

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
EL - HARRACH

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL



PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

INVESTIGATION NUMERIQUE DU PHENOMENE  
D'INTERACTION SOL - FONDATION

Proposé par :  
M.K. BERRAH  
M. DEMIDEM

Etudié par :  
H. ABCHICHE  
K. BELKHEIR

Dirigé par :  
M. DEMIDEN  
M.K. BERRAH

PROMOTION JUILLET 1994

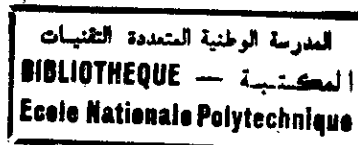
E.N.P. 10, Avenue Hacene Badi El - Harrach - ALGER.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
EL - HARRACH

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

INVESTIGATION NUMERIQUE DU PHENOMENE  
D'INTERACTION SOL - FONDATION

Proposé par :  
M.K. BERRAH  
M. DEMIDEM

Etudié par :  
H. ABCHICHE  
K. BELKHEIR

Dirigé par :  
M. DEMIDEN  
M.K. BERRAH

PROMOTION JUILLET 1994

E.N.P. 10, Avenue Hacene Badi El - Harrach - ALGER.

الموضوع: استقصاء عددي للتصرف للاعتدالي للتأثير المتبادل بين التربة والمنشأة بطريقة العناصر المحدودة وطريقة المعادلات التحكاملية على الحدود والجمع بينهما.

الملخص: هدف هذا المشروع دراسة تفاعل التربة والمنشأة بواسطة الطرق العددية (MEF) و (BEM) والجمع بينهما. ولهذا الغرض عدد معتبر من الأمثلة قدمت للتوضيح مدى استخدام هذه الطرق واستخلاص أهم خصائصها.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

SUJET: Investigation numerique du comportement statique de l'interaction sol-structure par la methode des elements finis et la methode des équations integrales aux frontieres ainsi que leur couplage

RESUME: Le présent travail consiste à étudier l'interaction sol-structure par des methodes numeriques (M.E.F) et (B.E.M) ainsi que leur couplage  
A cet effet, de nombreux exemples sont présentés pour illustrer l'application de ces methodes et d'en tirer les principaux avantages

SUBJECT: Numerical investigation of the soil-structure interaction using finite elements method (F.E.M) and boundary elements method (B.E.M) and a combination of the both

ABSTRACT: This work consists in a soil-structure interaction study using (F.E.M) and (B.E.M) and their combination for this propose, several examples are presented to demonstrate the application of those methods

## **DEDICACES**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*Je dédie ce modeste travail à mes parents, à mes frères et soeurs, ainsi qu'à la mémoire d'un être cher que je n'aurai plus jamais la chance de revoir.*

**K. BELKHEIR**

*- A mon père*

*- A ma mère*

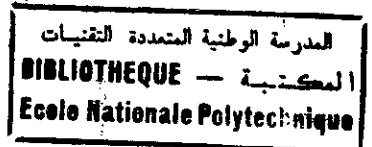
*- A mes frères et soeurs*

*- Et à tous ceux qui me sont chers*

*je dédie ce travail*

**H. ABCHICHE**

## **REMERCIEMENTS**



*Nous remercions vivement nos promoteurs Mr M.K BERRAH et Mr M.DEMIDEM pour leurs conseils et leurs orientations durant toute l'année.*

*Nous tenons à remercier en particulier Mr M.HADID pour son aide tant sur le plan moral que technique, et pour sa disponibilité permanente durant toute l'année, sans oublier messieurs O. SAHA et S.BOUZIANE pour leurs encouragements.*

*Nos vifs remerciements vont aussi au personnel du centre de calcul, de la bibliothèque, et du périodique de l'E.N.P.*

*Que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation trouvent ici l'expression de notre gratitude., ainsi que tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.*

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I	ELASTICITE LINEAIRE
I-1	INTRODUCTION.....3
I-2	EQUATION GOUVERNANTE.....4
I-3	ELASTICITE PLANE .....11
CHAPITRE II	L'ANALYSE DE L'INTERACTION SOL-STRUCTURE PAR LA THEORIE DE L'ELASTICITE
II-1	INTRODUCTION .....15
II-2	LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE DANS LE CAS BIDIMENSIONNEL.....16
II-3	ANALYSE EN DEFORMATION PLANE D'UN MILIEU SEMI-INFINI.....23
II-4	CALCUL DES TASSEMENTS.....29
CHAPITRE III	LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
III-1	INTRODUCTION.....31
III-2	HISTORIQUE.....32
III-3	CONCEPT D'ELEMENTS FINIS POUR L'ELASTICITE PLANE .....33
III-3-1	INTRODUCTION.....33
III-3-2	DIFFERENTES FORMULATIONS.....34
III-3-3	LE MODELE DEPLACEMENT.....35

CHAPITRE IV	PRESENTATION DES PROGRAMMES M.E.F	
IV-1	INTRODUCTION.....	43
IV-2	PROGRAMME M.E.F.F.F. ....	44
IV-3	PROGRAMME M.E.F.F.R.....	52
CHAPITRE V	LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES	
V-1	INTRODUCTION.....	54
V-2	HISTORIQUE.....	55
V-3	FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE.....	56
V-3-1	IDENTITE DE SOMIGLIANA.....	56
V-3-2	DETERMINATION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE.....	60
V-4	ETABLISSEMENT DE L'EQUATION INTEGRALE AUX FRONTIERES.....	65
V-5	FORMULATION DE L'ELEMENT FRONTIERE.....	68
V-5-1	ELEMENT CONSTANT.....	69
V-5-2	ELEMENT LINEAIRE.....	69
V-6	DETERMINATION DES ELEMENTS DIAGONAUX DE LA MATRICE H.....	73
V-7	L'EQUATION INTEGRALE POUR UN MILIEU A PLUSIEURS REGIONS.....	74
V-8	PROBLEME DE COIN.....	76
CHAPITRE VI	PRESENTATION DES PROGRAMMES B.E.M	
VI-1	INTRODUCTION.....	79
VI-2	STRUCTURE DU PROGRAMME ELLINBE.....	81
VI-3	STRUCTURE DU PROGRAMME SUBREGION.....	85

CHAPITRE VII	COMPARAISON ENTRE LA M.E.F	
VII-1	INTRODUCTION.....	87
VII-2	DIFFERENCE ENTRE M.E.F ET B.E.M.....	88
CHAPITRE VIII	COUPLAGE ENTRE LA M.E.F ET LA B.E.M	
VIII-1	INTRODUCTION.....	91
VIII-2	HISTORIQUE.....	92
VIII-3	COUPLAGE ENTRE M.E.F ET LA B.E.M.....	92
	VIII-3-1 PREMIERE METHODE.....	93
	VIII-3-2 SECONDE METHODE.. ..	93
	VIII-3-2-1 CONDITION DE COUPLAGE.....	95
	VIII-3-2-1 LA SYMETRISATION.....	95
	VIII-3-3 TROISIEME APPROCHE.....	96
CHAPITRE IX	PRESENTATION DU PROGRAMME COUPLAGE	
IX-1	INTRODUCTION.....	98
IX-2	ETAPES DE RESOLUTION AVEC UN PROGRAMME COUPLAGE .....	99
IX-3	STRUCTURE DU PROGRAMME COUPLAGE.....	100
CHAPITRE X	APPLICATIONS	
X-1	APPLICATION 1.....	101
X-2	APPLICATION 2.....	
X-3	COMPARAISON DES RESULTATS.....	
X-4	INTERPRETATION DES RESULTATS.....	
CONCLUSION.....		
BIBLIOGRAPHIE .....		



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

## GENERALE

Fonder des ouvrages est sans doute le plus ancien problème géotechnique rencontré par nos ancêtres, et il reste encore le plus répandu et le plus banal, et pourtant il est loin d'être le mieux résolu ou le mieux connu.

Si nous nous limitons seulement à l'étude de l'action mutuelle de l'ouvrage sur le sol sur lequel il est fondé et vice-versa, nous nous rendons compte de l'absence de théorie rigoureuse permettant une pareille analyse, tenant compte des propriétés physiques réelles des matériaux constituant la structure et le sol.

Se basant sur des hypothèses plus ou moins réalistes, des théories ont pu voir le jour. Certaines tiennent compte du comportement plastique du sol, à l'encontre de la dite "théorie de l'élasticité". Cette dernière suppose les déformations proportionnelles aux contraintes, ce qui souvent n'est pas le cas du sol. Mais si nous considérons que les contraintes et les déformations engendrées sont assez faibles et loin de l'état de rupture plastique, nous pouvons supposer l'existence d'un rapport de proportionnalité entre elles.

Grâce à cette théorie, et en se basant sur des techniques de discrétisation de problème continu ayant subi un grand progrès dû au développement des calculateurs, il ya eu l'apparition de méthodes numériques permettant la résolution de problèmes très complexes, entre autres la méthode des éléments finis (M.E.F) et plus récemment la méthode des équations intégrales aux frontières (B.E.M).

Notons l'enjeu économique considérable, en particulier pour les grands ouvrages, une meilleure connaissance du comportement de l'ensemble sol-fondation éviterait dans bien

comportement de l'ensemble sol-fondation éviterait dans bien des cas des dépenses énormes.

Vu les exigences de sécurité de plus en plus sévères d'une part, et les contraintes économiques d'autre part, les ingénieurs, pour la réalisation rationnelle de leurs projets, ont cherché à tirer profit du progrès réalisé dans le domaine informatique en utilisant les méthodes numériques.

Le but du présent travail est l'étude de l'interaction sol-structure par la M.E.F, la B.E.M et leur couplage.

Nous avons utilisé cette variété de méthodes pour pouvoir montrer les avantages et inconvénients de l'une par rapport aux autres, ce qui permet une analyse comparative d'un point de vue précision des résultats obtenus, ainsi que d'un point de vue maniabilité et facilité d'être adaptée à des programmes informatiques.

Nous rappellerons, tout d'abord, les notions élémentaires d'élasticité, ensuite nous exposerons une analyse de l'interaction sol-structure par la théorie de l'élasticité comprenant la démarche pour l'obtention des distributions des contraintes dans un milieu semi-infini chargé à sa surface. Dans une troisième partie, nous présenterons les bases et les fondements des méthodes numériques, celles-ci seront classés suivant l'ordre chronologique de leurs apparitions: M.E.F, B.E.M, puis leur couplage. chaque méthode sera illustrée par les organigrammes qui ont permis l'établissement des programmes pour le calcul numérique. Enfin, nous décrirons les résultats numériques de l'interaction proprement dite, suivie d'interprétations et d'une conclusion.

# CHAPITRE I

## ELASTICITE LINEAIRE

## I-1 INTRODUCTION

Tous les matériaux possèdent à un certain degré la propriété d'être élastiques, c'est à dire que si les forces extérieures qui provoquent la déformation disparaissent en même temps que la force qui leur a donné naissance.

La théorie de l'élasticité est une méthode directe de formulation des équations forces-déplacements. Les principales hypothèses sur lesquelles elle se base sont : la linéarité des relations contraintes - déformation, le milieu est homogène et isotrope et les déformations engendrées sont très petites.

## I-2 EQUATION GOUVERNANTE

### I-2-1 EQUATION D'EQUILIBRE

L'état de contrainte en un point est caractérisé par le tenseur de contrainte suivant :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (I-1)$$

$\sigma_{ij}$  avec  $i$  : indique la force qui est normale à  $x_i$   
 $j$  : indique la direction.

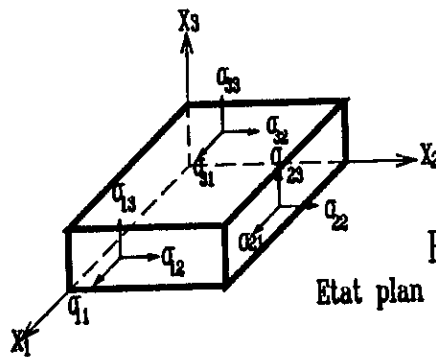


Fig I.1  
Etat plan de contrainte

Remarque : Le tenseur contrainte est symétrique

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (I-2)$$

Notre objectif est de relier l'état de contrainte en un point à l'état de contrainte en un autre point du milieu. Pour passer d'un point à un autre dans un champ de contrainte, il est nécessaire d'avoir une équation différentielle gouvernante.

Dans le cas présent, il est question d'équation d'équilibre qui contrôle le changement des composantes du

tenseur contrainte lors du passage d'un point à un autre avoisinant. L'équation d'équilibre statique en tout point d'un milieu  $R$  est comme suit :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 ; \quad i = 1 \dots 3, \quad j = 1 \dots 3 \quad (I-3)$$

Dans lesquelles :

$F_i$  : représente les composantes des forces volumiques suivant les directions  $i$

Les équations d'équilibre sont satisfaites par les équations suivantes :

$$P_i = \sigma_{ij} n_j ; \quad i = 1 \dots 3; \quad j = 1 \dots 3 \quad (I-4)$$

où  $n$  : sont les cosinus directeurs de la normale  $n$  par rapport à la direction  $x$ ;

$p$  : forces surfaciques prescrites sur la frontière.

### I-2-2 EQUATION DE COMPATIBILITE

Il existe six composantes de déformation " $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ ", et il existe trois (03) composantes de déplacements  $u_x; u_y; u_z$ . Il est possible de se donner trois (03) fonctions suffisamment dérivables et d'en déduire les six (06) fonctions  $\epsilon_{ij}$ . Par contre, il n'est pas possible de se donner arbitrairement six (6) fonctions  $\epsilon_{ij}$  et d'en déduire les trois fonctions de déplacements. Il devrait par conséquent exister trois (03) relations liant les  $\epsilon_{ij}$  d'un point de vue mathématique. Ces relations expriment les restrictions sur la forme de  $\epsilon_{ij}$  pour que le système

d'équations différentielles soit intégrable. Les conditions d'intégrabilité sont appelées condition de compatibilité. Elles assurent l'existence du champ de déplacement et son unicité. En fait, les déplacements sont obtenus à des constantes près qui sont déterminées par les conditions aux limites.

Les conditions de compatibilité sont des conditions nécessaires pour l'existence de solution unique en termes de déplacements.

Les équations s'énoncent comme suit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}\end{aligned} \quad (I-5)$$

$$\begin{aligned}2. \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] \\ 2. \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] \\ 2. \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right]\end{aligned} \quad (I-6)$$



Remarque : Bien que les équations de comptabilité ce sont au nombre de six. Elles ont un degré d'indépendance égale à trois.

### I-2-3 EQUATION DEFORMATION - DEPLACEMENT

L'état de déformation  $[\varepsilon]$  en un point est caractérisé par le tenseur suivant :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (I-7)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$$

Les relations déformation-déplacement pour la théorie linéaire au nombre de six (06) sont données par l'équation suivante:  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  (I-8)

### I-2-4 EQUATIONS CONTRAINTES - DEFORMATIONS

La plus facile relation qui puisse exister entre un tenseur contrainte  $\sigma_{ij}$  et un état de déformation  $\varepsilon_{ij}$  est une relation linéaire.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (I-9)$$

Remarques :

\* L'équation tensorielle exprime les relations

générales entre contrainte et déformation en un point d'un solide linéaire.

- \*  $C_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre 4, 81 termes.
- \*  $C_{ijkl}$  représente les fonctions réponses du matériau
- \* Pour un matériau homogène  $C_{ijkl}$  est indépendante de la position du point. Pour un matériau isotrope le tenseur  $C_{ijkl}$  est indépendant du repère.

\* Du fait de la symétrie du tenseur contrainte et déformation, on aura

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

Par conséquent le nombre de termes indépendant est réduit de 81 à 36. L'équation (I-1) s'écrira alors matriciellement comme suit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \text{Symétrie} & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \cdot \varepsilon_{12} \\ 2 \cdot \varepsilon_{23} \\ 2 \cdot \varepsilon_{13} \end{bmatrix}$$

En générale les coefficients de la matrice C dépendent de l'orientation du système de coordonnées. Donc, on aura une réduction des termes indépendants de la matrice [C] selon

le cas. L'existence d'une fonction d'énergie de déformation entraîne la symétrie de la matrice [C] est donc une réduction de constante indépendante de 36 à 21 .

a - Plan de symétrie

Considérons deux systèmes  $\overline{X}$  et  $\overline{X}$  avec les axes  $\overline{X}_1, \overline{X}_2$  qui coïncident avec  $X_1$  et  $X_2$ , l'axe  $\overline{X}_3$  qui est égale à  $-X_3$  ce qui veut dire que le plan  $X_1X_2$  est un plan de symétrie.

Pour ce cas on aura  $c_{12} = c_{16} = c_{25} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = 0$   
 On aura une réduction des termes indépendant de 21 à 13 la matrice [C] deviendra

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ \text{symétrie} & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$$

b - Symétrie orthotrope

Un cas de symétrie orthotrope c'est un cas où l'on a trois (03) plans de symétrie élastique , le nombre de constantes indépendantes passe de 13 à 9. De la même manière que la symétrie élastique on obtient

$$c_{14} = c_{26} = c_{36} = c_{56} = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symétrie} & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$$

### c - Cas isotropes

Pour un matériau isotrope les constantes élastiques sont indépendantes de l'orientation des axes de coordonnées, ce qui nous ramène à deux constantes indépendantes. On montre que :

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu$$

$$c_{13} = c_{23} = c_{12} = \lambda$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont appelées coefficient de LAME (1852) qui sont fonction du module de YOUNG "E" et du coefficient de POISSON " $\nu$ " du coefficient de cisaillement "G".

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

On écrira notre matrice en fonction de  $\lambda$  et  $\nu$  comme suit:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de HOOKE généralisée pour un matériau isotrope s'écrit de façon indicielle comme suit:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \cdot \epsilon_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} = - \frac{\lambda \cdot \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{pp} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (I-10)$$

$$\epsilon_{ij} = - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

$\delta_{ij}$  symbole de CRONECKER.

### I-3 ELASTICITE PLANE

Les problèmes de la théorie de l'élasticité sont simplifiés dans une large mesure lorsqu'on est en présence de

problèmes bidimensionnels.

### I-3-1 ETAT DE CONTRAINTE PLANE

L'état de contrainte plane est définie de deux façons:

- L'épaisseur du corps est très petite comparée aux dimensions caractéristiques suivant  $X_1$  et  $X_2$ .

- Aucune force de surface n'agit sur les faces limitant le solide à  $X_3 = \pm h/2$ ,

- Les forces agissant sur la surface limite cylindrique sont planes et indépendantes de  $X_3$  donc  $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$  dans tout le volume et  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  sont indépendantes de  $X_3$

La loi de HOOKE s'écrira pour un matériau isotrope:

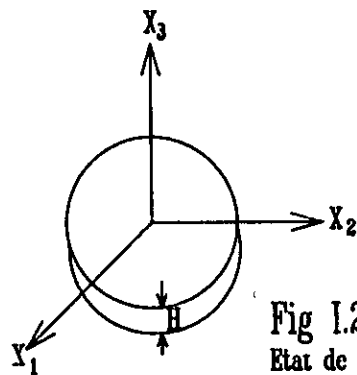


Fig I.2  
Etat de contrainte plane

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E} \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad (I-11) \\
 \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} [\sigma_{11} + \sigma_{22}]
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire les relations contraintes-déformations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{cases} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{cases} \quad (I-12)$$

### I-3-2 ETAT DE DEFORMATION PLANE

Un cas de déformation plane serait approximativement celui d'un long cylindre du corps prismatique dont la direction  $X_3$  est grande par rapport aux deux autres dans le plan  $X_1 X_2$ . Les forces de volume et les forces de surface agissent sur la surface limite cylindrique soit dans le plan " Pas de composante suivant  $X_3$  " et ne sont pas fonction de  $X_3$ . On peut donc admettre que les déplacements plans  $U_1$  et  $U_2$  ne dépendent pas de  $X_3$ .

que  $U_3=0$ , donc :

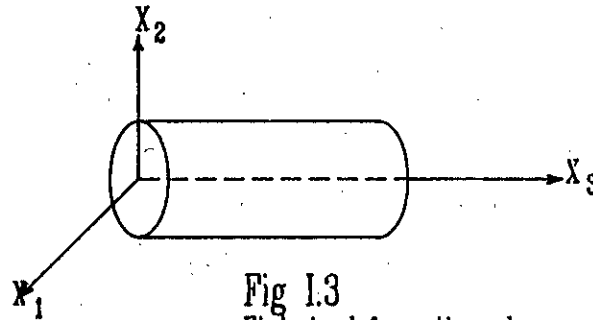


Fig I.3  
Etat de déformation plane

$$U_1 = U_1(x_1, x_2)$$

$$U_2 = U_2(x_1, x_2) \quad (I-13)$$

$$U_3 = 0$$

soit  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$  mais  $\sigma_{33} \neq 0$ . On tire les relations contraintes-déformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (I-14)$$

Remarque:

On peut passer d'une manière simple des formules de déformations planes aux formules de contraintes planes, en remplaçant le module de YOUNG par  $E = E(1-\nu^2)$  et le coefficient de POISSON par  $\nu = \frac{\nu}{(1+\nu)}$



## **CHAPITRE II**

# **L'ANALYSE DE L'INTERACTION SOL- STRUCTURE PAR LA THEORIE DE L'ELASTICITE**

## II-1 INTRODUCTION

Parmi les tâches importantes de la mécanique des sols est de prévoir les déplacements, en particulier les tassements que peut subir une structure fondée sur le sol. Si la fondation est bien conçue, les contraintes créées dans le sol par l'effet de la charge de la structure sont suffisamment faibles que les déformations n'atteignent pas l'état plastique.

Sous pareilles conditions, on peut supposer que les contraintes et les déformations dans le sol sont proportionnelles, ce qui nous permet d'appliquer la théorie de l'élasticité, qui en réalité n'est rigoureusement correcte que pour un matériau parfaitement élastique. Par conséquent son utilisation pour la détermination des contraintes dans le sol peut engendrer une incohérence dans les résultats, mais si on considère qu'on est assez loin de l'état de rupture plastique, on pourra supposer l'existence d'un rapport de proportionnalité entre les contraintes et les déformations. Si les exigences de proportionnalité ne sont pas remplies, on aura alors à faire une étude à la rupture à la place d'une étude à l'état élastique.

## II- LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE DANS LE CAS BIDIMENSIONNEL

Beaucoup de problèmes liés à la distribution de contrainte sont bidimensionnels, ils peuvent être traités en contraintes planes, si toutes les contraintes agissant dans la structure, ou dans le sol sont parallèles à un plan donné, ou bien ils peuvent être traités en déformations planes, si le corps étudié est étendu dans une direction, et dans laquelle les déformations sont nulles, exemple : murs de soutènement, semelles filantes.

Considérons l'équilibre du prisme élémentaire (cf fig II-1), il en découle les équations suivantes:

$$\begin{cases} \sigma_x \cdot dz - \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dz + \tau_{xz} dx - \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx = 0 \\ \sigma_z dx - \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx + \tau_{xz} dz - \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dz + \gamma \cdot dx \cdot dz = 0 \end{cases}$$

$\gamma$  représente les forces de volume

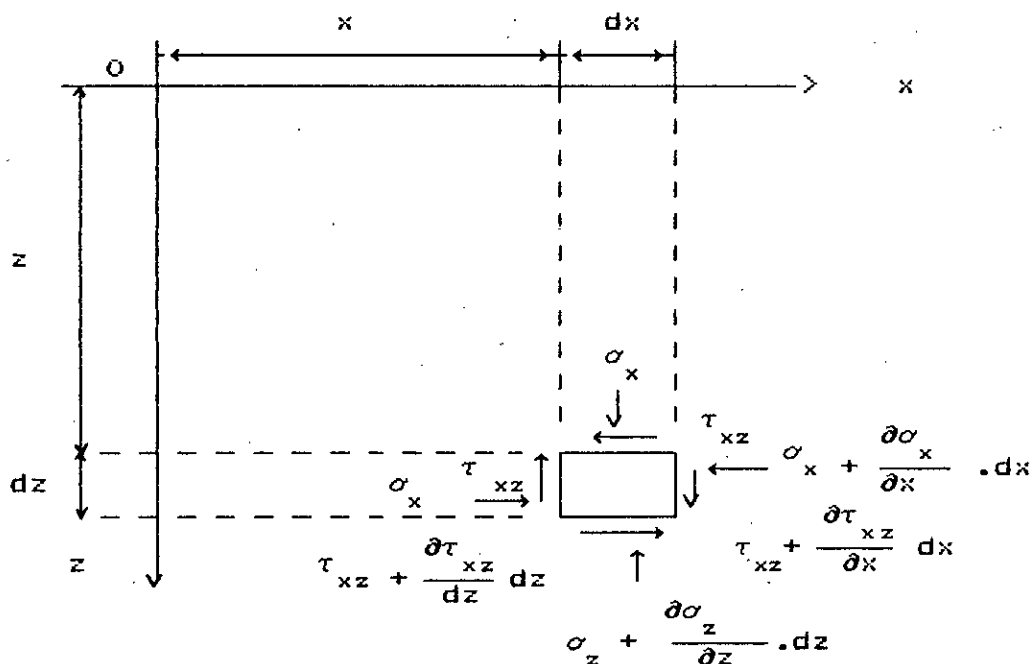


Fig II-1

Après simplification et en ne tenant pas compte des forces de volume :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-1}) \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-2}) \end{array} \right.$$

Ce système d'équations représente les conditions d'équilibre pour un problème en deux dimensions. Les conditions doivent être satisfaites en tout point à l'intérieur du corps sujet à des contraintes.

Trois composantes de contraintes sont à déterminer, le système est donc insuffisant. Considérons les relations entre

déformations et déplacements dans le cas 2D:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial V}{\partial z} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{array} \right. \quad (\text{II-3})$$

U et V sont les déplacements respectivement suivant x et z.  
 $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  sont les composantes du tenseur déformation.

On constate que trois (03) déformations sont dérivées de deux déplacements, ainsi, pour que le champ de déformation soit admissible, les déformations doivent vérifier une relation entre eux appelée équation de compatibilité:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \cdot \partial z} \quad (\text{II-4})$$

La théorie de l'élasticité suppose une relation linéaire entre contraintes et déformations, établie par la loi de HOOK, qui s'écrit dans le cas tridimensionnel comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{array} \right. \quad (\text{A})$$

Pour un état de déformation plane :  $\varepsilon_y = 0$ , le système d'équations (A) devient:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu^2) \sigma_x + \nu (1+\nu) \sigma_z \right] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu^2) \sigma_z + \nu (1+\nu) \sigma_x \right] \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

On a en plus :  $\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$  (II-6)

où G est le module de cisaillement

E est le module de Young

$\nu$  est le coefficient de poisson .

