

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE
GENIE CIVIL

المركز الوطني للتعدد التقني
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE
FIN D'ETUDES**

SUJET

**REPONSE DYNAMIQUE
DE STRUCTURES PLANES
SOUMISES A DES EXCITATIONS
SISMIQUES D'APPUIS MULTIPLES**

Proposé et dirigé par :

Mr. B. TILLIOUINE
Professeur E.N.P., Alger.

Etudié par :

Mr. A. BOUKEBBAL
Mr. A. AIT ALI

Promotion Juillet 1997

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrach, Alger.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE
GENIE CIVIL

المركز الوطني للتعدد التقنيان
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE
FIN D'ETUDES

SUJET

REPONSE DYNAMIQUE
DE STRUCTURES PLANES
SOUMISES A DES EXCITATIONS
SISMIQUES D'APPUIS MULTIPLES

Proposé et dirigé par :

Mr. B. TILLIOUINE
Professeur E.N.P., Alger.

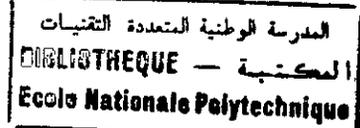
Etudié par :

Mr. A. BOUKEBBAL
Mr. A. AIT ALI

Promotion Juillet 1997

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrah, Alger.

SOMMAIRE



I. INTRODUCTION	2
1.1- GÉNÉRALITÉS :	2
1.2- PRÉSENTATION DU SUJET :	2
1.2.1- OUVRAGES DE GRANDE LONGUEUR :	3
1.2.2- RÉSEAU DE TUYAUTERIE :	3
STRUCTURE DU MÉMOIRE :	4
II. GÉNÉRALITÉS SUR LE MOUVEMENT SISMIQUE	6
2.1- L'ORIGINE DES SÉISMES :	6
2.2- FOYER ET ÉPICENTRE :	6
2.3- INTENSITÉ MACROSISMIQUE :	6
2.4- LA MAGNITUDE	6
2.5- L'ACCÉLÉROGRAMME DU SÉISME :	7
2.6- TYPES D'ONDES :	7
2.6.1- Ondes de volume :	7
2.6.2- Ondes de surface :	8
III. THÉORÈMES DE L'ÉNERGIE	10
3.1- RAPPELS DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES SOLIDES :	10
3.1.1- Les relations et équations de champs :	10
3.2- CONDITIONS AUX LIMITES :	12
3.3- DÉFINITIONS	13
a) champs de déplacement cinématiquement admissible :	13
b) Champs de contraintes statiquement admissibles :	13
3.4- APPROCHE CINÉMATIQUE (DÉPLACEMENT) :	13
3.4.1- Principe des travaux virtuels :	13
3.4.2- Définition de l'énergie potentielle en déplacement :	14
3.4.3- Théorème de l'énergie potentielle en déplacement :	14
3.5- APPROCHE ÉQUILIBRE (CONTRAINTES) :	14
3.5.1- Principe des travaux virtuels complémentaires :	14
3.5.2- Définition de l'énergie potentielle en contraintes :	14
3.5.3- Théorème de l'énergie potentielle complémentaire ou en contrainte.	15
IV. LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS (MEF) EN STATIQUE :.....	17
4.1. INTRODUCTION À LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS :	17
4.2- APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS :	18
4.3- EXPRESSION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE $V(u)$ POUR $u \in U_N$:	19
4.4- ÉNERGIE DE DÉFORMATION, MATRICE DE RIGIDITÉ :	20
4.5- APPLICATION À L'ÉLÉMENT FINI DE POUTRE :	21
4.5.1- Matrice de rigidité de l'élément fini de poutre en extension	21
4.5.2- Matrice de rigidité d'un élément de poutre mis en flexion simple:	23
4.5.3- Matrice de rigidité d'un élément fini de poutre soumis à la flexion composée.	25
4.6- ÉNERGIE CINÉTIQUE, MATRICE DE MASSE	25
4.7.1- Matrice de masse de l'élément fini de poutre en extension :	26
4.7.2- Matrice de masse de l'élément fini de poutre en flexion simple :	26
4.7.3- Matrice de masse de l'élément fini de poutre en flexion composée :	27
4.8- Représentation des masses :	27
4.8.1- La technique des masses concentrées :	27
4.8.2- La représentation cohérente des masses :	27
4.9- Transformation de coordonnées :	27

4.10- ASSEMBLAGE :	30
4.10.1- APPROCHE ÉNERGÉTIQUE :	30
4.10.2- RÈGLE PRATIQUE D'ASSEMBLAGE :	32
4.11- INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES :	32
4.11.1- MÉTHODE DU TERME DIAGONAL DOMINANT :	32
4.12- RÉOLUTION DE SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES :	33
4.12.1- Introduction :	33
4.12.32- Méthode de Cholesky :	33
a) principe :	33
b) Algorithme de la méthode de Cholesky [4] :	34
b.1) Factorisation de la matrice K :	34
b.2) Résolution du système linéaire :	34
4.13- TECHNIQUE DE STOCKAGE :	35
V- LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS EN DYNAMIQUE :	38
5.1- INTRODUCTION :	38
5.2- CARACTÉRISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PROBLÈME DYNAMIQUE :	38
5.3- FORMULATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT :	38
5.3.1- PRINCIPE DE HAMILTON :	38
5.3.2- EQUATIONS DE LAGRANGE :	39
5.4- L'AMORTISSEMENT :	43
Définition :	43
5.4.2- Différent type d'amortissement :	43
5.4.3- DÉTERMINATION DE LA MATRICE D'AMORTISSEMENT :	44
5.5- RÉOLUTION DE SYSTÈMES NON STATIONNAIRES :	44
5.5.1- Introduction :	44
5.5.2- Méthode d'intégration directe :	45
VI- CALCUL DES STRUCTURES SOUMISES À DES EXCITATIONS D'APPUI MULTIPLES :	49
6.1- INTRODUCTION :	49
6.2- EXEMPLE DE STRUCTURES SOUMISES À DES EXCITATIONS D'APPUI MULTIPLES.	49
6.2.1- VARIABILITÉ DU MOUVEMENT SISMIQUE ENTRE APPUIS :	50
6.3- FORMULATION DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT :	51
6.3.1- CAS D'UNE STRUCTURE SOUMISE À DES EXCITATIONS UNIFORMES :	51
6.3.2- CAS D'UNE STRUCTURE SOUMISE À DES EXCITATIONS MULTIPLES :	53
VII. PRÉSENTATION DU PROGRAMME ET VALIDATION	57
7.1 PRÉSENTATION DU PROGRAMME.....	57
7.2- VALIDATION DU PROGRAMME	70
VIII- EXEMPLE D'APPLICATION ET DISCUSSION DES RÉSULTATS	72
8.1- EXEMPLE D'APPLICATION :	72
8.2- DISCUSSION DES RÉSULTATS :	77
CONCLUSION :	80
BIBLIOGRAPHIE.	

Dédicace

Je dédie ce présent travail à :

Mon Père et ma Mère pour leurs sacrifices, patiences et encouragement, puisse Dieu m'aider à les honorer et les servir.

Mes frères et mes sœurs,

tous mes amis, en particulier : T. Agri, M. Bouam,

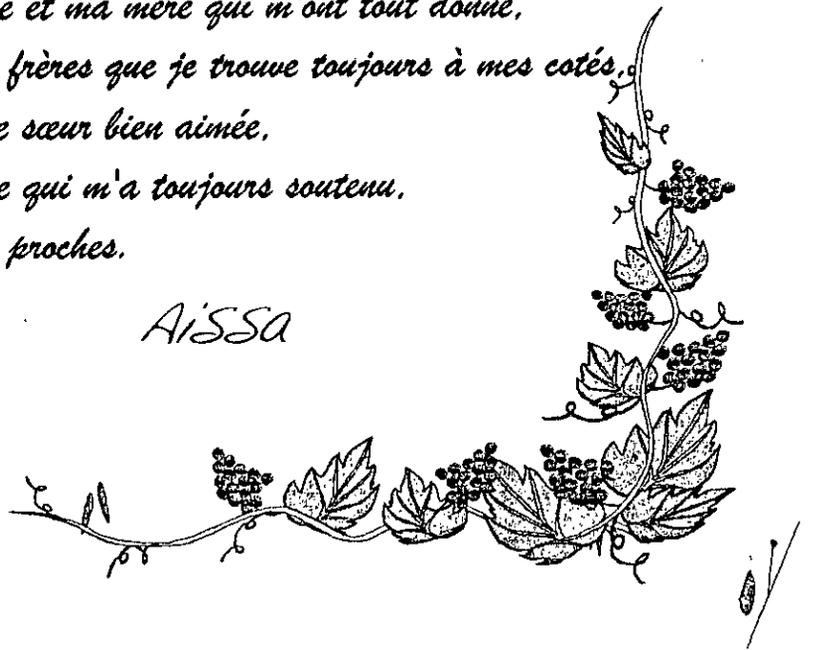
H. Cherrouf,

à tous mes proches.

Amor Boukebbal.

A Mon père et ma mère qui m'ont tout donné,
tous mes frères que je trouve toujours à mes côtés,
ma petite sœur bien aimée,
mon oncle qui m'a toujours soutenu,
tous mes proches.

Aïssa





Remerciements

Louange à Dieu tout puissant qui nous a donné santé et courage pour achever ce travail.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance envers tous nos enseignants à l'école en particulier notre promoteur le Professeur B. Tilliouine pour sa disponibilité, sa patience, et ses précieux conseils.

Nous remercions également tous ceux qui nous ont aidés dans la réalisation de ce mémoire en particulier Mr. N. Mezouar et Mr. A. Seghir.

ملخص:

إنّ التجاوب الديناميكي للمنشآت تحت تأثير الهزّات الزلزالية يقيم عادةً بفرض أنّ كل أسسها معرضة لتأثير منتظم. لكن هذه الفرضية تسقط عندما تكون أبعاد المنشأة كبيرة نسبياً إلى طول الموجة الزلزالية، حينئذ تكون المنشأة تحت تأثير هزّات مختلفة من أساس لآخر، و نجد هذه الظاهرة في المنشآت الطويلة كالجسور الكبيرة. لهذا الغرض كتبنا برنامج حسابي يقيم التجاوب الديناميكي للمنشآت ذات الحوامل المتعددة (تغير التأثير الزلزالي من أساس لآخر).

Abstract :

The seismic response evaluation of structures suppose that all its supports are subjected to identical ground motion.

This classical hypothesis is not valid when the structure's dimensions are important relatively to the seismic wavelength. Consequently, extended structures in plane such as bridges and important industrial buildings, will be subjected to multiple support excitation.

In this work, a finite element computing code is developed taking into consideration the spatial variability aspect of the seismic excitation.

Résumé :

L'étude de la réponse dynamique des structures sous excitations sismiques, suppose que tous les appuis sont animés de mouvements identiques.

Cette hypothèse classique n'est plus valable lorsque les dimensions en plans de la structure sont relativement importante par rapport à la longueur d'onde sismique. Par conséquent, ces structures sont soumises à des excitations multiples d'un point d'appuis à un autre. Cette situation se produit dans les structures étendues telles que les ponts ou les grands bâtiments industriels.

Dans le cadre de ce travail, un programme de calcul basé sur une modélisation en éléments finis a été élaboré, en tenant compte de l'aspect variable de l'excitation sismique.

Notations



- σ_{ij} : Tendeur des contraintes
 ϵ_{ij} : vecteur représentatif des déplacements
 ρ : masse volumique
 λ, ν : Coefficient de Lamé
 δ_{ij} : Symbole de Kronecker
 Φ_i : Forces de surface
 f_i : Forces de volume
 E : Module de Young
 V : Energie potentielle totale
 E : Energie de déformation totale
 E_i : Energie de déformation de l'élément e_i
 T : Energie cinétique totale
 T_i : Energie cinétique de l'élément e_i
 N_i : Fonctions d'interpolation
 $\{u\}$: vecteur de déplacement
 $\{F\}$: Vecteur chargement généralisé
 $[K]$: Matrice de rigidité globale d'une structure
 $[K_e]$: Matrice de rigidité de l'élément e_i
 $[M]$: Matrice de masse globale d'une structure
 $[M_e]$: Matrice de masse de l'élément e_i
 $[C]$: Matrice d'amortissement
 $[P]$: Matrice de transformation
 $[L_i]$: Matrice de localisation ou matrice "Booléenne".

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

1

Introduction

I. Introduction

1.1-Généralités :

Le calcul dynamique des structures a connu ses premiers développements dans des domaines tels que les chocs et les vibrations, les moteurs et les machines tournantes, l'aéronautique et les techniques de l'armement, dans lesquels les forces excitatrices sont le plus souvent connues et où le recours quasi symétrique à l'expérimentation sur maquette ou sur prototype permet de mettre au point et de valider les modèles de calcul.

Les applications du calcul dynamique dans le domaine des séismes ont pendant longtemps été freiné par :

- Le faible nombre de données d'enregistrements disponibles pour les mouvements forts, correspondant à des intensités notables, et le doute concernant la représentativité de ces enregistrements pour des sites présentant des conditions géologiques et sismiques différentes de celles relatives aux lieux d'enregistrement.

- L'allure extrêmement irrégulière des mouvements sismiques, évoquant celle des signaux aléatoires, et qui confère une allure également quasi aléatoire à la réponse des structures.

- L'importance des effets non linéaires dans les structures soumises à des excitations sismiques de fort niveau (plastification, fissuration, chocs, frottement ...etc.), qui impliquent pour des études détaillées, l'utilisation et l'implantation dans les codes de calcul de lois complexes pour décrire le comportement des matériaux.

- Les difficultés des études expérimentales de validation des modèles sur tables vibrantes, notamment en ce qui concerne le respect des conditions de similitude et du caractère multidirectionnel de l'excitation.

1.2- Présentation du sujet :

Les méthodes d'analyse sismique des structures sous excitations sismiques sont en général limitées au cas de l'excitation uniforme des différents points de liaison de la structure avec le milieu extérieur. Le calcul est alors effectué en prenant comme hypothèse tous les appuis animés d'un même mouvement et dont l'ensemble de la fondation se déplace en corps rigide.

Mais il se peut que les caractéristiques de l'excitation varient notablement d'un support à un autre, ceci revient au effets suivants :

Effets d'incohérence : qui traduit la nature du sol (non homogène, anisotrope, discontinu) et qui apporte des modifications en fréquence et en amplitude du signal entre la source et le site.

Effets de site : La topographie de la surface, non plane, avec ses collines et ses vallées, surtout au voisinage de l'ouvrage peut avoir une influence forte sur les caractéristiques dynamiques du site et sur le comportement sismique de la structure, ainsi, les ondes sismiques sont modifiées par déphasage et amplification dans la voisinage de la structure.

Effets de passage d'ondes : le retard du passage de l'onde comme pour les structure étendues, exemple des barrages ou les ponts, où l'onde a besoin d'un temps significatif pour exciter tout les points de l'ouvrage.

Effets d'atténuation : qui se traduit par l'amortissement dans le sol.

Pour notre cas d'étude on a considéré notamment les ouvrages de grande longueur en indiquant les réseaux de tuyauterie.

1.2.1- Ouvrages de grande longueur :

L'hypothèse faite sur le mouvement uniforme des appuis n'est valable que si les dimensions à la base de la structure sont relativement faible par rapport à la longueur d'onde sismique à laquelle est soumise la structure. Prenons, comme exemple, le cas d'une onde sismique dont la longueur est de l'ordre de 500 m agissant sur une structure ayant une base de dimension égale à 30 m. Cette structure sera soumise essentiellement au même mouvement sur toute sa base, c'est à dire chaque appuis est animé d'un même mouvement. Par contre un ponts suspendu ou un grand bâtiment industriel par exemple de dimension à la base égale à 400 m, lorsqu'il sera sujeté à une excitation sismique ayant une même longueur d'onde, les mouvements seront nécessairement fortement différents le long de sa base de fondation.

Donc pour certaines structures comme les bâtiments industriels et les ponts de grandes longueurs, il se peut que les caractéristiques de l'excitation sismique varient notablement d'un appui à un autre, donc dans ces conditions, le calcul en excitation uniforme devient imprécis. Par conséquent, il est important de développer d'autre méthode de calcul qui peuvent prendre en compte le caractère multiple de l'excitation.

1.2.2- Réseau de tuyauterie :

Dans les installations industrielles, comme par exemple dans les centrales nucléaires, cette situation se produit en particulier pour les tuyauteries qui cheminent d'un équipement à un autre, avec des supports très divers (charpentes, bâtiments, piquages, ... etc.) susceptible d'amplifier de façon très inégale les excitations sismiques des planchers. Mais le phénomène se trouve également sur certaines structures ancrées à divers niveaux d'un bâtiment : équipement élancés de la pétrochimie ou des centrales nucléaires, cheminées, ...

Dans ses conditions le calcul en excitation uniforme devient aussi très imprécis. Une prise en compte effective du caractère multiple de l'excitation présente alors un intérêt certain.

Notre travail consiste en le calcul dans le cas plan des structures modélisables en éléments finis de poutres et soumises à des excitations sismiques multiples.

Structure du mémoire :

Ce volume est organisé en (9) chapitres.

Chapitre 1 : Introduction à la dynamique des structures (développement et obstacles), ainsi que la présentation du sujet .

Chapitre 2 : Généralités sur le mouvement sismique et définition de quelques termes utilisés dans ce domaine (séisme, foyer, épicentre, la magnitude) ainsi les types d'ondes.

Chapitre 3 : exposé des théorèmes de l'énergie (principe des travaux virtuels, énergie de déformation)

Chapitre 4 : présentation de la méthode des éléments finis et formulation de l'équation de la statique $[K]\{u\}=\{F\}$, le calcul des matrices caractéristiques $[K]$ et $[M]$ au niveau élémentaire puis au niveau global et application à l'élément fini de poutre. Enfin, présentation de la méthode adoptée pour la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Chapitre 5 : introduction sur les problèmes dynamiques, puis la formulation des équations de mouvement en dynamique (approximation par éléments finis) en appliquant l'équation de Lagrange, puis on parlera sur l'amortissement et ses différents types. Enfin, la résolution des systèmes non stationnaires.

Chapitre 6 : introductions sur les excitations sismiques en général, puis nous donnons un exemple de structure soumise à des excitations multiples (les ouvrages de grande longueur) et la variabilité du mouvement sismique entre appuis. Puis nous allons traiter la formulation des équations du mouvement dans les deux cas uniforme et multiple).

Chapitre 7 : présentation du programme avec les organigrammes des différents sous-programmes utilisés et validation du programme en traitant quelques exemples et discussion des résultats.

Chapitre 8 : exemple d'application et discussion des résultats.

Chapitre 9 : conclusion.

2

Généralités sur le
mouvement sismique

II. Généralités sur le mouvement sismique

2.1- L'origine des séismes :

Les caractéristiques des vibrations sismiques du sol sont largement influencées par les mécanismes de génération des séismes (facteur de source) qui varient d'une région sismique à une autre avec la théorie des plaques et de la dérive des continents, les mécanismes s'éclaircissent de plus en plus, même s'il reste beaucoup de progrès à faire dans ce domaine, la plus part des séismes superficiels de magnitude plus grande que 5.0 sont liés à des ruptures de failles superficielles, pourtant il reste des doutes sur l'origine des séismes profonds. En effet, il se peut vraisemblablement que des failles géologiques puissent exister au dessus des profondeurs de l'ordre de quelques centaines de kilomètres vues les températures et les contraintes très élevées qui y règnent, mais ces séismes ne présentent pas beaucoup d'intérêts pour l'ingénieur du génie parasismique qui s'intéresse plutôt aux fortes secousses.

2.2- Foyer et épicentre :

Par définition, le foyer ou hypocentre est le point au sein de la croûte terrestre ou d'après les calculs basés sur les ondes sismiques captées la rupture de la faille est initiée, l'épicentre et la projection de ce point à la surface de la terre.

2.3- Intensité macrosismique :

L'intensité est une mesure subjective des effets causés par le séisme et qui sont constatés sur place.

Durant des années, différentes échelles ont été utilisées notamment celle proposée par MERCALLI ROSSI et FOREI, MEDVEDEV et SPOUHEMER. L'échelle de MERCALLI modifiée (M.M) a été surtout utilisée aux Etats Unis, L'échelle MSK 1964 (MEDIVEDEV et SPONHEIMER, 1969) a elle été utilisée en Europe. D'ailleurs ces deux échelles, ainsi que l'échelle macrosismique internationale sont très proches. Elles comportent douze degrés, numérotés de I à XII, le degré I correspond à des secousses non perceptibles par l'homme, le degré XII au maximum concevable (les dégâts sont imparables).

2.4- La magnitude

La magnitude M est un paramètre introduit pour représenter l'énergie libérée par le séisme sous la forme d'ondes sismiques, indépendant du lieu d'observation. La définition de la magnitude a été introduite par RICHTER en 1935, et depuis, reprise par un certain nombre d'auteurs avec quelques nuances (MIYAMAS, 1978).

C'est seulement après 1950 que le concept de la magnitude a été reconnu, les magnitudes des séismes antérieurs n'ont pas été calculés sur le champs, mais c'est plus tard qu'ont été

entreprises des études de révélation des magnitudes de ces séismes pour l'évaluation des risques sismiques.

