

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

4/93

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

المركز الوطني للتعدد التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE
DES STRUCTURES A CABLES PAR LA
METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé & dirigé par :

Mr. BERRAH
Mr. DEMIDEM

Etudie par :

Mr. S. BELHOUS
Mr. A. CHOUAKI

JUIN 1993

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE
DES STRUCTURES A CABLES PAR LA
METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé & dirigé par :

Mr. BERRAH
Mr. DEMIDEM

Etudie par :

Mr. S. BELHOU
Mr. A. CHOUAKI

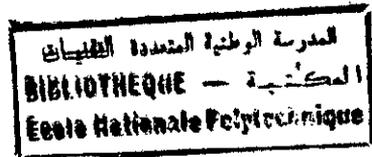
PROMOTION 1993

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES:

A nos parents et familles.

Handwritten Arabic text, likely a dedication or inscription, partially obscured by the printed text.



REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance envers tous nos professeurs, qui au cours de nos études, nous ont prodigué leurs enseignements, conseils et encouragements.

Nous remercions ensuite tous ceux qui, de près ou de loin, ont permis la réalisation de cette thèse, ainsi que tous ceux qui nous ont apporté leur aide pour la correction de ce manuscrit.

Qu'il nous soit permis également d'exprimer notre gratitude envers nos promoteurs Mr M.Berrah et Mr M.demidem pour leur encadrement durant toute l'année.

الملخص

في هذه الأشرطة، نطرقنا لمعالجة المشاكل التي
ذات سلوك لا خطي هندسياً ميكانيكياً
في المعالجة الاستاتيكية، نطرقنا في أول الأمر
لإستعمال بعض فرضيات تبسيلية و
لتطبيق تحليلية. وفي ثانياً الأمر، إستعملنا
طريقتين، نغمدنا إلى طريقة العناصر المحددة
أما القسم الثاني من هذه المعالجة الخاصة به
الديناميكي، نطرقنا إلى التحليل التكراري للجيل من
بعين الاختيار لجميع الوضائف المؤثرة

RESUME

Dans la présente thèse, une analyse statique et dynamique des structures constituées de câbles à été développée. De tels ouvrages ont pour principale caractéristique une importante non linéarité géométrique; de ce fait, la difficulté de solutionner ces problèmes se trouve largement accrue.

Pour l'analyse statique, en moyennant des hypothèses simplificatrices, une première méthode basée sur une formulation analytique a été présentée. Par la suite, deux autres méthodes, basées sur une formulation en éléments finis ont encore montré l'aisance de la M.E.F dans l'étude des structures.

La seconde partie de ce mémoire s'intéresse à l'analyse modale d'un câble en étudiant l'influence de différents paramètres. Ceci constitue la phase élémentaire et incontournable de l'analyse dynamique des structures à câbles. Une méthode appliquée à un câble à été présentée; cependant, elle peut facilement être étendue à l'étude des réseaux de câbles.

ABSTRACT

In the present thesis, is developed a static and dynamic analysis of structures composed of cables. Such works, are mainly characterised by their non-linear geometry; therefore, the difficulty faced in solving the problems is largely increased.

For the static analysis through the issue of simplifying hypothesis, a first method based on an analytical formulation has been presented. Later on, two other methods based on a formulation with finite element have also shown the easy use of this method in the study of structures.

The second part of this memoir deals with the modal analysis of cable through the study of the influence of different parameters. This constitutes the basic and relevant phase of the dynamic analysis of cables structures. One method applied to a cable has been established and presented in this work; yet, it can be easily expended to study of a network.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

	HISTORIQUE	1
CHAPITRE I	: INTRODUCTION	3
CHAPITRE II	: ETUDE DES CARACTERISTIQUES D'UN CABLE EXTENSIBLE	9
II.1	: GENERALITES SUR LES CABLES	9
II.2	: INFLUENCE DE "EA" ET "h" SUR UN CABLE EXTENSIBLE SOUMIS A L'ACTION DES CHARGES VERTICALES	11
II.2.1	: Hypothèses de travail	11
II.2.2	: Equations régissant le comportement d'un câble extensible	11
II.2.3	: Méthode de Newton-Raphson	19
II.2.4	: Influence de "EA" ($h = 0$)	22
II.2.5	: Influence de "h" ($EA = \text{Constante}$)	24
II.2.6	: Représentation graphique de la variation des réactions d'un câble extensible en fonction de "EA" et "h"	25
II.2.7	: Interprétation des résultats	26

II.3	: CABLE PARABOLIQUE ET INFLUENCE DE LA RIGIDITE FLEXIONNELLE "EI"	27
II.3.1	: Profil parabolique	27
II.3.2	: Influence de la rigidité flexionnelle ..	30
CHAPITRE III	: INTRODUCTION AU DOMAINE NON LINEAIRE ...	37
III.1	: INTRODUCTION	37
III.2	: METHODES MATRICIELLES	38
III.3	: ANALYSE DE LA MATRICE DEPLACEMENT POUR LES GRANDES DEFORMATIONS	40
III.3.1	: Signification énergétique de la matrice de rigidité géométrique K_G	41
III.3.2	: Solution générale du problème	42
III.4	: EXEMPLE DE CALCUL DE LA MATRICE K_G POUR UN ELEMENT BARRE	44
CHAPITRE IV	: ETUDE STATIQUE D'UN RESEAU DE CABLES PAR LA FORMULATION ANALYTIQUE	50
IV.1	: INTRODUCTION	50
IV.2	: HYPOTHESES DE TRAVAIL	50
IV.3	: PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL	51
IV.4	: THEOREME DE LA STATIONNARITE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE	51

IV.5	:	FORMULATION MATRICIELLE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE	53
IV.6	:	FORMULATION MATRICIELLE DU GRADIENT DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE	59
IV.7	:	METHODES ITERATIVES DE MINIMISATION DE FONCTIONNELLES	62
IV.7.1	:	Introduction	62
IV.7.2	:	Principe	62
IV.7.3	:	Classification des méthodes de recherche du minimum d'une fonction $f(x)$ à n variables	63
IV.7.4	:	Direction de descente et direction de plus grande pente	64
IV.7.5	:	Méthode du gradient	65
IV.7.6	:	Méthode du gradient conjugué	67
IV.7.7	:	Méthode de Huang	68
IV.8	:	EXEMPLES D'APPLICATION	71
IV.9	:	CONCLUSION	75
CHAPITRE V	:	ETUDE STATIQUE DES RESEAUX DE CABLES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	76
V.1	:	INTRODUCTION	76
V.2	:	METHODE DIRECTE	80
V.2.1	:	Etude d'un câble isolé	80
V.2.2	:	Etude d'un réseau de câbles	88
V.2.3	:	Exemples	99

V.2.4	:	Conclusion	101
V.3	:	METHODE ENERGETIQUE	102
V.3.1	:	Introduction	102
V.3.2	:	Structure à câble soumise à son poids propre.....	103
V.3.2.1:	:	Evaluation numérique de l'énergie potentielle totale.....	105
V.3.3	:	Structure à câble soumise à des charges ponctuelles.....	112
V.3.4	:	Résolution du problème	113
V.3.5	:	Exemples	114
V.3.6	:	Conclusion	118
CHAPITRE VI	:	ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES A CABLES	119
VI.1	:	INTRODUCTION	119
VI.2	:	PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE	120
VI.2.1	:	Principe de D'Alembert	120
VI.2.2	:	Principe des travaux virtuels	121
VI.3	:	PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE	122
a	:	Discrétisation spatiale	122
b	:	Formulation élémentaire	124
c	:	Formulation globale	124
VI.4	:	ETUDE MODALE	125

VI.4.1 :	Généralités	125
VI.4.2 :	Propriétés fondamentales des systèmes propres	126
	a- Valeurs propres	126
	b- Vecteurs propres	127
	c- Quotient de rayleigh	127
	d- Décalage des valeurs propres	128
VI.4.3 :	Méthodes de résolution	129
	a - Méthode d'itération directe	129
	b - Méthode d'itération inverse	133
	c - Méthode d'itération sur sous-espace	136
	- Itération inverse simultanée ...	137
	- Analyse de RITZ	139
	- Description de la méthode de Jacobi	141
	- Algorithme d'itération sur sous-espace	144
VI.5 :	VIBRATIONS D'UN SYSTEME A CARACTERISTIQUES NON LINEAIRES	147
VI.6 :	ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES D'UN CABLE	150
VI.6.1 :	Equations d'équilibre	150
VI.6.2 :	Représentation des matrices des masses	156
VI.6.3 :	Calcul de la matrice masse et des matrices de rigidité élémentaires	157

VI.6.4 :	Nondimensionnalisation du problème aux valeurs propres	163
VI.7 :	EXEMPLES	165
VI.8 :	Conclusion	171
CHAPITRE VII :	CONCLUSION	172
	BIBLIOGRAPHIE	174

HISTORIQUE

Dans le domaine de la conception des structures, il est possible pour l'ingénieur de combiner divers matériaux et systèmes selon les critères de résistance ainsi que le comportement et les rendements de ces structures. Parmi ces dernières, on distinguera les structures à câbles utilisant les câbles comme éléments résistants et dont on s'intéresse de plus en plus depuis quelques années.

Ainsi, les premiers ouvrages câblés ont été les ponts suspendus; dans ces derniers les organes porteurs sont les câbles qui reportent ces charges et les surcharges du tablier d'une part aux pylônes intermédiaires et d'autre part à des massifs d'ancrage.

La simplicité de leur construction, en a fait l'un des premiers types de ponts, les câbles étant constitués par des lianes et des cordages puis par des chaînes en fer forgé ; il semble que les chinois s'en servaient il y a plus de deux mille ans.

Les ponts suspendus avec câbles en chaînes ou bar à oeil se sont tout d'abord développés en Angleterre et en Amérique,

les câbles en chaînes ont été remplacés par des câbles en fils de fer parallèles vers le début du XIX siècle.

Les ponts suspendus ont été largement utilisés au cours du XIX siècle, pendant lequel de notables perfectionnements leur ont été apportés. Après une éclipse due en partie à la constatation de certains inconvénients d'entretien, ils connaissent un regain d'actualité dans tous les grands franchissements de brèche lié au développement accru des voies de communication.

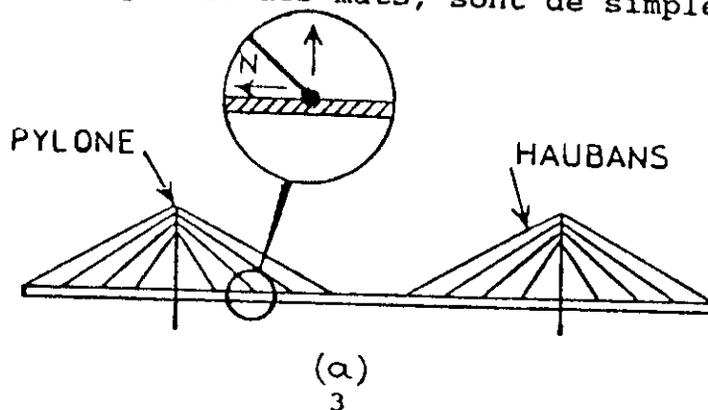
CHAPITRE I

INTRODUCTION

Ces dernières années, le câble intervient dans les structures les plus variées et permet une liberté de conception architectural et structurale très vaste . On peut donc prétendre classer les câbles et les structures en câbles. Toutefois , on constate selon la forme et la fonction du câble les types essentiels suivants.

I.1 : Haubans, suspentes et tirants

Lorsque le câble est rectiligne, il contribue à la structure comme une barre biarticulée. Comme on peut le voir sur la figure (I.1), les câbles qui supportent le tablier de chacun des ponts à partir des mâts, sont de simples barres



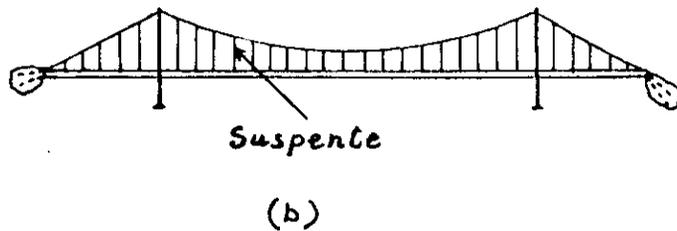
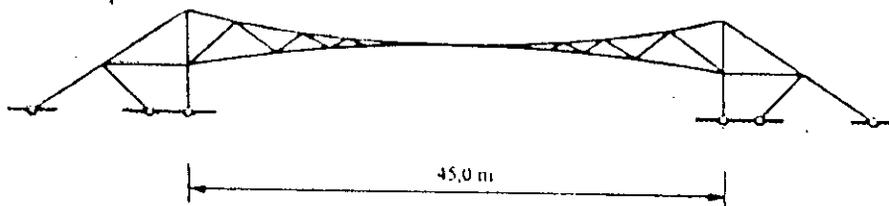


Figure I.1

I.2 : Câbles courbes :

Lorsque les charges sont réparties sur un câble principal qui s'étend sur une grande portée, ce câble est nécessairement courbe. L'exemple typique et très ancien est le pont suspendu. La figure (I.2) montre un autre exemple de même nature ; la toiture étant légère (tôle d'acier par exemple), le câble inférieur dit contre-câble, sert à mettre le câble supérieur en prétention et à lutter contre le vent (soulèvement et oscillation).

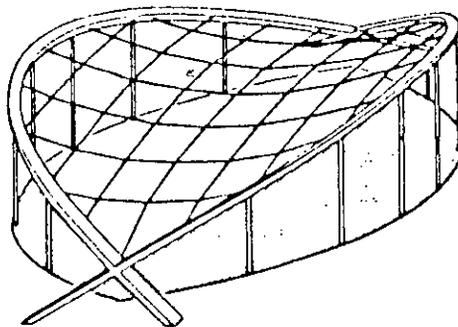


structure plane à câble courbe
(système Jawerth)

Figure I.2

I.3 : Réseaux

Si deux séries de câbles se croisent de manière à former une surface courbe, on obtient un réseau de câbles. la figure (I.3) illustre cette possibilité qui permet de réaliser d'élégantes et vastes toitures suspendues très légères. Chaque tronçon de câble, entre deux noeuds, se comporte comme une barre .



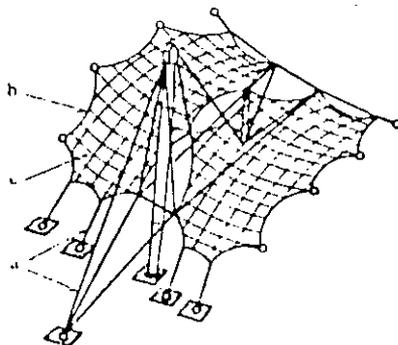
Réseau suspendu entre deux arcs paraboliques

Figure I.3

Les caractéristiques essentielles de ces diverses structures sont leur très faible poids, leur sensibilité au vent, l'importance d'une étude très poussée des fondations et des massifs d'ancrage, et l'importance d'une conception très saine des organes de liaison des câbles (noeuds, attaches, selles), dont le prix est déterminant.

Remarque :

Il est à noter que l'on trouve souvent réunis, sur la même structure les trois types de câbles précédemment décrits.



couverture du stade de munich

Figure I.4

- a - Haubans
- b - Câble courbe
- c - Réseau

I.4 : Précontraintes

Par les câbles prétendus, on peut introduire un jeu de forces internes initiales dans les structures, qui sont alors

dites "précontraintes". Le plus caractéristique est le béton précontraint, le béton ne résiste pas à la traction (Figure I.5); on y supplée par l'introduction de barres d'acier, dites armatures, ce qui conduit au béton armé (Fig b); mais il peut être encore plus avantageux de combattre la traction par une précontrainte introduite à l'aide d'un câble tendu prenant appui sur le béton : la traction du câble devient, par réaction, une force de compression dans le béton (Fig c). De plus en incurvant le câble, on lui fait supporter le poids propre du béton. La plus part des grandes structures en béton (poutres, plaques, coques) sont aujourd'hui précontraintes par de longs câbles courbes:

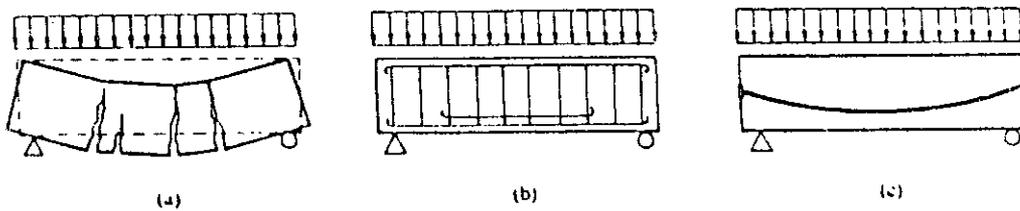


Figure I.5 Poutre simple en béton

- a - Béton non armé
- b - Béton armé
- c - Béton précontraint par câble courbe

II.5 : Emplois divers

le câble est utilisé comme organe de support et de

traction des funiculaires, téléphériques, ascenseurs, crochets des engins de levage (grues...) ; il est aussi utilisé dans la marine pour l'accostage, le remorquage et l'amarrage.

Dans ce présent mémoire, on s'intéressera au calcul des réseaux de câbles droits ou fléchis soumis à des chargements donnés, ceci nous permettra de passer aisément au calcul des ouvrages constitués partiellement ou entièrement de câbles comme éléments porteurs ; toutefois, l'analyse et le calcul de ces ouvrages est complexe car les relations contraintes-déformations sont hautement non linéaires et aussi car les grandes déformations que présentent ces structures introduisent une non linéarité géométrique qu'on doit prendre en compte.

CHAPITRE II

ETUDE DES CARACTERISTIQUES D'UN CABLES

II.1 GENERALITES SUR LES CABLES

Le câble est un élément structural important et fort utilisé. Vu son faible diamètre vis-à-vis de sa longueur, ainsi que sa constitution propre, il est très souple et on admet généralement qu'il est parfaitement flexible. Il n'offre donc de la résistance ni à la torsion, ni à la flexion ni à l'effort tranchant, ni à la compression. Dans le câble ne peut naître que l'effort normal de traction, souvent appelé "tension" dirigée suivant la tangente à l'axe du câble.

Ce dernier se présente généralement comme un gros cordage ou un faisceau de fils de faibles diamètres (1.27cm à 10.2cm), ces derniers étant en acier élaboré au four Martin ou au four électrique (0,30 à 0,85 % de carbone); ces fils sont utilisés tels qu'ils sortent du banc de tréfilage à froid donc très écrouis ; la résistance à la rupture de cet acier est très élevée ($R=100$ à 200 daN/mm^2).

Les câbles en acier peuvent être assemblés de différentes manières :

- Le Toron :

C'est un assemblage de fils d'acier enroulés hélicoïdalement autour d'un fil central en une ou plusieurs couches symétriques.

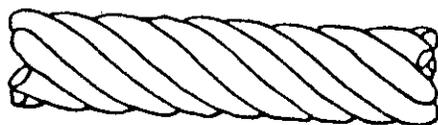


Figure II.1

- Le cordage :

C'est un assemblage de Torons autour d'un Toron central.

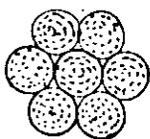


Figure II.2

- Câbles à fils parallèles :

C'est un assemblage de fils parallèles que l'on peut retrouver dans le cas des câbles principaux d'un pont suspendu.

II.2 INFLUENCE DE EA ET h SUR UN CÂBLE EXTENSIBLE SOUMIS A L'ACTION DE CHARGES VERTICALES

II.2.1 Hypothèses de travail:

- La section du câble est uniforme, notée: A
- Le matériau constituant le câble est homogène et linéairement élastique
- La rigidité translationnelle du câble EA est une quantité finie ($EA \neq \infty$)
- Le câble est parfaitement flexible ($EI = 0$)
- Le câble est suspendu en deux points fixes n'étant pas nécessairement au même niveau
- Le câble est soumis à son poids propre ainsi qu'à des charges verticales.

II.2.2 Equations régissant le comportement d'un câble extensible:

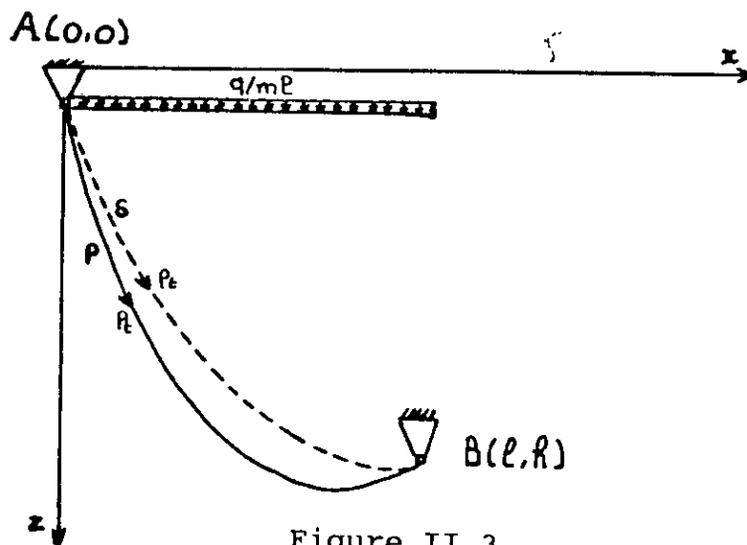


Figure II.3

Pour repérer un point P_t du câble, on fera usage des coordonnées suivantes:

- Coordonnées cartésiennes (x et z)
- Coordonnées Lagrangiennes " s " associées au câble non déformé
 $s = 0$ en A, $s = L_0$ en B avec:

L_0 : longueur du câble non déformé.

- Coordonnées Lagrangiennes " P " associées au câble déformé
 $P = 0$ en A, $P = L$ en B avec:

L : longueur du câble déformé sous l'effet de son poids propre.

$$W = m \cdot g \cdot L_0$$

avec:

m : étant la masse par unité de longueur.

Le câble prend alors une configuration d'équilibre particulière.

On suppose qu'un point caractéristique P_t (de coordonnées Lagrangiennes " s ") se déplace pour occuper une nouvelle position, repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y) et ses coordonnées Lagrangiennes " P " du câble déformé.