Substituant ces déformations dans l'équation de compatibilité, on aura: (II-7)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ (1-\nu)\sigma_x + \nu\sigma_z \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (1-\nu)\sigma_z - \nu\sigma_x \right] = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z}$$

En dérivant la première équation d'équilibre (II-1) par rapport à X, et la seconde (II-2) par rapport à Z et en les additionnant on obtient:

$$\frac{2 \partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} = - \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right]$$

En substituant cette équation dans (II-7), On aboutit à :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (\sigma_x + \sigma_z) = 0 \quad (\text{II-8})$$

Ou bien en utilisant le Laplacien:

$$\nabla (\sigma_x + \sigma_z) = 0$$

Cette condition représente l'équivalent de l'équation de

compatibilité exprimée en terme de contrainte. La résolution du problème revient donc à résoudre le système aux dérivées partielles suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (\sigma_x + \sigma_z) = 0 \end{array} \right. \quad (B)$$

Une méthode pratique pour la résolution de ce problème est d'introduire une fonction de contraintes appelées aussi fonction d'AIRY.

AIRY (1862) a montré que les deux premières équations, ie, les équations d'équilibre, sont identiquement satisfaites si les contraintes sont dérivées d'une fonction  $F(x,z)$  de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xz} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \end{array} \right. \quad (C)$$

La fonction d'Airy doit aussi vérifier la 3ème équation, en substituant dans celle-ci les contraintes en fonction de  $F$ , on obtient:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = 0 \quad (\text{II-9})$$

ou bien :  $\nabla^2 F = 0$

La fonction  $F$  doit être biharmonique, et ses dérivées représentant les contraintes qui doivent satisfaire les conditions aux limites du problème. Une fois la fonction d'Airy trouvée, les contraintes pourront être obtenues par différenciation. On utilise souvent dans la mécanique des sols, un système de coordonnées cylindrique pour traiter le problème de distribution de contraintes (fig II-2).

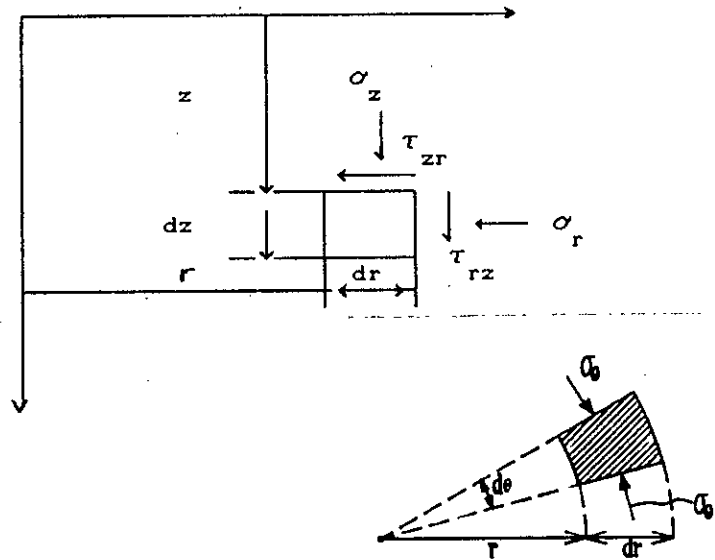


Fig II.2

Les équations d'équilibre dans le cas bidimensionnel, en coordonnées polaires sont données par les équations suivantes:



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

L'équation de compatibilité en coordonnées polaires, qui est équivalente à l'équation (II-8) en coordonnées cartésiennes est:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (\text{II-11})$$

La solution du problème est encore obtenue sous forme d'une fonction d'Airy  $f(r, \theta)$ , à partir de laquelle sont dérivées les contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

On peut vérifier que la fonction d'Airy vérifie identiquement les équations d'équilibre, elle doit aussi vérifier l'équation de compatibilité, en remplaçant dans celle-ci les contraintes par leurs expressions en fonction de  $f$  on obtient : (II-13)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :  $\nabla^2 f = 0$

La difficulté majeure dans la résolution des problèmes de l'élasticité est l'absence d'indications sur la fonction d'Airy, sauf qu'elle est biharmonique. Les fonctions d'Airy sont généralement déterminées à partir d'expérimentation, les plus souvent utilisés sont sous forme polynomiale, trigonométrique, ou en série de Fourier.

## II-3 ANALYSE EN DEFORMATION PLANE D'UN MILIEU SEMI-INFINI

### III-3-1 CHARGEMENT LINEAIRE EN SURFACE

On cherche à déterminer les contraintes dans une masse de sol semi-infinie ayant comme frontière une surface horizontale, soumise à charge linéaire uniforme (fig 3).

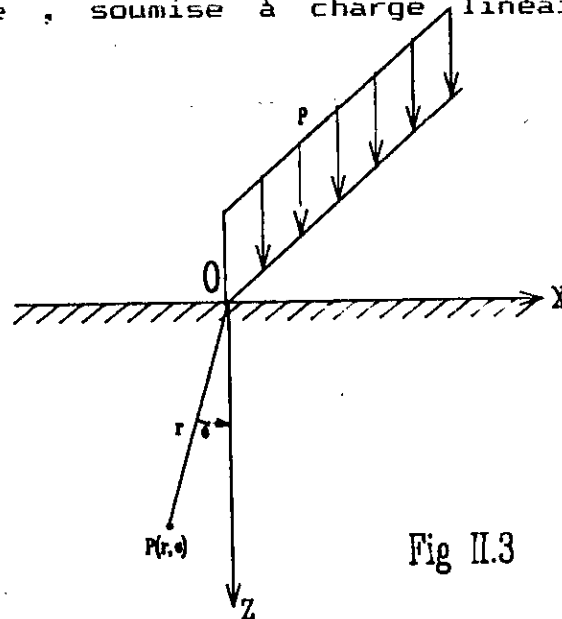


Fig II.3

Considérons un plan perpendiculaire à la droite sur laquelle agit la charge, les forces de volume seront négligées, on ne tiendra compte que de l'effet du chargement

à la surface pour la détermination des contraintes .

Soit la fonction d'Airy suivante :  $f = A.r.\theta \sin\theta$  (II-14)

On peut vérifier qu'en effet cette fonction est biharmonique. les contraintes obtenues par dérivation de  $f$  sont :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{2A \cos\theta}{r} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

L'état de contrainte trouvé est un état radial simple: tout point du sol n'est soumis qu'à une contrainte radiale de compression. Il reste à déterminer la constante  $A$ , pour ce faire considérons l'équilibre du demi cylindre d'axe passant par  $O$  et de rayon  $r$  (fig II-4)

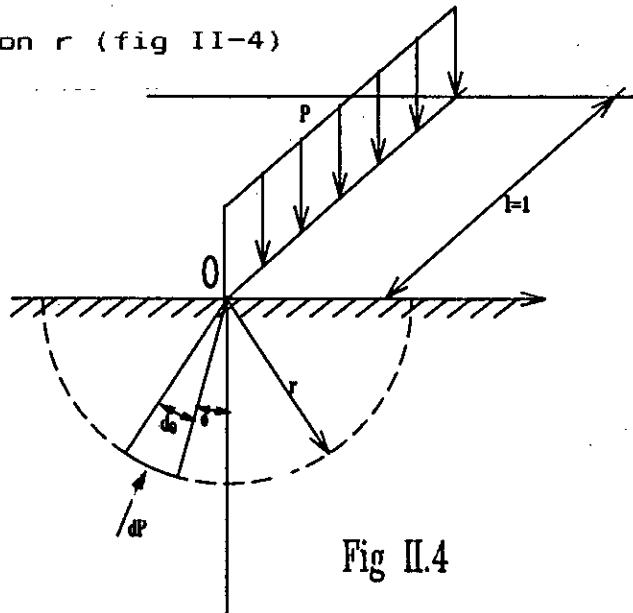


Fig II.4

La somme des composantes verticales de toutes les forces ( $dp = \sigma_r . r . d\theta$ ) agissant sur les portions élémentaires de la face du cylindre devrait être égale à la charge linéaire par unité de longueur:

Interaction Sol-Structure...

$$-P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cdot \cos \theta \cdot r \cdot d\theta$$

$$-P = 4 \cdot A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \cdot d\theta$$

$$-P = A \pi$$

On aura donc :  $A = -\frac{P}{\pi}$  (II-16)

Et par conséquent, la fonction d'Airy sera :

$$f(r, \theta) = -\frac{P}{\pi} \cdot r \cdot \theta \cdot \sin \theta \quad (\text{II-17})$$

et la contrainte radiale :  $\sigma_r = -\frac{2p}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$  (II-18)

Les conditions aux limites sur la surface libre sont vérifiées, on a bien pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  une contrainte nulle à l'exception du point O qui est un point de singularité.

En revenant aux coordonnées cartésiennes, la fonction d'Airy

devient :  $F = -\frac{p}{\pi} x \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{z}{x} \right)$  (II-19)

Sachant que  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ , les contraintes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = -\frac{2p}{\pi} \cdot \frac{z^3}{r^4} \\ \sigma_x = -\frac{2p}{\pi} \cdot \frac{x^2 z}{r^4} \\ \tau_{xz} = -\frac{2p}{\pi} \cdot \frac{x z^2}{r^4} \end{array} \right. \quad (\text{II-20})$$

## II-3-2 CHARGEMENT REPARTI SUR LA SURFACE D'UN MILIEU SEMI-INFINI

Le but de l'étude du chargement linéaire, faite ci-dessus n'est principalement que théorique. En effet la charge linéaire est toujours distribuée sur une largeur finie. Supposons que la semelle à travers laquelle la charge est transmise au sol est parfaitement flexible, le chargement réparti agissant sur un milieu élastique semi-infini peut être divisé en un nombre infini de charges linéaires élémentaires, à partir desquelles et en utilisant le principe de superposition, on peut obtenir les expressions des contraintes par intégration. Au dessous de la base d'une semelle réelle, les pressions de contact peuvent être distribuées de différentes façons, la plus simple est la distribution uniforme ; ce cas a été traité par TIMOSHENKO (1957).

Soit la fonction d'Airy suivante :

$$f(r, \vartheta) = A r^2 \vartheta \quad (\text{II-21})$$

les contraintes obtenues par dérivation de  $f$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} = 2A\vartheta \\ \sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 2A\vartheta \\ \tau_{r\vartheta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = -A \end{array} \right. \quad (\text{II-22})$$

Si on applique cet état de contraintes à un milieu

semi-fini le résultat à la surface serait celui montré sur la figure (cf fig II-5-a) avec des contraintes normales d'intensité  $A\pi$ , changeant de signe à l'origine des coordonnées polaires, et des contraintes de cisaillement d'intensité  $-A$ . Si on déplace l'origine  $O$  horizontalement au point  $O_1$ , et on change le signe de la fonction d'Airy, on obtient l'état de chargement à la surface (cf fig II-5-b), en superposant ces deux chargements on aura une charge uniforme d'intensité  $2A\pi$  agissant sur une bande de largeur  $2b$  en surface (cf fig II-5-c)

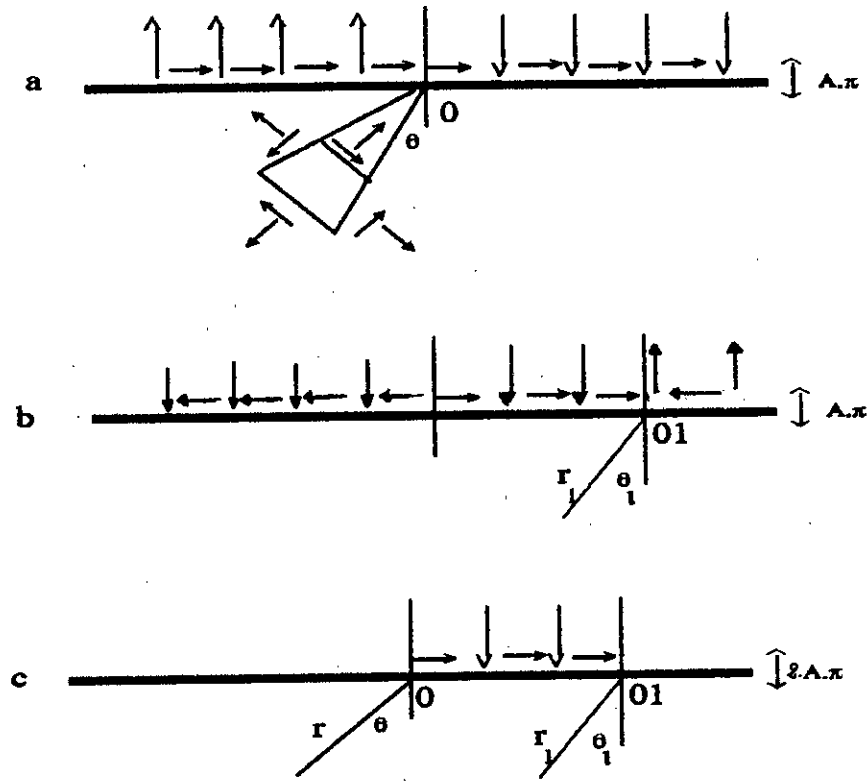


Fig II-5

Si l'intensité de la charge par unité de surface est

$q$ , alors on doit avoir :  $2A.\pi = q$  et d'où :  $A = \frac{q}{2\pi}$

La fonction d'Airy pour la combinaison des deux chargements

est donc  $f(r, \vartheta) = \frac{q}{2\pi} (r\vartheta^2 - r_1\vartheta_1^2)$  (II-23)

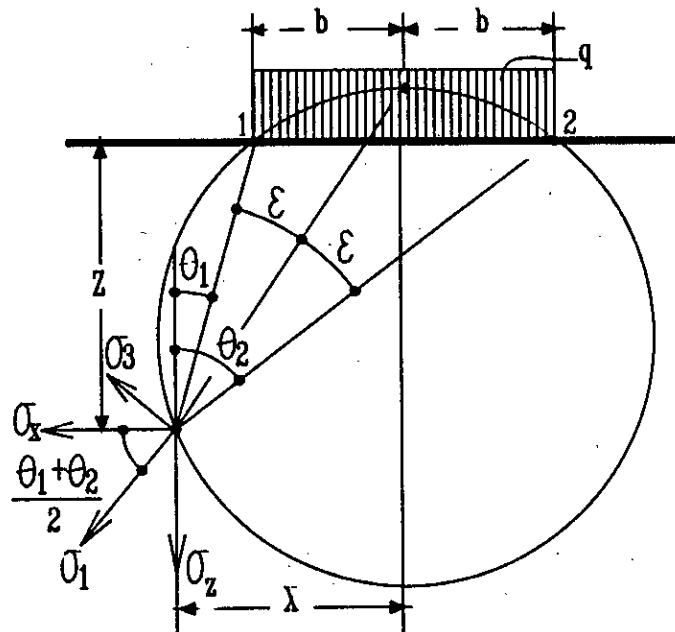


Fig II.6

En utilisant les notations de la figure (II-6), les contraintes seront données par les expressions suivantes :

$$\sigma_z = \frac{q}{\pi} \left[ \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + (\vartheta_2 - \vartheta_1) \right]$$

$$\sigma_x = \frac{q}{\pi} \left[ -\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cos(\vartheta_2 + \vartheta_1) + (\vartheta_2 - \vartheta_1) \right] \quad (\text{II-24})$$

$$\tau_{xz} = \frac{q}{\pi} \left[ \sin^2 \vartheta_2 - \sin^2 \vartheta_1 \right]$$

Il est à noter que pour une charge uniforme les contraintes principales sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{q}{\pi} (2\varepsilon + \sin 2\varepsilon) \\ \sigma_2 = \frac{q}{\pi} (2\varepsilon - \sin 2\varepsilon) \end{cases} \quad (\text{II-25})$$

La signification de l'angle  $\varepsilon$  est montrée sur la figure (II-6). On remarque que les contraintes principales dépendent seulement de  $\varepsilon$ .

Les isobars de contraintes principales sont des cercles passant par les deux coins 1 et 2. La contrainte principale majeure fait un angle  $\frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2}$  avec la verticale.

#### II-4 CALCUL DES TASSEMENTS

Dans l'analyse de la charge répartie sur une largeur finie, la distribution de la pression de contact était supposée uniforme, si on détermine le tassement "y" d'un point quelconque de la surface en intégrant la déformation verticale de zéro à l'infini, on obtient un résultat embarrassant, est que le tassement est infiniment grand, par exemple pour le centre de la semelle :

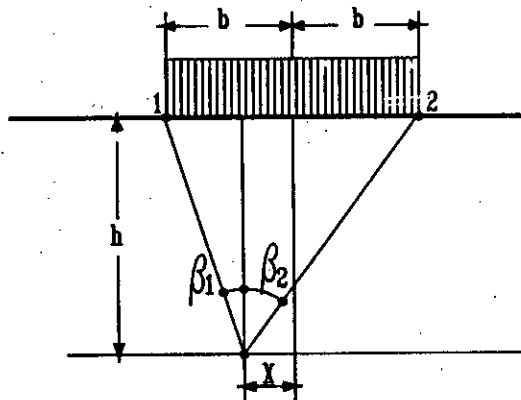


Fig II.7



Interaction Sol-Structure...

$$y = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \sigma_z dz ; \text{ pour ce cas } \beta_1 = \beta_2 = \beta \text{ (cf. fig 7)}$$

$$y = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} (\sin 2\beta + 2\beta) dz$$

$$y = \frac{2qb}{\pi E} \left[ \beta \operatorname{ctg} \beta - 2 \ln (\sin \beta) \right]_{\beta=\pi/2}^{\beta=0} \xrightarrow{\infty}$$

Le résultat est évidemment absurde, mais si on suppose que la compression du milieu est limitée à une certaine profondeur, ou bien en calculant le tassement différentiel entre la surface et une profondeur donnée, celui-ci se trouve être une valeur finie. L'expression de ce tassement est donnée en utilisant les notations de la figure (II-7).

$$y = \frac{qb}{\pi E} \left[ 2 \frac{x-b}{b} \sin \beta_2 - 2 \frac{x-b}{b} \ln (\sin \beta_1) + \frac{h}{b} (\beta_2 - \beta_1) \right]$$

(II-26)

Enfin, il est à noter que la supposition d'une distribution uniforme de la charge n'est admise que si la structure qui la transmet au sol est suffisamment flexible.

## **CHAPITRE III**

# **LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

### III-1 INTRODUCTION

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis (M.E.F) est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre efficacement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non, problèmes linéaires ou non. Elle fait appel :

- Aux Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Aux Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- A la programmation et l'informatique pour exécuter efficacement les calculs.

## II-2 HISTORIQUE

Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

En ce qui concerne les théorèmes énergétiques de l'élasticité, leur formulation a été effectuée au siècle dernier, grâce aux travaux de NAVIER (1819) sur les structures hyperstatiques, puis MAXWELL (1864) et CASTGLIANO (1878) qui établissent de façon complète les théorèmes de l'énergie. Cependant, les applications de cette formulation au calcul des structures complexes ont été inexistantes à cause de l'indisponibilité de moyens de calcul. Il faut noter qu'en 1932, l'établissement par H.CROSS d'une méthode rendant possible l'analyse de systèmes de poutres avec les moyens de calcul de l'époque (distribution des moments). Cependant, ces techniques ne permettent pas jusqu'alors la résolution de problèmes de milieux continus, rendue possible uniquement par la discrétisation du problème continu à l'aide de méthodes d'approximation adéquates.

C'est au début du 20<sup>ème</sup> siècle qu'ont été acquis les résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de RITZ (1908) et GALERKIN (1915), puis en 1943 COURANT établit les bases de la M.E.F. en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible, en effectuant une

discrétisation spatiale du domaine, tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Avec le développement de l'ordinateur, après la 2<sup>ème</sup> guerre mondiale, la résolution des équations ne posait plus de problèmes, cela a provoqué un retour aux méthodes classiques d'analyse, de là naît "la méthode matricielle", permettant de traiter des problèmes assez complexes. Parmi les contributions les plus importantes, citons celles de LEVY (1947) et GARVEY (1951) pour la méthode des forces et LEVY (1953) pour la méthode des déplacements. En 1954, DENKE systématise la méthode des forces. En 1955, ARGYRIS présente une approche unifiée des méthodes des déplacements et des forces, puis l'année suivante, TURNET et GLOUGH publient une présentation systématique de la méthode des déplacements.

Dés 1960, la M.E.F. subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- Création d'éléments de haute précision.
- Construction d'une base mathématique de la M.E.F.
- Utilisation de la M.E.F. pour la résolution de problèmes non linéaires, non stationnaires.

### III-3 CONCEPT D'ELEMENTS FINIS POUR L'ELASTICITE PLANE

#### III-3-1 INTRODUCTION

Dans de nombreux aspects de son travail, il est souvent nécessaire à l'ingénieur de connaître les répartitions des contraintes et des déformations dans des

milieux continus élastiques. Les problèmes qui se posent alors, peuvent être caractérisés comme bidimensionnels. C'est dans ces derniers que fut appliquée avec succès la méthode des éléments finis.

### III-3-2 DIFFERENTES FORMULATIONS

Il existe plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures, parmi elles :

#### 1- Formulation contraintes ou équilibre :

Dans laquelle on se donne une approximation soit sous forme d'un champ de contraintes en équilibre ou soit sous forme d'une fonction de contraintes. Elle se base sur la théorie de l'énergie complémentaire.

#### 2 - Formulation déplacements :

Dans laquelle on se donne une approximation du champ de déplacement, elle se base sur la stationnarité de l'énergie potentielle.

#### 3 - Formulation mixte :

Celle-ci considère le champ de déplacement et de contraintes comme inconnue primaire du problème ; d'où le nom mixte.

En M.E.F la formulation la plus utilisée et celle des déplacements qu'on exposera ci-après.

### III-3-3 LE MODELE DE DEPLACEMENT

La formulation déplacement qui est la plus utilisée en M.E.F. est basée sur les étapes suivantes :

- Le milieu continu est divisé par des lignes ou des surfaces imaginaires en un certain nombre d'éléments finis.
- Les éléments sont supposés être reliés entre eux par un nombre fini de points nodaux, les déplacements de ces points sont les inconnus du problème.

- On choisit une fonction permettant de définir de manière unique le champ de déplacement.

- On détermine un système de forces concentrées aux noeuds qui équilibre les contraintes qui s'exercent aux frontières.

- On évalue la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$

- On assemble la matrice élémentaire pour former la matrice globale.

- On résoud le système après avoir introduit les conditions aux limites, pour obtenir les déplacements, ensuite les contraintes.

#### III-3-3-1 DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT TRIANGULAIRE.

##### 1- Choix de la fonction déplacement

Au vu du choix de la formulation en déplacement, on

doit imposer un champ de déplacement qui satisfait certaines conditions.

- Les fonctions choisies doivent être continues à l'intérieur de l'élément et à l'interface inter-éléments.

- Les équations forces-déplacements découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement d'ensemble rigide.

- Les fonctions supposées doivent permettre la représentation des valeurs uniformes pour toutes les contraintes ou déformations.

- Le nombre de termes indépendants dans le polynôme doit être égal au nombre des composantes des déplacements qui sont à calculer.

## 2- Evaluation de la matrice de rigidité

On présente maintenant les étapes de base pour le calcul des matrices de rigidité, pour l'élément qu'on a choisi, qui est l'élément triangulaire à trois noeuds et à deux degrés de liberté par noeud.

ETAPE I : Cette étape consiste à choisir un système de coordonnées convenables et numéroter les noeuds dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



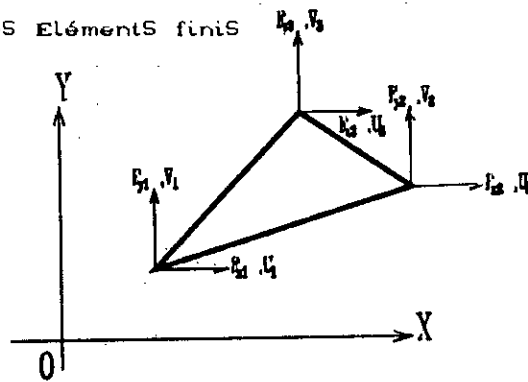


Fig. III-1

En utilisant la notation matricielle, le vecteur déplacement en un point de coordonnées (x,y) est noté comme suit :

$$\{ a(x,y) \} = \begin{Bmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{Bmatrix}$$

Le vecteur déplacement nodaux s'écrira alors comme suit:

$$\{ a^e \} = \begin{Bmatrix} \{ a_1 \} \\ \{ a_2 \} \\ \{ a_3 \} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \{ a_i \} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (\text{III-1})$$

ETAPE 2: On choisit la fonction de déplacement [f(x,y)] qui définit le déplacement { a(x,y) } en chaque point de l'élément. Puisque on a six degrés de liberté, on a besoin de six coefficients inconnus x dans le polynôme représentant le mode de déplacement permis, on aura :

$$\{ a(x,y) \} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \{ \alpha \} \quad (\text{III-2})$$

plus simplement  $\{ a(x,y) \} = \{ f(x,y) \} \{ \alpha \}$

ETAPE 3: On exprime maintenant les déplacements { a(x,y) }

dans l'élément en fonction des déplacements nodaux  $\{a^e\}$ , on obtient alors :

$$\{a^e\} = \begin{Bmatrix} \{a(x_1, y_1)\} \\ \{a(x_2, y_2)\} \\ \{a(x_3, y_3)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

plus simplement  $\{a^e\} = [A] \cdot \{\alpha\} \rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{a^e\}$

$$\begin{aligned} \{a(x, y)\} &= [f(x, y)] \{\alpha\} \text{ soit} \\ [f(x, y)] \{\alpha\} &= [f(x, y)] [A]^{-1} \{a^e\} \\ \{a(x, y)\} &= [f(x, y)] [A]^{-1} \{a^e\} \quad (\text{III-3}) \end{aligned}$$

ETAPE 4: On va relier les déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  en chaque point de l'élément aux déplacements  $\{a(x, y)\}$  et donc aux

déplacements nodaux  $\{a^e\}$

$$\text{On a } \{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\implies \{\varepsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\}$$

ou simplement  $\{\varepsilon(x, y)\} = [c] \cdot \{\alpha\}$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [c][A]^{-1} \{a^e\} \quad (\text{III-4})$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{a^e\}$$

Etape 5 : On relie les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  aux

déformations  $\{\varepsilon(x,y)\}$  et aux déplacements nodaux  $\{a^e\}$ .