L'expression mathématique de la magnitude peut s'écrire : $M = \text{Log}_{10} A/A_0$. Où A : c'est l'amplitude maximale enregistrée par un séismographe standard (WOOD-ANDERSON) avec une période de 0.8 secondes, à une distance de 100 km de l'épicentre, et A_0 est celle d'un séisme standard choisi préalablement.

2.5- L'accélérogramme du séisme :

La variation de l'accélération du séisme dans le temps ainsi obtenue corrigée et traitée s'appelle l'accélérogramme du séisme et servira de base pour les calculs sismiques.

Les vibrations sismiques du sol ont trois directions, deux composantes horizontales et une autre verticale, même si à cause des limitations dues aux méthodes de calcul ou à leurs coûts, on envisage généralement qu'une ou deux composantes.

Pour la plupart des séismes, l'accélération verticale est de l'ordre de un tiers ou deux tiers de l'accélération horizontale et avec des fréquences plus élevées, HOUSNER (1970), IDRIS (1978). L'accélération verticale est donc plus atténuée avec la distance et ainsi, elle est plus sensible aux erreurs dues aux appareils d'enregistrement et aux procédures de traitement des enregistrements d'autre part. Les accélérations maximales horizontales et verticales se produisent rarement au même moment, en plus, l'accélération verticale est beaucoup moins nuisible à la stabilité des structures que l'accélération horizontale, ce qui fait que pour la plus part des calculs sismiques, l'effet de l'accélération verticale a été généralement négligé.

2.6- Types d'ondes :

2.6.1- Ondes de volume :

Elles prennent naissance dans le foyer et se propagent à l'intérieur de la terre sous forme de :

1- Ondes "P" longitudinales :

Elles se propagent avec une vitesse de 7 à 8 km/sec. et s'accompagnent d'un changement de volume (compression et dilatation).

2- Ondes "s" ondes transversales :

Se déplacent avec une vitesse de 4 à 5 km/sec. et s'accompagnent d'une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de la propagation, donc provoquent un cisaillement sous changement de volume. A la différence des ondes longitudinales, les ondes transversales ne peuvent se propager dans les milieux liquides ou gazeux, en raison de l'inaptitude de ces milieux à transmettre les efforts de cisaillement.

2.6.2- Ondes de surface :

Les ondes de volumes qui arrivent à la surface de la terre produisent des ondes de surface n'intéressant le sol que sur une profondeur extrêmement faible, on distingue principalement :

1- Ondes de Rayleigh :

Se sont des ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation qui entraînent des compressions, tractions et des cisaillements dans le sol.

2- Ondes de Love (Q) :

Elles offrent aux points du sol un déplacement dans le plan tangent à la surface perpendiculaire à la surface de propagation, elles engendrent des contraintes de cisaillements.

3

Théorèmes
de l'énergie

III. Théorèmes de l'énergie

Ce chapitre est consacré aux théorèmes d'énergie qui constituent le fondement essentiel de la méthode des éléments fins en mécanique des structures.

3.1- Rappels des équations de la mécanique des solides :

- le problème type de la mécanique des solides revient à déterminer les deux champs inconnus : déplacement u_i et contraintes σ_{ij} sous l'effet des forces appliquées (forces de surfaces Φ_i et force de volume f_i)

- le phénomène de déformation des corps solides est régi par des équations de champ aux dérivées partielles avec des conditions mixtes aux limites.

- deux démarches principales sont envisageables suivant que l'on formule complètement le plan en fonction de l'un des champs inconnus, soit le champ de déplacement u_i , soit le champ des contraintes σ_{ij} .

- la première approche en fonction des déplacements est appelée approche cinématique, l'autre approche en fonction des contraintes est appelée approche équilibre [1].

- les équations de champ et des conditions aux limites de la théorie d'élasticité sont rappelées ci-dessous dans le cas général.

3.1.1- Les relations et équations de champs :

soit un corps solide déformable schématisé ci-dessous dont la géométrie définit un domaine V et une surface extérieur S .

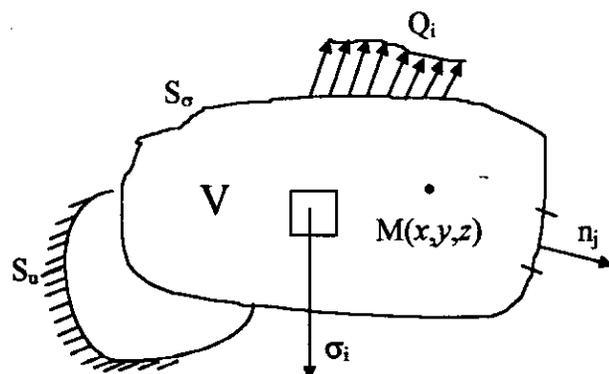


Fig III.1

les relations et les équations de champs définies dans le domaine du corps solide peuvent se classer en :

a) Relations déformations - déplacements (relations cinématiques) :

Dans le cas de la théorie linéaire de l'élasticité (déformations et déplacements petits)

on a :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{III.1})$$

b) Equation d'équilibre :

$$\varepsilon_{ij} = +f_i = 0 \quad (\text{III.2})$$

c) Equations de compatibilité :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Cette équation générale permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

Remarque : on rappelle que les équations de compatibilité sont les conditions d'intégrabilité des déformations qui assurent l'unicité des déplacements.

Ces conditions sont obligatoires dans l'approche contrainte non dans l'approche cinématique.

d) relations contraintes - déformations (relations d'élasticité) :

dans le cas des matériaux à comportement élastique linéaire, on a de façon générale :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (\text{III.4})$$

avec A_{ijkl} composantes du tenseur d'élasticité.

- Dans le cas des matériaux isotropes, les coefficients d'élasticité se réduisent à deux constantes indépendantes (λ et μ ou E et ν), les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes, connues sous le nom de la loi de Hooke.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{III-5})$$

avec :

$$\varepsilon_{kk} = \text{Tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

λ et μ des coefficients de Lamé.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

avec :

$$\sigma_{kk} = \text{Tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

E : Module de Young, ν : coefficient de Poisson.

3.2. Conditions aux limites :

Sur un corps solide de surface extérieure S (voir figure III.1), ne peuvent exister que deux conditions aux limites :

a) sur une quantité $S_u \subset S$ imposées sont des déplacements \bar{u}_i ,

$$u_i = \bar{u}_i \quad \forall M \in S_u$$

elles sont dites les conditions aux limites cinématiques. Sur S_u aucune composante du tenseur des contraintes n'est imposée.

b) Sur la partie complémentaire S_σ ($S_\sigma \subset S$; $S_u + S_\sigma = S$, $S_u \cap S_\sigma = \emptyset$) de S sont imposés des efforts extérieurs ϕ_i (en absence d'effort extérieurs, $\phi_i = 0$). Ces efforts imposent les valeurs de contraintes composantes du tenseur des contraintes par les relations :

$$\sigma_{ij} n_j = \phi_i \quad \forall M \in S_\sigma$$

Elles sont dites des conditions aux limites de type équilibre ou encore statique. Sur S_σ aucun déplacement u_i n'est imposé.

3.3- Définitions

a) champs de déplacement cinématiquement admissible :

Tout champs $u_i(M)$ satisfaisant :

- Les conditions de continuité C^0 pour les problèmes d'élasticité,
- Les conditions cinématiques C^1 pour les problèmes de poutres, plaques et coques.

C'est à dire les conditions aux limites sur S_u soit $u_i = \bar{u}_i$ [1]

b) Champs de contraintes statiquement admissibles :

Tout champs de contrainte $\sigma_{ij}(M)$ satisfaisant les conditions suivantes : continuité, condition "statique" ou de type équilibre.

- équilibre dans V : $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$
- conditions au limites sur S_σ : $\sigma_{ij} n_j = \phi_i$.

3.4- Approche cinématique (Déplacement) :

La solution (déplacements et contraintes) du problème de mécanique des solides est à la fois cinématiquement et statiquement admissible.

Dans un premier temps, nous allons adopter l'approche déplacement pour chercher une formulation énergétique à l'aide du champs de déplacements inconnus.

3.4.1- Principe des travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie de déformation ($U = \int w dv$) est égal à la somme des travaux virtuels des forces de volume et de surface.

Dans tout accroissement virtuel cinématique admissible du champs de déplacements :

$$\delta U = \delta \int_V w dv = \int_V f_i \delta u_i dv + \int_\Phi \Phi_i \delta u_i ds \quad (\text{III.7})$$

w : potentiel de déformation.

3.4.2- Définition de l'énergie potentielle en déplacement :

On appelle énergie potentielle en déplacement la fonctionnelle V définie par :

$$V(u) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) dv}_1 - \underbrace{\int_V f_i u_i dv}_2 - \underbrace{\int_{S_0} \Phi_i u_i ds}_3 \quad (\text{III.8})$$

Le terme (1) désigne l'énergie de déformation du solide pour u solution, le terme (2) désigne le travail des forces volumiques pour u solution et le terme (3) désigne le travail des forces surfaciques pour u solution.

3.4.3- Théorème de l'énergie potentielle en déplacement :

Les inconnus sont les déplacements, les champs de déplacement solution du problème sur l'espace est le champs de déplacement qui minimise sur l'espace des champs cinématiquement admissible, la fonction $V(u)$.

3.5- Approche équilibre (contraintes) :

3.5.1- Principe des travaux virtuels complémentaires :

Pour un corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie complémentaire de déformation : $[U_c = \int_V w_c dv]$ est égal à la somme des travaux des champs virtuels des forces de volume et de surface dans les champs des déplacements réels (travaux virtuels complémentaires).

$$\delta U_c = \int_V u_i \delta f_i dv + \int_{S_0} u_i \delta \Phi_i^* ds \quad (\text{III.9})$$

Avec ϕ^* accroissement virtuel des forces de surface ϕ_i^* sur S_0 .

3.5.2- Définition de l'énergie potentielle en contraintes :

On appelle énergie potentielle en contraintes, la fonctionnelle V^* définie par :

$$V^*(\sigma) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}) dv - \int_{S_0} \sigma_{ij} n_j u_i dS \quad (\text{III.10}).$$

3.5.3- Théorème de l'énergie potentielle complémentaire ou en contrainte.

- Les inconnues sont les contraintes; le champ de contraintes solution du problème est le champ qui maximise sur l'espace des champs de contraintes statiquement admissible la fonctionnelle $V^*(\sigma)$.

4

La méthode des
éléments finis
en statique

IV. La méthode des éléments finis (MEF) en statique :

4.1. Introduction à la méthode des éléments finis :

- Pour dominer les projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes, il peut ainsi prévoir l'influence des décisions au moment de la conception du système.

- Les sciences de l'ingénieur (MDS et MDF, thermiques) permettent de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles.

- La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations, elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur.

- C'est une méthode plus générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la nature :

Problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions.

- La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles (EDP) en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- 1- Science de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- 2- Méthodes et analyse numérique pour résoudre les équations algébriques.
- 3- Programmation et informatique pour effectuer efficacement les calculs sur ordinateur.

- D'un point de vue mathématique, la méthode des éléments finis est une extension des techniques de Ritz-Galerkin, rappelant l'idée essentielle de la méthode de Ritz ; le problème continu est mis sous une forme variationnelle équivalente, et la solution approchée des problèmes est supposée être une combinaison finie $\sum \lambda_i N_i$ de fonctions de base $N_i(x)$ données. Les coefficients λ_i de la base sont calculés à partir de la formulation variationnelle en résolvant un système d'équations algébrique. Le problème continu est donc ramené à une suite de problèmes approchés en dimensions finies.

- La méthode des éléments finis consiste à chercher une solution approchée u en minimisant l'énergie potentielle $V(u)$ sur un sous-espace u_n de u_{adm} . u_n étant de dimensions finies.

- En pratique, u_n est défini par la donnée de n champs linéairement indépendants appelés $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$. Si on suppose que les déplacements imposés sont nuls alors u_n est un espace vectoriel sur lequel tout champs u de u_n peut être projeté sous la forme :

$$\bar{u} = \sum \lambda_i N_i \quad (IV.1)$$

4.2- Approximation par éléments finis :

Pour construire la fonction $u(x)$ d'une fonction exacte $u_{ex}(x)$ en utilisant la méthode d'approximation nodale, nous pouvons adopter la relation suivante :

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 + \dots + N_n(x) u_n \quad (IV.2)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} u(x_1) &= u_{ex}(x_1) = u_1 \\ u(x_2) &= u_{ex}(x_2) = u_2 \\ \dots\dots\dots \\ u(x_n) &= u_{ex}(x_n) = u_n \end{aligned} \right\}$$

Les $N(x)$ sont des fonctions d'interpolation et les u_i sont des paramètres nodaux ou variables nodales.

- La méthode d'approximation nodale par sous domaines consiste à :

- Identifier un ensemble de sous domaines v^e du domaine v .
- Définir une fonction approchée $u_{ex}(x)$ différente sur chaque sous domaine v^e par la méthode d'approximation nodale.

- La méthode d'approximation par éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous domaines qui présente les particularités suivantes :

• l'approximation nodale sur chaque sous domaine u^e ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur u^e et sur sa frontière.

• Les fonctions approchées $u^e(x)$ sur chaque sous domaine v^e sont construites de manière à être continue sur v^e et à satisfaire les conditions de continuité entre les différents sous domaines. [2]

Définitions :

- Les sous domaines v^e sont appelés les éléments.
- Les points pour lesquels $u^e(x)$ coïncide avec $u_{ex}(x)$ sont les nœuds d'interpolation ou points nodaux.
- Les coordonnées x_i de ces nœuds sont les coordonnées nodales.

4.3- Expression de l'énergie potentielle $V(u)$ pour $u \in U_n$:

$$u = \sum \lambda_i N_i,$$

$$\sigma_{ij}(u) = \sigma_{ij} \left[\sum_k \lambda_k N_k \right] = \sum_k \lambda_k \sigma_{ij}(N_k),$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = \varepsilon_{ij} \left[\sum_l \lambda_l N_l \right] = \sum_l \lambda_l \varepsilon_{ij}(N_l).$$

l'énergie de déformation : $E(u) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) dv$ s'écrit alors :

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_V \sum_k \lambda_k \sigma_{ij}(N_k) \cdot \sum_l \lambda_l \varepsilon_{ij}(N_l) dv$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} \lambda_k \lambda_l \int_V \sigma_{ij}(N_k) \varepsilon_{ij}(N_l) dv$$

Le travail des forces extérieures s'écrit :

$$W(u) = \int_V f_k \sum_k \lambda_k N_k dv + \int_S \Phi_k \sum_k \lambda_k N_k ds$$

$$\sum_k \lambda_k \left\{ \int_V f_k N_k dv + \int_S \Phi_k N_k ds \right\}$$

On pose :

$\{\Lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}^T$ vecteur déplacement généralisé.

$[K] = [K_{ij}] = \int_V \sigma_{ij}(N_k) \varepsilon_{ij}(N_l) dv$ matrice de rigidité de composante générale K_{ij} .

$\{F\} = \{F_i\} = \int_V f_i N_i dv + \int_S \Phi_i N_i ds$ vecteur chargement généralisé.

Avec ces notations, l'énergie potentielle $v(u)$ s'écrit dans le cas statique :

$$V(u) = \frac{1}{2} \{\Lambda\}^T [K] \{\Lambda\} - \{\Lambda\}^T \{F\}$$

En appliquant le théorème de l'énergie potentielle en déplacement à $u(u)$, on obtient le système d'équations linéaires suivant :

$$[K]\{A\} = \{F\} \quad (IV.3)$$

à travers cette formulation, on voit apparaître clairement l'avantage de la méthode des éléments finis qui est la transformation des équations en dérivées partielles régissant le problème en un système d'équations linéaires. Les paramètres inconnus du problème s'appellent les degrés de liberté nodaux.

4.4- Energie de déformation, matrice de rigidité :

Soit la structure discrétisée comme indiqué précédemment par un ensemble d'éléments finis $e_i (i=1, n_e)$, n_e étant le nombre d'éléments. Supposons qu'on ait n nœuds animés chacun d'un degré de liberté, nous aurons donc n inconnus. Supposons que chaque élément e_i possède n_i nœuds donc n_i degrés de liberté, soit le vecteur u_i des degrés de liberté de l'élément e_i :

$$\{u_i\} = \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}\}^T$$

Le champ de déplacement à l'intérieur de l'élément e_i s'exprime sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base données et de degrés de liberté nodaux. Chaque composante des vecteurs déplacements $\{u\}$ (dans le cas de cet exemple, nous n'avons qu'une composante) s'écrit :

$$u_i = \sum N_j u_{ij} = \{N\}^T \{u_i\}.$$

Où les N_i sont des fonctions de base dépendants de l'espace, les u_{ij} sont les variables nodales.

- L'énergie de déformation de l'élément e_i s'écrit :

$$E_i = \frac{1}{2} \int_{e_i} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv.$$

Le tenseur des contraintes σ de composantes σ_{ij} est lié au tenseur de déformations ε de composantes ε_{ij} par la lois de comportement (équation III.4).

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\},$$

$[A]$: opérateur de Hooke.

Le tenseur des déformations est relié au vecteur déplacements par la relation déformation-déplacement (équation III.1).

$$\{\epsilon\} = [B]\{u\} = [B][N]\{u_i\} = [D]\{u_i\}$$

La matrice $[B]$ lie les déplacements aux déformations. En remplaçant l'expression de $\{\epsilon\}$ dans E_i , on obtient :

$$E_i = \frac{1}{2} \int_v [A][D]\{u_i\}[D]\{u_i\} dv = \frac{1}{2} \{u_i\}^T \left(\int_v [D]^T [A][D] dv \right) \{u_i\}$$

On pose

$$[K_e] = \int_v [D]^T [A][D] dv \quad (IV.4)$$

$[K_e]$ représente la matrice de rigidité élémentaire de l'élément v^e [I.2]

$$E_i = \frac{1}{2} \{u_i\}^T [K_e] \{u_i\} \quad (IV.5)$$

4.5- Application à l'élément fini de poutre :

4.5.1- Matrice de rigidité de l'élément fini de poutre en extension

Soit l'élément fini de poutre sollicité en traction-compression défini par deux nœuds i et j de coordonnées x_i , et x_j chaque nœud est animé d'un DDL, soient u_i et u_j ces DDL.

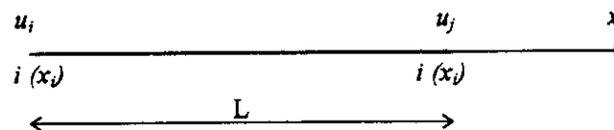


Figure IV.1 : élément poutre en extension

Le déplacement longitudinale à toute abscisse x s'exprime comme une combinaison linéaire de fonctions de base données et des variables nodales u_i et u_j

$$u(x) = N_i(x)u_i + N_j(x)u_j = \{N\}^T \{u\}$$

avec :

$$\{N\}^T = \{N_i, N_j\} \quad \text{et} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Pour que le déplacement $u(x)$ vérifie les conditions aux limites, c'est à dire $u(x=x_1)=u_1$ et $u(x_2)=u_2$, les fonctions de base, ou fonctions d'interpolation $N(x)$ doivent vérifier la condition suivante :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Les fonctions de base sont de forme polynomiale et dans ce cas vérifiant deux conditions aux limites; elles sont donc de la forme : $N_i(x) = a_i x + b_i$ et $N_j(x) = a_j x + b_j$

- Supposons que $x_i = 0$ (le nœud i coïncide avec l'origine du repère) et que $x_j = l$ (la longueur de l'élément est l).

$$\left. \begin{aligned} N_i(x=0) = 1 &\rightarrow b_i = 1 \\ N_i(x=l) = 0 &\rightarrow a_i = -1/l \end{aligned} \right\}$$

donc :

$$N_i(x) = \frac{-x}{l} + 1.$$

De la même façon on trouve

$$N_j(x) = \frac{x}{l}.$$

Calculons l'énergie de déformation de l'élément : $E_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv$ en traction compression la contrainte normale est reliée à la déformation longitudinale par la relation : $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$; E : module de Young du matériau. La déformation longitudinale ε_{xx} est reliée au déplacement $u(x)$ par la relation :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} = u(x)_{,x} = \{N\}_{,x}^T \{u\}$$

avec :

$$\{N\}_{,x}^T = \{-1/l, \quad -1/l\}.$$

Remplaçons l'expression de ε_{xx} dans celle de l'énergie de déformation.

$$\begin{aligned}
 E_i &= \frac{1}{2} \int_v E \{N\}_x^T \{u\}^2 dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_v E \{N\}_x^T \{u\} \{N\}_x \{u\} dv \\
 &= \frac{1}{2} \{u\}^T \left[\int_v E \{N\}_x \{N\}_x^T dv \right] \{u\}
 \end{aligned}$$

on pose

$$[K_e] = \int_v E \{N\}_x \{N\}_x^T dv = \int_0^l E S(x) \{N\}_x \{N\}_x^T dx \quad (IV.6)$$

Où $S(x)$ désigne la section droite de l'élément à l'abscisse x .

Si on suppose que E et S sont constantes sur la longueur de l'élément, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément V^e s'écrit :

$$[K_e] = E.S. \int_0^l \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{Bmatrix} \{ -1/l, 1/l \} dx$$

Soit après intégration :

$$[K_e] = \frac{E.S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV.7)$$

4.5.2- Matrice de rigidité d'un élément de poutre mis en flexion simple:

Considérons une poutre en flexion simple dans un plan principal de flexion soit (x,y) .