Isolons un tronçon délimité par $A(0,0)$ et P_t :

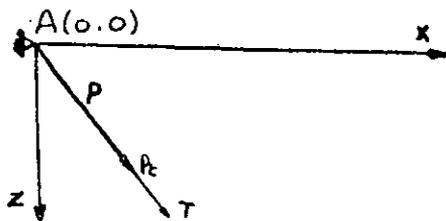


Figure II.4

H et V: sont les réactions aux noeuds

T: est la tension du câble au point P_t

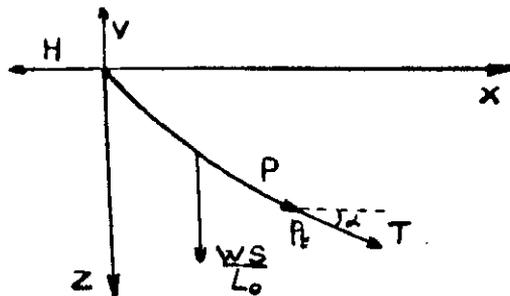


Figure II.4.1

On a:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \left. \frac{\partial x}{\partial P} \right|_{P_t} = \frac{\partial x}{\partial P} \\ \sin \alpha &= \left. \frac{\partial z}{\partial P} \right|_{P_t} = \frac{\partial z}{\partial P} \end{aligned} \quad (2.1)$$

a) Equations d'équilibre:

- Equilibre horizontal:

$$T \frac{\partial x}{\partial P} = H \quad (2.2)$$

- Equilibre vertical:

$$T \frac{\partial z}{\partial P} = V - \frac{WS}{L_0} \quad (2.3)$$

b) Loi de comportement:

$$T = A \cdot \sigma = EA\varepsilon$$

Or:

$$\varepsilon = \frac{dP - ds}{ds}$$

D'où:

$$T = EA \left(\frac{dP}{ds} - 1 \right) \quad (2.4)$$

c) Les conditions aux limites:

$$\text{Noeud A : } s = 0, x = 0, z = 0, P = 0$$

$$\text{Noeud B : } s = L_0, x = l, z = h, P = L$$

d) Formulation de T(s):

Des expressions (2.2) et (2.3) on a:

$$\frac{\partial x}{\partial P} = \frac{H}{T} \quad \frac{\partial z}{\partial P} = \frac{\left(V - \frac{Ws}{L_0} \right)}{T}$$

Or:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial P} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial P} \right)^2 = 1$$

D'où:

$$\left(\frac{H}{T}\right)^2 + \left(\frac{V - \frac{WS}{L_0}}{T}\right)^2 = 1$$

Et donc:

$$T(s) = \sqrt{H^2 + \left(V - \frac{WS}{L_0}\right)^2} \quad (2.5)$$

e) Formulation de $x(s)$:

On sait que:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dP} \frac{dP}{ds}$$

De l'expression (2.2) on déduit:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{H}{T} \frac{dP}{ds} \quad (2.6)$$

D'autre part de l'expression (2.4) on a:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{T}{EA} + 1 \quad (2.7)$$

En remplaçant (2.5) et (2.7) dans (2.6) on obtient:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{H}{EA} + \frac{H}{\sqrt{H^2 + \left(V - \frac{Ws}{L_0}\right)^2}}$$

$$dx = \left[\frac{H}{EA} + \frac{H}{\sqrt{H^2 + \left(V - \frac{Ws}{L_0}\right)^2}} \right] ds$$

L'intégration de cette équation différentielle nous donne:

$$x(s) = \frac{Hs}{EA} + \frac{HL_0}{W} \left[\sinh^{-1}\left(\frac{V}{H}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{V - \frac{Ws}{L_0}}{H}\right) \right] \quad (2.8)$$

f) Formulation de $z(s)$:

On sait que:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dP} \frac{dP}{ds}$$

Des expression (2.3) et (2.4) on a:

$$\frac{dz}{dP} = \frac{V}{T} - \frac{Ws}{TL_0} \quad \frac{dP}{ds} = \frac{T}{EA} + 1$$

d'où:

$$\frac{dz}{ds} = \left(\frac{V}{T} - \frac{Ws}{TL_0} \right) \left(\frac{T}{EA} + 1 \right)$$

L'intégration de cette dernière équation nous donne:

$$z(s) = \frac{WS}{EA} \left(\frac{V}{W} - \frac{s}{2L_0} \right) + \frac{HL_0}{W} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V - \frac{Ws}{L_0}}{H} \right)^2} \right] \quad (2.9)$$

g) Formulation des réactions H(s) et V(s):

A partir des expressions de x(s) et z(s) ainsi que des conditions aux limites:

$$z(s=L_0) = h$$

$$x(s=L_0) = 1$$

On obtient les deux équations régissant H et V:

$$1 = \frac{HL_0}{EA} + \frac{HL_0}{W} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V-W}{H} \right) \right\} \quad (2.10)$$

$$h = \frac{WL_0}{EA} \left(\frac{V}{W} - \frac{1}{2} \right) + \frac{HL_0}{W} \left\{ \sqrt{1 + \frac{V^2}{H^2}} - \sqrt{1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2} \right\} \quad (2.11)$$

- Cas particulier:

Si le câble est suspendu en deux points de même niveau

(h = 0) alors:

L'expression (2.11) donne:

$$V = \frac{W}{2} \quad (2.12)$$

L'expression (2.10) devient:

$$\sinh\left(\frac{Wl}{2HL_0} - \frac{W}{2EA}\right) = \frac{W}{2H} \quad (2.13)$$

Il est à noter que toutes les équations précédentes sont également valables dans le cas où W est une charge uniformément répartie sur la longueur du câble et de même direction que le poids.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'influence des paramètres EA et h sur un câble. Cela revient à déterminer la variation des réactions aux noeuds en fonction des paramètres précédents. On aura donc pour chaque cas à résoudre le système suivant:

$$F(H, V) = \frac{HL_0}{EA} + \frac{HL_0}{W} \left\{ \sinh^{-1}\left(\frac{V}{H}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{V-W}{H}\right) \right\} - l \quad (2.14)$$

$$G(H, V) = \frac{WL_0}{EA} \left(\frac{V}{W} - \frac{1}{2} \right) + \frac{HL_0}{W} \left\{ \sqrt{1 + \frac{V^2}{H^2}} - \sqrt{1 + \left(\frac{V-W}{H}\right)^2} \right\} - h$$

La solution de ce système est établie par la résolution des équations (2.10) et (2.11). Pour cela, plusieurs méthodes peuvent être utilisées.

Connaissant les valeurs approximatives des réactions H et V , la méthode de Newton-Raphson se présente comme étant la plus recommandée pour sa rapidité de convergence ainsi que pour sa

précision.

II.2.3 Méthode de Newton-Raphson:

Un système de n équations non linéaires à n inconnues peut toujours s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ce système peut se mettre sous la forme vectorielle suivante:

$$F(X) = 0 \tag{2.16}$$

Où les vecteurs X et F sont donnés par leurs composantes:

$$x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad F = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$$

Soit à résoudre dans notre cas le système (2.14) de deux équations à deux inconnues:

$$f(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad g(X, Y) = 0 \tag{2.17}$$

Après avoir localisé grossièrement l'intervalle contenant la solution recherchée, nous prenons comme couple initial (X_0, Y_0) , deux valeurs quelconques appartenant à cet intervalle.

On pose alors:

$$X = X_0 + \hat{\Delta}X \quad \text{et} \quad Y = Y_0 + \hat{\Delta}Y$$

et:

$$f(X, Y) = f(X_0, Y_0) + \Delta X f'_x(X_0, Y_0) + \Delta Y f'_y(X_0, Y_0) \quad (2.18)$$

$$g(X, Y) = g(X_0, Y_0) + \Delta X g'_x(X_0, Y_0) + \Delta Y g'_y(X_0, Y_0)$$

C'est un système linéaire par rapport à ΔX et ΔY que l'on résout facilement, en posant:

$$f_0 = f(X_0, Y_0) \quad f_{x_0}' = f'_x(X_0, Y_0)$$

En adoptant des notations analogues pour g , on aura:

$$X_1 = X_0 + \Delta X \quad , \quad Y_1 = Y_0 + \Delta Y$$

$$\Delta X = \frac{g_0 f'_y Y_0 - f_0 g'_y Y_0}{f'_x X_0 g'_y Y_0 - g'_x X_0 f'_y Y_0} \quad (2.19)$$

$$\Delta Y = \frac{f_0 g'_x X_0 - g_0 f'_x X_0}{f'_x X_0 g'_y Y_0 - g'_x X_0 f'_y Y_0}$$

Ce processus est répété jusqu'à convergence, obtenue lorsque (X_p, Y_p) sont suffisamment proches de (X_{p-1}, Y_{p-1}) ; ce qui se produit si (X_0, Y_0) est proche de la solution de (2.17).

Ce qui précède se généralise aisément au cas de systèmes de n équations à n inconnues (2.15). On part d'une solution présumée qu'il faudra avoir localisée auparavant.

L'équation (2.16) s'écrit alors:

$$F(X) - F(X_0 + \Delta X) - F(X_0) + [J(X_0)]\Delta X = 0 \quad (2.20)$$

où $[J(X_0)]$ est la matrice jacobienne $[J(X)]$ du système en $X = X_0$; soit:

$$[J(X)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

(2.20) est un système linéaire de n équations à n inconnues $\Delta X = \{X_1, \dots, X_n\}$, qui se résout par d'autres méthodes pour donner:

$$\Delta X = -[J(X_0)]^{-1}F(X_0) \quad \text{d'où} \quad X_1 = X_0 + \Delta X$$

On poursuit le processus jusqu'à convergence, obtenue lorsque X_p est suffisamment proche de X_{p-1} . On notera que pour déterminer X_0 avec une bonne approximation, il existe certaines méthodes qu'on citera plus loin dans le sous chapitre (IV.7).

* Avantage de la méthode:

L'avantage que présente la méthode de Newton-Raphson est la convergence quadratique.

* Inconvénients de la méthode:

Ils peuvent se résumer comme suit:

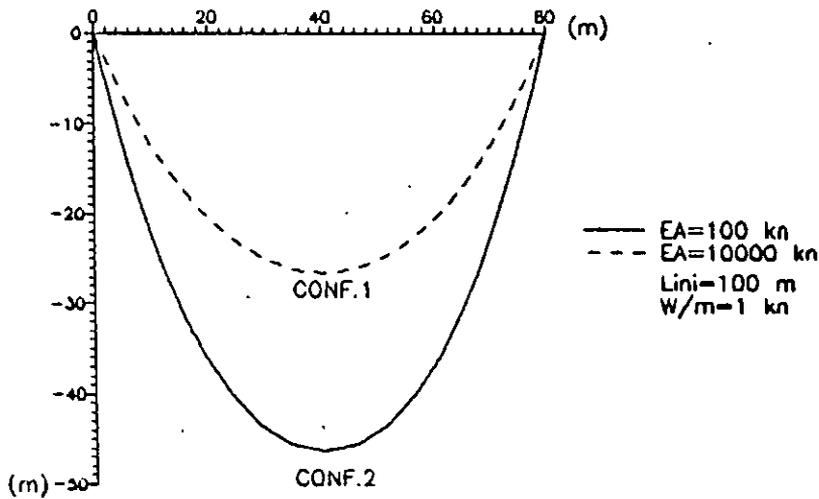
- De grands nombres de calculs demandés à chaque itération.
- La possibilité de non convergence de la suite des ** qui est l'inconvénient majeur de la méthode lorsque l'approximation x_0 n'est pas suffisamment proche de la solution recherchée.
- Lorsque des irrégularités dans la fonction se présentent au voisinage de cette solution, la méthode ne peut être utilisée.

L'algorithme de résolution du système (2.14) par la méthode de Newton-Raphson est le suivant:

- Adopter une solution initiale H_0, V_0
- Calculer $F(H_0, V_0)$, $G(H_0, V_0)$ et $J(H_0, V_0)$
- Calculer ΔH et ΔV
- Vérifier la convergence (voir si on a atteint la précision voulue):
 - * Si oui on arrête les itérations
 - * Si non on incrémente H et V de ΔH et ΔV et on recommence le processus

II.2.4 Influence de EA ($h = 0$):

L'étude de l'influence de la rigidité translationnelle EA sur le comportement d'un câble se fera en considérant le cas où ce dernier est suspendu en deux points A et B de même niveau.



Differentes configurations d'equilibre de câbles pour des EA differentes

Figure II.5

La résolution du système (2.14) par la méthode de Newton-Raphson pour divers valeurs de EA nous donne la variation des réactions H et V. C'est ainsi que l'on obtient le graphe suivant:

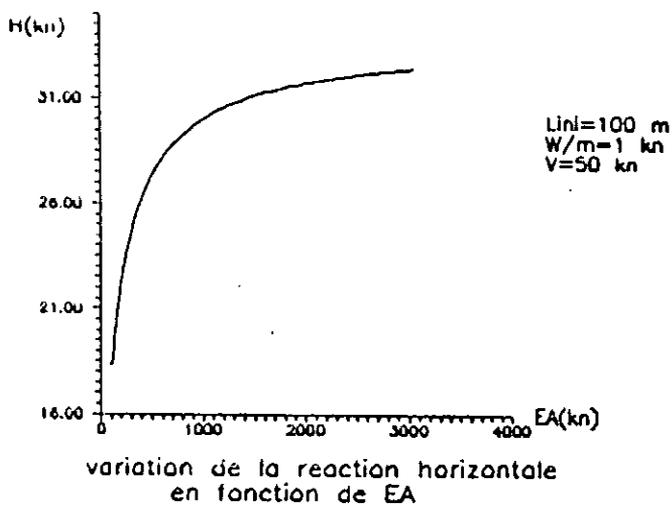


Figure II.6

II.2.5 Influence de h ($EA = \text{constante}$):

La valeur de la rigidité translationnelle est prise égale à $3 \cdot 10^7$ KN; on fera ainsi varier la différence de hauteur entre les points A et B; la variation des réactions H et V en fonction de cette dernière est illustrée sur les graphes suivants:

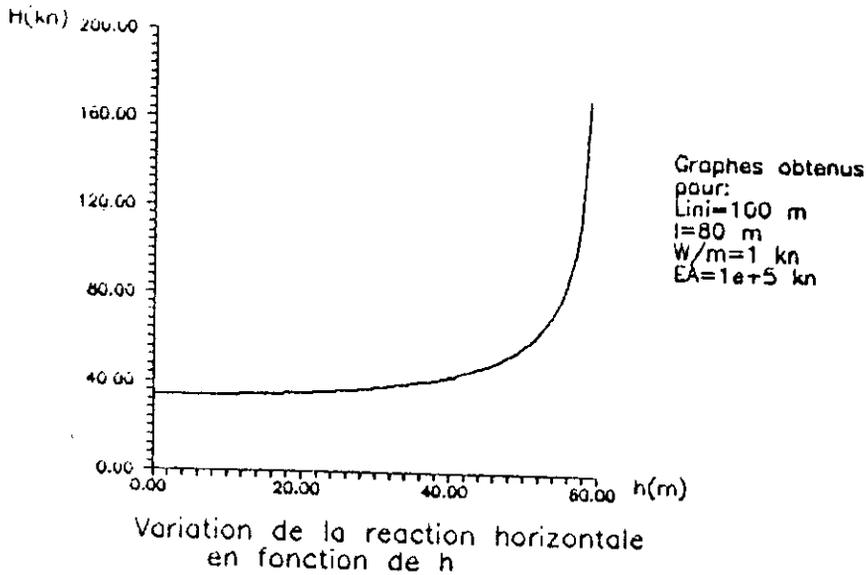
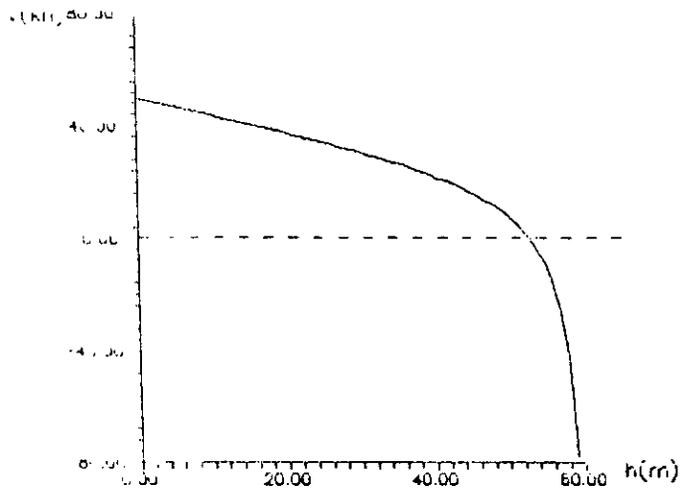


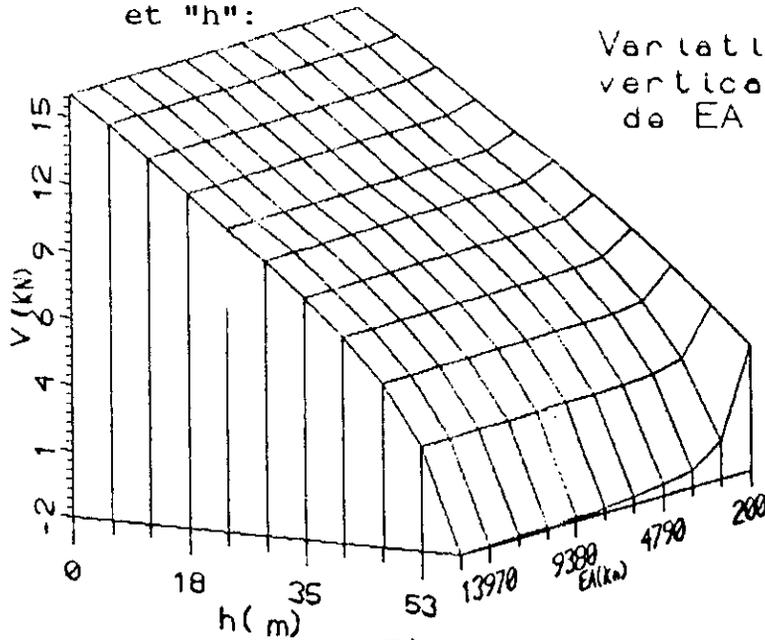
Figure II.7



Variations de la réaction verticale en fonction de h

Figure II.8

II.2.6 Représentation graphique de la variation des réactions d'un câble extensible en fonction de "EA" et "h":



Variation de la réaction verticale en fonction de EA et h

* Pour:
 $L = 80\text{m}$
 $\ell = 50\text{m}$
 $mg = 0.4\text{ KN/m}$

Figure II.9

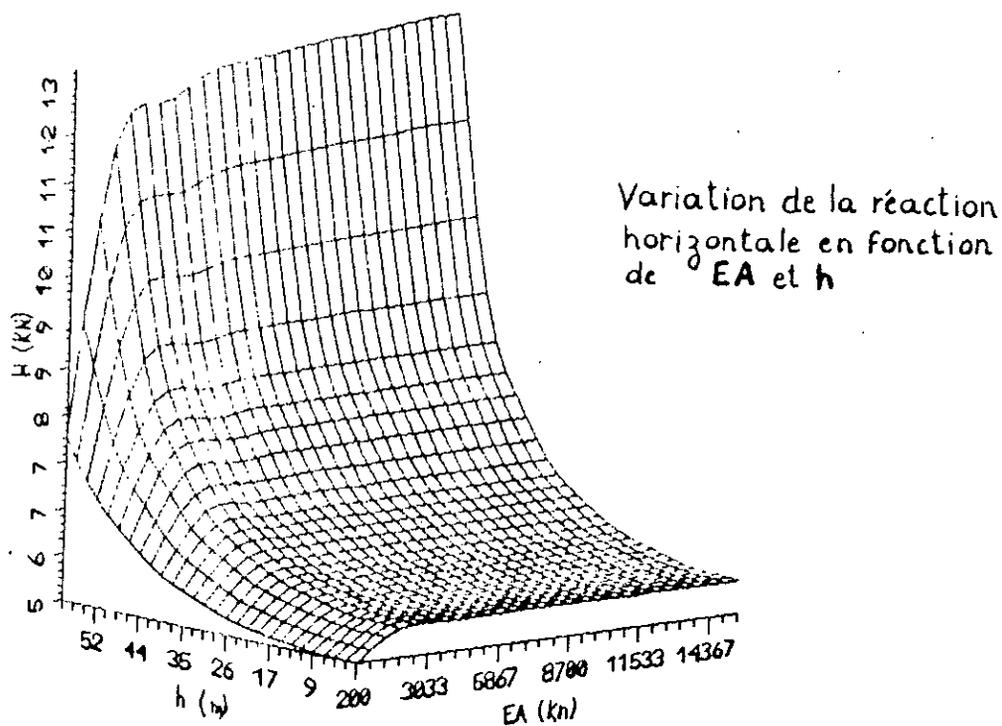


Figure II.10

II.2.7 Interprétation des résultats:

- Quand la valeur de la rigidité translationnelle "EA" d'un câble augmente, la réaction horizontale au niveau du noeud inférieur augmente tandis que la réaction verticale diminue.

En effet, pour un même poids par mètre linéaire, la déformée d'un câble dépendant de sa rigidité translationnelle; l'augmentation de cette dernière entrainera une diminution de la flèche.

Or, la tension "T" au noeud étant tangente à l'axe du câble, cette propriété ne sera vérifiée que si H augmente et V

diminue.

- En augmentant la différence de niveau h entre les noeuds A et B, la réaction verticale V au niveau du noeud inférieur B diminue tandis-que la réaction horizontale H augmente.

En effet, ceci peut être expliqué par analogie avec le cas où la rigidité translationnelle augmente, ce qui confère au câble une configuration d'équilibre de moins en moins fléchie; or la tension T au noeud B étant tangente à l'axe du câble, ceci ne peut être conservé que si la réaction horizontale augmente et que la réaction verticale diminue.

II.3 CABLE PARABOLIQUE ET L'INFLUENCE DE LA RIGIDITE

FLEXIONNELLE "EI"

Dans le calcul des structures à câbles, l'influence de la rigidité flexionnelle est en générale négligée. Dans ce qui suit, nous étudierons les effets de EI sur un cas simple, à savoir, un câble parabolique suspendu en deux points de même niveau.

II.3.1 Profil parabolique:

La solution exacte du problème d'un câble élastique est relativement lourde; si le profil du câble est suffisamment aplati (câble proche de sa corde), une théorie approchée peut être adoptée du moins si les effets élastiques sont négligés.

Envisageons dès lors l'étude d'un câble à faible flèche

vérifiant les hypothèses suivantes:

- Section transversale uniforme
- Câble parfaitement flexible
- Câble inextensible
- Câble suspendu en deux points fixes A et B de même niveau
- Câble soumis à son poids propre uniquement

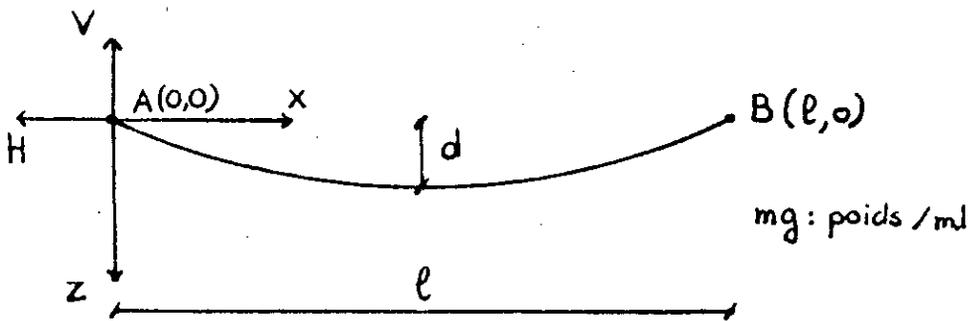


Figure II.11

On sait que:

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} = -mg \left(1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

Si le profil du câble est aplati ($d/l < \dots 1/8 \dots$), la quantité $(dz/dx)^2$ est négligeable par rapport à l'unité, et donc:

La solution de (2.22) avec les conditions aux frontières:

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} = -mg \quad (2.22)$$

$$z = 0 \text{ en } x = 0$$

$$z = 0 \text{ en } x = 1$$

est:

$$z = \frac{mg}{2H} x(1-x) \quad (2.23)$$

Pour calculer le paramètre H on exploitera la condition:

$$L_0 = \int ds = \int_0^1 \frac{ds}{dx} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \quad (2.24)$$

Or:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{mg}{2H} (1-2x) \quad (2.25)$$

Il en résulte que:

$$L_0 = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{2H}(1-2x)\right)^2} dx \quad (2.26)$$

L'intégration de cette dernière nous donne:

$$L_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{2H}\right)^2} + \frac{H}{mg} \sinh^{-1} \left(\frac{mg}{2H}\right) \quad (2.27)$$

La résolution de cette équation non linéaire donne H.