La loi de HOOKE généralisée nous permet de relier les contraintes aux déformations comme suit :

$$\{\sigma(x,y)\} = [D]\{\varepsilon(x,y)\}$$

$$\text{avec } [D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$d_{22} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\{\sigma(x,y)\} = [D]\{\varepsilon(x,y)\} \quad (\text{III-5})$$

$$\Rightarrow \{\sigma(x,y)\} = [D][B]\{a^e\} \quad (\text{III-6})$$

Etape 6: Dans cette étape, on relie les charges nodales aux déplacements nodaux. On utilise le principe des travaux virtuels qui s'énonce comme suit: le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes

$$W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}$$

On a  $W_{int} = \{\varepsilon(x,y)^*\}^T \{\sigma(x,y)\}$

$$\implies \int_V W_{int} d(vol) = \int_V \{\varepsilon(x,y)^*\}^T \{\sigma(x,y)\} d(vol)$$

On a l'équation  $\{\varepsilon(x,y)^*\} = [B] \{a^e\}$

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] \cdot [B] \{a^e\}$$

$$\implies \int_V W_{int} d(vol) = \int_V [B]^T \{a^e\} [D] [B] \{a^e\} d(vol)$$

et  $W_{ext} = \{a^e\}^T \{F^e\}$

$$\implies \{a^e\}^T \{F^e\} = \left[ \int_V [B]^T [D] [B] d(vol) \right] \{a^e\}^T \{a^e\}$$

$$\implies \{F^e\} = \left[ \int_V [B]^T [D] [B] d(vol) \right] \{a^e\}$$

Elle est de type

$\{F^e\} = [K^e] \{a^e\}$  : est appelée matrice de rigidité

ou des raideurs élémentaires.

$$\boxed{[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] d(vol)} \quad (III-7)$$

### III-3-3-2 PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE

La matrice de rigidité  $[K^e]$  a trois propriétés essentielles qui sont :

- 1- La symétrie en vertu du théorème MAXWELL-BETTI
- 2- Elle est singulière avant l'introduction des conditions aux limites, ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément.

3 - Définie positive, ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle.

### III-3-3-3 GENERALISATION AU DOMAINE ENTIER - ASSEMBLAGE

Dès qu'on a établi les matrices de rigidité  $[K^e]$  de tous les éléments, il est nécessaire de les assembler dans la matrice de rigidité de toute la structure  $[K]$ . En utilisant l'approche énergétique, on peut définir la méthode d'assemblage.

Soit  $\pi$  l'énergie potentielle totale de l'élément  $e$  :

$$\pi^e = \frac{1}{2} \{u^e\}^T [K^e] \{u^e\} - \{u^e\}^T \{F^e\} \quad (\text{III-8})$$

Puisqu'on a une compatibilité des éléments, on peut obtenir l'énergie potentielle totale de la structure par simple sommation des énergies potentielles totales élémentaires :

$$\pi = \sum \pi^e = \sum \left\{ \frac{1}{2} \{u^e\}^T [K^e] \{u^e\} - \{u^e\}^T \{F^e\} \right\} \quad (\text{III-9})$$

Les déplacements nodaux sont obtenus par une relation matricielle de type :  $\{u^e\} = [B^e] \{u\}$ ;

$[B^e]$  : matrice de localisation ou de connectivité géométrique dont les éléments sont des 0 ou des 1. Des deux équations on déduit l'équation (III-10):

$$\pi = \sum \left\{ \frac{1}{2} \{u\}^T [B^e]^T [K^e] [B^e] \{u\} - \{u\}^T [B^e] \{F^e\} \right\} =$$

$$\frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{F\}$$

Avec  $[K] = \sum_{\text{éléments}} [B^e]^T [K^e] [B^e]$  matrice de rigidité complète.

$\{F\} = \sum [B^e]\{F^e\}$  vecteur des forces équivalentes.

### III-3-3-4 CONVERGENCE DE LA M.E.F

Il y'a des propriétés qui sont nécessaires ou tout au moins souhaitables au niveau de la structure complète . En particulier les conditions de convergence de la M.E.F sont:

#### 1- Complétude

Un élément fini est dit complet quand il permet la définition d'un champ déplacement qui représentera :

- Modes rigides : - Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondant aux déplacements d'ensemble, on doit trouver un état de déformation nul dans l'élément et donc des forces nodales nulles.

- Etats de déformation constants : quand on prescrit aux déplacements nodaux d'un élément des valeurs correspondant à un état de déformation constante, on doit effectivement trouver cet état de déformation à l'intérieur de l'élément.

#### 2- Compatibilité :

Un élément fini est dit compatible quand il permet la définition d'un champ de déplacement avec une continuité (déplacement continu) à l'intérieur de l'élément et aux interfaces inter-éléments . Physiquement, la compatibilité assure qu'il n'y aura apparition de vides ou de recouvrements entre les éléments qu'une fois que l'assemblage est fait.

## **CHAPITRE IV**

### **PRESENTATION DES PROGRAMMES**

**M.E.F**

#### IV-1 INTRODUCTION

Nous avons déjà établi que le vecteur force  $\{F\}$  était relié au vecteur déplacement  $\{U\}$  par l'équation suivante :

$$\{F\} = [k] \cdot \{U\} ; [K] \text{ matrice de rigidité.}$$

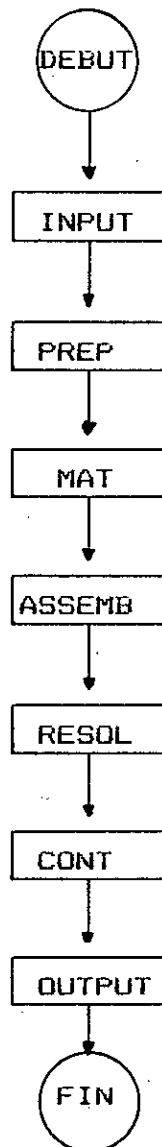
Dans cette équation, les quantités inconnues sont les déplacements, et l'objet de la résolution est la détermination des déplacements nodaux  $\{U\}$ . Le travail numérique consistant en la mise en oeuvre de cette étude pour toute structure réelle rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de la M.E.F.

Pour notre étude, nous avons élaboré deux programmes utilisant les éléments triangulaires. L'un d'eux solutionne les problèmes d'interaction sol-structure pour une fondation flexible (M.E.F.F.F.), et l'autre, pour une fondation rigide (M.E.F.F.R.).



IV-2 PROGRAMME M.E.F.F.F

Le programme que nous avons élaboré est construit en neuf grandes parties (sous-programmes), chacun d'eux ayant une fonction particulière qui sera définie ultérieurement.



#### IV-2-1 SUBROUTINE INPUT

Pour bien poser le problème, il est nécessaire d'introduire des données dans l'ordinateur, qui doivent spécifier :

- La géométrie de la structure modélisée, la longueur et la profondeur du sol.
- Les caractéristiques physiques du matériau, coefficient de POISSON, et le module de YOUNG.
- Le nombre de noeuds suivant la longueur et la profondeur.
- Les sollicitations, c'est à dire le noeud où est appliquée la charge ainsi que sa direction et son intensité.

Les variables dans ce sous-programme sont :

E : Module de YOUNG.

NU : Coefficient de POISSON.

EP : Epaisseur.

L : Longueur.

H : Profondeur.

M : Nombre d'éléments suivant la longueur.

N : Nombre d'éléments suivant la hauteur.

F : Vecteur force.

#### IV-2-2 SUBROUTINE PREP

Cette subroutine a pour rôle de déterminer les coordonnées de chaque noeud, la création de la table de la connectivité, ainsi que l'introduction des conditions aux limites qui se fait automatiquement.

#### IV-2-3 SUBROUTINE MAT

L'objectif de ce sous-programme est l'extraction des informations des deux précédents à l'aide de COMMON étiquette, avec lesquelles il fait la construction de la matrice et du vecteur élémentaire.

#### IV-2-4 SUBROUTINE ASSEMB

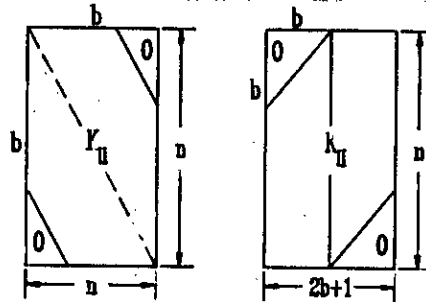
En utilisant la table de connectivité du sous programme PREP, cette subroutine fait l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires  $[K^e]$  et  $[F^e]$  dans la matrice et vecteur globaux  $[K]$  et  $[F]$ .

Vue la nature du problème, les noeuds doivent être correctement numérotés, et les termes non nuls de  $[K]$  sont concentrés dans une bande étroite et adjacente à la diagonale principale, ce qui nous amène à faire des stockages un peu spécifiques dont on cite :

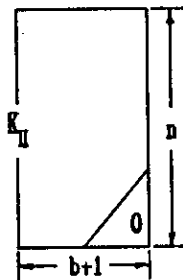
##### 1- Matrice bande

Nous stockons la matrice " redressée " dans une table

rectangulaire  $VK$  de dimensions  $n \cdot (2b + 1)$ .



Pour une matrice symétrique, on stocke  $n(b + 1)$  mots réels



## 2- Matrice à ligne de ciel

C'est la méthode adoptée qui est de loin la plus efficace. Elle consiste à stocker les termes de  $[K]$  par lignes et colonnes de longueurs variables.

Nous choisissons d'utiliser trois tables de stockage :

VKGD : Contient les termes diagonaux .

VKGS : Contient les termes du triangle supérieur de  $[K]$ , organisés par colonnes descendantes "sans les termes diagonaux".

VKGI : Contient les termes du triangle inférieur de  $[K]$ , organisés par lignes de gauche à droite "sans les termes diagonaux".

Pour la matrice

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

$$VKGS = \{K_{12}, K_{23}, K_{14}, K_{24}, K_{34}, K_{35}, 0\}$$

$$VKGI = \{K_{21}, K_{32}, K_{41}, K_{42}, K_{43}, K_{53}, 0\}$$

$$VKGD = \{K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{44}, K_{55}\}$$

Pour notre cas [K] est symétrique, donc VKGI = VKGS

#### IV-2-5 SUBROUTINE RESOL

Après assemblage, on aura le système algébrique suivant :  $[K]\{U\} = \{F\}$

Ce système doit être résolu en  $\{U\}$  après modification de la matrice [K] et du vecteur  $\{F\}$  pour tenir compte des conditions aux limites.

#### IV-2-5-1 INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

##### a - Méthode du terme diagonal dominant

La matrice [K] est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites, puis chaque relation  $u_i = \bar{u}_i$  est introduite en remplaçant :

-  $K_{ii}$  par  $K_{ii} + \alpha$  ;  $\alpha$  étant un nombre très grand par rapport à tous les termes  $K_{ij}$ .

-  $F_i$  par  $\alpha \bar{u}_i$ .

L'équation générale s'écrit alors :

$$\alpha u_i + \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = \alpha \bar{u}_i$$

Elle admet la solution approchée  $u_i = \bar{u}_i$  si  $\alpha u_i \gg \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j$ .

**b - Méthode du terme unité sur la diagonale :**

Elle consiste à modifier pour chaque relation  $u_i = \bar{u}_i$ , le vecteur {F}, puis la matrice [K].

$$F_j = F_j - K_{ij} \bar{u}_i \quad j:1..n; j \neq i$$

$$F_i = \bar{u}_i$$

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad j = 1..n; j \neq i$$

Cette méthode ne pose pas les problèmes numériques de la précédente, par contre, elle est plus complexe à programmer.

**- Méthode de suppression des équations:**

C'est la méthode que nous avons choisie, elle consiste à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés  $u_i$ . Elle a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système.

L'algorithme que nous avons adopté pour la résolution spécifique au stockage par ligne de ciels, est l'algorithme de décomposition de la matrice [K] en deux matrices triangulaires l'une supérieure, l'autre inférieure.

$$[K] = [L].[S]$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ 0 & & \vdots \\ 0 & & \vdots \\ 0 & & \vdots \\ 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{nn} \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un système stocké en ligne de ciel, pour éviter les opérations sur le triangle inférieur de [K] et le stockage des termes correspondants, on adopte l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l}
 S = 2 \dots n \\
 \left[ \begin{array}{l}
 I = I_{0S} + 1, \dots, S - 1 \\
 m = \max [ I_{0i}, I_{0S} ], \dots, I - 1 \\
 \left[ \begin{array}{l}
 K_{is} = K_{is} - K_{im} K_{ms} \\
 c = 0 \\
 m = I_{0S}, \dots, I - 1 \\
 c = c + K_{ms}^2 / K_{mm} \\
 K_{ms} = K_{ms} / K_{mm} \\
 K_{ss} = K_{ss} - c
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$I_{0i} = I - KLD (I+1) + KLD (I)$$

$$I_{0S} = S - KLD (S+1) + KLD (S)$$

où KLD est la table de localisation des débuts de colonnes. Après décomposition, il faut résoudre les deux systèmes triangulaires.

Etape 1 : Système triangulaire inférieur

$$I = 2, \dots, n$$

$$F_i = F_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} F_j$$

Etape 2 : Système triangulaire supérieur

$$F_n = K_{nn}^{-1} F_n$$

$$I = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$F_i = K_{ii}^{-1} (F_i - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} F_j)$$

{ F } contient alors la solution { U } du système .

#### IV-2-6 SUBROUTINE COUNT

Elle utilise un programme pour le calcul de la matrice [H] qui est déjà défini .

Une fois les déplacements sont déterminés en utilisant la matrice [H]. Ce sous-programme permet de trouver les contraintes pour chaque élément.

#### IV-2-7 SUBROUTINE OUTPUT

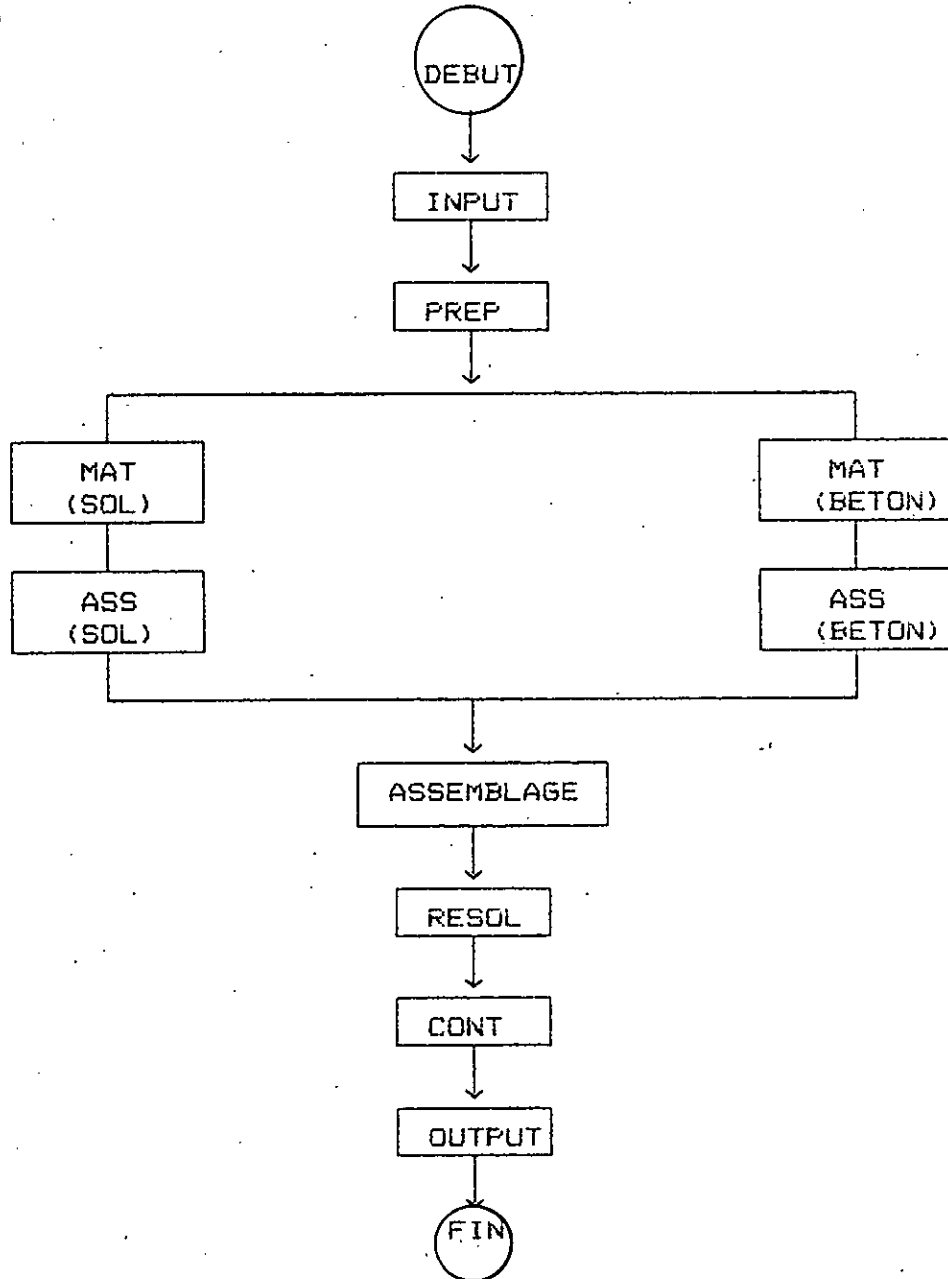
Il imprime suivant une bonne présentation:

- Les déplacements nodaux .
- Les contraintes de l'élément



IV-3 PROGRAMME M. E. F. F. R

Ce programme a une structure identique au premier, il est donc constitué des mêmes sous-routines utilisées dans le programme M.E.F.F.F, plus une autre qui lui est propre et qui sera commentée ci-dessous.



IV-3-1 SUBROUTINE INPUT

Elle fait entrer les caractéristiques des deux milieux avec un format libre.

IV-3-2 SUBROUTINE MAT ET ASS

Identique à celle de M.E.F.F.F

IV-3-3 SUBROUTINE ASSEMBLAGE

c'est la spécificité de ce programme, elle forme une matrice globale qui tient compte des deux milieux.

IV-3-4 SUBROUTINE RESOL

Identique à celle de M.E.F.F.F.

IV-3-5 SUBROUTINE CONT

Identique à celle de M.E.F.F.F.

IV-3-6 SUBROUTINE OUTPUT

Elle affiche les déplacements et les contraintes pour les deux milieux avec un format lisible.

## **CHAPITRE V**

# **LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES**

## V-1 INTRODUCTION

Les solutions analytiques sont très délicates à obtenir. Ainsi les ingénieurs ont-ils cherché des méthodes purement numériques : différences finies, puis éléments finis. Leur inconvénient est de devoir traiter dans de nombreux cas, des problèmes à trois dimensions, ce qui exige souvent de grandes capacités de mémoire des ordinateurs.

La méthode des équations intégrales aux frontières permet de réduire ces problèmes à deux dimensions. Son principe consiste à transformer les équations aux dérivées partielles dans le domaine et des conditions aux limites sur la frontière en équations intégrales liant des fonctions connues et inconnues sur la frontière du domaine exclusivement.

Ainsi dans ce chapitre, nous aurons à présenter cette méthode appliquée aux problèmes bidimensionnels, en se basant sur la méthode des résidus pondérés pour formuler les équations intégrales.

## V-2 HISTORIQUE

La B.E.M a été étudiée par beaucoup de mathématiciens: FREDHOLM (1903), SMIRNOV (1929), VOLTERA (1959) et MIKHLIN (1957 et 1967).

FREDHOLM (1903) a étudié l'application des intégrales pour la théorie des potentiels, il a démontré qu'il peut y avoir l'existence de solutions aux équations intégrales en se basant sur une procédure de discrétisation.

En 1929, KOLLOGG a exprimé les équations intégrales pour un problème de champ potentiel en termes d'équations intégrales aux frontières. Ensuite BETTI et SOMIGLIANA, en se basant sur l'analogie qui existe entre les théories de potentiel et d'élasticité pour l'analyse des problèmes d'élastostatique par le biais d'équations intégrales aux frontières.

En 1963, JAWSON et SYMM ont présenté une technique numérique pour la résolution d'équations intégrales aux frontières. Ils ont pu déterminer des solutions pour des problèmes bidimensionnels de type NEWMANN et DIRICHLET.

En ce qui concerne notre projet, c'est à dire les problèmes de sol, ils ont été faits par CROUCH (1976) en étudiant les excavations souterraines. LACHAT et WATSON (1977) ont traité les problèmes de mines, et WARDLE (1977) a

appliqué la B.E.M pour les multicouches.

En 1975, WOOD a établi une approche par éléments de frontière pour la prédiction des tassements de structures et l'analyse de l'interaction sol-structure.

RIZZO (1967) a développé une approche par équations intégrales aux frontières qui traite des problèmes classiques d'élastostatique.

CRUSE (1969) a étendu cette approche pour la résolution des problèmes tridimensionnels, puis en 1973, il a appliqué la méthode pour l'analyse de contraintes en tridimensionnel.

Plusieurs algorithmes récemment développées sur la méthode des éléments de frontière, sont décrits par CRUSE (1975), LACHAT (1975), RIZZO (1979), SHAW (1969), WATSON (1976), BREBBIA (1978), et bien d'autres.

### V-3 FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE

#### V-3-1 IDENTITE DE SOMIGLIANA

Soit un domaine  $\Omega$  ayant une frontière  $\Gamma$  divisée en deux parties  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telles qu'on ait :

- des conditions sur les déplacements dites essentielles :

$$U = \bar{U} \text{ sur } \Gamma_1$$

- des conditions sur les tractions dites naturelles :

$$P = \bar{P} \text{ sur } \Gamma_2$$

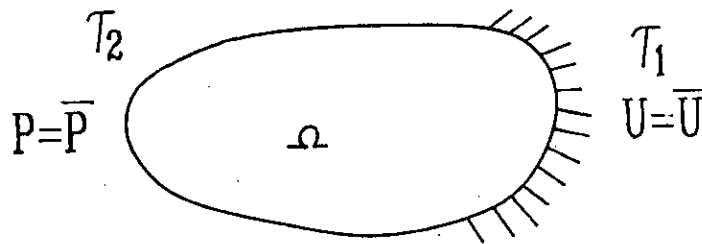


Fig. V-1

L'équilibre de ce domaine est réalisé par une distribution de contraintes qui satisfait en tout point la relation suivante :

$$\sigma_{kj,j} + f_k = 0 \quad (V-1)$$

La détermination d'une telle distribution se fait généralement de façon approchée à l'aide de techniques numériques, par conséquent le terme de gauche de l'équation (V-1) n'est pas nul, mais égal à un résidu que nous minimiserons en utilisant une technique de résidus pondérés. L'écriture de l'équation (V-1) sous forme intégrale donne :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + f_k) U_k^* d\Omega = 0 \quad (V-2)$$

En utilisant l'intégration par partie, l'équation peut se mettre sous la forme :(V-3)

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + f_k) U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma$$

$U_k^*$  et  $P_k^*$  sont respectivement les déplacements et les tractions

correspondants au champ de pondération.

En intégrant par partie le membre gauche de l'équation (V-3) on obtient :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{kj} n_j \cdot U_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kj} U_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} f_k U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (P_k - \bar{P}_k) U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (V-4)$$

Sachant que  $P_k = \sigma_{kj} n_j$ , on aura donc

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} U_{k,j}^* d\Omega - \int_{\Omega} f_k U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (V-5)$$

La symétrie de tenseur  $\sigma_{kj}$  nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} U_{k,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kj} e_{kj}^* d\Omega \quad (V-6)$$

L'équation (V-5) devient :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} e_{kj}^* d\Omega - \int_{\Omega} f_k U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (V-7)$$

Grâce à la symétrie du tenseur  $C_{ijkl}$  liant les contraintes et les déformations pour un milieu élastique linéaire, nous aurons:



$$\int_{\Omega} \sigma_{kj}^* \varepsilon_{kj} d\Omega - \int_{\Omega} f_k U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (V-8)$$

Pour éliminer toute dérivée de U (ie  $\varepsilon_{kj}$ ), on intègre par partie le terme de gauche de l'équation (V-8), et on obtient:

$$\int_{\Omega} f_k U_k^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* U_k d\Omega = - \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k P_k^* d\Gamma \quad (V-9)$$

D'autre part la solution fondamentale de KELVIN vérifie l'équation d'équilibre suivante :

$$\sigma_{lj,j}^* + \Delta_l^i = 0$$

où  $\Delta_l^i$  est la fonction Delta de Dirac, elle représente une impulsion unitaire appliquée au point i suivant la direction "l". Les propriétés de la fonction de Dirac sont :

$$1 - \Delta_l^i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_i \\ \infty & \text{si } x = x_i \end{cases}$$

$$2 - \int_{\Omega} f(x) \Delta_l^i d\Omega = f(x_i)$$

Si on suppose que les champs de pondération  $U^*$  et  $P^*$

sont ceux correspondant à la solution fondamentale, l'équation (V-9) deviendra pour une force unitaire appliquée dans la direction l : (V-10)

$$\int_{\Omega} f_k U_{lk}^* d\Omega - \int_{\Omega} \Delta_l^i U_k = \int_{\Gamma} P_{lk}^* U_k d\Gamma - \int_{\Gamma} P_k U_{lk}^* d\Gamma$$

et en utilisant une propriété de la fonction de Dirac, nous aurons :

$$U_l^i + \int_{\Gamma} P_{lk}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k U_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} f_k U_{lk}^* d\Omega \quad (V-11)$$

où  $P_{lk}^*$  et  $U_{lk}^*$  sont les tractions et déplacements suivant la direction k due à une source unitaire agissant suivant la direction l.

L'équation (V-11) est appelée identité de Somigliana.

### V-3-2 DETERMINATION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE

Kelvin, en 1848 a mis au point la résolution des équations d'élasticité d'un problème tridimensionnel pour un milieu infini soumis à une force concentrée appliquée en un point de celui-ci. Cette solution est dite "fondamentale", et représente un des résultats important de la théorie de l'élasticité.

