

6/96

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المعرفة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

PERFORMANCE D'UNE METHODE SEMI - ANALYTIQUE

POUR L'ETUDE DES POUTRES NON UNIFORMES

Proposé & dirigé par :

Pr. B.TILIOUINE

Etudié par :

Melle N.CHIBANI

Melle N.BENCHEIKH

PROMOTION JUIN 1996

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

PERFORMANCE D'UNE METHODE SEMI - ANALYTIQUE

POUR L'ETUDE DES POUTRES NON UNIFORMES

Proposé & dirigé par :

Pr. B.TILIOUINE

Etudié par :

Melle N.CHIBANI

Melle N.BENCHEIKH

PROMOTION JUIN 1996

DEDICACES

A mes très chers parents:

A mes frères et soeurs:

A toutes ma famille:

A Yasmina:

A mes Amies

& à la memoire de mon oncle Boualem

Je dedie ce memoire

Naima

A mes très chers parents:

A mes frères et soeurs:

A toutes ma famille:

& à mes Amies

Je dedie ce memoire

Nabila

REMERCIEMENTS

Nous exprimons toute notre profonde reconnaissance à notre promoteur M^r B.Tiliouine, Professeur à l'E.N.P.A pour nous avoir proposé ce travail et l'avoir dirigé avec tant de patience.

Qu'il nous soit permis également d'exprimer notre gratitude envers tous nos enseignants, qui nous ont prodigué leur savoir au cours de nos études.

Nous remercions le membre du jury pour l'honneur qu'ils nous font pour juger ce travail.

Nous exprimons notre reconnaissance à tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à la réalisation de ce mémoire, ainsi qu'à tous ceux qui auront bien voulu consacré le temps et la patience de lire ce document et en apprécier le contenu.

A tous ceux là nous disons merci.....

الملخص

الهدف الرئيسي من هذه الأبروحة هو استظهار
طريقة ذهب تحليلية المقترحة لدراسة المياكل
الوحيدة البعد ذات السلوك الهندسي غير المنتظم
مقارنة مع طرق مقارنة أخرى .

في أول الأمر نهتم بدراسة التحليل الستاتيكي ،
الديناميكي والاستقرار الشكلي للعناصر دون الأخذ
بعين الاعتبار منقول القصر .

أما القسم الثاني من هذه الأبروحة نختم به دراسة
تأثير التغيرات الناجمة عن منقول القصر على هذه
المياكل .

Résumé:



L'objectif de la présente mémoire est de mettre en évidence la performance de la méthode semi analytique dans l'analyse des structures unidimensionnelles à inertie variable.

La première partie, l'étude sera portée sur les poutres en flexion. Les résultats de la résolution du problème statique, dynamique et de stabilité sont comparés à ceux obtenus par d'autres méthodes d'approximation.

Dans la deuxième partie, on introduit la méthode semi analytique pour le calcul de la matrice de rigidité dans le cas des poutres minces et épaisses.

Abstract:

The objective of this work is to illustrate the accuracy of an approximate finite element displacement method considering the problem of non uniform beams.

In the first part, static, vibration and stability analysis has been considered. The results are compared with those obtained using other approximation technics.

In the second part, this work deals with the shearing problem in calculating stiffness matrix of short and flexible beams.

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2. PRÉSENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	
I. HISTORIQUE	2
II. INTRODUCTION	3
III. APPROCHE CINEMATIQUE (DEPLACEMENT)	4
III.1. Introduction	4
III.2. Formulation énergétique	5
IV. CONVERGENCE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	6
IV.1. Convergence monotone	7
IV.2. Convergence non-monotone	8
V. NOTION D'ELEMENT FINI	9
V.1. Formulation en coordonnées généralisées	9
V.2 . Etude des éléments unidimensionnels	10
VI. FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN STATIQUE	12

VI.1. Formulation des équations d'équilibre	12
VII. FORMULATION DYNAMIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	15
VII.1 INTRODUCTION	15
VII - 2 - Définitions	17
VII - 3- Formulation des équations de mouvement en dynamique	18
VII - 4 - Détermination de la matrice masse	21
VIII. FORMULATION DU PHENOMENE DE CISAILLEMENT EN ELEMENTS FINIS	24
CHAPITRE 3. ETUDE DES POUTRES EN FLEXION	
I. INTRODUCTION	27
II. ETUDE DES DEPLACEMENTS DES STRUCTURES	27
II.1 Déformations dans les poutres	27
CHAPITRE 4. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE SEMI ANALYTIQUE	
I. INTRODUCTION	33
II. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE SA	34
III. FORMULATION DE LA METHODE SA	36

III.1 Poutres en flexion sans cisaillement transversal 36

III.2 Poutres en flexion avec cisaillement transversal 40

CHAPITRE 5. METHODES DE RESOLUTION

I. INTRODUCTION 45

II. CLASSIFICATIONS DES METHODES DE RESOLUTION

EN ANALYSE STATIQUE 45

II. 1. Méthodes itératives 45

II. 2. Méthodes directes 46

III. RESOLUTION DES SYSTEMES PROPRES 48

III. 1. Propriétés fondamentales des systèmes propres 49

III. 2. Méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres 52

III. 3. Méthode d'itération inverse 55

III. 4. Méthode d'itération sur sous espaces 56

CHAPITRE 6. APPLICATIONS

I. INTRODUCTION 63

II. RESUME 63

III. COURBES COMPARATIVES	63
III. 1. Poutres en flexion sans cisaillement transversal	63
III. 2. Poutres en flexion avec cisaillement transversal	63
IV. TABLEAUX COMPARATIFS	63
IV. 1. Poutres en flexion sans cisaillement transversal	63
IV. 2. Poutres en flexion avec cisaillement transversal	63
V. EXEMPLES NUMERIQUES	64
V. 1. poutres en flexion sans cisaillement transversal	64
V. 2. Poutres en flexion avec cisaillement transversal	64
VI. EXPLOITATION DES RESULTATS	65
VI. 1. Poutres en flexion sans cisaillement transversal	65
VI. 2. Etude des poutres en flexion avec cisaillement	95
CONCLUSION	
REFERENCES	
ANNEXES	

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

I. INTRODUCTION

Dans le domaine de l'engineering, les poutres à sections non-uniformes sont les plus souvent rencontrées. Elles sont utilisées afin de diminuer le poids propre de la structure, ou bien pour satisfaire aux requises architecturales.

Pour analyser le problème des poutres aux propriétés géométriques non-uniformes, nous introduisons une méthode semi-analytique basée sur l'approximation des déplacements en éléments finis.

Les matrices de raideur et de masse, sont obtenues de manière approximative, à partir des fonctions de déplacement (fonctions de forme) des poutres à sections constantes.

Ainsi, et à partir de ces matrices, les résultats de l'étude statique, dynamique et enfin de stabilité de la structure, sont respectivement déterminés.

La solution du problème est alors comparée avec des résultats obtenus en utilisant d'autres techniques d'approximations.

La première méthode consiste à discrétiser la structure en un nombre d'éléments finis, dont les sections et les moments d'inertie sont constants, représentant des quantités moyennes évaluées au milieu de chaque élément. Alors que la seconde méthode est basée sur une approximation exposée dans [ANSYS], qui vise à déterminer pour chaque portion de la structure, l'expression équivalente des caractéristiques géométriques en utilisant comme données de départ les valeurs aux extrémités.

CHAPITRE 2

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

I. HISTORIQUE

Théoriquement, chaque phénomène dans la nature, biologique soit il, géologique ou mécanique peut être décrit par des lois physiques, en termes d'équations, algébriques, différentielles ou par des intégrales, en fonction des paramètres relatifs au problème considéré.

Dans de nombreux cas, la détermination de ces lois physiques n'est pas une tâche facile, en présence de tels cas, des méthodes approximatives représentent une alternative envisageable en vue de trouver des solutions acceptables.

Parmi ces techniques d'approximation, la méthode des éléments finis est la plus utilisée, car elle procure fréquemment un moyen de calcul standardisé pour des problèmes avariés.

Ainsi la méthode des éléments finis est introduite afin de palier aux défaillances d'autres méthodes approximatives.

II. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis appliquée au calcul des structures est une technique récente, à caractère pluridisciplinaire, qui met en oeuvre les connaissances de trois disciplines de base:

- La mécanique des structures: élasticité, résistance des matériaux, dynamique, etc...
- L'analyse numérique: méthodes approximatives, résolution des systèmes linéaires, des systèmes propres, etc...
- L'informatique appliquée.

Théoriquement, la méthode des éléments finis est basée d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures, et d'autre part sur des méthodes d'approximation.

Par ailleurs, le domaine d'application de la méthode des éléments finis, s'étend progressivement: de la statique et dynamique linéaires. au flambement linéarisé (stabilité initiale), et plus récemment à l'analyse non-linéaire avec non-linéarité géométrique.

L'utilisation de la méthode des éléments finis permet d'établir et de résoudre les équations gouvernantes pour des problèmes complexes et de manière efficace.

Elle est basée sur la description simple des variables inconnues du problème et transforme les équations d'équilibre en équations algébriques.

Dès lors, la structure est discrétisée puis mise sous forme d'éléments finis connectés aux noeuds. Il est à noter que la solution obtenue est approximative, elle est d'autant plus exacte que le nombre des éléments augmente.

III. APPROCHE CINEMATIQUE (DEPLACEMENT)

III.1. Introduction

La méthode des éléments finis basée sur l'approche déplacement cherche une formulation énergétique à l'aide du champ des déplacements inconnus afin d'obtenir des solutions déplacements cinématiquement admissible.

Dans cette méthode le terme formulation variationnelle est utilisé pour identifier une formulation adéquate dans laquelle une équation différentielle donnée est calculée par une forme d'intégrale équivalente en traduisant la différentiation entre la fonction et la variable dépendante.

Pour les problèmes linéaires, la formulation appropriée est équivalente à la minimisation d'une fonctionnelle dite énergie potentielle totale de déformation.

III.2. Formulation énergétique

III.2.1- Théorème de l'énergie potentielle totale

Enoncé:

Pour un état d'équilibre stable les déplacements cinématiquement admissibles qui satisfont les conditions d'équilibre sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle et réciproquement.

On a:

$$V = U - T \quad (2.1)$$

tel que:

$$U = \int_V w dv \quad (2.2)$$

- U: énergie de déformation
- T: travail des forces appliquées
- W: potentiel de déformation
- ε : vecteur des déformations

soit:

$$V = \int_v w dv - \int_v f_i u_i dv - \int_{s_v} \phi_i u_i ds \quad (2.3)$$

- f_i : forces de volumes
- ϕ_i : forces de surfaces

IV. CONVERGENCE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Les performances des éléments sont évaluées en comparant les solutions numériques obtenues par des éléments finis à des solutions théoriques de référence ou à des résultats expérimentaux lorsque ceux-ci sont disponibles.

Les quantités comparées sont par exemple:

- Un déplacement (flèche) ou une rotation maximum
- Efforts résultants en des points particuliers
- L'énergie potentielle totale
- Des modes et fréquences propres

Les caractéristiques de convergence sont évaluées en fonction du nombre d'éléments, du nombre total de degrés de liberté et de la taille des éléments.

Dans une analyse du type éléments finis, la solution converge vers la solution exacte au fur et à mesure que l'on affine la discrétisation.

La convergence peut se faire de deux manières:

IV.1. Convergence monotone

Pour que la solution converge vers la solution analytique de façon monotone, les éléments doivent être complets et compatibles.

-Éléments complets

Les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter:

- Les déplacements de corps rigides.
- L'état de déformation constant.

- Éléments compatibles

La condition de compatibilité assure la continuité des déplacements au sein et à travers les limites séparant les éléments.

Cette condition, peut s'exprimer physiquement par le fait qu'aucun vide ou recouvrement n'apparaît entre les éléments une fois assemblés.

La compatibilité est difficile à satisfaire lorsque les degrés de liberté des noeuds sont dépendants (plaques, coques,..); c'est pourquoi, il est plus avantageux d'avoir des degrés de liberté indépendants.

IV.2. Convergence non-monotone

En pratique, on remarque souvent que les solutions des éléments finis convergent vers la solution exacte malgré l'emploi d'éléments ne représentant pas la continuité inter-élément.

Il s'agit de la convergence non-monotone due à l'utilisation d'éléments incompatibles.

Pour avoir une convergence non-monotone, il faut assurer les deux conditions suivantes:

- Eléments complets.
- Satisfaction du patch test.

Le patch test permet de prédire les déplacements de corps rigides.

En effet, les incompatibilités entre éléments peuvent empêcher l'assemblage de représenter des états de déformation constants.

Ce test consiste à imposer au noeud d'extrémité d'un groupe d'éléments, contenant au moins un noeud interne, des déplacements ou forces en accord avec un état de déformation constante.

Le test est satisfait si les solutions analytiques et numériques sont sensiblement égales.

V. NOTION D'ELEMENT FINI

En général, les structures rencontrées en pratique sont des structures composées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses (barres, poutres,...), interconnectées en des points de la structure que l'on appellera noeuds.

Constituant ainsi, une structure discrétisée. On caractérise le comportement de cette structure par un nombre fini de paramètres inconnus, soient des déplacements aux noeuds, soient des forces développées dans l'élément.

V.1. Formulation en coordonnées généralisées

L'approche la plus simple pour décrire le comportement d'un élément consiste à approximer son champ de déplacement par le concept d'interpolation polynomiale.

On a:
$$U = \sum (N_i a_i)$$

N_i : Fonctions d'interpolation polynomiale.

a_i : Déplacements généralisés aux noeuds.

Le nombre total des coordonnées généralisées de l'approximation doit être généralement égal au nombre total des déplacements nodaux de l'élément.

De plus, puisque les polynômes sont facilement dérivables, les déformations sont alors facilement obtenues.

Dans le problème de flexion des poutres que nous traitons lors de cette étude, il est nécessaire de satisfaire la condition de continuité C_1 du déplacement aux interfaces de l'élément. Ce qui implique l'introduction des dérivées premières des déplacements comme degrés de liberté aux noeuds.

Pour ces cas, l'interpolation par polynômes d'Hermite permet aisément la description fidèle du champ de déplacement.

V.2 . Etude des éléments unidimensionnels

Parmi les problèmes rencontrés dans le cas des éléments unidimensionnels, on se propose de considérer l'état de déformation d'un élément de poutre caractérisée par l'équation d'équilibre suivante:

$$\frac{d^2}{dx^2} (E(x)I(x)) \frac{du^2}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (2.4)$$

où :

- $E(x)$: module d'élasticité
- $I(x)$: moment d'inertie
- u : déplacement
- $f(x)$: chargement extérieur

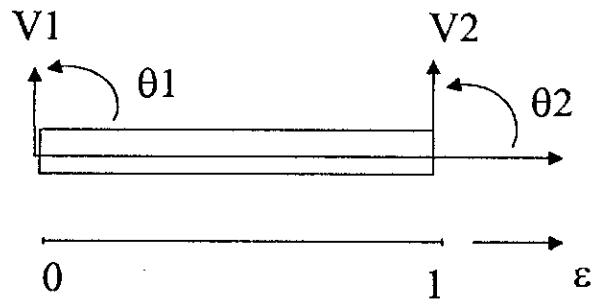


Fig. 1: Élément poutre en flexion.

Pour chaque cas la solution u au problème donné, existe et satisfait l'équation différentielle citée.

En chaque point du domaine $[0, L]$, de même pour les conditions aux limites définies aux points extrêmes:

on a:

$$u(0) = \frac{du}{dx}_{x=0} = 0 \quad (2.5)$$

Pour assurer la continuité des déplacements, on aura l'expression de la déflexion suivante :

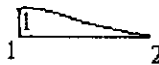
$$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (2.6)$$

En satisfaisant les conditions aux limites pour le modèle proposé, on obtiendra les expressions des fonctions de forme du champ de déplacement cubique.


Ces fonctions polynomiales doivent satisfaire la condition suivante :

$$\Sigma(N_i a_i) = 1 \text{ en chaque d.d.l. considéré. (2.7)}$$

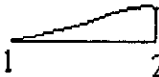
On a:



$$N_1 = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \quad (2.8)$$



$$N_2 = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (2.9)$$



$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (2.10)$$



$$N_4 = -L(\xi^2 - \xi^3) \quad (2.11)$$

VI. FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN STATIQUE:

VI.1. Formulation des équations d'équilibre

Le problème consiste en la détermination des déplacements (contraintes, déformations) de la structure représentée ci-dessous, sous l'effet du chargement extérieur et des condition aux limites données.

Pour ce faire, il nous faut préalablement établir les équations d'équilibre, en se basant sur le principe de la stationnarité du potentiel total du système, principe d'ailleurs équivalent au principe des travaux virtuels:

On a:

$$V = 0 \text{ avec } V = U - W \quad (2.12)$$

- V: énergie potentielle totale
- U: énergie de déformation
- W: potentiel des charges ou travail des charges

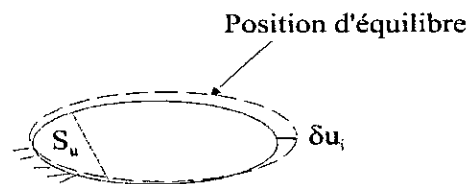


Fig 2 : Corps solide en équilibre.

Dans le cas unidimensionnel, le principe des travaux virtuels stipule que l'équilibre du système impose que pour tout champ de déplacement virtuel, compatible satisfaisant les conditions aux limites essentielles (de type déplacement), il y ait égalité des travaux intérieurs et extérieurs, soit:

$$\varepsilon = L u \quad (2.13)$$

où:

- L: opérateur linéaire approprié
- u: déplacement

En faisant appel à l'équation (5.4), l'expression (6.2) devient alors:

$$\varepsilon = B a \quad (2.14)$$

dans laquelle $B = L N \quad (2.15)$

soit:

un déplacement virtuel des noeuds: il provoque des déplacements et des déformations à l'intérieur de l'élément que l'on peut calculer à l'aide des expressions (2.5) et (2.6) qui fournissent respectivement:

$$\delta u = N \delta a^e \text{ et } \delta \varepsilon = B \delta a^e \quad (2.16)$$

le travail effectué par les forces nodales $= \delta a^{eT} q^e \quad (2.17)$

le travail intérieur par unité de volume $= \delta \varepsilon^T \sigma - \delta u^T b = \delta a^T (B^T \sigma - N^T b) \quad (2.18)$

En égalant le travail intérieur au travail extérieur, que l'on obtient par intégration par unité de volume, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta a^{eT} q^e &= \delta a^{eT} \left(\int_{V_e} B^T \sigma \, dv - \int_{V_e} N^T b \, dv \right) \\ q^e &= \int_{V_e} B^T \sigma \, dv - \int_{V_e} N^T b \, dv \end{aligned} \quad (2.19)$$

si l'on spécifie un comportement linéaire qui se traduit par la loi (2.5), on peut alors écrire:

$$\begin{aligned} q^e &= K^e a^e + f^e \\ K^e &= \int_{V_e} B^T D B \, dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

Il en découle que:

- L'équilibre est satisfait en tout point.
- La condition de compatibilité est satisfaite dans la mesure où les éléments finis sont compatibles.
- La loi de comportement contraintes - déformations est satisfaite.

L'expression de la matrice de rigidité K pour un élément poutre à inertie constante est donnée par:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ SYM & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

VII. FORMULATION DYNAMIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

VII.1 INTRODUCTION:

La dynamique des structures représente une branche de la mécanique appliquée ayant pour objet le calcul ainsi que l'étude du comportement des structures vis-à-vis des vibrations ou chocs.

Les structures généralement caractérisées par une masse et une élasticité peuvent effectuer des mouvements relatifs, sous l'action des sollicitations dynamiques.

Si le mouvement est répétitif, il est appelé " vibration " .

Généralement, on comprend par action dynamique, " la sollicitation produite par des charges qui varient rapidement avec le temps et qui contribuent à l'apparition de forces d'inertie " .

La signification du terme "dynamique" peut se définir simplement comme variable avec le temps. Une charge dynamique est donc une charge dont l'intensité, la direction ou le point d'application varient avec le temps.

De même, la réponse de la structure à une charge dynamique, c'est à dire les déplacements et les contraintes qui en résultent, est également variable dans le temps, donc dynamique elle aussi.

En général, l'inertie présente une partie signifiante dans l'équilibre de la structure, le caractère dynamique du problème doit être considéré dans la solution, le cas où l'on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées.

Par ailleurs, si le mouvement est si lent que les forces d'inertie pouvant être négligées, l'analyse à tout instant d'une telle structure peut être conduite par une procédure d'analyse statique même si le chargement et la réponse varient avec le temps.

VII - 2 - Définitions:

VII - 2 - 1 - Type de chargement:

Pratiquement, n'importe qu'elle structure est susceptible de subir, pendant sa durée de vie, un chargement dynamique sous une forme ou une autre.