La relation (2.23) permet alors l'évaluation quantitative de la déformée.

Une autre façon de quantifier la géométrie déformée consiste à évaluer la flèche F à mi-portée:

$$F = z_{(x=\frac{l}{2})} = \frac{mgl^2}{8H} \quad (2.28)$$

La relation (2.27) devient:

$$L_0 = \frac{l}{2} \sqrt{1 + 16\left(\frac{F}{l}\right)^2} + \frac{l}{8}\left(\frac{l}{F}\right) \sinh^{-1}\left(\frac{4F}{l}\right) \quad (2.29)$$

La solution de cette équation non linéaire permet l'évaluation directe de la géométrie $z = z(x)$:

$$z = 4F\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (2.30)$$

II.3.2 Influence de la rigidité flexionnelle:

Pour étudier l'effet de la raideur flexionnelle,

considérons une poutre de raideur "EI", simplement appuyée, et soumise à l'action de son poids propre et d'une charge axiale H.

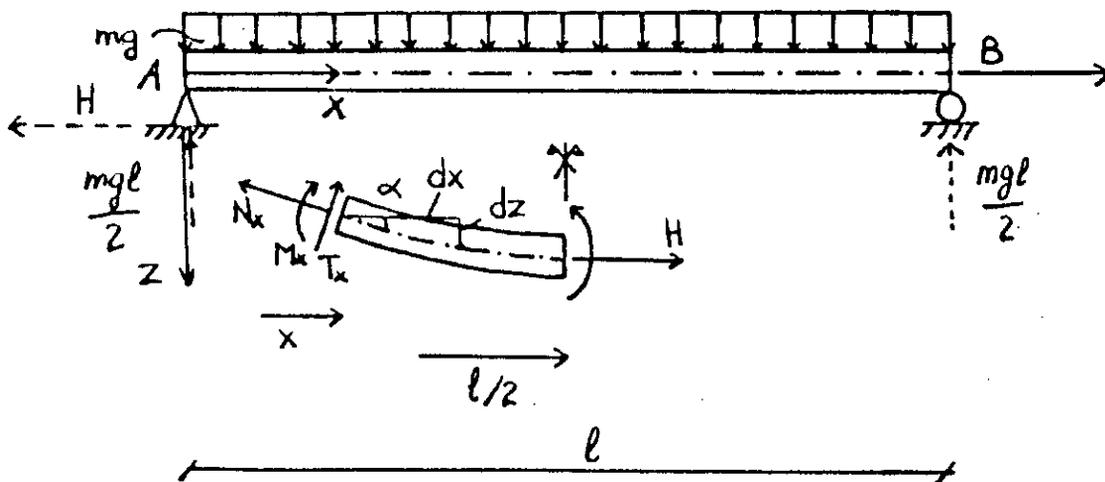


Figure II.12

En regime de petits déplacements, dz/dx est petit de sorte que α soit petit (voir figure II.12). On admettra que:

$$\sin\alpha = \frac{dz}{dx} \quad (2.31)$$

$$\cos\alpha = 1$$

Il en résulte que l'équilibre vertical du tronçon compris entre la section x et la section située à mi-portée s'exprime par la relation:

$$T_x + N_x \frac{dz}{dx} = mg \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (2.32)$$

Or :

$$T_x = \frac{dM_x}{dx} \quad (2.33)$$

$$M_x = -EI \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (2.34)$$

Il en résulte que (2.32) se réécrit:

$$-EI \frac{d^3 z}{dx^3} + H \frac{dz}{dx} - mg \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (2.35)$$

Car $N_x = H$ (équilibre horizontal)

Les conditions frontières sont les suivantes:

$$\text{en A : } x = 0, z = 0, \frac{d^2 z}{dx^2} = 0 \quad (M = 0) \quad (2.36)$$

$$\text{en B : } x = l, z = 0, \frac{d^2 z}{dx^2} = 0 \quad (M = 0)$$

En posant:

$$k = \sqrt{\frac{H}{EI}} \quad (2.37)$$

L'équation (2.35) se réécrit:

$$\frac{d^3 z}{dx^3} - k^2 \frac{dz}{dx} = -\frac{mg}{EI} \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (2.38)$$

La solution générale de cette équation différentielle est:

$$z = z_p + z_h \quad (3.39)$$

où:

$$z_p = \frac{mg}{2H} x(1-x) \quad (2.40)$$

$$z_h = C_0 + C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx \quad (2.41)$$

Les conditions frontières sont satisfaites pour:

$$C_0 = -\frac{mg}{k^2H}, \quad C_2 = -C_0, \quad C_1 = \frac{mg}{k^2H} \left(\frac{1 - \cosh kl}{\sinh kl} \right) \quad (2.42)$$

La solution générale s'écrit donc:

$$z = \frac{mgl^2}{H} \left(\frac{1}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{1}{k^2 l^2} \left(1 + \tanh \frac{kl}{2} \sinh kx - \cosh kx \right) \right)$$

En posant:

$$\gamma^2 = k^2 l^2 = \frac{Hl^2}{EI}$$

On obtient:

Calculons à présent la flèche à mi-portée:

$$F = \frac{mgl^2}{8H} \left(1 - \frac{8}{\gamma^2} \left(1 - \operatorname{sech} \frac{\gamma}{2} \right) \right) \quad (2.44)$$

$$z = \frac{mgl^2}{H} \left(\frac{1}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{1}{\gamma^2} \left(1 + \tanh \frac{\gamma}{2} \sinh \frac{\gamma x}{l} - \cosh \frac{\gamma x}{l} \right) \right) \quad (2.43)$$

On remarquera que le flèche F est toujours inférieure à $mgl^2/8H$.

Examinons à présent quelques cas limites suivant la valeur du paramètre γ mesurant l'importance relative de l'effet "câble" et de l'effet "poutre":

1 - Si γ est petit (action poutre prépondérante):

En développant $\operatorname{sech} \frac{\gamma}{2}$ en série de Taylor:

$$\operatorname{sech} \frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{2!} + \frac{5\left(\frac{\gamma}{2}\right)^4}{4!} \dots \quad (2.45)$$

Il en résulte que:

$$F = \frac{5 mgl^4}{384 EI} \quad (2.46)$$

Ceci correspond bien à la flèche à mi-portée de la poutre simplement appuyée, soumise à l'action d'une charge uniformément répartie.

2 - Si γ est grand (action câble prépondérante):

L'expression de la flèche F tend vers la limite:

$$F - F_c = \frac{mgl^2}{8H} \quad (2.47)$$

Cette expression correspond à la relation (2.28) vue précédemment.

Pour voir à partir de quelle valeur de γ l'effet câble devient prépondérant traçons la courbe F/F_c en fonction de γ :

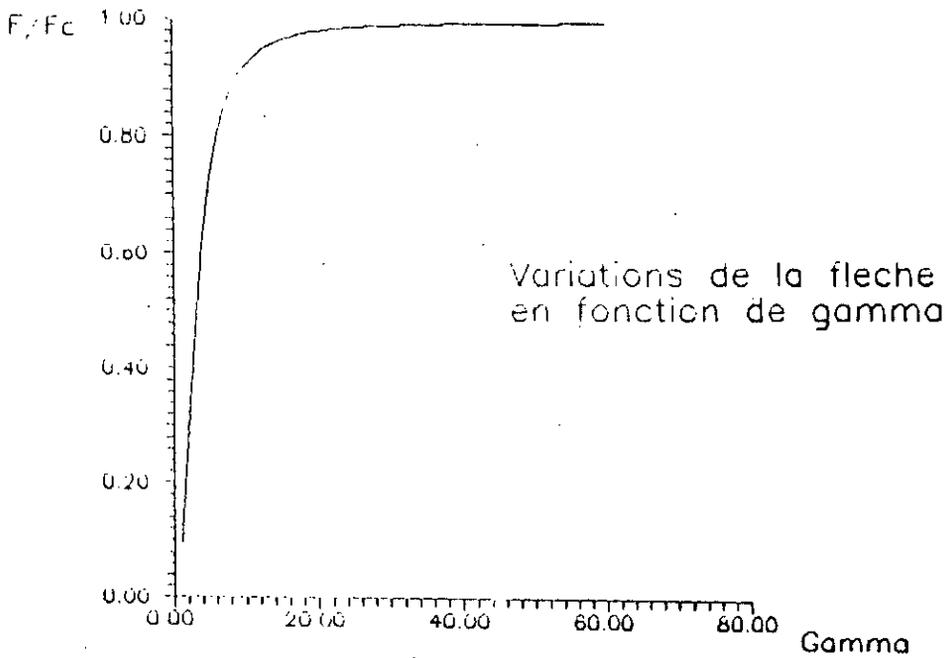


Figure II.13

On constatera que l'effet câble est prépondérant pour γ supérieur ou égal à 30 m.KN⁻¹.

Or l'ordre de grandeur des valeurs de γ pour un câble réel peuvent être illustrées à partir de l'exemple suivant:

$$E = 10^8 \text{ KN/m}^2$$

$$A = 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = 50 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4$$

$$l = 10 \text{ m}$$

$$H = 0,31 \text{ KN}$$

On aura donc:

$$\gamma = 80$$

Ce qui justifie le fait de négliger l'effet rigidité flexionnelle des câbles.

CHAPITRE III

INTRODUCTION AU CALCUL DE STRUCTURES NON LINEAIRES

III.1 INTRODUCTION

Dans une structure, la relation entre les variables cinématiques (déplacements) et les variables mécaniques (forces) peut devenir non linéaire pour deux raisons.

La première, parce que le matériau n'obéit pas à la loi linéaire de Hooke, en d'autres termes son équation constitutive est non linéaire. C'est la classe des problèmes de non linéarité matérielle. Les plus importants problèmes de cette classe sont ceux de l'élasto-plasticité et de viscoélasticité non linéaire.

La seconde, parce que même si les déformations sont linéairement élastiques, et que la loi de Hooke locale est par conséquent respectée, les déplacements de la structure changent de façon sensible le mode d'action des forces, c'est à dire que la loi de Hooke n'est pas applicable à la structure entière. Il existe alors des effets de second ordre à prendre en considération et il faudra donc analyser la structure par une

théorie adéquate; on peut dire que cette classe est caractérisée par une non linéarité géométrique.

En outre, Les méthodes d'analyse matricielle pour les structures linéaires peuvent être étendues au cas non linéaire. Cependant, on notera que pour ce cas, les solutions des équations régissant la structure ne peuvent être données explicitement, ce qui nous amènera à résoudre le problème non linéaire par l'utilisation de méthodes itératives.

III.2 méthodes matricielles

Les méthodes matricielles d'analyse des structures peuvent se classer suivant le choix des inconnues, en méthodes des déplacements et méthodes des forces. Dans la méthode des déplacements, on formule le problème en fonction des déplacements nodaux généralisés, alors que dans la méthode des forces, c'est en fonction des forces nodales généralisées (forces internes ou réactions d'appui). Donnons un aperçu sur ces deux méthodes:

1/ Méthode des forces:

La méthode est basée sur une approche énergétique utilisant l'énergie de déformation complémentaire. On peut distinguer différentes phases de calcul:

- Formulation élémentaire: Calcul des caractéristiques élémentaires de flexibilité.

- Formulation globale:

- * Choix des inconnues hyperstatiques et écritures des équations d'équilibre des noeuds
- * Recherche des conditions de compatibilité des coupures simples. A ce stade on peut calculer les inconnues hyperstatiques et donc tout les efforts internes en fonction des forces extérieures.
- * Calcul de la matrice de flexibilité de la structure pour la détermination des déplacements nodaux.

2/ Méthode des déplacements:

Dans cette méthode on formule le problème en fonction des déplacements aux noeuds. On peut mettre en évidence les différentes étapes de calcul suivantes:

- Formulation élémentaire: calcul des matrices de rigidité élémentaires.
- Formulation globale:
 - * Assemblage des matrices de rigidité de manière à satisfaire les équations d'équilibre des noeuds.
 - * Prise en compte des conditions de déplacements imposés
 - * Résolution par rapport aux inconnues de déplacements
 - * Calcul des contraintes dans les éléments

Remarque:

Ces deux méthodes sont facilement systématisées et donc programmées sur ordinateur. On remarque néanmoins que la

méthode des forces nécessite un choix préalable (et non automatique) d'inconnues hyperstatiques en fonction de la topologie de la structure, et des cas de charges appliquées. Ceci limite sérieusement le domaine d'application de la méthode des forces à des structures relativement simples. Il faut cependant mentionner l'existence de méthodes de choix automatique des inconnues hyperstatiques telle que la technique du rang qui ont pratiquement supprimé cet inconvénient. Malgré cette amélioration, la méthode des forces est aujourd'hui pratiquement abandonnée pour la résolution des structures complexes, parce que d'une part, son efficacité numérique est moindre que celle de la méthode des déplacements et d'autre part parce que, la méthode des déplacements est plus universelle en permettant plus aisément la résolution de problèmes dynamiques ou non-linéaires.

III.3 ANALYSE DE LA MATRICE DEPLACEMENT POUR LES GRANDES DEFORMATIONS

Dans ce qui suit, on formulera la relation déplacements-forces en tenant compte de la configuration déformée de notre structure.

La relation $F = K.u$ n'est donc plus formulée comme cela se faisait pour les structures géométriquement non linéaires. Il est nécessaire de faire apparaître des termes non linéaires

(du second ordre) mis en évidence dans la matrice de rigidité K de notre système ou structure.

Ainsi la matrice de raideur K sera formulée comme suit:

$$K = K_E + K_G \quad (3.1)$$

K_E étant la matrice de rigidité élastique standard calculée à l'origine.

K_G étant la matrice de rigidité géométrique qui dépend non seulement de la géométrie mais aussi des contraintes initiales existant dans la structure.

III.3.1 Signification énergétique de K_G :

Un élément de la structure parcourant le chemin depuis la configuration initiale Γ_0 jusqu'à la configuration finale Γ_f se trouve à un moment donné dans la configuration Γ caractérisée par les déplacements u . Cette configuration est en équilibre sous l'action des forces F .

Si on appelle U , l'énergie potentielle interne de déformation, l'équilibre de la configuration Γ impose pour toutes valeurs i .

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i \quad (3.2)$$

Une seconde différentiation donne:

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{\partial U}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \quad (3.3)$$

Et de la convention de sommation on a:

$$dF_i = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} du_j \quad (3.4)$$

C'est à dire que la dérivée partielle seconde de l'énergie potentielle interne de déformation U représente un élément de la matrice de rigidité recherchée (K_G):

$$(K_G)_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \quad (3.5)$$

III.3.2 Solution générale du problème:

Pour une structure donnée, la matrice de rigidité géométrique appelée aussi matrice de rigidité incrémentale ainsi que la matrice de rigidité élastique sont calculées pour chaque élément puis par les techniques d'assemblage, on obtiendra la matrice de rigidité de notre structure.

$$K = K_E + K_G$$

L'établissement et la résolution des équations d'équilibre se feront par l'intermédiaire des incréments de déplacements et forces internes calculés pour chaque incrément de charge, et si

nécessaire, les constantes élastiques considérées dans la matrice de rigidité élastique peuvent être modifiées à chaque étape. Le déplacement total est obtenu par la sommation de tous les incréments de déplacements. Le même raisonnement est appliqué pour l'obtention des forces internes.

Les étapes incrémentales sont représentées symboliquement sur le tableau suivant:

Etape	Rigidité	Incrément de déplacement	Force dans l'élément
1	$K_E(0) + K_G(0)$	ΔU_1	P_1
2	$K_E(U_1) + K_G(U_1)$	ΔU_2	P_2
3	$K_E(U_2) + K_G(U_2)$	ΔU_3	P_3
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$K_E(U_{n-1}) + K_G(U_{n-1})$	ΔU_n	P_n
		$U_n = \sum \Delta U_i$	

U_n : Déplacement total

Il est bien évident que $K_G(0) = 0$ d'où:

$$u_1 = [K_E(0)]^{-1} F - [K_E(0)]^{-1} \lambda F^* \quad (3.6)$$

étant le chargement extérieur exprimé en fonction d'une constante λ ainsi que de F^* qui est la magnitude relative des forces appliquées.

On pourra aussi établir la relation suivante:

$$K_G - \lambda K_G^* \quad (3.7)$$

K_G^* étant la rigidité géométrique pour un chargement unitaire ($\lambda = 1$).

En considérant la rigidité élastique comme étant constante on aura:

$$u = (K_E + \lambda K_G^*)^{-1} \lambda F^* \quad (3.8)$$

$\text{Det}(K_E + \lambda K_G^*)$ étant le déterminant de la matrice $(K_E + \lambda K_G^*)$ il est bien évident que si ce dernier est nul, les valeurs des déplacements u tendront vers l'infini.

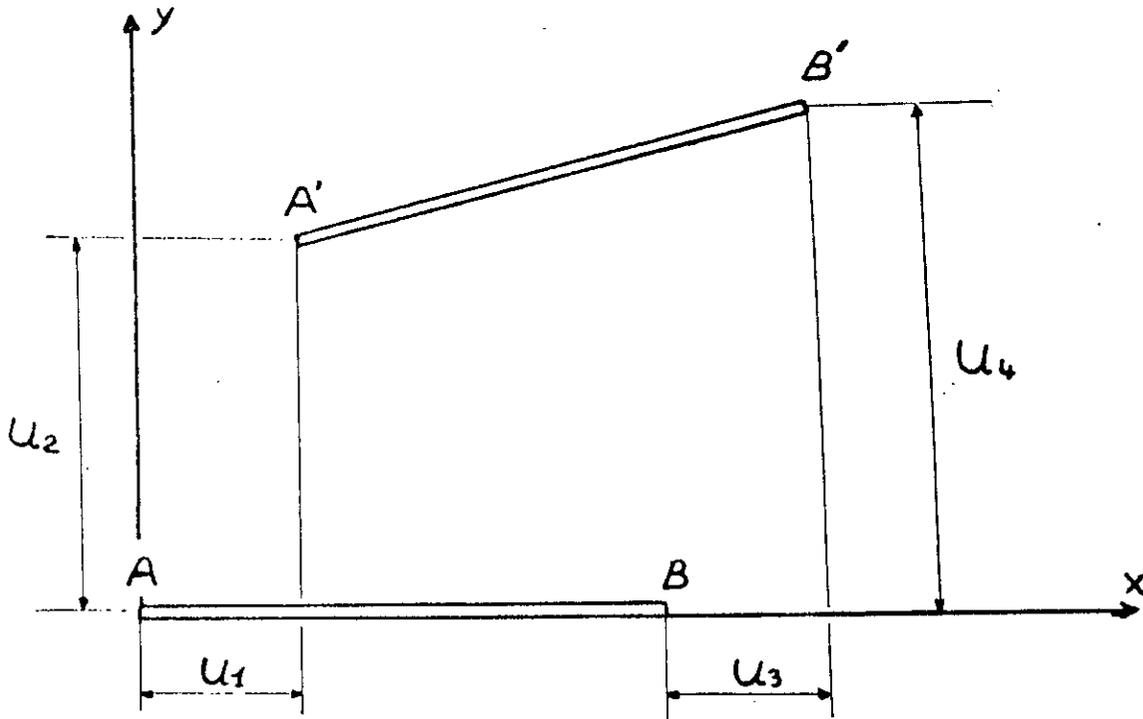
La résolution de $\text{Det}(K_E + \lambda K_G^*) = 0$ nous donne le vecteur λ correspondant, définissant ainsi l'instabilité ou le stade critique que l'on notera λ_{crit} . Ceci nous permettra de déterminer le chargement critique F_{crit} :

$$F_{\text{crit}} = \lambda_{\text{crit}} F^* \quad (3.9)$$

III.4 EXEMPLE DE CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE GEOMETRIQUE POUR UN ELEMENT BARRE

Considérons un élément barre de la figure (III.1) soumis à l'action d'un chargement lui imposant un déplacement de la

configuration initiale AB à la configuration finale A'B'



Elément barre avec grandes déformations

Figure III.1

Soient u_1, u_2 respectivement les déplacements suivant les directions X et Y du noeud A et u_3, u_4 respectivement les déplacements suivant les directions X et Y du noeud B.

Soit "a", "L", "E" respectivement la section transversale, la longueur et le module de Young de l'élément barre considéré. La déformation ϵ_{xx} dans la direction longitudinale de l'élément barre s'écrit dans le cas de grandes déformations:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \quad (3.10)$$

Les déplacements u_x et u_y varient sur la longueur et sont obtenus à partir de l'écriture suivante:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

avec $\xi = x/l$

On aura ainsi:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{L} (-u_1 + u_3) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{1}{L} (-u_2 + u_4) \quad (3.13)$$

L'expression de l'énergie de déformation U_i emmagasinée dans l'élément barre est formulée en considérant la relation contrainte-déformation linéaire suivante:

$$u_1 = \frac{1}{2} \int_V E \epsilon_{xx}^2 dx \quad (3.14)$$

$$u_1 = \frac{AE}{2} \int_0^L \epsilon_{xx}^2 dx = \frac{AE}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx$$

$$u_1 = \frac{AE}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^4 \right] dx \quad (3.15)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 et en substituant les relations (3.12) et (3.13) dans (3.15) on obtient:

$$u_1 = \frac{AE}{2L^2} \int_0^L (u_1^2 - 2u_1u_3 + u_3^2) dx$$

$$+ \frac{AE}{2L^3} \int_0^L (u_3 - u_1) (u_2^2 - 2u_2u_4 + u_4^2) dx$$

$$u_1 = \frac{AE}{2L} (u_1^2 - 2u_1u_3 + u_3^2)$$

$$+ \frac{AE}{2L^2} (u_3 - u_1) (u_2^2 - 2u_2u_4 + u_4^2)$$

Posons:

$$F = \frac{AE}{L} (u_3 - u_1)$$

F étant la force axiale dans notre élément barre, on aura ainsi:

$$u_1 = \frac{AE}{2L}(u_1^2 - 2u_1u_3 + u_3^2) + \frac{F}{2L}(u_3 - u_1)(u_2^2 - 2u_2u_4 + u_4^2)$$

Appliquons maintenant le théorème de Castigliano pour l'obtention des relations forces-déplacements suivantes:

$$F_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u_1} = \frac{AE}{L}(u_1 - u_3)$$

$$F_2 = \frac{\partial u_1}{\partial u_2} = \frac{F}{L}(u_2 - u_4)$$

$$F_3 = \frac{\partial u_1}{\partial u_3} = \frac{AE}{L}(u_3 - u_1)$$

$$F_4 = \frac{\partial u_1}{\partial u_4} = \frac{F}{L}(u_4 - u_2)$$

L'assemblage de ces dernières sous une écriture matricielle donnera:

Ceci peut être condensé sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$F = (K_E + K_G) u \quad (3.19)$$

$$F = K \cdot u$$

On remarque clairement à partir de cet exemple que la matrice de rigidité d'un élément barre est la somme de la matrice de rigidité élastique K_E identique à celle utilisée dans l'analyse linéaire d'un élément barre et d'une matrice de rigidité géométrique K_G qui est dans ce cas formulée comme suit:

$$K_G = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

CHAPITRE IV

ETUDE STATIQUE DE RESEAUX DE CABLES PAR LA FORMULATION ANALYTIQUE

IV.1 INTRODUCTION

L'étude statique des structures câblées peut être formulée par plusieurs approches permettant ainsi d'obtenir les équations caractérisant leur équilibre et dont la résolution nous donne les inconnues recherchées.