Soit un milieu  $\Omega$  isotrope, élastique, linéaire, et de dimensions infinies, sollicité par une force unitaire dans la direction l concentrée en un point i et produisant un champ

de contraintes  $\sigma_{lj}^*$  qui doit satisfaire pour l'équilibre du milieu l'équation suivante :

$$\sigma_{lj,j}^* + \Delta_l^i = 0 \quad (V-12)$$

La relation contraintes déformations pour ce cas de chargement est :

$$\sigma_{lj}^* = \lambda \varepsilon_{pp}^* \delta_{lj} + 2 G \varepsilon_{lj}^* \quad (V-13)$$

En dérivant les membres de cette équation, nous obtenons :

$$\sigma_{lj,j}^* = \lambda \varepsilon_{pp,l}^* + 2 G \varepsilon_{lj,j}^* \quad (V-14)$$

En utilisant l'équation (V-12) et sachant que :

$$\varepsilon_{lj}^* = \frac{1}{2} (U_{l,j}^* + U_{j,l}^*)$$

Nous aboutissons à l'équation de Navier :

$$U_{j,l,j}^* (\lambda + G) + G U_{l,j,j}^* + \Delta_l^i = 0 \quad (V-13)$$

Une méthode pratique pour la résolution de l'équation (V-13), est l'utilisation de la représentation des déplacements à l'aide du vecteur de Galerkin ie :

$$U_j = \frac{1}{2G} \left[ 2 (1-\nu) F_{j,mm} - F_{m,mj} \right] \quad (V-14)$$

En substituant l'équation (V-14) dans (V-13), nous obtiendrons :

$$F_{l,rrss} + \frac{1}{(1-\nu)} \delta_l^i = 0 \quad (V-15)$$

La résolution de l'équation (V-15) s'effectue en deux étapes

La première est la résolution de l'équation :

$$G_{l,ss} = - \frac{1}{(1-\nu)} \delta_l^i \quad (V-16)$$

et la seconde est la résolution de l'équation :

$$F_{l,ss} = G_l \quad (V-17)$$

Déterminons la solution homogène de l'équation (V-16) en utilisant les coordonnées polaires :

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \quad (V-18)$$

La solution de l'équation (V-18) sera sous la forme :

$$G_l = c. \ln r$$

Pour déterminer la constante c, nous intégrons les termes d'équations (V-16) sur tout le domaine  $\Omega$ , nous aurons d'une part :

$$\int_{\Omega} G_{l,ss} d\Omega = \int_{\Omega} - \frac{1}{(1-\nu)} \delta_l^i d\Omega = - \frac{1}{(1-\nu)} \quad (V-19)$$

et d'autre part, l'intégrale  $\int_{\Omega} G_{l,ss} d\Omega$  représente une singularité au voisinage de  $r=0$ , pour palier à ce problème, nous procéderons comme suit :

$$\int_{\Omega} G_{l,ss} d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega - \Omega\varepsilon} G_{l,ss} d\Omega + \int_{\Omega\varepsilon} G_{l,ss} d\Omega \right] \quad (V-20)$$

$\Omega\varepsilon$  est un disque de rayon  $\varepsilon$  qui tend vers 0

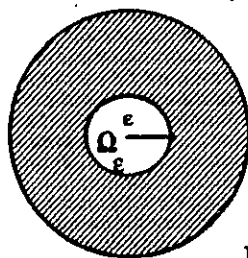


Fig v-2

$$\text{Nous avons : } \int_{\Omega - \Omega\varepsilon} G_{l,ss} d\Omega = 0 \quad (V-21)$$

La méthode des équations intégrales aux frontières

et à partir du théorème de Gauss nous aurons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} G_{l,ss} d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G_l}{\partial n} d\Gamma \quad (V-22)$$

Mais pour le disque  $\Omega_\varepsilon$ ,  $r = n$ , nous aurons donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} G_{l,ss} d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{c}{r} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} c \cdot d\theta$$

$$\text{Et nous obtenons : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} G_{l,ss} d\Omega = 2\pi c \quad (V-23)$$

$$\text{Donc : } \int_{\Omega} G_{l,ss} d\Omega = 2\pi c \quad (V-24)$$

De l'équation (V-19) et l'équation (V-24), nous pouvons

$$\text{écrire : } c = \frac{-1}{2\pi(1-\nu)} \text{ et } G_l = \frac{-1}{2\pi(1-\nu)} \ln r$$

La deuxième étape est de résoudre l'équation (V-17) ie :

$$F_{l,ss} = G_l$$

En utilisant l'équation (V-17) en coordonnées polaires, nous aurons :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \frac{-\ln r}{2\pi(1-\nu)} \quad (V-25)$$

La solution de cette dernière est :

$$F_l(r) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \cdot r^2 (\ln r - 1) \quad (V-26)$$

$$\text{Posons } F = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \cdot r^2 (\ln r - 1)$$

Pour une impulsion dans la direction  $l$ , les composantes du vecteur de Galerkin sont données par :

$$F_{lk} = F \cdot \delta_{lk} \quad (V-27)$$

La méthode des équations intégrales aux frontières

et les composantes de déplacements sont :

$$U_{lj}^* = \frac{1}{2G} \left[ 2(1-\nu) F_{jl,mm} - F_{ml,mj} \right]$$

En utilisant l'équation (V-27), nous obtiendrons :

$$U_{lj}^* = \frac{1}{2G} \left[ 2(1-\nu) F_{,mm} \cdot \delta_{lj} - F_{,lj} \right] \quad (V-28)$$

$$\text{Nous trouvons : } F_{,mm} = \frac{-\ln r}{2\pi(1-\nu)} \quad (V-29)$$

$$\text{et } F_{,lj} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \cdot (2r_{,l} \cdot r_{,j} + \delta_{lj}(2 \ln r - 1)) \quad (V-30)$$

et nous aurons donc :

$$U_{lj}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \cdot \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lj} + r_{,l} \cdot r_{,j} \right] \quad (V-31)$$

Pour la détermination des tractions, nous utilisons l'équation (V-13) ie :

$$\sigma_{kj}^* = \lambda \varepsilon_{pp}^* \delta_{kj} + 2G \varepsilon_{kj}^* \quad (V-13)$$

$$\text{Sachant que : } \sigma_{kj}^* = \delta_{lkj}^* \cdot e_l \quad (V-32)$$

$$\text{Avec } \delta_{lkj}^* = \lambda \delta_{kj} + G (U_{lm,m}^* + U_{lk,j}^* + U_{lj,k}^*) \quad (V-33)$$

Les tractions sont obtenues par la relation suivante :

$$P_{lk}^* = \delta_{lkj}^* \cdot n_j$$

Et nous trouverons :

$$P_{lk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{lk} + 2 r_{,l} r_{,k} \right] + (1-2\nu) (n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad (V-34)$$

#### V-4 ETABLISSEMENT DE L'EQUATION INTEGRALE AUX FRONTIERES

L'équation (V-11) représente l'identité de Somigliana. Elle relie le déplacement d'un point interne aux déplacements et tractions des points situés sur la frontière, et par conséquent nous aurons comme première étape à déterminer les valeurs des déplacements et tractions sur la frontière, pour pouvoir les déterminer par la suite aux points internes.

L'identité de Somigliana sera écrite pour un point source "i" pris sur la frontière, mais cette démarche provoquera une singularité au voisinage de ce point. Pour pallier à ce problème, nous supposerons le domaine  $\Omega$  augmenté d'un demi cercle de centre i et de rayon  $\varepsilon$ , que nous ferons tendre vers 0. Nous aurons :(V-35)

$$\int_{\Gamma} U_{lk}^* P_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U_{lk}^* P_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{lk}^* P_k d\Gamma \right. \right.$$

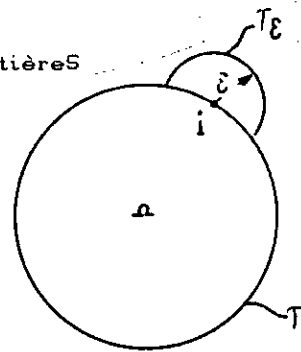


Fig. V-3

Nous trouvons que :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} U_{lk}^* P_k d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} U_{lk}^* P_k d\Gamma$

et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma} U_{lk}^* P_k \right\} d\Gamma = 0$

Nous aurons aussi : (V-36)

$$\int_{\Gamma} P_{lk}^* U_k d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} P_{lk}^* U_k^* d\Gamma \right\} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} P_{lk}^* U_k d\Gamma \right\}$$

Nous trouvons que :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} P_{lk}^* U_k d\Gamma \right\} = I_{lk}$

Quand le point  $i$  se trouve sur une frontière lisse, nous aurons :  $I_{lk} = -\frac{1}{2} \delta_{lk}$

L'équation intégrale aux frontières est donc : (V-37)

$$C_{lk}^i \cdot U_k^i + \int_{\Gamma} P_{lk}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk}^* P_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{lk}^* f_k d\Omega$$

où les intégrales sont au sens des valeurs principales de Cauchy et  $C_{lk}^i = \delta_{lk} + I_{lk}$

Nous aurons donc pour une frontière lisse :  $C_{lk}^i = \frac{1}{2} \delta_{lk}$

Nous aurons dans une seconde étape à déterminer les valeurs des déplacements et des contraintes aux points internes au domaine. Pour ce faire, nous utiliserons l'identité de Somigliana pour obtenir les déplacements. Quant aux contraintes nous utiliserons l'équation suivante :



$$\alpha_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} P_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} U_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} f_k d\Omega \quad (V-38)$$

Où les composantes de tenseurs  $D_{kij}$  et  $S_{kij}$  sont :

$$D_{kij} = \frac{1}{r} \left\{ (1-2\nu) \left[ \delta_{ki} \cdot r_{,j} + \delta_{kj} \cdot r_{,i} - \delta_{ij} \cdot r_{,k} \right] + 2r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \right\} \quad (V-39)$$

$$S_{kij} = \frac{2G}{r^2} \left\{ \left( 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} \cdot r_{,k} + \nu (\delta_{ik} \cdot r_{,j} + \delta_{jk} \cdot r_{,i}) - 4r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right] + 2\nu (n_i \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} + n_j \cdot r_{,i} \cdot r_{,k}) + (1-2\nu) (2n_k \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} + n_j \cdot \delta_{ik} + n_i \cdot \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \cdot \delta_{ij} \right) \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \right\} \quad (V-40)$$

## V-5 FORMULATION DE L'ÉLÉMENT DE FRONTIÈRE

Dans le but d'une résolution numérique de l'équation intégrale obtenue précédemment, la frontière sera discrétisée en une série d'éléments sur lesquels les variations des déplacements et des tractions sont définies en fonction de leurs valeurs en un certain nombre de points nodaux.

En appliquant la discrétisation de l'équation (V-37) pour tous les noeuds de la frontière, nous obtenons un système d'équations linéaires, une fois les conditions aux limites introduites, celui-ci pourrait être résolu, et nous aurons ainsi une solution approchée des inconnues à la frontière.

Il est donc pratique d'écrire l'équation (V-37) sous forme matricielle ie : (V-38)

$$[C^i]\{U^i\} + \int_{\Gamma} [P^*]\{U\} d\Gamma = \int_{\Gamma} [U^*]\{P\} d\Gamma + \int_{\Omega} [U^*]\{f\} d\Omega$$

où :  $\{U^i\}$  est le vecteur déplacement au noeud i.

$[P^*]$ ,  $[U^*]$  et  $[C^i]$  sont des matrices 2x2 dans le cas bidimensionnel.

$\{U\}$  et  $\{P\}$  peuvent être approximés sur chaque élément en terme de leur valeurs nodales :

$$\{U\} = [\Phi]\{U^j\}$$

$$\{P\} = [\Phi]\{P^j\}$$

$\{U^j\}$  et  $\{P^j\}$  : sont les vecteurs déplacement et tractions des noeuds de l'élément j .

[ $\Phi$ ] : est une matrice contenant les fonctions de formes, ayant un ordre dépendant du type d'élément utilisé.

#### V-5-1 ELEMENT CONSTANT

Pour un tel élément, le noeud se trouve en son milieu. Les déplacements et les tractions sont supposées constants sur toute sa longueur et égales à leurs valeurs au noeud.

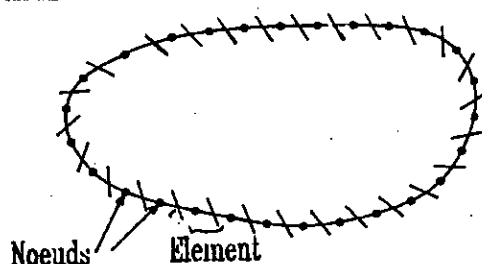


Fig. V-4

Nous avons donc pour un élément  $j$  :

$$\begin{cases} P = P_j \\ U = U_j \end{cases}$$

#### V-5-2 ELEMENT LINEAIRE

Les noeuds se situent aux extrémités de l'élément, les variations de  $U$  et de  $P$  le long de celui-ci sont supposées linéaires, et sont données pour un élément  $j$  ayant comme

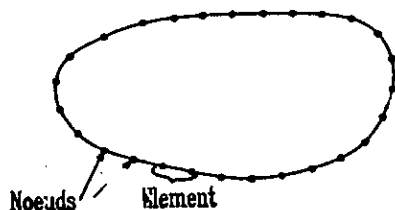


Fig. V-5

noeuds "i" et "i+1" par :

$$U^j = \begin{Bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \\ U_1^{i+1} \\ U_2^{i+1} \end{Bmatrix} = [\Phi] \{ U^j \}$$

$$P^j = \begin{Bmatrix} P_1^j \\ P_2^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^i \\ P_2^i \\ P_1^{i+1} \\ P_2^{i+1} \end{Bmatrix} = [\Phi] \{ P^j \}$$

avec :  $\Phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$

$\Phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$

et  $\xi = \frac{x}{l/2}$

l: longueur de l'élément

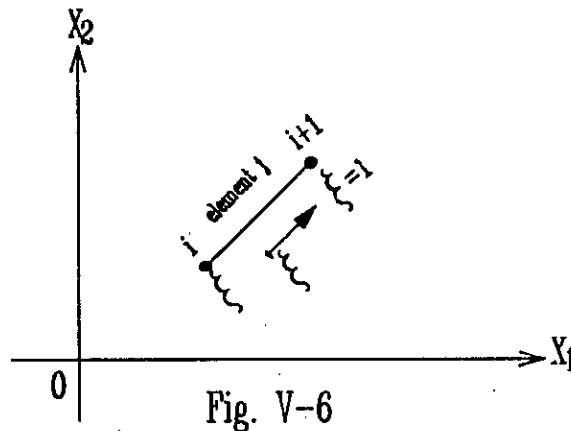


Fig. V-6

En supposant que la frontière est subdivisée en N éléments , et en négligeant les forces de volumes , l'équation (V-38) pourrait s'écrire sous la forme suivante :(V-39)

$$[C^i]\{U^i\} + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} [P^*][\Phi] d\Gamma \cdot \{U_j\} \right) = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} [U^*][\Phi] d\Gamma \cdot \{P_j\} \right)$$

Les intégrations seront faites sur un élément de référence dans un repère de coordonnée unidimensionnelle  $\xi$ .

Ce qui impliquera l'utilisation du jacobien de la transformation du système de coordonnées ie:  $d\Gamma = |J| d\xi$

$$\text{ou } |J| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2}$$

Sachant que :  $\{x\} = [\Phi] \{x^j\}$

où  $\{x^j\}$  est le vecteur de coordonnées nodales dans le repère  $(0, x_1, x_2)$ .

Nous aurons :  $J = 1/2$  pour l'élément linéaire.

En appliquant maintenant la quadrature de Gauss, l'équation (V-39) deviendra :

$$[C^i]\{U^i\} + \sum_{j=1}^N \left( \sum_{s=1}^m |J| \cdot w_s [P^*]_s [\Phi]_s \right) \{U_j\} = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{s=1}^m |J| \cdot w_s [U^*]_s [\Phi]_s \right) \{P_j\} \quad (V-40)$$

$m$  étant le nombre de points d'intégrations

$w_s$  est le coefficient de pondération correspondant au point d'intégration "s"

$[P^*]_s, [\Phi]_s, [U^*]_s$  sont les valeurs de ces fonctions aux points d'intégration.

L'équation (V-40) peut se mettre sous une forme plus compacte comme suit (V-41) :

$$[C^i] \{U^i\} + \sum_{j=1}^N [\hat{H}_{ij}] \{U_j\} = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \{P_j\} \quad (V-41)$$

Soit la matrice  $[H_{ij}]$  telle que :

$$[H_{ij}] = [\hat{H}_{ij}] \quad \text{pour } i \neq j$$

$$[H_{ij}] = [\hat{H}_{ij}] + [C^i] \quad \text{pour } i=j$$

L'équation (V-41) devient alors :

$$\sum_{j=1}^N [\hat{H}_{ij}] \{U_j\} = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \{P_j\} \quad (V-42)$$

En écrivant l'équation (V-42) pour chaque noeud "i" de la frontière, nous obtenons un système d'équations linéaires d'ordre  $2N \times 2N$  :

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \{P\}$$

$\{U\}$  et  $\{P\}$  représentent les valeurs des déplacements et tractions de tous les noeuds de la frontière. En introduisant les conditions aux limites, et après un réarrangement des colonnes de  $[G]$  et  $[H]$  de façon à avoir toutes les inconnues dans le membre de gauche, nous aboutirons à un système d'équations classique :  $[A] \{X\} = \{B\}$  (V-43)

Une fois ce système résolu, nous aurons toutes les valeurs des déplacements et tractions aux noeuds de la frontière.

En ce qui concerne les points internes, les

La méthode des équations intégrales aux frontières.

déplacements peuvent être déterminés à partir de l'identité de Somigliana écrite sous forme discrétisée :

$$U^i = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \langle P_j \rangle + \sum_{j=1}^N [\hat{H}_{ij}] \langle U_j \rangle$$

Les contraintes en un point interne sont obtenues en discrétisant l'équation (V-38)

#### V-6 DETERMINATION DES ELEMENTS DIAGONAUX DE LA MATRICE H

Il est à noter que des difficultés apparaissent quand nous essayons de calculer les termes  $H_{ii}$  de manière explicite, à cause de la singularité de la solution fondamentale au voisinage du point source.

Supposons un mouvement de corps rigide, pour un tel cas le vecteur traction devrait être nul et nous aurons:

$$[H] \langle U \rangle = 0 \quad (V-44)$$

Où  $U$  est vecteur de déplacements unitaires .

L'équation (V-44), nous permet d'obtenir les  $H_{ii}$  par :

$$H_{ii} = \sum_{j=1}^N H_{ij} \quad \text{avec } i \neq j$$

Ce qui nous permettra de calculer les éléments diagonaux de  $H$ , sans avoir recours à un calcul d'intégrale, mais ceci ne peut être fait qu'une fois les éléments extra-diagonaux calculés.

La relation précédente n'est valable que pour un domaine de dimensions finies, mais si le problème concerne un

milieu infini (cf fig V-7), celle-ci doit être modifiée.

Appliquons encore une fois le mouvement de corps rigide à un domaine infini, nous aurons à calculer :

$$\int_{\Gamma_{\infty}} P^* U d\Gamma = \left\{ \int_{\Gamma_{\infty}} P^* d\Gamma \right\} U$$

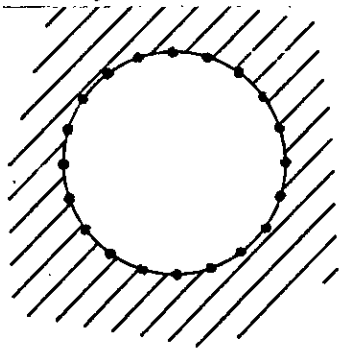


Fig. V-7

Nous trouvons que :  $\int_{\Gamma_{\infty}} P^* U d\Gamma = - I$

où I est la matrice identité 2x2.

Nous aurons donc les termes diagonaux de la matrice H de la relation suivante :

$$H_{ii} = I - \sum_{j=1}^N H_{ij} \quad \text{avec } (i \neq j)$$

#### V-7 L'EQUATION INTEGRALE POUR UN MILIEU A PLUSIEURS REGIONS

Jusqu'ici nous avons vu la formulation de l'équation intégrale pour un milieu homogène, linéaire élastique, et isotrope. Dans beaucoup de problèmes le milieu n'est pas homogène en entier, mais constitué de plusieurs régions, chacune d'elles supposée homogène. Ces problèmes peuvent être étudiés par la formulation précédente, en discrétisant toutes les frontières même celles séparant une région d'une autre. Les équations formulées pour chaque zone homogène ajoutées



aux conditions de continuité sur les frontières internes entre zones différentes, produit un système d'équations qui peut être résolu une fois les conditions aux limites sur les frontières extérieures prises en compte.

Considérons le problème de la figure (V-8), représentant un milieu constitué de deux régions  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

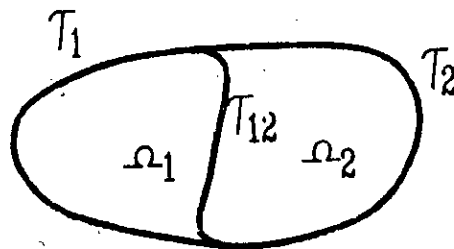


Fig. V-8

Le système d'équations obtenu par  $\Omega_1$  est :

$$[H^1 \ H^{12}] \begin{Bmatrix} U^1 \\ U^{12} \end{Bmatrix} = [G^1 \ G^{11}] \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^{12} \end{Bmatrix} \quad (V-45)$$

et pour  $\Omega_2$  :

$$[H^2 \ H^{21}] \begin{Bmatrix} U^2 \\ U^{21} \end{Bmatrix} = [G^2 \ G^{21}] \begin{Bmatrix} P^2 \\ P^{21} \end{Bmatrix} \quad (V-46)$$

L'équilibre des tractions et la compatibilité des déplacements sur la frontière  $\Gamma_{12}$  entre les deux régions, impose les équations suivantes :

$$U^{12} = U^{21}$$

$$P^{12} = -P^{21}$$

L'équation (V-46) devient :

$$[H^2 \ H^{21}] \begin{Bmatrix} U^2 \\ U^{21} \end{Bmatrix} = [G^2 - G^{21}] \begin{Bmatrix} P^2 \\ P^{21} \end{Bmatrix} \quad (V-47)$$

Les équations (V-45) et (V-47) peuvent être arrangées de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^{12} & -G^{12} & 0 \\ 0 & H^{21} & H^2 & G^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U^{12} \\ U^2 \\ P^{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{Bmatrix}$$

Ce système pourra être résolu, quand nous introduirons les conditions aux limites sur les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$

#### V-8 PROBLEME DE COIN

Pour les problèmes d'élasticité,  $U$  a une valeur unique en un point quelconque, alors que la force  $P$  qui est une dérivée par rapport à la normale du point considéré peut avoir plusieurs valeurs .

L'équation intégrale pour un problème d'élasticité :

$$H \cdot U = G \cdot P \quad \text{avec} \quad [H] : 2N \times 2N \text{ (pour un problème 2D)}$$

$$[G] : 2N \times 2(N+c) \text{ (c: nombre de coins)}$$

Pour un problème d'élasticité où les conditions aux frontières sont de type NEWMANN (fig a) ou ROBIN (fig b), la résolution n'est pas très difficile. Tandis que les conditions de DIRICHLET, il y'a uniquement les déplacements qui sont prescrits (fig c), il est impossible de résoudre

La méthode des équations intégrales aux frontières

l'équation ; il existe plusieurs alternatives pour résoudre ce problème.

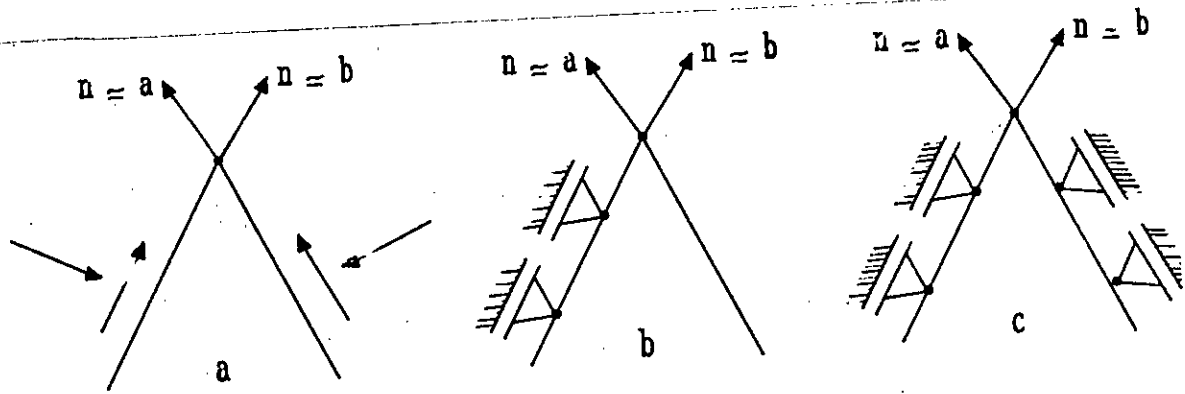


Fig. V-9

#### V-8-1 NOEUDS MULTIPLES INDEPENDANTS

Pour les problèmes en 2D RECARDELLA a introduit le concept de double noeud qui va engendrer l'écriture d'équations supplémentaires pour les noeuds rigides (fig

V-10)

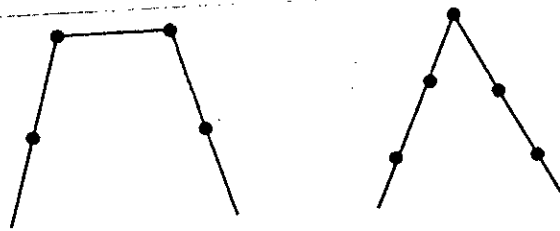


Fig. IV-1

On aura une matrice  $(2N+2)(2N+2)$  pour un noeud ajouté, pour  $n$  noeuds ajoutés, on aura une matrice  $2(N+n)(N+n)$ .

Ensuite BREBBIA a suggéré de relier les deux nœuds par un élément de faible longueur, et traiter le problème comme

S'il n'y avait pas de problème de coin.

#### V-8-2 ELEMENT DISCONTINU

La procédure consiste à déplacer à l'intérieur de l'élément les noeuds se rencontrant aux coins ou aux bords (cf fig V-10). Elle a l'avantage d'être simple et de représenter au mieux le problème de hautes concentration de contraintes.