Du point de vue analytique, on peut subdiviser les chargements dynamiques donnés en deux grandes catégories:

2-1-1- Chargements périodiques:

Ils sont constitués par des charges répétitives qui constituent les mêmes évolutions dans le temps sur un grand nombre de cycles.

2-1-2- Chargements non-périodiques:

Ce sont soit des impulsions de court durée, soit des chargements de longue durée et de formes quelconques.

Les chocs et les impulsions sont une source typique de chargements impulsif.

D'autre part, un chargement de longue durée, comme celui d'un séisme, peut être complètement traité par une procédure d'analyse dynamique.

VII - 2 - 2- Degré de liberté dynamique:

Dans l'étude du comportement dynamique des structures, il est important de définir la masse à n'importe quel instant du mouvement.

Si cela est possible, il est évident qu'on peut déterminer, à part la position du mouvement, la déformée, les contraintes et déformations spécifiques de n'importe quelle section de la structure.

Si à un instant t , quelconque la position de la structure peut être définie par un seul paramètre, on dit que la structure a un degré de liberté dynamique.

En général, le nombre de degré de liberté de la structure est définie comme étant le nombre de paramètres indépendants qui peuvent définir entièrement la position du système quelque soit l'instant t du mouvement. Il est aussi égal au nombre des déplacements indépendants du système considéré.

VII - 3- Formulation des équations de mouvement en dynamique

Les expressions mathématiques définissant les déplacements dynamiques sont appelées "équations de mouvement" de la structure.

La formulation de ces dernières s'avère la phase la plus importante et la plus difficile de la procédure.

En général, les systèmes rencontrés en pratique sont modélisés par des oscillations à plusieurs degrés de liberté.

En dynamique, l'équilibre à l'instant " t " d'un système linéaire à "n" degrés de liberté est gouverné par l'équation suivante:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + ku = p(t)$$

- M: matrice masse
- C: matrice d'amortissement
- K: matrice de rigidité
- U: vecteur de déplacement
- P(t): vecteur des forces extérieures dépendant du temps.

VII - 3 - 1- Principe de Hamilton:

Le principe de Hamilton est un principe variationnel basé sur des grandeurs énergétiques scalaires, s'exprimant par la relation mathématique suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0$$

où:

- T: énergie cinétique totale du système
- U: énergie potentielle totale du système
- W: travail des forces non conservatrices agissant sur le système
(forces d'amortissement et ou, charges extérieures arbitraires)

Pour un cas statique, on a:

$T = 0$. l'équation se réduit à:

$$\delta (U - W) = 0$$

D'où le principe du minimum de énergie potentielle souvent utilisé pour des analyses statiques.

VII - 3 - 2 - Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe d' Alembert:

Selon la deuxième loi de Newton qui dit que: " le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse est égale à la force qui lui est appliquée ".

Soit $P(t)$ la force extérieure appliquée, on a:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right)$$

$$p(t) - m\ddot{x}(t) = 0$$

Ainsi, la masse m produira une force inertielle proportionnelle à son accélération, d'où le principe de d'Alembert dont l'application permet d'exprimer les équations du mouvement comme les équations d'un équilibre dynamique.

VII - 3 - 3 - Principe des déplacements virtuels:

Enoncé:

Si un système en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, et soumis à un déplacement virtuel, alors le travail total effectué par ces forces est nul.

Par conséquent, ceci se traduit par l'expression d'un équilibre. L'équilibre s'écrira alors:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

VII - 4 - Détermination de la matrice masse:

La matrice masse est une distribution continue de masses, elle peut être soit cohérente, concentrée: soit à coefficients égaux ou non égaux.

VII - 4 - 1 - Matrice masse cohérente:

Lorsque le déplacement et la variation du champ accélération à travers l'élément sont décrits par les mêmes fonctions de formes la matrice masse est dite matrice "cohérente".

Elle est donnée par:

$$M = \int_V N^T \rho A N dv$$

- N: vecteur des fonctions de forme
- A: aire de la section droite
- ρ : masse volumique

Cette matrice est symétrique définie positive.

VII - 4 - 2 - Matrice masse concentrée à coefficients égaux:

C'est une formulation qui consiste à répartir équitablement la masse totale en tous les noeuds de la structure, c'est une matrice diagonale de la forme:

$$m_{ii} = \frac{1}{n} \int \rho \, ds \quad i=1,n$$

- n: nombre de noeuds
- i: correspond aux translations

VII - 4 - 3 - Matrice masse concentrée à coefficients inégaux:

Dans ce cas, la matrice [m] est diagonale, ses éléments sont les éléments diagonaux de la matrice masse cohérente que l'on multiplie de manière à préserver la masse totale de l'élément. Elle est donnée par:

$$m_{ii} = \frac{\int \rho N_i N_i \, dv \int \rho \, dv}{\int \sum_1^n \rho N_i N_i \, dv}$$

où:

$$a = \int \rho N_i N_i \, dv \quad a: \text{élément diagonal de la matrice cohérente}$$

$$b = \int \rho \, dv \quad b: \text{masse totale de l'élément}$$

$$c = \int \sum_1^n \rho N_i N_i \, dv \quad c: \text{somme des éléments diagonaux de la matrice cohérente.}$$

VII - 4 - 4 - Matrice de rigidité géométrique:

Soit la poutre soumise à un effort normal. Appliquons un déplacement virtuel et écrivons que le travail des forces virtuelles extérieures est égal au travail virtuel des forces intérieures. Le déplacement virtuel δv associé à la force K_G donne le travail virtuel extérieur.

$$W_E = K_G \delta v$$

Pour calculer le travail des forces intérieures il nous faut calculer le travail élémentaire correspondant à un élément dx de la poutre. Cet élément est représenté dans la figure 3, le travail est donné par :

$$dW_I = N(x)d(\delta e)$$

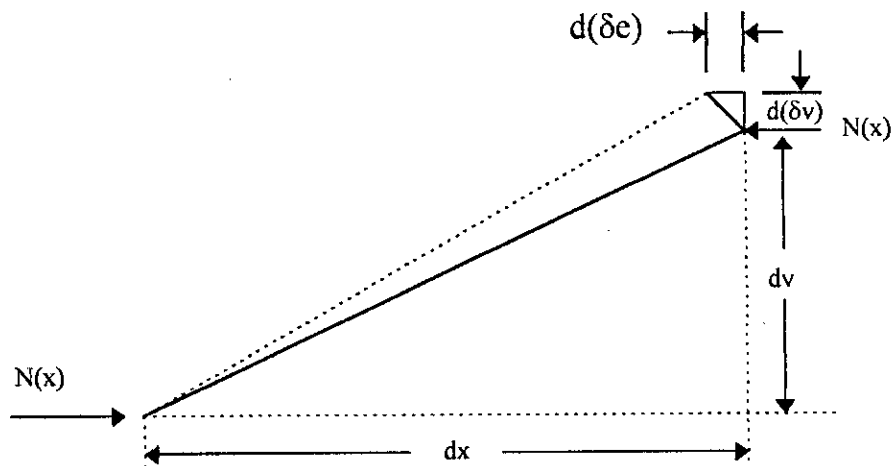


Fig: 3: Travail des forces intérieur

$d(\delta e)$: représente la distance que les forces parcourent en allant l'une vers l'autre. En utilisant les triangles semblables de la figure on voit que:

$$d(\delta e) = dv/dx(d(\delta v))$$

VIII. FORMULATION DU PHENOMENE DE CISAILLEMENT EN ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis permet d'obtenir pour le cas du cisaillement transversal des résultats exacts en utilisant des modèles déplacement.

Ainsi, nous considérons la formulation en déplacement basée sur des approximations C_0 de w et θ .

Pour les poutres épaisses soumises à une sollicitation V

On a les expressions des énergies de déformations de flexion et de cisaillement données par:

$$U = U_C + U_F = \frac{1}{2} q^T K_F q + \frac{1}{2} q^T K_C q \quad (2.21)$$

avec:

$$U_F = \int_0^l \frac{EI(x)}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx$$

$$U_C = \int_0^l \frac{GKA(x)}{2} \gamma^2 dx \quad (2.22)$$

avec:

θ : rotation de section.

v : cisaillement.

k : coefficient de forme de la section.

s : section droite de la poutre.

On optera ainsi pour un élément isoparamétrique à deux noeuds décrivant un champs de déplacement linéaire.

Pour ce champs de déplacement on a:

$$N_1 = (1 - \xi)$$

$$N_2 = \xi$$

$$V(\xi) = (N_1, 0, N_2, 0) [q]$$

$$\theta(\xi) = (0, N_1, 0, N_2) [q]$$

$$[q] = (V_1, \theta_1, V_2, \theta_2)$$

on a:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{L} [-1, 0, 1, 0] [q]$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{L} [0, -1, 0, 1] [q]$$

$$\gamma = \left[\frac{-1}{L}, (\xi - 1), \frac{1}{L}, -\xi \right] [q] \quad (2.23)$$

$$K = K_F + K_C \quad (2.24)$$

K_F et K_C s'obtiennent respectivement de la relation (2.22)

$$K_F = \int_0^1 EI(\xi) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0, -1, 0, 1] d\xi \quad (2.25)$$

$$K_C = \int_0^1 kGA(\xi) \begin{bmatrix} -1/L \\ (1-\xi) \\ 1/L \\ -\xi \end{bmatrix} [-1/L, (1-\xi), 1/L, -\xi] d\xi \quad (2.26)$$

En intégrant les équations (2.25) et (2.26), nous obtenons les termes des matrices K_F et K_C , ces matrices sont symétriques.

La matrice globale après assemblage est de la forme, pour une poutre à section constante, est de la forme suivante:

$$K = \frac{EI}{L} (K_F + \frac{kGAL^2}{EI} K_C)$$

On pose $g = 12 EI / k G A L^2 = E (h/L)^2 / k G$

Lorsque g est grand (c'est à dire lorsque l'influence du cisaillement transversal est négligeable), l'élément conduit à une solution influencée par le cisaillement au lieu d'être associée au phénomène de flexion.

Cette rigidité parasite est appelée blocage par cisaillement.

Pour remédier au blocage numérique dû au cisaillement on peut calculer la matrice de rigidité par intégration réduite ou encore utiliser une formulation mixte permettant de diminuer la dominance parasite du cisaillement par rapport à la flexion.

CHAPITRE 3

ETUDE DES POUTRES EN FLEXION

I. INTRODUCTION

On entend par flexion une déformation due:

- à l'action des forces perpendiculaires à l'axe longitudinal d'une barre.
- à un moment appliqué dans le plan de l'axe longitudinal de la barre.

Si les efforts tranchants et la force normale de traction ou de compression n'existent pas, la flexion est dite pure.

Si des efforts existent au même temps que les moments fléchissants, la flexion est dite simple.

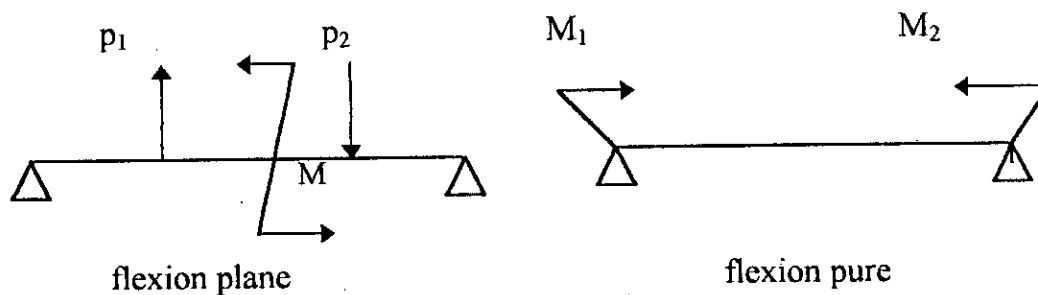


fig 3.1 Flexion des poutres

II. Etude des déplacements des structures

II.1 déformations dans les poutres

En appliquant un chargement quelconque à une structure, des contraintes se développent le long du matériau et engendrent des déformations.

On définit par déformation, n'importe quel changement de formes de certaines parties de la structure. Celles-ci, sont causées généralement par des contraintes résultantes de systèmes de forces variées.

Les principales déformations à considérer sont de types axiales, flexionnelles, de torsion et de cisaillement.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à décrire les déformations flexionnelles et de cisaillement.

II.1.1 Déformations flexionnelles

Soit poutre soumise à un moment de flexion produit par un couple de moment M agissant aux extrémités (fig.3.2.1.a)

La contrainte de flexion est donnée, à n'importe quelle section de la poutre par:

$$\sigma_x = - M y / I_z \tag{3.1}$$

y : distance d'un point quelconque A de la section à l'axe neutre (fig.3.2.1.b)

I_z : moment d'inertie de la section droite.

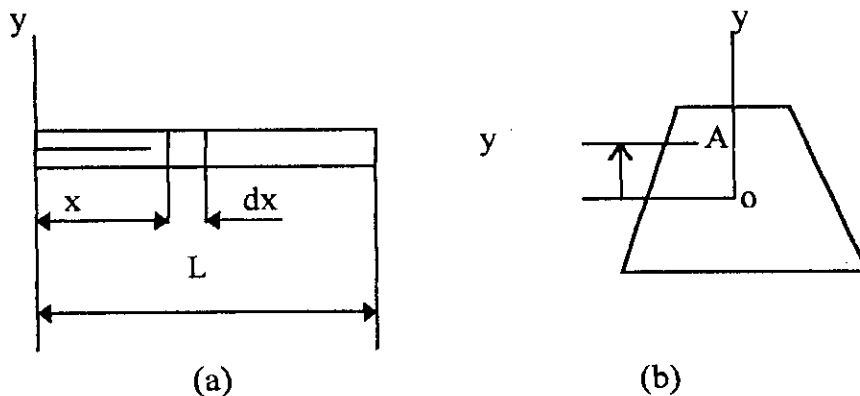


fig.3.2.1. Déformation flexionnelle

La déformation au même point est donnée par:

$$\varepsilon_x = - \frac{M y}{EI} \quad (3.2)$$

On a
$$d\theta = - \frac{\varepsilon dX}{y} \Rightarrow d\theta = \frac{M}{EI_z} dX \quad (3.3)$$

D'où l'angle de rotation peut être déterminé par intégration :

$$\theta = \int d\theta = \int_0^l \frac{M}{EI_z} dX = \frac{ML}{EI_z} \quad (3.4)$$

La déflexion Δ de la poutre à un point quelconque, est égale à la somme des $d\Delta$.

$$d\Delta = (L-x) d\theta$$

En utilisant (3.3), on obtient:

$$d\Delta = (L - X) \frac{M}{EI_z} dx \quad (3.5)$$

L'intégration sur le long de l'élément donne le déplacement total. Ainsi pour une section prismatique constante, on obtient:

$$\Delta = \int d\Delta = \int_0^l (L - x) \frac{M}{EI_z} dx = \frac{ML^2}{2EI_z} \quad (3.6)$$

II - 1 - 2 Déformations de cisaillement:

Il existe souvent des forces de cisaillement agissant sur la section droite de la structure donnée Soit la poutre cantilever (fig.3.2.2.a),le moment à une distance x de l'extrémité gauche est donnée par:

$$M = - P (L - x) \tag{3.7}$$

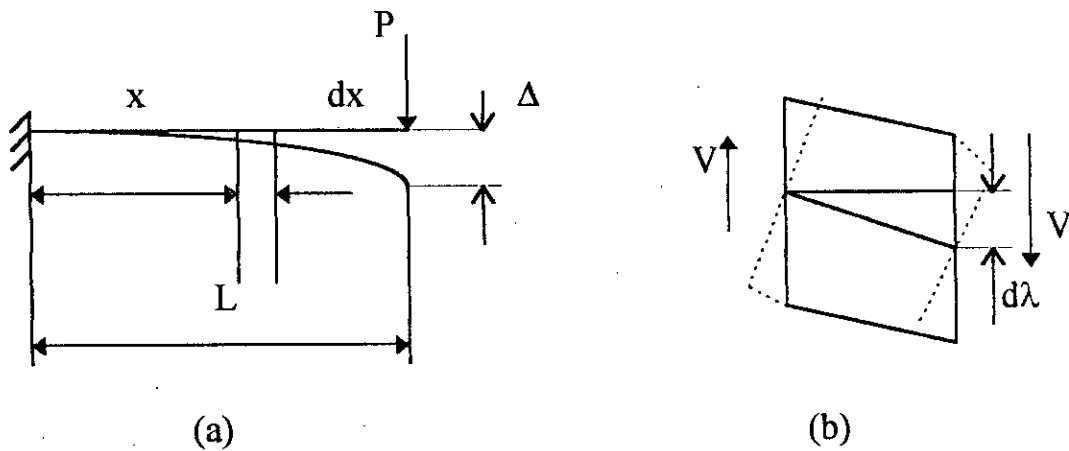


fig.3.2.2: Déformations de cisaillement

La force de cisaillement V est constante le long de la poutre:

$$V = P \tag{3.8}$$

La contrainte de cisaillement (tangentielle) dans la section de la poutre engendrée par l'effort V est exprimée par :

$$\tau = \frac{VQ}{I_z b} \tag{3.9}$$

Q: moment statique de la section.

I_z : moment d'inertie.

b : largeur de la poutre.

Dans ce cas nous considérons les déformations causées par les forces de cisaillement V .

Ces déformations dépendent du déplacement relatif $d\lambda$ de part et d'autre de l'élément

Le déplacement $d\lambda$ est donné par l'expression:

$$d\lambda = f \frac{Vdx}{GA} \quad (3.10)$$

on pose: $k=1/f$

k = coefficient de forme correspondant à la section ($k=6/5$ pour une section rectangulaire).

A : l'aire de la section.

le terme GA/f est appelé, rigidité de cisaillement.

La présence des déformations de cisaillement $d\lambda$ dans l'élément de poutre, montre que le déplacement total de n'importe quel point le long de la poutre sera influencé par les déformations flexionnelles et de cisaillement.

Dans certains cas les déflexions dues aux déformations de cisaillement peuvent être calculées par une application directe de l'équation (3.10)

La déflexion totale engendrée uniquement par les effets de cisaillement est donnée par :

$$\Delta_s = \int d\lambda = \frac{fP}{GA} \int_0^l dx = \frac{fPL}{GA} \quad (3.11)$$

D'autre part La déflexion due au moment peut être donnée par intégration de (3.5):

$$\begin{aligned} \Delta_b &= \int_0^l (L-x) \frac{M}{EI_z} dx = \int_0^l (L-x)^2 \frac{P}{EI_z} dx \\ \Delta_b &= \frac{PL^3}{3EI_z} \end{aligned} \quad (3.12)$$

En appliquant le principe de superposition des déplacements, le déplacement total sera donné par:

$$\Delta = \Delta_b + \Delta_s = \frac{PL^3}{3EI_z} + \frac{fPL}{GA} \quad (3.13)$$

A partir de cette équation, on retrouve le rapport de la déflexion de cisaillement à celle de la flexion, ce rapport est égal à $3fEI_z/GAL^2$, ce rapport est très petit comparé à l'unité, sauf uniquement dans le cas des poutres courtes.

CHAPITRE 4

DEVELOPPEMENT DE LA METHODE SEMI-ANALYTIQUE

I. Introduction

Dans le but d'illustrer le comportement des poutres à inertie variable, différentes études ont été élaborées pour la mise en évidence des matrices de raideur et de masse, pour quelques variations.

Karabalis et Beskos ont déterminé de manière exacte les matrices de raideur et de masse pour le cas d'une variation linéaire de la hauteur avec une largeur constante [1].

De plus, en utilisant les matrices de flexibilité celles-ci ont été également décrites par Eisenberger [2], pour trois cas particuliers de variation:

- a- variation linéaire de la hauteur $[h]$ de la section droite de la poutre.
- b- variation linéaire de la largeur $[b]$ de la section droite de la poutre.
- c- variation parabolique de la hauteur $[h]$.

D'autre part, Bannerjee et Williams ont pu mettre en évidence ces matrices pour une certaine classe de variation des sections droites [3].

Ainsi, de nombreux chercheurs ont proposé des solutions approximatives au problème, mais toujours est-il, la solution par la méthode des éléments finis est la plus utilisée.

Pour le cas où les propriétés de la section droite varient le long de la poutre, il est commun de subdiviser la poutre en question, en plusieurs éléments infinitésimaux et attribuer pour chaque élément une section droite et un moment d'inertie équivalents.

Cependant, la solution résultante est définie approximativement et la précision requise pourrait être atteinte en utilisant un nombre important d'éléments.

Ceci requière un travail considérable pour la caractérisation des données, et résulte en un nombre estimable de modèles d'éléments finis.

Par ailleurs, la présente étude est consacrée à l'introduction d'une méthode approximative dite méthode semi-analytique (SA).

II. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE SA

Cette méthode consiste à exprimer le moment d'inertie, ainsi que la section droite de la poutre, sous forme de séries entières de la coordonnée axiale.