Ainsi, pour une structure câblée satisfaisant à certaines hypothèses, on se propose dans ce qui suit de déterminer sous l'action d'un chargement extérieur les déplacements des noeuds ainsi que les tensions internes des câbles à l'équilibre, par l'approche énergétique.

IV.2 HYPOTHESES DE TRAVAIL

On considérera dans ce qui suit des structures câblées satisfaisant les hypothèses suivantes:

- L'élasticité des câbles utilisés est linéaire

- Tous les câbles sont droits
- Toutes les forces extérieures s'appliquent aux noeuds

IV.3 PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps déformable soit en équilibre est que le travail des forces extérieures soit égale au travail de déformation pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement admissibles.

Soit:

- Les forces extérieures de volume F_i et de surface T_i
- Les déformations ϵ_{ij} respectant les conditions de compatibilité et u_i les déplacements correspondants respectant les conditions d'appuis.

Le principe du travail virtuel s'écrit donc comme suit:

$$\int_V \{F\}^T \{\delta u\} dv + \int_S \{T\}^T \{\delta u\} ds - \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \epsilon\} dv \quad (4.1)$$

IV.4 THEOREME DE STATIONNARITE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE

Supposons que les forces extérieures appliquées au corps dépendent d'un potentiel V . On peut alors écrire par définition:

$$\delta V = -\delta W \quad (4.2)$$

Et le principe du travail virtuel s'écrit sous la forme plus concise:

$$\delta_\epsilon \pi - \delta(U + V) = 0 \quad (4.3)$$

L'indice ϵ a été ajouté au signe de variation δ pour souligner qu'il ne faut faire varier que les déformations et déplacements élastiques. Dans le calcul du potentiel des forces extérieures V , il faut traiter comme des variables, les déplacements de tous les points où les forces correspondantes sont données.

La quantité:

$$\pi = U + V \quad (4.4)$$

est l'E.P.T du corps et l'équation (4.3) exprime le théorème de stationnarité de l'E.P.T.

Comme la variation δ ne porte que sur les déplacements, et par conséquent sur les déformations, ce théorème peut encore s'exprimer par l'énoncé suivant:

" De tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, celui qui satisfait aux conditions d'équilibre donne à l'énergie potentielle π une valeur stationnaire. Si le système est stable, l'E.P.T est par définition minimum dans la configuration réelle du système".

Cette condition du minimum impose que la seconde variation de l'E.potentielle totale soit positive pour tous les

déplacements virtuels cinématiquement admissibles possibles.

$$\delta_a^2 \pi > 0 \quad (4.5)$$

Lorsque le système rentre en équilibre indifférent, la position d'équilibre cesse d'être un minimum. En d'autres termes pour certains déplacements appelés modes d'instabilité on a :

$$\delta_a^2 \pi = 0 \quad (4.6)$$

Cette condition peut être utilisée pour trouver la charge critique juste capable de produire l'instabilité.

IV.5 FORMULATION MATRICIELLE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE

Pour une structure donnée, l'E.P.T s'exprime comme étant la somme de l'énergie de déformation et du potentiel des forces extérieures.

$$\pi = U + V \quad (4.7)$$

En considérant un câble droit comme étant un élément composé d'un noeud origine n et d'un noeud final j. Comme indiqué ci-dessous :

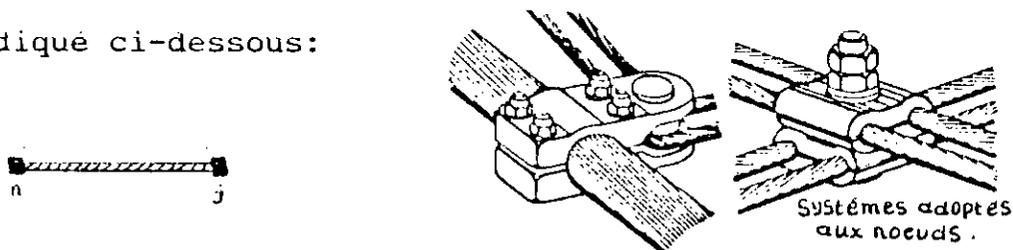


Figure IV.1

L'énergie de déformation des structures câblées considérées dans ce chapitre s'exprime comme étant la somme des énergies emmagasinées dans tous les éléments de notre structure et s'exprime comme suit:

$$U = \sum_{m=1}^M \left[U_{0,m} + P_{0,m} e_m + \frac{E_m A_m}{2L_m} e_m^2 \right] \quad (4.8)$$

où:

$U_{0,m}$: Energie initiale emmagasinée dans l'élément m résultant de l'action de la précontrainte initiale.

$P_{0,m}$: Précontrainte initiale de l'élément m.

E_m : Module d'élasticité de l'élément m.

A_m : Section transversale de l'élément m.

L_m : Longueur de l'élément m.

e_m : L'allongement de l'élément m.

M : Le nombre d'éléments constituant la structure

- Formulation matricielle de l'élongation e_m :

Considérons l'élément "m" composé des noeuds n et j et le repère globale choisi comme indiqué ci-dessous:

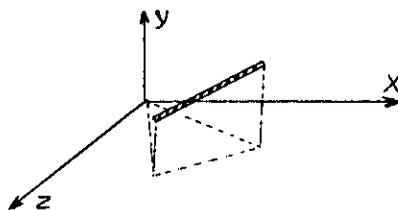


Figure IV.2

Soient $x_{jx}, x_{jy}, x_{jz}, x_{nx}, x_{ny}$ et x_{nz} les coordonnées dans le repère global des noeuds j et n ; $d_{jx}, d_{jy}, d_{jz}, d_{nx}, d_{ny}$ et d_{nz} les déplacements de ces noeuds dans le repère global.

L'élongation e_m de l'élément m s'exprimera comme suit:

$$e_m = \frac{1}{2L_m} \sum_{k=1}^3 (x_{jk} - x_{nk}) (2(x_{jk} - x_{nk}) + (x_{jk} - x_{nk})) \quad (4.9)$$

Pour l'écriture matricielle de l'élongation e_m on définira les matrices suivantes:

- Matrice incidence H_m de l'élément m :

Soit une structure à W noeuds dont uniquement j noeuds sont susceptibles de se déplacer. La matrice incidence sera composée de matrices élémentaires h_i d'ordre 3×3 définies comme suit:

$$* \quad h_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si l'élément est incident au noeud i et si son orientation se fait à partir de celui-ci.

$$* \quad h_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si l'élément est incident au noeud i et son orientation se fait vers le noeud i.

$$* h_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour les autres cas.

Exemple :

Soit la structure suivante:

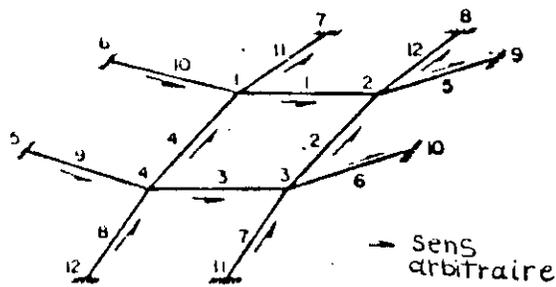


Figure IV.3

Nous aurons ainsi:

I		0		1	
$-I$		I		2	<i>Noeuds</i>
0	H_1^*	0	H_{12}^*	3	<i>déplaçables</i>
0		0		4	
0		0		5	
0		0		6	
0	0		7	<i>Noeuds</i>
0		$-I$		8	<i>fixes</i>
0		0		9	
0		0		10	
0		0		11	
0		0		12	
<i>element 1</i>		<i>element12</i>			

Avec:

$$* \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$* \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$* \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

H_m^* étant la sous matrice de H_m d'ordre (3Jx3). Ainsi, l'élongation e_m d'un élément câble "m" pourra être formulée matriciellement comme suit:

$$e_m = \frac{1}{2L_m} [2X^t H_m (\bar{H}_m^t X) + (\bar{H}_m^t X)^t (H_m^t X)] \quad (4.10)$$

Avec :

$$X = [X_{1x}, X_{1y}, X_{1z}, \dots, X_{jx}, X_{jy}, X_{jz}, \dots, X_{wx}, X_{wy}, X_{wz}]$$

La matrice coordonnée dans le repère globale d'ordre (3Wx1)

$$X = [X_{1x}, X_{1y}, X_{1z}, \dots, X_{jx}, X_{jy}, X_{jz}, \dots, X_{wx}, X_{wy}, X_{wz}]$$

La matrice déplacement d'ordre (3Jx1).

Définissons les matrices de précontraintes initiales " P_0 ", de rigidités " K ", et d'élongations " e ".

$$P_0 = [P_{01}, P_{0,m}, \dots, P_{0M}]$$

$$K = \left[\frac{E_1 A_1}{L_1}, \dots, \frac{E_m A_m}{L_m}, \dots, \frac{E_M A_M}{L_M} \right]$$

$$e = [e_1, e_m, \dots, e_M]$$

e_m étant donné par la formule (4.10), on pourra ainsi écrire l'expression (4.8) comme suit:

$$U = U_0 + P_0 e + \frac{1}{2} e^t K e \quad (4.11)$$

Avec:

$$U_0 = \sum_1^n U_{0,m}$$

$U_{0,m}$ étant comme indiqué précédemment l'énergie de déformation initiale de l'élément "m".

Le potentiel des forces extérieures V est:

$$V = -F^t X \quad (4.12)$$

Avec:

$$F = [F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}, \dots, F_{Jx}, F_{Jy}, F_{Jz}]$$

F matrice colonne des forces extérieures appliquées aux noeuds déplaçables. Nous déduisons ainsi l'écriture matricielle de l'énergie potentielle totale:

$$\pi = U_0 + P_0^t e + \frac{1}{2} e^t K e - F^t X \quad (4.13)$$

IV.6 FORMULATION MATRICIELLE DU GRADIENT DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE

De la relation (4.7) le gradient de l'énergie potentielle totale s'écrit de la manière suivante:

$$\nabla \pi = \nabla U - F \quad (4.14)$$

F étant la matrice force appliquée aux noeuds déplaçables.

∇U étant la matrice gradient de l'énergie de déformation totale de notre structure formulée comme suit:

$$\nabla U = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial U}{\partial x_{1x}}, & \frac{\partial U}{\partial x_{1y}}, & \frac{\partial U}{\partial x_{1z}}, & \dots, & \frac{\partial U}{\partial x_{jx}}, & \frac{\partial U}{\partial x_{jy}}, & \frac{\partial U}{\partial x_{jz}} \\ \dots, & \frac{\partial U}{\partial x_{Jx}}, & \frac{\partial U}{\partial x_{Jy}}, & \frac{\partial U}{\partial x_{Jz}} \end{array} \right]$$

En introduisant la matrice T diagonale d'ordre (3Mx3M) :

$$T = [t_1 \dots t_m \dots t_M]$$

Avec:

$$t_m = \left[\frac{P_m}{L_m}, \frac{P_m}{L_m}, \frac{P_m}{L_m} \right]$$

et:

$$P_m = P_{jm} + P_{0m} + \left(\frac{E_m A_m}{L_m} \right) e_m$$

En substituant l'expression (4.15) dans (4.14), on obtiendra la formulation matricielle du gradient de l'E.P.T:

$$\nabla\pi = \bar{H}T(H^tX + \bar{H}^tX) - F \quad (4.16)$$

IV.7 METHODES ITERATIVES DE MINIMISATION FONCTIONNELLE

IV.7.1 Introduction:

Dans la pratique scientifique, l'ingénieur se trouve souvent face à des problèmes dont la résolution passe par celle d'un système d'équations qui modélisent les divers éléments considérés. Ainsi, dans notre cas, la détermination de la configuration d'équilibre revient à déterminer les déplacements des différents noeuds constituant notre structure pour lesquels l'énergie potentielle totale est minimale.

La détermination de ces derniers passe par la résolution du système non linéaire $\nabla\pi = 0$

IV.7.2 Principe:

Nous cherchons la solution du système $\nabla\pi = 0$ ($i = 1, n$) qui se note sous forme matricielle $\nabla\pi = 0$

Formons:

$$G(X) = \nabla\pi(X)^t \cdot \nabla\pi(X) = \sum_{i=1}^n \nabla\pi_i^2(X_1, \dots, X_n)$$

La fonction $G(X)$ possède un minimum absolu au point X^* qui est aussi solution du système $\nabla\pi = 0$.

En effet, en tous point $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ de R^n on a $G(X) \geq 0$ et si $X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^t$ est une solution du système $\nabla\pi = 0$, alors les égalités $\nabla\pi_i = 0$ impliquent que $G(X^*) = 0$.

De nombreuses méthodes d'optimisation existent comme indiqué par la suite.

IV.7.3 Classification des méthodes de recherche du minimum d'une fonction $F(X)$ de n variables:

Il existe quatre types de méthodes numériques itératives courantes:

- La méthode analytique
- Les méthodes directes
- les méthodes du premier ordre
- les méthodes du second ordre

* la méthode analytique suppose que l'on puisse calculer le gradient $\nabla F(X)$ et résoudre analytiquement $\nabla F(X) = 0$. Ceci est rarement vrai en pratique et non applicable dans notre cas

* Les méthodes directes ne nécessitent que le calcul de $F(X)$ à chaque pas; elles sont généralement lentes et ne sont intéressantes que si $\nabla F(X)$ est indéfinie par place ou difficile à évaluer

* Les méthodes du premier ordre telles que celles du gradient,

gradient conjugué , Huang ... nécessitent à chaque pas l'évaluation de $F(X)$ et de $\nabla F(X)$

* Les méthodes du second ordre comme celle de Newton ...demandent l'évaluation de $F(x)$ et $\nabla F(X)$ et de la Hessienne $\nabla^2 F(X)$ à chaque pas.

Notre choix se restreindra à la troisième catégorie de méthodes vu le nombre important de calcul qu'imposent les méthodes du second ordre.

IV.7.4 Direction de descente et direction de plus grande pente :

Soit une fonction $F(x)$ dont on cherche le minimum. Si $F(x)$ est continue et continûment dérivable, alors dans le voisinage proche de X , on peut la développer en série de Taylor limitée au premier terme:

$$F(X+\Delta X) = F(X) + \Delta X \nabla F(X)$$

si:

$$\Delta X \cdot \nabla F(X) < 0$$

Alors:

$$F(x + \Delta x) < F(x)$$

et ΔX est dit être une direction de descente.

Supposons que:

$$\|\Delta X\| = \epsilon = \text{Cste}$$

Le choix de la direction ΔX minimisant $F(X + \Delta X)$ est celui qui rend $\Delta F(X)$ algébriquement minimum et ce sera la direction colinéaire à ΔX et de sens contraire à $\nabla F(X)$.

Donc au point X , la direction de plus grande pente de $F(X)$ est celle du gradient au signe près : $-\nabla F(X)$. On dit aussi que la direction $-\nabla F(X)$ est la direction de plus grande pente de $F(X)$ au point X .

IV.7.5 Méthode du gradient:

Le vecteur de \mathbb{R}^n dont la j -ème composante est définie par

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X_j} \quad (j=1, n)$$

Avec $F(X)$ la fonction à minimiser est le gradient de F .

Ce gradient sera noté en un point de X appartenant à \mathbb{R}^n .

$$\text{grad}F(X) = \nabla F = \left[\frac{\partial G}{\partial X_1}, \frac{\partial G}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial X_n} \right]^t$$

Localement, au point $X^{(k)}$, la fonction diminue le plus rapidement dans la direction:

$$X^{(k)} - t \nabla F(X^{(k)})$$

La méthode du gradient est souvent appelée méthode de plus grande pente. Elle cherche un minimum de $F(X)$ par itération

$$X^{k+1} = X^{(k)} - t^{(k)} \nabla F(X^{(k)})$$

où le scalaire $t^{(k)}$ appelé aussi "pas" peut être déterminé par deux techniques.

- Pas optimal : on détermine $t^{(k)}$ minimisant $F(X^{(k+1)})$, faite dans la direction

$$X^{(k)} - t^{(k)} \nabla F(X^{(k)})$$

c'est une recherche unidimensionnelle.

- Pas de descente: on choisit $t^{(k)}$ tel que:

$$F(X^{(k+1)}) < F(X^{(k)})$$

Comme on peut s'y attendre, le processus de recherche du pas optimale peut demander un grand effort de calcul car il faut à chaque étape (K) procéder à une recherche unidimensionnelle.

Généralement, on évite de faire un effort de calcul trop important pour définir $t^{(k)}$ vérifiant:

$$F(X^{(k+1)}) = F(X^{(k)} + t^{(k)} \nabla F(X^{(k)})) < F(X^{(k)})$$

L'algorithme du gradient pour la résolution du système $G(X) = 0$

se résume en:

Notons: $G(X) = F'(X) \cdot F(X)$; X_0 étant donné:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - t^{(k)} \nabla G(X^{(k)})$$

Avec $t^{(k)}$ tel que:

$$\|F(X^{(k+1)})\| \leq \|F(X^{(k)})\|$$

On arrête si : $G(X) < \epsilon$

Illustrons la méthode du gradient avec pas optimal dans le cas d'une fonction $F(X_1, X_2)$ de deux variables.

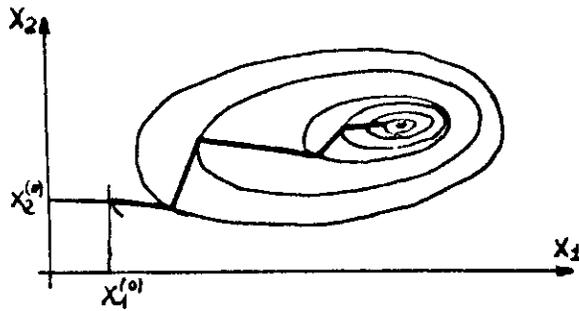


Figure IV.4

IV.7.6 Méthodes des directions conjuguées ou méthodes du gradient conjugué :

On a vu sur la Figure(IV.4) que le choix de la direction de recherche $P^{(k)} = - \nabla F(K)$ n'est pas globalement le meilleur en pratique. Dans la méthode présente, on génère des directions $P^{(k)}$ définies ci-dessous. L'algorithme est:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + t^{(k)} P^{(k)}$$

Où:

$$P^{(k)} = -\nabla F^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k-1)}$$

$$\alpha^{(0)} = 0$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\|\nabla F(X^{(k)})\|^2}{\|\nabla F(X^{(k-1)})\|^2}$$

L'arrêt à:

$$\|X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}\| < \epsilon$$

IV.7.7 Méthode de Huang:

Cette méthode consiste en l'utilisation d'une direction de descente calculée à partir du gradient mais en général distincte de celui-ci; cette méthode itérative comporte à chaque itération, deux étapes : choix de la direction de droite de descente et choix du point de la droite de descente qui rend $F(x)$ minimum.

Description de l'algorithme :

Itération $K = 1$:

1/ Choix arbitraire du point initial x^0

2/ Détermination de la direction de descente q_0

$$q_0 = B_0 \nabla F_0$$

avec B_0 : matrice prise généralement égale à l'unité

3/ Détermination de l'intervalle renfermant le pas t_0 $[0, (t_0)_0]$

avec:

$$(t_0)_0 = \min \left\{ 1, \left| \frac{2(F_0 - F_{1b})}{\nabla F_0^t q_0} \right| \right\}$$

Où F_{1b} représente une estimation du minimum de F .

4/ Choix du pas t_0 ; $0 < t_0 \leq (t_0)_0$ tel que:

$$\Delta X_0 = -t_0 \text{Sign}(\nabla F_0^t q_0) q_0$$

et

$$F(X_0 + \Delta X_0) < F(X_0)$$

Itération $k \geq 2$:

1/ Calcul de la matrice C_{k-1} :

$$C_{k-1} = \Delta X_{k-1} + B_{k-1} (\nabla F_k - \nabla F_{k-1})$$

2/ Calcul de la matrice B_k :

$$B_k = B_{k-1} + \frac{C_{k-1} C_{k-1}^t}{C_{k-1}^t (\nabla F_k - \nabla F_{k-1})}$$

3/ Calcul de la direction q_k :

$$q_k = -B_k \nabla F_k$$

4/ Calcul de la borne supérieure de l'intervalle renfermant le pas t_k

$$(t_0)_k = \min \left\{ 1, \left| \frac{2(F_k - F_{1b})}{\nabla F_k^t q_k} \right| \right\}$$

5/ Choix du pas t_k $0 < t_k < (t_0)_k$ tel que:

$$\Delta X_k = -t_k \text{Sign}(\nabla F_k^t q_k) q_k$$

et

$$F(X_{k-1} + \Delta X_k) < F(X_{k-1})$$

6/ Arrêt des itérations si:

$$\nabla F_k^t \nabla F_k < \epsilon$$

IV.8 EXEMPLES D'APPLICATION

Pour la résolution de notre problème, il est suggéré d'utiliser l'algorithme de Huang

En effet dans les méthodes du gradient et du gradient conjugué, la rapidité de leur convergence nécessite le calcul à chaque itération. Ceci rendra le calcul laborieux et très lent.

Par contre, l'algorithme de Huang nous permet d'encadrer le pas de descente qu'on pourra localiser par subdivision successives de l'intervalle $[0, (t_0)_k]$.

