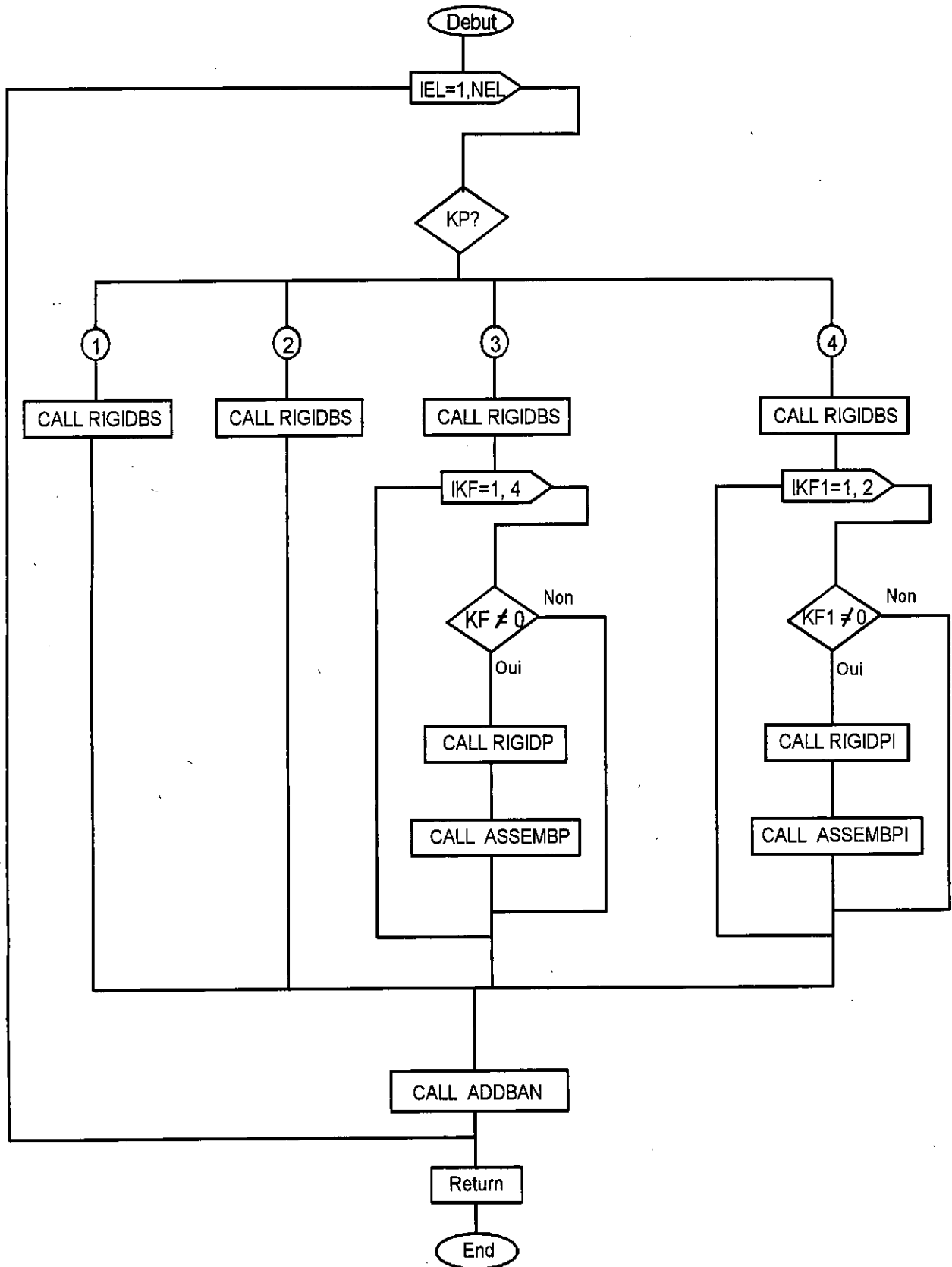
Il est à noter que la structure du programme principale, l'allocation pseudo dynamique des tables ont été inspiré de la référence [4].

La sous-routine SSPACE qui permet le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres correspondant a été aussi copiée de la référence [10].