Les équations régissant l'équilibre statique, vibratoire et de stabilité de la structure, s'expriment sous la forme matricielle suivante:

$$K U = F \quad (4.1)$$

$$(K - \omega^2 M) U = 0 \quad (4.2)$$

$$(K - \lambda N) U = 0 \quad (4.3)$$

où:

- K est la matrice de rigidité
- M est la matrice de masse
- N est la matrice de rigidité géométrique
- U est le vecteur des déplacements nodaux
- F est le vecteur des forces nodales équivalentes
- ω fréquence propre du système
- λ coefficient de la charge critique de flambement

Les matrices de rigidité et de masse s'expriment respectivement, en fonction du moment d'inertie et de la section droite, leur développement par la méthode SA est nécessaire, par contre l'expression de la matrice de rigidité géométrique ne dépend que du chargement au quelle la poutre est soumise, elle sera donc calculée à partir de la méthode classique des éléments finis.

Si nous présentons la rigidité flexionnelle de la poutre par la relation :

$$R(x) = E(x) I(x) \quad (4.4)$$

et la masse par unité de longueur par :

$$G(x) = \rho(x) A(x) \quad (4.5)$$

où:

- $E(x)$: module d'élasticité le long de la poutre.
- $I(x)$: moment d'inertie.
- $\rho(x)$: densité massique.
- $A(x)$: aire de la section droite.

On considère dans notre étude que le module d'élasticité E et la masse volumique ρ , sont constants, les expressions (4.4) et (4.5) peuvent se mettre sous forme de séries entières et deviennent alors:

$$R(x) = E I(x) = \sum_m r_m x^m \quad (4.6)$$

$$G(x) = \rho A(x) = \sum_m g_m x^m \quad (4.7)$$

avec : $m = 0, 1, 2, \dots$

III. FORMULATION DE LA METHODE SA

III.1 Poutres en flexion sans cisaillement transversal

D'après la théorie des éléments finis nous avons :

$$K(i,j) = \int_0^L EI(x) F_i''(x) F_j''(x) dx \quad (4.8)$$

$$M(i,j) = \int_0^L \rho A(x) F_i(x) F_j(x) dx \quad (4.9)$$

avec :

- F_i : fonctions de formes de l'élément caractéristique
- F_i'' : dérivée secondes correspondant à la coordonnée axiale
- L : longueur de la poutre.

Les fonctions de forme d'une poutre à section non uniforme étant non connus, on utilise alors les fonctions de forme relatives à un élément à section constante.

Les fonctions de forme pour un élément poutre régulier sont les suivantes :

$$f_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$f_2 = x\xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$$f_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$f_4 = -\xi^2 + \xi^3$$

avec $x = \xi L$

En utilisant, ces mêmes fonctions de forme, et en remplaçant respectivement (4.6), (4.7) dans (4.8), (4.9), nous obtenons les expressions suivantes :

$$K(i,j) = \sum_m L^m r_m \int_0^1 \xi^m f''_i(\xi) f''_j(\xi) d\xi = \sum_m K_m(i,j) \quad (4.10)$$

$$M(i,j) = \sum_m L^m g_m \int_0^1 \xi^m f_i(\xi) f_j(\xi) d\xi = \sum_m M_m(i,j) \quad (4.11)$$

où :

$$K_m(i,j) = L^m r_m \int_0^1 \xi^m f''_i(\xi) f''_j(\xi) d\xi \quad (4.12)$$

$$M_m(i,j) = L^m g_m \int_0^1 \xi^m f_i(\xi) f_j(\xi) d\xi \quad (4.13)$$

Les matrices K_m et M_m sont des matrices symétriques, obtenus à partir des fonctions de forme ci dessus.

III.1.1 Matrice de rigidité

Après intégration de l'équation (4.12), on obtient les termes de la matrice de rigidité.

$$K_m(1,1) = L^{m-3} r_m \left(\frac{144}{3+m} - \frac{144}{2+m} + \frac{36}{1+m} \right)$$

$$K_m(1,1) = K_m(3,3) = -K_m(1,3)$$

$$K_m(1,2) = L^{m-2} r_m \left(\frac{2}{3+m} - \frac{84}{2+m} + \frac{24}{1+m} \right)$$

$$K_m(1,2) = -K_m(2,3)$$

$$K_m(1,4) = L^{m-2} r_m \left(\frac{72}{3+m} - \frac{60}{2+m} + \frac{12}{1+m} \right)$$

$$K_m(1,4) = -K_m(3,4)$$

$$K_m(2,2) = L^{m-1} r_m \left(\frac{36}{3+m} - \frac{48}{2+m} + \frac{16}{1+m} \right)$$

$$K_m(2,4) = L^{m-1} r_m \left(\frac{36}{3+m} - \frac{36}{2+m} + \frac{8}{1+m} \right)$$

$$K_m(4,4) = L^{m-1} r_m \left(\frac{36}{3+m} - \frac{24}{2+m} + \frac{4}{1+m} \right)$$

III.1.2 Matrice masse

En intégrant l'équation (4.13), on obtient les termes de la matrice masse.

$$M_m(1,1) = L^{m+1} g_m \left(\frac{4}{7+m} - \frac{12}{6+m} + \frac{9}{5+m} + \frac{4}{4+m} - \frac{6}{3+m} + \frac{1}{1+m} \right)$$

$$M_m(1,2) = L^{m+2} g_m \left(\frac{2}{7+m} - \frac{7}{6+m} + \frac{8}{5+m} - \frac{2}{4+m} - \frac{2}{3+m} + \frac{1}{2+m} \right)$$

$$M_m(1,3) = L^{m+1} g_m \left(-\frac{4}{7+m} - \frac{12}{6+m} - \frac{9}{5+m} - \frac{2}{4+m} + \frac{3}{3+m} \right)$$

$$M_m(1,4) = L^{m+2} g_m \left(\frac{2}{7+m} - \frac{5}{6+m} + \frac{3}{5+m} + \frac{1}{4+m} - \frac{1}{3+m} \right)$$

$$M_m(2,2) = L^{m+3} g_m \left(\frac{1}{7+m} - \frac{4}{6+m} + \frac{6}{5+m} - \frac{4}{4+m} + \frac{1}{3+m} \right)$$

$$M_m(2,3) = L^{m+2} g_m \left(-\frac{2}{7+m} + \frac{7}{6+m} - \frac{8}{5+m} + \frac{3}{4+m} \right)$$

$$M_m(2,4) = L^{m+3} g_m \left(\frac{1}{7+m} - \frac{3}{6+m} + \frac{3}{5+m} - \frac{1}{4+m} \right)$$

$$M_m(3,3) = L^{m+1} g_m \left(\frac{4}{7+m} - \frac{12}{6+m} + \frac{9}{5+m} \right)$$

$$M_m(3,4) = L^{m+2} g_m \left(-\frac{2}{7+m} + \frac{5}{6+m} - \frac{3}{5+m} \right)$$

$$M_m(4,4) = L^{m+3} g_m \left(\frac{1}{7+m} - \frac{2}{6+m} + \frac{1}{5+m} \right)$$

III.1.3 Matrice de rigidité géométrique

La matrice de rigidité géométrique utilisée est celle obtenue par la méthode des éléments finis, dont nous rappelons ses termes.

$$K_G(i,j) = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -36 & 3L & 3L \\ -36 & 36 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 4L^2 & -L^2 \\ 3L & -3L & -L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

III.2 Poutres en flexion avec cisaillement transversal

L'énergie de déformation d'une poutre avec cisaillement transversal s'écrit sous la forme:

$$U = U_C + U_F = \frac{1}{2} q^T K_F q + \frac{1}{2} q^T K_C q \quad (4.14)$$

avec:

$$U_F = \int_0^l \frac{EI(x)}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx$$

$$U_C = \int_0^l \frac{GKA(x)}{2} \gamma^2 dx \quad (4.15)$$

avec :

θ : rotation de section.

v : cisaillement.

k : coefficient de forme de la section.

s : section droite de la poutre.

En prenant compte du cisaillement, on a la relation suivante :

$$\frac{dv}{dx} = \theta + \gamma \quad (4.16)$$

On obtient d'après (4.14) et (4.15), l'expression de l'energie de deformation en fonction de deux champs inconnus $v(x)$ et $\theta(x)$:

$$U_F = \int_0^l \frac{EI(x)}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx$$

$$U_C = \int_0^l \frac{GKA(x)}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 dx \quad (4.17)$$

Appliquons les methodes habituelles de calcul des elements isoparametriques en utilisant le systeme des coordonnees naturelles ξ et les fonctions d'interpolation lineaire pour v et θ . On obtient ainsi un element à quatre degre de liberte.

$$q^T = [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2]$$

On a :

$$v(\xi) = [(1-\xi), 0, \xi, 0] [q] \quad (4.18)$$

$$\theta(\xi) = [0, (1-\xi), 0, \xi] [q] \quad (4.19)$$

d'où:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{L}[-1, 0, 1, 0] [q] \quad (4.20)$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{L}[0, -1, 0, 1] [q]$$

$$\gamma = \left[\frac{-1}{L}, (\xi - 1), \frac{1}{L}, -\xi \right] [q] \quad (4.21)$$

$$K = K_F + K_C \quad (4.22)$$

K_F et K_C s'obtiennent respectivement de la relation (4.15)

$$K_F = \int_0^1 EI(\xi) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0, -1, 0, 1] d\xi \quad (4.23)$$

$$K_F = \sum_m L^m r_m \int_0^1 E \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0, -1, 0, 1] d\xi = \sum_m K_{mF} \quad (4.24)$$

$$K_{mC} = L^m r_m \int_0^1 E \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0, -1, 0, 1] d\xi \quad (4.25)$$

$$K_C = \int_0^1 kGA(\xi) \begin{bmatrix} -1/L \\ (1-\xi) \\ 1/L \\ -\xi \end{bmatrix} [-1/L, (1-\xi), 1/L, -\xi] d\xi \quad (4.26)$$

$$K_C = \sum_m L^m g_m \int_0^1 kG \begin{bmatrix} -1/L \\ (1-\xi) \\ 1/L \\ -\xi \end{bmatrix} [-1/L, (1-\xi), 1/L, -\xi] d\xi = \sum_m K_{mC} \quad (4.27)$$

$$K_{mC} = L^m g_m \int_0^1 kG \begin{bmatrix} -1/L \\ (1-\xi) \\ 1/L \\ -\xi \end{bmatrix} [-1/L, (1-\xi), 1/L, -\xi] d\xi \quad (4.28)$$

En integrant les equatuions (4.25) et (4.28), nous obtenons les termes des matrices K_{mF} et K_{mC} , ces matrices sont symetriques.

$$K_{mF}(2,2) = K_{mF}(4,4) = -K_{mF}(4,2) = r_m L^{m-1} \left(\frac{1}{m+1} \right)$$

Les autres termes de la matrice K_{mF} sont nuls.

$$K_{mC}(1,1) = K_{mC}(3,3) = -K_{mC}(1,3) = k g_m L^{m-1} \left(\frac{1}{m+1} \right)$$

$$K_{mC}(1,2) = -K_{mC}(2,3) = k g_m L^m \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right)$$

$$K_{mC}(1,4) = k g_m L^m \left(\frac{1}{m+2} \right)$$

$$K_{mC}(2,2) = K_{mC}(4,4) = k g_m L^{m+1} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{2}{m+2} + \frac{1}{m+3} \right)$$

$$K_{mC}(4,4) = k g_m L^{m+1} \left(\frac{1}{m+3} \right)$$

CHAPITRE 5

METHODES DE RESOLUTION

I. INTRODUCTION

Les systèmes d'équations linéaires peuvent se résoudre par des méthodes directes ou par des méthodes indirectes dites méthodes itératives, le choix de la méthode à employer dépend de l'ordre du système à résoudre.

En utilisant les méthodes directes la solution est fournie alors en un nombre fini d'étapes et elle est exacte. par contre l'utilisation d'une méthode indirecte, fournie la solution x_{i+1} à partir d'un estimé x_i et par conséquent s'il y a convergence, la solution ne peut être atteinte qu'après un nombre important d'itérations.

Les qualités requises pour une méthode de résolution utilisées dans les logiciels d'analyse des structures, sont la fiabilité et la performance pour une vaste gamme d'applications.

II. CLASSIFICATIONS DES METHODES DE RESOLUTION EN ANALYSE STATIQUE

Les méthodes de résolutions en analyse statique se classent en:

II. 1. Méthodes itératives

Ces méthodes peuvent présenter d'excellentes propriétés de convergences pour un certain type de problèmes. Cependant ,il n'en est pas ainsi pour la grande variété des problèmes que l'on peut rencontrer en analyse des structures. pour ces raisons, les méthodes itératives ne sont pratiquement pas utilisées dans les logiciels d'analyse des structures

II. 2. Méthodes directes

Les méthodes de résolution directes sont les plus utilisées dans les logiciels d'analyse des structures, elles présentent souvent des performances supérieures à celles des méthodes itératives et permettent en particulier la détection des singularités, ces méthodes sont basées soit sur l'algorithme de Gauss ou de ses variantes ou sur l'algorithme de factorisation de Cholesky, nous exposons dans ce chapitre la méthode de résolution de Gauss.

II. 2. 1. Méthode d'élimination de Gaussprincipe

Le principe de cette méthode consiste à transformer le système linéaire $AX=B$ à matrice quelconque en un système équivalent $A'X=B$ où A' est une matrice triangulaire supérieure, ainsi la résolution du système revient à résoudre un système à matrice triangulaire supérieure.

description de la méthode:

Soit le système suivant $AX=B$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sachant que les mêmes transformations seront opérées sur A et B, on simplifie l'algorithme en formant la matrice augmentée [A,B] ou le vecteur B devient la $(n+1)^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A.

Le système s'écrit donc:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

La méthode comporte $n-1$ étapes.

première étape:

On transforme [A,B] en une matrice dont les termes sous diagonaux de la première colonne sont nuls: $a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \dots = a_{n1}^{(1)} = 0$

L'indice (1) mis entre parenthèses (placé en exposant) indique que l'on vient d'effectuer la première étape. Dans cette étape, on a:

- la première ligne de la matrice [A,B] est toujours la même.
- la première colonne de [A,B], comme cela a été dit, a pour éléments tous nuls à l'exception du terme a_{11} .
- le terme $a_{ij}^{(1)}$ de la sous matrice se calcul d'après:

$$a_{ij}^{(1)} = - \frac{a_{in}^{(1)}}{a_{11}} a_{1j} + a_{ij} \quad \text{avec} \begin{cases} i = 2, n+1 \\ j = 1, n+1 \end{cases}$$

Pour calculer les $a_{i,n+1}$ on usera de la même formule précédente

Deuxième étape:

Au cours de cette étape nous devons annuler les termes sous diagonaux de la seconde colonne . A la fin de cette étape on obtient le système suivant

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & 0 & & & \cdot \\ \cdot & 0 & & & \cdot \\ 0 & 0 & & & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

On doit remarquer que toutes ces transformations supposent que les termes a_{kk} appelés "pivots" sont non nuls. Il faudra donc ajouter une phase de vérification de la non nullité du pivot a_{kk} et l'algorithme général devient:

1. Triangularisation : $[a,b] \rightarrow [u,b']$:

$$w = a_{ik}/a_{kk}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - wa_{kj}$$

2. triangularisation du système résultant

$$x_i = (b_i - \sum a_{ij} x_j) / a_{ii} \quad i=n, n-1, \dots, 1$$

III. RESOLUTION DES SYSTEMES PROPRES

Pour la résolution de l'équation de mouvement des structures deux approches fondamentales sont envisageables: l'une d'entre elles consiste à résoudre ce système différentiel par intégration directe, l'autre méthode consiste à définir la solution dans la base des modes propres de vibration de la structure, celle ci est appelée méthode de superposition modale et elle est largement utilisée en analyse dynamique.

La résolution de l'équation suppose que la structure est faiblement amortie et c'est le cas le plus fréquent pour de nombreux domaines d'application. La méthode de superposition modale utilise donc des modes propres réels de structure non amortie. On se ramène donc à la résolution du problème aux valeurs propres sous sa forme générale:

$$Kx = \omega^2 Mx \quad (5.3.1)$$

Le système homogène (5.3.1) de dimension n à n solutions propres $x^{(i)}$ permettant de définir les déformées modales de la structure et n valeurs associées, carrées des pulsations propres

$$\lambda = \omega^2$$

C'est la solution du système (5.3.1), qui constitue le système aux valeurs propres.

III. I. PROPRIETES FONDAMENTALES DES SYSTEMES PROPRES

Les méthodes de résolution du système (5.3.1), dit système aux valeurs propres, sont basées sur les propriétés de celui-ci. C'est pourquoi, avant d'étudier quelques méthodes de résolution, il est indispensable de citer les différentes propriétés du système propre:

III. 1. 1. Valeurs propres

Le système (5.3.1) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(K - \lambda M) X^{(i)} = 0 \quad (5.3.2)$$

Pour obtenir les vecteurs $X^{(i)}$ non nuls de façon à ce que (5.3.2) soit satisfaite il

faut que $[K-\lambda M]$ soit non singulière, c'est à dire:

$$\det([K-\lambda M]) = 0 \quad (5.3.3)$$

L'équation (5.2.3) correspond à la recherche d'un polynôme d'ordre n . Or, il n'existe pas de résolution directe pour $n > 4$, de plus, il est difficile de construire le polynôme pour de grands systèmes.

C'est la raison pour laquelle on a recours à des méthodes itératives.

III. 1. 2. Vecteurs propres

Pour le calcul des vecteurs propres, on peut utiliser les algorithmes de résolution des problèmes statiques, en effet:

Si dans le système $KU=F$, on remplace le vecteur F par $\lambda M x$, on aura alors $U=x$.

Les vecteurs propres ne sont connus qu'à une constante multiplicative près. Alors, ceux ci ne sont définis que par leur direction dans l'espace.

Les vecteurs propres satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$X^T K X = \Lambda$$

$$X^T M X = I$$

X : matrice modale où sont stockés les vecteurs propres par colonnes.

Λ : matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres.

III. 1. 3. Quotient de Rayleigh

On appelle le quotient de Rayleigh du mode de déplacement x , le rapport:

$$R(x) = \frac{X^T K X}{X^T M x}$$

-Propriété

Le quotient de Rayleigh est stationnaire au voisinage de tout vecteur propre et il atteint un extremum qui est la valeur propre correspondante.

En particulier, le mode fondamental de vibration rend stationnaire le quotient de Rayleigh qui tend vers la valeur propre la plus basse.

III. 1. 4. Décalage

Une des techniques des les plus répandus dans la résolution des problèmes aux valeurs propres est le décalage. Cette technique améliore la vitesse de convergence en transformant la matrice K en:

$$\tilde{K} = K - \varphi M$$

où φ est la valeur du décalage.

L'équation (5.2.2) devient:

$$\tilde{K} \psi = \mu M \psi$$

où encore:

$$K \psi = (\mu + \varphi) M \psi$$

On peut, alors faire l'identification suivante, provenant de l'unicité de la solution:

$$x=\psi$$

$$\lambda=\mu+\varphi$$

III. 2. Méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres

Dans la résolution des problèmes dynamiques par superposition modale, c'est la recherche des solutions propres qui nécessite le plus de temps de calcul.

Nous citerons trois méthodes qui opèrent sur les vecteurs propres:

III. 2. 1. Méthode d'itération directe

La méthode d'itération directe encore appelée méthode de la puissance directe convient particulièrement pour la résolution des problèmes aux valeurs propres sous forme classique, lorsqu'on s'intéresse à un nombre de solutions propres.

Pour ramener la solution d'un problème aux valeurs propres sous la forme générale, soit:

$$Kx = \omega^2 Mx$$

à celle d'un problème aux valeurs propres sous la forme classique, c'est à dire :

$$Dy = \lambda y$$

On peut procéder de différentes façons suivantes:

En posant:

$$D=K^{-1}M \quad \lambda=1/\omega \quad (5.3.3)$$

alors la matrice D qui est aussi appelée matrice de flexibilité n'est pas symétrique, ce qui est un inconvénient majeur de cette approche. Cependant la relation(5.3.3) entre les valeurs propres et les pulsations propres de la structure est particulièrement adaptée à la méthode de la puissance qui converge vers les valeurs propres les plus élevées.

En faisant une factorisation de Cholesky de M ou de K. La matrice de flexibilité dynamique obtenue est alors symétrique, ce qui est plus intéressant.