- L'interpolation de la flèche $y(x)$ s'écrit ici sous la forme :

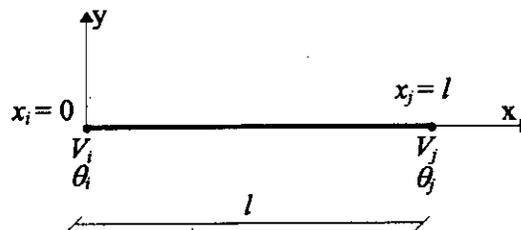


Fig. (IV.2) : élément poutre en flexion simple

$$\{y(x)\} = \{N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ N_4(x)\} \begin{Bmatrix} y_1(x) \\ \theta_1(x) \\ y_2(x) \\ \theta_2(x) \end{Bmatrix} = \{N\}^T \{u_0\}$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} y(x=0) &= y_1 & y(x=l) &= y_2 \\ \dot{y}(x=0) &= \theta_1 & \dot{y}(x=l) &= \theta_2 \end{aligned}$$

Les fonctions de base (ou d'interpolation) sont ici des polynômes de 3^{ème} degré, c'est à dire :

$$N_i(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (\text{IV.8})$$

d'où après calcul on trouve :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= l - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_2(x) &= l\left(\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \\ N_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_4(x) &= -l\left(\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \end{aligned}$$

La déformation due au cisaillement étant négligée, on peut écrire :

$$[K_e] = \int_{V_e} E \{N\}_{,x} \cdot \{N\}_{,x}^T dv \quad \text{soit } K_{ij} = E S \int_0^l N_i(x)_{,x} N_j(x)_{,x} dx \quad (\text{eq IV.6})$$

d'où après intégration :

$$[K_e] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{Sym} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

4.5.3- Matrice de rigidité d'un élément fini de poutre soumis à la flexion composée.

Pour avoir la matrice de rigidité d'un tel élément on fait simplement assembler la matrice de rigidité d'un élément de poutre en extension avec celle d'un élément de poutre soumis à la flexion simple.

Soit après assemblage :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

4.6- Energie cinétique; matrice de masse

Par définition l'énergie cinétique de l'élément e_i est égale à :

$$T_i = \frac{1}{2} \int_v \rho [\dot{u}(x)]^2 dv = \frac{1}{2} \int_v \rho \{N\}^T \{\dot{u}\}^2 dv$$

car :

$$u(x) = \{N\}^T \{u\} \rightarrow \dot{u}(x) = \{N\}^T \{\dot{u}\}$$

$\{N\}^T$ étant indépendant du temps.

Avec $\{\dot{u}\}$ désigne le vecteur vitesses nodales et ρ la masse volumique du matériau constituant l'élément fini.

$$T_i = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T \left[\int_v \rho \{N\}^T \{N\} dv \right] \{\dot{u}\}$$

on pose :

$$[M_e] = \int_v \rho \{N\}^T \{N\} dv \quad (\text{IV.11})$$

L'énergie cinétique s'écrit alors :

$$T_i = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [M_e] \{\dot{u}\} \quad (\text{IV.11}^*)$$

où $[M_e]$ désigne la matrice de masse élémentaire de l'élément fini, les fonctions de base sont indépendantes du temps, donc on peut prendre les mêmes expressions que celles correspondant au cas statique.

4.7- Application à l'élément fini de poutre :

4.7.1- Matrice de masse de l'élément fini de poutre en extension :

$$[M_e] = \int_0^l \rho \{N\}^T \{N\} dx = \int_0^l \rho S(x) \{N\}^T \{N\} dx = \int_0^l \rho S(x) \left\{ \begin{array}{c} \frac{-x}{l} + 1, \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{array} \right\} dx$$

Si on suppose que ρ et $S(x)$ sont constant sur la longueur de l'élément, la matrice de masse élémentaire s'écrit alors après intégration :

$$[M_e] = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.7.2- Matrice de masse de l'élément fini de poutre en flexion simple :

Soit :

$$M_{ij} = \rho S \int_0^l N_i(x) \cdot N_j(x) dx$$

Les fonctions de base $N_i(x)$ sont explicitées dans les équations, après intégration on aura :

$$[M_e] = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & Sym & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

4.7.3- Matrice de masse de l'élément fini de poutre en flexion composée :

Cette matrice peut être obtenue en assemblant la matrice de masse du même élément de poutre extension avec celle de l'élément de poutre en flexion simple, après assemblage on peut avoir donc :

$$[M_e] = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ & & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ Sym & & & & 156 & -22l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

4.8- Représentation des masses :

Il existe deux classes principales de représentation des masses : les masses cohérentes et les masses concentrées.

4.8.1- La technique des masses concentrées :

Elle consiste à discrétiser les masses soit au niveau élémentaire, soit au niveau de la structure complète de manière à obtenir une matrice de masse diagonale. Dans ce cas les calculs seront plus aisés qu'avec une matrice pleine, ce qui explique l'attrait évident de cette méthode.

4.8.2- La représentation cohérente des masses :

Elle consiste à calculer les matrices de masses élémentaires en choisissant pour la discrétisation spatiale de l'énergie cinétique les mêmes fonctions d'interpolation que pour l'énergie de déformation, cette méthode conduit généralement à des matrices de masses non diagonales. Comme on les a vues, les matrices de masses élémentaires sont calculées d'après l'expression :

$$[M_e] = \int_V \rho \{N\}^T \{N\} dv \quad (\text{eq. IV.11})$$

4.9- Transformation de coordonnées :

La transformation de coordonnées, consiste à exprimer les caractéristiques des éléments préalablement calculés dans un système d'axes locaux, dans un autre système d'axes globaux.

* Soit $\{u\}$ le vecteur des déplacements élémentaires par rapport à un système d'axes locaux (liés à l'élément) (X,Y,Z) et $\{u^*\}$ le vecteur des déplacements élémentaires par rapport à un système d'axes globaux (X^*,Y^*,Z^*) .

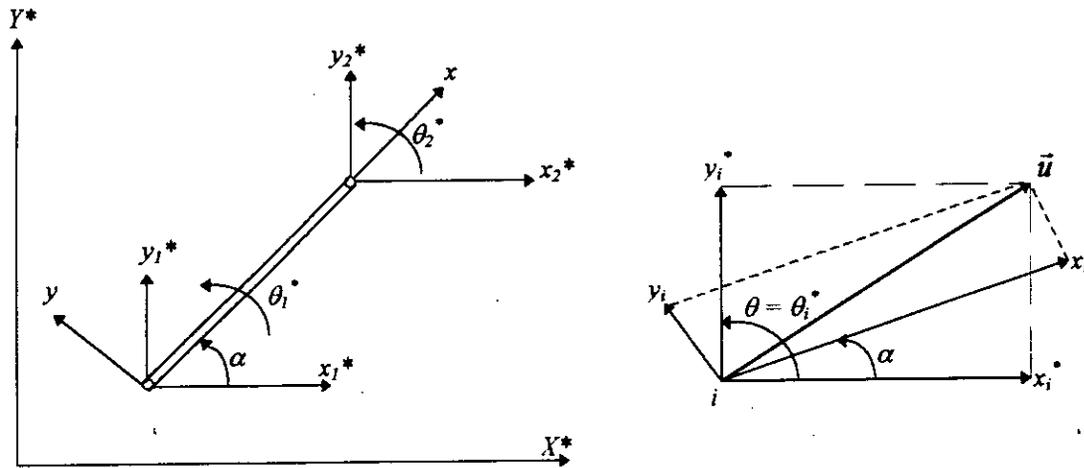


Figure IV.3 : Transformation de coordonnées pour une poutre dans un plan

- On peut écrire la relation suivante:

$$\{u\} = [P] \{u^*\} \quad (IV.12)$$

avec $[P]$ matrice de transformation.

Considérons notre cas, une poutre travaillant dans un plan, comme le montre la figure, dans ce cas on peut écrire pour un nœud i donné la relation suivante :

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^* \cos \alpha + y_i^* \sin \alpha \\ y_i &= -x_i^* \sin \alpha + y_i^* \cos \alpha \\ \theta_i &= \theta_i^* \end{aligned}$$

- On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= \{x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ x_2 \ y_2 \ \theta_2\} \\ \{u^*\}^T &= \{x_1^* \ y_1^* \ \theta_1^* \ x_2^* \ y_2^* \ \theta_2^*\} \end{aligned}$$

D'où :

$$[P] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on a :

$$E_i = \frac{1}{2} \{u_i\}^T [K_e] \{u_i\}$$

Par l'utilisation de l'équation (IV. 12) E_i devient :

$$E_i = \frac{1}{2} \{u_i^*\} [P]^T [K_e] \{u_i\} = \frac{1}{2} \{u_i^*\}^T ([P]^T [K_e] [P]) \{u_i^*\}$$

$$E_i = \frac{1}{2} \{u_i^*\}^T [K_{eg}] \{u_i^*\} \quad (\text{IV.13})$$

donc :

$$[K_{eg}] = [P]^T [K_e] [P] \quad (\text{IV.14})$$

Où $[K_{eg}]$ désigne la matrice de rigidité élémentaire dans le système de coordonnées globale. De la même manière l'énergie cinétique s'écrit:

$$T_i = \frac{1}{2} \{u_i\}^T [M_e] \{u_i\} \quad (\text{voir équation IV.11}^*)$$

Sachant que :

$$\{u_i\} = [P] \{u_i^*\}$$

($[P]$ indépendante du temps), alors :

$$T_i = \frac{1}{2} \{u_i^*\} [P]^T [M_e] [P] \{u_i^*\} = \frac{1}{2} \{u_i^*\} [M_{eg}] \{u_i^*\}$$

donc :

$$[M_{eg}] = [P]^T [M_e] [P] \quad (\text{IV.15})$$

$[M_{eg}]$ désigne la matrice de masse élémentaire dans le système de coordonnées globales.

4.10- Assemblage :

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices K, M et F de la structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments K_e , M_e et F_e préalablement calculées. Nous allons rappeler ici la méthode d'assemblage dans un cadre général en utilisant l'approche énergétique, ainsi que la règle pratique d'assemblage.

4.10.1- Approche énergétique :

L'énergie totale de déformation de la structure est égale à la somme des énergies de déformation de chacun des éléments. De même, l'énergie cinétique totale de la structure est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun des éléments :

$$E = \sum E_i \text{ et } T = \sum T_i$$

Pour un élément V^e ,

$$E_i = \frac{1}{2} \{u_i^*\} [K_{eg}] \{u_i^*\}$$

et

$$T_i = \frac{1}{2} \{u_i^*\} [M_{eg}] \{u_i^*\}$$

soit $\{u\}$ le vecteur contenant l'ensemble des déplacements nodaux de la structure, le vecteur $\{u_i^*\}$ peut s'écrire en fonction du vecteur $\{u\}$:

$$\{u_i^*\} = [L_i] \{u\},$$

où $[L_i]$ désigne une matrice appelée matrice de localisation ou matrice "booléenne" dont les termes sont tous nuls sauf ceux correspondant aux composantes de $\{u_i^*\}$ qui sont égaux à l'unité.

4.10.2- Règle pratique d'assemblage :

On peut déduire des considérations énergétiques précédentes, la règle pratique suivante :

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous matrices de rigidité de chaque élément les indices de lignes et colonnes correspondant à la numérotation des nœuds de cet élément, l'assemblage de la matrice de masse et des forces équivalentes s'effectue de façon similaire.[1]

4.11- Introduction des conditions aux limites :

Le système algébrique $[K]\{u\} = \{F\}$ doit être résolu en $\{u\}$, après modification de la matrice $[K]$ et du vecteur $\{F\}$ pour tenir compte des conditions aux limites en déplacement $u_i = \bar{u}_i$.

Les conditions aux limites peuvent être introduites dans le système précédent de plusieurs manières. Parmi les trois méthodes qui existent, on a choisi la méthode dite du terme diagonal dominant qui est très simple à mettre en œuvre car il suffit de changer les deux termes K_{ii} et F_i .

4.11.1- Méthode du terme diagonal dominant :

La matrice $[K]$ est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites, puis chaque relation $u_i = \bar{u}_i$ est introduite en remplaçant K_{ii} par $K_{ii} + \alpha_0$ et F_i par $\alpha_0 \bar{u}_i$, α_0 étant un nombre très grand par rapport à tous les termes K_{ii} , soit $\alpha_0 = 10^{35}$.

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_{i1} & \dots & K_{ii} + \alpha_0 & \dots & K_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 \dots \\
 u_i \\
 \dots \\
 u_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1 \\
 \dots \\
 \alpha_0 \bar{u}_i \\
 \dots \\
 F_n
 \end{bmatrix}
 \tag{IV.18}$$

L'équation s'écrit :

$$\alpha_0 u_i + \left(\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j \right) = \alpha_0 \bar{u}_i \tag{IV.19}$$

Elle admet comme solution approchée :

$$u_i = \bar{u}_i \text{ si } \alpha_0 \bar{u}_i \gg \left(\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j \right) \quad [2]$$

4.12- Résolution de système d'équations linéaires :

4.12.1- Introduction :

La résolution du système d'équations $[K]\{u\} = \{F\}$ est une étape importante de la méthode des éléments finis, ce système est linéaire lorsque $[K]$ ne dépend pas de $\{u\}$.

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories.

- Les méthodes directes : méthode d'élimination de Gauss, méthode de Cholesky.
- Les méthodes itératives : méthode de Gauss-Seidel, méthode de relaxation, méthode de Jacobi.

Etant donnée que $[K]$ est une matrice symétrique et défini positive, on peut choisir donc comme méthode de résolution, la méthode de Cholesky.

4.12.32- Méthode de Cholesky :

a) principe :

si $[K]$ est une matrice symétrique et défini positive, il est possible de la factoriser sous la forme $[K] = [L][L]^T$,

où : T désigne transposée de la matrice

$[L]$ est une matrice réelle triangulaire inférieure.

La résolution du système : $[K]\{u\} = \{F\}$ est équivalent donc à la résolution du système :

$$[L][L]^T \{u\} = \{F\}$$

b) Algorithme de la méthode de Cholesky [4] :

b.1) Factorisation de la matrice K :

L'algorithme de factorisation de $[K]$ en $[L][L^T]$ est le suivant :

$$\begin{array}{l}
 \overline{i = 1, n} \\
 \left[\begin{array}{l}
 \text{Si } a_{ii} < 0 \text{ s'arrêter} \\
 \text{Sinon } s = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (L_{ik})^2 \\
 \text{Si } s < 0 \text{ s'arrêter} \\
 \text{Sinon } L_{ii} = (s)^{1/2} \\
 \overline{j = 1, n} \\
 \left[\begin{array}{l}
 L_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} \right] / L_{ji} \longrightarrow \text{calcul de } [L] \\
 L_{ij}^T = L_{ji} \longrightarrow \text{calcul de } [L^T]
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

b.2) Résolution du système linéaire $[K]\{u\} = \{F\}$

Après factorisation, la résolution de : $[L][L^T]\{u\} = \{F\}$ devient équivalente à la résolution de :

$$\begin{cases}
 [L]\{Y\} = \{F\} \\
 [L^T]\{u\} = \{Y\}
 \end{cases}$$

qui se fait immédiatement par les deux algorithmes suivants :

Résolution du système $[L]\{Y\} = \{F\}$

$$\begin{array}{l}
 \overline{i = 1, n} \\
 \left[\begin{array}{l}
 \text{Calcul de } \{Y\} : \\
 Y_i = \left[F_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} Y_j \right] / L_{ii}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Résolution du système $[L]^T \{u\} = \{Y\}$

$$\begin{array}{l}
 i = n, 1 \\
 \left[\begin{array}{l}
 \text{Calcul de } \{u\} : \\
 u_i = \left[Y_i - \sum_{j=i+1}^n L_{ij} u_j \right] / L_{ii}^T
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

4.13- Technique de stockage :

Les matrices $[K]$ sont des matrices creuses.

Avec une bonne numérotation qui consiste à minimiser autant que possible la différence entre les indices des noeuds de chaque élément, on arrive à rassembler les termes non nuls autour de la diagonale, on dira alors que la matrice $[K]$ à une structure "bande".

$$[K] = \begin{bmatrix}
 x & x & 0 & . & . & . & 0 \\
 x & x & x & & & & . \\
 . & x & x & x & & & . \\
 . & & x & x & x & & . \\
 . & & & x & x & x & . \\
 . & & & & x & x & x \\
 0 & . & . & . & . & x & x
 \end{bmatrix}$$

Pour ne pas manipuler les termes nuls lors de la résolution on ne gardera que les éléments de la demi-bande supérieur de $[K]$, on les stockera de la manière suivante :

- * la diagonale principale devient la première colonne.
- * la diagonale adjacente devient la seconde colonne, ... etc.

$$[K]_{\text{bande}} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc la structure de bande de la matrice $[K]$ est une caractéristique importante de la M.E.F.

Elle permet des économies tant au niveau du stockage de la matrice que de la résolution du système d'équations final.

5

La méthode des éléments finis en dynamique

V- La méthode des éléments finis en dynamique

5.1- introduction :

De nombreux problèmes d'analyse des structures peuvent être traités par la méthode d'analyse statique qui a été exposée auparavant. cependant il existe également de nombreux cas où l'on ne peut négliger les forces d'inerties et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées. Pratiquement n'importe quelle structure est susceptible de subir pendant sa durée de vie un chargement dynamique sous forme ou une autre.

5.2- Caractéristiques essentielles d'un problème dynamique :

Un problème de dynamique des structures se distingue du problème statique correspondant par deux caractéristiques importantes :

* La première est, par définition la nature évolutive du problème dynamique dans le temps, comme la charge et la réponse (déplacement) varient. Il est évident qu'un problème dynamique n'a pas qu'une solution.

* d'autre part si le chargement $F(t)$ est appliqué dynamiquement, les déplacements de la structure correspondent à des accélérations, qui produisent des forces d'inerties opposées à ces mêmes accélérations. ces forces d'inerties constituent la caractéristique distinctive la plus importante des problèmes de dynamique des structures.[3]

5.3- Formulation des équations du mouvement :

5.3.1- Principe de HAMILTON:

Considérons un système élastique conservatif. en élastostatique, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_{ij} & : \text{tenseur des contraintes} \\ f_i & : \text{forces de volume} \end{cases}$$

Par ailleurs en élastostatique, les théorèmes de l'énergie (principe des travaux virtuels ou théorèmes de l'énergie potentielle totale dans le cas d'une approche déplacement) constituent une caractérisation énergétique de l'état d'équilibre.

En dynamique s'il n'y a pas d'autres forces de volume que les forces d'inerties :

$$f_i = -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Les équations de mouvement s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$$

* En dynamique il existe également une approche énergétique ou variationnelle pour l'étude du mouvement, c'est le principe de HAMILTON qui constitue le fondement.

Principe de HAMILTON :

Dans le cas le plus général de systèmes non conservatif comme par exemple en présence de forces d'amortissement; le principe de HAMILTON s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^* dt = 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0 \quad (V.1)$$

On a respectivement pour l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle totale V :

$$T = \int_v \rho \dot{u}_i \dot{u}_j dv,$$

$$V = U - V = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_s \Phi_i u_i ds - \int_v F_i u_i dv$$

L'énergie potentielle V est la somme de l'énergie de déformation U et du potentiel des forces conservatives de surface et de volume.

W^* est le travail effectué par les forces non conservatives agissant sur le système.

δ est la variation subit pendant l'intervalle de temps considéré $[t_1, t_2]$.

5.3.2- Equations de LAGRANGE :

- En pratique on cherche à obtenir des solutions approchées du problème continu, en le réduisant à un problème discret en un nombre fini de degré de liberté. le plus souvent on définit une approximation des déplacements en séparant les variables d'espace et de temps en écrivant pour chaque composante de déplacement :

$$\tilde{u}_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x, y, z) \cdot a_i(t) \quad (V.2)$$

avec $a_i(t)$: coordonnées généralisés (fonctions inconnues).

$\Phi_i(x, y, z)$: fonctions de base de l'approximation définies dans le domaine (v).

On a de même pour les composantes de vitesses :

$$\tilde{u}_j(x, t, z, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x, y, z) \dot{a}_i(t) \quad (\text{V.3})$$

On peut ainsi exprimer le Lagrangien $L = T - V$ à l'aide des coordonnées généralisées et de leurs dérivées. Si l'on a effectué les intégrations des fonctions connues par rapport aux coordonnées d'espace :

$$L = T(\tilde{u}_j) - V(\tilde{u}_j) = T(\dot{a}_i) - V(a_i) \quad (\text{V.4})$$

* Pour les systèmes conservatifs, le principe de HAMILTON s'énonce alors simplement :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(a_i, \dot{a}_i, t) dt \quad (\text{V.5})$$

Définitions :

1- On appelle fonctionnelle une intégrale qui dépend d'une ou plusieurs fonctions inconnues appelées fonctions argument d'une ou plusieurs variables.

Les fonctions arguments peuvent intervenir sous forme de leurs dérivées jusqu'à l'ordre n .