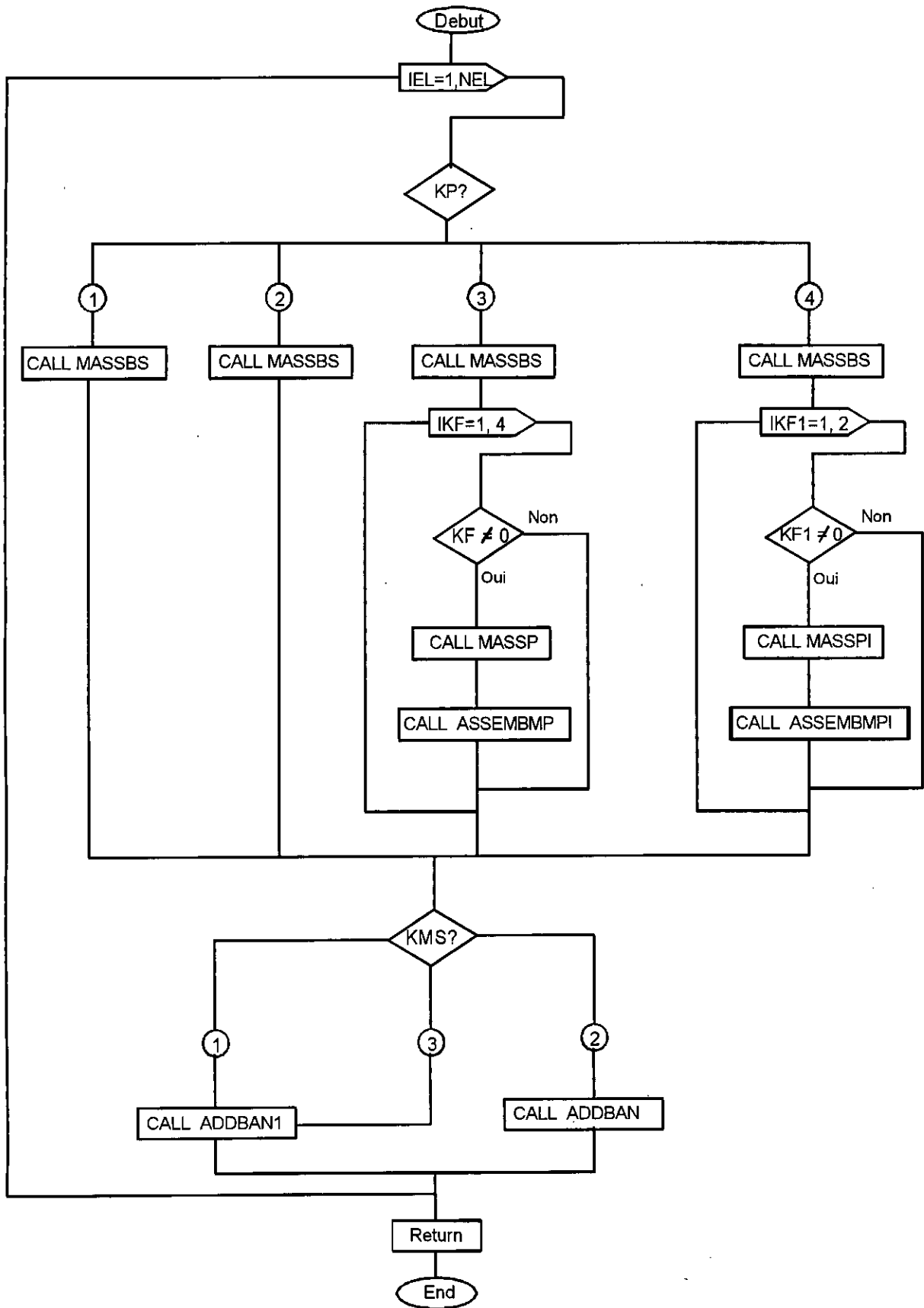
A- ORGANIGRAMME DU PROGRAMME PRINCIPALE



B- ORGANIGRAMME DE LA SUBROUTINE STIFPS



C- ORGANIGRAMME DE LA SUBROUTINE MASSE



D- ROLE DES SUBROUTINES

INPUT : cette subroutine permet l'introduction de tous les données du problème, il est à noter que les tables de coordonnées et connectivités sont générées en utilisant la technique du super-élément tel qu'elle est présenté [20].

RIGIDBS: cette subroutine permet le calcul des éléments de la matrice de rigidité élémentaire de la plaque isotrope ou orthotrope.

MASSBS: elle permet le calcul des éléments de la matrice de masse élémentaire de la plaque isotrope ou orthotrope.

RIGIDP: cette subroutine permet le calcul des éléments de la matrice de rigidité élémentaire des raidisseurs pour la formulation FEM (M1).

MASSP: elle permet le calcul des éléments de la matrice masse élémentaire des raidisseurs pour la formulation FEM (M1).

RIGIDPI: cette subroutine permet le calcul des éléments de la matrice de rigidité élémentaire des raidisseurs pour le formulation FEM (M2).

MASSPI: permet le calcul des éléments de la matrice de masse élémentaire des raidisseurs pour la formulation FEM (M2).

ASSEMBP: cette subroutine permet d'assembler les matrices de rigidité élémentaire des éléments de poutres de la formulation FEM (M1).

ASSEMBPI: elle permet d'assembler les matrices de rigidité élémentaire des éléments de poutres de la formulation FEM (M2).

ASSEMBMP: cette subroutine permet d'assembler les matrices de masse élémentaire des éléments de poutres dans FEM (M1).

ASSEMBMPI: cette subroutine permet d'assembler les matrices de masse élémentaire des éléments de poutres dans FEM (M2).

ADDBAN: cette subroutine permet d'assembler les matrices de rigidité et de masse élémentaire des éléments de plaque nervuré.

SSPACE: cette subroutine permet la résolution du problème $[[K] - \omega^2[M]]\{\Phi\} = 0$ par la technique de l'itération sur sous-espace.

NELEM: nombre d'éléments.

KF1: indique l'existence ou non d'un raidisseur dans l'élément de plaque dans x,y dans FEM (M2).

KF: indique l'existence ou non d'un raidisseur aux quatre bords de l'élément de plaque dans FEM (M1).

KP : le type de formulation a utiliser.

KP = 1: pour les plaques isotrope.

KP = 2: pour la formulation orthotrope.

KP = 3 : pour la formulation FEM (M1).

KP = 4: pour la formulation FEM (M2).

KMS : type de modèle de masse.

KMS = 1 : masse diagonale à coefficients égaux.

KMS = 2 : masse cohérente.

KMS = 3 : masse diagonale à coefficients variables.

7-3 APPLICATIONS DE VALIDATION

Dans ce qui suit, nous allons à travers quelques applications mettre en relief les performances de notre programme et avec ceux traité par d'autres auteurs.

APPLICATION N°1: VALIDATION DE LA SUBROUTINE «SSPACE» (Effet Membranaire).

Dans cette première application on essayera de comparer les résultats du programme avec la méthode de résolution du sous espace avec ceux donnée par les auteurs [A.H.Barbat, J.Miquel] ,en utilisant une autre technique de résolution des systèmes propres appelée SEARCH DETERMINANT [4].

Soit la structure plane montrée dans la figure (7-1) dont les caractéristiques mécaniques sont:

- Module de young $E = 2 \times 10^5$ MPa.
- Coefficient de poisson $\nu = 0,3$.
- Densité du matériau $\rho = 8$ MN/m².

La structure est encastree sur tous ces cotés d'épaisseur $h=1$ m, de longueur 12m et de largeur 8m.

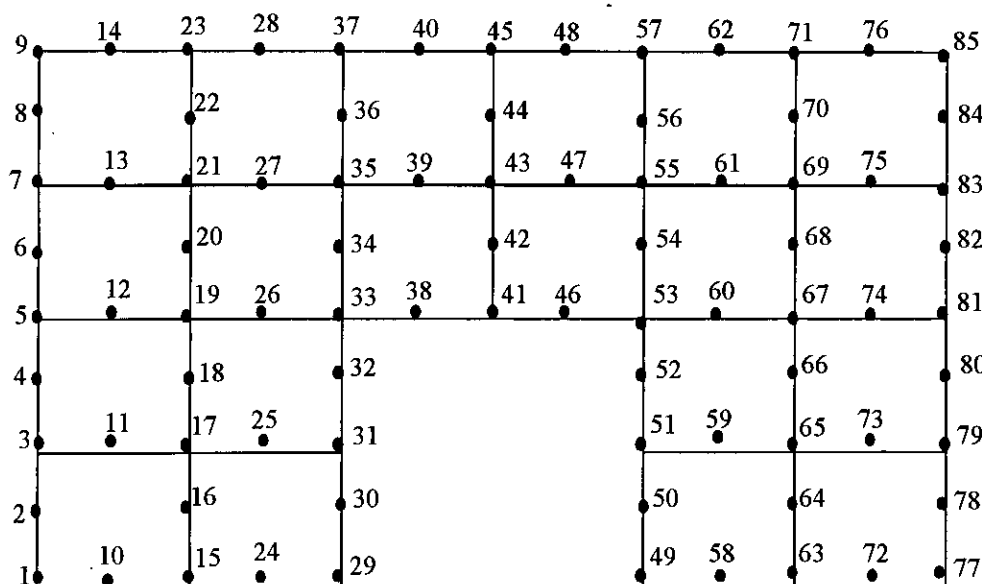


Fig.(7-2): Modèle plan décritisé un éléments finis

Les huit premiers modes obtenus dans cette analyse sont les suivants :