III. 2. 2. Principe de la méthode d'itération directe

Considérons le problème aux valeurs propres classique:

$$DX=\lambda X =1/\omega^2$$

dont les solutions propres sont:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots \lambda_n$$

$$x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$$

On se donne un vecteur de départ y_0 , et on calcul :

$$y_1=Dy_0$$

On itere ensuite sur le vecteur y de telle manière que:

$$y_{i+1}=Dy_i$$

Tout vecteur de départ y_0 peut se décomposer dans la base des vecteurs propres $x^{(i)}$ soit:

$$y_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j x^{(j)} = \varphi \beta$$

de $y_{i+1} = Dy_i$ on tire:

$$y_i = D^i y_0$$

d'où:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \beta_j D_j^i X^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^i X^{(j)}$$

où encore :

$$y_i = \lambda_1^i \left[\beta_1 X^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^i X^{(j)} \right]$$

Si l'on suppose que D a n valeurs propres distinctes, on a:

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1 \quad \text{pour } j=2, n$$

Ainsi lorsque i devient grand, les itérés successifs deviennent colinéaires aux vecteurs propres $x^{(1)}$:

$$y_i = \lambda_1^i \beta_1 x^{(1)}$$

De plus:

$$\frac{\|y_{i+1}\|}{\|y_i\|} \rightarrow \lambda_1$$

III. 3. Méthode d'itération inverse

La méthode d'itération inverse convient pour la résolution des problèmes aux valeurs propres sous forme générale:

$$Kx = \omega^2 Mx$$

Lorsqu'on s'intéresse à un petit nombre de solutions propres.

Son principe est le suivant:

Soit à résoudre le système aux valeurs propres général:

$$Kx = \lambda Mx \text{ avec } \lambda = \omega^2$$

d'où:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\lambda_j} x^{(j)}$$

Si on étend ce résultat à l'itération i , on obtient:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}} \right)^i x^{(j)}$$

Dans le cas de n valeurs distinctes ;

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_j} \ll 1 \quad j=2, n$$

Ainsi lorsque i devient grand, les itérés successifs deviennent colinéaires aux vecteurs propre $x^{(1)}$:

$$y_i = \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^i \beta_1 x^{(1)}$$

De plus :

$$\frac{\|y_{i+1}\|}{\|y_i\|} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

Remarques:

En ce qui concerne la méthode d'itération directe et la méthode d'itération inverse, le nombre r d'itérations requis pour une précision de s chiffres représentatifs sur les valeurs propres:

Soit pour:

$$\left| \frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(r-1)}{\lambda_1(r-1)} \right| \leq 10^{-s}$$

Dans la méthode d'itération inverse, si le vecteur y_i n'est pas orthogonal au vecteur propre cherché, y_i convergera vers la matrice du premier mode.

III. 4. Méthode d'itération sur sous espaces

La méthode d'itération sur sous espace a été développée pour améliorer les propriétés de convergences de la méthode d'itération inverse. Cette méthode est basée sur les principes suivants:

Générer m vecteurs de départ en nombre supérieur à celui des modes recherchés p ($p < m$).

Améliorer ce vecteur de départ par itération inverse simultanée pour générer les sous espaces des p premiers modes propres.

Extraire les p premiers valeurs et modes propres associés par la méthode de Ritz.

On voit donc que cette méthode tire profit de différentes techniques: itération inverse simultanée, méthode de Ritz.

III. 4. 1. Itération inverse simultanée

La méthode d'itération inverse simultanée consiste à itérer simultanément sur un ensemble de m vecteur $y_0^{(i)}$ de départ. Soit y_0 la matrice rectangulaire:

$$y_0 = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}]_0$$

A la $i^{\text{ème}}$ itération, on résout le système:

$$Kz_i = My_{i-1} \quad (5.4.1)$$

Après résolution de (5.4.1), on définit un sous espace de m vecteurs orthogonaux par rapport à la masse caractérisée par la matrice y_i , c'est à dire avec:

$$y_i^T M y_i = I$$

On obtient y_i à partir de Z_i , par un processus d'orthogonalisation.

Si les vecteurs de départ ne sont pas orthogonaux aux vecteurs propres cherchés la matrice des itérés y_i va converger vers la matrice des premiers modes propres, telle que:

$$K\varphi = M\varphi\Lambda \quad (5.4.2)$$

avec:

$$\varphi = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}]$$

Λ : matrice diagonale des valeurs propres.

Ainsi, au bout d'un nombre d'itérations suffisant, on aura:

$$y_i \rightarrow \varphi$$

$$S_i \rightarrow \Lambda$$

La méthode d'itération inverse simultanée est une variation de la méthode inverse et présente les mêmes propriétés de convergence pour chaque colonne de chaque matrice y_i . C'est pourquoi, afin de séparer les solutions propres définies par le sous espace des vecteurs itérés, on a recours à la méthode de Ritz.

III. 4. 2. Description de la méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi a été développée pour résoudre le problème standard:

$$K\phi = \lambda\phi \quad (M=I)$$

Néanmoins on peut l'appliquer au problème aux valeurs propres sous forme générale:

$$K\phi = \lambda M\phi$$

Le principe de la méthode de résolution est de diagonaliser les matrices K et M après une succession d'itérations.

A chaque itération, on procède à des pre- et post- multiplications par des matrices P_k^T et P_k (k : indice de l'itération):

$$K_{k+1} = P_k^T K_k P_k$$

$$M_{k+1} = P_k^T M_k P_k$$

Alors, quand k tend vers l'infini, on doit avoir:

$$K_{k+1} \rightarrow \Lambda$$

$$M_{k+1} \rightarrow I$$

Si L correspond à la dernière itération :

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{K_r^{(l+1)}}{M_r^{(l+1)}} \right)$$

$$\phi = P_1 P_2 \dots P_L \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_r}} \right)$$

Les matrices P_k sont choisies de façon à annuler un terme non diagonal et non nul des matrices K_k et M_k .

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \alpha & \\ & \gamma & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Pour le calcul de α et γ on procède de la manière suivante:

$$\bar{K}_{ii}^{(k)} = K_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} K_{ij}^{(k)}$$

$$\bar{K}_{jj}^{(k)} = K_{jj}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} K_{ij}^{(k)}$$

$$\bar{K}^{(k)} = K_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} K_{ij}^{(k)}$$

$$\alpha = \frac{\bar{K}_{jj}^{(k)}}{x}$$

$$\gamma = -\frac{\bar{K}_{ii}^{(k)}}{x}$$

$$x = \frac{\bar{K}^{(k)}}{2} + \text{sign}(\bar{K}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{K}^{(k)}}{2} \right)^2 + \bar{K}_{ii}^{(k)} \bar{K}_{jj}^{(k)}}$$

Si la matrice M est définie positive, alors:

$$\left(\frac{K^{(k)}}{2}\right)^2 + \overline{K_{ii}^{(k)}} \overline{K_{jj}^{(k)}} > 0$$

Cette transformation n'est appliquée si l'élément considéré est plus grand que la tolérance dynamique du cycle.

En pratique, on compare la tolérance les facteurs de couplage entre le $i^{\text{ème}}$ cycle et le $j^{\text{ème}}$ degré de liberté, définis par:

$$F_K = \left(\frac{K_{ij}}{K_{ii}K_{jj}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$F_M = \left(\frac{m_{ij}}{m_{ii}m_{jj}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus il est nécessaire de tester la convergence des valeurs propres. Si l est la dernière itération, la convergence est atteinte si:

$$\frac{|\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}|}{\lambda_i^{(l+1)}} \leq 10^{-s} \quad i=1, \dots, n$$

On doit aussi tester si les termes extra diagonaux sont assez petits, c'est à dire:

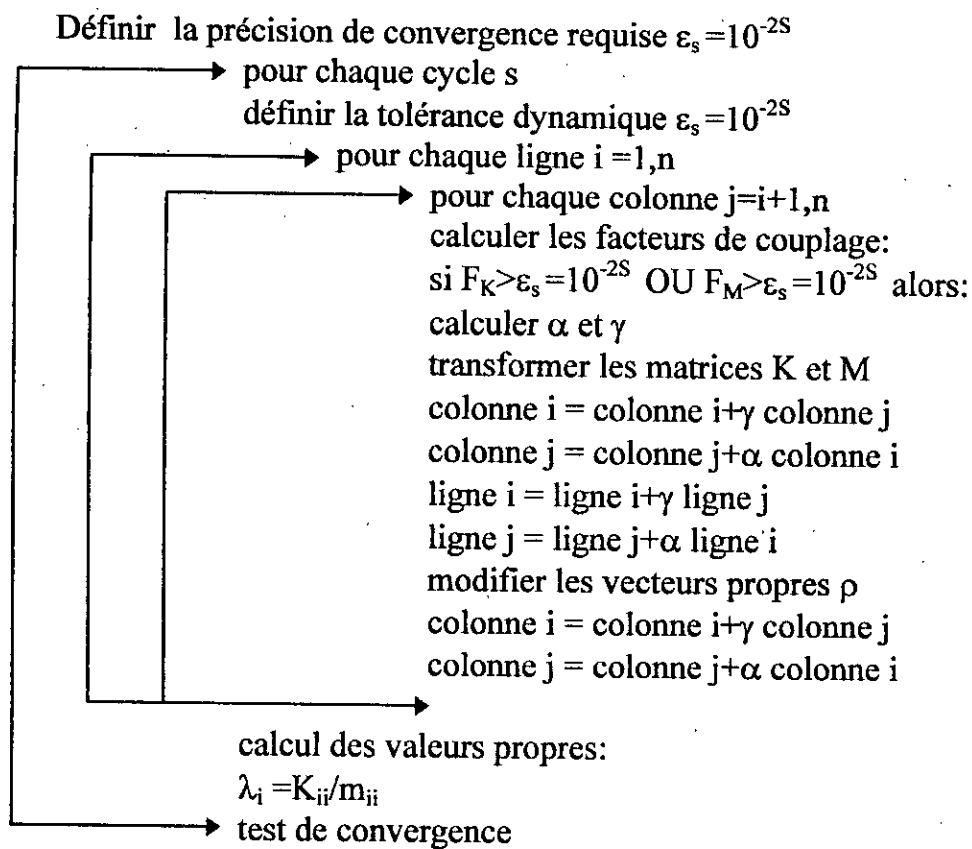
$$\left[\frac{K_{ij}^{(l+1)}}{K_{ii}^{(l+1)}K_{jj}^{(l+1)}}\right]^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-s}$$

$$\forall i, j \quad i < j$$

$$\left[\frac{m_{ij}^{(l+1)}}{m_{ii}^{(l+1)}m_{jj}^{(l+1)}}\right]^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-s}$$

Dans ce cas la tolérance requise est de 10^{-2s} .

L'algorithme de la méthode de Jacobi est le suivant:



CHAPITRE 6

APPLICATIONS

I. INTRODUCTION

Notre application consiste à tester la performance de la méthode SA pour l'étude des poutres en flexion avec ou sans prise en compte de l'effet de cisaillement transversal.

Aussi, nous introduisons d'autres méthodes approximatives, dont on compare les résultats avec ceux obtenus en utilisant la méthode SA.

II. RESUME

La performance de notre méthode va être testée sur des exemples de poutres à inerties variables, en analyse statique, et de stabilité de forme, sans tenir compte au premier lieu de l'effet du cisaillement transversal.

Par ailleurs, on considérera au second lieu l'effet du cisaillement, dont l'étude sera portée uniquement sur l'analyse statique.

Les comparaisons des résultats seront établis à partir de ceux de deux méthodes approximatives. la première méthode (I.C.T) discrétise la structure en une succession de tronçons à inerties et sections constantes évaluées au milieu de chaque élément, la seconde méthode[ANSYS.] est basée sur l'estimation des caractéristiques géométriques de manière équivalente, en introduisant les relations suivantes:

$$A_e = \frac{1}{3} \left[A_g + \sqrt{A_g A_d} + A_d \right]$$

$$I_e = \frac{1}{5} \left[I_g + \sqrt[4]{I_g^3 I_d} + \sqrt{I_g I_d} + \sqrt[4]{I_g I_d^3} + I_d \right]$$

Où les indices e,g,d signifient: équivalent, gauche et extrémité droite, respectivement.

La méthode SA calcul les matrices de manière analytique, donc de manière exacte. Sachant que les intégrales peuvent être calculées numériquement, on a alors adapté notre méthode aux techniques d'intégrations numériques, soit la technique d'intégration par les points de Gauss.

Les résultats obtenus par intégration numérique seront comparés aux autres.

III. COURBES COMPARATIVES

III. 1. Poutres en flexion sans cisaillement transversal

- Erreur relative du placement de l'extrémité libre.
- Erreur relative sur les trois premières fréquences de vibration.
- Erreur relative sur la charge critique au flambement.

III. 2. poutres en flexion avec cisaillement transversal

- Erreur relative du déplacement de l'extrémité libre.

IV. TABLEAUX COMPARATIFS

IV. 1. Poutres en flexion sans cisaillement transversal

- Déplacement de l'extrémité libre.
- Erreur relative du déplacement sur l'extrémité libre.
- Trois premières fréquences.
- Erreur relative des trois premières fréquences de vibration.
- Charge critique.
- Erreur relative sur la charge critique.

IV. 2. Poutres en flexion avec cisaillement transversal

- Déplacement de l'extrémité libre.
- Erreur relative du déplacement de l'extrémité libre.

V. EXEMPLES NUMERIQUES

V. 1. poutres en flexion sans cisaillement transversal

L'application est faite sur trois exemples, dans le premier exemple la hauteur et la longueur de la poutre représentent une variation linéaire, respectivement à l'axe longitudinal

Tel que: $b(x) = 12(0.1 + 0.03x)$

$$h(x) = (0.1 + 0.03x)$$

Dans le second exemple, la hauteur varie suivant la relation suivante:

$$h(x) = (0.1 + 0.03x + 0.02x^2)$$

Tandis que la longueur conserve la même variation que le premier exemple.

Le troisième exemple consiste à évaluer les fréquences propres d'une cheminée de hauteur $L = 210$ m

Dans les deux premiers exemples, on considérera des poutres cantilever de longueur unité.

Dans l'analyse statique, on étudiera l'effet d'une charge ponctuelle P unitaire appliquée à l'extrémité libre de la poutre.

Alors que pour l'étude de la stabilité de la poutre au flambement, une force de compression unitaire est prise en compte le long de l'élément.

V. 2. Poutres en flexion avec cisaillement transversal

Deux exemples ont été traités en analyse statique, celui des poutres minces et celui des poutres épaisses, pour une même variation.

- Poutre épaisse

$$b(x)=12 (1+0.3x)$$

$$h(x)=(1+0.3x)$$

- Poutre mince

$$b(x)=12(0.1+0.03x)$$

$$h(x)=(0.1+0.03x)$$

VI. EXPLOITATION DES RESULTATS

VI. 1. Poutres en flexion sans cisaillement transversal

a- exemple 1:

$$b(x) = 12 (0.1+0.03x)$$

$$h(x)=(0.1+0.03x)$$

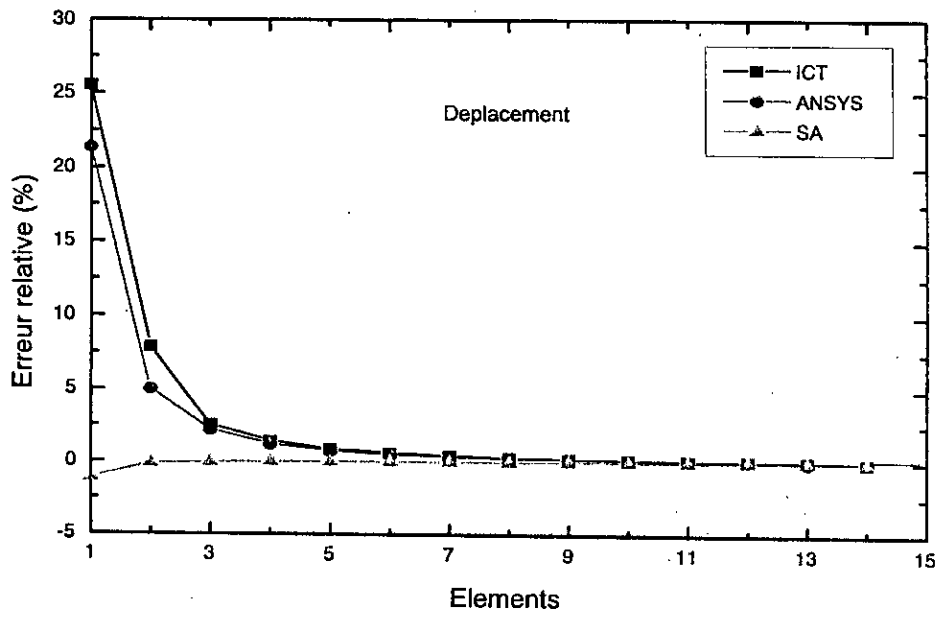


fig.1.a: Erreur relative du déplacement .Exemple(1)

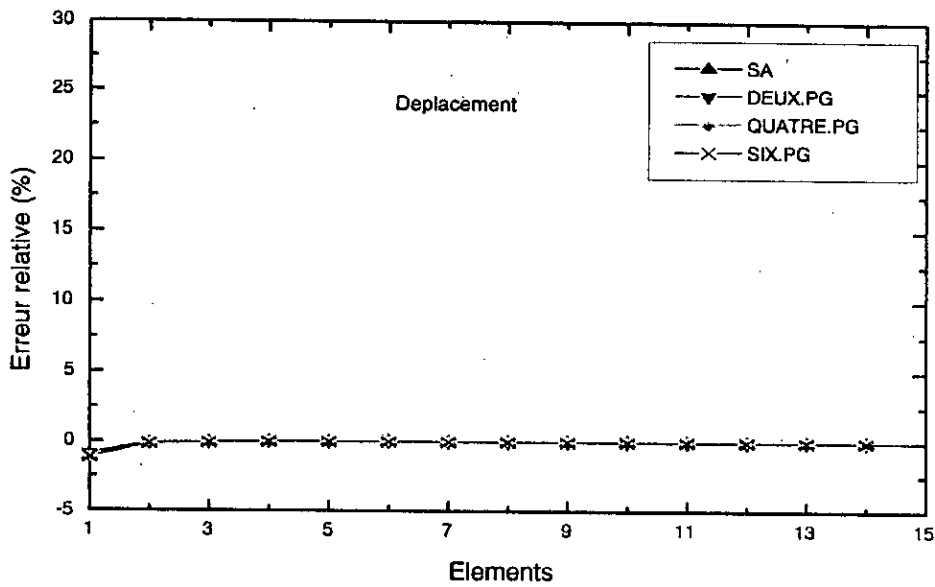


fig.1.b: Erreur relative du déplacement. Exemple(1)

Déplacement exacte: 7.5904×10^{-5} m

Nbre d'éléments	ICT $\times 10^5$	ANSYS $\times 10^5$	SA $\times 10^5$	DEUX.PG $\times 10^5$	QUATRE.P G $\times 10^5$	SEPT.P G $\times 10^5$
1	9.5292	9.2151	7.5006	7.5230	7.5006	7.5006
2	8.0360	7.9728	7.5793	7.5814	7.5793	7.5793
3	7.7823	7.7554	7.5847	7.5851	7.5847	7.5847
4	7.6956	7.6807	7.5856	7.5858	7.5856	7.5856
5	7.6560	7.6465	7.5859	7.5859	7.5859	7.5859
6	7.6345	7.6279	7.5860	7.5860	7.5860	7.5860
7	7.6216	7.6168				
8	7.6133	7.6096				
9	7.6075	7.6046				
10	7.6035	7.6011				
11	7.6005	7.5985				
12	7.5982	7.5965				
13	7.5964	7.5950				
14	7.5949	7.5937				
15	7.5938					

Erreur relative du déplacement (%)

Tolérance = 0.1 %

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	DEUX.PG	QUATRE.P G	SIX.PG
1	25.542	21.404	-1.183	-0.88	-1.183	-1.183
2	7.871	5.037	-0.146	-0.119	-0.146	-0.146
3	2.528	2.173	-0.075	-0.070	-0.075	-0.075
4	1.386	1.190				
5	0.863	0.738				
6	0.581	0.494				
7	0.411	0.347				
8	0.301	0.253				
9	0.226	0.187				
10	0.170	0.141				
11	0.132	0.106				
12	0.108	0.080				
13	0.078					
14						