2- La fonction d'extremum de la fonctionnelle à une fonction argument u d'une seule variable :

$$J(u) = \int_a^b F(x, u, \dot{u}) dx \quad (\text{cas } n=1)$$

est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right] - \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

Cette équation est appelée équation d'EULER. [1]

Donc, il s'agit pour l'équation (V.5) d'un problème variationnel classique à n fonctions arguments $\{a_i, i=1, 2, \dots, n\}$ de la variable temps.

Les conditions d'extremum de cette fonctionnelle sont les équations d'EULER suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \quad \text{Pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{V.6})$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial a_i} = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{V.7.c})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial U}{\partial a_i} = Q_i \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{V.7.b})$$

Avec Q_i force généralisée correspondant à la coordonnée a_i et définie par le travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta W = Q_i \delta a_i$$

Ces équations sont appelées les équations de LAGRANGE ou équations d'EULER-LAGRANGE.

Elles sont les équations du mouvement du système discret défini par une approximation du système continu avec n coordonnées généralisées.

* Pour les systèmes non conservatifs, la principe de HAMILTON devient :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(a_i, \dot{a}_i, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^* dt = 0 \quad \forall \delta a_i \neq 0 \quad (\text{V.8})$$

Si par linéarisation, le travail virtuel des forces non conservatives causées par les accroissements virtuels des coordonnées peut s'exprimer comme combinaison linéaire des δa_i soit:

$$\delta W^* = \sum Q_i \delta a_i$$

Les équations de LAGRANGE s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial a_i} = Q_i^* \quad (\text{V.9.a})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial a_i} = Q_i^* \quad (\text{V.9.b})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial U}{\partial a_i} = Q_i + Q_j = \tilde{Q}_i \quad (\text{V.9.c})$$

* Pour les systèmes avec amortissement, le terme additionnel Q_i^* représente la force généralisées de dissipation.

* Les équations de LAGRANGE permettent d'obtenir les équations du mouvement du système à partir des expressions des énergies cinétiques, potentielle et de dissipation. Dans le cas de petits mouvements des système élastiques, les énergies cinétique et de déformation s'expriment sous forme quadratique symétriques des vitesses et des coordonnées généralisées respectivement :

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j A_{ij} \dot{a}_i \dot{a}_j = \frac{1}{2} \dot{a}^T A \dot{a} \\ U &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_{ij} a_i a_j = \frac{1}{2} a^T A a \end{aligned} \right\} \quad (V.10)$$

Les équations de LAGRANGE s'écrivent alors en écriture matricielle :

$$A\ddot{a} + Ba = Q$$

Le vecteur second membre Q représente la somme des forces extérieures et des autres forces non conservatives telles que les forces d'amortissement.

Si ma méthode de discrétisation choisie est une méthode d'éléments finis de type déplacement, on va chercher une approximation de la solution en termes d'interpolation des déplacements aux nœuds, les déplacements aux nœuds u_i jouent le rôle de coordonnées généralisées.

Les équations de Lagrange s'écrivent alors, pour un système conservatif :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i(t) \quad (V.11)$$

- Pour les petits mouvements des systèmes élastiques, les énergies cinétiques et de déformation s'expriment respectivement, comme forme quadratiques des vitesses et des déplacements aux nœuds soient :

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{u}_i M_{ij} \dot{u}_j = \frac{1}{2} \dot{u}^T M \dot{u} \\ U &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j u_i K_{ij} u_j = \frac{1}{2} u^T A u \end{aligned} \right\} \quad (V.12)$$

Les équations de Lagrange deviennent alors :

$$M\ddot{u} + Ku = F(t) \quad (V.13)$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueux il faut ajouter au second membre leur termes additionnel de force de dissipation visqueuse.

$$F^* = -C \dot{u}$$

d'où les équations du mouvement :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + Ku = F(t) \quad (V.14)$$

5.4- L'amortissement :

Définition :

Le mouvement des structures soumises à des charges variables au cours de temps dépend en particulier des propriétés de d'amortissement. Le phénomène d'amortissement correspond à la dissipation sous forme de chaleur dans la structure d'une partie de l'énergie injectée dans cette dernière.

Du point de vue pratique, il convient une distinction entre :

a) l'amortissement interne ou structural, qui se produit dans les matériaux à l'occasion des déformations qu'ils subissent.

b) et les amortissements externes qui correspondent à des frottements divers et se résument essentiellement à ceux qui interviennent le long des interfaces de contact entre la structure et les éléments non structuraux lorsqu'il en existe.

- L'amortissement interne ou structural représente en général la principale et quelques fois la seule cause de dissipation d'énergie.

- On se bornera à rappeler ici qu'il comporte essentiellement deux termes : l'un de type visqueux et l'autre dit "d'hystérésis".

5.4.2- Différent type d'amortissement :

Selon le phénomène physique mis en cause, on distingue ces deux types d'amortissement suivants :

a) Amortissement visqueux : Pour lequel la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse. Ce type est lié à la viscoélasticité des matériaux.

b) Amortissement hystéritique : Pour lequel la force d'amortissement est proportionnelle au déplacements et de signe opposé à celui de la vitesse. Ce type d'amortissement tire son origine de la non linéarité du comportement des éléments structuraux.

Ces deux types d'amortissement sont les plus couramment rencontrés. On peut en outre signaler que l'effet de dissipation d'énergie par rayonnement, observé en particulier lors du mouvement d'une structure posée sur le sol semi-infini est assimilable pour des mouvements à basses fréquences à un amortissement visqueux [5]. L'amortissement que nous avons introduit dans notre problème est supposé de type visqueux.

5.4.3- Détermination de la matrice d'amortissement :

La détermination pratique de la matrice d'amortissement $[C]$ demeure difficile. Les phénomènes physiques intervenants dans la dissipation d'énergie due à l'amortissement sont nombreux : frottements, chocs, viscosité et plasticité des matériaux, rayonnement, ... etc. Leurs lois sont souvent mal connues.

Il n'est donc pas possible en général d'introduire l'amortissement dans les calculs sous une forme mathématique strictement représentative de la physique des phénomènes.

Toutefois, on suppose souvent que la matrice d'amortissement a pour expression une combinaison linéaire des matrices de rigidité et de masse. [5]

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (V.15)$$

Les paramètres α et β sont déterminés expérimentalement. Un tel amortissement est appelé amortissement de Rayleigh.

5.5- Résolution de systèmes non stationnaires :

5.5.1-Introduction :

Après la discrétisation spatiale, par éléments finis, un système non stationnaire s'écrit sous la forme :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\} \quad (V.16)$$

avec les conditions initiales :

$$\{U(t=0)\} = \{U_0\} ; \quad \{\dot{U}(t=0)\} = \{\dot{U}_0\}$$

* Dans un système linéaire $[M]$, $[C]$ et $[K]$ et $\{F(t)\}$ sont indépendants de $\{U\}$ et de ces dérivées. De plus dans de nombreux systèmes physiques les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont indépendantes du temps. Ce qui suppose que les paramètres physiques du système ne dépendent pas du temps.

On cherche $\{U(t)\}$, $\{\dot{U}(t)\}$ et $\{\ddot{U}(t)\}$ à différents instants t vérifiant la relation (V.16) pour ce faire nous disposons de deux types de méthodes : Les méthodes directes et les méthodes de superposition.

Les méthodes d'intégration directes consistent à construire numériquement, à partir de $\{U_0\}$ et $\{\dot{U}_0\}$ une suite de valeurs de la solution aux instants successifs $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$, ..., $t_0 + n\Delta t$.

$$\{U(t_0)\}, \{U(t_0 + \Delta t)\}, \dots, \{U(t_0 + n\Delta t)\}$$

Par contre dans méthode de superposition, on commence par transformer le système d'équation (V.16) en un système d'équations découplé. Chacune des équations aussi des termes est alors intégré explicitement ou numériquement, la solution cherchée est une combinaison linéaire des solutions des équations découplées.

5.5.2- Méthode d'intégration directe :

La solution numérique de l'équation précédente est obtenue on utilisant un schéma de discrétisation temporelle explicite ou implicite. Nous présentons les schémas du type Newmark obtenus par les séries de Taylor :

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \{\dot{U}_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-b)\{\ddot{U}_t\} + b\{\ddot{U}_{t+\Delta t}\}] \quad (V.17)$$

$$\{\dot{U}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{U}_t\} + \Delta t [(1-a)\{\ddot{U}_t\} + a\{\ddot{U}_{t+\Delta t}\}] \quad (V.18)$$

où Δt représente le pas de temps, les différents schémas de la famille de Newmark correspondant à des valeurs particulières de a et b. [7]

a) Schéma de différences finies centrales explicite :

En choisissant $b=0$ et $a=1/2$ on obtient le schéma des différences finies centrales.

Les équations (V.17) et (V.18) conduisent à :

$$\{\ddot{U}_t\} = \frac{1}{\Delta t^2} [\{U_{t+\Delta t}\} - 2\{U_t\} + \{U_{t-\Delta t}\}] \quad (V.19)$$

$$\{\dot{U}_t\} = \frac{1}{2\Delta t} [\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_{t-\Delta t}\}] \quad (V.20)$$

L'équation (V.16) à l'instant t s'écrit :

$$[\bar{K}] \{U_{t+\Delta t}\} = \{R_t\} \quad (V.21)$$

avec :

$$[\bar{K}] = \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2} \Delta t [C]$$

$$\{R_t\} = \{F_t\} - [K] \{U_t\} + \frac{1}{\Delta t^2} [M] [2\{U_t\} - \{U_{t-\Delta t}\}] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \{U_{t-\Delta t}\}$$

L'algorithme de résolution est :

- Solution initiale à $t=0$: connaissant $\{U_0\}$ et $\{\dot{U}_0\}$

- Obtenir $\{\ddot{U}_0\}$ par (V.16) :

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_0\} - \Delta t \{\dot{U}_0\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{U}_0\}$$

- Pour chaque pas de temps $t + \Delta t$

Résoudre (V.21)

Obtenir $\{\dot{U}_t\}$ et $\{\ddot{U}_t\}$ par (V.19) et (V.20) si nécessaire.

Remarques :

- Si les matrices $[M]$ et $[C]$ sont diagonales, cette méthode est très efficace pour les problèmes de grande taille.

- Le schémas est conditionnellement stable : $\Delta t \leq T_{min}$, ou T_{min} est la plus petite période du système (V.16).

b) Schéma de Newmark classique implicite :

On choisissant $b = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient le schémas implicite de Newmark qui souvent utilisé pour l'analyse dynamique des structures. L'équation (V.16) s'écrit à l'instant $t+\Delta t$ en utilisant (V.17) et (V.18).

$$[\bar{K}] \{U_{t+\Delta t}\} = \{R_{t+\Delta t}\} \quad (V.22)$$

avec :

$$[\bar{K}] = [K] + \frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C]$$

$$\{R_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} + [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2} \{U_t\} + \frac{4}{\Delta t^2} \{\dot{U}_t\} \right) + [C] \left(\frac{2}{\Delta t} \{U_t\} + \{\dot{U}_t\} \right) + [M] \{\ddot{U}_t\}$$

L'algorithme de résolution est défini ci-dessous.

- Solution initiale $\{U_0\}$, $\{\dot{U}_0\}$

- Résoudre (V.16) pour $\{\ddot{U}_0\}$

- Construire $[\bar{K}]$ et triangulariser si $[M]$, $[C]$, $[K]$ et Δt sont constantes.

- Pour chaque $t+\Delta t$:

- Calculer le résidu $\{R\}$ par (V.22)

- Calculer $[C]$ et triangulariser si c'est nécessaire

- Résoudre (V.22) pour $\{U_{t+\Delta t}\}$

- obtenir $\{\ddot{U}_{t+\Delta t}\}$ et $\{\dot{U}_{t+\Delta t}\}$ par (V.17) et (V.18):

$$\{\ddot{U}_{t+\Delta t}\} = \frac{4}{\Delta t^2} (\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\}) - \frac{4}{\Delta t} \{\dot{U}_t\} - \{\ddot{U}_t\}$$

$$\{\dot{U}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{U}_t\} + \frac{\Delta t}{2} (\{\ddot{U}_{t+\Delta t}\} + \{\ddot{U}_t\})$$

Remarque : Le schéma $a = b = \frac{1}{2}$ est inconditionnellement stable.

6

*Calcul des structures
soumises à des excitations
d'appuis multiples*

VI- Calcul des structures soumises à des excitations d'appuis multiples :

6.1- Introduction :

L'action sismique consiste en un mouvement vibratoire du sol dont le caractère est aléatoire et l'amplitude est forte, elle correspond à une propagation ayant pris naissance à l'intérieur de l'écorce terrestre. Sa durée varie notablement d'un séisme à l'autre mais elle est toujours courte (quelques seconde à quelques dizaines de secondes).

- Ce mouvement excite chaque point du sol et il lui donne un déplacement de translation dans les trois directions de l'espace. Dans le cas où les deux points sont très voisins, et par raison de continuité, ils seront animés de mouvements pratiquement identiques et synchrones. Par contre s'ils sont distant d'une longueur finie, leurs mouvements seront décalés dans le temps d'une durée égale au temps de propagation du front d'onde entre les points considérés, en outre, ces mouvements ne seront pas identiques du moment où le signal subit des altérations au long de sa propagation. Il en résulte donc que les deux points considérés seront animés l'un par rapport à l'autre de déplacements différentiels d'autant plus importants que la distance qui les sépare est plus grande. [5]

- Le mouvement d'un point quelconque du sol sera connu au moyen des accélérogrammes de ses trois composantes, c'est à dire les enregistrements qui donnent pour chacune d'elles les accélérations en fonction du temps. Avant de les utiliser, les enregistrements subissent quelques corrections de caractère très technique, pour arriver à des accélérogrammes dits "corrigés", il faut noter aussi que les vitesses et les déplacements s'en déduisent par des intégrations successives.

6.2- Exemple de structures soumises à des excitations d'appuis multiples.

Les ouvrages de grande longueur : Sont considérés comme ouvrages de grande longueur, les ouvrages continus dans lesquels la distance entre points d'appuis extrêmes est supérieure au quart ($\frac{1}{4}$) de la longueur L_m . L_m étant la distance au delà de laquelle les mouvements des deux points peuvent être considérés comme indépendants, elle est donnée dans le tableau ci dessous en fonction de la classe du site (voir tableau 5.6 AFPS90).

Tableau VI.1 : Distance minimale entre appuis indépendants en fonction du site.

Site	S_0	S_1	S_2	S_3
L_m (m)	600	500	400	300

Cette définition ne concerne pas les ouvrages construits sur un radier monolithe, les distances s'étendent entre le centre de gravité des sections horizontales des appuis (semelles, caissons, groupe de pieux ...).

6.2.1- Variabilité du mouvement sismique entre appuis :

Afin de traiter cette variabilité, dans le cas des ouvrages de grande longueur, nous allons distinguer trois cas principaux :

Cas N°1 : La longueur totale de l'ouvrage est inférieure à $\frac{3}{4} L_m$. Dans ce cas, le même mouvement sismique peut être appliqué à chaque point d'appui sous réserve d'observer en chacun de ces points un décalage dans le temps égale au temps de propagation du mouvement (excitation multiple). Ce dernier étant supposé se propager dans le direction longitudinale de l'ouvrage (voir la figure ci-dessous). [IX]

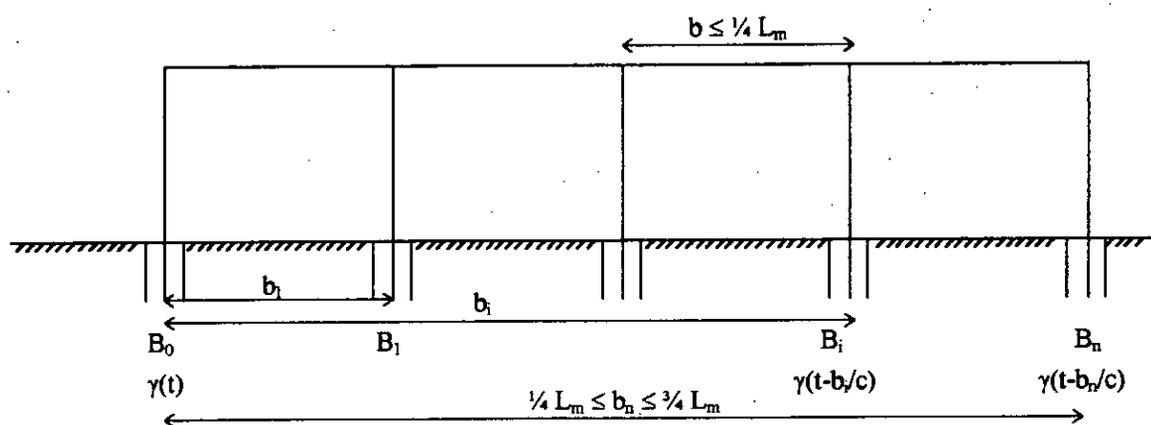


Figure VI.1 : Accélérogrammes identiques décalés

C = vitesse de propagation du mouvement suivant l'axe de l'ouvrage.

$\gamma(t)$ = accélérogramme.

Cas N° 2 : La longueur totale de l'ouvrage étant toujours inférieure à $\frac{3}{4} L_m$, mais dans le cas où deux points d'appuis consécutifs sont distants d'une longueur supérieure $\frac{1}{4} L_m$. Dans ce cas il doit être fait usage en ces deux points d'accélérogrammes distincts présentant une valeur moyenne de la fonction d'interpolation inférieure à environ 0.2 (voir la figure ci-dessous) [9]

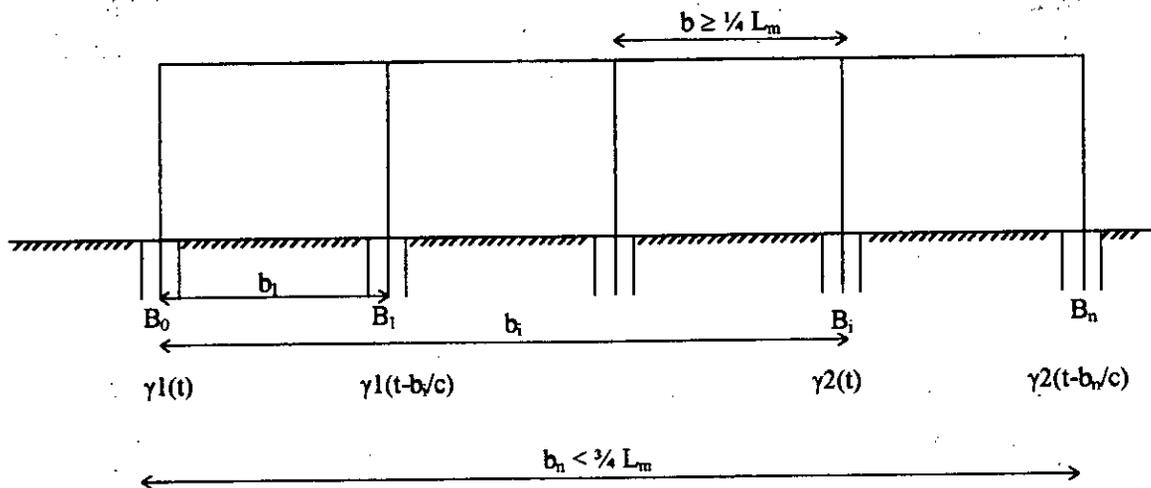


Figure VI.2 : Accélérogrammes distincts non corrélés

Cas N°3 : Si la longueur totale de l'ouvrage est supérieure à $\frac{3}{4} L_m$, sans que ce dernier comporte pour autant des travées de portée supérieure à $\frac{1}{4} L_m$, la structure est fictivement décomposée en tronçons de longueur égale ou inférieure à $\frac{1}{4} L_m$ auquel sont appliqués des mouvements décalés mais distincts présentant un coefficient d'intercorrélacion au plus égal à 0.25 de l'un à l'autre. [9]

Remarque : On pourra retenir comme vitesse de propagation du mouvement, la valeur de la vitesse des ondes de cisaillement de la couche superficielle dans laquelle est fondé l'ouvrage.

6.3- Formulation de l'équation du mouvement :

6.3.1- Cas d'une structure soumise à des excitations uniformes :

Les mouvements sismiques induisent dans les structures des actions dynamiques dues principalement aux forces d'inertie apparaissant dans les masses lorsqu'un mouvement est imposé au niveau des supports; les forces d'inertie sont en fonction de la réponse dynamique de cette structure et ne sont donc pas connues a priori. [10]

• Dans le cas où les autres actions induites par l'excitation sismique (déformations différentielles entre supports) sont nuls, la formulation généralement utilisée pour le problème dynamique de l'action sismique sera la suivante:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -\gamma(t)[M]\{I\} \quad (VI.1)$$

Dans cette équation :

$\{U\}$ est le vecteur des déplacements relatifs des points nodaux de la structure par rapport à un repère mobile lié au support où est imposé le mouvement sismique,

$\{\dot{U}\}$ et $\{\ddot{U}\}$ sont des accélérations relatives.

$[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont respectivement les valeurs de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure.

$\gamma(t)$ est l'accélérogramme définissant le mouvement sismique imposé au supports.

$\{J\}$ est un vecteur unitaire dans la direction considérée pour le mouvement sismique. Dans notre cas par exemple, nous n'avons pris en considération qu'une seule composante de l'accélérogramme. C'est celle qui est suivant x , les termes de $\{J\}$ seront donc égaux à 1 suivant la direction x et nuls suivant les deux autres directions.