Table (7-1): Pulsations propres (rad/s) obtenues pour les deux méthodes

Mode	A.H.Barbat, J. Miquel [4] SEARCH DETERMINANT	Cette étude SUBSPACE
1	11,25	11,25
2	24,28	24,29
3	30,02	30,39
4	35,42	36,39
5	38,48	38,69
6	46,92	47,98
7	64,09	64,87
8	68,14	71,06

On peut, au vu des résultats ci-dessus, voir qu'il existe une parfaite concordance entre les résultats obtenus par les deux méthodes.

APPLICATION N°2: ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES DES PLAQUES ISOTROPE

Nous testerons dans cette application l'effet du modèle de masse pour trois plaques Carrée isotrope modélisées en différents maillage avec trois cas de conditions aux limites et cela pour les trois premières valeurs propre.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de ces plaques sont:

$$E = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa.}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 0,1$$

$$h = 0,1\text{m}$$

$$l = 4\text{m.}$$

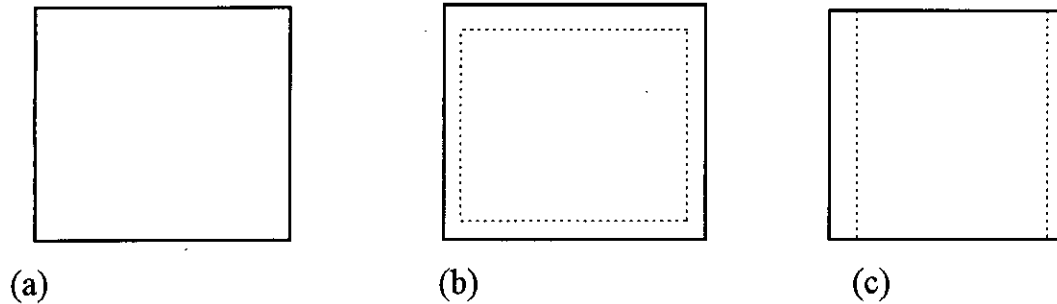


Fig. (7-3): plaques isotropes avec différents conditions aux limites

(a) plaque encastrée

(b) plaque simplement appuyée

(c) plaque semi-encastrée

Les résultats du programme sont résumé dans les tables (7-2), (7-3), (7-4) suivi de graphes résumant la convergence du mode fondamental vers la solution exacte donnée par la théorie des plaques pour les trois modèles de masse :

1. Cohérent.
2. diagonale à coefficients variables (D.C.V)
3. diagonale à coefficients égaux (D.C.E)

plaque (a)

Table (7-2) fréquences propres (rad/s) pour la plaque encadrée

Mode	Cette étude					Solution exacte [6]	
	Maillage / Masse	2x2	4x4	6x6	8x8		10x10
1	cohérente	103,5395	104,341.2	98,6554	98,367	98,1641	98,8762
	diagonale à coef égaux	79.8196	102.6220	98,4603	98,208	98,1898	
	diagonale à coef variable	92,7204	103,1713	98,5008	98,220	98,1958	
2	cohérente	757,7146	220,1152	201,8277	199,94	199,2465	201,6811
	diagonale à coef égaux	825,8584	203,4239	199,8061	199,236	199,2303	
	diagonale à coef variable	619,393	210,5494	200,3489	199,377	199,2942	
3	cohérente	1401,1926	341,158.5	301,7225	294,12	292,4226	297,4528
	diagonale à coef égaux	1111,7758	286,5337	351,8071	292,375	292,2492	
	diagonale à coef variable	1199,6225	314,2337	296,8085	292,639	292,3550	

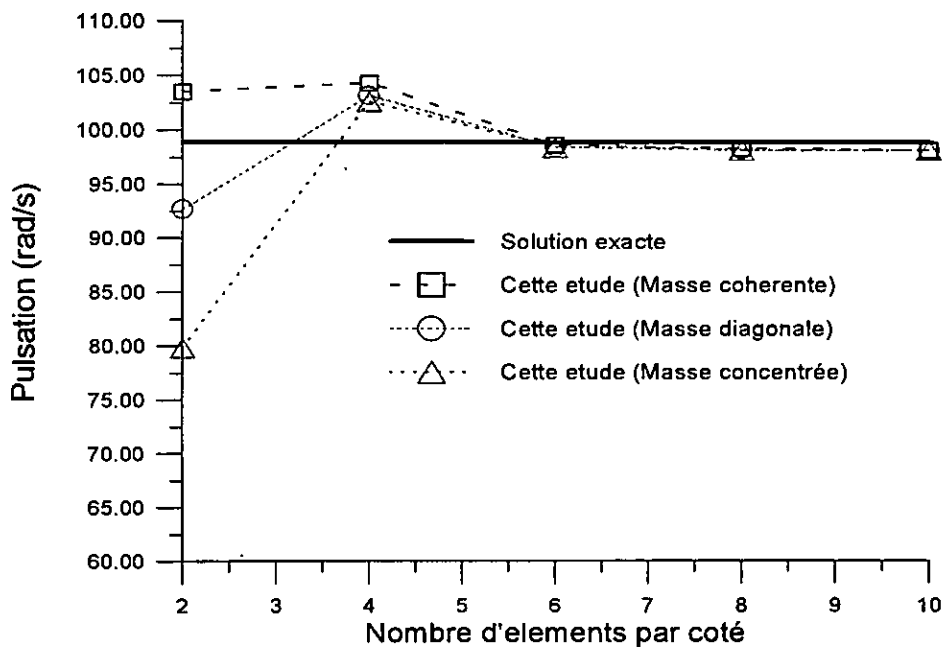


Fig. (7-4) Convergence du mode fondamental pour la plaque encadrée

plaque (b)

Tableau (7-3) : fréquences propres (rad/s) pour la plaque simplement appuyée.