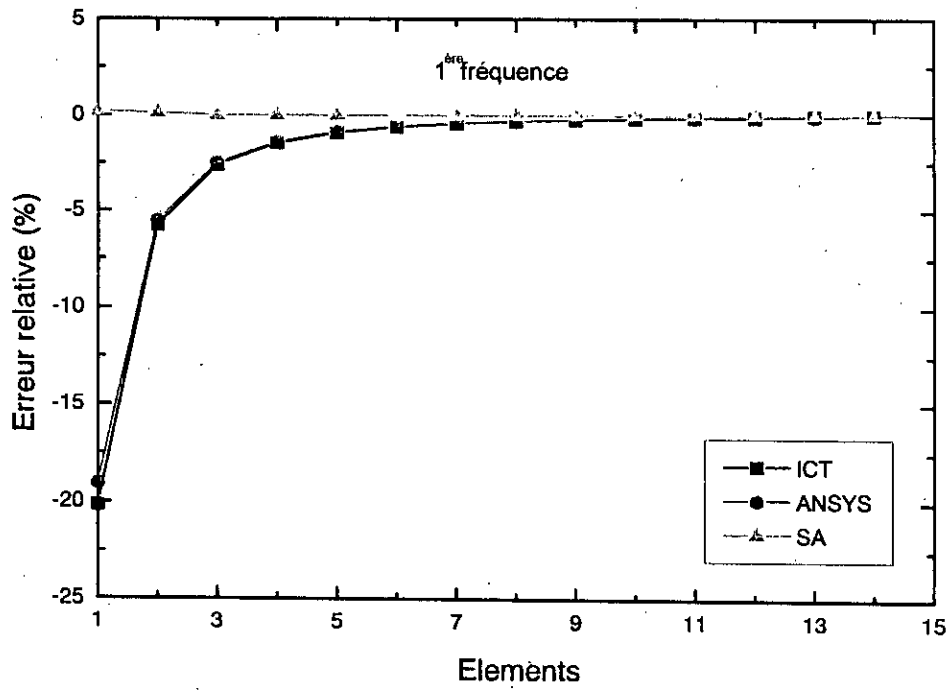


fig2.a: Erreur relative de la 1^{ère} fréquence

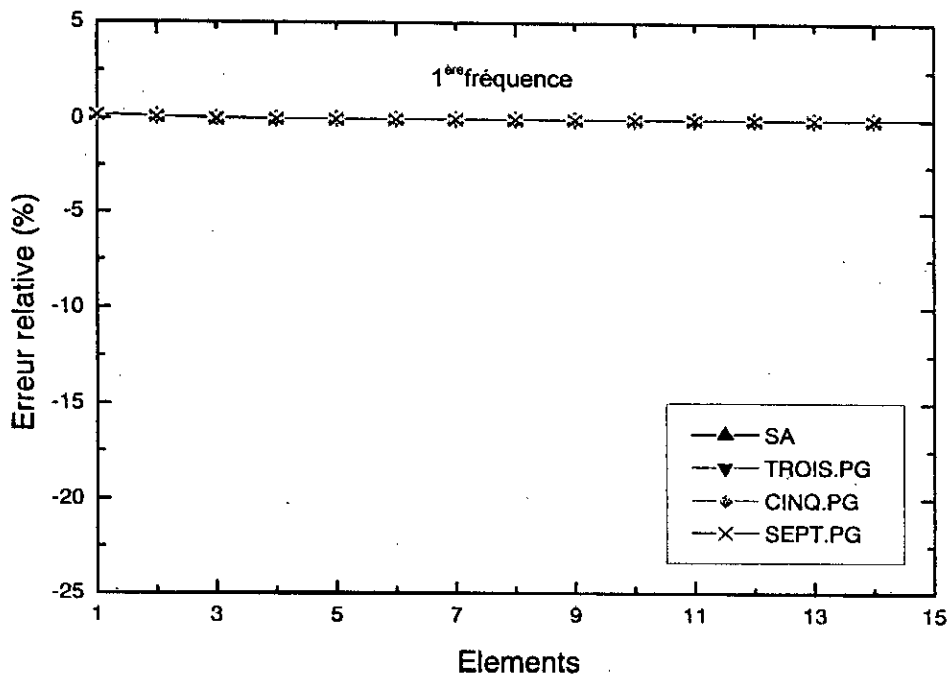


fig2.b: Erreur relative de la 1^{ère} fréquence

Valeur exacte de la 1^{ère} fréquence: 415.4732rd/s

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
1	331.7132	336.3666	416.1924	416.4340	416.1924	416.1924
2	391.4276	392.6137	415.8878	415.8912	415.8878	415.8878
3	404.5141	405.0427	415.7743	415.7746	415.7743	415.7743
4	409.3333	409.6309				
5	411.6102	411.8007				
6	412.8598	412.9921				
7	413.6176	413.7149				
8	414.1113	414.1858				
9	414.4506	414.5094				
10	414.6937	414.7414				
11	414.8738	414.9132				
12	415.0108	415.0439				
13	415.1176	415.1460				
14	415.2024					

Erreur relative sur la 1^{ère} fréquence

Tolérance 0.1%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
1	-20.160	-19.04	0.1731	0.231	0.1731	0.1731
2	-5.787	-5.502	0.099	0.100	0.099	0.099
3	-2.637	-2.510		0.073		
4	-1.478	-1.406				
5	-0.929	-0.884				
6	-0.629	-0.597				
7	-0.446	-0.423				
8	-0.327	-0.310				
9	-0.246	-0.231				
10	-0.187	-0.176				
11	-0.144	-0.135				
12	-0.112	-0.103				
13	-0.085	-0.0788				
14						

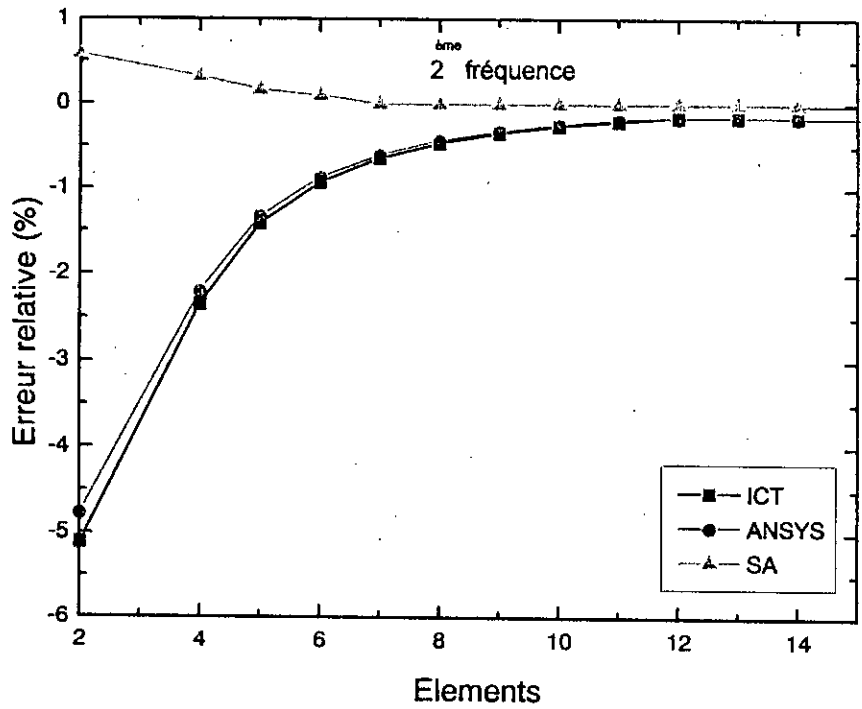


fig.3.a : Erreur relative de 2^{ème} fréquence.

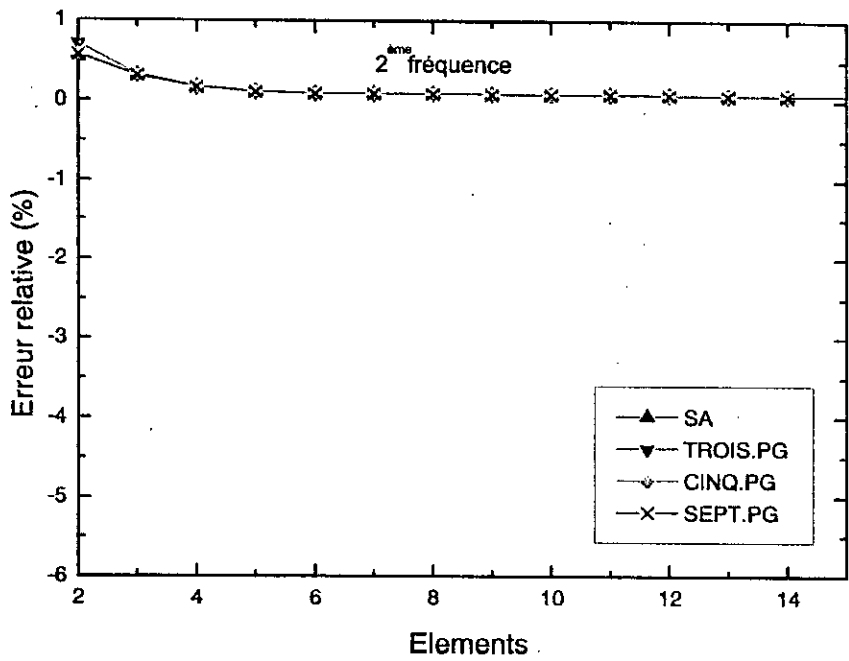


fig.3.b: Erreur relative de la 2^{ème} fréquence.

Valeur exacte de la 2^{ème} fréquence:2217.26rd/s

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
2	2103.95	2111.54	2229.98	2233.01	2229.98	2229.98
3	2165.08	2168.41	2224.29	2224.52	2224.29	2224.29
4	2185.79	2187.66	2220.96	2221.00	2220.96	2220.96
5	2196.64	2197.84	2219.75	2219.76	2219.75	2219.75
6	2202.98	2203.81	2219.26	2219.27	2219.26	2219.26
7	2206.98	2207.59		2219.04		
8	2209.64	2210.11				
9	2211.56	2211.87				
10	2212.85	2213.15				
11	2213.85	2214.10				
12	2214.62	2214.83				
13	2215.23	2215.48				
14	2215.71					

Erreur relative sur la 2^{ème} fréquence:

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT .PG
2	-5.110	-4.768	0.574	0.710	0.574	0.574
3	-2.353	-2.203	0.317	0.327	0.317	0.317
4	-1.419	-1.335	0.167	0.1690	0.167	0.167
5	-0.929	-0.876	0.112	0.113	0.112	0.112
6	-0.644	-0.606	0.091	0.091	0.091	0.091
7	-0.464	-0.436				
8	-0.343	-0.322				
9	-0.259	-0.243				
10	-0.198	-0.185				
11	-0.153	-0.142				
12	-0.118	-0.109				
13	-0.091	-0.083				
14						

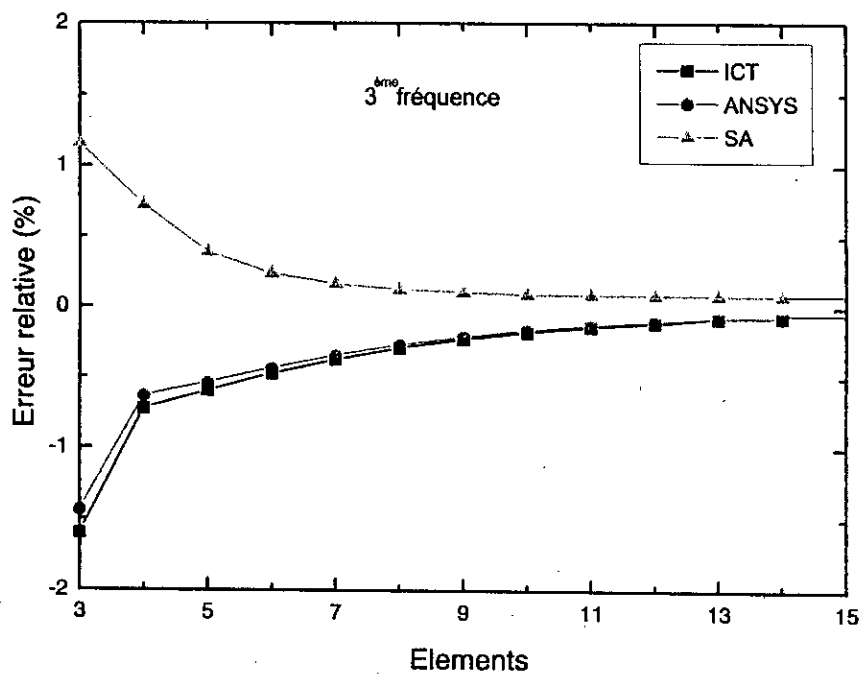


fig.4.a : Erreur relative de la 3^{ème} fréquence

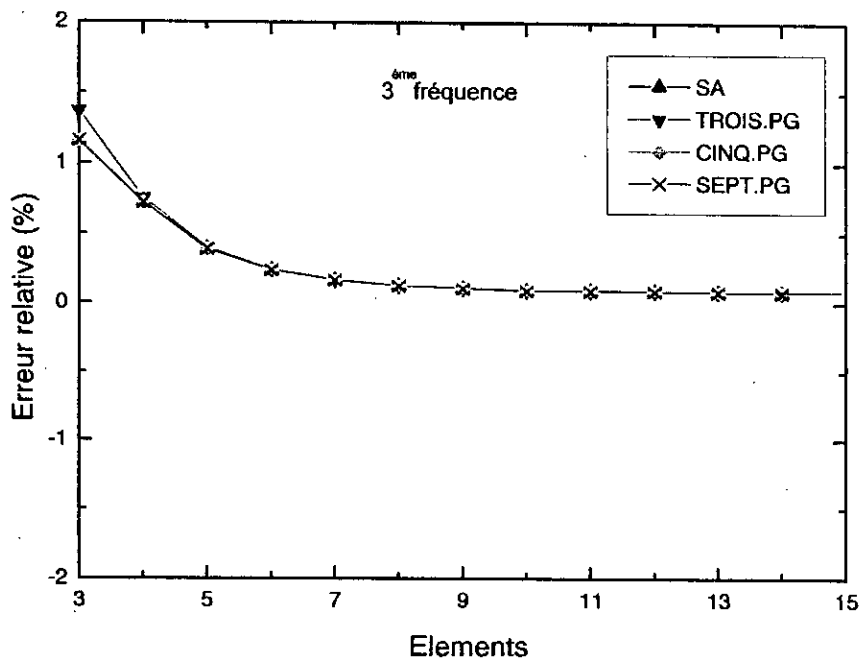


fig.4.b : Erreur relative de la 3^{ème} fréquence.

Valeur exacte de la 3^{ème} fréquence: 5922.2625 rd/s

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
3	5827.73	5837.21	5990.93	6003.51	5990.93	5990.93
4	5879.32	5884.58	5964.97	5966.90	5964.97	5964.97
5	5886.95	5890.30	5936.33	5945.89	5936.33	5936.33
6	5894.12	5896.45	5931.97	5936.49	5931.97	5931.97
7	5900.23	5901.93	5929.71	5932.04	5929.71	5929.71
8	5905.04	5906.35	5928.46	5929.74	5928.46	5928.46
9	5908.77	5909.80	5927.73	5928.48	5927.73	5927.73
10	5911.67	5912.50		5927.74		
11	5913.93	5914.62		5927.28		
12	5915.73	5916.31				
13	5917.17	5917.67				
14	5918.34					

Erreur relative de la 3^{ème} fréquence:

Tolérance 0.1%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
3	-1.596	-1.436	1.159	1.372	1.159	1.159
4	-0.725	-0.636	0.721	0.754	0.721	0.721
5	-0.596	-0.539	0.390	0.399	0.390	0.390
6	-0.475	-0.436	0.237	0.240	0.237	0.237
7	-0.372	-0.343	0.164	0.165	0.164	0.164
8	-0.290	-0.268	0.126	0.126	0.126	0.126
9	-0.227	-0.210	0.105	0.105	0.105	0.105
10	-0.178	-0.165	0.092	0.092	0.092	0.092
11	-0.140	-0.129				
12	-0.110	-0.100				
13	-0.086	-0.077				
14						

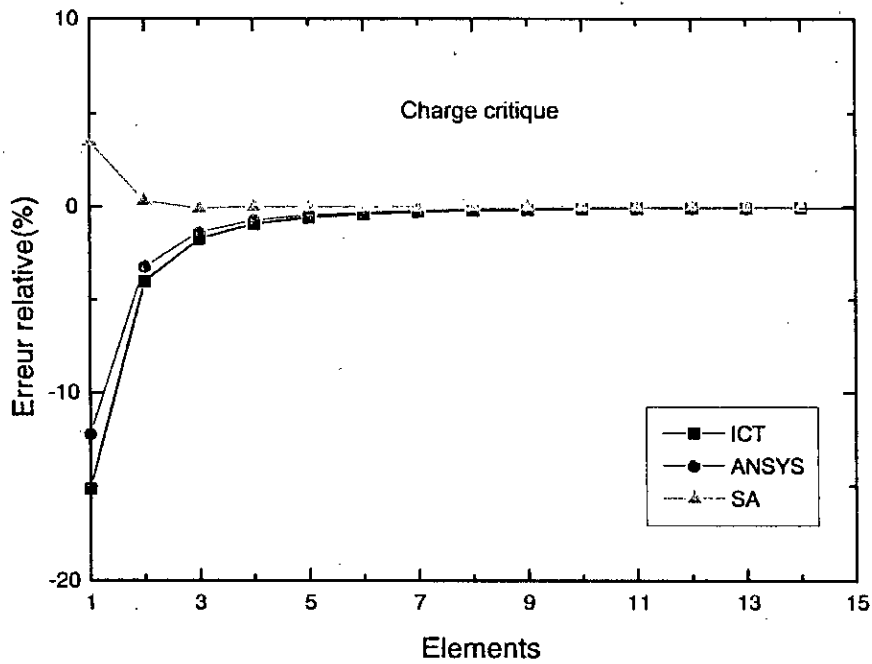


fig.5.a : Erreur relative de la charge critique

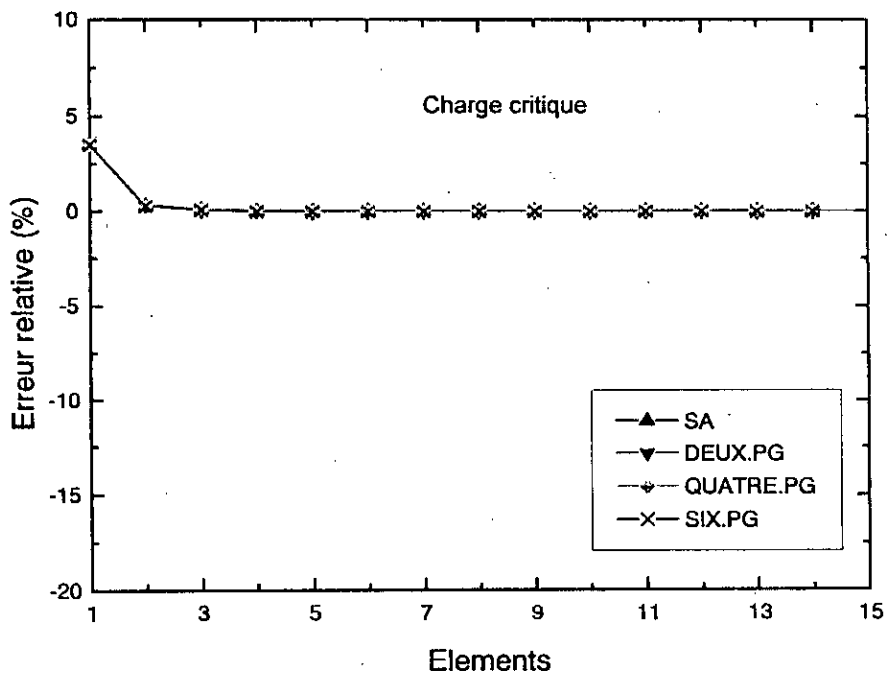


fig.5.b: Erreur relative de la charge critique

Valeur exacte de la charge critique:10245.240

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	DEUX.PG	QUATRE.PG	SEPT.PG
1	8695.925	8992.320	10605.708	10607.541	10605.708	10605.708
2	9835.386	9915.633	10276.629	10279.439	10276.629	10276.629
3	10067.467	10103.515	10255.150	10255.886	10255.150	10255.150
4	10147.730	10168.081	10251.455	10251.710	10251.455	10251.455
5	10184.617	10197.664	10250.438	10250.547	10250.438	10250.438
6	10204.578	10213.646	10250.072	10250.125	10250.072	10250.072
7	10216.586	10223.252	10249.914	10249.943	10249.914	10249.914
8	10224.369	10229.474		10249.905		
9	10229.699	10233.734				
10	10233.509	10236.778				
11	10236.327	10240.740				
12	10240.137					

Erreur relative de la charge critique (%)

Tolérance =0.1%

Nbre d'éléments	AICT	ANSYS	ASA	DEUX.PG	QUATRE.PG	SIX.PG
1	-15.1222	-12.2292	3.5184	3.5362	3.5184	3.5184
2	-4.0000	-3.2171	0.3064	0.3338	0.3064	0.3064
3	-1.7352	-1.3833	0.0967	0.1039	0.0967	0.0967
4	-0.9515	-0.7531		0.0631		
5	-0.5917	-0.4644				
6	-0.3968	-0.3084				
7	-0.2796	-0.2146				
8	-0.2037	-0.1538				
9	-0.157	-0.1230				
10	-0.1145	-0.8259				
11	-0.0869					
12						
13						
14						

b-Exemple(2)

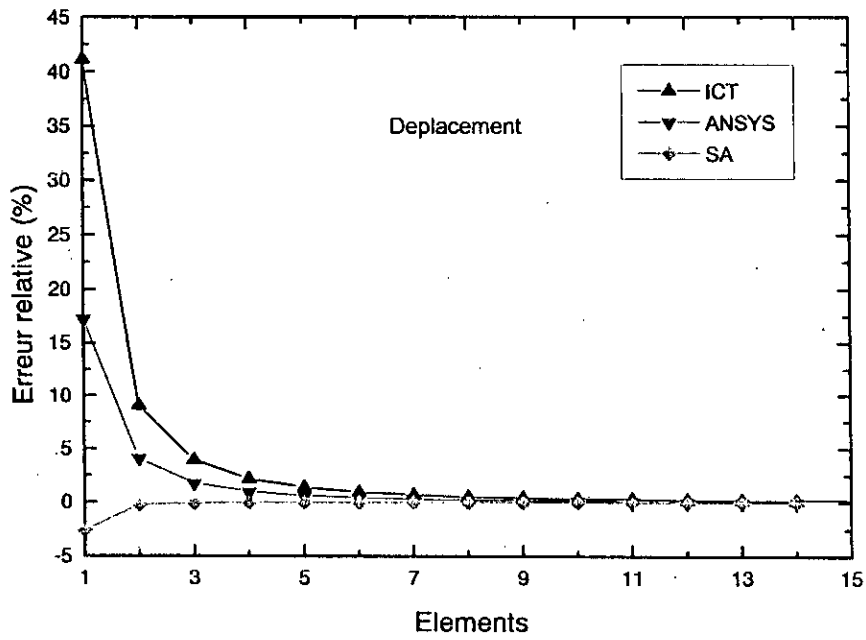


fig.6.a : Erreur relative du déplacement.