#### V-8-3 APPROCHE DE MUSTOE

Elle consiste à interpoler polynomialement le champ de déplacements à l'intérieur d'une région triangulaire 2D, contenant les deux éléments de frontière formant le coin pour un point à l'intérieur du triangle.

Le déplacement est  $U = M U^n$

M : fonction de forme

$U^n$  : déplacements nodaux sur la frontière

## **CHAPITRE VI**

### **PRESENTATION DES PROGRAMMES**

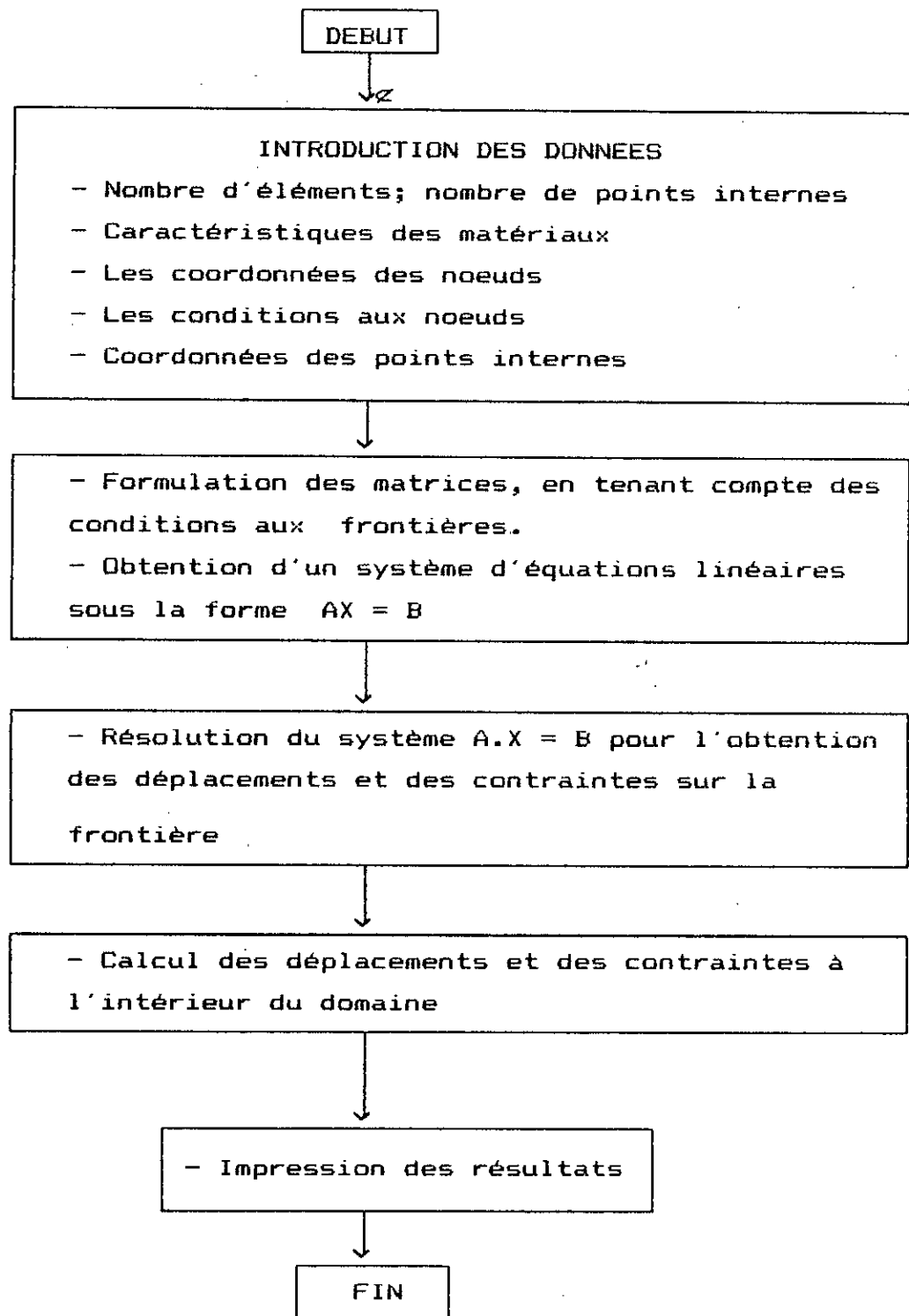
**B.E.M**

## VI-1 INTRODUCTION

Les solutions analytiques des équations intégrales relatives aux problèmes de l'élasticité, sont difficiles à obtenir pour des géométries et des conditions aux limites complexes. Pour traiter ces problèmes, on a attendu le développement de l'informatique et l'essor des techniques numériques.

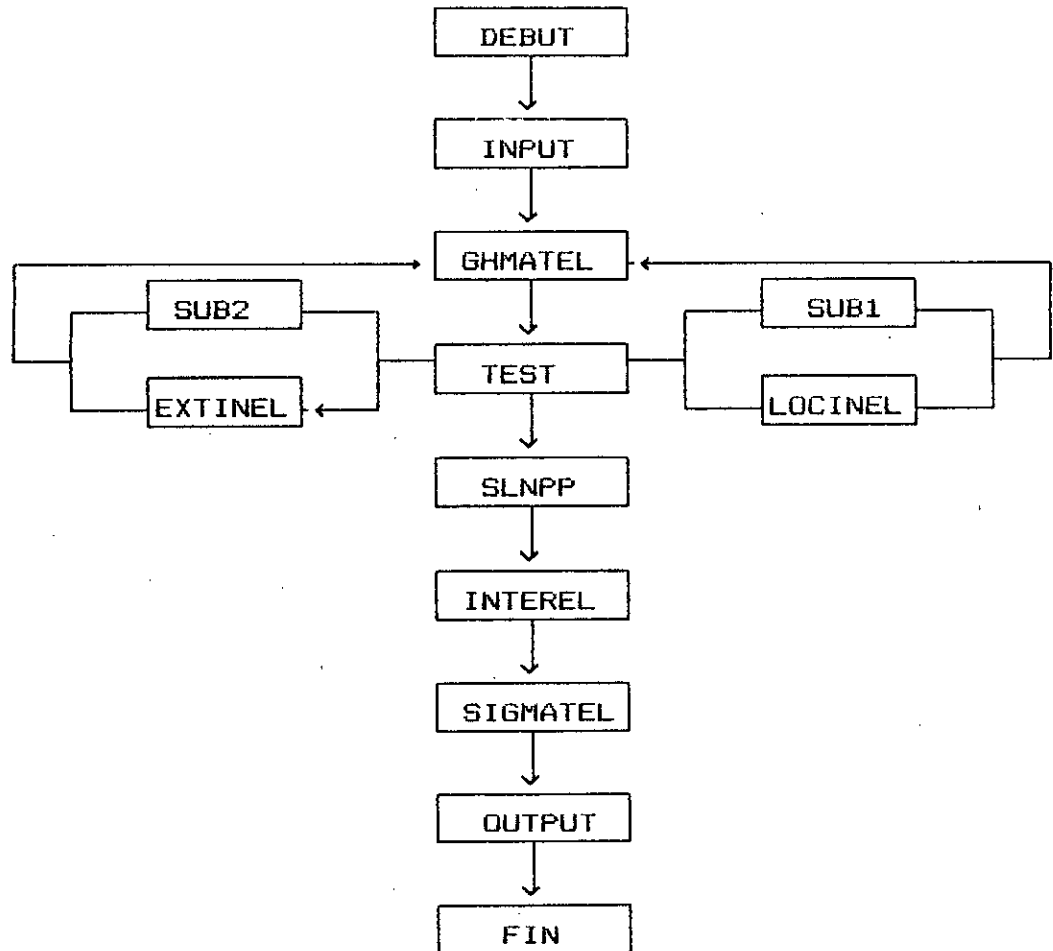
Nous présenterons dans ce chapitre un programme ELLINBE, qui traite les problèmes d'élasticité bidimensionnelle qui utilise l'élément linéaire. Ce programme va nous permettre d'établir un autre utilisant les subrégions (deux milieux différents).

LES GRANDES ETAPES POUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME PAR LA B.E.M SONT :



## VI-2 STRUCTURE DU PROGRAMME ELLINBE

Sa structure est faite comme suit :



## VI-3 PRESENTATION DU PROGRAMME ELLINBE

Ce programme résoud les problèmes de l'élasticité bidimensionnelle sans force de volume. Il peut aussi résoudre les problèmes de contrainte plane ou de déformation plane. Il est constitué de dix (10) sous-routines avec des blocs



"COMMON" blancs et étiquettes. Les sous programmes sont:

#### VI-3-1 SUBROUTINE INPUT

Ce sous programme lit toutes les informations pour le bon déroulement du programme:

- Titre du problème
- Nombre d'éléments , nombre de points intérieurs, le module de glissement et le coefficient de POISSON.
- Coordonnées de points aux frontières.
- coordonnées des points internes.

#### VI-3-2 SUBROUTINE GHMATEL

Cette subroutine compte les systèmes de matrices H et G en faisant appel aux sous programmes EXTINEL, LOCINEL, SUB1, et SUB2.

#### VI-3-3 SUBROUTINE EXTINEL

Cette subroutine calcule les matrices élémentaires  $G_{ij}$  et  $H_{ij}$  pour  $(i \neq j)$ . En utilisant l'intégration numérique, on montre que  $G_{ij}$  est une matrice symétrique, mais  $H_{ij}$  est non symétrique. Les valeurs des coefficients sont calculés en utilisant la quadrature de GAUSS.

#### VI-3-4 SUBROUTINE LOCINEL

Dans ce sous programme, il va y avoir le calcul de la matrice élémentaire  $G_{ij}$  quand le point où il y'a singularité

appartient à l'élément où l'intégration est effectuée.

#### VI-3-5 SUBROUTINE SUB1

Elle calcule analytiquement les termes de la bande diagonale de la matrice [H] :  $H(i, i+1)$ .

#### V-3-6 SUBROUTINE SUB2

Elle calcule analytiquement les termes de la bande diagonale de la matrice [H] :  $H(i, i-1)$

#### V-3-7 SUBROUTINE SLNPD

La méthode de résolution adoptée est la méthode de GAUSS avec interchange de ligne lorsqu'on rencontre un zéro sur la diagonale.

Cette méthode est appliquée en deux étapes :

##### - La triangularisation :

Selon l'algorithme suivant

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left[ a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right] a_{kj}^{(k-1)}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \left[ a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right] b_k^{(k-1)}$$

Avec  $i = k+1, n$

$j = k+1, n$

$k = 1, n+1$

##### - Résolution

Elle s'effectue pour le système triangulaire supérieur

obtenu de la triangularisation selon l'algorithme suivant :

$$X_n = b_n / a_{nn}$$
$$X_i = \left[ b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j \right] / a_{ii} \quad \text{avec } i = n-1, \dots, 1$$

Après le résultat sera stocké dans le vecteur DFL

#### VI-3-8 SUBROUTINE INTEREL

Une fois les déplacements et les contraintes pour la frontière calculés, ce sous programme va réarranger les déplacements dans un vecteur et les contraintes dans un autre vecteur qu'elle va utiliser pour le calcul des déplacements et contraintes à l'intérieur du domaine.

#### VI-3-9 SUBROUTINE SIGMAEL

Cette subroutine est similaire à celle d'EXTINEL sauf qu'au lieu de calculer  $U^*$  et  $P^*$ , nous calculerons D et S en utilisant toujours la méthode de quadrature de GAUSS.

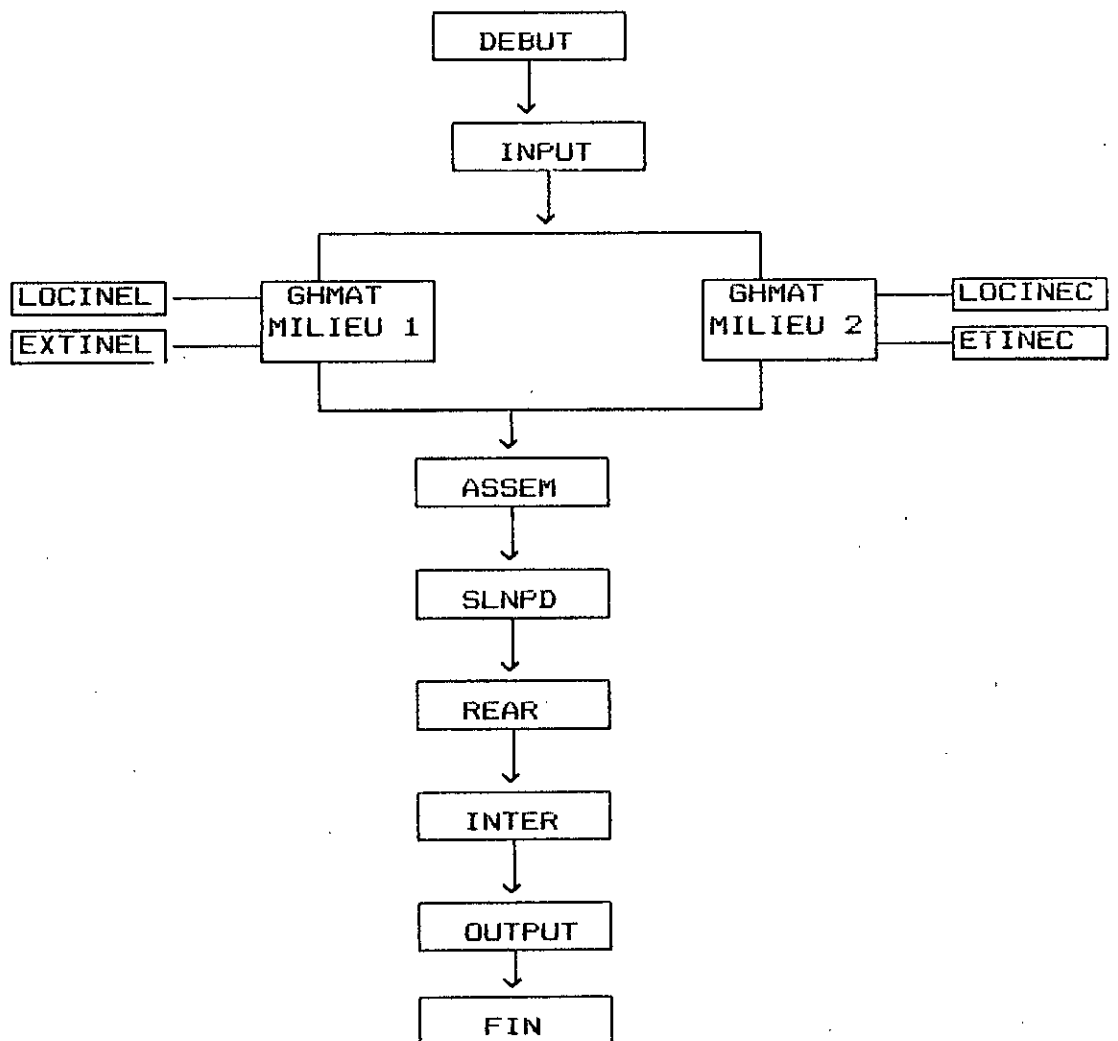
#### VI-3-10 SUBROUTINE OUTPUT

Elle va imprimer les résultats suivant un format bien lisible

- Déplacements pour chaque noeud de la frontière.
- Contraintes pour chaque noeud de la frontière
- Déplacements pour les points intérieurs.
- Contraintes pour les points intérieurs.

#### VI-4 STRUCTURE DU PROGRAMME SUBREGION

Ce programme a une structure identique au premier sauf qu'il utilise des éléments constants, il est donc constitué des mêmes sous-routines utilisées dans le programme ELLINBE, en plus d'autres qui sont propres à lui et qui vont être commentées ci-dessous :



#### VI-4-1 SUBROUTINE INPUT

C'est la même avec le programme ELLINBE sauf que les données sont entrées des deux milieux.

#### VI-4-2 SUBROUTINE GHMAT

Elle a la même structure que le programme ELLINBE en faisant appel aux sous-routines EXTINEC et LOCINEC.

#### VI-4-3 SUBROUTINE ASSEMB

Elle fait l'assemblage des matrices [H] et [G] en tenant compte des deux milieux.

#### VI-4-4 SUBROUTINE SLNPD

Sous programme de la résolution

#### VI-4-5 SUBROUTINE REAR

Elle fait le réarrangement des solutions en plaçant les résultats d'un milieu dans un vecteur, et les résultats de l'autre milieu dans un autre vecteur.

#### VI-4-6 SUBROUTINE INTER

Elle donne les résultats à l'intérieur du milieu.

#### VI-4-7 SUBROUTINE OUTPUT

Elle affiche les résultats ( les déplacements, les contraintes) dans un fichier, avec un format lisible.

## **CHAPITRE VII**

# **COMPARAISON ENTRE LA MEF ET LA B.E.M**

## VII-1 INTRODUCTION

Malgré sa souplesse et son immense champ d'application, la M.E.F peut présenter un grand nombre d'inconvénients surtout :

- Quand le domaine est infini.
- Quand apparaissent des singularités en des points où certaines dérivées deviennent infinies.

Le développement d'une autre méthode, doit donc être justifié par les avantages qu'elle présente par rapport à la M.E.F. De là, les ingénieurs ont pensé à d'autres méthodes, parmi elles , la B.E.M qui repose sur les équations intégrales aux frontières, qui est une approche exacte de la solution.

Dans ce chapitre, nous allons montrer les avantages et les inconvénients des deux méthodes, d'où la nécessité de présenter une autre méthode qui combine les deux.

## VII-2 DIFFERENCE ENTRE M.E.F ET B.E.M

D'après les études qui ont été faites dans les chapitres précédents, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1- L'une des grandes différences entre la M.E.F. et le B.E.M. est que la M.E.F. discrétise le domaine en un nombre d'éléments pour déterminer les déplacements dans tous le domaine . Tandis que la B.E.M discrétise seulement la frontière, et nous aurons en n'importe quel point de l'intérieur du domaine la solution cherchée.

Nous pouvons conclure que l'avantage de la B.E.M. par rapport à la M.E.F. est qu'elle engendre des matrices de petites dimensions faciles à résoudre.

2-

\* - Un autre avantage de la B.E.M. par rapport à la M.E.F. est qu'elle s'adapte mieux pour les domaines infinis, tandis que la M.E.F. peut résoudre les problèmes de matériaux complexes.

\* - La B.E.M. est plus efficace dans les domaines linéaires.

\* - La B.E.M. se prête mieux pour l'analyse des structures de grandes dimensions.

3 - En utilisant dans la B.E.M. uniquement la discrétisation de la frontière, nous aurons affaire à des matrices de



petites dimensions, très peuplées et non symétriques, leur résolution est alors très lente.

Contrairement, la M.E.F., qui engendre des matrices symétriques et non peuplées, que nous pouvons sauvegarder par ligne de ciel, est de résolution est plus rapide.

4 - La B.E.M. analyse des problèmes avec une très grande concentration de contraintes par rapport à la M.E.F.

5 - En B.E.M., la dimension du problème étudié est réduite d'une unité. Pour un problème bidimensionnel, nous aurons une équation intégrale de frontière unidimensionnelle, ceci vient du fait que les fonctions inconnues intervenant se trouvent sur la frontière et non à l'intérieur du domaine.

6 - L'équation intégrale de frontière est en elle même un exposé de la solution exacte du problème étudié. Les erreurs ne peuvent provenir que de la manière avec laquelle la géométrie et les paramètres physiques sont approximés sur la frontière, d'une part, et des approximations numériques auxquels nous aurons recours, pour le calcul des intégrales, d'autre part.

7 - La réduction de la dimension du problème en B.E.M., engendre une réduction des données requises pour dérouler le problème. Par contre en M.E.F., nous avons une très grande

masse de données en entrée.

8 - L'inconvénient rencontré en utilisant la B.E.M. est la singularité au niveau du calcul des intégrales.

9 - La prise en compte des forces de volumes fait perdre à la B.E.M. son avantage de discrétiser seulement la frontière du domaine.

10 - L'autre inconvénient de la B.E.M. concerne les problèmes de coins . Nous pouvons avoir plusieurs valeurs de tractions en un seul point, alors que les déplacements  $U$  n'en ont qu'une seule.

## **CHAPITRE VIII**

### **COUPLAGE ENTRE LA M.E.F ET LA**

### **B.E.M**

## VIII-1 INTRODUCTION

La M.E.F est l'une des méthodes les plus utilisées en Génie-civil, en particulier dans la résolution des problèmes de matériaux non linéaires. Tandis que la B.E.M est un nouveau venu dans l'analyse numérique, mais elle a déjà fait preuve de résultats satisfaisant et promettants dans plusieurs domaines. Il est montré que la B.E.M est très avantageuse dans la résolution des problèmes de matériaux homogènes et linéaires dans un domaine infini. En plus de ça, nous avons remarqué la facilité de la B.E.M à être associée à d'autres méthodes numériques.

Donc, il est logique de coupler la M.E.F et B.E.M pour en sortir une seule qui puisse profiter des avantages et remédier aux inconvénients de chacune et qu'elle puisse analyser les problèmes incluant les matériaux non homogènes dans un domaine infini.

Notre travail consiste à choisir deux régions, l'une élément fini, l'autre équation intégrale aux frontières, et de créer une matrice de rigidité symétrique correspondant à la région frontière. Les éléments frontières utilisés sont linéaires, alors que ces éléments finis ont un champ de déplacement linéaire aussi linéaires, afin d'assurer la continuité et permettre de modéliser les différentes formes du corps.

## VIII-2 HISTORIQUE

L'idée de combiner la B.E.M avec la M.E.F est attribuée à WEXLER et MCDONALD qui commença à utiliser les équations intégrales pour représenter facilement les milieux infinis en (1970). Alors qu'en élastostatique c'est à OSIAS (1977) que revient le mérite d'avoir utilisé le couplage. Dans la même année O.C.ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY, P.BETTES ont publié l'un des premiers articles sur le couplage ( ils ont établi la matrice de rigidité de l'élément frontière équivalente ).

D'autres auteurs ont contribué au développement de la méthode, parmi eux : BREBBIA et GEORGIU (1979), GEORGIU(1981,1984), HARTMANN (1981), OTHSU (1985), KATMAND et BROWN (1985), VALLABHAN (1984). Ils ont discuté le problème de la matrice de rigidité frontière.

## VIII-3 COUPLAGE ENTRE M.E.F ET B.E.M

Il est souvent avantageux de combiner la B.E.M et la M.E.F pour l'analyse de plusieurs problèmes, surtout les problèmes à hautes concentrations de contraintes dans un milieu infini non homogène et non linéaire.

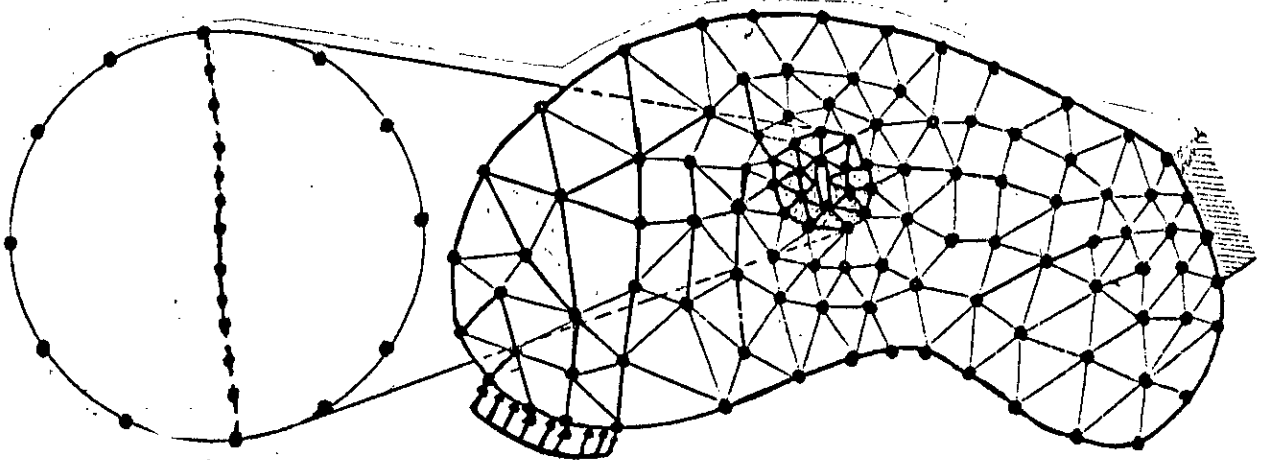
Cette combinaison se fait selon plusieurs procédés; les

plus essentiels seront décrits ci-après.

### VIII-3-1 PREMIERE METHODE

Cette méthode utilise les résultats de la M.E.F pour définir les conditions aux frontières pour une région localisée.

Cette approche est purement empirique, et n'a pas de justification mathématique, mais elle est utilisée puisqu'elle donne des résultats satisfaisant (cf.fig VIII-1)



VIII-3-2 SECONDE METHODE

Cette approche consiste à traiter la région élément frontière en régions éléments finis équivalentes .

Considérons les deux régions comme le montre la figure (VIII-2).

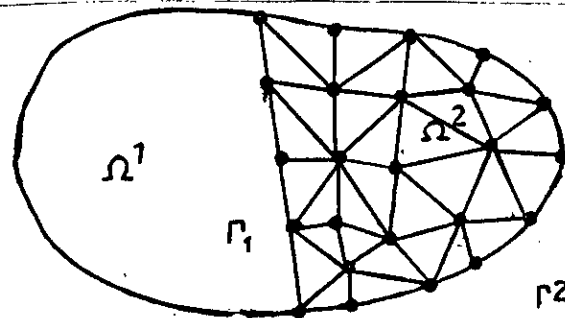


Fig VIII.2  
Corps divisé en une partie  
élément finis et une autre  
élément frontière.

où la région  $\Omega^1$  est exprimée en éléments frontière et la région  $\Omega^2$  est discrétisée en éléments finis.