Mode	Maillage Masse	Cette étude					Solution exact [6]
		2x2	4x4	6x6	8x8	10x10	
1	cohérente	69,077	54,222	54,139	54,187	54,1086	54,2047
	diagonale à coef égaux	62,777	54,151	54,127	54,131	54,1329	
	diagonale à coef variable	65,028	54,101	54,106	54,205	54,1323	
2	cohérente	388,857	137,481	135,191	135,118	134,8582	135,5529
	diagonale à coef égaux	398,829	135,140	134,883	134,937	134,9952	
	diagonale à coef variable	299,122	135,175	134,867	135,127	134,9601	
3	cohérente	500,555	236,686	219,335	215,561	215,0772	216,9012
	diagonale à coef égaux	423,947	223,813	216,328	215,206	215,2893	
	diagonale à coef variable	317,962	225,516	215,653	215,381	215,2576	

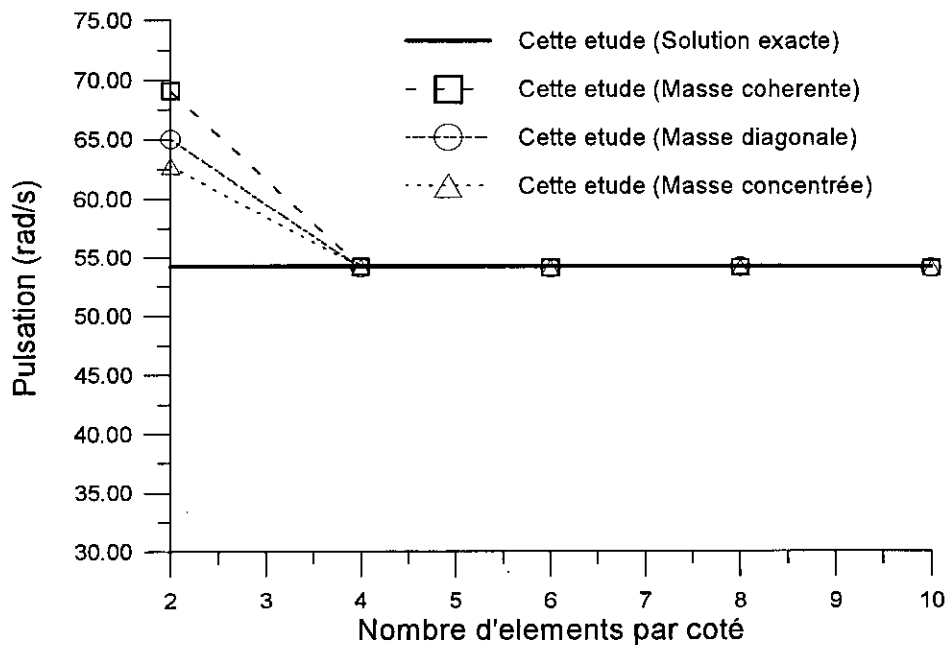


Fig.(7-5): Convergence du mode fondamental pour la plaque simplement appuyée

plaque (c)

Table (7-4) : fréquences propres (rad/s) pour la plaque semi-encastree.

Mode	Maillage Masse	Cette étude					Solution exact [6]
		2x2	4x4	6x6	8x8	10x10	
1	cohérente	94,831	80,21	79,191	79,218	79,0907	79,6724
	diagonale à coef égaux	76,304	79,598	79,121	79,114	79,1190	
	diagonale à coef variable	85,999	79,703	79,129	79,229	79,1208	
2	cohérente	447,788	159,758	150,213	149,618	149,2662	150,5533
	diagonale à coef égaux	488,169	154,683	149,652	149,36	149,3547	
	diagonale à coef variable	366,127	156,085	149,703	149,587	149,3654	
3	cohérente	664,702	196,208	189,554	188,891	188,3852	190,3895
	diagonale à coef égaux	539,892	185,546	187,987	188,304	188,3962	
	diagonale à coef variable	481,156	189,174	188,370	188,682	188,4489	

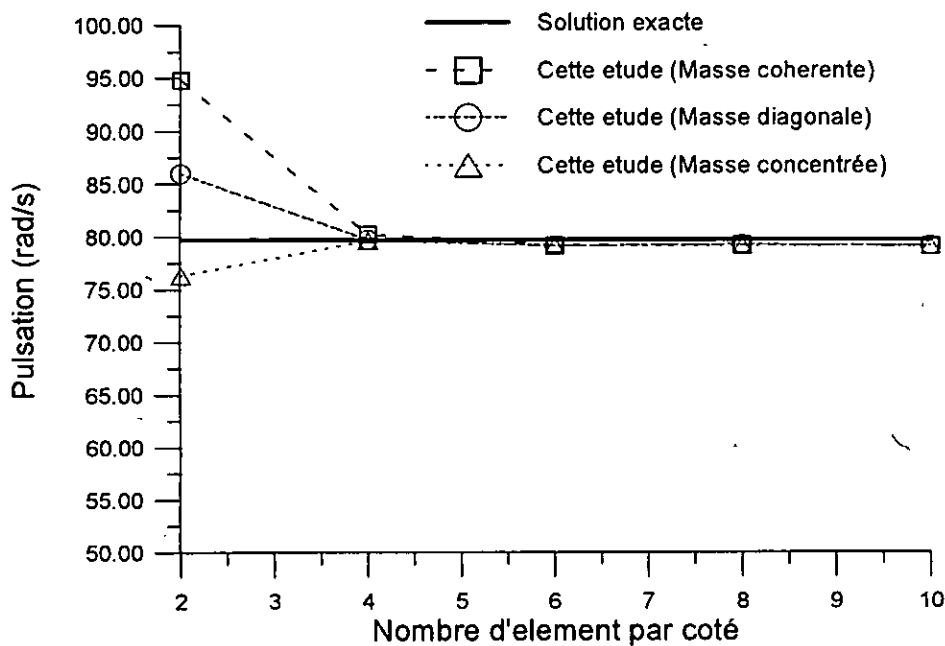
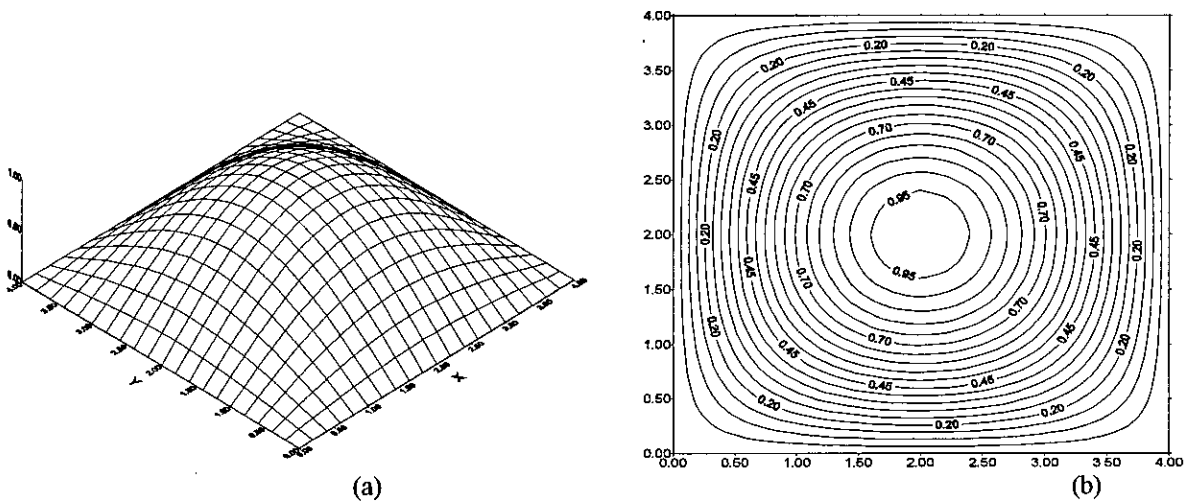