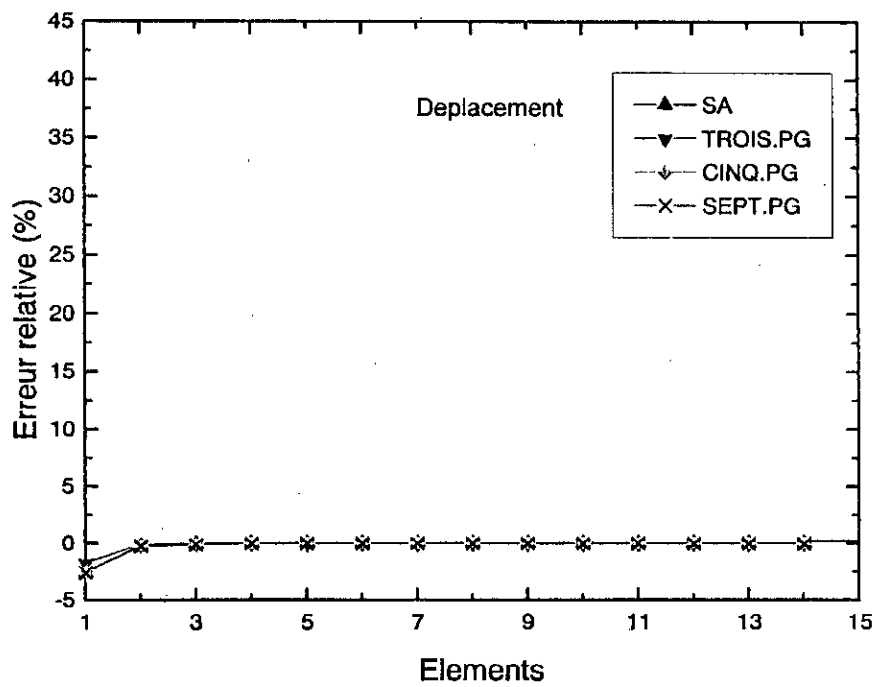


fig6.b : Erreur relative du déplacement.

Valeur exacte du déplacement: 5.9436×10^{-5} m

Nbre d'elements	ICT $\times 10^5$	ANSYS $\times 10^5$	SA $\times 10^5$	TROIS.PG $\times 10^5$	CINQ.PG $\times 10^5$	SEPT.PG $\times 10^5$
1	8.3870	6.9671	5.7889	5.8394	5.7889	5.7889
2	6.4823	6.1857	5.9304	5.9353	5.9304	5.9304
3	6.1763	6.0488	5.9390	5.9401	5.9390	5.9390
4	6.0724	6.0015	5.9405	5.9409	5.9405	5.9405
5	6.0250	5.9797	5.9409		5.9409	5.9409
6	6.0000	5.9679				
7	5.9838	5.9608				
8	5.9738	5.9562				
9	5.9670	5.9531				
10	5.9620	5.9508				
11	5.9584	5.9491				
12	5.9557	5.9480				
13	5.9535					
14	5.9518					
15	5.9504					

Erreur relative (%)

Tolérance = 0.2%

nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
1	41.109	17.219	-2.600	-1.740	-2.600	-2.600
2	9.064	4.073	-0.223	-0.126	-0.223	-0.223
3	3.915	1.769	-0.077		-0.077	-0.077
4	2.167	0.974				
5	1.368	0.608				
6	0.935	0.409				
7	0.676	0.290				
8	0.507	0.212				
9	0.392	0.159				
10	0.310	0.121				
11	0.249					
12	0.203					
13	0.167					
14	0.138					

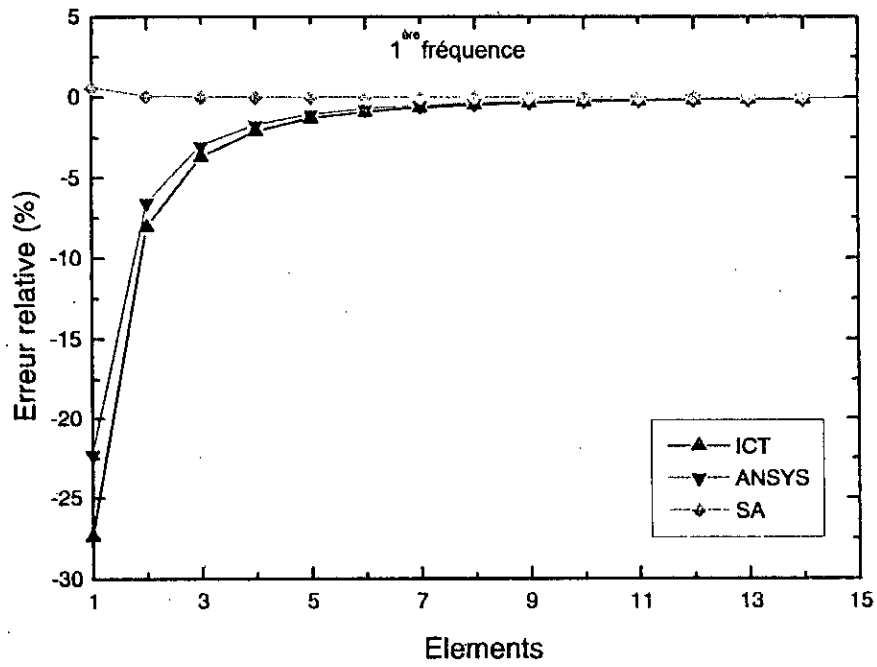


fig.7.a : Erreur relative de la 1^{ère} fréquence.

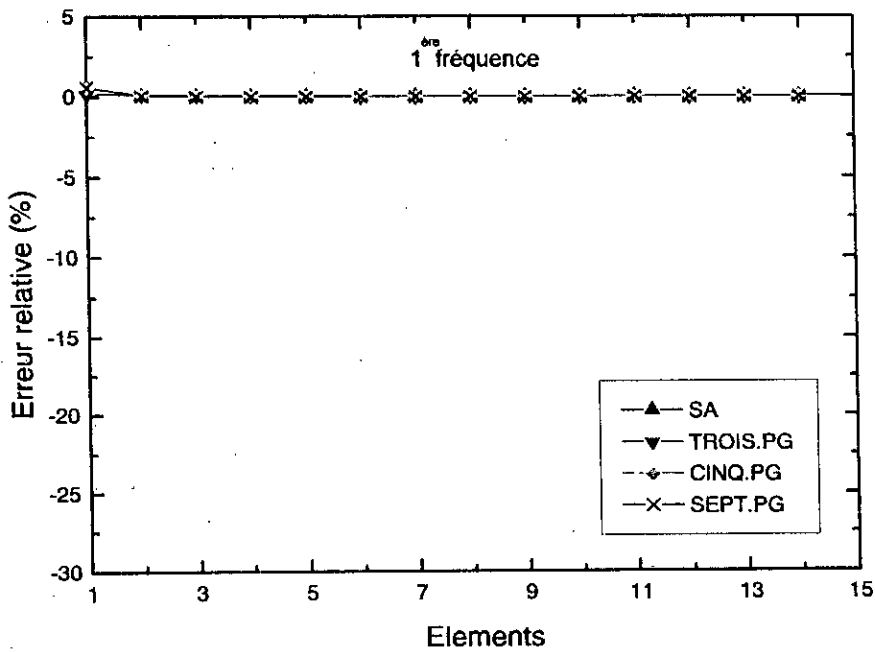


fig.7.b : Erreur relative de la 1^{ère} fréquence.

valeur exacte de la 1^{ère} fréquence: 476.8132 rd/s

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
1	346.1355	370.6445	480.0544	482.5703	480.0544	480.0544
2	438.4428	445.7802	477.4626	477.4837	477.4626	477.4626
3	459.1505	462.5290	477.2369	477.2461	477.2369	477.2369
4	466.8567	468.7814	477.1837	477.1840	477.1837	477.1837
5	470.5120	471.7512	477.1676	477.1687	477.1676	477.1676
6	472.5219	473.3853	477.1668	477.1669	477.1668	477.1668
7	473.7423	474.3779				
8	474.5378	475.0251				
9	475.0848	475.4701				
10	475.4709	475.7892				
11	475.7674	476.0250				
12	475.9886	476.2056				
13	476.1608	476.3458				
14	476.2976	476.4572				
15	476.4080					

Erreur relative de la 1^{ère} fréquence (%)

Tolérance= 0.1%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
1	-27.406	-22.262	0.679	1.135	0.679	0.679
2	-8.047	-6.510	0.136	0.140	0.136	0.136
3	-3.704	-2.995	0.089	0.091	0.089	0.089
4	-2.088	-1.684				
5	-1.321	-1.061				
6	-0.899	-0.718				
7	-0.644	-0.510				
8	-0.477	-0.375				
9	-0.362	-0.281				
10	-0.280	-0.215				
11	-0.219	-0.165				
12	-0.173	-0.127				
13	-0.136	-0.979				
14	-0.108					
15	-0.085					

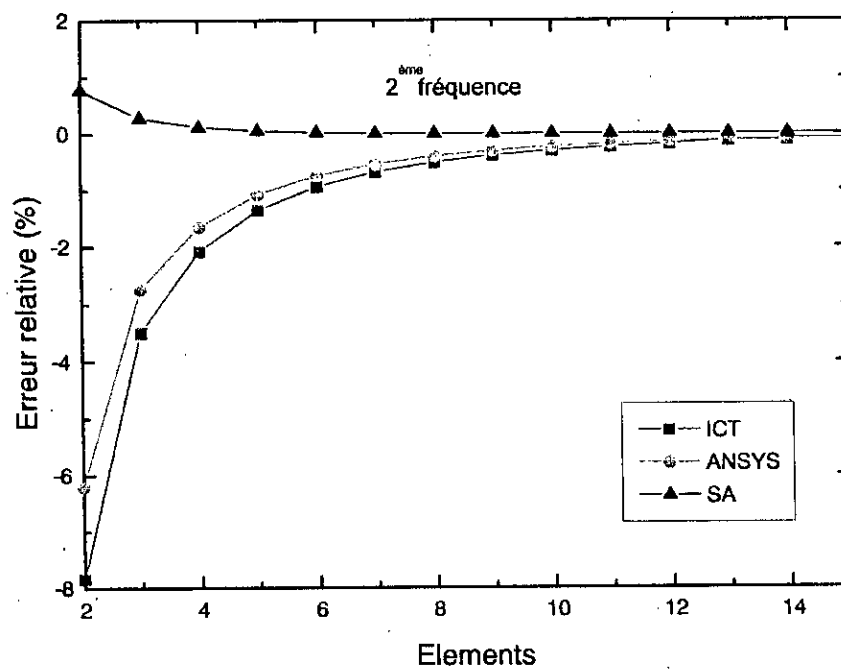


fig.8.a : Erreur relative de la 2^{ème} fréquence.

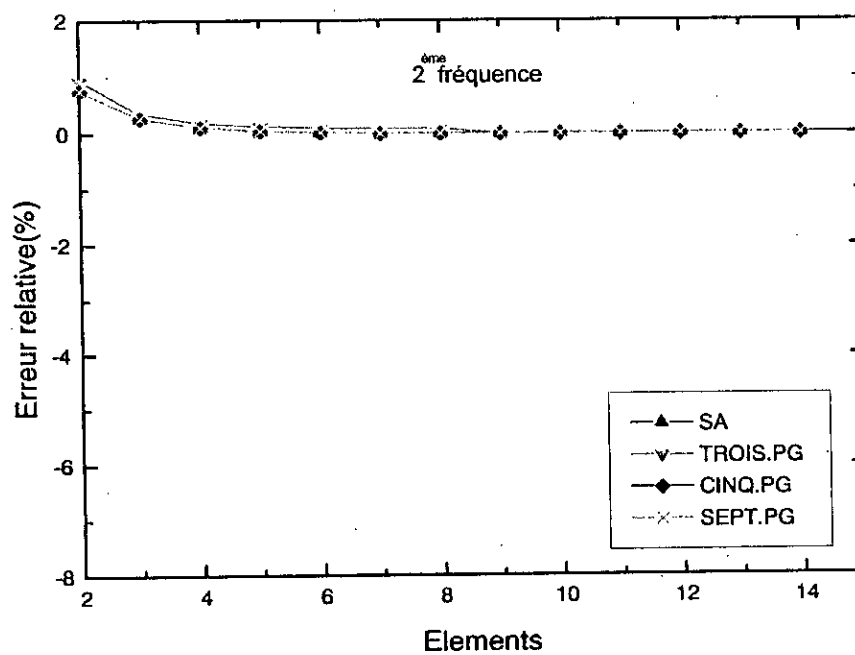


fig.8.b : Erreur relative de la 1^{ère} fréquence.

Valeur exacte de la fréquence au 2^{ème} mode: 2390.916 rd/s

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
2	2203.507	2242.596	2411.624	2413.990	2411.624	2411.624
3	2307.327	2325.327	2399.529	2399.689	2399.529	2399.529
4	2341.194	2351.429	2395.529	2395.604	2395.529	2395.529
5	2358.483	2365.069	2394.066	2394.072	2394.066	2394.066
6	2368.439	2373.027	2393.444	2393.446	2393.444	2393.444
7	2374.657	2378.034	2393.159	2393.159	2393.159	2393.159
8	2378.784	2381.373	2393.015	2393.015	2393.015	2393.015
9	2381.656	2383.704	2392.936	2392.936	2392.936	2392.936
10	2383.733	2385.393	2392.890	2392.890	2392.890	2392.890
11	2385.282	2386.654	2392.862	2392.862	2392.862	2392.862
12	2386.467	2387.620	2392.844	2392.844	2392.844	2392.844
13	2387.393	2388.760				
14	2388.130	2388.978				
15	2388.727	2389.466				
16	2389.216					

Erreur relative de la 2^{ème} fréquence (%)

Tolérance=0.1%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
2	-7.838	-6.203	0.866	0.965	0.866	0.866
3	-3.496	-2.743	0.360	0.367	0.360	0.360
4	-2.079	-1.651	0.195	0.196	0.195	0.195
5	-1.356	-1.081	0.132	0.139	0.132	0.132
6	-0.940	-0.748	0.106	0.106	0.106	0.106
7	-0.680	-0.538	0.094	0.094	0.094	0.094
8	-0.507	-0.399				
9	-0.387	-0.302				
10	-0.300	-0.231				
11	-0.235	-0.178				
12	-0.186	-0.138				
13	-0.147	-0.106				
14	-0.116	-0.810				
15	-0.091					

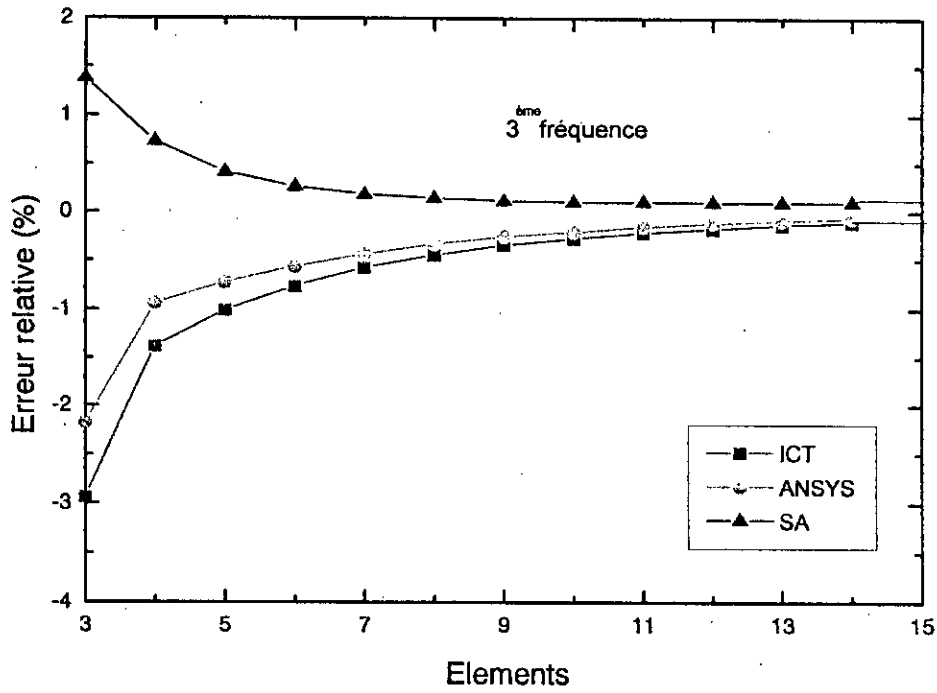


fig.9.a: Erreur relative de la 3^{ème} fréquence.

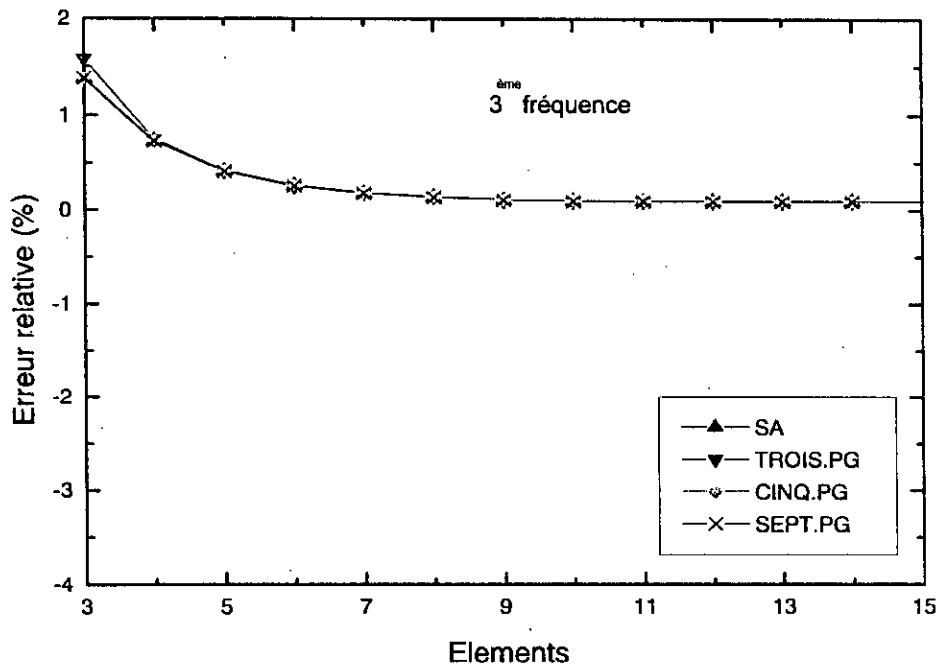


fig.9.b: Erreur relative de la 3^{ème} fréquence.