Exemple 1 :

a - Soit à déterminer la configuration d'équilibre de la structure suivante:

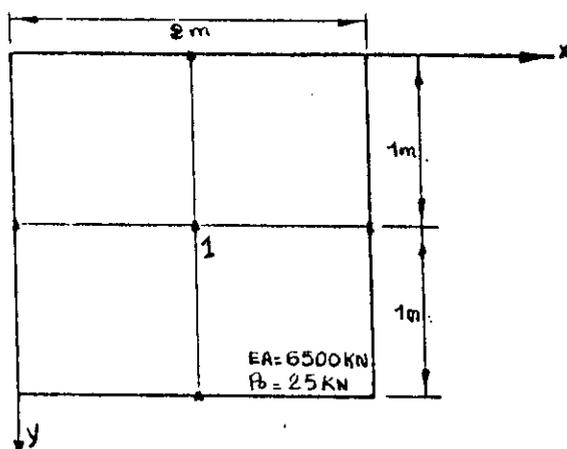


Figure IV.5

Sous l'action d'une force $F(0,0,100)$ appliquée au noeud 1, avec une précontrainte de 25 KN dans chaque câble déterminons les déplacements de ce dernier.

On obtient ainsi les résultats suivants :

n° du noeud	direction	déplacement (m)
1	X	0
	Y	0
	Z	1,8573 10 ⁻¹

n° de l'élément	Effort interne (KN)
1	137,107
2	132,107
3	137,107
4	132,107

$$\nabla\pi^t \nabla\pi = 2,328 \cdot 10^{-10}$$

b - En pratique, au cours de la réalisation d'un réseau de câbles droits, il arrive qu'il y ait de plus grandes pertes de précontraintes dans un câble par rapport aux autres. Illustrons à quel point la configuration d'équilibre peut être affectée sur cet exemple. Pour cela, on fera varier la précontrainte de 50 % (valeur exagérée) sur l'un des câbles.

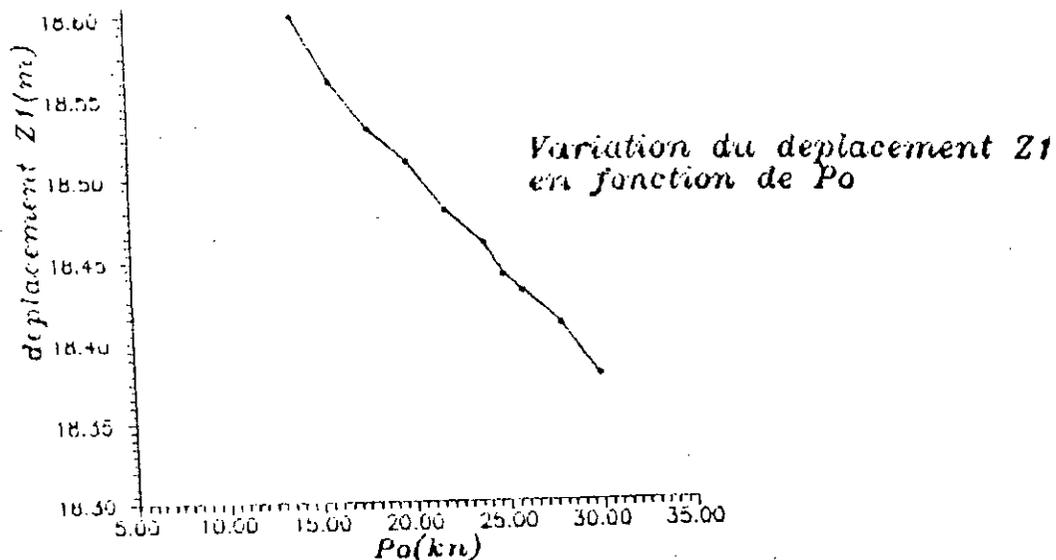


Figure IV.6

On remarque à partir du graphe que d'importantes variations de la précontrainte, affectent faiblement la configuration d'équilibre.

Exemple 2 :

soit pour cet exemple la structure composée de douze éléments câbles droits comme indiqué sur la figure ci-dessous:

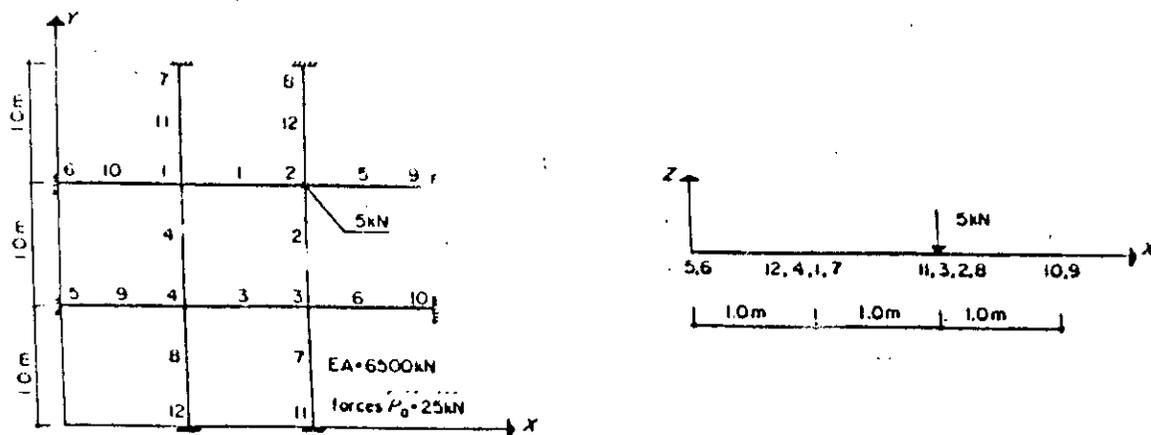


Figure IV.7

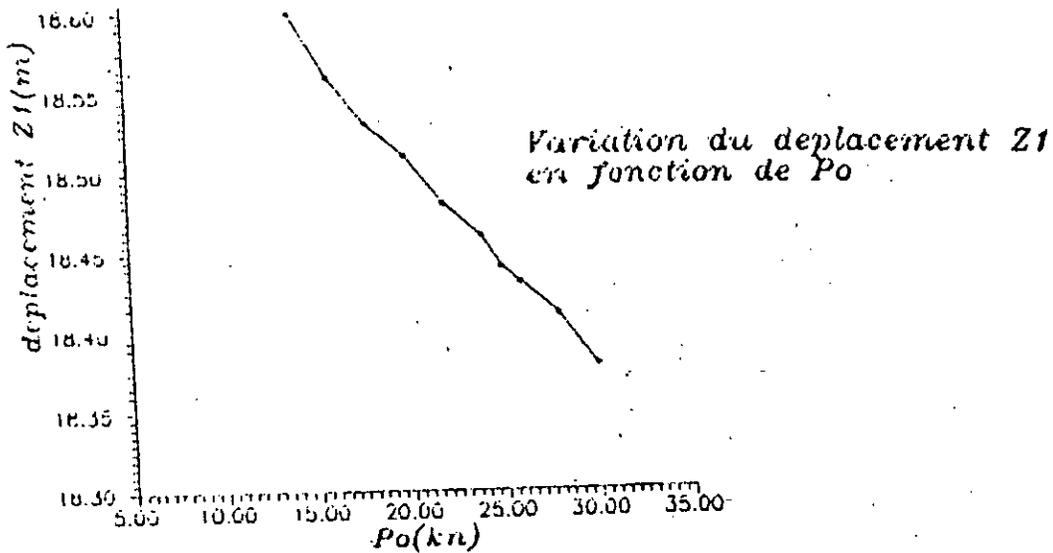


Figure IV.6

On remarque à partir du graphe que d'importantes variations de la précontrainte, affectent faiblement la configuration d'équilibre.

Exemple 2 :

soit pour cet exemple la structure composée de douze éléments câbles droits comme indiqué sur la figure ci-dessous:

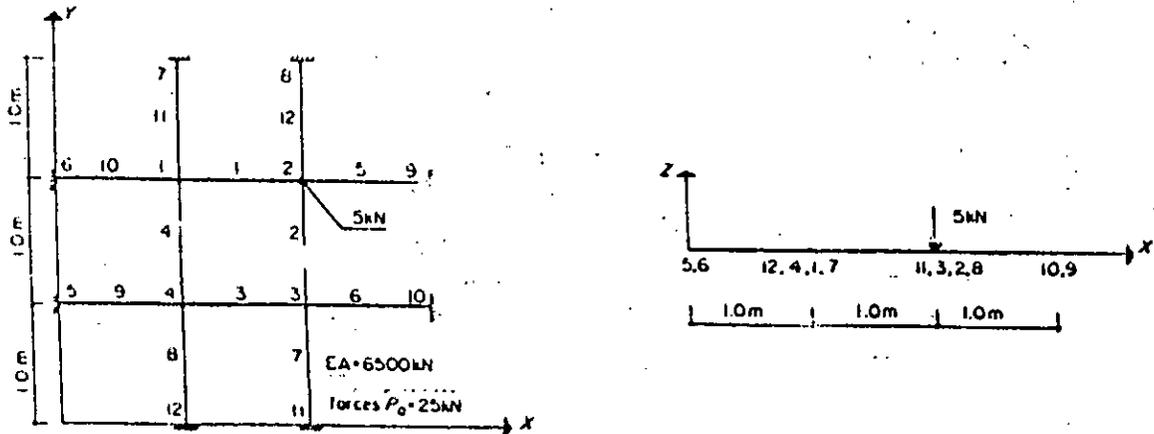


Figure IV.7

IV.9 CONCLUSION

Un câble non chargé n'a pas de forme définie ; il est totalement lâche et ne peut supporter aucune force. Ce sont précisément les charges qui, mettant le câble en tension, définissent du même coup sa configuration. Donc pour rigidifier un câble, il faut le charger et on ne peut concevoir une structure en câble que si elle est préchargée.

Le poids propre suffit parfois à assumer cette précharge mais s'il est trop faible, il faut la créer dans la structure lors de son montage par une opération de "prétention". La prétention est présente dans presque toutes les structures en câbles; elle offre trois avantages essentiels:

- * elle rigidifie la structure et définit sa géométrie
- * elle permet un réglage des efforts intérieurs, c'est à dire une distribution harmonieuse des efforts totaux (prétension et effort des charges)
- * elle permet la reprise des efforts de compression dus aux charges

La formulation analytique permettant de résoudre ce genre de structures à câbles s'avéré très efficace, en effet, celle-ci converge assez rapidement vers les résultats.

CHAPITRE V

CALCUL DES STRUCTURES CABLEES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

V.1 INTRODUCTION

Les méthodes matricielles telles que la méthode des forces ou la méthode des déplacements permettant l'analyse de structures discrètes constituées par des éléments simples (barres, poutres) de signification physique évidente et que l'on pouvait caractériser à l'aide de solutions analytiques.

Cependant, les structures sont souvent constituées de milieux continus aux géométries les plus diverses pour lesquelles on ne possède pas de solutions analytiques et que les méthodes matricielles traditionnelles ne permettent pas d'analyser. Dans ce cas, il faut avoir recours à des techniques numériques basées sur des méthodes d'approximations adéquates pour discrétiser des continus.

La méthode des éléments finis est, parmi ces techniques, la plus utilisée car elle étend les possibilités des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet ainsi l'analyse de structures complexes.

- Problème d'approximation [1]:

Le problème en méthode des éléments finis revient à la recherche de la meilleure approximation d'une fonction $U(M)$ à domaine de définition D de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit. Pour cela, on définit une approximation \hat{u} en posant:

$$\hat{u}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(M) \quad \forall M(x, y, z)$$

Les $\Phi_i(x, y, z)$ sont des fonctions choisies à priori et constituent une base fonctionnelle. Les coefficients inconnues a_i sont appelés coordonnées généralisées.

On appelle $\hat{u}(M)$, approximation de u dans la base fonctionnelle Φ_i . On peut encore écrire en utilisant la notation matricielle:

$$\hat{u} = [\Phi]^T [a]$$

Les fonctions bases de l'approximation doivent satisfaire certaines conditions à savoir: la continuité, les conditions aux limites et la complétude. Elles représentent les conditions nécessaires de convergence de la méthode utilisée pour faire l'approximation.

Définition

Une base fonctionnelle est dite complète si elle permet de représenter n'importe quelle fonction arbitraire, $u(M)$ dans D , en augmentant le nombre de coordonnées généralisées, soit:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[u(M) - \sum_{i=1}^N a_i \Phi_i(M) \right] = 0$$

Ainsi, le principe des méthodes d'approximations consiste à remplacer la résolution du problème continu à un nombre infini d'inconnues par celle d'un problème à un nombre fini d'inconnues: les coordonnées généralisées a_i . Celle-ci sont alors déterminées par exemple en minimisant un critère tel que l'énergie potentielle.

Citons deux méthodes d'approximation que l'on utilisera par la suite:

a - Méthode directe :

La méthode des déplacements étant la méthode la plus fréquemment utilisée, nous nous limiterons à cette formulation des équations. La méthode directe combine les trois systèmes d'équations d'élasticité, à savoir : les équations d'équilibre, les équations déformations-déplacements et les équations intrinsèques du matériau, avec l'équation relation entre les forces et contraintes.

(1) $\{F\} = [K] \{\hat{u}\}$ équation d'équilibre.

- (2) $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$ équation intrinsèque
 (3) $\{\epsilon\} = [L] \{u\}$ équation déformations-déplacements
 (4) $\{F\} = [A] \{\sigma\}$ équation forces-contraintes

On obtient alors:

$$\{F\} = [A] [D] [L] \{u\}$$

d'où:

$$[K] = [A] [D] [L]$$

avec :

- $\{F\}$: vecteur des forces nodales
- $[K]$: matrice de rigidité
- $\{u\}$: vecteur des déplacements nodaux
- $\{\epsilon\}$: vecteur déformations
- $\{\sigma\}$: vecteur contraintes
- $[D]$: matrice d'élasticité
- $[L]$: matrice opérateur différentiel
- $[A]$: matrice relation contraintes-forces

b - Méthode variationnelle:

La méthode variationnelle ou l'approche énergétique, a une importance fondamentale dans l'histoire de la théorie des structures. Elle est basée sur certains principes dont:

- Le principe du travail virtuel
- Le principe de la stationnarité de l'énergie potentielle totale.

V.2 METHODES DIRECTES

La méthode développée ci-dessous est applicable à différents types de structures constituées de câbles telles que les lignes de transmissions, les câbles de toiture et les tours soutenues ou autres.

Les charges prises en compte dans notre cas sont :

- Celles d'un fluide entraînant sur la longueur des câbles
- Des forces concentrées aux noeuds des réseaux

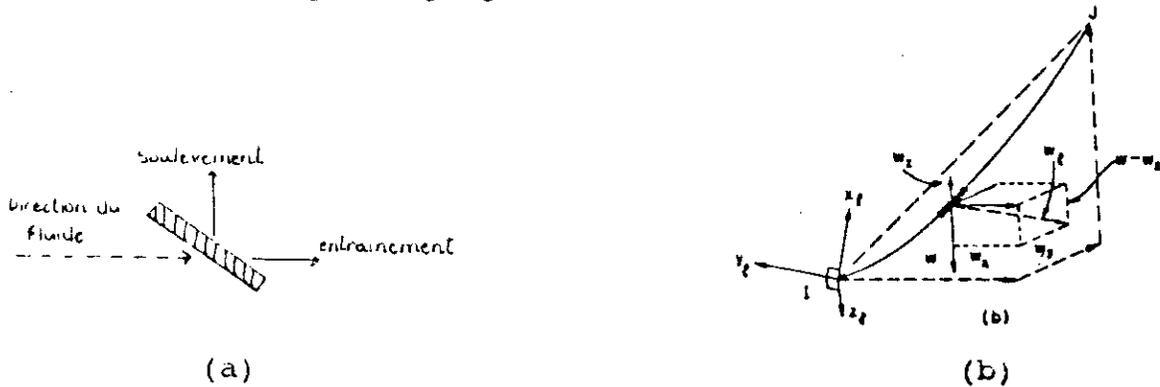
Il est à noter qu'en général, les forces concentrées ne sont appliquées qu'aux noeuds de la structure.

Les effets des charges du fluide pourrait être ceux du poids propre (répartition linéaire), ceux du vent ou encore ceux de l'eau (cas de câbles d'ancrage).

V.2.1 Etude d'un câble isolé:

a - Détermination du repère locale:

Considerons un câble IJ soumis aux charges d'un fluide et à l'action de son poids propre:



Charges appliquées à un câble

Fig V.1

Si l'on considère l'effet du fluide sur une longueur

élémentaire du câble, on voit qu'il sera engendré un effet de soulèvement et un second d'entraînement (figure (a)). Soit :

w_s : La charge de soulèvement par unité de longueur

w_e : la charge d par unité de longueur

w_p : Le poids propre par unité de longueur

w_l : La charge résultante par unité de longueur

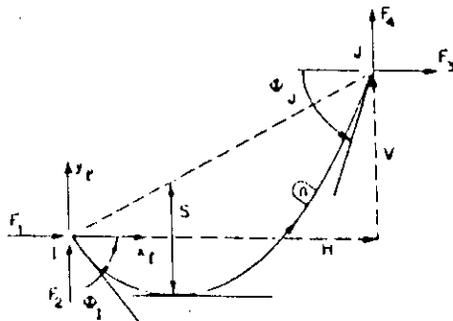
Comme on peut le voir sur la figure (b), le câble, soumis à l'action du fluide, se mettra dans le plan P déterminé par les vecteurs w_l . C'est à partir de la direction de la résultante w_l que l'on pourra lier un repère local au câble. Les directions sont définies comme suit:

y_l : Appartient à P et opposé à w_l

x_l : Appartient à P et perpendiculaire à y_l

z_l : Tel que x_l , y_l et z_l forment un trièdre directe.

b - Equations régissant le comportement du câble



Câble dans son plan

Figure V.2

Les équations régissant l'équilibre du câble IJ sont les mêmes que celle développées au chapitre II, appliquées à notre repère et à nos variables:

Pour les noeuds I et J on a:

$$L^2 = V^2 + H^2 \frac{\sinh^2 \lambda}{\lambda^2} \quad (\text{VI.1})$$

$$F_2 = \frac{w_1}{2} \left(-V \frac{\cosh \lambda}{\sinh \lambda} + L \right) \quad (\text{VI.2})$$

$$\lambda = \frac{w_1 H}{2 F_H} \quad (\text{VI.3})$$

$$H = -F_1 \left(\frac{L_u}{EA} + \frac{1}{w_1} \log \frac{F_4 + T_1}{T_1 - F_2} \right) \quad (\text{VI.4})$$

$$V = \frac{1}{2EAw_1} (T_j^2 - T_i^2) + \frac{T_j - T_i}{w_1} \quad (\text{VI.5})$$

Ainsi, en sachant que :

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 1$$

Et en considérant les équations (2.8) et (2.9), on obtient après intégration:

$$L = L_{ini} + \frac{1}{2EAw_1} \left(F_4 T_j + F_2 T_1 + F_1^2 \log \left(\frac{F_4 + T_j}{T_1 - F_2} \right) \right) \quad (\text{VI.6})$$

Les équations précédentes peuvent être obtenues en termes de F_1 et de F_2 en sachant que:

$$F_4 = w_1 L_{ini} - F_2$$

$$F_3 = -F_1$$

$$T_I = (F_1^2 + F_2^2)^{1/2}$$

$$T_J = (F_3^2 + F_4^2)^{1/2}$$

c - Calcul des réactions:

Les équations obtenues précédemment n'étant pas linéaire, on utilisera un processus itératif tel que Newton-Raphson, pour la détermination des réactions en I et J.

Les équations (VI.4) et (VI.5) en termes de F_1 et F_2 sont:

$$H = -F_1 \left\{ \frac{L_{ini}}{EA} + \frac{1}{w_1} \log \left[\frac{-F_2 + w_1 L_u + (F_1^2 + (w_1 L_u - F_2)^2)^{1/2}}{(F_1^2 + F_2^2)^{1/2} - F_2} \right] \right\}$$

$$V = \frac{1}{2EAw_1} (w_1^2 L_u^2 - 2F_2 w_1 L_u) + \frac{(F_1^2 + (w_1 L_u - F_2)^2)^{1/2} - (F_1^2 + F_2^2)^{1/2}}{w_1}$$

Soit:

$$H = \mathcal{J}_L(F_1, F_2)$$

$$V = \mathcal{J}_V(F_1, F_2)$$

On a:

$$dH = \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial F_2} dF_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial F_2} = \frac{H}{F_1} + \frac{1}{w_1} \left(\frac{F_4}{T_J} + \frac{F_2}{T_I} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial F_2} = \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial F_1} = \frac{F_1}{w_1} \left(\frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_I} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial F_2} = -\frac{L}{EA} - \frac{1}{w_1} \left(\frac{F_4}{T_J} + \frac{F_2}{T_I} \right)$$

Matriciellement cela s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \Delta H \\ \Delta V \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \end{bmatrix}$$

Avec:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial F_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial F_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial F_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial F_2} \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne

La matrice J^{-1} inverse de J est:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial F_2} & -\frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial F_1} \\ -\frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial F_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial F_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \Delta H \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

L'algorithme de cette méthode a été présenté au chapitre II.

d - Détermination des valeurs initiales de F_1 et F_2 :

Le critère principal de convergence de la méthode de Newton-Raphson est de se donner des valeurs initiales appartenant à l'intervalle assez restreint encadrant la solution exacte. C'est pourquoi le problème de choix des valeurs initiales devient primordial. Dans notre cas, on a pu se donner de bonnes approximations des valeurs de F_1 et F_2 .

1/ Valeur initiale de F_1 :

Une bonne approximation de F_1 est obtenue en remplaçant dans l'équation (V.1) la valeur de L par la longueur initiale L_{ini} , et en remplaçant $(\sin \lambda)^2 / \lambda^2$ par son développement limité, à savoir:

$$\frac{(\sin \lambda)^2}{\lambda^2} = 1 + \frac{\lambda^2}{3}$$

De l'équation (V.1) on a alors:

$$\lambda^{\circ} = \left[3 \left(\frac{L_{ini}^2 - V^2}{H^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

De l'équation (V.3) on a:

$$F_1^{\circ} = -w_1 \frac{H}{2\lambda^{\circ}}$$

Cas particuliers:

- Cas de câbles très tendus:

Quand un câble est tendu, la corde de IJ devient supérieure à la longueur initiale. Dès lors, le calcul de λ ne peut plus se faire. Dans ce cas, on remarque que la valeur de λ est approximativement égale à quatre fois le rapport de la flèche du câble par la projection horizontale de celui-ci [7].

En effet:

De ce fait, si on estime le rapport de la flèche par la projection horizontale du câble est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-2}$, alors λ vaudra 0,2.

- b Dans le cas où H est nulle, on peut se donner une valeur de λ de l'ordre de 10^6 .

2/ Valeur initiale de F_2 :

En ce qui concerne F_2 , une bonne estimation de celle-ci est

aussi obtenue en remplaçant la longueur L par L_{ini} .