Fig.(7-6): Convergence du mode fondamental pour la plaque semi-encastree

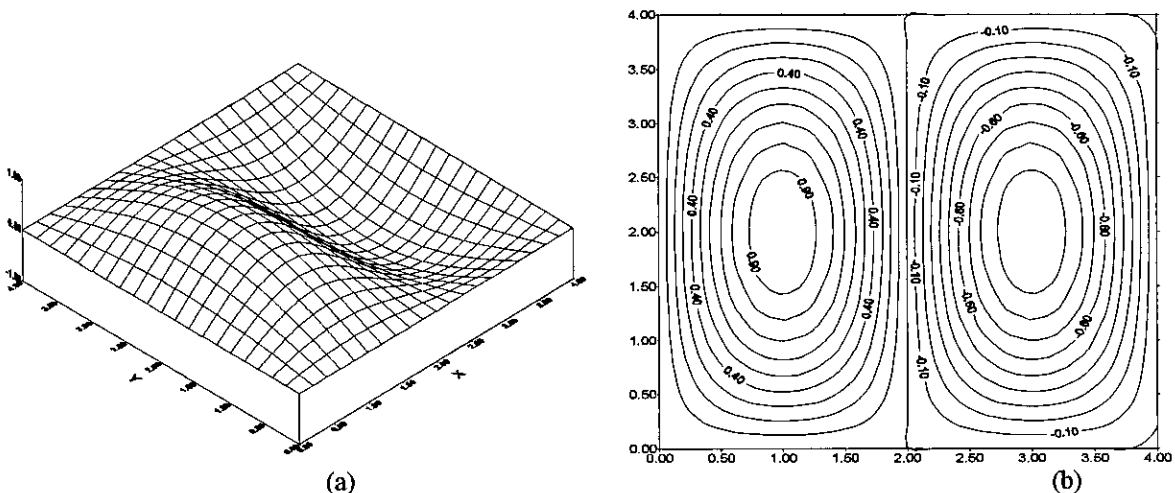
Ces trois graphes permettent de mieux saisir les différences entre les conditions aux limites et l'utilisation des trois modèles de masse. On voit bien que les trois solutions convergent à partir du 4^{ème} éléments pour les plaques (b) et (c) et du 6^{ème} pour la plaque (a).

Les différentes constatations qu'on peut en tirer sont par exemple pour la plaque encastree on remarque une convergence non monotone pour les 3 modèles de masse., sinon on peut dire que le modèle cohérent tend à une convergence monotone. Pour la plaque simplement appuyée la convergence est monotone par le haut pour les trois modèles de masse, mais pour la plaque semi-encastree on constate que la solution du modèles cohérent et diagonale (à coefficients variable) convergent par valeurs supérieures alors que la solution du modèle concentrée (à coefficient égaux) converge par valeurs inférieures ceci est dû au fait que le modèle concentrée à tendance à rendre la structure plus flexible.

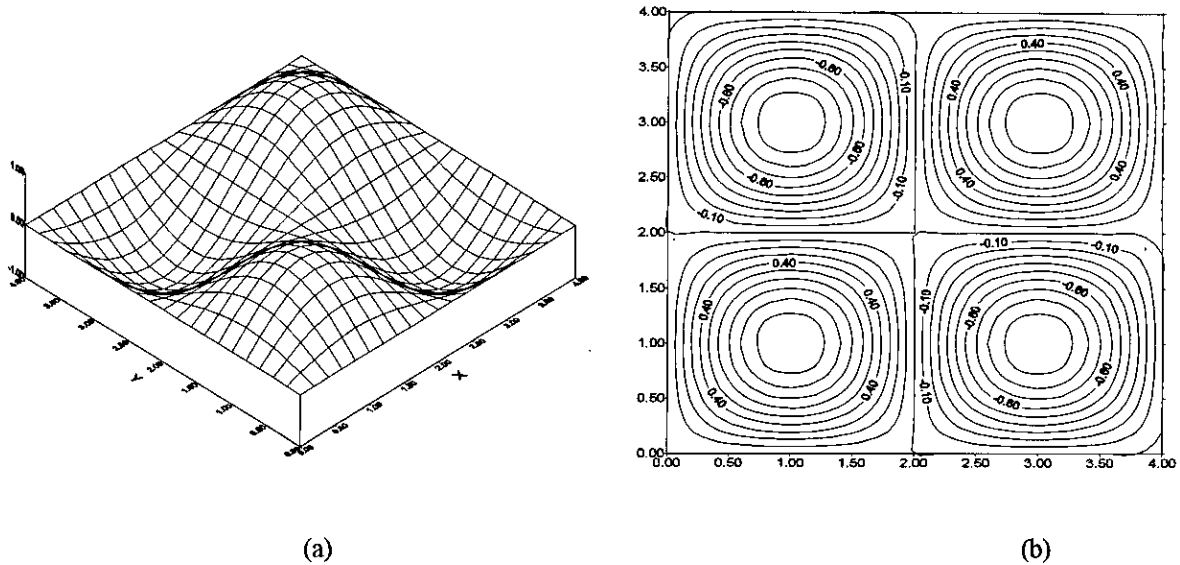
La Figure (7-7) schématise en surface et en contour les trois premiers modes de vibration d'une plaque carrée simplement appuyée.