- L'équation précédente exprime l'équilibre entre les forces d'inertie $[M]\{\ddot{U}\} + \gamma(t)\{J\}$ et la somme des forces internes résultant des déformations ($[K]\{U\}$) et des efforts d'amortissement ($[C]\{\dot{U}\}$); sa résolution à partir des conditions initiales (en générale $\{U\}=0$ et $\{\dot{U}\}=0$) (Chapitre V) permet de déterminer à chaque instant t le vecteur $\{U\}$ des déplacements relatifs dont on peut déduire les efforts internes.

- Le second membre de l'équation précédente (VI.1) correspond au cas où le mouvement sismique imposé au support est une translation dans une direction donnée et est le même pour tous les supports. L'idée de base était de traduire l'accélération du sol en terme de forces dynamiques appliquées en structure.

- Dans le cas par exemple d'oscillateur multiple à masses concentrées, m_1 et m_2 soumis à une accélération $\gamma(t)$ à sa base. Les forces dynamiques équivalentes appliquées aux masses sont :

$$-m_1 \gamma(t) \text{ et } -m_2 \gamma(t), \text{ (voir Figure VI.3)}$$

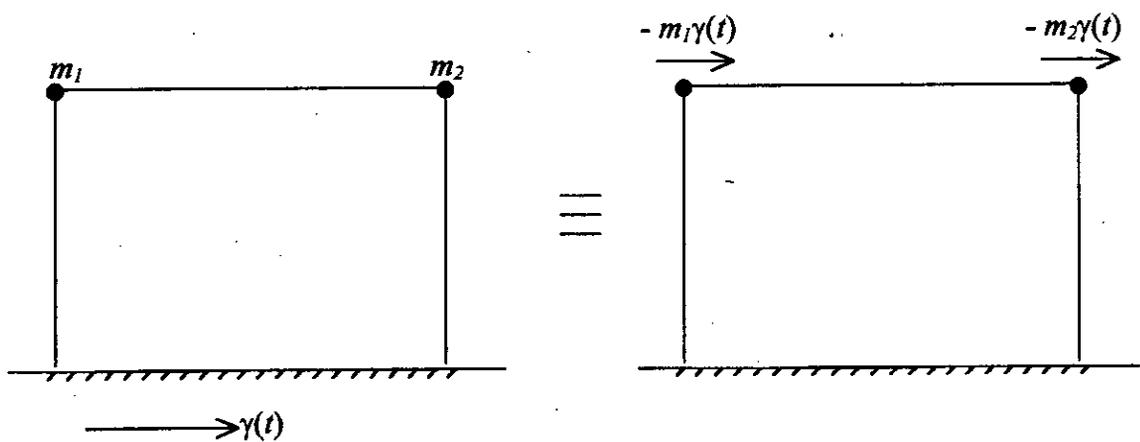


Figure VI.3 : Chargement dynamique équivalent dans le cas uniforme

Cependant, d'autres cas peuvent être rencontrés, le cas par exemple de structures dont les supports sont animés de mouvements différentiels, ou plus précisément le cas des structures soumises à des excitations d'appuis multiples. Le calcul de telles structures est notre objet, et il sera détaillé dans le paragraphe suivant.

6.3.2- Cas d'une structure soumise à des excitations multiples :

- Dans le cas des structures soumises à des excitations d'appuis multiples, on a seulement un point d'appui à un instant donné peut se déplacer et tous les autres sont considérés bloqués. La formulation des équations de mouvement est différente de la formulation traitant le cas de l'excitation uniforme où tous les appuis sont supposés animés d'un même mouvement au même temps.

- Dans le premier cas, le mouvement différentiel des appuis induit donc des contraintes pseudo-statiques dans la structure, et qu'on doit prendre en compte et ajouter à la réponse dynamique de cette structure. [12]

- Soit une structure ayant N degrés de liberté (DDL) et liée au milieu extérieur par le biais de N_d points d'appuis animé chacun d'un mouvement $V_i(t)$, $i=1, N_d$, dans le cas d'un comportement dynamique linéaire on peut calculer la réponse de la structure soumise à N_d mouvements d'appuis en superposant les réponses individuelles dues à chaque excitation d'appui agissant seule.

- Supposant que le support de liaison i est animé d'un mouvement (déplacement), $V_i(t)$, l'équation du mouvement de la structure s'écrit :

$$\underbrace{[M]\{\ddot{U}'\} + [C]\{\dot{U}'\} + [K]\{U'\}}_{\text{Composante dynamique}} + \underbrace{\{M_g\}\ddot{V} + \{C_g\}\dot{V} + \{K_g\}V}_{\text{Composante pseud - statique}} = 0 \quad (\text{VI.2})$$

$[M]$, $[C]$ et $[K]$ désignent respectivement les matrices globales de masse, d'amortissement visqueux et de rigidité de la structure. $\{M_g\}$, $\{C_g\}$ et $\{K_g\}$ sont les vecteurs composés des termes extra-diagonaux de $[M]$, $[C]$ et $[K]$ qui induisent un couplage entre le mouvement du support et les DDL de la structure.

- $\{U'\}$ est le vecteur déplacement absolu de tous les DDL de la structure.

- V est le déplacement du support.

- La notation $(\ddot{\quad})$ et $(\dot{\quad})$ désigne la dérivation par rapport à la variable temps.

L'équation (VI.2) peut s'écrire avec un second membre désignant un chargement sismique fictif.

$$[M]\{\ddot{U}'\} + [C]\{\dot{U}'\} + [K]\{U'\} = -\{M_g\}\ddot{V} - \{C_g\}\dot{V} - \{K_g\}V \quad (\text{VI.3})$$

Le déplacement pseudo-statique $\{U^s\}$ s'obtient à partir de l'équation d'équilibre statique de la structure en omettant les termes dynamiques dans l'équation :

$$[K]\{U^s\} = -\{K_g\}V_i,$$

soit

$$\{U^s\} = -[K]^{-1}\{K_g\}V_i = \{r_i\}V_i$$

où $\{r_i\}$ désigne le vecteur d'influence pseudo-statique.

$$\{r_i\} = -[K]^{-1}\{K_g\}.$$

On peut dire que $\{r_i\}$ représente les déplacements de tous les DDL de la structure induits par un déplacement unitaires d'un seul appui i , les autres sont considérés comme bloqués. [8]

- Le déplacement total est la somme du déplacement relatif et le déplacement pseudo-statique :

$$\{U^t\} = \{U\} + \{r\}V$$

On obtient donc l'équation d'équilibre dynamique de la structure :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -([M]\{r\} + \{M_g\})\ddot{V} - ([C]\{r\} + \{C_g\})\dot{V}$$

On voit apparaître dans le second membre de cette équation un chargement fictif dont la composante due à la rigidité de la structure s'annule car on a :

$$[K]\{r\} + \{K_g\} = 0$$

- Si on suppose que la matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice de rigidité, les termes dépendant de la vitesse \dot{V} dans le second membre s'annulent aussi [8]. Dans ce cas la force sismique fictive qui agit sur la structure est donnée par :

$$P_{eff} = -([M]\{r\} + \{M_g\})\ddot{V}$$

- Dans le cas d'un système discret à masses concentrées, cette équation se réduit à :

$$P_{eff} = -[M]\{r\}\ddot{V}$$

- D'une manière générale, l'équation d'équilibre de la structure s'écrit :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = P_{eff} \tag{VI.4}$$

- Les méthodes de résolution d'une telle équation déjà exposées auparavant (chapitre V).

- La réponse dynamique totale de la structure (composantes dynamiques et pseudo-statiques) sera obtenue en ajoutant à la composante dynamique $\{U\}$ solution de l'équation (VI.4) le déplacement pseudo-statique :

$$\{U^s\} = \{r_i\} V_i$$

soit :

$$\{U^t\} = \{U\} + \{r_i\} V_i$$

Puis on fait la sommation de tous les $\{U^t\}$ donnés pour chaque déplacement d'appui V_i .

Etapes principales à suivre pour le calcul d'une structure soumise à des excitations d'appuis multiples :

Pour chaque appuis i animé d'un mouvement V_i , il faut :

- Calculer le vecteur $\{r_i\}$ des déplacements induits en structure par le déplacement unitaire de l'appui i .

- Calculer la force sismique fictive :

$$P_{eff} = -([M]\{r\} + \{M_s\})\ddot{V} - ([C]\{r\} + \{C_s\})\dot{V}$$

- Résoudre l'équation d'équilibre

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = P_{eff}$$

- Calculer le déplacement total

$$\{U^t\} = \{U\} + \{r_i\} V_i$$

7

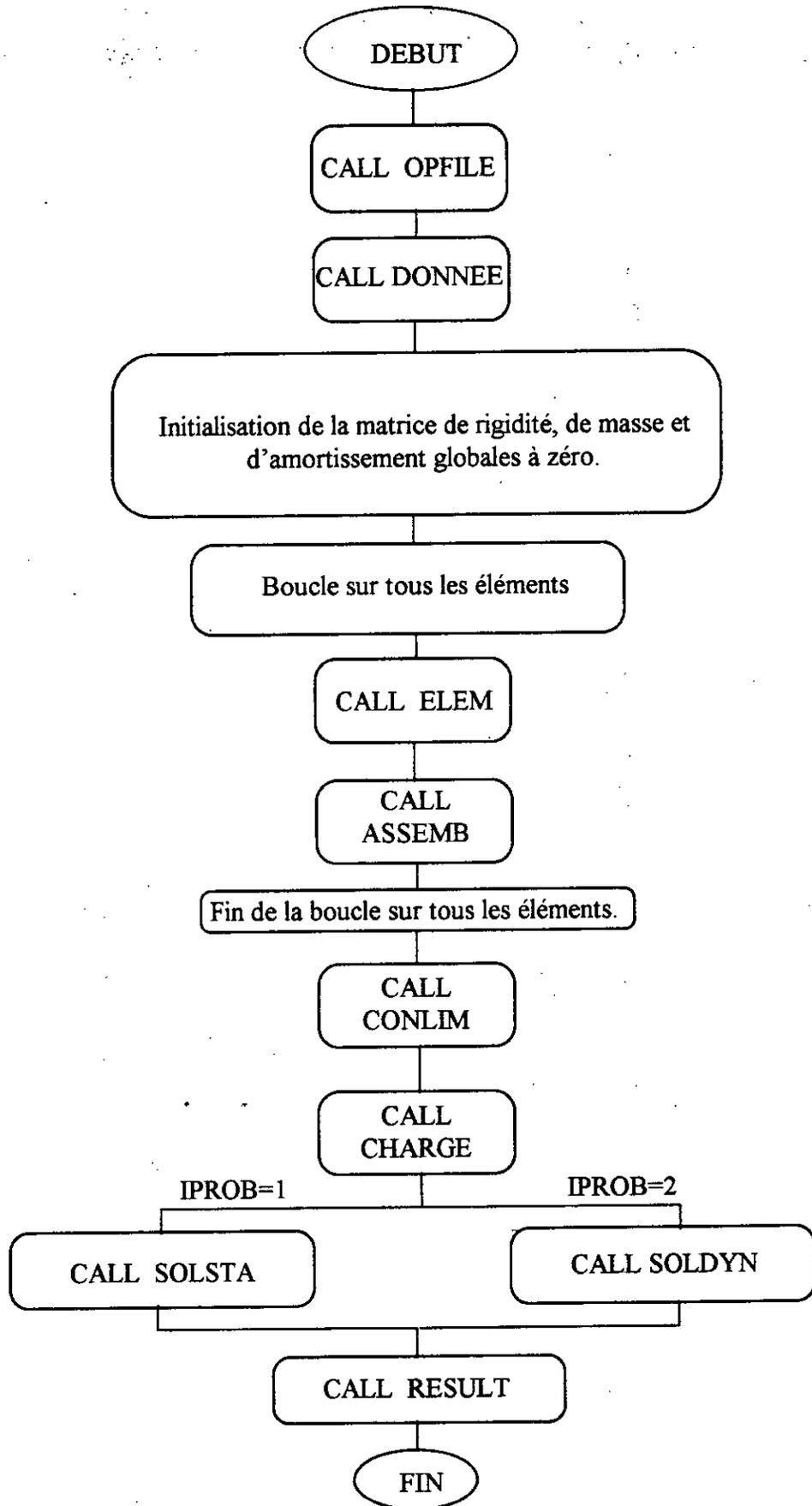
Présentation du programme et validation

VII.1- Présentation du programme et validation

VII.1 Présentation du programme

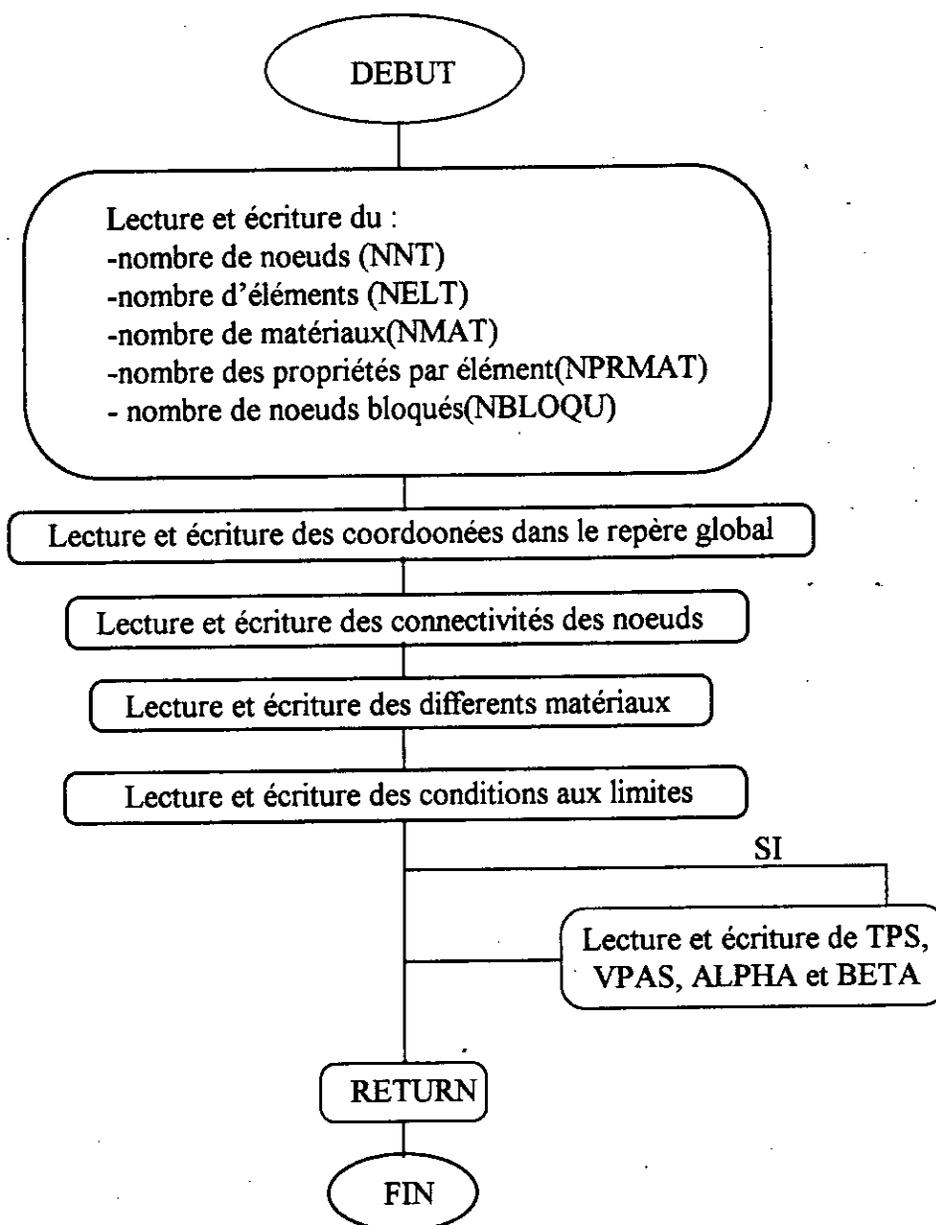
Le programme a été élaboré en utilisant le langage FORTRAN 32 bits, les organigrammes du programme principal et des sous programmes essentiels sont présentés ci-après.

Organigramme du programme principale.

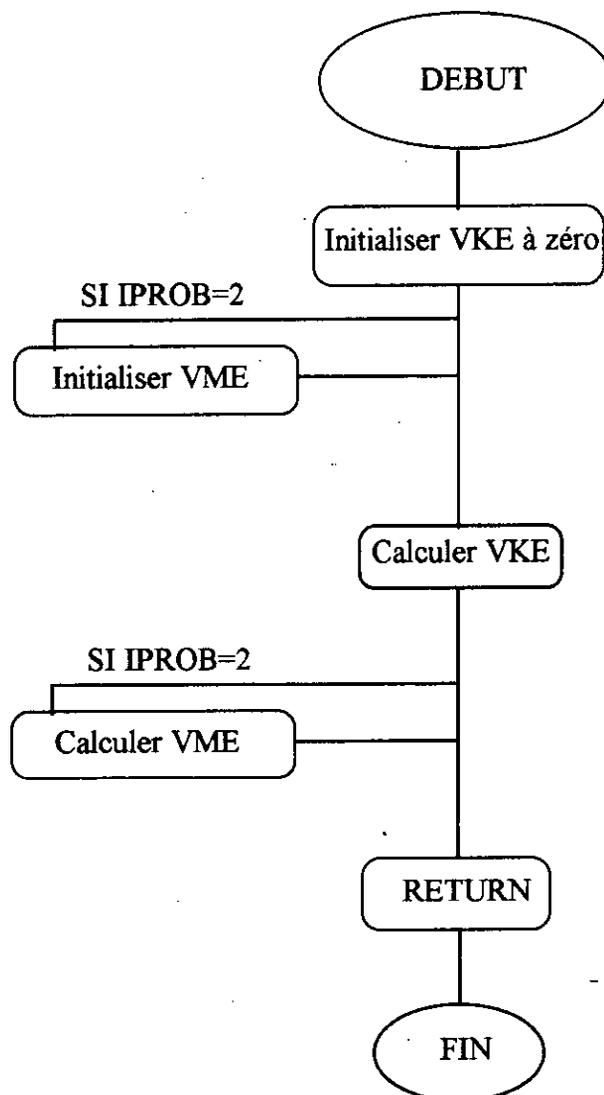


IPROB :Indice du problème, soit statique ou dynamique.