La matrice de la partie élément frontière  $\Omega^1$  peut être réduite comme suit :

$$[H]. \{U\} = [G]. \{P\} \quad (\text{VIII-1})$$

Tandis que la région  $\Omega^2$  éléments finis a la forme suivante:

$$[K]. \{U\} = \{F\} \quad (\text{VIII-2})$$

$[K]$  : La matrice de rigidité

$\{F\}$  : Equivalent force nodale

$\{U\}$  : Vecteur déplacement

$\{P\}$  : Traction de surface

L'équation (VIII-1) peut être transformée en la multipliant des deux côtés par l'inverse de G :

$$[G]^{-1}. [H]. \{U\} = [G]^{-1}. [G]. \{P\}$$

$$\implies [G]^{-1}. [H]. \{U\} = \{P\} \quad (\text{VIII-3})$$

Après cela, on convertit les valeurs de tractions aux noeuds en équivalents force nodale.

$$\{F\} = [M]. \{P\} \quad (\text{VIII-4})$$

Remarquons que cette opération est standard en éléments finis .En transformant l'équation (VIII-3) en la multipliant par la matrice  $[M]$ , on aura :

$$[M][G]^{-1}. [H]. \{U\} = [M]. \{P\} \quad (\text{VIII-5})$$

On pose  $[M].\{P\} = \{F\}$

$$[M] [G]^{-1} . [H] = [K']$$

On aura la même forme que la région éléments finis

$$[K'] . \{U\} = \{F'\} \quad (\text{VIII-6})$$

La matrice  $[K']$  obtenue est généralement non symétrique. On la symétrise en utilisant la formule suivante :

$$[K''] = \frac{1}{2} ( [K'] + [K']^T ) \quad (\text{VIII-7})$$

L'équivalent élément finis obtenue dans l'équation (VIII-7) peut être maintenant assemblée avec l'équation (VIII-2)

#### VIII-3-2-1 CONDITION DE COUPLAGE

En obtenant la matrice de rigidité de la région élément fini , ainsi que celle de la région élément frontière, On fait l'assemblage comme si on avait deux régions éléments finis en respectant les deux conditions suivantes :

\* La compatibilité : - Les déplacements à l'interface sont égaux  $u_I^1 = u_I^2$

\* L'équilibre : - Les tractions à l'interface des deux régions doivent être nulles  $P_I^1 + P_I^2 = 0$

#### VIII-3-2-2 SYMETRISATION

Dans l'établissement de la matrice  $[K']$ , nous avons remarqué que celle-ci était non symétrique, contrairement aux



éléments finis . Afin de rendre cette matrice symétrique, nous avons utilisé le principe des moindres carrés en minimisant l'erreur.

L'erreur dans les coefficients de la matrice  $[K']$  est écrite comme différence entre  $K'_{ij}$  et  $K'_{ji}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ ( K_{ij} - K'_{ij} ) \right] + \left[ ( K_{ji} - K'_{ji} ) \right]$$

$$\left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial K'_{ij}} \right)^2 = ( 2 K_{ij} - K'_{ij} - K'_{ji} )^2 = 0$$

$$\implies K'_{ij} = \frac{1}{2} ( K_{ij} + K'_{ji} )$$

Donc la forme de la matrice symétrique est comme suit :

$$[K]' = \frac{1}{2} \left[ [K'] + [K']^T \right]$$

On aura donc l'équation suivante :

$$[K]^1 \{U\} = \{F\}^1$$

que nous pouvons assembler avec la matrice éléments finis.

### VIII-3-3 TROISIEME METHODE

C'est l'approche proposée par BREBBIA et GEORGIU en (1979), qui consiste à traiter la région élément fini en son équivalent élément frontière.

Considérons les deux régions de la figure (VIII-2) Pour la région  $\Omega^1$ , on peut écrire les équations gouvernantes de manière similaire à la B.E.M.

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & G_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P_I^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{VIII-9})$$

Pour la région éléments finis  $\Omega^2$ , nous pouvons écrire d'une manière similaire l'équation (VIII-4)

$$\begin{bmatrix} K^1 & K_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M^1 & M_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P_I^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{VIII-10})$$

En satisfaisant les conditions d'équilibre et de compatibilité à l'interface, nous aurons :

$$\begin{aligned} P_I^1 &= P_I^2 = -P_I^2 \\ u_I^1 &= u_I^2 = u_I^2 \end{aligned} \quad (\text{VIII-11})$$

En réarrangeant les équations (VIII-9), (VIII-10), (VIII-11), on aura :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 & -G_I^1 & 0 \\ 0 & K_I^2 & M_I^2 & K^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I^1 \\ P_I^1 \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{VIII-12})$$

Remarque : Cette équation doit être réarrangée en respectant les conditions aux limites.

## **CHAPITRE IX**

### **PRESENTATION DU PROGRAMME**

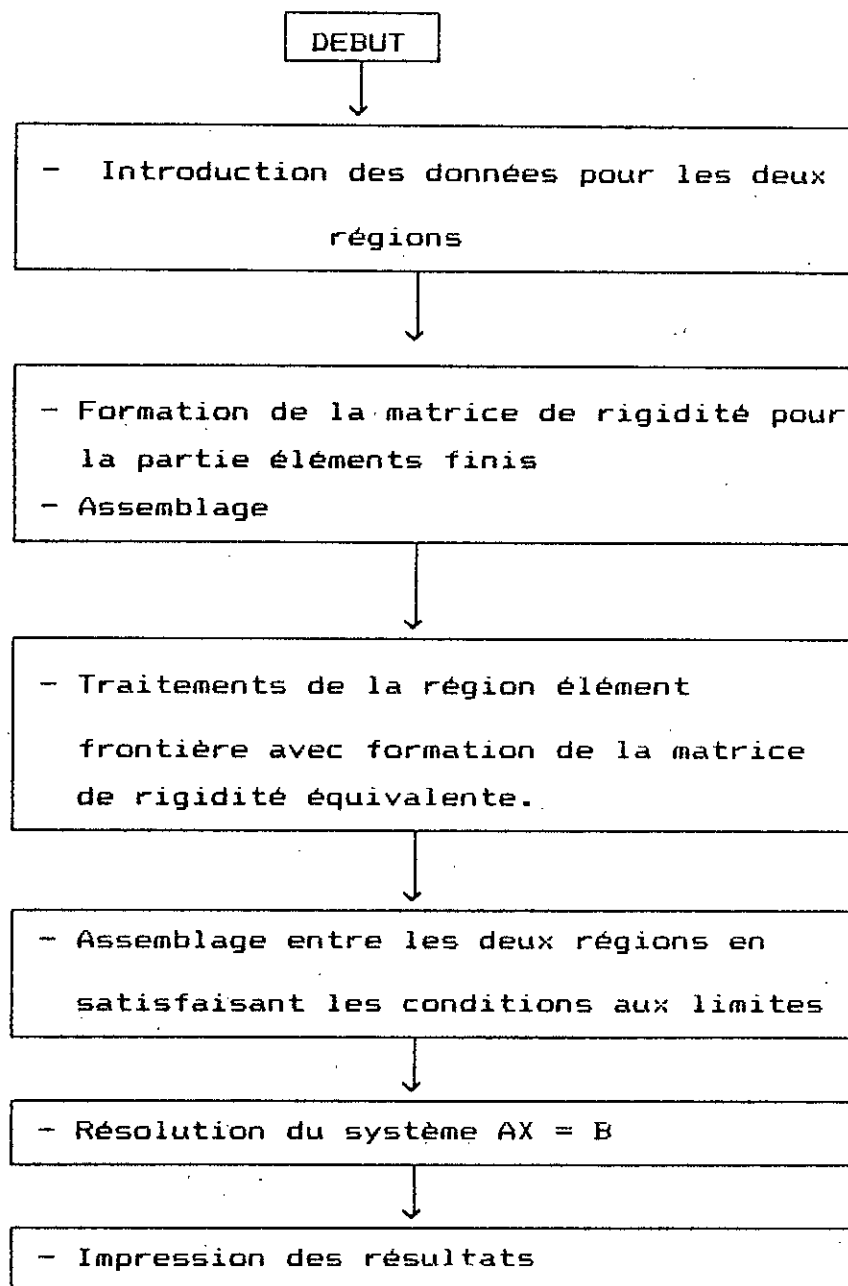
### **COUPLAGE**

## IX-1 INTRODUCTION

Pour le traitement des corps infinis et des concentrations de contraintes, et afin de réduire le temps d'exécution, nous avons élaboré un programme appelé COUPLAGE qui résoud ces problèmes .

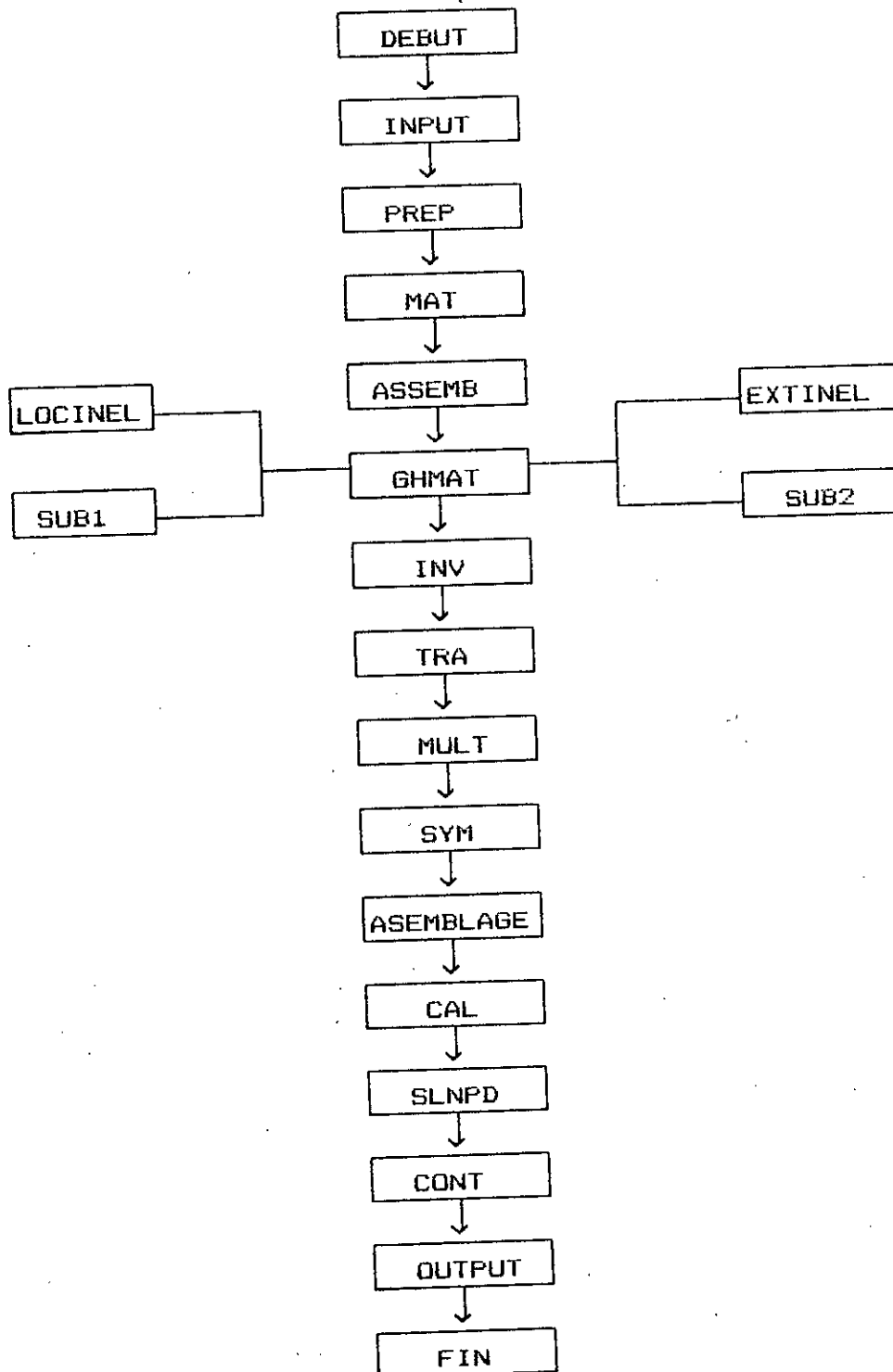
Ce programme utilise les mêmes subroutines que celles de la M.E.F et la B.E.M avec d'autres qui lui sont spécifiques. En plus, nous satisfais les conditions de compatibilité à l'interface.

## IX-2 ETAPES DE RESOLUTION AVEC UN PROGRAMME COUPLAGE



### IX-3 STRUCTURE DU PROGRAMME COUPLAGE

Ce programme est constitué de plusieurs sous-programmes avec des appels argumentés et des common étiquetés.



#### IX-3-1 SOUS PROGRAMME INPUT

Ce sous programme lit les informations sous un format libre dans un fichier, et qui comporte :

- Titre du problème
- Caractéristiques physiques des deux milieux
- Nombre d'éléments des deux milieux ainsi celui de l'interface.
- Le chargement
- Condition aux limites
- Nombre de points internes
- Coordonnées des points internes

#### IX-3-2 SOUS PROGRAMME PREP

Ce programme crée la table de connectivité entre les éléments en utilisant la numérotation automatique des noeuds.

#### IX-3-3 SOUS PROGRAMME MAT

Avant de faire l'assemblage, nous devons calculer la matrice de rigidité élémentaire, qui est identique pour le corps.

#### IX-3-4 SOUS PROGRAMME ASSEMB

Dans cette subroutine, nous faisons l'assemblage de la matrice de rigidité globale en utilisant la table de connectivité.

#### IX-3-5 SOUS PROGRAMME GHMAT

Cette subroutine forme les matrices [H] et [G] en faisant appel aux sous programmes EXTINEL, LOCINEL, SUB1, et SUB2.

#### IX-3-6 SOUS PROGRAMME EXTINEL

Il calcul les matrices élémentaires  $G_w$  et  $H_w$  par la quadrature de GAUSS.

#### IX-3-7 SOUS PROGRAMME LOCINEL

Il calcul analytiquement  $G(i,i+1)$  et  $G(i,i-1)$ , et les termes de la bande diagonale de [G] lorsqu'il y a une singularité  $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$ .

#### IX-3-8 SOUS PROGRAMME SUB1

Il calcul analytiquement les termes de la bande diagonale de la matrice [H] :  $H[i,i+1]$ .

#### IX-3-9 SOUS PROGRAMME SUB2

Il calcul analytiquement les termes de la bande diagonale de la matrice [H] :  $H[i,i-1]$ .

#### IX-3-10 SOUS PROGRAMME INV

Dans cette subroutine, nous calculons l'inverse de la matrice [G] selon l'algorithme suivant :



## Présentation du programme couplage

$$a_{kj} = a_{kj} / a_{kk} \quad j = 2n, \dots, k$$
$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj} \quad j = 2n, \dots, k \quad k = 1, n$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$
$$i \neq k$$

### IX-3-11 SOUS PROGRAMME TRA

Ce sous programme forme la matrice [M] qui transforme les tractions nodales en forces nodales.

La formule de passage est :

$$F_{ix} = \frac{L}{3} \cdot Q_{ix} + \frac{L}{6} \cdot Q_{jx}$$
$$F_{iy} = \frac{L}{3} \cdot Q_{iy} + \frac{L}{6} \cdot Q_{jy}$$

### IX-3-12 SOUS PROGRAMME MULT

C'est une simple subroutine de multiplication de matrices [M] [G]<sup>-1</sup>[H] pour avoir la matrice de rigidité équivalente de la région élément frontière.

### IX-3-13 SOUS PROGRAMME SYM

La matrice équivalente élément frontière n'est pas symétrique. Nous la symétrisons à l'aide de la formule suivante :

$$[K'] = ([K] + [K]^T) / 2$$

### IX-3-14 SOUS PROGRAMME ASSEMBLAGE

C'est la subroutine qui fait l'assemblage entre les deux régions en tenant compte des conditions de compatibilité.

#### IX-3-15 SOUS PROGRAMME CAL

C'est la subroutine qui introduit les conditions aux limites par suppression des lignes, et qui fait la restructuration de la nouvelle matrice.

#### IX-3-16 SOUS PROGRAMME SLNPD

Dans cette subroutine, nous utilisons la méthode d'élimination de GAUSS pour la résolution du système  $AX = b$

#### IX-3-17 SOUS PROGRAMME CONT

Ce sous programme calcule les contraintes dans la partie M.E.F. en formant la matrice [H] déjà définie dans cette partie.

#### IX-3-18 SOUS PROGRAMME OUTPUT

Cette subroutine va imprimer les résultats suivants :

- Déplacements et contraintes dans la partie M.E.F.
- Déplacements et contraintes dans la partie B.E.M.

# CHAPITRE X

# APPLICATIONS

## X-1 APPLICATION NUMERO 1

Analyse de l'interaction sol-structure par M.E.F, B.E.M et leur couplage.

### X-1-1 PRESENTATION DES PROGRAMMES

#### M.E.F

Programme : M.E.F.F.F et M.E.F.F.R

Type d'élément: Elément triangulaire à champ de déformation constant .

#### B.E.M

Programme : ELLINBE et SUBREGION

Type d'élément : Elément linéaire pour ELLINBE et constant pour SUBREGION .

#### COUPLAGE

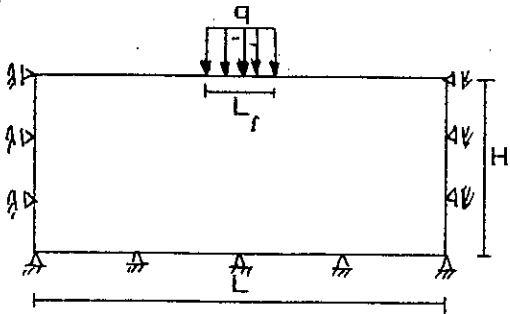
Programme : Couplage

Type d'élément : Linéaire pour la partie B.E.M et triangulaire pour la partie M.E.f .

### X-1-2 MODELISATION DU SOL

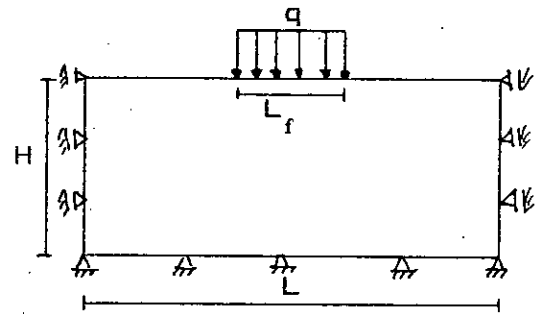
Pour modéliser notre sol pour une fondation fixe de 1m de largeur avec un chargement réparti  $q = 1 \text{ Mpa.}$ , nous avons choisi quatre modèles que nous présenterons ci-après avec leurs caractéristiques.

Modèle 1



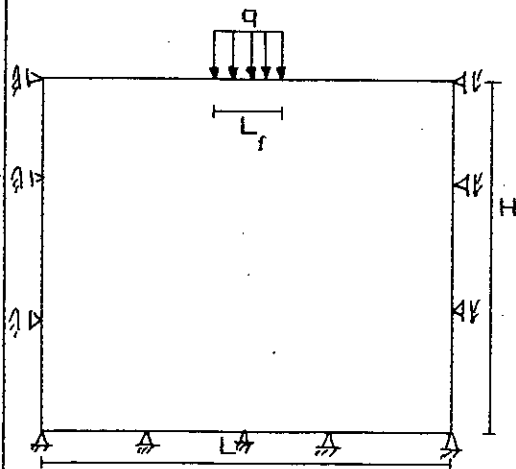
$L = 5 \text{ m}$   
 $H = 5 \text{ m}$   
 $q = 1 \text{ Mpa}$   
 $L_f = 1 \text{ m}$

Modèle 2



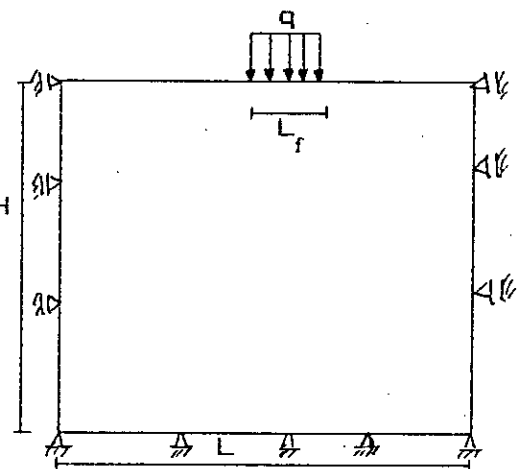
$L = 5 \text{ m}$   
 $H = 10 \text{ m}$   
 $q = 1 \text{ Mpa}$   
 $L_f = 1 \text{ m}$

Modèle 3



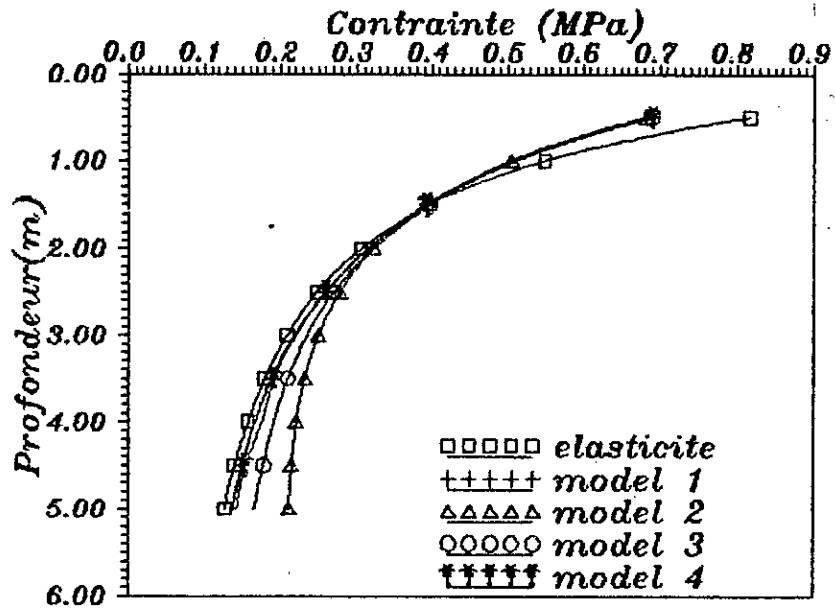
$L = 10 \text{ m}$   
 $H = 10 \text{ m}$   
 $q = 1 \text{ Mpa}$   
 $L_f = 1 \text{ m}$

Modèle 4



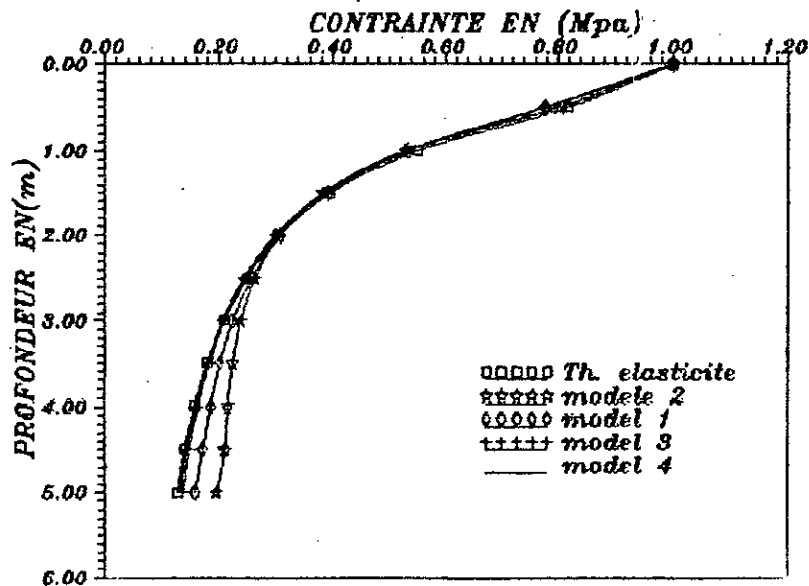
$L = 10 \text{ m}$   
 $H = 10 \text{ m}$   
 $q = 1 \text{ Mpa}$   
 $L_f = 1 \text{ m}$