Premier mode de vibration λ_1



Deuxième mode de vibration λ_2



Troisième mode de vibration λ_3

Fig.(7- 7) : Schéma de surface et de contour des trois premier modes de vibration d'une plaque simplement appuyer

(a) surface

(b) contour

REMARQUE :

Pour toutes les applications suivante on ne considère que la plaque encastrée sur les quatre cotés. Vu que la plaque est symétrique, on analysera uniquement la quart de la plaque en introduisant les conditions aux limites de symétrie (SS) et anti-symétrie (AA) et cela pour les deux modèles de masse (cohérent et D.C.V).

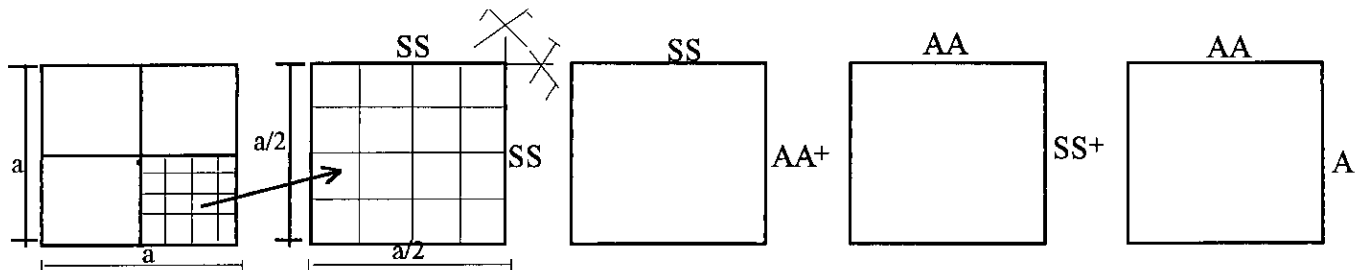


Fig.(7.8): Conditions de symétrie et d'antisymétrie pour une plaque encastrée

Le quart de la plaque est modélisé avec un maillage de 9x9 éléments. Pour chaque sous plaque on tire les modes cherchés, ensuite on les classes par ordre croissant, les fréquences propres obtenues sont évaluées en (Hz).

APPLICATION N° 3: ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES D'UNE PLAQUE CARREE RAIDIE AVEC UN RAIDISSEUR AU MILIEU

Dans cette application l'analyse à été faite par les deux formulations FEM(M1) et FEM(M2) présentant les mêmes résultats, comparés aux résultats donnés par les deux auteurs: [A.Mukherjee et M.Mukhopadhyay (1988)[16]] et [Olson et Hazell [19]].

Les caractéristiques de la plaques sont les suivantes:

$$E = 68,9.10^9 \text{ kg/m}^2, \quad \nu = 0,3, \quad \rho = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$a = 0,2032 \text{ m}, \quad h = 0,00127 \text{ m}$$

ceux du raidisseur sont:

$$b_x = 0,002286 \text{ m}, \quad d_x = 0,01651 \text{ m}$$

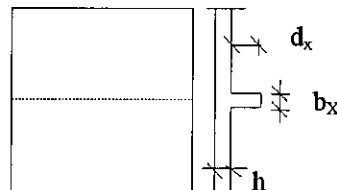


Fig. (7.9): plaque encastree avec un raidisseur au centre

Les fréquences propres obtenues sont présentées dans la table (7-5).

Table (7.5) Fréquences propres (Hz) pour une plaque carrée encastree avec un raidisseur centré

Mode	Olson et Hazell [19]		Mukherjee [16]	Cette étude FEM(M1) FEM(M2) 9x9	
	Théorique	expérimental	5x5	Cohérente	D.C.V
1	718.1	689	771.8	684.1718	684.1432
2	751.4	725	768.2	762.9577	768.8196
3	997.4	961	1016.5	971.7181	971.6102
4	1007.1	986	1031.9	1025.7732	1025.4651
5	1419.8	1376	1465.2	1432.6001	1432.117
6	1424.3	1413	1476.5	1441.8104	1448.5277
7	1631.5	1512	1743.8	1636.0485	1680.9541
8	1853.9	1770	1866.3	1825.2863	1823.9716
9	2022.8	1995	2109.1	2038.5015	2036.7893
10	2025.0	2069	2117.0	2051.6671	2049.8845
11	2224.9	2158	2264.1	2144.7553	2142.6483
12	2234.9	2200	2296.3	2269.6209	2261.2813
13	2400.9	2347	2505.8	2557.1055	2441.9347
14	2653.9	2597	2779.9	2627.0133	2635.5833
15	2670.2	2614	2820.9	2639.5826	2683.7504
16	2820.4	2784	2933.3	2808.7802	2821.4188
17	2804.6	2784	2943.8	2826.603	2826.7484
18	3259.0	3174	3536.1	3220.2435	3212.8068
19	3265.9	3174	3536.1	3262.6119	3254.4359
20	3414.2	3332	3649.8	3603.3828	3591.1944
21	3754.0	3660	3925.7	3774.0314	3760.8304
22	3754.8	3730	3941.6	3780.026	3766.6063
23	3985.5	3780	4084.3	3894.8761	3938.2626
24	4045.9	3913	4138.8	3959.7905	3981.7557

Un très bon accord et à signaler entre les résultats du programme et ceux de l'expérience et de la théorie.

APPLICATION N ° 4 : ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES D'UNE PLAQUE CARREE MUNIE DE DEUX RAIDISSEURS SUIVANT L'AXE X

On étudie dans cette application l'effet du positionnement des raidisseurs à travers la ligne nodale.