Une fois F_1° et F_2° ainsi déterminées, la convergence du processus est rapide.

e - Détermination de la géométrie du câble:

A chaque fois que les réactions d'un câble sont calculées, on peut obtenir la configuration d'équilibre de celui-ci câble. Pour cela, il suffit de subdiviser L en un nombre n de portions (suivant le nombre de points que l'on désire obtenir), puis de remplacer ces valeurs dans les équations (V.4) et (V.5) pour obtenir les coordonnées de chaque point.

f - Effet de la température:

La température a pour effet de faire varier la longueur initiale du câble que ce soit de façon sensible ou pas. Ceci peut être pris en considération avant d'entamer le processus itératif, en calculant la nouvelle longueur du câble de la manière suivante :

$$L_u = L_{u0}(1+cT)$$

Avec:

L_u : longueur du câble à la température T

L_{u0} : longueur du câble à la température 0°

c : coefficient thermique du câble

Il va de soit que le poids par mètre linéaire à considérer dans ce cas sera différent:

$$w_1 = w_1^{\circ} \frac{L_{u0}}{L_u}$$

Avec:

w_1° : poids par mètre linéaire correspondant à L_{u0}

w_1 : poids par mètre linéaire correspondant à L_u

Récapitulation:

Afin d'analyser un câble dans son repère, un algorithme a été développé: (Algorithme I)

- Introduction ou lecture des données:

$H, V, E, A, T, C, L_{u0}, w_1^{\circ}, n$ (nombre de point désirés)

- Modification dues à la température:

Calcul de L_u et w_1

- Initialisation de λ

- Initialisation de F_1 et F_2

- Application de la méthode de Newton-Raphson

- Une fois les réactions obtenues, on calcule les coordonnées des point désirés.

V.2.2 Etude d'un réseau de câbles:

L'étude précédente sur un câble est une analyse

bidimensionnelle. Cependant, quand il s'agit d'étudier un réseau de câbles, cela devient un problème tridimensionnelle. Pour faire une telle étude, on procédera de la façon suivante:

- 1/ Lier un repère global au réseau
- 2/ Analyse des câbles un par un

Pour chaque câble en devra faire l'étude développée en (V.2.1). Mais aussi:

- Calculer la matrice de rigidité locale du câble
- Calculer la matrice de rigidité du câble dans le repère global.
- Calcul des réactions dans le repère global
- a - Calcul de la matrice de rigidité locale d'un câble:

Le câble ayant deux extrémités (noeuds) à trois degrés de liberté chacune, la matrice de rigidité locale sera d'ordre 6. Elle est constituée d'éléments K_{ij} définit comme suit:

K_{ij} : Force dans la direction i engendrée par un déplacement unitaire dans la direction j .

Ainsi, pour calculer la matrice de rigidité locale, on procédera de la façon suivante :

- 1 - Calcul des réactions sous sa configuration réelle (H,V) , on aura F_1, F_2, F_3, F_4 .
- 2 - Calcul des réactions sous la configuration $(H(1+\alpha),V)$, c'est à dire que l'on aura une variation relative de α dans la direction x , on obtient F'_1, F'_2, F'_3, F'_4 .
- 3 - Calcul des réactions sous la configuration $(H,V(1+\alpha))$,

c'est à dire variation relative de α dans la direction y; on aura alors $F''_1, F''_2, F''_3, F''_4$.

α pourra être choisi de l'ordre de 10^{-4} .

On définit alors les coefficients suivants:

$$a_1 = \frac{F'_3 - F_3}{\alpha H}$$

$$a_2 = \frac{F'_4 - F_4}{\alpha H}$$

$$a_3 = \frac{F''_3 - F_3}{\alpha V}$$

$$a_4 = \frac{F''_4 - F_4}{\alpha V}$$

Par suit, la matrice de rigidité locale du câble sera :

$$K_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & -a_1 & -a_3 & 0 \\ a_2 & a_4 & 0 & -a_2 & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & -a_3 & 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ -a_2 & -a_4 & 0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b - Calcul de la matrice de rigidité du câble dans le repère globale:

Une fois la matrice de rigidité locale calculée, il s'agit

de trouver son expression dans le repère globale lié au réseau.
 Pour cela, on définit l'angle orienté θ entre le repère globale
 et le repère local:

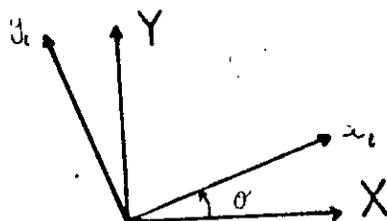


Figure V.3

La matrice rotation R qui nous fait passer d'un repère à
 l'autre est:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité d'un câble dans le repère global sera:

$$K_G = R^T K_L R$$

Avec R^T matrice transposée de R

c - Calcul du vecteur réaction dans le repère global:

F_1, F_2, F_3 et F_4 , représentent les réactions aux noeuds I et J
 du câble dans le repère local; on peut les assembler dans un
 vecteur réaction R_{el} comme suit:

$$R_{e1} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \\ F_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur réaction dans le repère global sera:

$$R_e = R^T R_{e1}$$

Une fois les matrices de rigidité et réactions de chaque câble déterminées dans le repère global, on essaye de ramener notre problème à la résolution d'un système $[K] \{U\} = \{F\}$ avec :

K : matrice de rigidité globale

F : vecteur force

La matrice de rigidité K est obtenue par un assemblage ordinaire des matrices de rigidité des éléments.

Cependant, le vecteur force est constitué de trois vecteurs différents :

1 - Vecteur action: $V_a = - R_e$

C'est à dire qu'à chaque noeud, on remplace les réactions du câbles par ses actions.

2 - Vecteurs réactions d'appuis: V_R

Pour les câbles reliés à des appuis fixes, il existe des réactions directement opposées à la tension du câble en cette extrémité.

3 - Vecteur force extérieures: V_e

Ce vecteur rassemble les forces extérieures appliquées aux noeuds déplaçables.

Le vecteur F est alors égale à: $F = V_a + V_R + V_e$

D'une autre manière le vecteur F obtenu représente les forces résiduelles aux noeuds pour atteindre l'équilibre. En résolvant le système $[K]\{U\} = \{F\}$, on obtient le vecteur $\{U\}$ qui représente les incréments de déplacements. C'est pourquoi, la méthode de résolution est dite incrémentielle. Pour la vérification de la convergence du processus, on vérifie sur le vecteur force F si on a atteint la précision voulue.

Remarque:

Avant de procéder à la résolution, on doit introduire les conditions aux limites dans le vecteur U (exp: déplacements aux appuis nuls).

3/ Résolution du système:

Pour faciliter la résolution du système et pour gagner en espace mémoire lors de la programmation, on doit adopter une méthode de stockage des différents éléments de K . Cela représente les aspects pratiques de la mise en oeuvre des algorithmes de résolution.

La matrice de rigidité K étant symétrique, nous devons tirer profit de cette propriété. En effet, ce type de matrices

est faiblement peuplé, avec de nombreux blocs ou termes au voisinage immédiat de la diagonale et avec quelques termes ou blocs additionnels hors diagonale.

Pour la résolution du système, on utilisera une méthode de décomposition de la matrice K , qui fera apparaître d'autres termes extra-diagonaux. Cependant, cela ne change pas fondamentalement la structure initiale de la matrice de raideur type peut avoir une des trois structures suivantes:

- bande
- creuse
- hypermatrice

Donc, une matrice de rigidité peut être mémorisée dans un programme suivant les trois schémas cités ci-dessus.

Ces types de structures de données permettent de minimiser l'encombrement mémoire requis pour mémoriser les matrices et d'éviter les opérations sur les zéros.

Dans notre cas, pour l'étude des réseaux de câbles, la mémorisation de la matrice de rigidité suivant le schéma "bande" ne provoque pas d'encombrement mémoire, car le nombre de noeuds est assez réduit.

En raison de la symétrie de K , on ne mémorisera que la demi-bande supérieure ou inférieure.

Choix de la méthode de résolution:

Pour la résolution du système $KU = F$, nous pouvons avoir

recours à deux type de méthodes:

a - Méthodes itératives: (telle que Gauss-Seidel)

Ce type de méthodes peut présenter pour certains problèmes d'excellentes propriétés de convergence, mais il n'en est pas de même pour la grande variété de problème que l'on peut être amené à résoudre en analyse des structures. De plus, pour certains problèmes, il est pratiquement impossible de prévoir le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir la précision voulue. C'est pour ces raisons, que ces méthodes ne sont pas utilisées dans les logiciels d'analyse des structures.

b - Méthodes directes:

Ce sont des méthodes généralement basées sur l'algorithme d'élimination de Gauss ou sur la factorisation de Cholesky. Ces deux méthodes ont en commun une excellente fiabilité, c'est à dire permettent la détection des singularités. Leurs implantation dans les logiciels d'analyse des structures peut être adapté aux problèmes traités (prise en compte du peuplement faible de la matrice de rigidité, cela en utilisant les schémas de mémorisation cités auparavant). Ces techniques de gestions des données, plus ou moins élaborées, permettent aujourd'hui la résolution de problèmes de grandes tailles avec des performances supérieures à celles des méthodes itératives dans la majorité des cas, tout en utilisant au mieux les ressources de l'ordinateur disponible.

$$l_{p+j,p} = \frac{K_{p+j,p}^{(p)}}{K_{pp}^{(p)}}$$

$K_{ij}^{(p)}$: terme général pour (i et $j \geq p$) de la matrice K en cours de triangularisation après $p-1$ éliminations.

On en déduit la formule de transformation de K à la $(p+1)$ ième transformation:

$$K_{ij}^{(p+1)} = K_{ij}^{(p)} - \frac{K_{ip}^{(p)}}{K_{pp}^{(p)}} K_{pj}^{(p)}$$

Les mêmes transformations doivent être effectuées sur le second membre du système, F , c'est à dire:

$$F_{ij}^{(p+1)} = F_{ij}^{(p)} - \frac{K_{ip}^{(p)}}{K_{pp}^{(p)}} F_{pj}^{(p)}$$

Ces deux dernières formules correspondent à la variante élimination de la méthode de Gauss et c'est la plus utilisée.

4/ Algorithme de résolution (Algorithme II):

En définitive, on peut déduire l'algorithme de résolution concernant l'analyse des réseaux de câbles par la méthode directe.

A chaque itération on établit les opérations suivantes:

- 1 - Pour chaque câble

- * Calcul des réactions dans le repère local
 - * Calcul de la matrice de rigidité dans le repère local
 - * Calcul de la matrice rotation et sa matrice transposée
 - * Calcul de la matrice de rigidité dans le repère global
 - * Calcul du vecteur réaction dans le repère global
- 2 - Assemblage de la matrice de raideur et mémorisation suivant le schéma bande
- 3 - Calcul du vecteur force et vérification de la tolérance, c'est à dire vérifier si on a atteint la précision voulue. si c'est le cas, c'est à dire que l'on a atteint l'équilibre, si non on continue
- 4 - Introduction des conditions aux limites
- 5 - Résolution du système par la méthode de Gauss
- 6 - Une fois les déplacements obtenus, on les rajoute à ceux déjà calculés, on obtient alors les coordonnées des noeuds de la nouvelle configuration puis on recommence le processus.

Remarque:

Il a été remarqué que la convergence de la méthode de résolution était plus rapide par l'introduction d'une matrice diagonale [D] que l'on somme à la matrice de rigidité [K] avant chaque itération [7], tel que:

$$\{U^{i+1}\} = [K^i + D^{-1}]\{F^i\}$$

Avec:

$$D_{ji}^i = \frac{MK_0}{i^{1,5}} + K_1$$

Où:

MK_0 : Représente le plus grand terme de la matrice de rigidité initiale [K°]

i : Numéro de l'itération

K_1 : Terme que l'on prend généralement égal à zéro. Cependant, on peut lui donner une valeur positive: ceci garanti la convergence du processus au dépend du nombre d'itération.

V.2.3 Exemples:

Exemple n°1:

Il s'agit de développer l'algorithme I en faisant l'analyse d'un câble dans son repère pour différentes configurations. Pour chacune d'elles, on calcule les réactions et on détermine la géométrie du câble.

$$w = 1 \text{ KN/m}$$

$$L = 100 \text{ m}$$

$$T = 100^\circ\text{C}$$

$$C = 0,65 \cdot 10^{-5} \text{ [C}^\circ\text{xM]}^{-1}$$

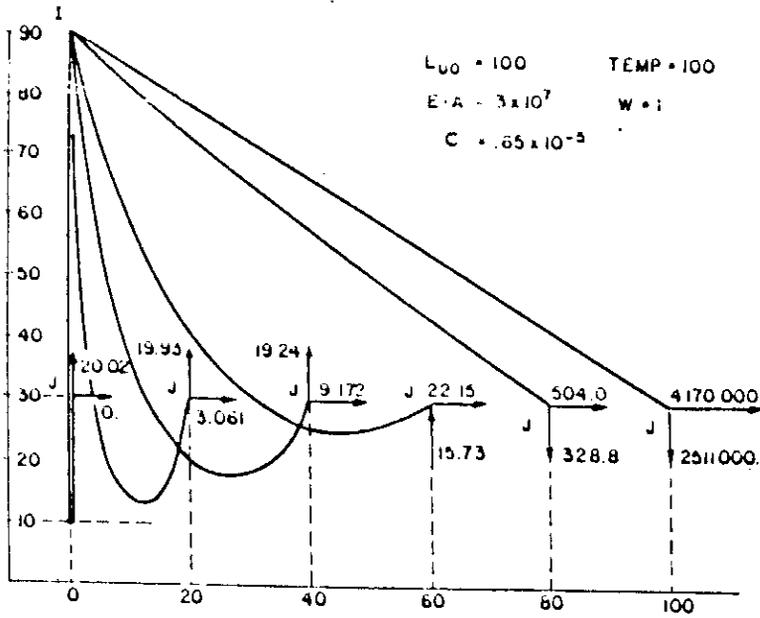
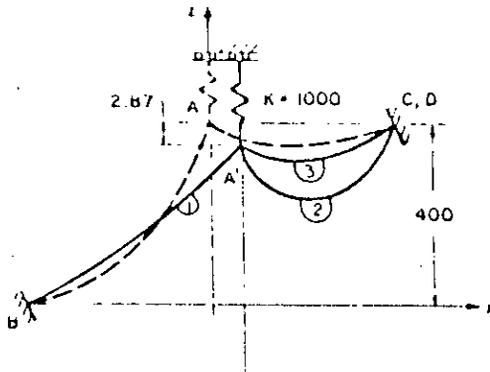


Figure V.4

Pour les trois premières configurations, les coordonnées ont été obtenues à 10^{-5} m près, alors que pour les dernières, cela a été fait à 10^{-3} m près (car les réactions ont pris des valeurs trop élevées).

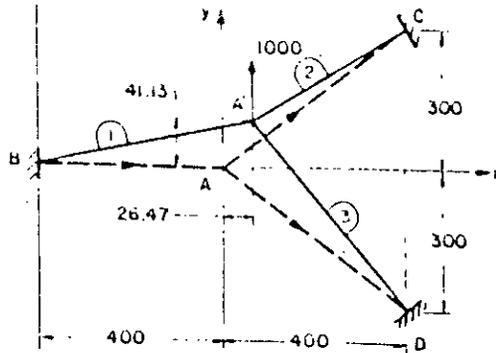
Exemple n°2:

Cette exemple concerne l'étude d'un réseau de trois câbles reliés à un noeud sur appui élastique:



Vue de face

Figure V.5



Vue de dessus

Figure V.6

Les données du problèmes et les résultats sont reportés sur le tableau suivant:

Raideur de l'appui élastique : $K = 1000 \text{ KN/m}$								
Données communes aux trois câbles :								
$EA = 290000 \text{ KN}$ $T = 100^\circ\text{C}$ $C = 0,65 \cdot 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$								
Déplacements du point A au point A' :								
$\Delta x = 26,473 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ $\Delta y = 41,135 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ $\Delta z = -2,874 \cdot 10^{-2} \text{ m}$								
Données propres à chaque câble et forces aux noeuds :								
Câble	W N° (KN/m)	L_{u0} (m)	Force en I (KN)			Force en J (KN)		
			x	y	z	x	y	z
1	1	5,8	-1686,0	-162,6	-1288,1	1686,0	162,6	1868,1
2	2	5,1	-437,6	-303,3	505,9	437,6	303,3	514,1
3	2	5,1	-1248,5	1140,2	500,1	1248,6	-1140,2	519,9
<ul style="list-style-type: none"> - $K_1 = 500 \text{ KN/m}$ - Le vecteur force résiduel au noeud A' est de l'ordre de 10^{-3} KN 								

V.2.4 Conclusion:

- La méthode développée arrive à traiter des problèmes dont les déplacements sont de l'ordre des dimensions de la structure
- Le processus de résolution étant itératif, le vecteur force

w_i appliqué au câble peut être modifié à chaque itération, s'il y a lieu de la faire.

- Les réseaux de câbles où l'on utilise des précontraintes peuvent aussi être traités; pour cela, il suffit de prendre la corde supérieure à L_{u0}

- La méthode s'avère très efficace en ce qui concerne la détermination de la configuration et la géométrie d'un câble à l'équilibre.

V.3 METHODE ENERGETIQUE

V.3.1 Introduction:

La détermination de la figure d'équilibre d'une structure à câbles, formée d'un câble unique ou d'un réseau, c'est un problème hautement non linéaire, dont l'analyse peut être menée en utilisant les méthodes énergétiques.

Nous formulons ici l'expression de l'énergie potentielle totale d'une structure à câbles, grandeur scalaire dont le minimum fixe la figure d'équilibre de l'ensemble du problème étudié.

Pour évaluer cette énergie potentielle, nous adopterons une discrétisation en éléments finis, les coordonnées des noeuds de cette discrétisation étant les variables du problème.

Dans un premier temps, nous considérerons uniquement les charges de gravité, intégrant par la suite les forces ponctuelles de manière immédiate.

V.3.2 Structure à câbles soumise à son poids propre:

L'énergie potentielle totale π dont le minimum décrit entièrement la figure d'équilibre du câble est composé de L de déformation U du câble et du potentiel des forces extérieures V_g (forces de gravité).

$$\pi = U + V_g$$

Désignons par:

s : l'abscisse curviligne du câble,

E_s : le module de Young du câble dans la section s

A_s : l'aire de la section transversale,

ρ_s la masse volumique du matériau constitutif du câble

dans la section s ,

g : l'accélération de la pesanteur.

Supposons également que la relation contrainte-déformation (σ - ϵ) du câble est linéaire (loi de Hooke) et que, pour garder à la formulation un caractère général, les caractéristiques du câble (E_s , A_s , ρ_s) peuvent varier avec l'abscisse curviligne (réseau composé de câbles à caractéristiques mécaniques différentes, câbles de section variable...)

Energie de déformation U :

$$U = \int_s \frac{N_s^2}{2E_s A_s} ds$$

Le seul effort interne régnant dans le câble est l'effort normal N_1 . L'énergie de déformation du câble s'exprime donc par où S désigne l'ensemble du système de câbles (réseau).

Par la loi de Hooke, nous avons $N_0 = Es As \epsilon$.

Il en résulte que:

$$U = \frac{1}{2} \int_s Es A s \epsilon^2 ds$$

ϵ représente l'allongement du câble.

Considérons un tronçon de câble de longueur initiale ds_0 . Dans la figure d'équilibre (déformée) du câble, ce tronçon a une longueur ds .

On a:

$$\epsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1$$

$\underline{ds_0}$ longueur initiale.

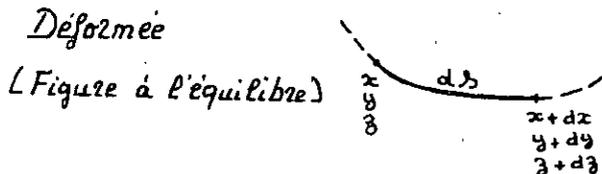


Figure V.7

Dans le système d'axe de référence, (dx, dy, dz) sont les composantes du segment ds . Il en résulte que:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

V.3.2.1 Evaluation numérique de L'énergie potentielle totale:

L'énergie potentielle du système de câbles vaut donc:

$$\pi = U + V_g = \frac{1}{2} \int_s E_s A_s \varepsilon^2 ds_0 + \int_s \rho_s g A_s z ds_0$$

Sous cette formulation, π s'exprime en fonction des coordonnées réelles du câble. Pour l'évaluer, nous allons adopter une discrétisation du câble en éléments finis de section transversale et de module de Young constants, ils sont aussi supposés ne transmettre les contraintes que dans la direction normale à la section transversale.

Les éléments câbles possèdent une orientation arbitraire dans l'espace et peuvent être composés de deux à quatre noeuds comme indiqué ci-dessous.

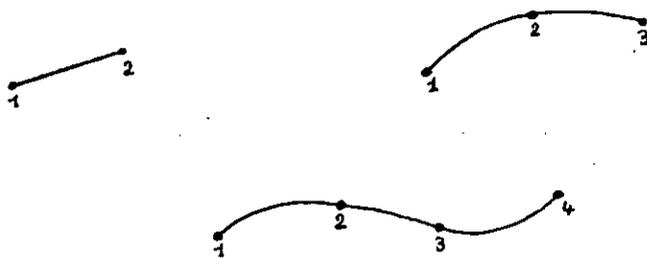


Figure V.8

Nous opterons pour l'élément à trois noeuds. En effet, l'élément à quatre noeuds demande une moindre discrétisation mais un grand effort de calcul; tandis-que l'élément à deux noeuds qui est le plus simple ne peut refléter le comportement du câble que si on l'utilise en grand nombre. Cependant, l'élément quadratique à trois noeuds se présente comme le plus adapté car il épouse la géométrie du câble avec une discrétisation relativement moyenne demandant ainsi un effort de calcul raisonnable.

L'énergie potentielle totale sera alors donnée par:

$$\pi = \sum \pi_e$$

où π_e est l'énergie potentielle totale d'un élément, la somme portant sur tous les éléments de la discrétisation.

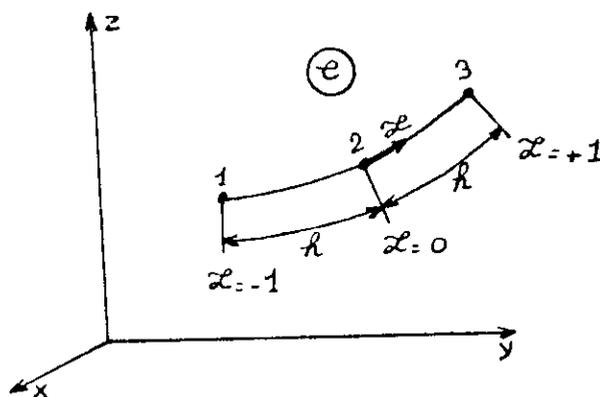


Figure V.9

Soit un élément quadratique à trois noeuds, de longueur initiale $2h$. Soient (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) les

coordonnées des trois noeuds de l'élément e.