X-1-2-1 Modélisation par M.E.F



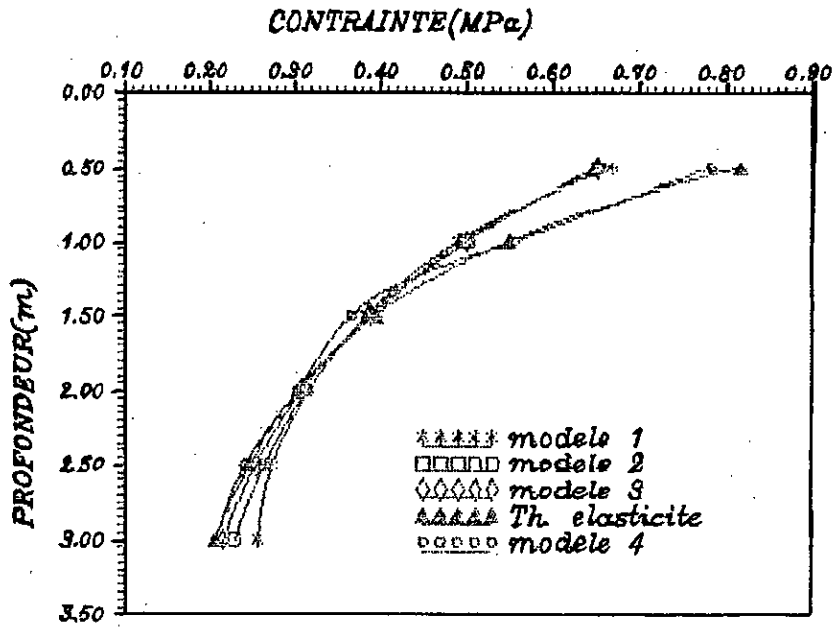
MODELISATION DU SOL  
PAR M.E.F

X-1-2-2 Modélisation par B.E.M



MODELISATION DU SOL  
PAR B.E.M

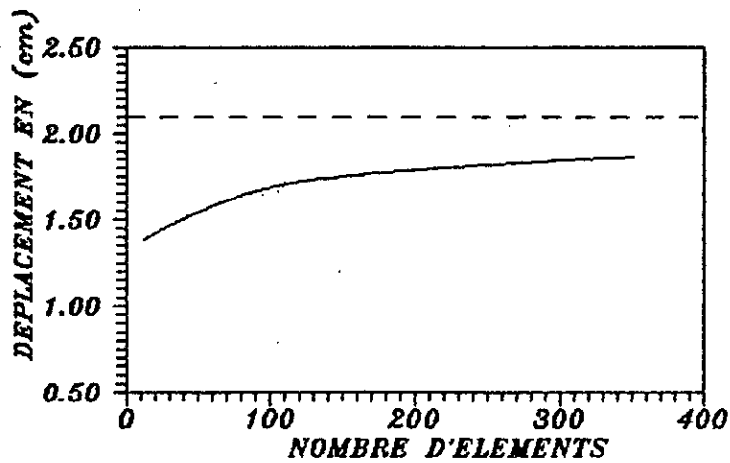
X-1-2-3 Modélisation par Couplage



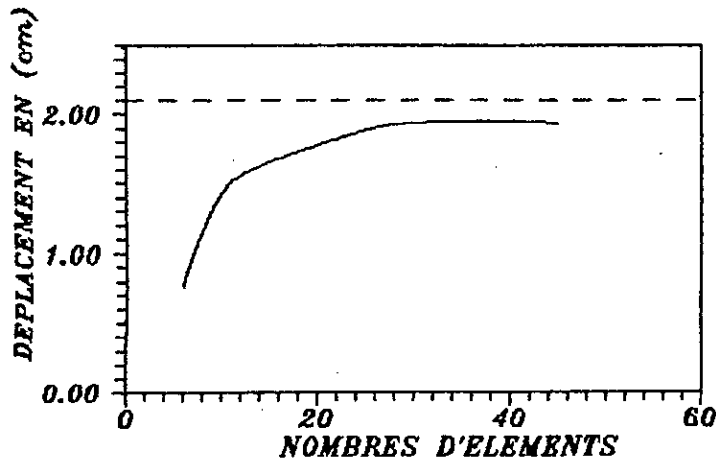
MODELISATION DU SOL  
PAR COUPLAGE

X-1-3 Etude de la convergence

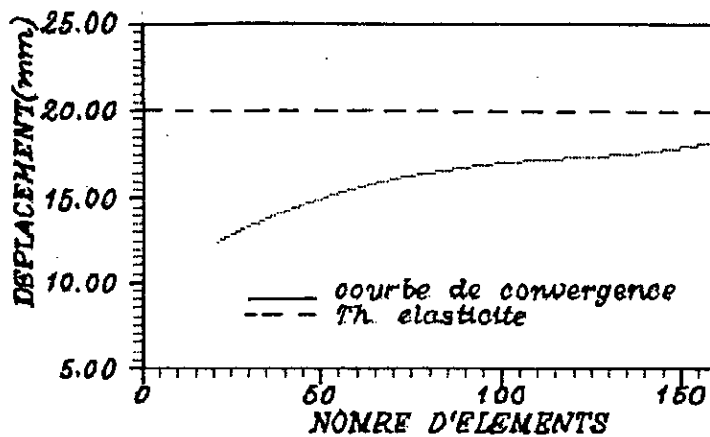
X-1-3-1 Convergence des déplacements



COURBE DE CONVERGENCE  
DES DEPLACEMENTS  
PAR M.E.F



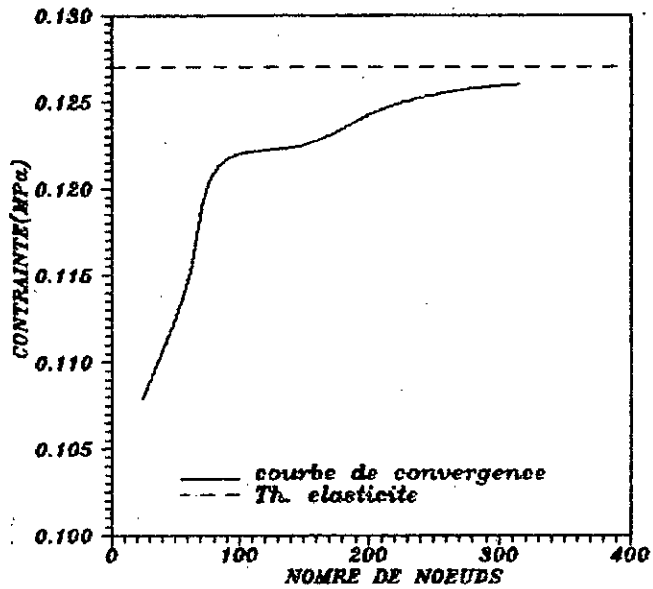
COURBE DE CONVERGENCE  
DES DEPLACEMENTS  
PAR B.E.M



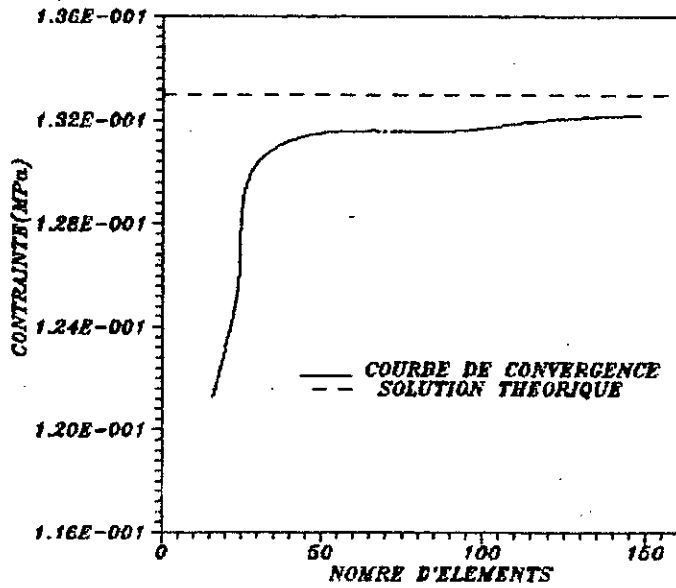
CONVERGENCE DES DEPLACEMENTS  
PAR COUPLAGE



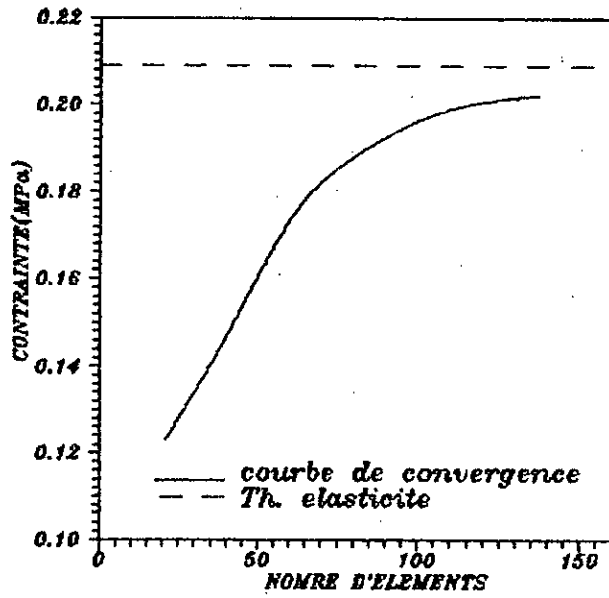
### X-1-3-2 Convergence des contraintes



CONVERGENCE DES CONTRAINTES.  
PAR M.E.F



COURBE DE CONVERGENCE DES  
CONTRAINTES PAR B.E.M

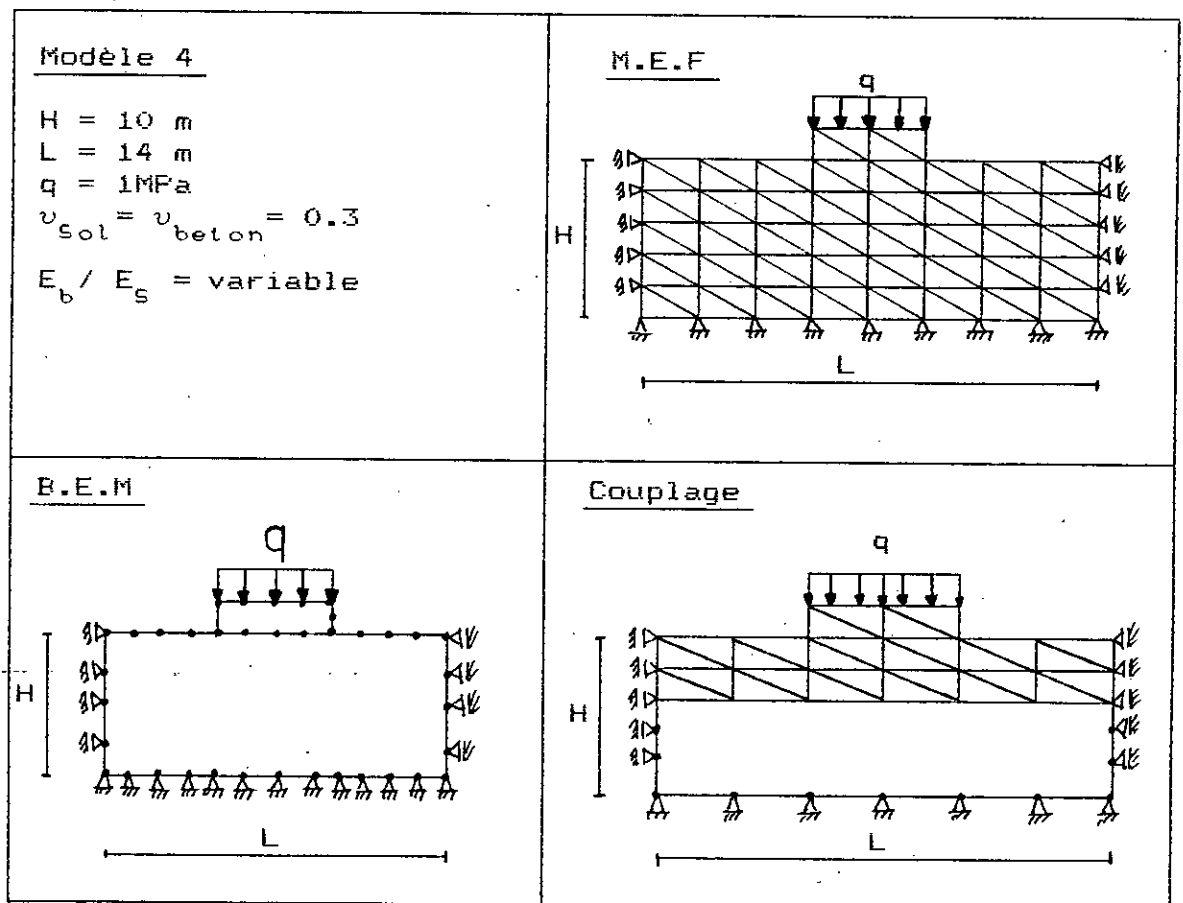


**CONVERGENCE DES CONTRAINTES  
PAR COUPLAGE**

## X-1-4 ETUDE DE LA RIGIDITE DE LA FONDATION

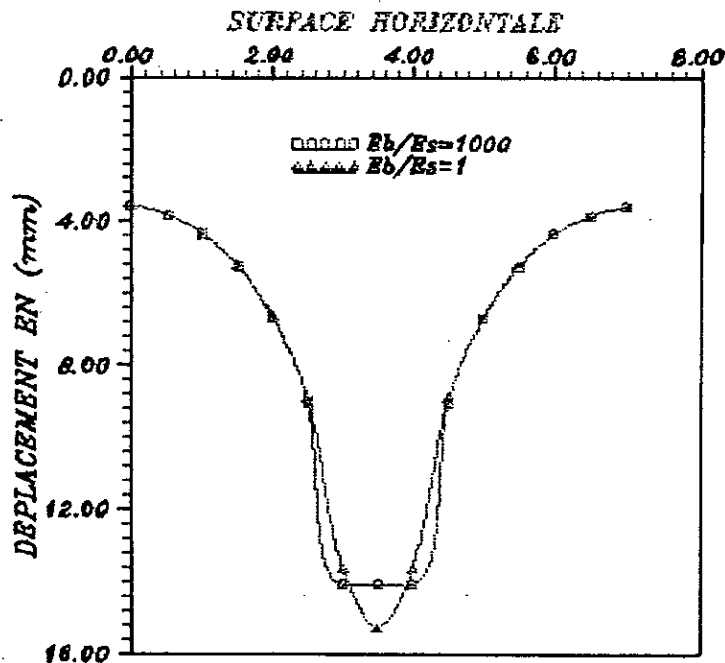
Nous fixons pour cette étude  $\nu = 0.3$  pour le sol et la fondation, et nous étudions la distribution des contraintes et la variation des déplacements sous la fondation du rapport des modules de YOUNG ( $E_{\text{beton}} / E_{\text{sol}}$ )

La modélisation du sol nous a renseigné sur les dimensions du sol qu'il faut prendre  $l=14$  m et  $h = 10$  m (modèle 4)

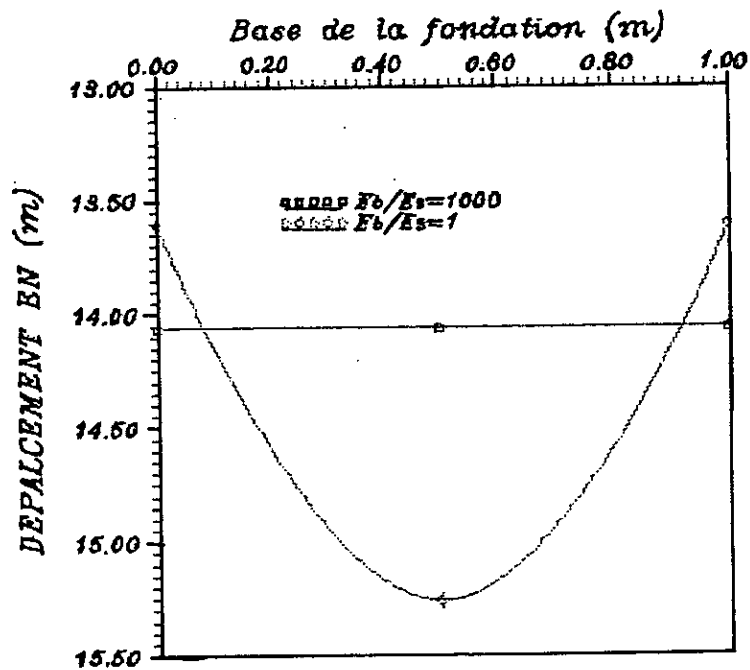


# X-1-4-1 Etude des déplacements à la surface

- Par M.E.F.

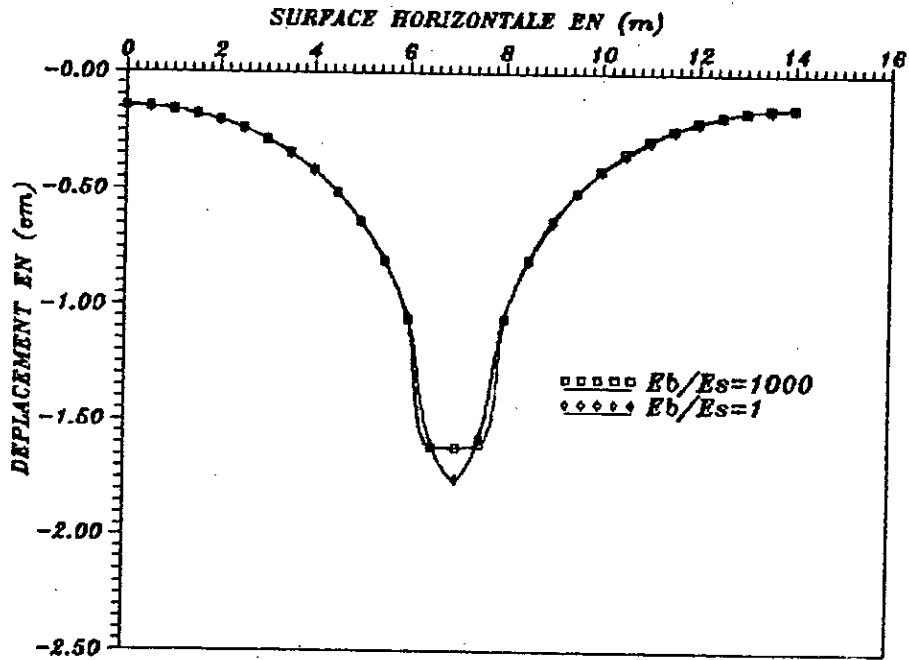


VARIATION DES DEPLACEMENTS SUR LA SURFACE PAR LA M.E.F

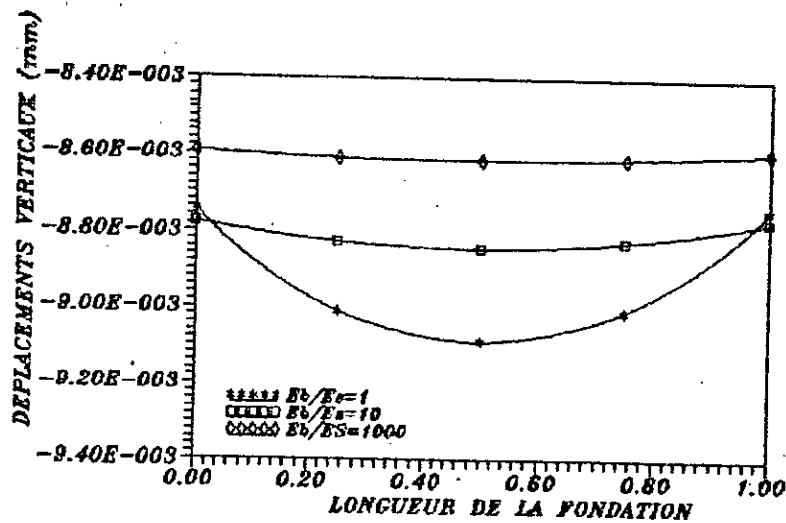


VARIATION DES DEPLACEMENTS SOUS LA FONDATION

- Par B.E.M

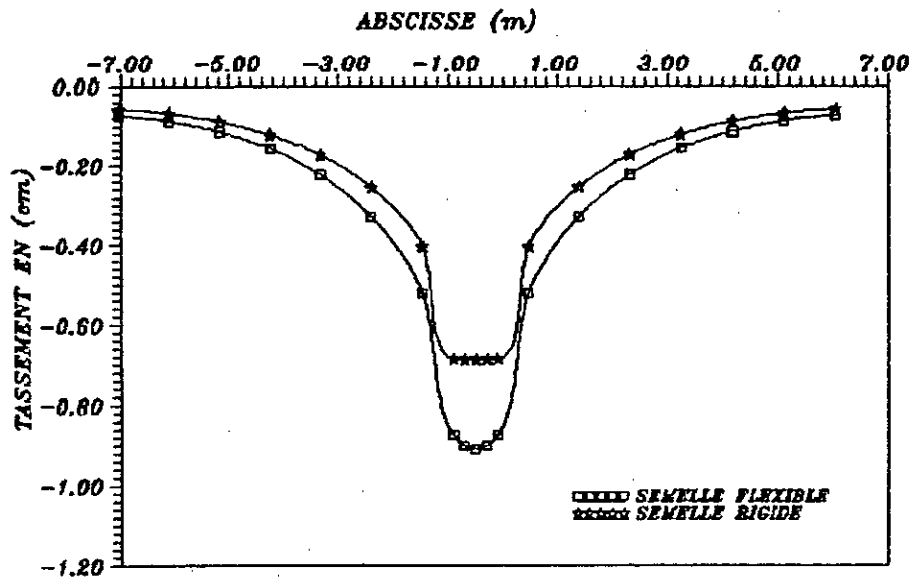


COMPARAISON DES VARIATIONS DES DEPLACEMENTS A LA SURFACE ENTRE UNE FONDATION FLEXIBLE ET RIGIDE

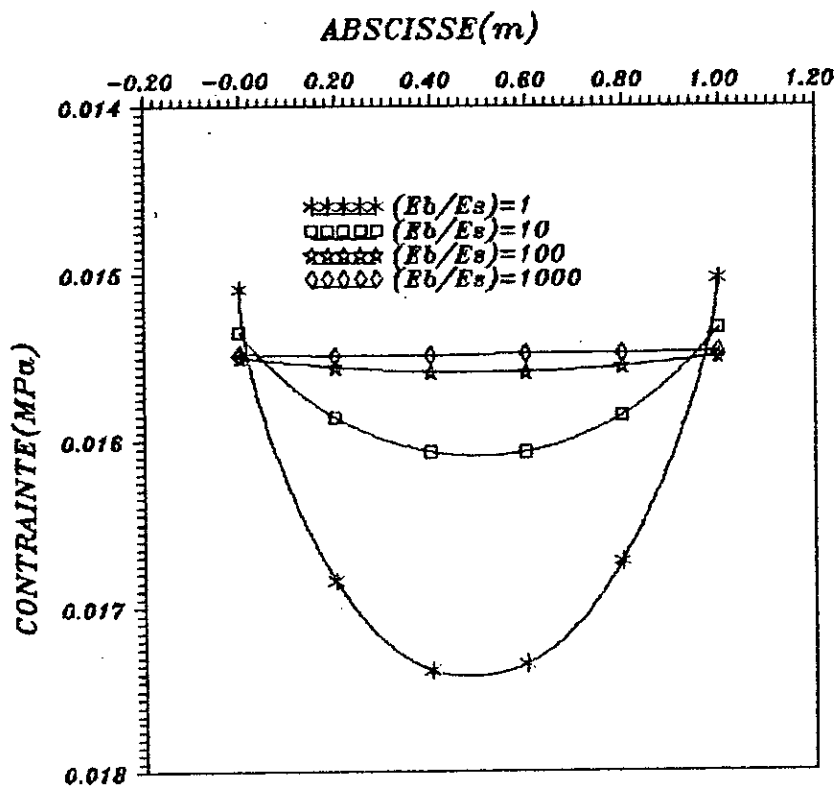


ETUDE DE LA RIGIDITE DE LA FONDATION

- Par Couplage



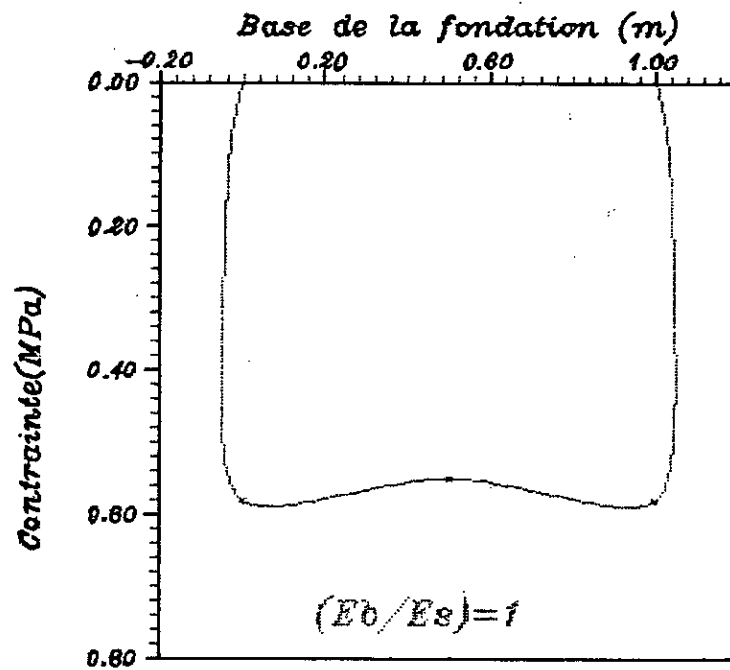
COMPARAISON DES TASSEMENTS A LA SURFACE  
ENTRE SEMELLE RIGIDE ET FLEXIBLE



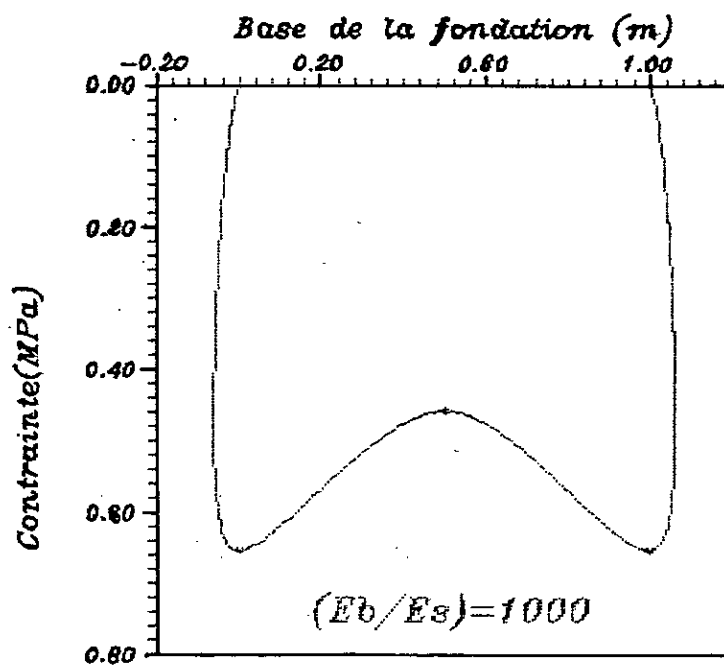
VARIATION DES DEPLACEMENTS  
EN FONCTION DU RAPPORT

X-1-4-2 Etude des contraintes sous la fondation

- Par M.E.F

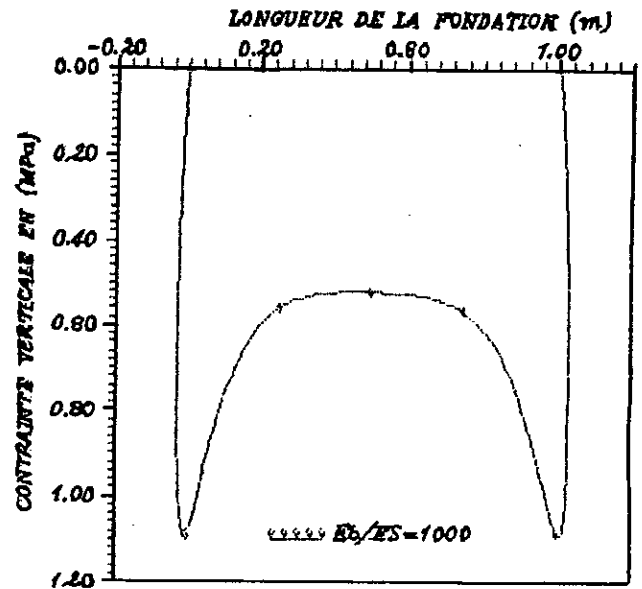
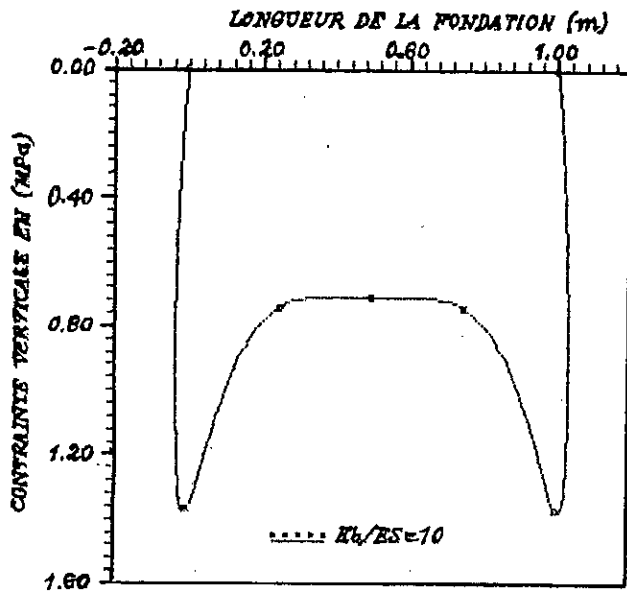
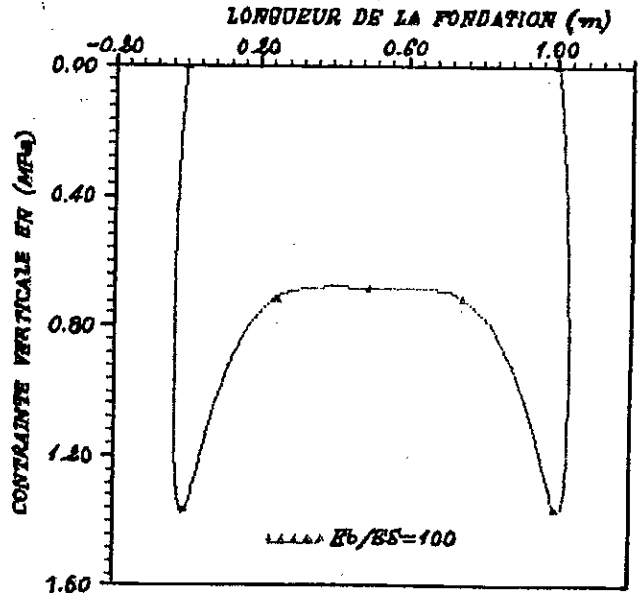
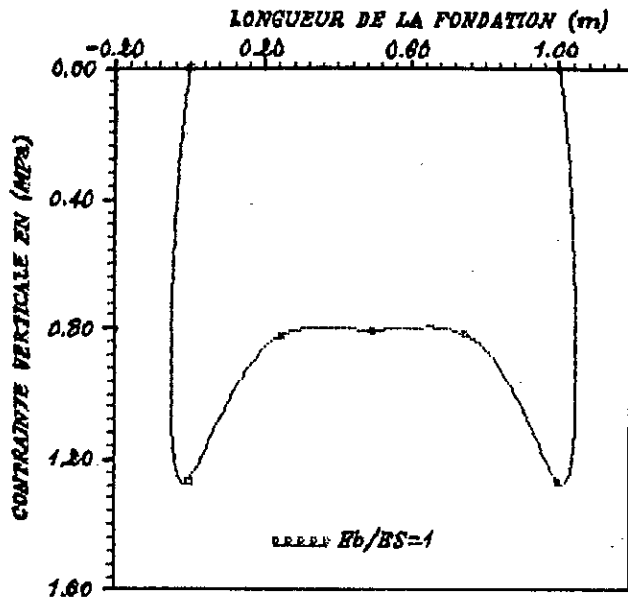