Valeur exacte de la fréquence du 3^{ème} mode: 6285.516 rd/s

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
3	6100.492	6148.643	6372.411	6384.906	6372.411	6372.411
4	6198.841	6226.282	6331.260	6333.188	6331.260	6331.260
5	6221.630	6239.232	6311.421	6311.910	6311.421	6311.421
6	6237.225	6249.467	6301.648	6301.812	6301.648	6301.648
7	6248.606	6257.611	6296.853	6296.920	6296.853	6296.853
8	6256.855	6263.856	6294.347	6294.376	6294.347	6294.347
9	6263.163	6268.619	6292.950	6292.965	6292.950	6292.950
10	6267.858	6272.280	6292.127	6292.134	6292.127	6292.127
11	6271.476	6275.132	6291.617	6291.622	6291.617	6291.617
12	6274.311	6277.384	6291.290	6291.293	6291.290	6291.290
13	6276.568	6279.187				
14	6278.392	6280.651				
15	6279.884	6281.852				
16	6281.119					

Erreur relative de la 3^{ème} fréquence (%)

Tolérance=0.1%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
3	-2.943	-2.177	1.382	1.581	1.382	1.382
4	-1.378	-0.942	0.727	0.758	0.727	0.727
5	-1.016	-0.736	0.412	0.420	0.412	0.412
6	-0.768	-0.573	0.256	0.260	0.256	0.256
7	-0.587	-0.444	0.180	0.181	0.180	0.180
8	-0.454	-0.344	0.141	0.141	0.141	0.141
9	-0.355	-0.268	0.118	0.119	0.118	0.118
10	-0.281	-0.165	0.105	0.105	0.105	0.105
11	0-0.223	-0.129	0.097	0.097	0.097	0.097
12	-0.178	-0.100				
13	-0.142	-0.077				
14	-0.113					
15	-0.088					

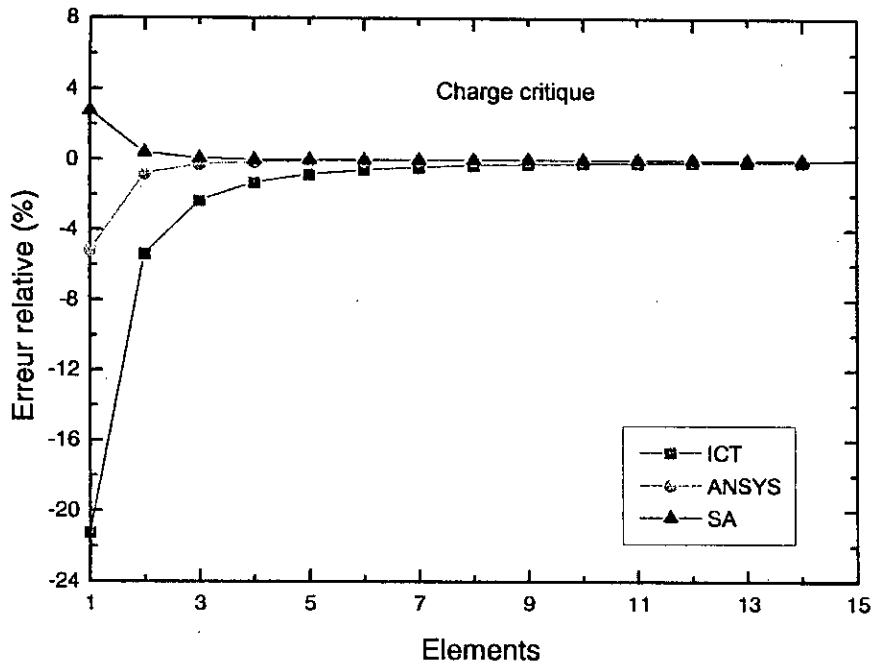


fig.10.a : Erreur relative de charge critique.

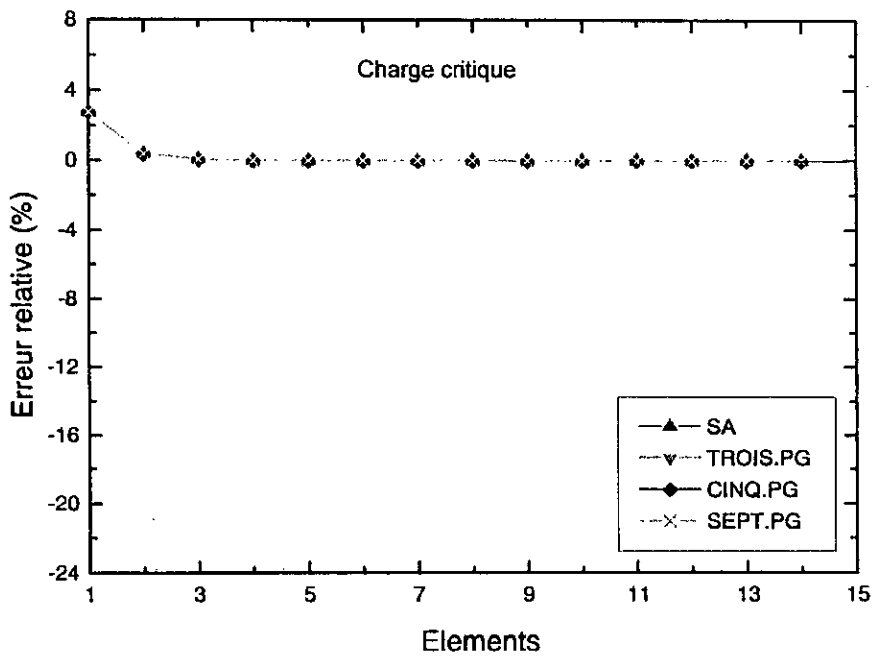


fig.10.b: Erreur relative de la charge critique.

valeur exacte de la charge critique: 9954

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
1	7838.485	9435.970	10230.186	10230.179	10230.186	10230.186
2	9416.744	9871.131	9991.726	9991.691	9991.726	9991.726
3	9719.400	9926.074	9961.621	9961.617	9961.621	9961.621
4	9822.590	9939.740	9956.281	9956.280	9956.281	9956.281
5	9870.041	9945.280	9954.866	9954.866	9954.866	9954.866
6	9895.761	9948.107				
7	9911.255	9949.756				
8	9921.306					
9	9928.195					
10	9933.122					
11	9936.767					
12	9939.540					
13	9941.696					
14	9943.408					
15	9944.790					

Erreur relative de la charge critique (%)

Tolérance = 0.1%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	TROIS.PG	CINQ.PG	SEPT.PG
1	-21.245	-5.200	2.778	2.778	2.778	2.778
2	-5.393	-0.828	0.383	0.383	0.383	0.383
3	-2.353	-0.276	0.081	0.081	0.081	0.081
4	-1.316	-0.139				
5	-0.839	-0.084				
6	-0.581					
7	-0.425					
8	-0.324					
9	-0.255					
10	-0.205					
11	-0.169					
12	-0.141					
13	-0.119					
14	-0.102					
15	-0.088					

Exemple de la cheminée

Les méthodes de calcul des cheminées ont évoluées rapidement sous l'impulsion croissante des exigences des maîtres d'ouvrages.

Du point de vue des calculs, les tours les plus complexes sont les cheminées dont le fût en béton armé est soumis pratiquement à toutes les sollicitations qui peuvent agir ce genre d'ouvrages y compris le gradient thermique.

L'étude que nous proposons, consiste à calculer les 3 premières fréquences propres de la cheminée considérée à section annulaire ayant pour caractéristiques les cotes imposées suivantes:

hauteur totale: $H = 210$ m

diamètre de base : $Db = 16$ m

diamètre au sommet : $Ds = 6$ m

épaisseur de la paroi à la base: $eb = 30$ cm

épaisseur de la paroi au sommet : $es = 11.2$ cm

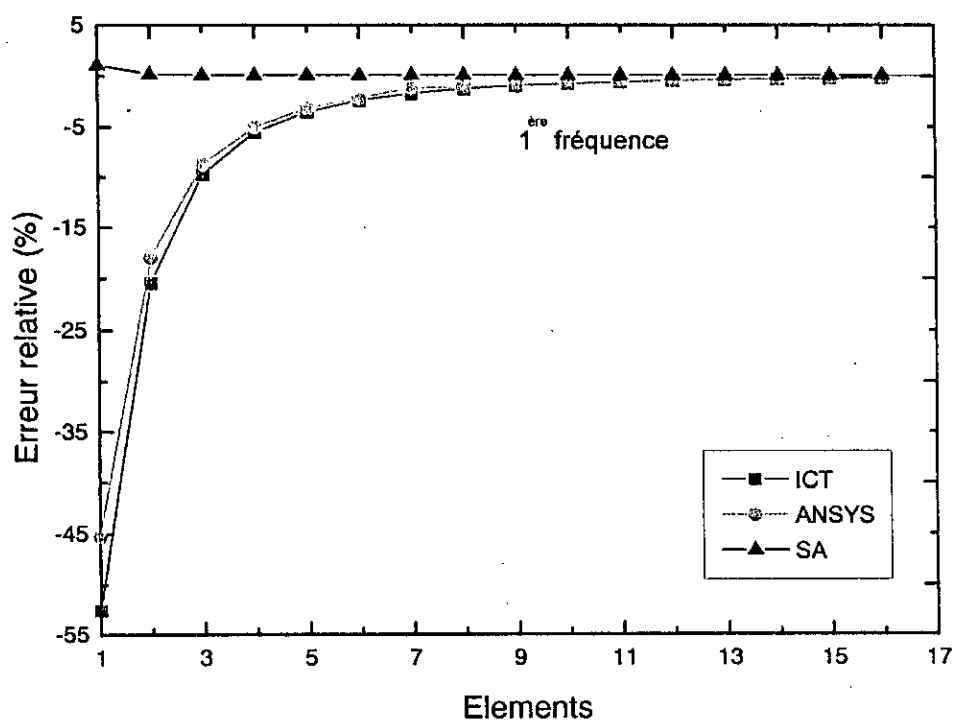


fig.11: Erreur relative de la première fréquence.

Valeur exacte de la 1^{ère} fréquence = 1.8226 rd/s

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA
1	0.8663	0.9974	1.8422
2	1.449	1.4954	1.825
3	1.645	1.6635	1.824
4	1.721	1.7310	1.824
5	1.757	1.7641	1.824
6	1.778	1.7826	
7	1.790	1.7939	
8	1.799	1.8801	
9	1.804	1.8065	
10	1.808	1.810	
11	1.817	1.8130	
12	1.814	1.8151	
13	1.816	1.8167	
14	1.817	1.818	
15	1.818	1.819	
16	1.819	1.820	

Erreur de la 1^{ère} fréquence. Tolérance = 0.2%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA
1	-52.56	45.27	1.07
2	-20.44	-17.95	0.14
3	-9.75	-8.72	
4	-5.57	5.02	
5	-3.55	-3.21	
6	-2.43	-2.19	
7	-1.74	-1.56	
8	-1.29	-1.16	
9	-0.98	-0.87	
10	-0.76	-0.67	
11	-0.59	-0.52	
12	-0.46	-0.41	
13	-0.37	-0.32	
14	-0.29	-0.25	
15	-0.23	-0.19	
16	-0.02		

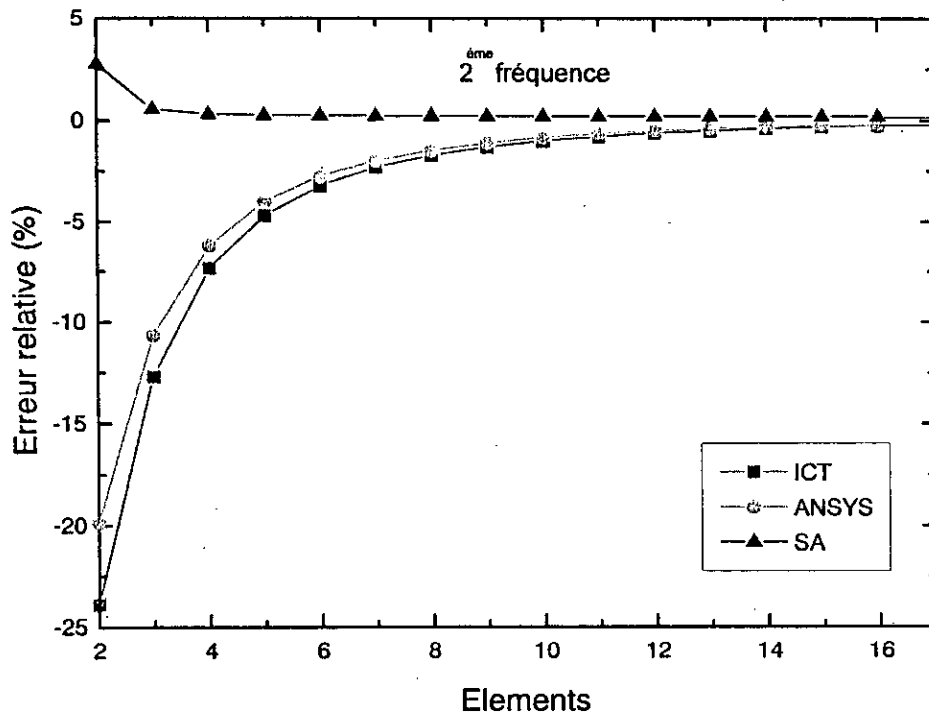


fig.12. Erreur relative de la 2^{ème} fréquence.

Valeur exacte de la 2^{ème} fréquence = 6.7329 rd/s.

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA
2	5.1243	5.3954	6.9199
3	5.8779	6.015	6.7696
4	6.24091	6.3153	6.7536
5	6.4166	6.4631	6.7478
6	6.5149	6.5468	6.7470
7	6.5755	6.5988	6.7465
8	6.61156	6.633	6.7462
9	6.6434	6.6574	6.7461
10	6.6636	6.6748	6.7459
11	6.6786	6.6879	6.7458
12	6.6900	6.6978	
13	6.699	6.7051	
14	6.7061	6.712	
15	6.7119	6.716	
16	6.7166	6.7210	

Erreur relative de la 2^{ème} fréquence.

Tolérance = 0.3%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA
2	-23.89	-19.86	2.77
3	-12.69	10.66	0.54
4	-7.30	-6.20	0.30
5	-4.69	4	0.24
6	-3.23	-2.76	
7	-2.33	1.99	
8	-1.74	-1.48	
9	-1.32	-1.12	
10	1.02	-0.86	
11	-0.81	-0.67	
12	-0.63	-0.52	
13	-0.54	-0.40	
14	-0.39	-0.31	
15	-0.31	-0.24	
16	-0.24		

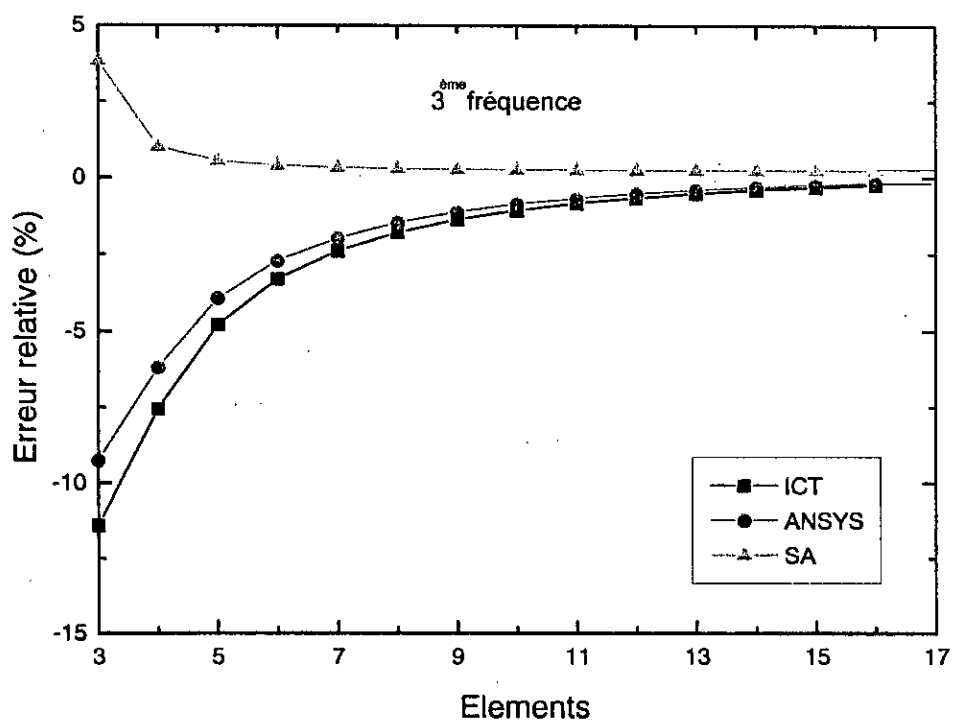


fig13. Erreur relative de la 3^{ème} fréquence

Valeur exacte de la 3^{ème} fréquence = 15.983 rd/s

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA
3	14.159	14.502	16.5941
4	14.776	14.993	16.143
5	15.218	15.354	16.062
6	15.456	15.5468	16.041
7	15.593	15.664	16.031
8	15.693	15.744	16.025
9	15.759	15.821	
10	15.808	15.841	
11	15.846	15.872	
12	15.874	15.896	
13	15.896	15.915	
14	15.914	15.931	
15	15.929	15.943	
16	15.941	15.953	

Erreur relative de la 3^{ème} fréquence

Tolérance = 0.25%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA
3	-11.41	-9.26	3.82
4	-7.54	-6.19	0.99
5	-4.78	-3.93	0.54
6	-3.31	-2.73	0.39
7	-2.41	-1.99	0.32
8	-1.81	-1.49	0.28
9	-1.39	-1.14	0.26
10	-1.09	-0.88	0.25
11	-0.86	-0.69	0.24
12	-0.68	-0.54	
13	-0.54	-0.42	
14	-0.43	-0.32	
15	-0.34	-0.24	
16	-0.26		

Exploitation des résultats

Les résultats obtenus sont:

$$T_1 = 3.5 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.9 \text{ s} \sim 0.25 T_1$$

$$T_3 = 0.4 \text{ s} \sim 0.15 T_1$$

$$Y_{cr} = 112607.7$$

D'après les règles parasismiques Françaises (p.s.69) on a la relation théorique de la période du mode fondamental de vibration adaptée au type d'ouvrage considéré:

tel que :

$$T = K l^2 / (p/gEI)^{1/2}$$

P: poids par unité de longueur au niveau de la section de base

I: moment d'inertie de la section de base

$$T = 4.2 \text{ s}$$

Interprétation des résultats

D'après les résultats des exemples traités, on remarque bien que la méthode SA converge plus rapidement que les autres méthodes, car elle nécessite un nombre d'éléments inférieur à celui utilisé par ICT et ANSYS et cela pour le même ordre d'erreur. L'intégrations par points de Gauss donnaient les mêmes résultats que la méthode SA, sauf dans le cas où le nombre de points utilisé est inférieur à celui nécessité et pour un nombre d'éléments relativement faible, dans ce cas là en analyse statique l'erreur était inférieure à l'erreur de SA, par contre en dynamique et en stabilité cela s'est inversé

Pour déterminer la pulsation du mode fondamental w_i de la cheminée, il faut connaître la déformé dynamique donc le mode de vibration de la structure.

Les résultats de calcul montrent que $w_i > w_{théo}$. (ie: $T_{calc.} = 3.5s < 4.2s = T_{théo}$.)

Ceci dit, le fait d'introduire une courbe de déformée différente de la courbe exacte, est équivalent à introduire une action imposée extérieurement; ce qui évidemment rigidifie le système et par conséquent donne une valeur $w_i > w$ réelle, ce qui justifie les résultats trouvés.

VI. 2. Etude des poutres en flexion avec cisaillement

Poutre épaisse

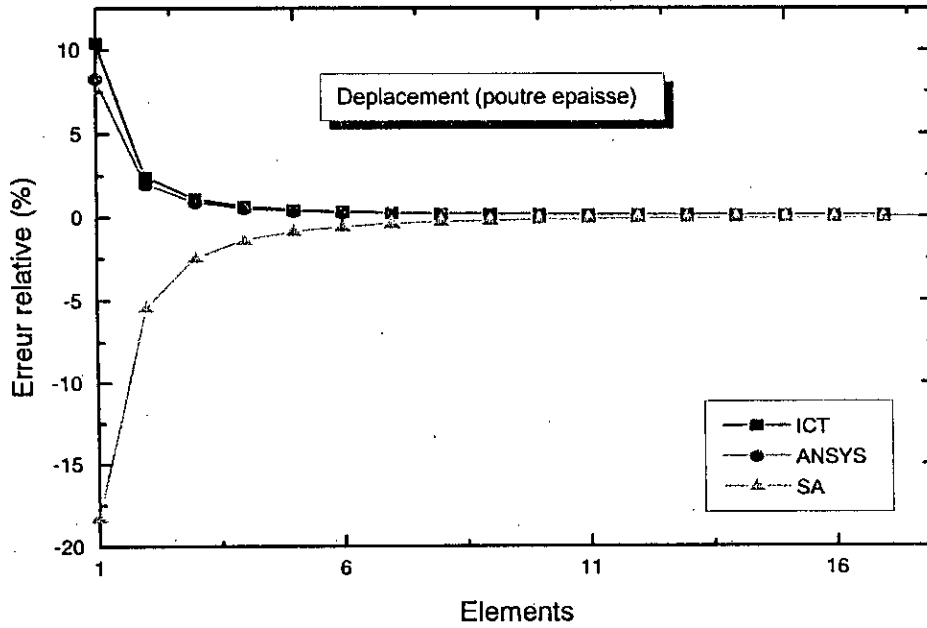


fig.14.a: Erreur relative du déplacement

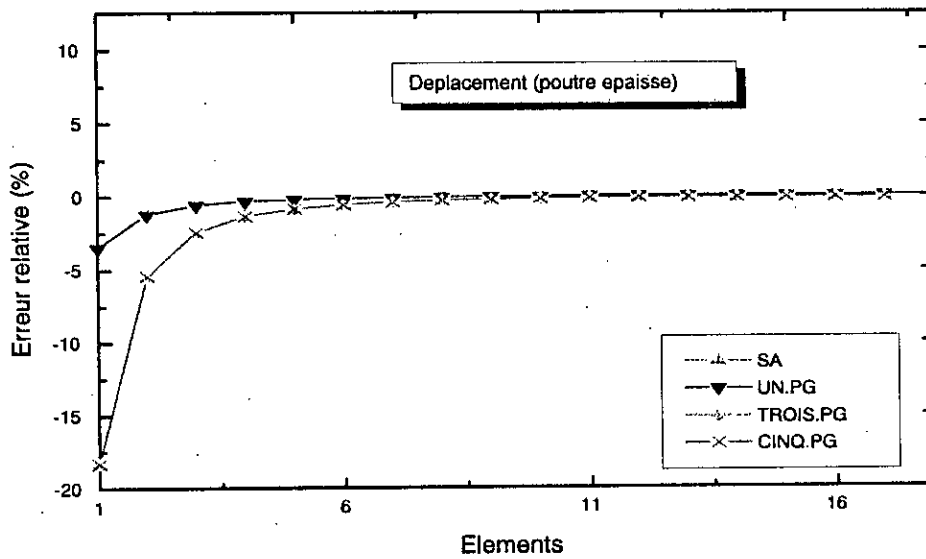


fig.14.b: Erreur relative du déplacement.