On a les mêmes données que l'application précédente mais les résultats obtenus sont comparés avec ceux donnés par :

- * T.P.Holopainen (1995) [17]
- * Olson et Hazell (1977) [19]
- * Mukherjee et Mukhopadhyay (1988) [16]

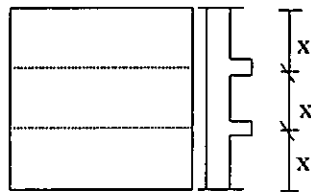


Fig. (7.8): plaque carrée encadrée munie de deux raidisseurs équidistants suivant l'axe x

Le tableau (7-8) montre les résultats des auteurs et du programme

Table (7.6) fréquences propres (Hz) pour une plaque carrée encadrée raidie par deux raidisseurs

Mode	Olson et Hazell [19]		Mukherjee [16]	T.P.Holopainen [17]		Cette étude FEM(M1), FEM(M2) 9x9	
	Théorique	experimental	5x5	5x5	18x18	Coherente	D.C.V
1	965.3	909	966.4	950.9	943.8	943.6057	1011.017
2	1272.3	1204	1247.7	1236.4	1237.9	1234.1011	1285.4964
3	1364.3	1319	1396.4	1352.6	1331.0	1296.4315	1348.9136
4	1418.1	1506	1481.0	1365.6	1361.2	1344.849	1365.1906
5	1602.9	1560	1629.9	1568.7	1561.5	1542.9181	1588.819
6	1757.1	1693	1754.5	1694.5	1706.1	1704.736	1703.6674
7	1854.1	1807	1930.9	1860.0	1808.3	1812.4037	1859.6046
8	2051.4	1962	1979.2	1970.6	1962.9	1961.4337	1992.2469
9	2109.4	2052	2262.1	2036.2	2057.9	2061.6855	2059.472
10	2253.1	2097	2115.1	2251.0	2163.7	2119.8703	2251.2736
11	2453.8	2410	2596.6	2473.7	2392.4	2372.2512	2419.0031
12	2566.3	2505	2788.3	2514.8	2499.6	2498.8226	2517.5956
13	2624.2	2618	3024.8	2524.8	2561.0	2571.2085	2566.5787
14	2729.6	2631	3077.5	2709.3	2625.6	2581.1893	2661.0614
15	2731.9	2467	2542.1	2674.9	2622.8	2613.3033	3154.8605
16	2915.4	2964	3329.0	2924.0	2832.0	2764.7421	3216.0508
17	3180.1	3169	3409.8	3122.3	3104.6	3119.4926	3245.0164
18	3242.0	3135	3367.2	3221.6	3161.8	3161.85.63	3288.1929
19	3279.1	3120	3641.5	3185.0	3185.3	3209.7912	3538.769
20	3313.3	3251	3687.3	3490.3	3228.8	3254.9827	3963.2834
21	3412.3	3446	3997.8	3395.7	3317.6	3254.6279	4018.2145
22	3635.6	3745	4168.8	3525.7	3460.5	3483.3581	4035.1662
23	4059.4	4019	4364.2	3719.6	3968.8	3939.1837	4062.402
24	4135.1	4053	4175.7	3756.9	4025.6	3984.4031	4084.5915

A partir du tableau une bonne concordance est enregistré entre les résultats du programme et ceux des auteurs.

APPLICATION N°5 : ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE DOUBLEMENT RAIDIES (APPROCHE ORTHOTROPE)

On considère une plaque rectangulaire muni par 7 raidisseurs équidistant suivant les directions x,y L'approche qu'on va utiliser est d'assimiler cette structure à une plaque d'épaisseur constante ayant des propriétés orthotrope équivalente .

Les caractéristiques de la plaque:

$$E = 71.10^9 \text{ kg/m}^2 \quad \nu = 0,27 \quad \rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$a = 0,3045 \text{ m} \quad h = 0,00137 \text{ m} \quad b = 0.203$$

ceux du raidisseur sont:

$$b_x = b_y = 0.000907 \text{ m} \quad d_x = d_y = 0,01133 \text{ m}$$

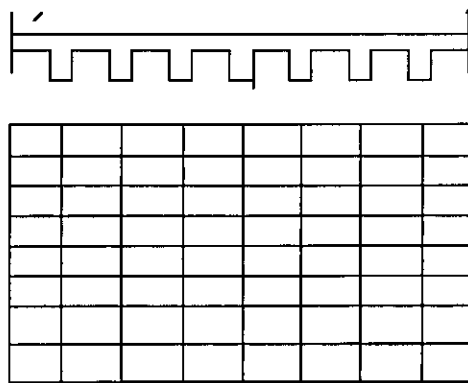


Fig. (7-4) Plaque encadrée avec raidisseurs orthogonaux.

Les résultats sont obtenus pour le quart de la plaque en appliquant les conditions (SS) et (AA) avec un maillage 9 x 9 éléments .

Les résultats sont comparés à ceux donnés par [T.P.Holopainen (1995) [17]]

Table (7-7) Fréquences propres (Hz) d'une plaque rectangulaire encadrée munie de 7 raidisseurs suivant x et y

Mode	T.P.Holopainen [17]	Cette étude (Orthotrope) (9x9)	
	16 x 16	Cohérente	D. C. V
1	1168.8	1185.4344	1185.7431
2	1819.7	1863.3870	1864.0074
3	2639.8	2895.8627	2896.5931
4	2971.8	3121.91116	3124.6156
5	2998.5	3248.7607	3249.7433
6	3815.4	4134.3947	4137.3177
7	4437.3	4899.3464	4903.9115
8	4532.1	5435.7491	5439.3999
9	4736.6	5627.7126	5631.6187
10	5018.8	5654.4496	5657.8397
11	5254.4	6254.9538	6257.9546
12	6048.4	7075.995	7063.6623

On constate de la table (7-7) que les résultats du programme sont en bon accord avec ceux avec ceux de T.P.Holopainen (1995)

APPLICATION N°6 : COMPARAISON ENTRE LES FORMULATIONS FEM(M2) ET ORTHOTROPE

Considérons une plaque carrée de cotés (a) encâstrée sur ces quatre bords, raidie par un système de poutres parallèles et équidistantes. L'analyse a été faite en utilisant les deux formulations FEM(M2) et Orthotrope pour différents nombres de raidisseurs suivant les directions x et y .