Variation des contraintes sous la fondation



Variation des contraintes sous la fondation

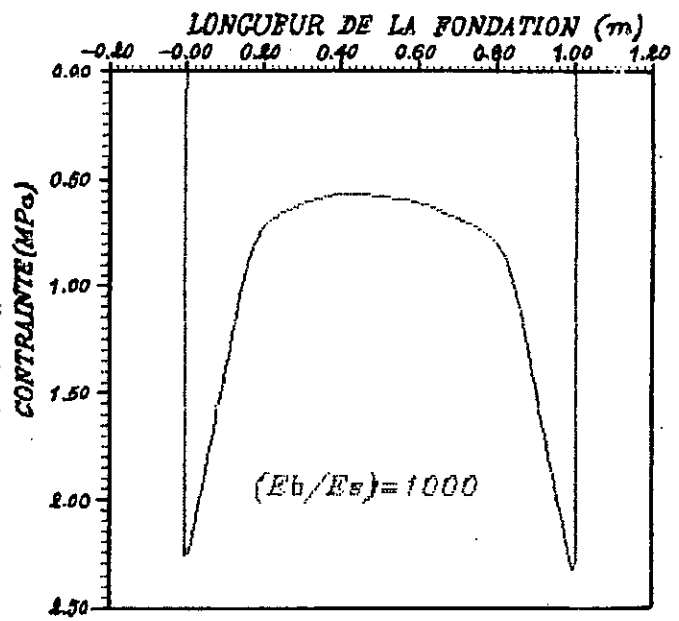
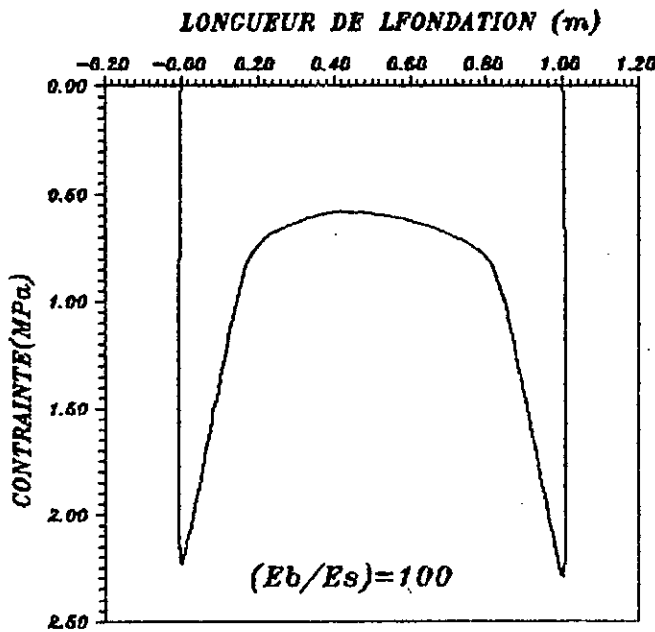
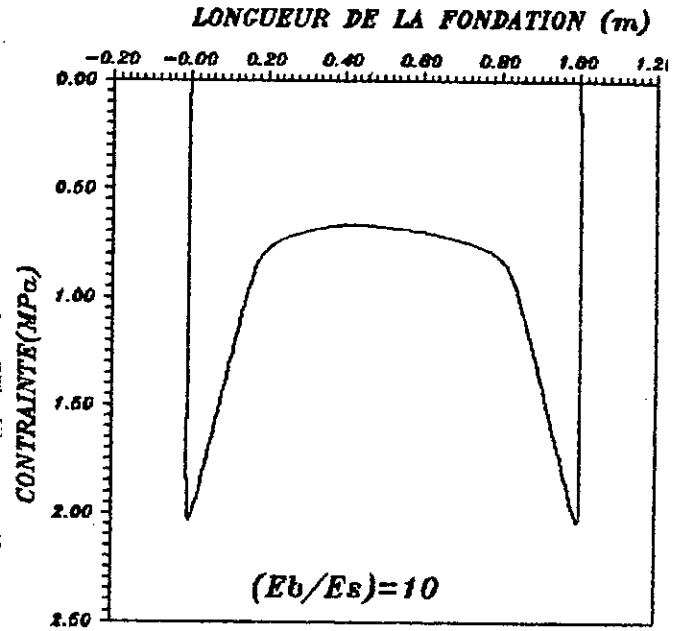
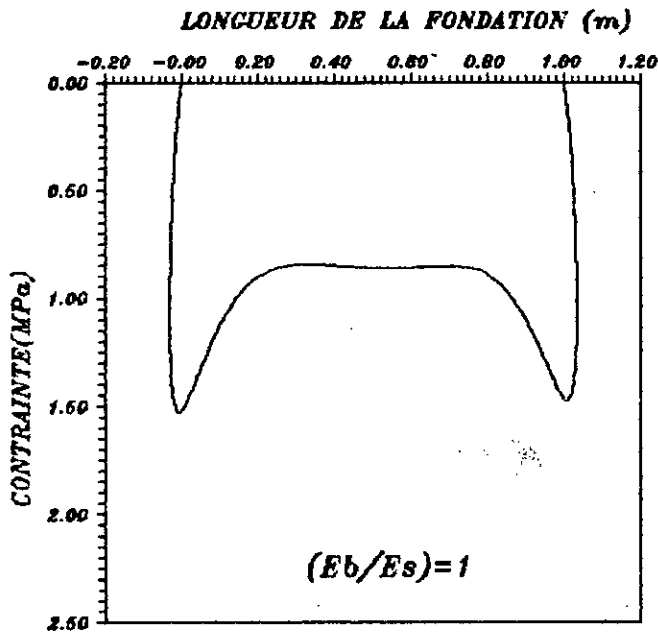
- Par B.E.M



ETUDE DE LA RIGIDITE DE LA  
FONDATION PAR LA B.E.M



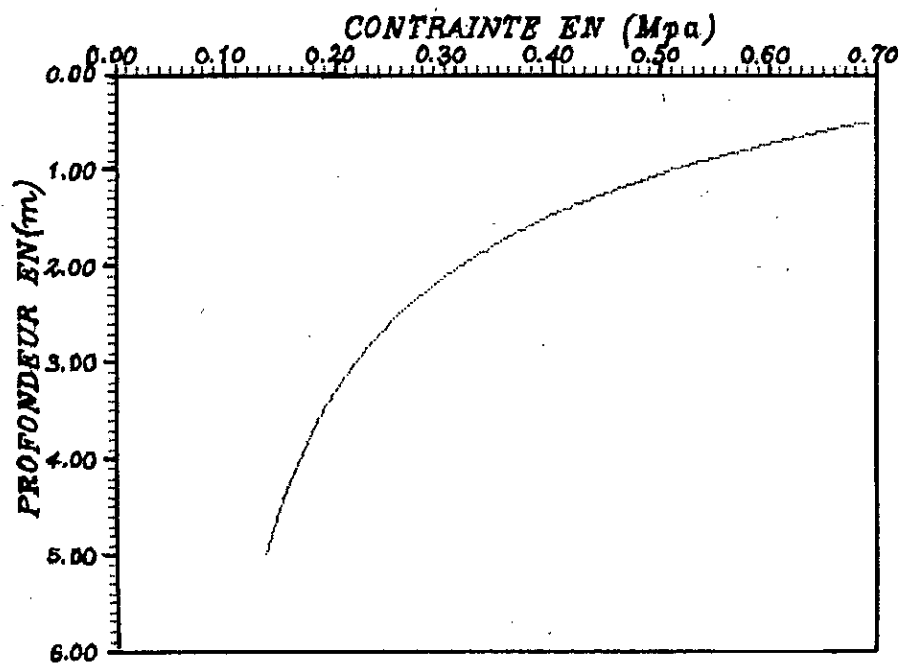
- Par Couplage



VARIATION DES CONTRAINTES  
EN FONCTION DU RAPPORT  $(E_b/E_s)$

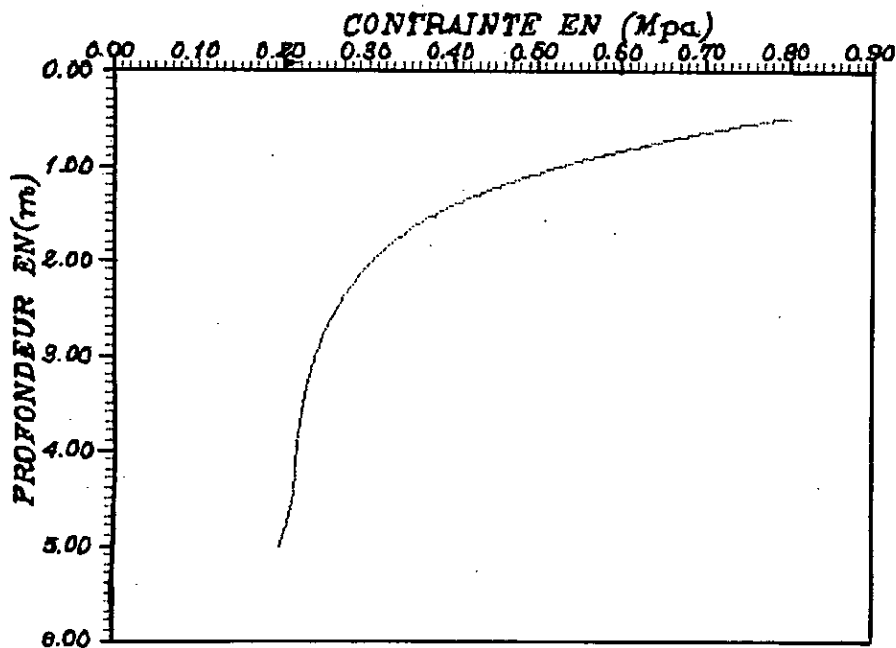
# X-1-5 Etude des contraintes sous l'axe de la fondation

- Par M.E.F



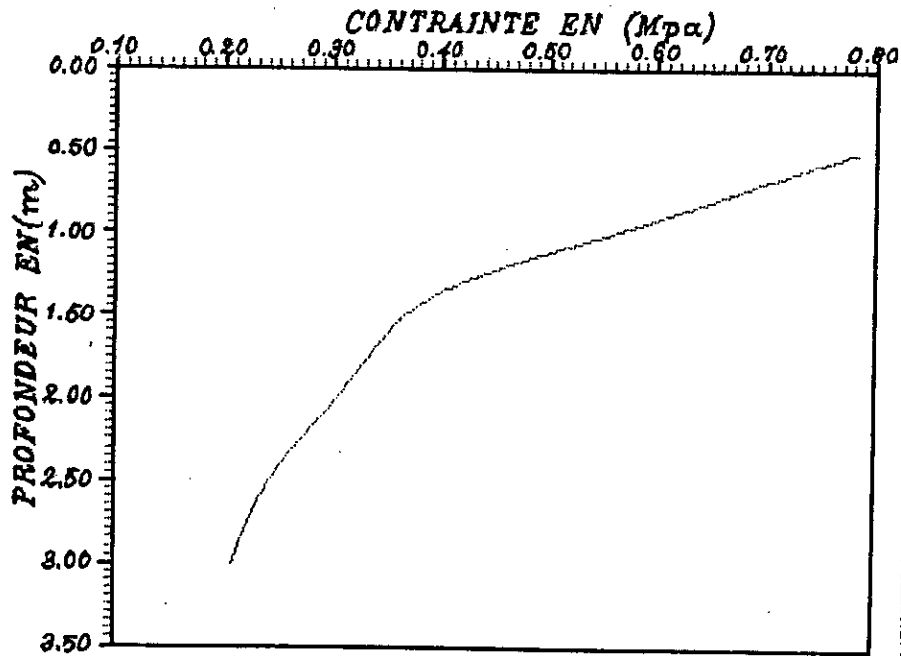
VARIATION DES CONTRAINTES SOUS L'AXE DE LA FONDATION PAR LA M.E.F

- Par B.E.M



VARIATION DES CONTRAINTES SOUS L'AXE DE LA FONDATION PAR LA B.E.M

- Par Couplage



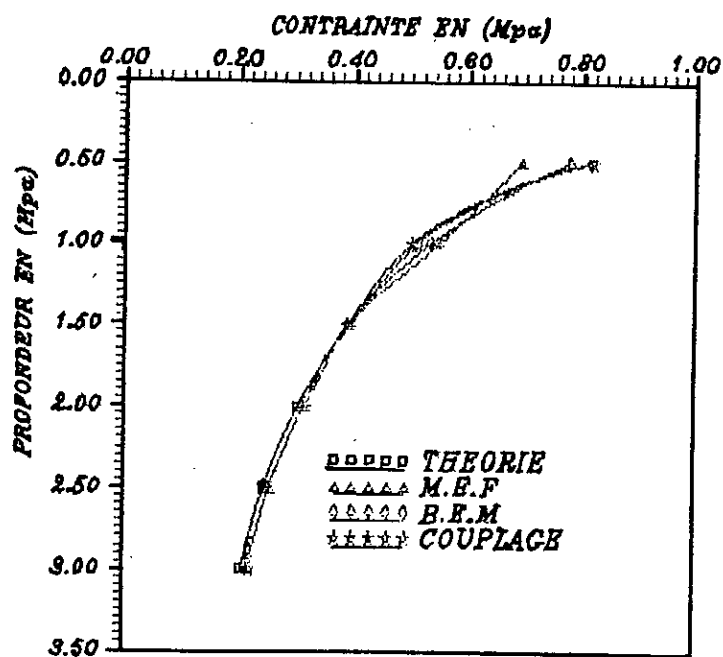
VARIATION DES CONTRAINTES SOUS  
L'AXE DE LA FONDATION PAR  
LE COUPLAGE

## X-1-5 Comparaison des résultats pour l'application N°1

### Tableau 1

On compare les contraintes obtenus sous l'axe de la fondation par les méthodes numériques et la théorie.

Profondeur	Elasticité	M.E.F	B.E.M	Couplage
0.5	0.818	0.707	0.792	0.81
1	0.55	0.511	0.522	0.54
1.5	0.396	0.394	0.395	0.395
2	0.306	0.315	0.310	0.307
2.5	0.248	0.259	0.250	0.251
3	0.209	0.219	0.212	0.210



COMPARAISON DES CONTRAINTES SOUS L'AXE DE LA FONDATION ENTRE LA THEORIE ET LES RESULTATS NUMERIQUES

## Tableau 2

On compare le pourcentage d'erreurs à la profondeur de 1m entre les méthodes numériques et la théorie .

	M.E.F	B.E.M	Couplage
% d'erreurs à la hauteur de 1m	7.09 %	5.09 %	1.81 %

## INTERPRETATION DES RESULTATS

Le premier problème rencontré quand nous avons analysé l'interaction sol-structure est que nous devons limiter les dimensions du sol pour pouvoir le discretiser, celui-ci étant supposé un domaine semi infini, nous avons procédé de manière à obtenir les dimensions idéales pour l'analyse de l'interaction en testant les résultats obtenus sur des modèles de dimensions différentes avec ceux obtenus par la théorie de l'élasticité, le modèle définitif trouvé était le même par les trois méthodes.

Nous avons constaté pour la MEF et le couplage une meilleure convergence des contraintes dans les parties éloignées de la zone de leur concentration, ie: sous la fondation, par contre pour la BEM le taux de convergence est presque le même par tout, ceci est dûe à l'approximation du chargement uniforme par des charges nodales équivalentes, l'effet de ces deux chargements tend à être le même en s'éloignant de la zone d'application, ce qui est en accord avec le principe de SAINT-VENANT, ce problème ne se présentait plus pour la BEM, parce que l'élément linéaire utilisé représentait exactement le chargement réparti uniformément.

L'allure des courbes de convergences des contraintes et des déplacements en fonction du nombre d'éléments sont différentes parce les premiers s'obtiennent par différentiation des seconds, cette allure varie aussi d'une méthode à l'autre à cause des différences d'approximations faites dans chacune d'elles.

L'influence de la rigidité de la fondation était examinée en changeant ses propriétés élastiques, ce qui nous a permis de constater que pour une fondation flexible l'allure des déplacements sous la fondation était parabolique avec un extrémum au centre, la distribution des contraintes était presque constante avec une légère concentration aux coins, en augmentant le module de YOUNG de la fondation les contraintes auront tendance à se concentrer à ses bords, et les déplacements tendent à être uniforme sur toute sa largeur.

La distribution des contraintes sur un axe vertical montre leur tendance à s'estomper en profondeur, leur distribution sur un axe horizontal permet de voir leur augmentation quand nous nous rapprochons de l'axe de la fondation, et leur dissipation au fur et à mesure que nous nous éloignons de lui.

# CONCLUSION



L'interaction sol-structure est l'un des problèmes les moins résolus actuellement par les ingénieurs .A partir de là,on a essayé de présenter des formulations numériques adaptées à celle-ci , d'utilisation aisée , rapide et donnant des résultats proche de la théorie

En premier lieu et après une étude théorique de la méthode des éléments finis ,on a élaboré un programme préliminaire (M.E.F.F.F) qui traite seulement les fondations purement flexibles avec un chargement appliqué directement sur le sol .En développant celui-ci , on a pu concevoir un autre programme ( M.E.F.F.R ) qui tient compte de la différence des caractéristiques physiques existant entre la fondation et le sol

Vu que la méthode des éléments finis exige de vaste capacités de memoire au sein des ordinateurs pour pouvoir stocker et traiter les matrices de très grandes taille , on a eu recours a utiliser une autre méthode qui solutionne ce problème d'une manière plus rapide et plus simple appelée Méthode des Equations Intégrales aux frontières dont la spécificité est la discrétisation uniquement de la frontière du domaine étudié

Afin de tenir compte de la différence des caractéristiques physiques entre la fondation et le sol et pour pouvoir concevoir le programme " SUB-REGION " qui utilise des éléments constants prenant en considération ces deux milieux, on a élaboré tout d'abord un programme utilisant des éléments linéaires appelé "ELLINBE"

Toutefois pour profiter des avantages des deux méthodes et de remédier à leurs inconvénients , on a étudié le couplage entre elles dans le but de représenter la différence des deux milieux ainsi que la dimension infinie du sol. Pour cela on a conçu le programme " COUPLAGE " utilisant des éléments linéaires pour la partie éléments frontière et des éléments à champs de déplacement linéaire pour la partie éléments finis.

On en conclut à la fin que:

- La méthode des éléments finis s'adapte mieux pour les corps non homogènes à comportement non linéaire que la méthode des équations intégrales qui exige la connaissance de la solution fondamentale pour chaque type de problèmes

- La méthode des équations intégrales est très avantageuse pour les domaines à grande dimension ; on aura à manipuler des matrices moins importantes que celles traitées par la méthode des éléments finis et le couplage. Elle est aussi avantageuse pour les régions à haute concentration de contraintes

- Le couplage entre les deux méthodes s'avère donc la meilleure approche pour résoudre les problèmes présentant une non homogénéité et une grande dimension du milieu, puisque il utilise les avantages d'une méthode pour remédier aux inconvénients de l'autre

Pour pouvoir exploiter les méthodes numériques à leur maximum d'efficacité, l'ingénieur devrait être aidé par son intuition et son sens physique des réalités.

# BIBLIOGRAPHIE

- 1- K.J. BATHE " Finite element procedures in engineering analysis " Prentice-Hall (1982).
- 2- J.L.BATOS et G.DHAT " Modélisation des structures par élément finis " Volume 1 Solides élastiques HERMES (1990)
- 3- A.A BENAZOUZ et M. HADID " Méthodes des éléments finis " Mini projet proposé par M.K. BERRAH E.N.P. (1991)
- 4- A.A. BENAZZOZ et M.HADID " Investigations numériques du comportement des plaques raidies par le M.E.F. et la B.E.M. "Projet de fin d'études proposé par M.K. BERRAH et DEMIDEM (1992)
- 5- M.K. BERRAH Notes de cours de la mécanique des milieux continus E.N.P.
- 6- BOUDAA - DJAALALI Projet de fin d'études proposé par MESSAFER (1992)
- 7- C.A. BREBBIA et J.DOMINGUEZ " Boundary elements an introductory course " MC Graw - Hill Book Company (1989)
- 8- C.A. BREBBIA et J.GEORGIUO " Combination of Boundary and Finitis elements in elastostatics " DEPARTEMENT of civil engineeris University of southonpton (1978)
- 9- J.COSTET G.SANGLERAT " Cours pratique de mécanique des sols" BORDAS (1975)
- 10- M. DEMIDEM Notes de cours de calcul automatique des structures E.N.P.
- 11- G. DHAT G.TOUZOT " Une présentation de la méthode des éléments finis " MALOINE EDITEUR (1984)
- 12- R.H. GALLAGHER " Introduction aux éléments finis " EYROLLES PARIS (1979)

- 13- A.GOURDIN M.BOUMAHRAT " Méthodes numériques appliquées " O.P.U. (1991)
- 14- L.O. GANGMING " A new boundary element method coupled with FEM PACKAGES " COMMUNICATION in applied numerical methods Vol5, 365-371 (1989)
- 15- J.F.IMBERT " Analyse des structures par éléments finis " C.E.D.A.D.(1984)
- 16- HAND BOOK TOME 3 (of soil mechanics)
- 17- M.P. KAMAT S.A. BROWN " Coupling of finite and boundary element solution using a direct minimize approach "
- 18- J.C. LACHAT et P.RAPIN "Méthode des équations intégrales sur le contour" T.7228 Techniques d'ingénieurs.
- 19- Y.Y. LU T. BELYSHKO W.K. LU "A variationnaly coupled FE.BE Method for elasticity and fractures mechanics computer methods in applied Mechanics and engineering " (1991)
- 20- QING-HUA.DU and ZHEN-HANYAO "Some applications of boundary element methods . Boundary element-finit element-coupling technics in elasto-pastic stress analysis " Acta mecanica solid a simca Vol 3, N 3, July (1990)
- 21- D.RAHMANI , S.KEBDANI "Introduction à la méthode des éléments finis " O.P.U.
- 22- K.C. ROCKEV. H.R.EVANS . D.W. GRUFFITHS. D.A. NETHERCOT "Introduction à la méthode des éléments finis " EYROLLES PARIS (1979)
- 23- D.SAHA et BERBAS "analyse des problèmes de l'élasticité bidimensionnelle par la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales et leur couplage" Projet de fin d'études proposé par BERRAH et M.DEMIDEM(1993)

- 24- I.H. CHENS . C.L. DYM "Energy and finite element method in structural mechanics " HEMISPHERE PUBLISHING CORPORATION (1985)
- 25- S.TIMOSHENKO " Théorie de l'élasticité " Librairie Polytechnique BERANGER (1948)
- 26- O.C.ZIENKIEWICZ . D.W. COVY. P.ETTESS " The coupling of the finite element method and boundary solider procedures " Internation journal for numerical methods in engineering " Vol11, 355-375 (1977)
- 27- O.C. ZIENKIEWICZ " The finite element method in engineering science " M.C. GRAW HILL LONDON (1971).