Et donc:

$$\frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)^2}$$

et enfin:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)^2} - 1$$

Potentiel des forces de gravité V_g :

Le potentiel d'une force F de composante (F_x, F_y, F_z) appliquée en un point P de coordonnées (x_p, y_p, z_p) vaut

$$- (F_x \cdot x_p + F_y \cdot y_p + F_z \cdot z_p)$$

Les forces de gravité agissant suivant l'axe z , dans le sens opposé à l'axe z . Soit un tronçon de câble de longueur ds_0 .

La masse de ce tronçon de câble vaut $\rho_s A_s ds_0$. Les composantes du vecteur force s'appliquant sur ce tronçon sont donc :

$$F_g = (0, 0, -\rho_s g A_s ds_0)^T$$

et le potentiel des forces de gravité $V_{g,ds} = \rho_s g A_s z ds_0$

Pour l'ensemble du réseau, nous obtenons donc:

$$V_g = \int_s \rho_s g A_s z ds_0$$

Désignons par ξ la coordonnée normalisée sur l'élément e , telle

$$\text{que } \xi \text{ (noeud 1)} = -1$$

$$\xi \text{ (noeud 2)} = 0$$

$$\xi \text{ (noeud 3)} = 1$$

On a $ds_0 = h\xi$ et donc:

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{dx}{d\xi} \frac{d\xi}{ds_0} = \frac{1}{h} \frac{dx}{d\xi}$$

De la même façon

$$\frac{dy}{ds_0} = \frac{1}{h} \frac{dy}{d\xi} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{ds_0} = \frac{1}{h} \frac{dz}{d\xi}$$

Il en résulte donc:

$$\varepsilon = \frac{1}{h} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} - 1$$

L'énergie potentielle totale d'un élément s'exprime donc:

$$\pi_e = \frac{1}{2} EA h \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{h} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} - 1 \right]^2 d\xi$$
$$+ \rho g A h \int_{-1}^1 z d\xi$$

En supposant que ρ , A et E sont constants sur la longueur de l'élément e .

Pour évaluer les intégrales ci-dessus, il faut disposer des coordonnées x , y et z sur la longueur de l'élément e . Or, nous ne disposons que des valeurs aux noeuds de l'élément.

En nous référant aux fonctions d'interpolation de Lagrange:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

Nous obtenons les expressions suivantes:

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \cdot x_i$$

$$y(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \cdot y_i$$

$$z(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \cdot z_i$$

Qui représentent le champs des coordonnées du point courant ξ sur l'élément e .

D'autre part, on a que:

$$\frac{dx}{d\varrho} = \frac{d}{d\varrho} \left(\sum_{i=1}^3 N_i(\varrho) \cdot x_i \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i(\varrho)}{d\varrho} x_i$$

De la même façon, on obtient:

$$\frac{dy}{d\varrho} = \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i(\varrho)}{d\varrho} y_i$$

$$\frac{dz}{d\varrho} = \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i(\varrho)}{d\varrho} z_i$$

Avec:

$$\frac{dN_1(\varrho)}{d\varrho} = \varrho - \frac{1}{2}$$

$$\frac{dN_2(\varrho)}{d\varrho} = -2\varrho$$

$$\frac{dN_3(\varrho)}{d\varrho} = \varrho + \frac{1}{2}$$

L'expression de L'énergie potentielle de l'élément e devient:

$$\pi_e = \frac{1}{2} EA h \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{h} \sqrt{\left(\sum \frac{dN_i}{d\varrho} x_i \right)^2 + \left(\sum \frac{dN_i}{d\varrho} y_i \right)^2 + \left(\sum \frac{dN_i}{d\varrho} z_i \right)^2} - 1 \right]^2 d\varrho$$

$$+ \rho g A h \int_{-1}^1 \sum N_i z_i d\varrho$$

L'intégration peut des lors être effectuée numériquement, par exemple par la méthode de Gauss-Legendre qui se formule comme suit:

On peut écrire l'intégrale d'une fonction comme une combinaison linéaire que prend cette dernière en différents points.

$$\int_a^b f(x) dx = C [w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n)]$$

Où C est proportionnel à b-a, et où les facteurs de pondération w_i dépendent de la fonction par laquelle on approche $f(x)$ (segments de droites pour la méthode des trapèzes, arc de parabole par la méthode de Simpson). Dans la méthode Gauss Legendre, on développe $f(x)$ dans une base de polynômes orthogonaux. Les x_i sont alors racines de ces polynômes et sont donc irrégulièrement espacés. Les polynômes utilisés sont dans ce cas ceux de Legendre. Ceux-ci étant définis dans l'intervalle $[-1, +1]$.

Ainsi dans notre cas, pour l'élément choisit:

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi = w_1 F(\xi_{G1}) + w_2 F(\xi_{G2}) + w_3 F(\xi_{G3})$$

Où $F(\xi_{G_i})$ sont les valeurs de la fonction à intégrer aux points de Gauss dont les abscisses curvilignes normalisées sont:

Et w_i les poids respectifs associés aux points de Gauss, dont

$$q_{pG1} = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad ; \quad q_{pG2} = 0 \quad ; \quad q_{pG3} = +\sqrt{\frac{3}{5}}$$

les valeurs sont:

$$w_1 = 5/9 \quad ; \quad w_2 = 8/9 \quad ; \quad w_3 = 5/9$$

V.3.3 Structures à câbles soumises à des charges ponctuelles:

Pour tenir compte des charges ponctuelles appliquées sur le câble, nous devons ajouter à l'énergie de déformation U et au potentiel des forces de gravité V_g le potentiel des forces ponctuelles V_p :

$$\pi = U + V_g + V_p$$

Soit un réseau de câbles sur lequel s'appliquent les forces ponctuelles dont les composantes sont:

$$((F_x(i), F_y(i), F_z(i)), i-1, n)$$

Et les points d'application ont pour coordonnées:

$$((X_p(i), Y_p(i), Z_p(i)), i-1, n)$$

Le potentiel des forces extérieures est alors donné par:

$$V_p = - \sum_{i=1}^n (F_x(i) \cdot X_p(i) + F_y(i) \cdot Y_p(i) + F_z(i) \cdot Z_p(i))$$

V.3.4 Résolution du problème:

Soit un réseau de câbles discrétisé en M éléments finis quadratiques, regroupant N noeuds, dont les coordonnées sont $((X_i, Y_i, Z_i), i=1, N)$ les 3N variables du problème.

L'énergie potentielle totale du système est donnée par:

$$\pi = \sum_{e=1}^M \pi_e + \sum_{i=1}^n V_{p,i}$$

Où $V_{p,i}$ est le potentielle de la ième force ponctuelle, on voit immédiatement que

$$\pi = \pi(X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_N, Y_N, Z_N)$$

est en fonction des coordonnées nodales, les autres paramètres étant fixés.

La détermination de la configuration d'équilibre de notre structure s'exprime alors de la manière suivante:

Déterminer $X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_N, Y_N, Z_N$ tels que l'énergie potentielle π soit minimale en tenant compte des conditions d'appui qui sont très facilement prises en fixant les valeurs des coordonnées nodales correspondantes.

La détermination de la figure d'équilibre d'une structure

à câble se présente donc comme un problème d'optimisation non linéaire d'une fonction multi-variable (π).

On utilisera pour cela l'algorithme de Huang établi précédemment dans le chapitre (IV).

V.3.5 Exemples

Considérons l'exemple illustré sur la figure ci-dessous

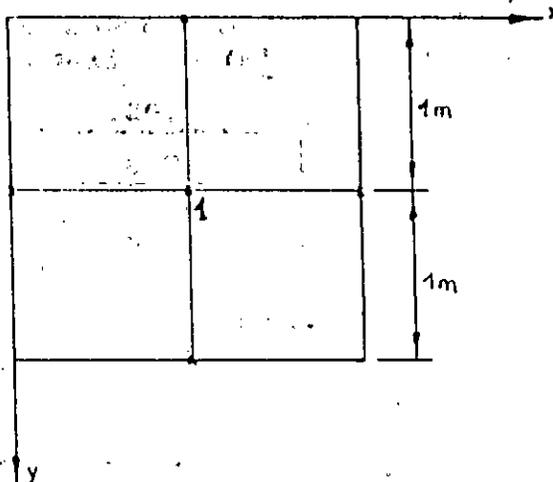


Figure V.10

On applique une force $F(\text{KN}) = (0, 0, 100)$ au noeud central et pour divers discrétisations on obtient les résultats suivants:

- Discrétisation en deux éléments:

N° du noeud	Direction	Coordonnées à l'équilibre (m)
1	X	1
	Y	1
	Z	$1,989 \cdot 10^{-1}$
2	X	1,007
	Y	$5,032 \cdot 10^{-1}$
	Z	$1,001 \cdot 10^{-1}$
3	X	$5,032 \cdot 10^{-1}$
	Y	1,007
	Z	$1,009 \cdot 10^{-1}$
4	X	1,007
	Y	1,509
	Z	$1,001 \cdot 10^{-1}$
5	X	1,509
	Y	1,007
	Z	$1,001 \cdot 10^{-1}$

- Discrétisation en huit éléments:

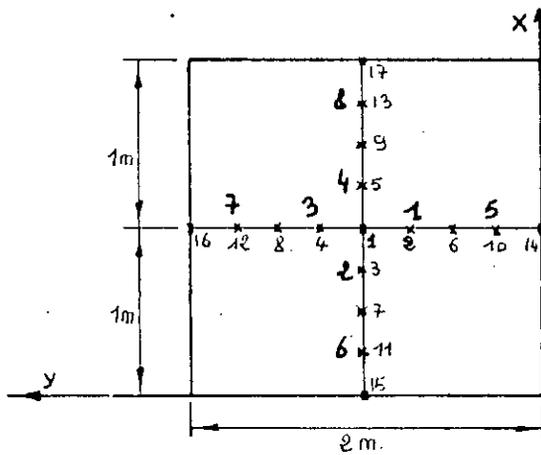


Figure V.13

N° du noeud	Direction	Coordonnées à l'équilibre (m)
1	X	1
	Y	1
	Z	$1,992 \cdot 10^{-1}$
2	X	1,006
	Y	$7,548 \cdot 10^{-1}$
	Z	$1,504 \cdot 10^{-1}$
3	X	$7,548 \cdot 10^{-1}$
	Y	1,006
	Z	$1,504 \cdot 10^{-1}$
4	X	1,006
	Y	1,258
	Z	$1,504 \cdot 10^{-1}$
5	X	1,258
	Y	1,006
	Z	$1,504 \cdot 10^{-1}$

Remarque

En comparant ces résultats à ceux obtenus pour le même exemple par la formulation analytique, nous remarquons qu'il y a une légère différence entre les déplacements correspondants qui est de l'ordre de 10^{-2} (m). Ceci peut être expliqué par le fait que la méthode analytique considère que les câbles sont droits, ce qui ne reflète pas la réalité physique. Par conséquent les déplacements fournis par la méthode analytique sont calculés par défaut; on en conclut que la méthode

énergétique basée sur la discrétisation en éléments isoparamétriques donne des résultats plus précis.

V.3.6 Conclusion:

La méthode présentée précédemment offre une formulation plus simple du problème. Les résultats obtenus sont plus précis que ceux des méthodes présentées auparavant ; cependant, malgré si l'utilisation de la même méthode de minimisation de l'énergie potentielle totale que pour la formulation analytique, la convergence s'avère plus difficile à obtenir dans certains cas. Ceci est dû à l'aspect hautement non linéaire de l'expression de l'énergie potentielle totale.

CHAPITRE VI

DYNAMIQUE

VI.1 INTRODUCTION

De nombreux problèmes d'analyse des structures peuvent être traités par les méthodes d'analyse statique qui ont été exposées lors des chapitres précédents. Cependant, il existe également de nombreux cas où l'on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées. En général, si la fréquence des forces appliquées est inférieure au tiers de la fréquence propre fondamentale de la structure, le problème est quasi statique. Le système $KU = F$ s'avère assez précis malgré la variation lente de U et F dans le temps (pour les systèmes non-linéaire, K varie aussi). Mais dans le cas contraire, ou si la structure vibre librement, les termes inertiels et d'amortissement deviennent importants et on est alors amené à faire une étude dynamique du système.

Ce type d'étude a pour objectif fondamental, l'analyse des contraintes et des déformations dans n'importe quel type de

structure soumise à un chargement dynamique arbitraire.

Les problèmes de dynamique peuvent être divisés en deux catégories:

- Problèmes de propagation d'ondes
- Problèmes de dynamique des structures

Cette dernière constituera le thème de notre étude.

VI.2 PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE

Le but essentiel de l'étude dynamique d'un système, est la détermination des variations des déplacements dans le temps. A cet effet, on définit les équations du mouvement qui sont les expressions mathématiques définissant les déplacements dynamiques. Une fois résolues, elles permettent d'obtenir les déplacements recherchés. La formulation de ces équations, qui constitue la phase la plus délicate de l'étude, peut se faire par différentes méthodes. Nous en citerons deux:

a - Principe de D'Alembert:

Les équations du mouvement d'un système dynamique quelconque sont les expressions de la deuxième loi de Newton selon laquelle l'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque m est égale à la force qui lui est appliquée. Cette relation s'exprime mathématiquement par:

$$F(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \quad (6.1)$$

Avec:

$F(t)$: vecteur force appliqué

m : masse

$x(t)$: vecteur position de m

Si l'on considère m constante au courant du temps, alors

(6.1) devient:

$$F(t) - m\ddot{x}(t) = 0 \quad (6.2)$$

$m\ddot{x}(t)$ est appelée force d'inertie. Cette loi selon laquelle une masse produit une force d'inertie proportionnelle opposée à son accélération est appelée principe de d'Alembert. Cette formulation des équations du mouvement à un coté très pratique, car elle se fait à partir des équations d'équilibre.

b - Principe des déplacements virtuels:

Quand on a à étudier une structure relativement complexe, à plusieurs degrés de liberté, la formulation des équations d'équilibre devient laborieuse. On peut alors avoir recours au principe des déplacements virtuels qui permet la caractérisation variationnelle des systèmes continus de la même manière que le théorème de l'énergie potentielle totale est le fondement énergétique des méthodes d'analyse statique.

Le principe des déplacements virtuels s'exprime comme suit:

Si un système qui est en équilibre sous l'action d'un

ensemble de forces est soumis à un déplacement virtuel, c'est à dire un déplacement compatible avec les liaisons du système, alors le travail effectué par les forces est nul. Ceci correspond à une formulation d'un équilibre. Les équations de la réponse d'un système dynamique peuvent donc s'établir de la manière suivante:

On relève toutes les forces agissant sur les masses du système y compris les forces d'inertie définies par le principe de D'Alembert, puis les équations du mouvement sont obtenues en considérant des déplacements virtuels correspondant à chaque degré de liberté et en annulant le travail effectué.

VI.3 PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE

En pratique on cherche à obtenir des solutions approchées du problème continu en le réduisant à un problème discret à un nombre fini de degrés de liberté.

La méthode des éléments finis en dynamique, permet l'étude du comportement d'une structure par la connaissance des déplacements aux noeuds en fonction du temps. Cette méthode est basée sur une discrétisation spatiale par éléments finis de type déplacement. Comme en statique, on doit considérer successivement trois phases:

a - Discrétisation spatiale du domaine en éléments finis:

La phase de discrétisation consiste à découper la

structure en éléments finis de forme géométrique. Dans chaque élément, on définit une approximation des déplacements séparant les variables d'espace et de temps en écrivant pour chaque composante de déplacement:

$$[U(x,y,z,t)]^e = [\varphi(x,y,z)] [a(t)]^e$$

Quelque soit le point M appartenant à l'élément e, ou dans le cas du choix des déplacements nodaux comme coordonnées généralisées:

$$[U(x,y,z,t)]^e = [A(x,y,z)]^e [q(t)]^e$$

Avec:

$[U]^e$: vecteur des déplacements en un point M de l'élément e

$\varphi(x,y,z)$: matrice des fonctions base de l'approximation spatiale, (généralement des fonctions polynomiales en x,y et z)

$[A(x,y,z)]^e$: matrice d'interpolation pour l'élément e

$[a(t)]^e$: vecteur des coordonnées généralisées fonctions inconnues du temps

$[q(t)]^e$: vecteur des déplacements aux noeuds de l'élément e.

En statique, on ramène le problème continu à la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre à n

fonctions inconnues du temps.

b - Formulation élémentaire:

La formulation au niveau de l'élément consiste, dans le cas de l'utilisation du principe des déplacements virtuels, à relever toutes forces agissant sur l'élément, puis à considérer un déplacement virtuel des noeuds de celui-ci et enfin à annulé le travail engendrer.

c - Formulation globale:

La formulation globale du problème consiste en l'obtention des équations du mouvement à partir de l'expression des travaux engendrés au niveau des éléments de la structure en fonction des déplacements aux noeuds de celle-ci.

Remarque:

L'analyse dynamique par la MEF d'une structure sans amortissement revient à résoudre le système différentiel du second ordre:

$$M\ddot{q} + Kq = F(t) \quad (6.4)$$

M : matrice masse du système

K : matrice de rigidité du système

F(t) : Force dynamique appliquée au système

q : vecteur accélération

Nous verrons plus loin (chapitre VI.6), comment on peut aboutir à un tel système.

VI.4 ETUDE MODALE

VI.4.1 Généralités:

Pour la résolution de l'équation (VI.4), deux approches fondamentales sont envisageables: l'une d'entre elles consiste à résoudre ce système différentiel par intégration directe, l'autre méthode consiste à définir la solution dans la base des modes propres de vibration de la structure. Celle-ci est appelée méthode de superposition modale et elle est la plus largement utilisée en analyse dynamique.

La résolution de l'équation (VI.4) suppose que la structure est faiblement amortie et c'est le cas le plus fréquent pour de nombreux domaines d'application. La méthode de superposition modale utilise donc les modes propres réels de la structure non amortie. On se ramène donc à la résolution du problème aux valeurs propres sous sa forme général:

$$Kx = w^2 Mx \quad (\text{VI.5})$$

Le système homogène (VI.5) de dimension n à n solutions propre $x^{(i)}$ permettant de définir les déformées modales de la structure et n valeurs propres associées, carrées des

pulsations propres $\lambda = w_i^2$.

C'est la solution du système (VI.5) qui constitue le problème aux valeurs propres.

VI.4.2 Propriétés fondamentales des systèmes propres:

Les méthodes de résolution du système (VI.5), dit système propre, sont basées sur les propriétés de celui-ci. C'est pourquoi, avant d'étudier quelques méthodes de résolution, il est indispensable de citer les différentes propriétés fondamentales du système propre:

a - Valeurs propres:

Le système (VI.5) peut s'écrire sous la forme:

$$(K - \lambda M)x^{(i)} = 0 \quad (\text{VI.6})$$

Pour obtenir des vecteur $x^{(i)}$ non nuls de façon à ce que (VI.6) soit satisfaite il faut que $[K-\lambda M]$ soit singulière, c'est à dire:

$$\det([K - \lambda_i M]) = 0 \quad (\text{VI.7})$$

L'équation (VI.7) correspond à la recherche des racines λ_i d'un polynôme d'ordre n . Or, il n'existe pas de méthode directe de résolution pour $n > 4$, de plus, il est difficile de construire explicitement le polynôme pour de grands systèmes.

C'est la raison pour laquelle on a recours à des méthodes itératives.

b - Vecteurs propres:

- Pour le calcul des vecteurs propres, on peut utiliser les algorithmes de résolution de problèmes statiques, en effet:

Si dans le système $KU = F$, on remplace le vecteur F par λMx , on aura alors $U = x$.

- Les vecteurs propres ne sont connus qu'à une constante multiplicative près. Alors, ceux-ci ne sont définis que par leur direction dans l'espace.

- Les vecteurs propres satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$x^T K x = \Lambda$$
$$x^T M x = I$$

x : matrice modale où sont stockés les vecteurs propres par colonnes.

Λ : matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres.

c - Quotient de Rayleigh:

On appelle quotient de Rayleigh du mode de déplacement x , le rapport:

$$R(x) = \frac{x^T K x}{x^T M x}$$

Le quotient de Rayleigh d'un vecteur propre, correspond à sa valeur propre.

Propriété:

Le quotient de Rayleigh est stationnaire au voisinage de tout vecteur propre et il atteint un extremum qui est la valeur propre correspondante.

En particulier, le mode fondamental de vibration rend stationnaire le quotient de Rayleigh qui tend vers la valeur propre la plus basse.

d - Décalage des valeurs propres:

Une des techniques les plus répandue dans la résolution des problèmes aux valeurs propres est le décalage. Cette technique améliore la vitesse de convergence en transformant la matrice K en:

$$\tilde{K} = K - \phi M$$

Où ϕ est la valeur du décalage.

L'équation (VI.5) devient :

$$\tilde{K}\psi = \mu M\psi$$

Ou encore:

$$K\psi = (\mu + \varphi)M\psi$$

On peut alors faire l'identification suivante, provenant de l'unicité de la solution:

$$x = \psi$$

$$\lambda = \mu + \varphi$$

VI.4.3 Méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres:

Dans la résolution des problèmes dynamiques par superposition modale, c'est la recherche des solutions propres qui nécessite le plus de temps de calcul.

- Nous citerons trois méthodes qui opèrent sur les vecteurs propres [1]:

a - Méthode d'itération directe:

La méthode d'itération directe encore appelée méthode de la puissance directe convient plus particulièrement pour la résolution des problèmes aux valeurs propres sous forme classique, lorsqu'on s'intéresse à un petit nombre de solutions propres.

Pour ramener la solution d'un problème aux valeurs propres sous la forme générale, soit:

$$Kx = \omega^2 Mx$$

à celle d'un problème aux valeurs propres sous la forme classique, c'est à dire:

$$Dy = \lambda y$$

On peut procéder de différentes façons suivantes:

* En posant:

$$D = K^{-1}M\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (\text{VI.8})$$

alors la matrice D qui est aussi appelée matrice de flexibilité dynamique n'est pas symétrique, ce qui est un inconvénient majeur de cette approche. Cependant la relation (VI.9) entre les valeurs propres et les pulsations propres de la structures est particulièrement adaptée à la méthode de la puissance qui converge vers les valeurs propres les plus élevées.

* En faisant une factorisation de Cholesky de M ou K. La matrice de flexibilité dynamique obtenue est alors symétrique, ce qui est plus intéressant.