Valeur exacte du déplacement: $1.72 \cdot 10^5$ m

Nbre d'éléments	ICT $\times 10^5$	ANSYS $\times 10^5$	SA $\times 10^5$	UN.PG $\times 10^5$	TROIS.PG $\times 10^5$	CINQ.PG $\times 10^5$
1	1.8981	1.8613	1.4047	1.6598	1.4047	1.4047
2	1.7609	1.7532	1.6259	1.6984	1.6259	1.6259
3	1.7378	1.7345	1.6766	1.7800	1.6766	1.6766
4	1.7300	1.7282	1.6953	1.7143	1.6953	1.6953
5	1.7326	1.7252	1.7041	1.7163	1.7041	1.7041
6	1.7294	1.7282	1.7090	1.7175	1.7090	1.7090
7	1.7264	1.7252	1.7119	1.7182	1.7119	1.7119
8	1.7245	1.7237	1.7138	1.7186	1.7138	1.7138
9	1.7233	1.7227	1.7151	1.7189	1.7151	1.7151
10	1.7226	1.7222	1.7161	1.7191	1.7161	1.7161
11	1.7220	1.7221	1.7168	1.7193	1.7168	1.7168
12	1.7217	1.7214	1.7173		1.7173	1.7173
13	1.7214	1.7212				
14	1.7212	1.7210				
15	1.7210	1.7209				
16	1.7209	1.7208				
17	1.7208	1.7207				
18	1.7207					

Erreur relative du déplacement

Tolérance = 0.1%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	UN.PG	TROIS.PG	CINQ.PG
1	10.418	8.281	-18.28	-3.4958	-18.28	-18.28
2	2.449	1.990	-5.412	-1.232	-5.412	-5.412
3	1.098	0.905	-2.463	-0.578	-2.463	-2.463
4	0.642	0.365	-1.376	-0.329	-1.376	-1.376
5	0.434	0.273	-0.863	-0.209	-0.863	-0.863
6	0.321	0.218	-0.581	-0.148	-0.581	-0.581
7	0.253	0.183	-0.410	-0.103	-0.410	-0.410
8	0.209	0.158	-0.299	-0.077	-0.299	-0.299
9	0.179	0.141	-0.222		-0.222	-0.222
10	0.158	0.128	-0.167		-0.167	-0.167
11	0.142	0.118	-0.127		-0.127	-0.127
12	0.130	0.111	-0.096		-0.096	-0.096
13	0.121	0.104				
14	0.113	0.099				
15	0.107					
16	0.102					
17	0.09					

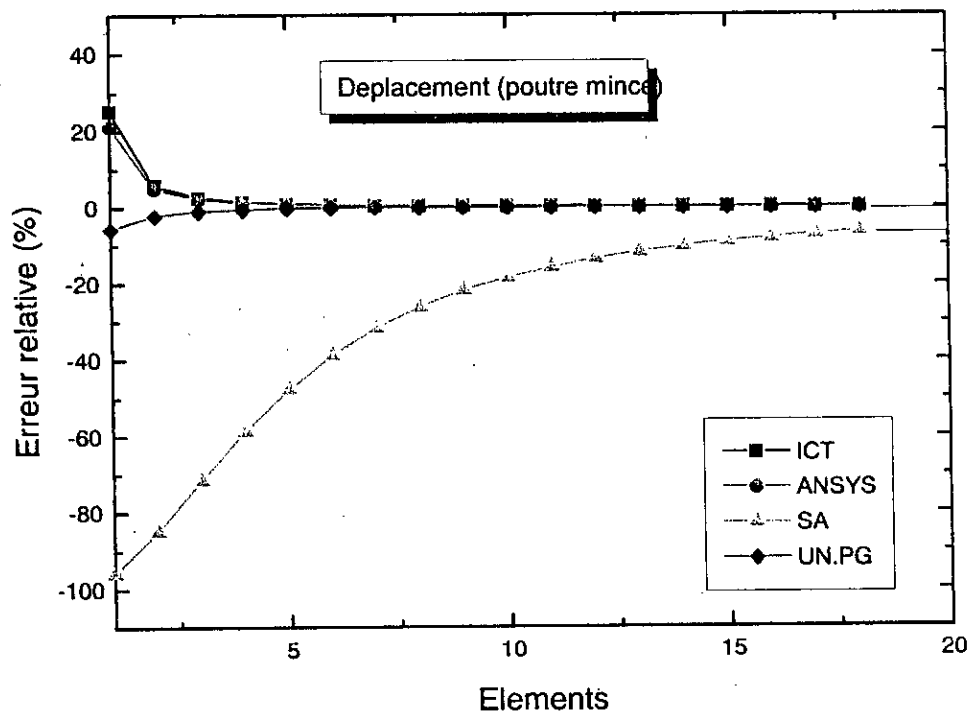


Fig 15: Erreur relative du déplacement.

Valeur du déplacement exacte = $7.68 \cdot 10^{-5}$ m

Nbre d'éléments	ICT $\times 10^5$	ANSYS $\times 10^5$	SA $\times 10^5$	UN.PG $\times 10^5$	TROIS.PG $\times 10^5$	CINQ.PG $\times 10^5$
1	9.623	9.309	0.3240	7.241	0.3240	0.3240
2	8.131	8.068	1.153	7.510	1.153	1.153
3	7.878	7.851	2.184	7.599	2.184	2.184
4	7.791	7.776	3.177	7.634	3.177	3.177
5	7.752	7.743	4.025	7.660	4.025	4.025
6	7.730	7.724	4.708	7.666	4.708	4.708
7	7.717	7.719	5.245	7.670	5.245	5.245
8	7.709	7.705	5.666	7.672	5.666	5.666
9	7.703	7.700	5.990	7.674	5.990	5.990
10	7.699	7.697	6.256		6.256	6.256
11	7.696	7.694	6.464		6.464	6.464
12	7.694	7.697	6.032		6.032	6.032
13	7.692	7.691	6.768		6.768	6.768
14	7.691	7.689	6.881		6.881	6.881
15	7.690	7.688	6.975		6.975	6.975
16	7.689	7.687	7.053		7.053	7.053
17	7.688		7.119		7.119	7.119
18	7.687		7.176		7.176	7.176

Erreur relative du déplacement

Tolérance = 0.1%

Nbre d'éléments	ICT	ANSYS	SA	UN.PG	TROIS.PG	CINQ.PG
1	25.309	21.212	-95.781	-5.710	-95.781	-95.781
2	8.132	5.057	-84.977	-2.206	-84.977	-84.977
3	5.88	2.230	-71.561	1.043	-71.561	-71.561
4	2.582	1.260	-58.629	-0.592	-58.629	-58.629
5	1.450	0.814	-47.59	-0.251	-47.59	-47.59
6	.938	0.574	-38.692	-0.177	-38.692	-38.692
7	0.659	0.429	-31.69	-0.129	-31.69	-31.69
8	0.492	0.335	-26.22	-0.096	-26.22	-26.22
9	0.383	0.270	-21.929		-21.929	-21.929
10	0.388	0.225	-18.537		-18.537	-18.537
11	0.255	0.191	-15.83		-15.83	-15.83
12	0.216	0.165	--13.64		--13.64	--13.64
13	0.186	0.145	-11.862		-11.862	-11.862
14	0.163	0.129	-10.400		-10.400	-10.400
15	0.144	0.116	-9.181		-9.181	-9.181
16	0.129	0.105	-8.158		-8.158	-8.158
17	0.117	0.09	-7.292		-7.292	-7.292
18	0.107		-6.55		-6.55	-6.55
19	0.099		-5.919		-5.919	-5.919

Interprétations des résultats

Pour le cas des poutres épaisses les conclusions faites pour les poutres en flexion sans cisaillement sont toujours valables, par contre dans l'analyse des poutres minces cela n'est plus valable car l'erreur est beaucoup plus importante, cela est dû au phénomène de verrouillage de l'élément. Ainsi cet élément ne convient que pour les poutres très courtes.

Par contre l'élément obtenu par intégration réduite converge rapidement et à un comportement satisfaisant, les méthodes ICT et ANSYS convergent elles aussi mais elles nécessitent un nombre d'éléments plus important.

CHAPITRE 7

CONCLUSION

CONCLUSION

FLEXION SANS CISAILLEMENT TRANSVERSAL

La méthode proposée s'avère plus satisfaisante, car elle converge plus rapidement que les autres méthodes en n'utilisant qu'un nombre réduit d'éléments.

Par conséquent, elle présente un précieux avantage. Celui d'être facile à programmer et préserve considérablement le temps d'exécution des calculs.

A partir des résultats observés par les différentes méthodes exposées dans cette étude, la méthode semi-analytique proposée, converge plus rapidement que les autres méthodes vers la solution exacte dans le cas où le cisaillement est négligé, Il apparaît clairement que les résultats du point de vue pratique, sont correctement appréciés et obtenus au bout d'une seule application.

Sur la base des calculs effectués, les résultats s'avèrent performants et répondent à nos espérances. En effet, pour les fréquences d'ordres supérieurs toutes les méthodes approximatives convergent parfaitement vers la solution exacte .

La méthode proposée, nous permet de modéliser les poutres non-uniformes en un petit nombre d'éléments. De plus, elle nous confère la possibilité de traiter n'importe qu'elle variation des propriétés de la section droite de la poutre.

Les résultats issus de l'étude convergent rapidement et uniformément, de façon à pouvoir estimer correctement la solution exacte en considérant un maillage raffiné.

En général, une très bonne approximation pourrait être conçue pour les problèmes où il n'existe pas au préalable une solution exacte appropriée.

POUTRE EN FLEXION AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSAL

Dans le cas des poutre épaisses la méthode SA conserve toujours son aspect de performance, par contre dans le cas des poutres minces cela n'est plus valable.

Les résultats obtenus dans ce cas ne sont plus performants, ce phénomène est dû au verrouillage de l'élément, pour remédier à cela il faudra calculer la matrice de rigidité par la technique d'intégration réduite.

L'élément obtenu par intégration réduite a un comportement satisfaisant pour la modélisation des poutres courtes et longues.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - K.J. Bathe & E.L. Wilson
" Numerical Methods in Finite Element Analysis ". Prentice Hall Ed (1982).
- [2] - M.L. Batoz & G. Dhatt
" Modélisation des Structures par Eléments Finis ". Hermes Ed. Paris (1990).
- [3] - G. Dhatt & J.Touzot
" Présentation de la Méthode des Eléments Finis ". Maloine S.E.Ed. Paris (1984).
- [4] - J.M. Gere & W.Weaver
" Analysis of Frame Structures "
- [5] - J.F. Imbert
" Analyse des Structures par la Méthode des Eléments Finis ". Cepadues Ed. (1979).
- [6] - E. Onate , J. Periaux , A. Samueison
" The Finite Element Method in the 1990's"
A book dedicated to O.C. Zienkiewicz -
International Center for Numerical Methods in Engineering
- [7] - J.N. Reddy
" An Introduction to the Finite Element Method ". John Wiley Ed. New York (1984).
- [8] - B. Tiliouine " TOUR DE GRANDE HAUTEUREN ZONE SISMIQUE "
Thèse de fin d'étude -. Ecole Nationale Polytechnique. Departement Genie Civil (1975)
- [9] - O.C. Zienkiewicz
"The Finite Element Method". MC. Graw Hill Ed (1977).
- [10] - M.Eisenberger & Y.Reich
Computers & Structure, 11, 4, 367 - 373 (1989)

ANNEXE 1

I. DEFORMATION FLEXIONNELLE

Tous les termes de la matrice de rigidité d'un élément poutre, sont obtenus en déterminant les valeurs des réactions permettant de garder l'élément en équilibre.

Le déplacement unitaire de l'extrémité j (fig.1) de l'élément est considéré positif dans la direction y.

Ce déplacement provoque une force latérale $12EI/L^3$ et un moment $6EI/L^2$

A l'extrémité K, les réactions sont les mêmes sauf que la force latérale agit dans le sens négatif, les autres termes de matrice sont obtenus de manière identique en imposant des déplacements et des rotations unitaires pour chaque extrémité, on donne la matrice de rigidité k:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{sym} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

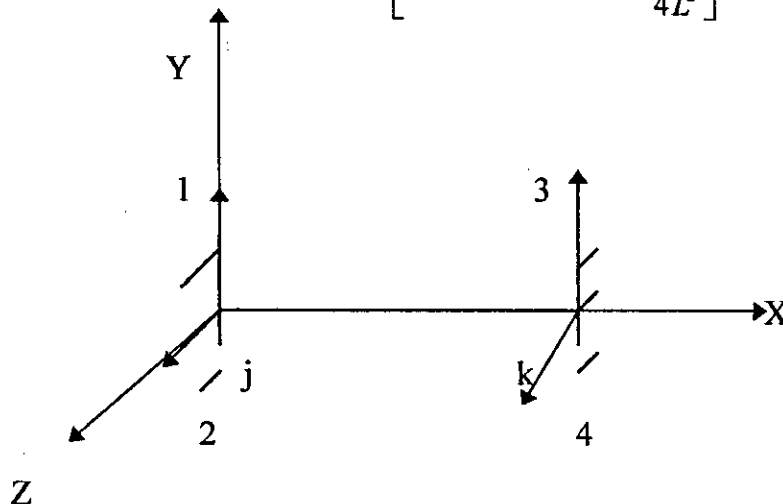


fig.1: Eléments de référence.

II. DEFORMATION DE CISAILLEMENT

Dans les poutres, les déformations causées par le cisaillement peuvent être significatives.

En réalité, ces effets peuvent être inclus dans les termes de la matrice de rigidité de élément, car chaque déplacement unitaire de extrémité cause un effort de cisaillement.

On considère élément i (fig.1), un déplacement unitaire de extrémité j de élément dans la direction Y est donné par:

$$\frac{K_{11}L^3}{12EI} + \frac{K_{11}Lf}{GA} = 1$$

Le premier terme du premier membre de l'expression (1) est dû à la déformation flexionnelle et le 2nd terme est la partie due à la déformation de cisaillement.

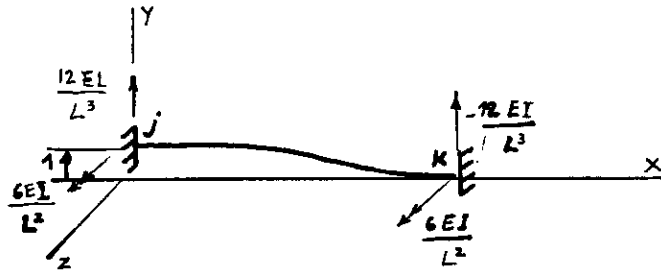
On pose: $g=6fEI/GA l^2$

on aura: $K_{11} = \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+2g} \right)$

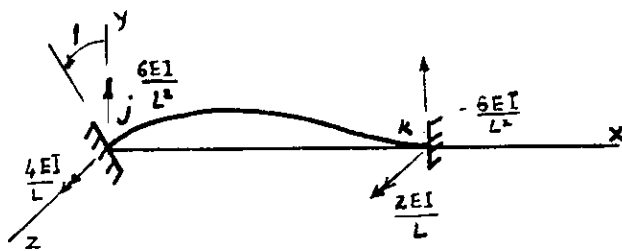
Les expressions des autres termes de la matrice de rigidité sont obtenus de la même manière, en appliquant le principe équilibre.

En apportant les modifications nécessaires on obtient la matrice modifiée pour un élément poutre de section prismatique:

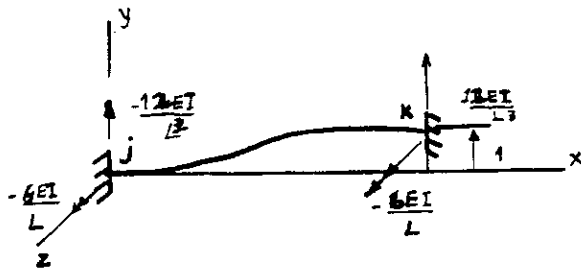
$$K = \frac{1}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} \left(1 + \frac{g}{2}\right) & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} (1+g) \\ \text{SYM} & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & & & \frac{4}{L} \left(1 + \frac{g}{2}\right) \end{bmatrix}$$



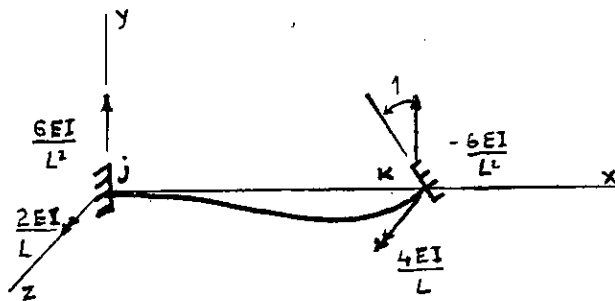
(1)



(2)



(3)



(4)

ANNEXE 2

I. FACTEUR DE CORRECTION DE CISAILLEMENT

Le facteur de cisaillement peut être déterminé en comparant l'énergie interne de cisaillement associée à la distribution théorique de σ_{xz} et σ_{xy} , et l'énergie associée au modèle de Mindlin et corrigée par le facteur k , pour un même effort tranchant T .




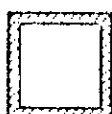

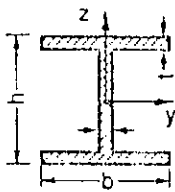
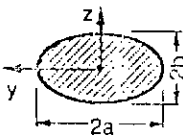
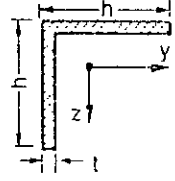
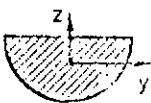
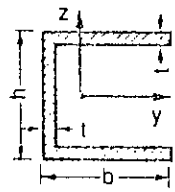
$$U_1 = \frac{1}{2} \int_A \left(\frac{\sigma_{xy}^2}{G_{xy}} + \frac{\sigma_{xz}^2}{G_{xz}} \right) dA$$

$$T = \int_A \sigma_{xz} dA$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k \bar{H}_c}$$

$$\bar{H}_c = \int_A G_{xz}(Y,Z) dA$$

$$U_1 = U_2 \Rightarrow k = \frac{T^2}{\bar{H}_c U_1}$$

Sections pleines		Sections à parois minces	
	<p>Rectangle</p> $k = \frac{5}{6} = 0.833$		<p>Tube circulaire</p> $k = 0.5$
	<p>Cercle</p> $k = \frac{6}{7} = 0.857$		<p>Tube carré</p> $k = 0.413$
	<p>Tube épais</p> $k = \frac{6}{7 + 20 \alpha^2}$ $\alpha = \frac{b/a}{1 + b^2/a^2}$		<p>Section I (b = h)</p> <p>EF:</p> $k_z = 0.32$ $k_y = 0.69$
	<p>Ellipse</p> $k_z = \frac{12(3a^2 + b^2)}{40a^2 + 16b^2}$		<p>Cornière (b = h)</p> <p>EF:</p> $k = 0.356$
	<p>Demi-cercle</p> $k_z = 0.766$ $k_y = 0.863$		<p>Section U (b = h)</p> <p>EF:</p> $k_z = 0.235$ $k_y = 0.613$