Les données nécessaires du problème sont :

$$\begin{aligned}
 E &= 2.1.10^5 \text{ N.m} & \nu &= 0,3 & \rho &= 0.1 \\
 a &= 2 \text{ m} & h &= 0,25 \text{ m} \\
 b_x = b_y &= 0.02 \text{ m} & d_x = d_y &= 0,1 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Les fréquences propres pour les six premiers modes sont résumées dans la table suivante pour un maillage constant de (9x9)

Table (7-8) Fréquences propres (Hz) pour une plaque carrée munie de raidisseurs dans les deux directions x et y

Formulation	FEM(M2)						Orthotrope					
	2 X 2		3 X 3		5 X 5		2 X 2		3 X 3		5 X 5	
Nombre de raidisseurs												
Masse Mode	Cohérente	D.C.V	Cohérente	D.C.V	Cohérente	D.C.V	Cohérente	D.C.V	Cohérente	D.C.V	Cohérente	D.C.V
1	35.42	36.47	35.60	39.94	43.16	44.61	35.09	35.10	39.86	39.87	46.09	46.11
2	67.77	68.44	76.40	77.40	84.41	87.12	72.03	72.05	81.71	81.74	94.20	94.26
3	68.30	68.95	76.58	77.77	84.82	87.52	72.03	72.05	81.71	81.74	94.20	94.26
4	86.59	91.50	102.4	104.1	112.4	115.1	97.46	97.49	110.1	110.1	126.4	126.5
5	96.49	95.23	124.2	124.6	136.8	143.3	131.9	131.9	148.9	149.1	170.1	170.4
6	97.24	99.39	124.7	124.9	138.4	143.8	132.1	132.2	149.3	149.3	170.3	170.6

En analysant de près les résultats de cette application ,on peut observer que les résultats des deux formulations se rapprochent néanmoins quelques divergences sont à signaler pour la formulation orthotrope ,mais cela était prévisible du fait que cette dernière ne peut donner que des efforts globaux car la structuration de la formulation orthotrope ne tient pas compte de la géométrie réelle de la plaque raidie .

Si maintenant on fait un aperçu récapitulatif sur toutes les applications, on ne peut qu'affirmer notre satisfaction aux résultats obtenus par le programme .

CONCULSIONS

ET

RECOMMANDATIONS

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Cette présente étude nous a permis de découvrir la méthode des éléments finis et de s'initier à l'outil informatique , cela nous a permis aussi d'étendre nos connaissances dans plusieurs disciplines , tels la mécanique des structures , l'analyse numérique et l'informatique appliquée .

En examinant de près les résultats obtenus du programme et vu le bon accord constaté dans la majorité des cas pour les trois formulations implémentées, on peut qu'affirmer notre grande satisfaction au programme développé.

Le programme développé traite les vibrations libres des plaques minces (intégration réduite) et épaisse et les plaques nervurées selon les trois formulations pour des situations de masse cohérentes et diagonale

Le modèle dynamique avec masse diagonale est recommandé est dans le même ordre de précision que le modèle de masse cohérent , de plus il présente l'avantage d'utiliser des matrices masse diagonale ce qui se traduit par un gain appréciable de place mémoire et de temps machine .

La formulation FEM(M2) apparaît la plus intéressante parmi les trois formulations utilisées , car elle simule réellement le comportement du raidisseur sans pour autant perturber le maillage éléments finis plaques ce qui n'est pas le cas pour la formulation FEM(M1) où le maillage sera dicté par l'emplacement des raidisseurs.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] WILLIAM A.NASH ‘*Résistance des matériaux* ‘
Tome 2 série shaum ,Mc Graw-hill ,1972

- [2] SERGE LAROZE ‘*résistance des matériaux et structures*‘
Tome 1 ,milieux continus , Plaques et Coques ,Eyrolles et Masson 1984

- [3] R.W.CLOUGH ET J.PENZIEN ‘*Dynamique des structures*‘
(traduit de l’anglais) Pluralis 1979 .

- [4] A.H.BARBAT ET J.M.CANET ‘*Structural response computations in earthquake engineering*’ Penidge press U.K 1989

- [5] A.C.UGURAL ‘*Stresses in plates and shells*’ Mc Graw hill 1981

- [6] RUDOLPH SZILARD ‘*Theory and analysis of plates, classical and numerical methods*’
Prentice hall,inc 1974

- [7] O.C.ZIENKIEWICZ ‘*La méthode des éléments finis*’ (traduit de l’anglais) pluralis, 1979

- [8] W.WEANER et P.R.J OHINSTON ‘*Structural dynamics by finite element* ‘
Prentice hall , 1988

- [9] J.F.IMBERT ‘*Analyse des structures par élément finis*’ cepadus editions ,1984

- [10] K.J.BATH et E.L.WILSON ‘*Numerical methods in finite element analysis*’
Prentice hall 1976

- [11] G.TOUZOT et G.DATT ‘*une présentation de la méthode des éléments finis*’ Maloine
S.A.editeur 1984

- [12] E.HINTON ,T.ROCK et O.C ZIENKIEWICZ '*A Note on mass lumping and related process in finite element method*' Jour , Earth ,Eng ,struc ,Dyn .4 ,pp245-249 ,1976
- [13] C.A.BREBBIA '*Basic computational techniques for engineers*' pentich press 1983
- [14] AMAR BOUBERGUIG'*Calcul des coques nervurées et précontraintes par éléments finis avec pré et post-procésseur*' Annales de l' ITBTP n°422 , paris 1984
- [15] A.DEB ET BOOTOM '*Finite element model for stiffened plates under transversal loading*' Computers and structures ,vol23 ,n°3 ,,pp361-372 ,1988
- [16] A.MUKHERJEE ET M.MUKHOPADYAY '*Finite element free vibration of eccentrically stiffened plates*' Computres and structures ,vol30,n°6 ,pp 1303-1317 ,1988
- [17] T.P.HOLOPPAINEN '*Finite element free vibration of eccentrically stiffened plates*' Computers and structures,vol 56 ,n°6, pp993-1007 ,1995
- [18] E.HINTON, H.CHUANG '' *A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain field* '' Comp , Struc , Vol 23 N° 3 PP 409-431 1986
- [19] HAZELL ET OLSON , *La référence [20] dans [17]* 1977
- [20] Y.LINT, K..CHEN '' *A law dimentionnel mesh generator for variable order triangular and quadrilateral elements* '' Conpt , struc, Vol N° 6 PP 1033-1053 1988
- [21] N.S.BOUCHEFFA , M.BBOUBERBACHENE '' *Analyse dynamique des plaques minces et epaisses par la methodes des elements finis* '' P.F.E. G.C ENP 1992
- [22] B.AIT AZZOUZENE , R.BOUSSAA '' *Analyse des plaques raidies par la methode des elemnts finis - Elaboration d'un logiciel* '' P.F.E GC / VOA USTHB 1995