Organigramme du sous-programme « donnée »

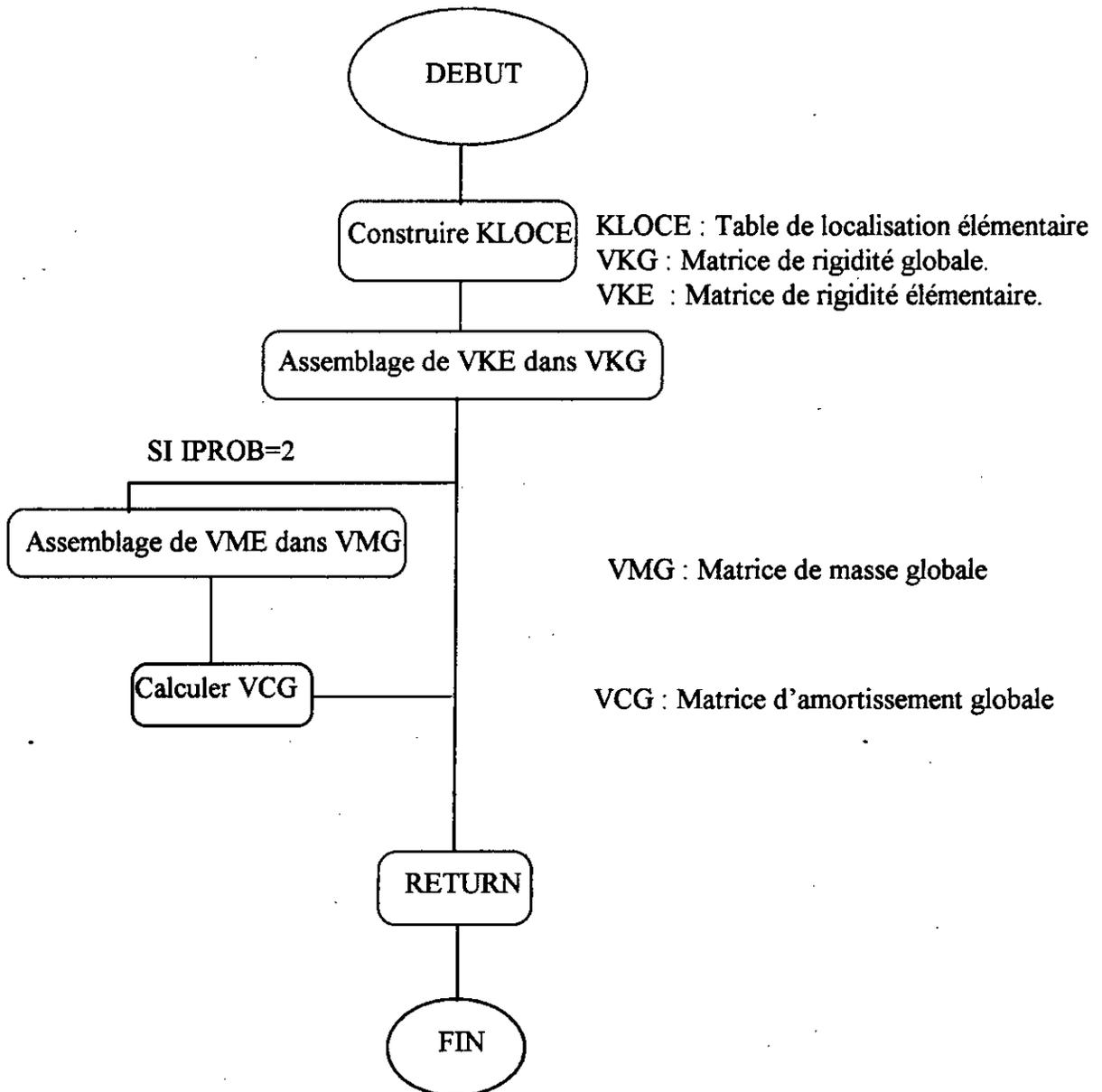


Organigramme du sous-programme « ELEM »

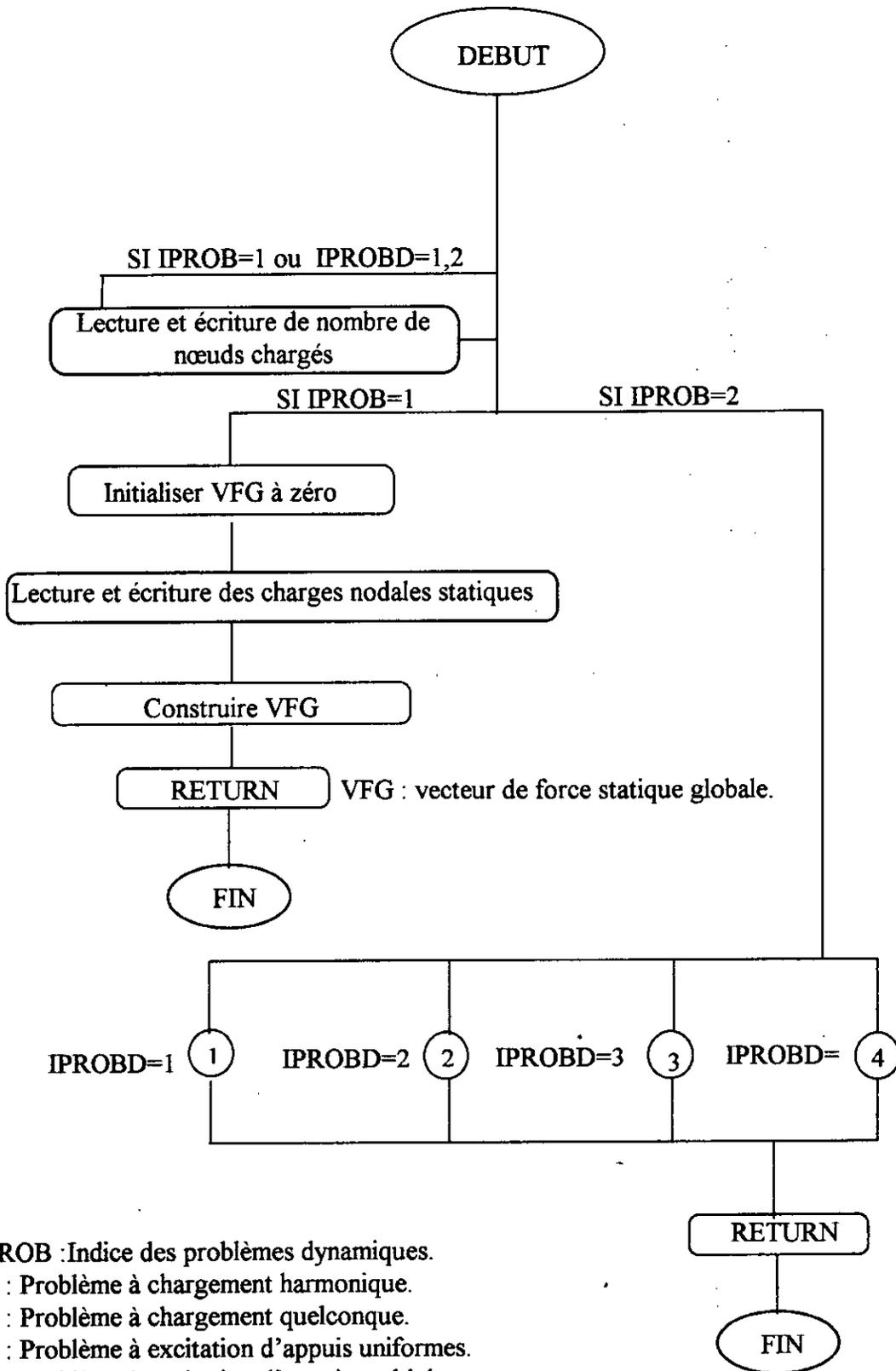


VKE : Matrice de rigidité élémentaire.
VME : Matrice de masse élémentaire.

Organigramme du sous-programme « ASSEMB »

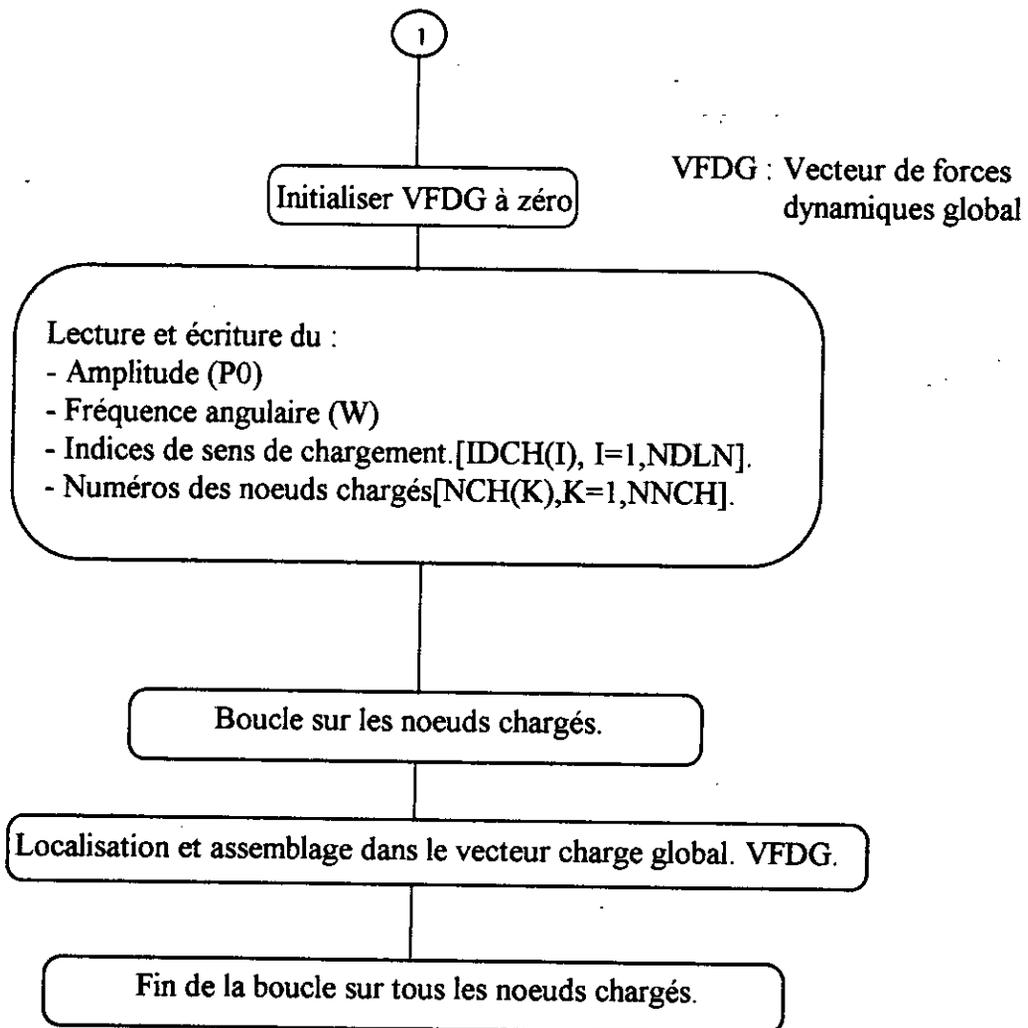


Organigramme du sous-programme « CHARGE »

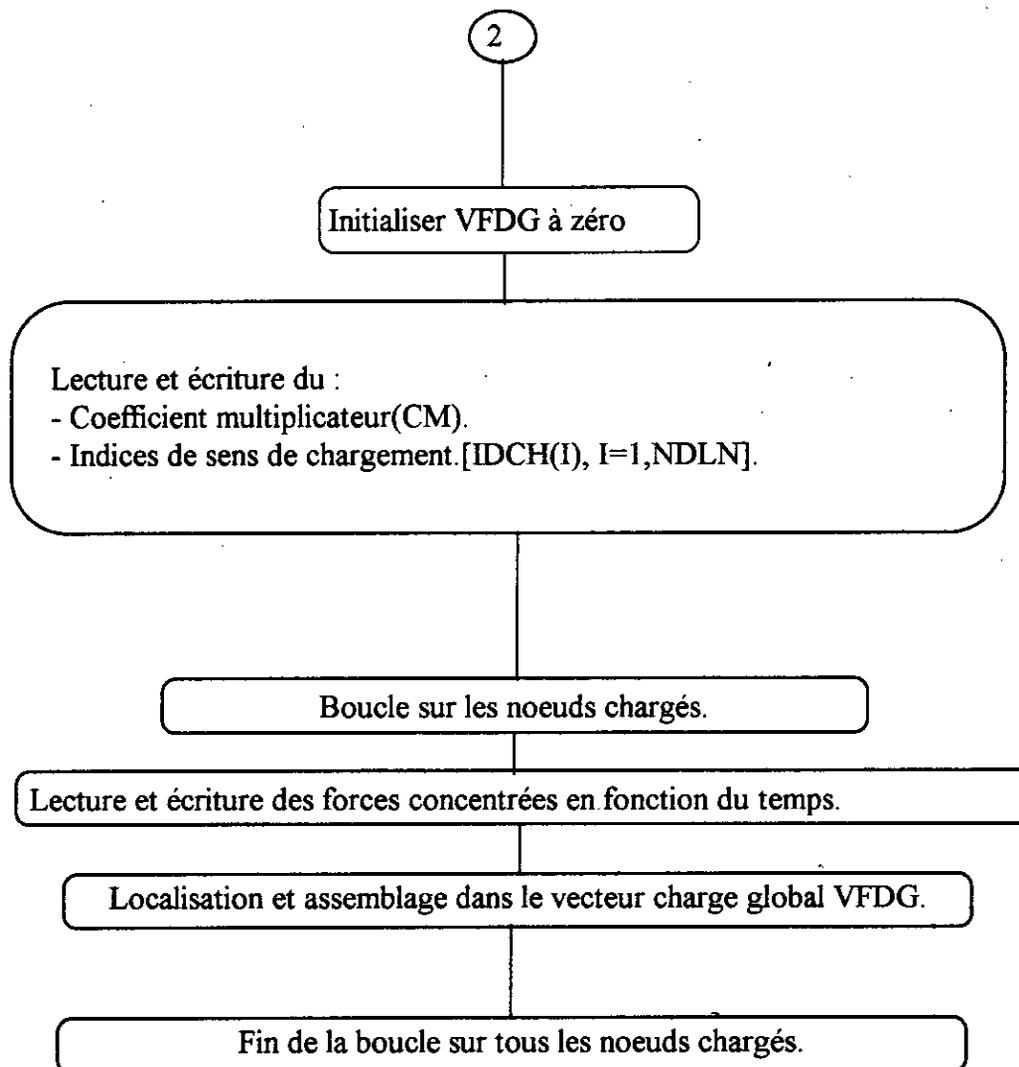


Remarque : les organigrammes (1), (2), (3) et (4) sont explicités ci-après.

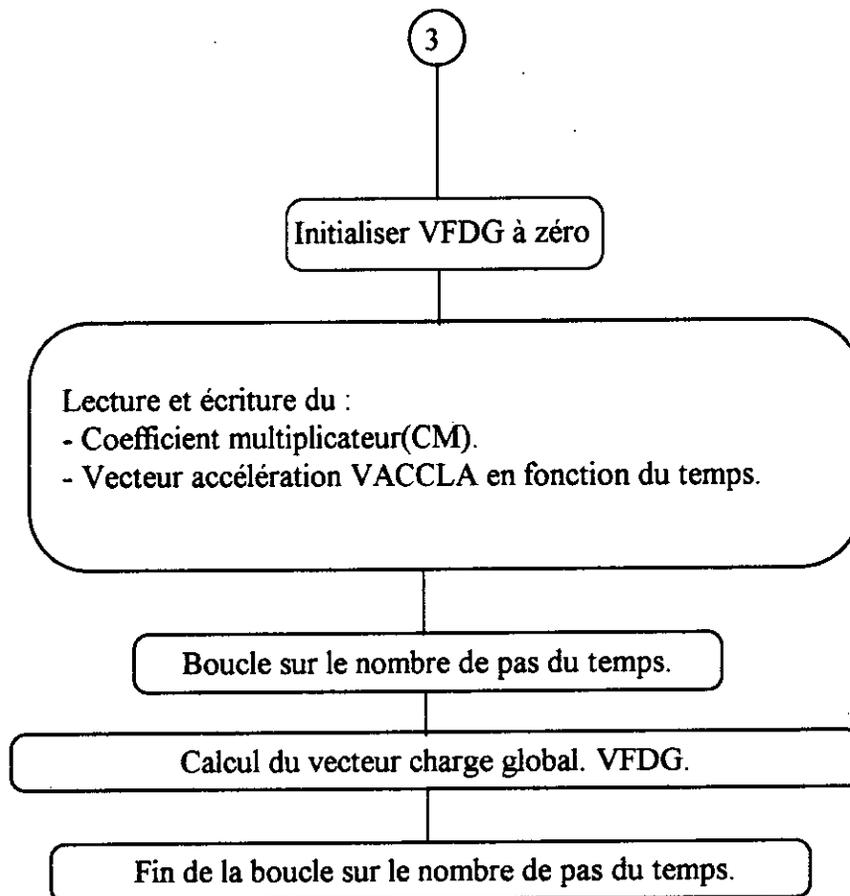
Organigramme de chargement harmonique.



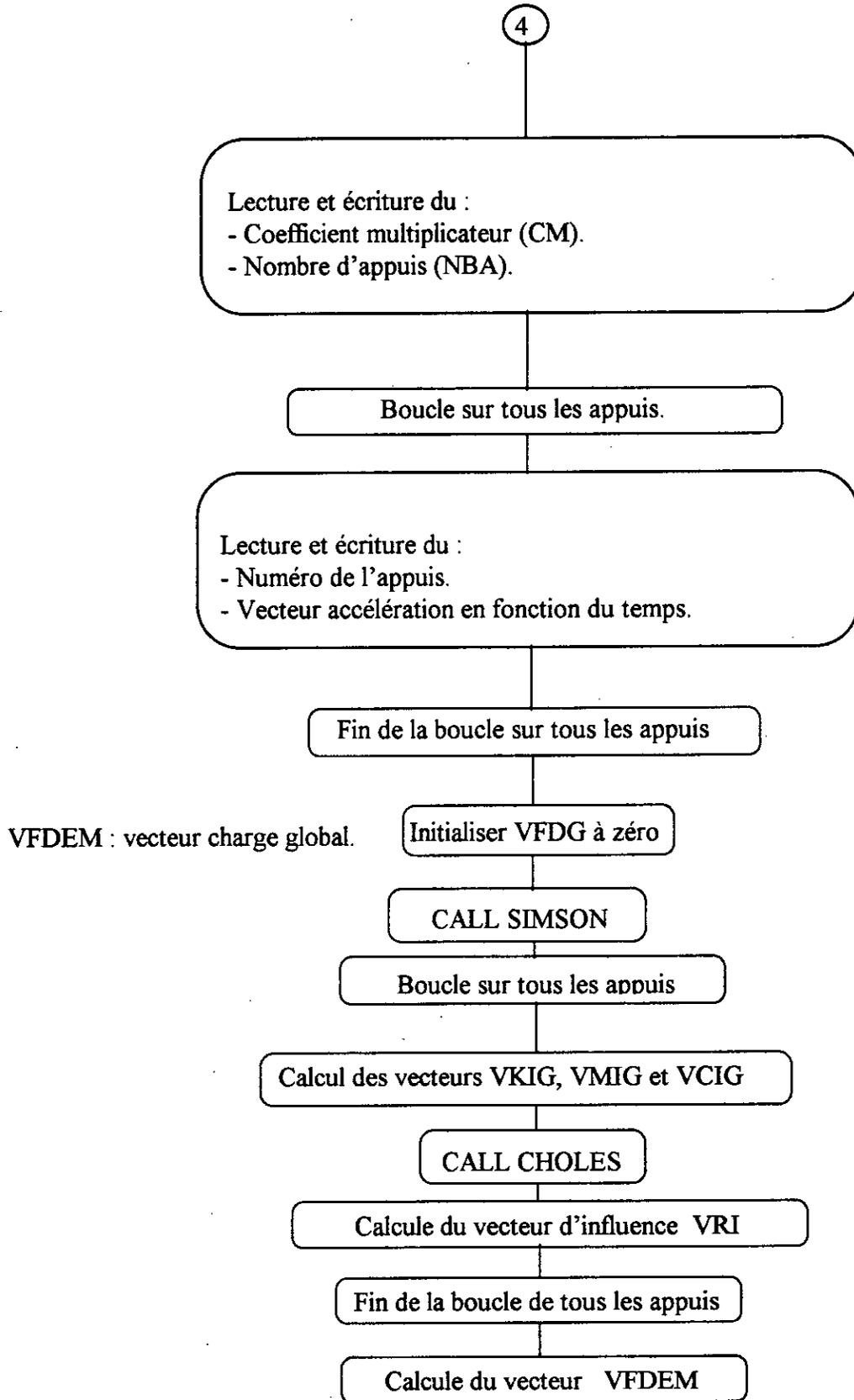
Organigramme de chargement dynamique quelconque.



Organigramme d'excitations d'appuis uniformes.

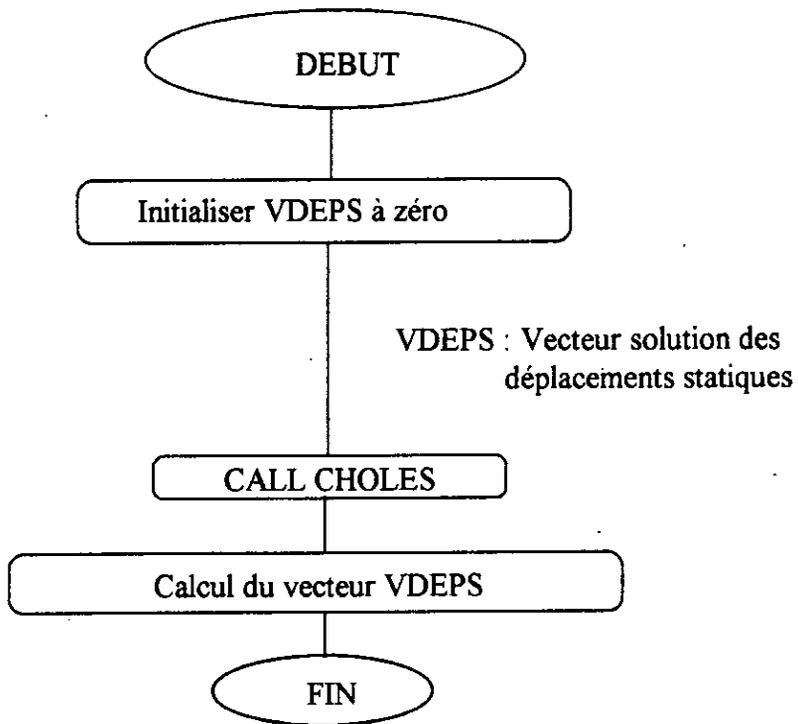


Organigramme d'excitations d'appuis multiples

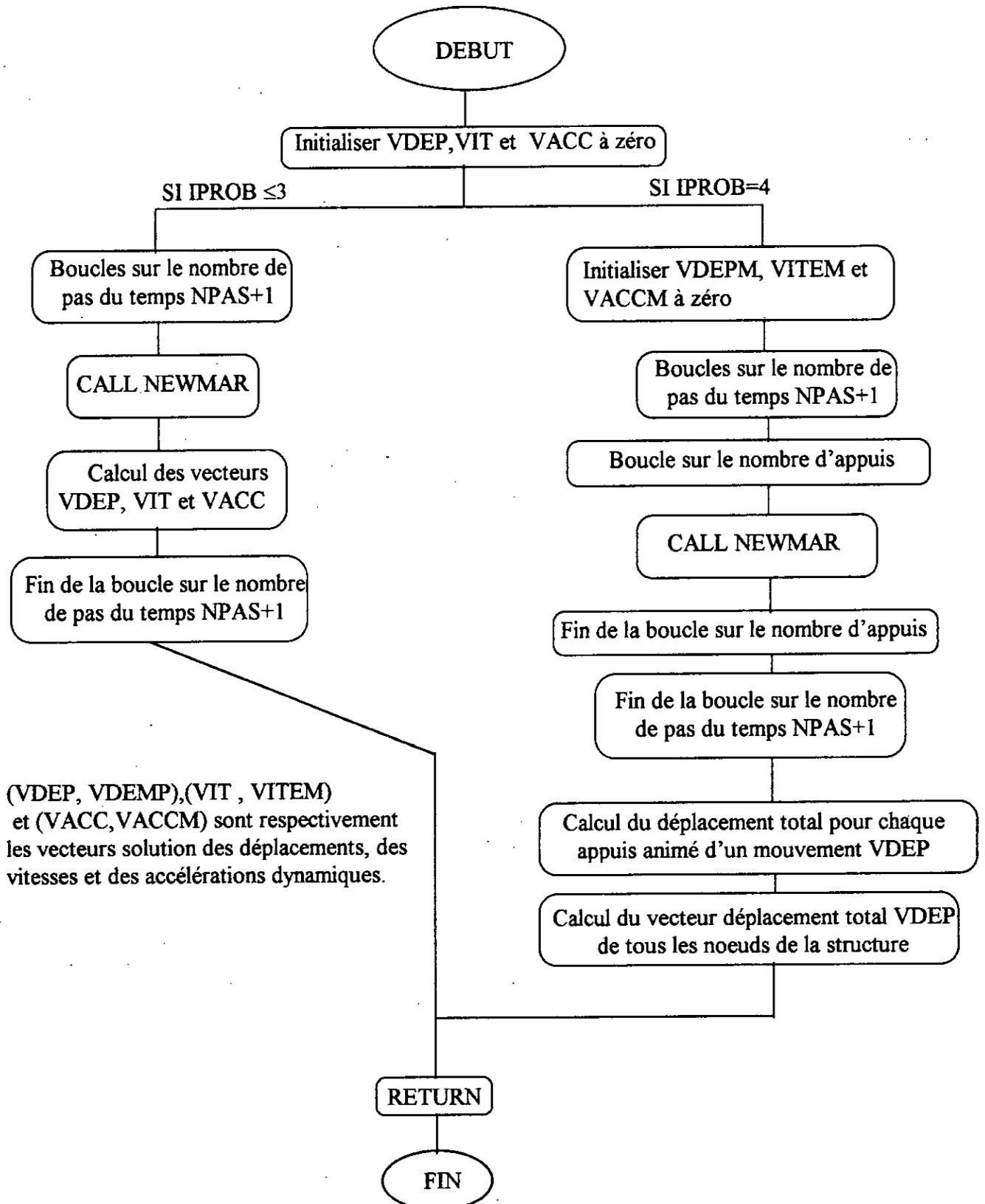


VKIG, VMIG et VCIG : sont les vecteurs composés des termes extra diagonaux de VKG, VMG et VCG.

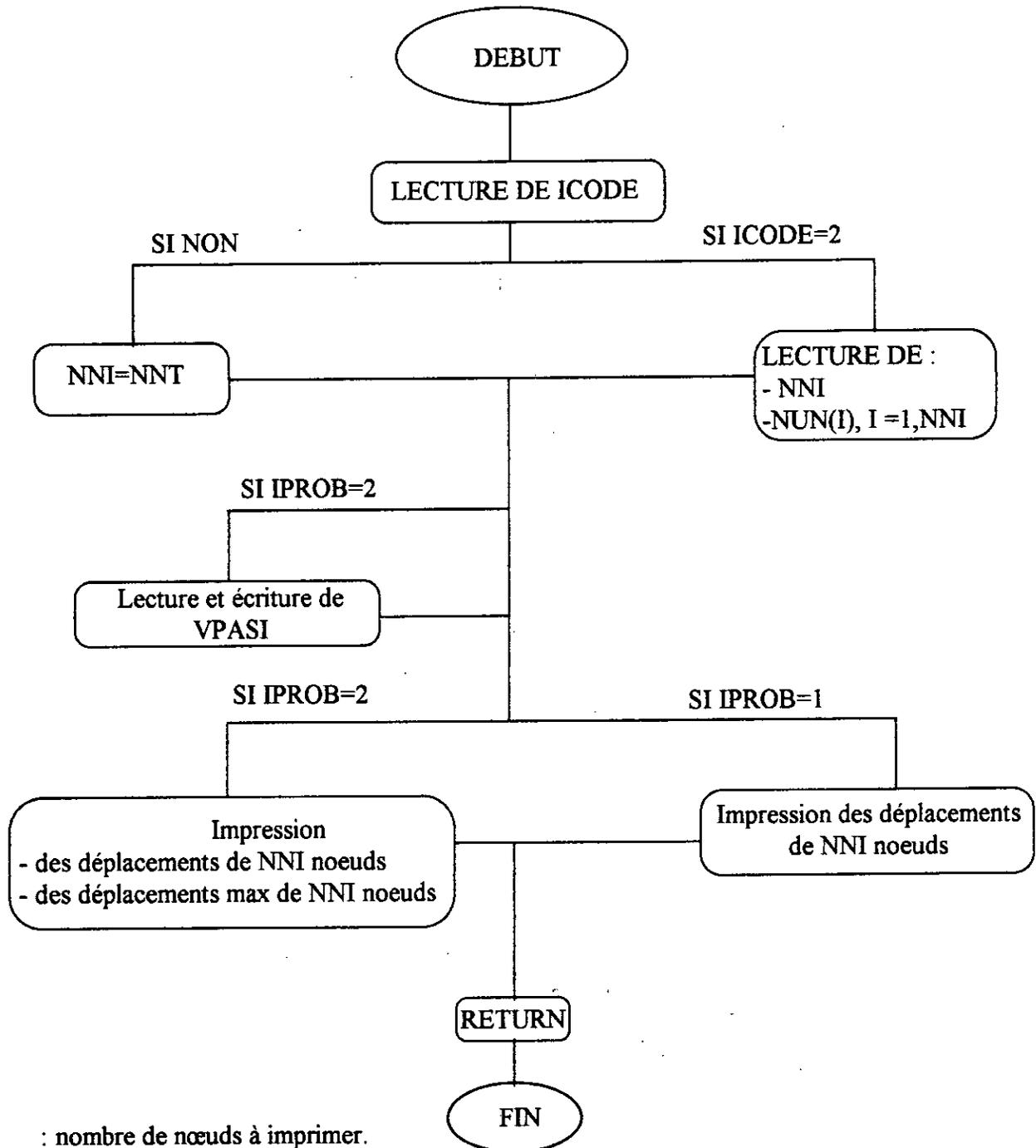
Organigramme du sous-programme «SOLSTA »



Organigramme du sous-programme «SOLDYN »



Organigramme du sous-programme «RESULT»



NNI : nombre de nœuds à imprimer.
 NUN(I) : Numéros des nœuds à imprimer
 VPASI : Valeur du pas d'impression des résultats .

ICODE=1 : signifie l'impression des déplacements de tous les nœuds.

ICODE=2 : signifie l'impression des déplacements de certains nœuds.

Rôle des autres sous-programmes :

Subroutine OPFILE : Introduire les noms du fichier de données et de fichier des résultats.

Subroutine CINLIM : Introduire les conditions aux limites.

Subroutine SIMSON : Permettre l'intégration numérique par la formule de "SIMPSON"

Subroutine CHOLES : Permettre la résolution du système linéaire par factorisation de
"CHOLESKY".

Subroutine NEWMARK : Permettre la résolution d'un problème dynamique instationnaire
linéaire par la méthode de "NEWMARK".

Subroutine ERREUR : Permettre de détecter les erreurs.

VII.2- Validation du programme

Sachant que le chargement en excitation uniforme est un cas particulier de l'excitation multi-appuis, cette particularité a été exploitée pour valider le programme développé pour le calcul de structures soumises à des excitations d'appuis multiples. C'est à dire que la réponse dynamique d'une structure soumise à des excitations d'appuis identiques devrait en principe être la même que celle obtenue dans le cas de chargement uniforme avec le même input sismique.

8

Exemple d'application
et discussion des résultats

VIII- Exemple d'application et discussion :

VIII.1- Exemple d'application :

On a considéré comme exemple, le pont illustré dans la figure VIII.1.

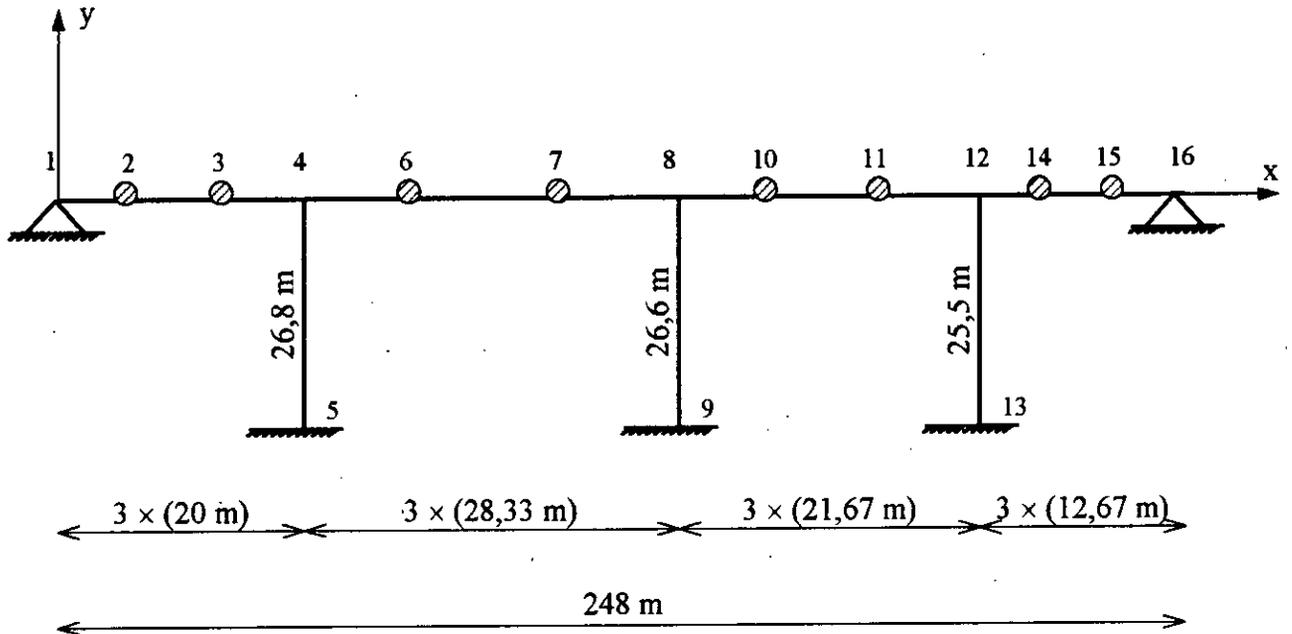


Figure VIII.1 : Modélisation du pont en portique avec masses concentrées

Les masses concentrées en travées qui reposent sur les poutres du ponts représentent l'effet de deux surcharges :

- l'effet de la charge du tablier,
- l'effet de la charge B_c des camions.

L'effet du tablier est pris en compte comme suit :

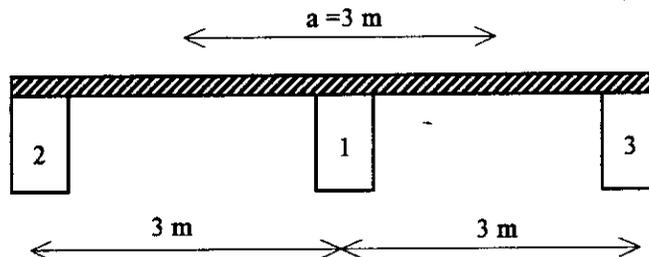


Figure VIII.2 : Coupe transversale du pont

1 : La poutre principale du pont à étudier

a : la partie du tablier revenant à la poutre principale 1, ramenée sous forme de masses concentrées en tous les nœuds considérés sur cette poutre.

Dans la direction longitudinale, soit le schéma suivant :

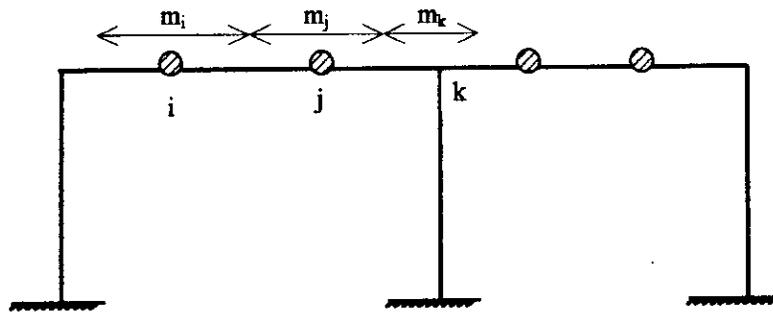


Figure VIII.3 : Coupe longitudinale du pont

m_i , m_j : représentent respectivement les parties du tablier revenant aux charges des camions i , j .

m_k : la partie du tablier revenant au nœud k (de la poutre).

La masse volumique et l'épaisseur du tablier sont prises respectivement égales à 3000 kg/m^3 , 0.25 m , la valeur de la vitesse de propagation du mouvement est prise égale à la vitesse de l'onde de cisaillement qui est de 300 m/s .

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du pont (sans les masses) sont données dans le tableau VIII.1.

	Section droite (m^2)	moment d'inertie (m^4)	module de Young (Pa)	masse volumique (kg/m^3)
Colonnes	2.25	0.4218	$1.962 \cdot 10^{10}$	$2.5 \cdot 10^3$
Poutres	1.50	0.1250	$1.962 \cdot 10^{10}$	$2.5 \cdot 10^3$

Tableau VIII.1 : Caractéristiques géométriques et mécaniques du pont

Les résultats obtenus par le programme sont illustrés par les figures suivantes:

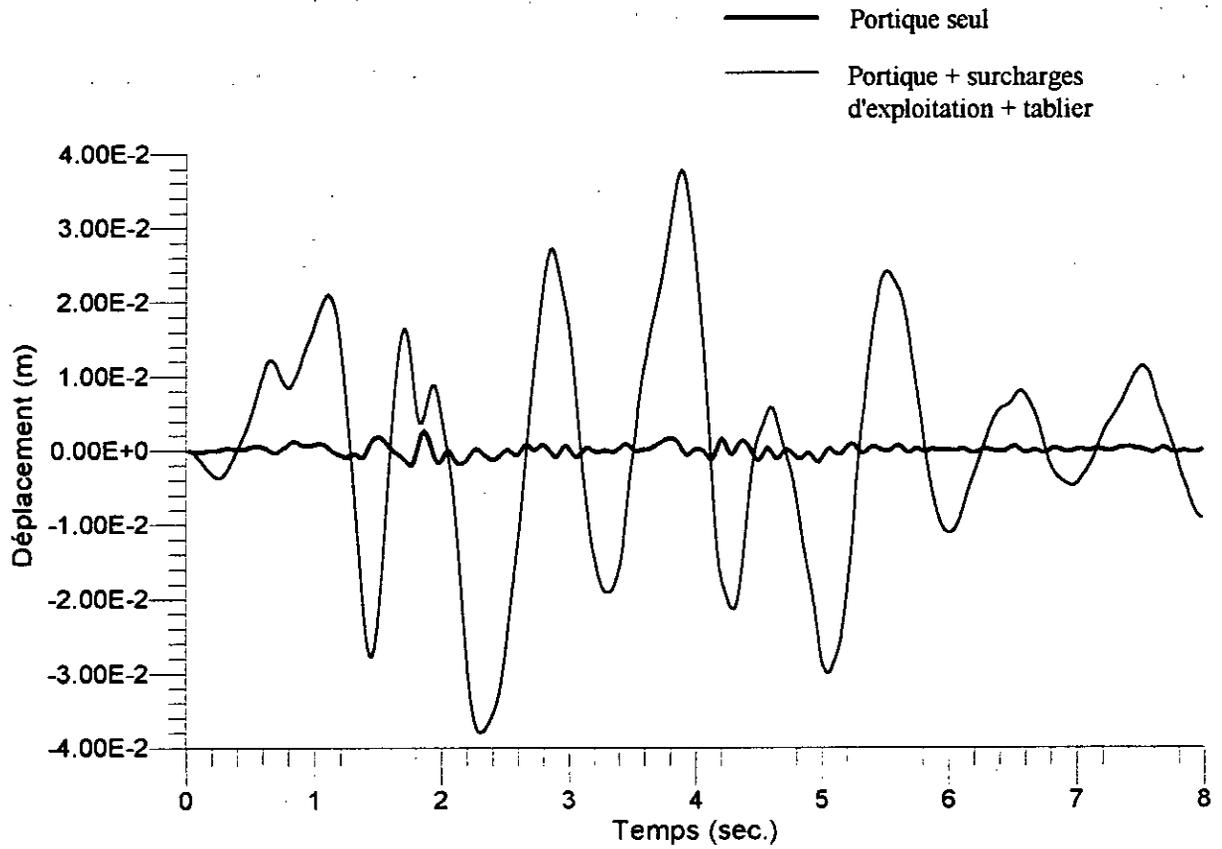


Figure VIII.4 : Déplacement horizontal du nœud 8 pour différents cas de chargement (cas d'excitation uniforme)

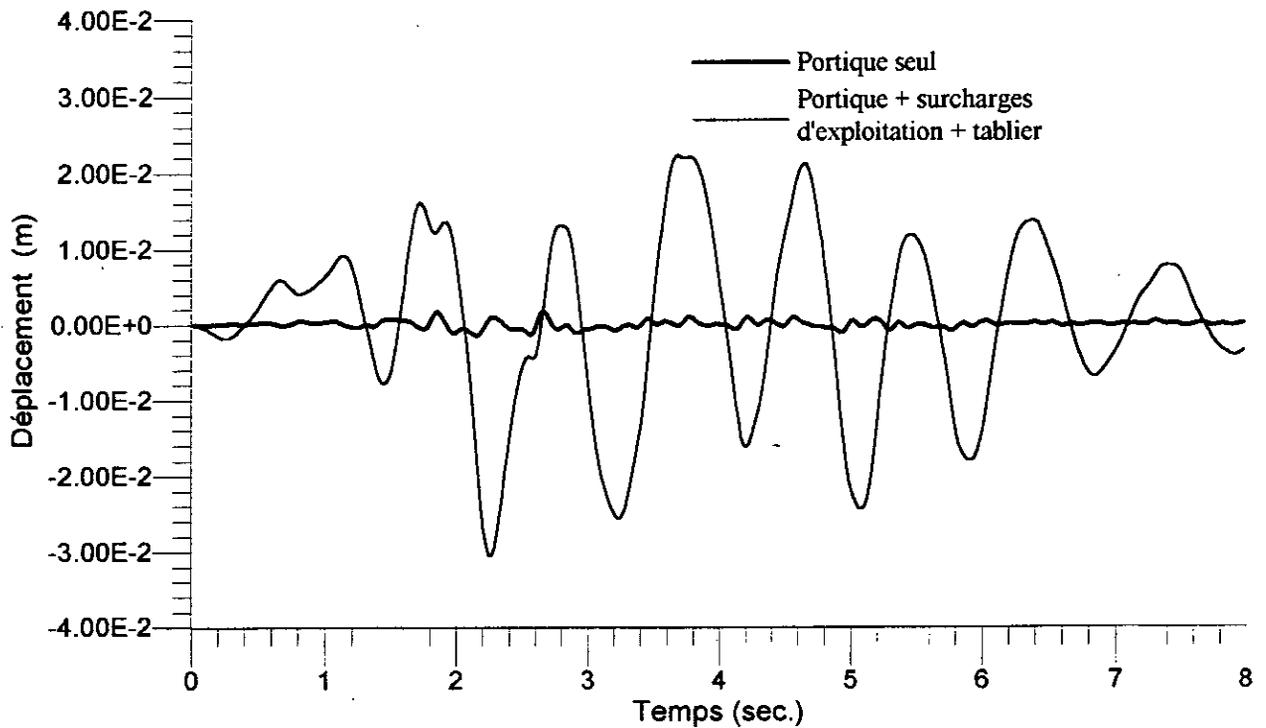


Figure VIII.5 : Déplacement horizontal du nœud 8 pour différents cas de chargement (cas d'excitation multiple)

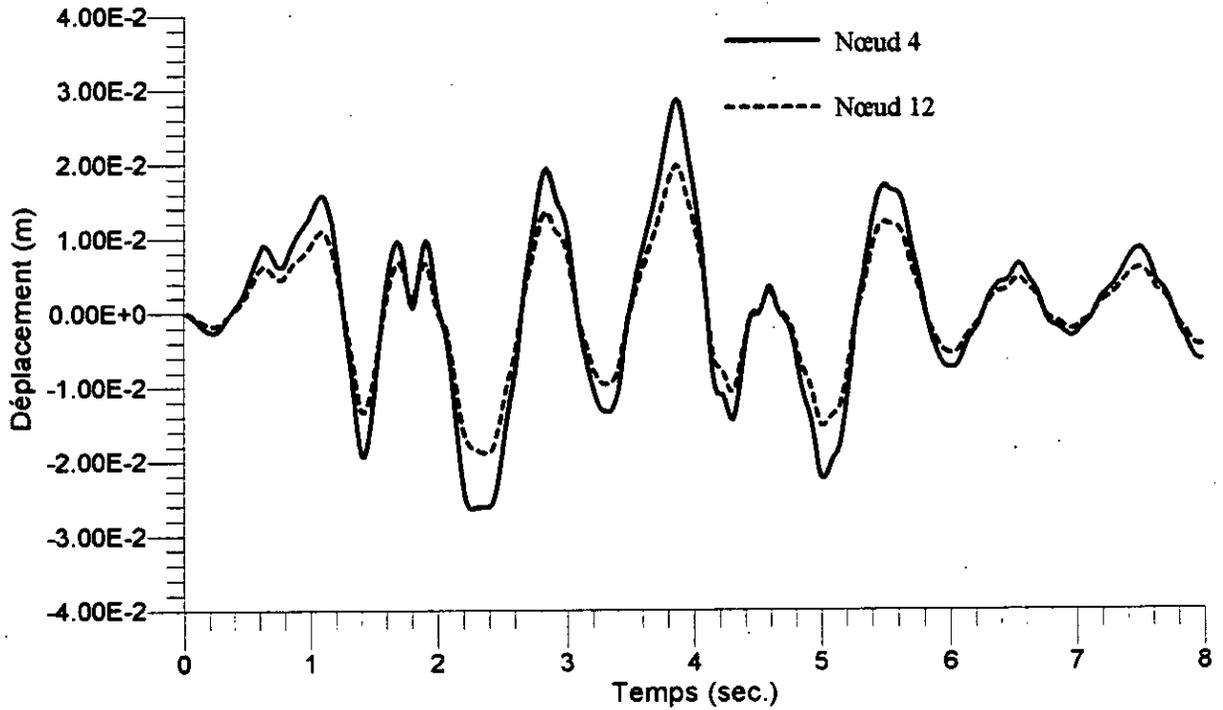


Figure VIII.6 : Déplacement horizontal des nœuds 4 et 12 dans le cas d'excitation uniforme (portique + surcharges + tablier)

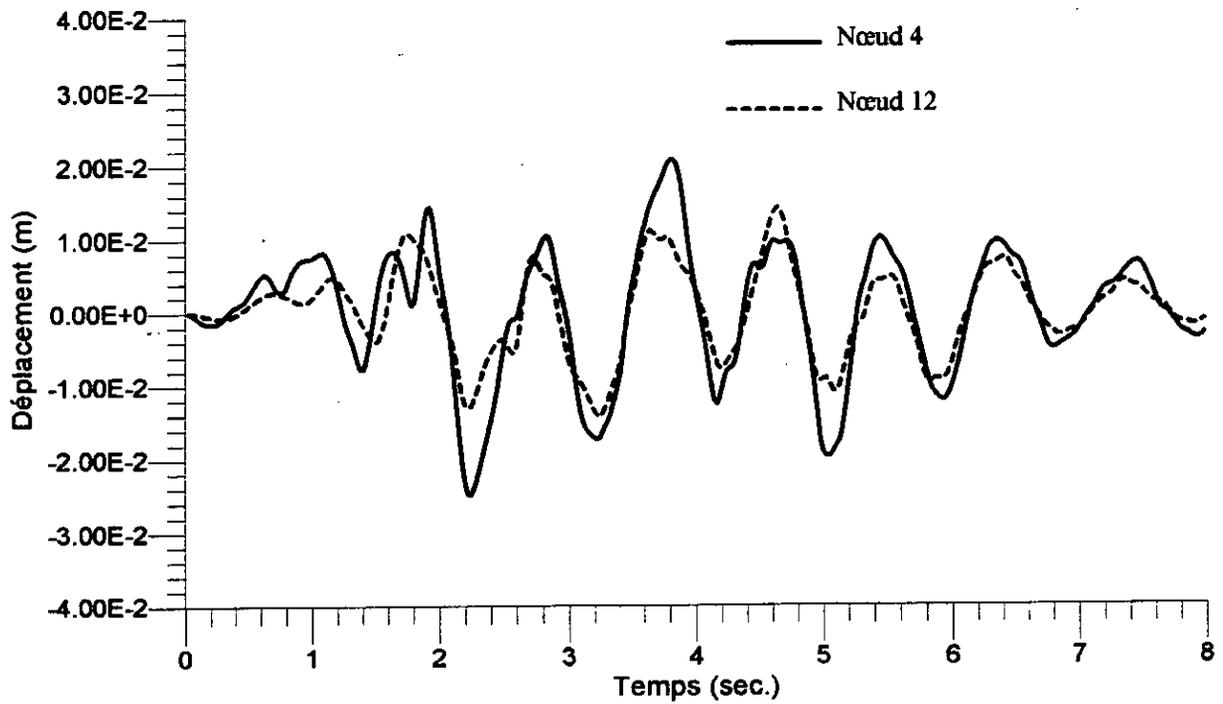


Figure VIII.7 : Déplacement horizontal des nœuds 4 et 12 dans le cas d'excitation multiple (portique + surcharges + tablier)

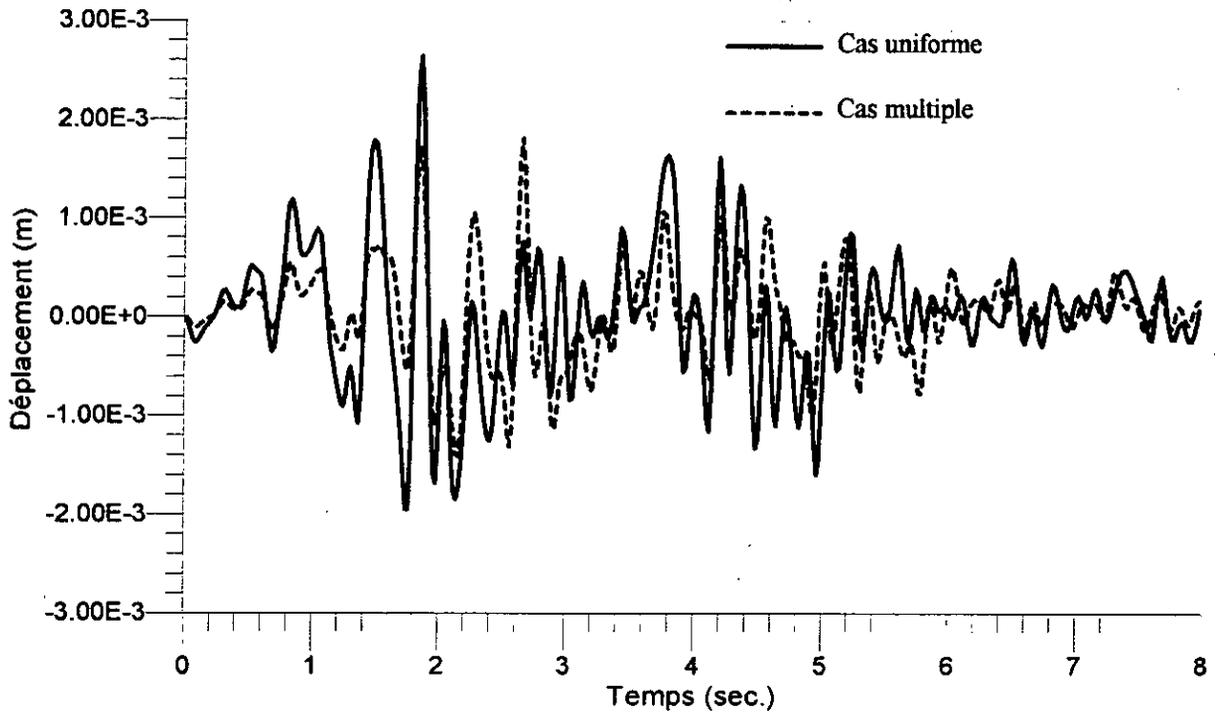


Figure VIII.8 : Déplacement horizontal du nœud 8 dans le cas du portique seul

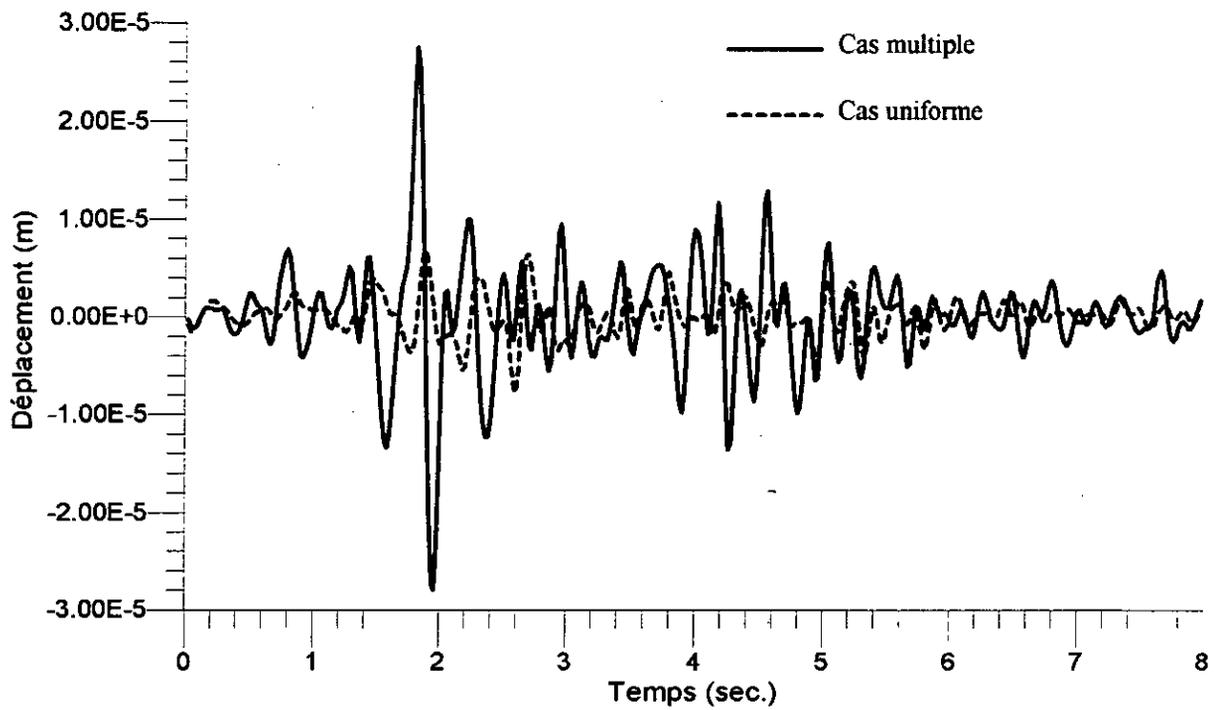


Figure VIII.9 : Déplacement vertical du nœud 8 dans le cas du portique seul

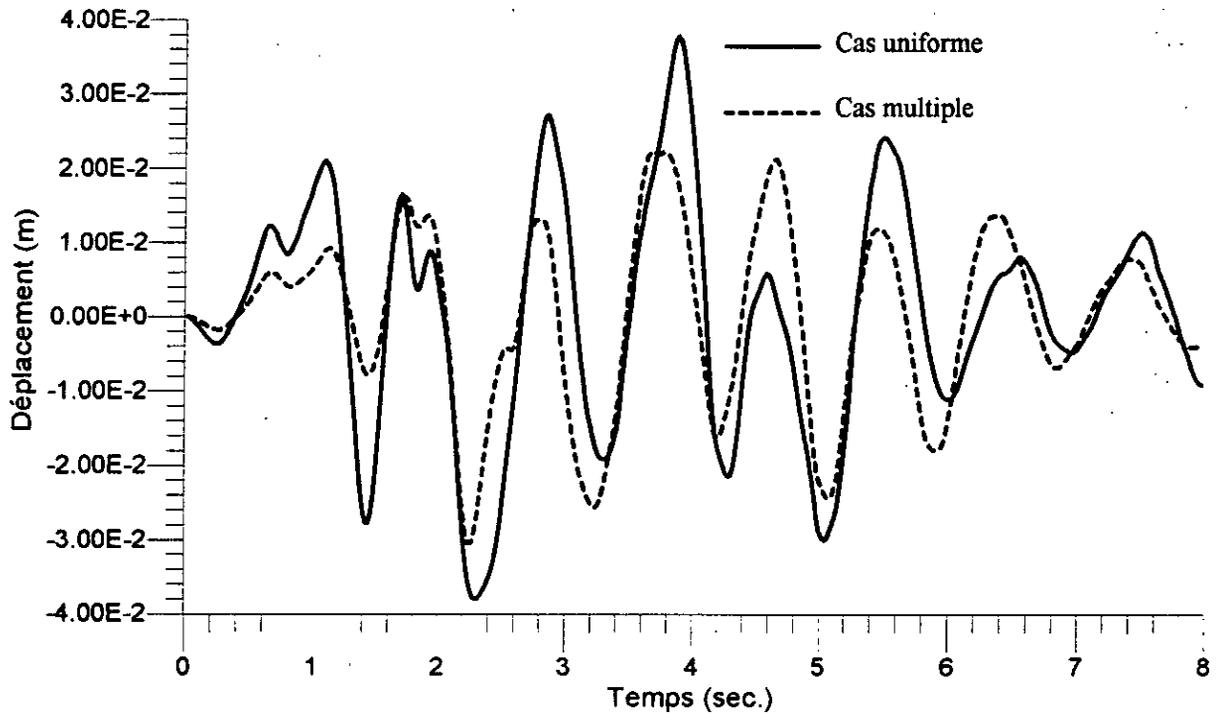


Figure VIII.10 : Déplacement horizontal du nœud 8 dans le cas du portique +surcharges +tablier

Nous rappelons que l'excitation sismique utilisée pour cette étude est l'accélérogramme du séisme d'Elcentro ayant un maximum de 0.32g et illustré dans la figure VIII.11

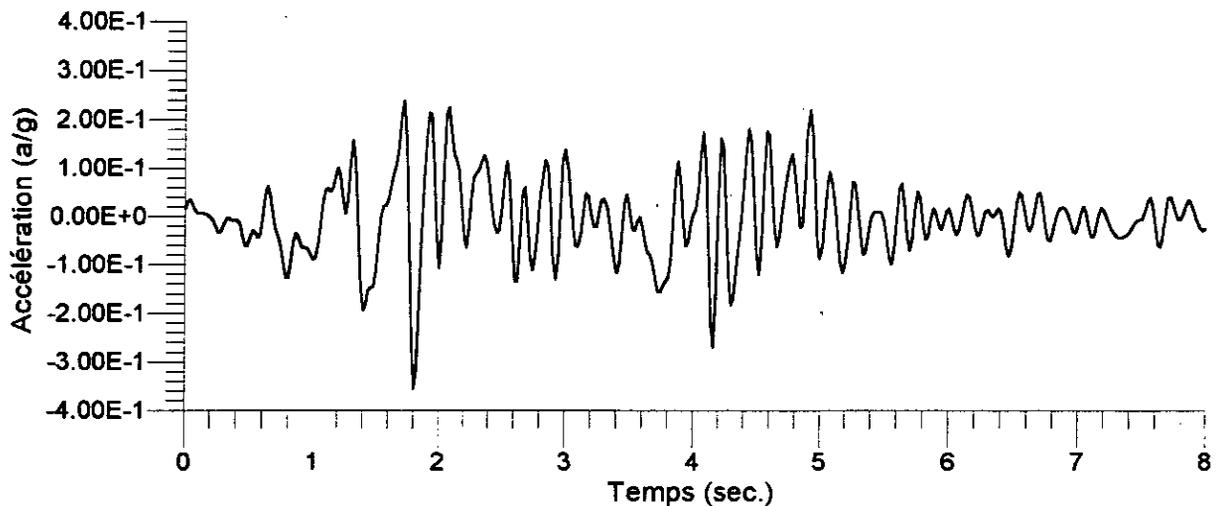


Figure VIII.11 : Accélérogramme d'Elcentro

VIII.2- Discussion des résultats :

- On remarque sur la figure VIII.8 que la courbe des déplacements horizontaux au nœud 8 dans le cas du pont sans chargement enveloppe celle de l'excitation multiple, le même phénomène est observé sur la figure VIII.10 toujours pour le même nœud 8, même direction (horizontale) mais avec des surcharges supplémentaires sur le pont, pour ce cas, les déplacements sont plus importants que dans le cas de la figure VIII.8 en comparant respectivement les cas uniformes et les cas multiples, ce qui nous permet de dire que l'hypothèse de l'excitation uniforme nous mène à une surestimation de la réponse dynamique de la structure.

- Les déplacements verticaux du nœud 8 observés sur la figure VIII.9 sont plus importants dans le cas multiple que dans le cas uniforme, cela est dû au fait au mouvement différentiel des appuis qui se présente dans la cas multiple.

- La figure VIII.4 montre que les déplacements horizontaux du nœuds8 dans le cas du pont chargé sont nettement plus grands que ceux du même nœud dans la même direction, mais avec le pont qui est non chargé, cela est dû à l'inertie de translation des masses rajoutées sur le pont, ceci dans la cas uniforme. Pour le cas multiple, illustré dans la figure VIII.5, cette différence des déplacements diminue, ce qui se justifie par le mouvement différentiel entre les appuis qui induit des contraintes pseudo-statiques dans la structure.

- Dans le cas du pont chargé, si on compare le mouvement différentiel des nœuds 4 et 12 qui est montré sur la figure VIII.6 dans la cas uniforme avec celui montré sur la figure VIII.7 dans le cas multiple, on trouve que cette différence du mouvement des deux nœuds est faible dans le cas uniforme, ce qui permet de conclure que les déplacements des nœuds du tablier sont presque des déplacements "corps rigide", ainsi la confirmation de l'effet inertiel dans le cas de l'excitation uuniforme.

9
Conclusion

Conclusion :

Par le biais de ce présent travail, nous avons pu découvrir la méthode des éléments finis qui est un outil d'analyse puissant à large domaine d'application, avec lequel on peut prédire le comportement d'une structure donnée soumise à un chargement donné. Son caractère pluridisciplinaire nous a poussé à étendre nos connaissances dans plusieurs disciplines telles que la mécanique des solides, analyse numérique et l'informatique appliquée (programmation).

• Les méthodes d'analyse et de dimensionnement des structures sous excitation sismique uniforme dans le cas des structures étendues deviennent imprécises, donc une prise en compte effective du caractère multiple de l'excitation présente un intérêt certain qu'on peut regrouper dans les quatre points suivants :

- ① Effet d'incohérence,
- ② Effet de passage d'onde,
- ③ Effet d'atténuation et
- ④ Effet de site.

La formulation des équations de mouvement d'une structure soumise à des excitations multi-appuis est différente de la formulation classique traitant l'excitation uniforme. Le mouvement différentiel des appuis induit des contraintes pseudo-statiques dans la structure qui doivent être prise en compte.

D'une façon générale, le domaine des excitations multiples est très vaste et l'étude de la variabilité de l'accélération peut faire l'objet d'une étude très poussée qui nécessite la mise en évidence de plusieurs facteurs.

Le temps accordé à la réalisation de ce travail nous a pas permit d'aller plus loin, mais avec l'expérience acquise durant son élaboration nous pouvons comme même donner quelques recommandations qui peuvent être utiles pour une suite probable :

1- Etendre les possibilités du programme à traiter d'autres problèmes (les structures planes en particulier), cela sera possible par l'introduction d'autres éléments (l'élément voile par exemple) pour l'appliquer aux structures qui ne peuvent être modélisées par élément poutre.

2- Un très grand nombres de problèmes rencontrés en pratique peuvent être résolus avec une précision suffisante à l'aide des méthodes linéaires, cependant certaines classes de problèmes ne peuvent être analysées correctement qu'à l'aide de méthodes non linéaires, d'où donc l'importance d'étendre le traitement en traitement non linéaire.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.F. IMBERT

'Analyse des structures par éléments finis', CE PADUS Editions 1979.

[2] G. TOUZOT et G. DHATT

'Présentation de la méthode des éléments finis', CE PADUS Editions 1984.

[3] R.W. CLOUGT et J. PENZIEN

'Dynamics of structures', MC GRAW HILL, 1975.

[4] M. BOUMAHATH et A. GOURDIN

'Méthodes numériques appliquées', OPU 1993.

[5] V. DAVIDOVICI

'Génie parasismique', Presse de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 1985.

[6] O.C. ZIENKIEWICZ

'La méthode des éléments finis', Traduction de J. L. ARMAND, Edition groupe MC. GRAW HILL 1979.

[7] J.L. BATOZ et G. DHATT

'Modélisation des structures par éléments finis', Vol 1, Solides élastiques, Edition HERMES PARIS 1990.

[8] H. AFRA

'Analyse des structures avec excitations d'appuis multiples', 5^{ème} Séminaire Maghrébin de Génie Parasismique, Vol.2, 261-268, 1993.

[9] *'Recommandations AFPS 90'*, Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1990.

[10] **B. TILLIOUINE**

'Cours de dynamique des structure, MAGISTER', Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1997.

[11] **ALTINISIK and SEVERN**

'Structure behaviour Multiple support excitation'.

[12] **A. CAPRA et V. DAVIDOVICI**

'Calcul dynamique des structures en zone sismique', Edition EYROLLES.

[13] **K. BOUSSAID et T. ABDERRAHMANE**

'Calcul des structures planes soumises à des excitations d'appuis multiples par la méthode des éléments finis', P.F.E Juin 1995, E.N.T.P., Alger.