- Exp : factorisation de M

$$M = U_M^T U_M$$

On se donne un vecteur de départ y_0 , et on calcule:

$$y_1 = Dy_0$$

On itère ensuite sur le vecteur y de telle manière que:

$$y_{i+1} = Dy_i$$

Tout vecteur de départ y_0 peut se décomposer dans la base des vecteurs propres $x^{(j)}$ soit:

$$y_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j X^{(j)} = \Phi \beta$$

de $y_{i+1} = D y_i$ on tire:

$$y_1 = D^1 y_0$$

D'où:

$$y_1 = \sum_{j=1}^n \beta_j D^1 X^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^2 X^{(j)}$$

Où encore:

$$y_1 = \lambda_1^1 \left[\beta_1 X^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^1 X^{(j)} \right]$$

Si l'on suppose que D à n valeurs propres distinctes, on a:

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1 \text{ pour } j=2, n$$

Ainsi lorsque i devient grand, les itérés successifs deviennent colinéaires aux vecteurs propres $x^{(1)}$:

$$y_i = \lambda_1^i \beta_1 x^{(1)}$$

De plus :

$$\frac{|y_{i+1}|}{|y_i|} = \lambda_1$$

b - Méthode d'itération inverse:

La méthode d'itération inverse ou encore appelée méthode de la puissance inverse convient pour la résolution des problèmes aux valeurs propres sous forme générale:

$$Kx = w^2 Mx$$

Lorsqu'on s'intéresse à un petit nombre de solutions propres. Son principe est le suivant:

Soit à résoudre le problème aux valeurs propres général:

$$Kx = \lambda Mx \text{ avec } \lambda = w^2$$

Donc les solutions propres sont:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$
$$x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$$

La méthode de la puissance inverse consiste à itérer sur un vecteur y de telle sorte qu'à l'itération i , on ait à résoudre le système linéaire:

$$Ky_1 - My_{1-1} \tag{VI.10}$$

Comme précédemment, tout vecteur de départ y_0 peut se décomposer dans la base des vecteurs propres $x^{(i)}$, soit:

$$y_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j x^{(j)}$$

D'ou en utilisant (VI.10):

$$Ky_1 - My_0 = \sum_{j=1}^n \beta_j Mx^{(j)}$$

Mais on a:

$$Kx^{(j)} = \lambda_j Mx^{(j)}$$

d'où:

$$y_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\lambda_j} x^{(j)}$$

Si on étend ses résultats à l'itération i , on obtient:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^i x^{(j)}$$

Ou encore:

$$y_i = \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^i \left[\beta_1 x^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^i x^{(j)} \right]$$

Dans le cas de n valeurs propres distinctes:

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1 \text{ pour } j=2, n$$

Ainsi lorsque i devient grand, les itères successifs deviennent colinéaires au vecteur propre $x^{(1)}$:

$$y_i = \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^i \beta_1 x^{(1)}$$

De plus:

$$\frac{\|y_{i+1}\|}{\|y_i\|} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

Remarques:

- En ce qui concerne la méthode d'itération directe et la méthode d'itération inverse, le nombre r d'itérations requis pour une précision de s chiffres représentatifs sur les valeurs propres:

Soit pour:

$$\left| \frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(r-1)}{\lambda_1(r-1)} \right| \leq 10^{-s}$$

est obtenu par l'expression approchée suivante:

$$r = \frac{s}{\left[\log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right]}$$

- Dans la méthode d'itération inverse, si le vecteur y_i n'est pas orthogonal au vecteur propre cherché, y_i convergera vers la matrice du premier mode.

c - Méthode d'itération sur sous-espace:

La méthode d'itération sur sous-espace à été développée

pour améliorer les propriétés de convergence de la méthode d'itération inverse. Cette méthode est basée sur les principes suivants:

- Générer m vecteurs de départ en nombre supérieur à celui des modes cherchés p ($p < m$);
- améliorer ce vecteur de départ par itération inverse simultanée pour générer les sous-espace des p premiers modes propres;
- extraire les p premières valeurs propres et modes propres associés par la méthode de Ritz;

On voit donc que cette méthode tire profit de différentes techniques: itération inverse simultanée, méthode de Ritz.

1 - Itération inverse simultanée:

La méthode d'itération inverse simultanée consiste à itérer simultanément sur un ensemble de m vecteurs $Y_0^{(j)}$ de départ. Soit Y_0 la matrice rectangulaire:

$$Y_0 = [Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(m)}]_0$$

A la i ème itération, on résout le système:

$$KZ_i - MY_{i-1} \tag{VI.11}$$

Avec:

$$Y_{i-1} = [Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(m)}]_{i-1}$$

Après résolution de (VI.11), on définit un sous-espace de m vecteurs orthogonaux par rapport à la masse caractérisée par la matrice Y_i , c'est à dire avec:

$$Y_i^T M Y_i = I$$

On obtient Y_i à partir de Z_i par un processus d'orthogonalisation.

Si les vecteurs de départ ne sont pas orthogonaux aux vecteurs propres cherchés la matrice des itérés $Y_i V$ a converger vers la matrice des premiers modes propres, telle que:

$$K\phi = M\phi\Lambda \quad (\text{VI.12})$$

avec:

$$\phi = [x^{(1)}, \dots, x^{(m)}]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

3 - Description de la méthode de Jacobi:

Cette méthode a été développée pour résoudre le problème standard:

$$K\phi = \lambda\phi \quad (M = I)$$

Néanmoins on peut l'appliquer au problème aux valeurs propres sous forme générale:

$$K\phi = \lambda M\phi$$

Le principe de la méthode est de diagonaliser les matrices K et M après une succession d'itérations.

A chaque itération, on procède à des pre- et post-multiplications par des matrices P_k^T et P_k (k:indice de l'itération):

$$K_{k+1} = P_k^T K P_k$$

$$M_{k+1} = P_k^T M P_k$$

Alors, quand k tend vers l'infini, on doit avoir:

$$K_{k+1} \rightarrow \Lambda$$

$$M_{k+1} \rightarrow I$$

Si l correspond à la dernière itération :

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{K_I^{(l+1)}}{M_I^{(l+1)}} \right)$$

Et:

$$\alpha = \frac{\bar{K}_{jj}^{(k)}}{x} \quad \gamma = -\frac{\bar{K}_{ii}^{(k)}}{x}$$

où x est donné par:

$$x = \frac{\bar{K}^{(k)}}{2} + \text{sign}(\bar{K}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{K}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{K}_{ii}^{(k)} \bar{K}_{jj}^{(k)}}$$

Si la matrice M est définie positive, alors:

$$\left(\frac{\bar{K}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{K}_{ii}^{(k)} \bar{K}_{jj}^{(k)} > 0$$

Cette transformation n'est appliquée que si l'élément considéré est plus grand que la tolérance dynamique du cycle.

En pratique, on compare à la tolérance les facteurs de couplage entre le $i^{\text{ème}}$ cycle et le $j^{\text{ème}}$ degrés de liberté, définis par:

$$P_K = \left(\frac{K_{ij}}{K_{ii}K_{jj}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_M = \left(\frac{m_{ij}}{m_{ii}m_{jj}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, il est nécessaire de tester la convergence des valeurs propres. Si l est la dernière itération, la convergence est atteinte si:

$$\frac{|\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}|}{\lambda_i^{(l+1)}} \leq 10^{-\epsilon} \quad i=1, \dots, n$$

On doit aussi tester si les termes extra diagonaux sont assez petits, c'est à dire:

$$\left[\frac{K_{ij}^{(l+1)}}{K_{ii}^{(l+1)} K_{jj}^{(l+1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-\epsilon}$$

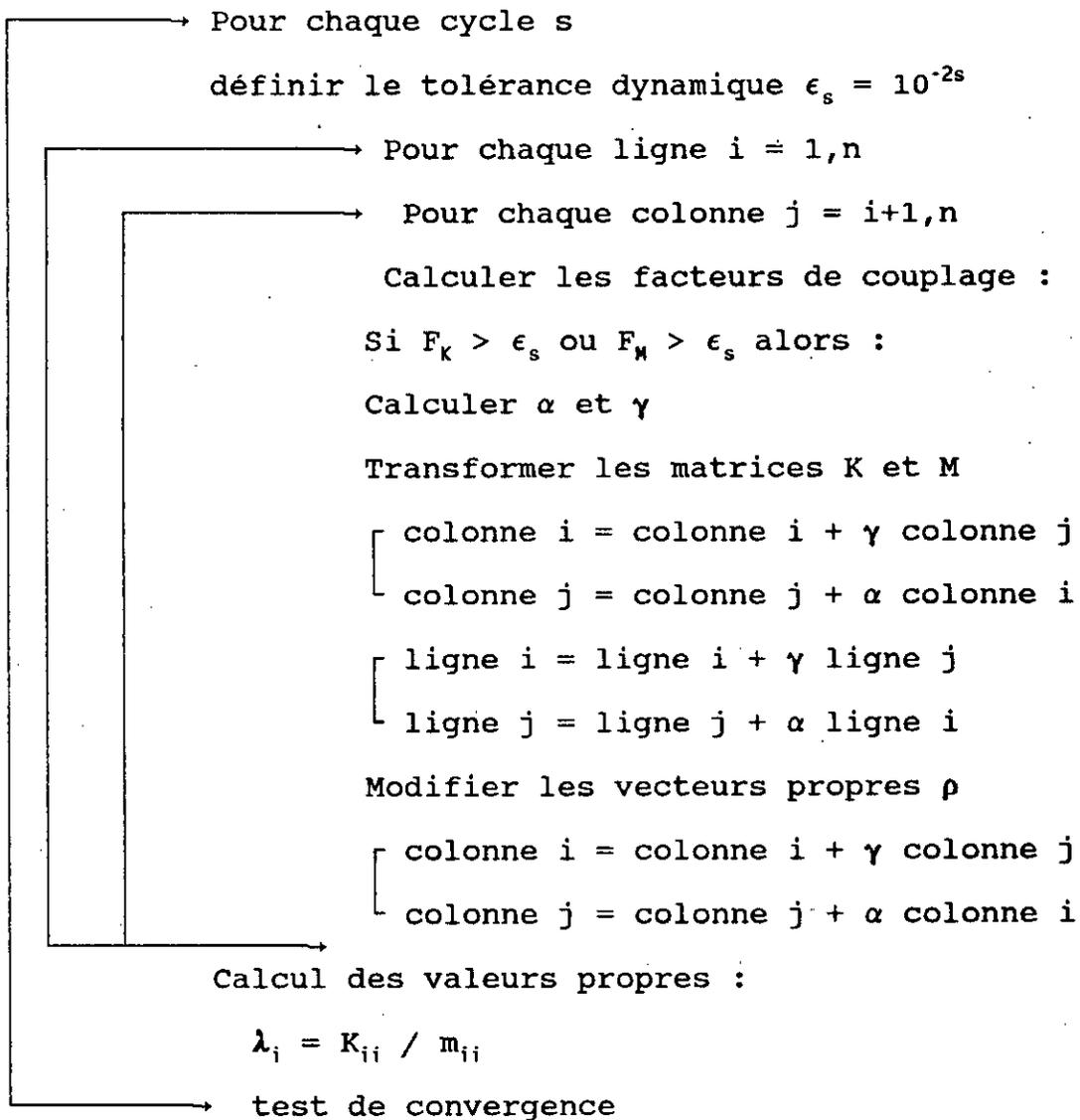
$$\left[\frac{m_{ij}^{(l+1)}}{m_{ii}^{(l+1)} m_{jj}^{(l+1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-\epsilon}$$

$\forall i, j \quad i < j$

Dans ce cas, la tolérance requise est de $10^{-2\epsilon}$.

L'algorithme de la méthode de Jacobi est le suivant:

- Définir la précision de convergence requise ϵ_s



4. Algorithme d'itération sur sous-espace:

La méthode d'itération sur sous-espace développée par Bathé, combine à chaque itération un calcul d'itération inverse simultanée et une analyse de séparation par la méthode de Ritz. L'algorithme est le suivant:

- Y_0 la matrice de m vecteurs $y_0^{(i)}$ de départ supposés non orthogonaux aux vecteurs propres recherchés.

- On effectue à la $i^{\text{ème}}$ itération les opérations suivantes:

* itération inverse simultanée

$$KZ_1 - MY_{1-1}$$

* analyse de Ritz:

calcul des matrices d'interaction

$$\bar{K}_1 = Z_1^T K Z_1 \quad \bar{M}_1^T = Z_1^T M Z_1$$

résolution du problème aux valeurs propres

$$\bar{K}_1 Q_1 = \bar{M}_1 Q_1 \Lambda_1$$

amélioration de l'approximation des vecteurs propres

$$Y_1 = Z_1 Q_1$$

Y^i converge alors vers Φ (matrice modale)

Λ_i converge de même vers Λ (matrice des valeurs propres)

Remarques:

- Au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente, les matrices K_i et M_i tendent vers la forme diagonale, ce qui rend très attrayante la méthode de Jacobi généralisée pour la

résolution du problème aux valeurs propres.

- La dernière opération faite lors d'une itération, correspond à une orthogonalisation de la matrice Y_i . Ceci a pour but de faire tendre chaque vecteur de Y_i vers un mode différent des autres.

- Si l'on désire calculer p valeurs propres, l'expérience montre qu'il est plus rapide d'utiliser un sous-espace de dimension q en ne vérifiant que la convergence des p plus petites valeurs propres. q est choisi de la façon suivante:

$$q = \min (p+8, 2p)$$

VI.5 VIBRATIONS DES SYSTEMES A CARACTERISTIQUES NON LINEAIRES

En général, dans les problèmes de vibrations étudiés, on admet implicitement que l'on a de petits déplacements, que les déformations obéissent à la loi de Hooke et, enfin, qu'en cas d'amortissement, la force résistante est une fonction linéaire de la vitesse.

Comme conséquences de ces hypothèses, les vibrations des systèmes se présentent sous la forme d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Il existe un grand nombre de problèmes d'ordre pratique dans lesquels ces hypothèses représentent assez exactement les conditions réelles, mais il y en a d'autres pour lesquels une équation

différentielle linéaire à coefficients constants ne suffit plus à représenter exactement le mouvement produit, de sorte que l'étude générale des vibrations exige l'emploi et la discussion d'équations différentielles non linéaires. Ce sont les systèmes de ce genre que l'on appelle *systèmes à caractéristiques non-linéaires*.

Un tel système, se rapprochant le plus de l'étude d'un câble, peut être celui d'une masse m fixée à un fil tendu AB (figure VI.1).

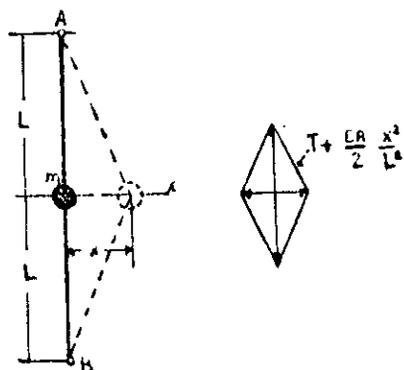


Figure VI.1

Soient:

T : la force de traction initiale dans le fil

x : déplacement horizontal de la masse m

A : aire de la section transversale du fil

E : module d'élasticité du fil

L'allongement unitaire du fil dû au déplacement x est:

$$\frac{\sqrt{L^2+x^2}-L}{L} = \frac{x^2}{2L^2}$$

$$T + EA \frac{x^2}{2L^2}$$

et la force de rappel agissant sur la masse m aura pour expression:

$$\left(T + EA \frac{x^2}{2L^2} \right) \frac{2x}{\sqrt{L^2+x^2}} = \frac{2Tx}{L} + EA \frac{x^3}{L^3}$$

En vertu du principe de D'Alembert, l'équation différentielle de la masse m devient:

$$m\ddot{x} + \frac{2Tx}{L} + EA \frac{x^3}{L^3} = 0 \quad (\text{VI.15})$$

Il est visible que lorsque les déplacements sont très faibles et la force de traction dans le fil suffisamment élevée, le dernier terme de l'équation (VI.15) peut être négligé et l'on obtiendra une vibration harmonique simple de la masse m dans la direction horizontale.

Cependant, si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, il faut tenir compte des trois termes de l'équation (VI.15).

X : le vecteur des coordonnées d'un point M quelconque
d'un élément du câble.

X_n : le vecteur des coordonnées nodales

$N(S)$: la matrice des fonctions d'interpolations

On a: $X = N(S) \cdot X_n$

Le principe des travaux virtuels appliqué à un élément
donne [11]:

$$\delta W = \int_0^L \delta X_N^T f ds + \delta X_N^T R - \int_0^{L_0} A \sigma_s \delta \epsilon_s ds_0 = 0 \quad (\text{VI.16})$$

Où:

L : longueur après déformation du câble

f : vecteur force par unité de longueur

S_0 : abscisse curviligne du câble non déformé

S : abscisse curviligne du câble déformé

r : vecteur des forces concentrées

A : section initiale du câble

σ_s : contrainte dans l'élément

ϵ_s : déformation axiale.

Considérons tout d'abord le terme:

$$\int_0^{L_0} A \sigma_s \delta \epsilon_s ds_0 \quad (1)$$

On a :

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial S_0} \right)^2 - 1 \right]$$

qui représente l'expression de la déformation axiale en coordonnées curvilignes; elle peut aussi se mettre sous la forme:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial X^T}{\partial S_0} \frac{\partial X}{\partial S_0} - 1 \right]$$

En sachant que:

$$\frac{\partial X}{\partial S_0} = [N'] X_N$$

où N' est une matrice obtenue après une dérivation ordinaire des termes de la matrice N par rapport à s .

Comme on se limite au cas élastique, on a:

$$\sigma_s = E \varepsilon_s$$

(E : module d'élasticité).

Le terme (1) peut alors se réécrire comme suit:

$$\delta U - \delta X_N^T \left[\frac{1}{2} \int_0^L EA (X_N^T [N']^T [N'] X_N - 1) [N']^T [N'] ds \right] X_N$$

Considérons ensuite le terme:

$$\int_0^L \delta X_N^T f ds \quad (2)$$

Le vecteur force f peut se décomposer de la sorte:

$$f = f_I + f_g + f_D$$

Où:

f_I : est la force inertielle

f_g : est la force gravitationnelle

f_D : est une force supplémentaire appliquée à l'élément

Alors:

$$F_I = -m \frac{\partial S_0}{\partial S} [I] \ddot{X}$$

$$F_g = mg \frac{\partial S_0}{\partial S} (h)$$

Avec:

$[I]$: matrice identité

$$(h) = (0 \ 1 \ 0)^T$$

\ddot{X} : vecteur des dérivées secondes des coordonnées par rapport au temps (accélérations)

L'équation (VI.16) se réécrit alors sous la forme:

$$[m] \ddot{X}_N + [K_E] X_N - g - q - r = 0 \quad (\text{VI.17})$$

Avec:

$$[m] = \int_0^{L_0} m [N]^T [N] dS_0$$

$$[K_E] = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} EA \{ X_N^T [N']^T [N'] X_N - 1 \} [N']^T [N'] dS_0$$

$$g = \int_0^{L_0} mg [N]^T h dS_0$$

$$q = \int_0^{L_0} [N]^T f_D dS_0$$

A l'équilibre, l'équation (VI.17) devient:

$$[m] \ddot{X}_N + [K_E] X_N = 0$$

La différentiation de cette équation donne:

$$[m] \partial \ddot{X}_N + [\partial K_E] X_N + [K_E] \partial X_N = 0 \quad (\text{VI.18})$$

Or, on a:

$$[\partial K_E] X_N - [K_L] \partial X_N$$

avec:

$$[K_L] = \int_0^{L_0} EA [N']^T [N'] X_N X_N^T [N']^T [N'] dS_0$$

L'équation (VI.18) s'écrit alors:

$$[m] \partial \ddot{X}_N + [K_T] \partial X_N = 0$$

Où : $[K_T] = [K_E] + [K_L]$

Si l'on suppose maintenant que la dépendance temporelle des coordonnées nodales est de la forme:

$$\partial X_N = C e^{i\omega t}$$

Alors l'équation (VI.18) devient un problème aux valeurs propres sous forme générale:

$$[K_T] C - \omega^2 [m] C \quad \text{(VI.19)}$$

La résolution de l'équation (VI.19) (par exemple: par la méthode d'itération sur sous-espace) fournit les fréquences naturelles de vibrations d'un câble autour de sa position

d'équilibre.

VI.6.2 Représentation des matrices des masses:

La représentation des masses pour la résolution du système (VI.19) peut être faite par deux classes principales:

les masses cohérentes ou les masses concentrées.

a - Technique des masses concentrées:

Elle consiste à discrétiser les masses soit au niveau élémentaire, soit au niveau de la structure complète de manière à obtenir une matrice de masse diagonale. Dans ce cas, la résolution du système aux valeurs propres est plus aisée.

On peut obtenir une matrice de masses diagonale de différentes façons, dont deux:

- * Soit en affectant aux différents noeuds de chaque élément des masses concentrées égales de manière à respecter sa masse
- * Soit en diagonalisant par diverses méthodes des matrices de masses cohérentes (par exemple par sommation des lignes pour chaque degré de liberté).

b - Représentation cohérente des masses:

Dans ce cas, les fonctions d'interpolation de l'énergie cinétique sont les mêmes que celles de l'énergie de déformation. Cette méthode conduit en général à des matrices de masses non diagonales.

Les matrices des masses élémentaires sont alors calculées

comme suit:

$$M^o = \int_{V^o} \rho [N]^T [N] dv$$

le calcul se fait alors soit explicitement, soit par intégration numérique.

Remarque:

La représentation des masses par une matrice diagonale substitue à la distribution continue de la masse de la structure réelle, une série de masses nodales concentrées. Ceci influe directement sur la précision des résultats obtenus en employant ce type de représentation. Cependant, pour les problèmes de grandes dimensions, il est plus aisé d'utiliser ce type de matrices; de plus, on a de bonnes approximations des premiers modes de vibrations de la structure.

VI.6.3 Calcul de la matrice masse et les matrices de rigidité élémentaire K_E et K_G :

Ces matrices élémentaires sont développées en utilisant un champ de déplacements parabolique [10], de plus, la section transversale "A" ainsi que le module d'élasticité "E" de l'élément sont supposés constants. Les trois noeuds de ce dernier et les conventions de signes associées sont représentées ci-dessous.

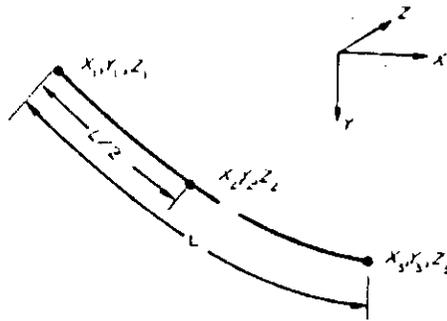


Figure VI.2

- Matrice masse élémentaire [M]:

On sait que:

$$[M] = \int_0^L m [N]^T [N] ds \quad (6.19)$$

La matrice [N] des polynômes d'interpolation se formule comme suit:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

Avec:

$$N_1 = \frac{2}{L^2} S^2 - \frac{3}{L} S + 1$$

$$N_2 = \frac{-4}{L^2} S^2 - \frac{4}{L} S$$

$$N_3 = \frac{2}{L^2} S^2 - \frac{S}{L}$$

De l'expression (6.19), on déduira la matrice masse élémentaire suivante:

$$[M] = \frac{mL}{30} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Matrices de rigidité élémentaires K_E et K_G :

Les matrices K_E et K_G étant symétriques, on présentera seulement les termes non nuls de la triangulaire supérieure de chacune d'elles. Pour alléger les écritures, nous omettrons l'indice "*" et nous définirons les termes suivants:

$$\Delta X_1 = X_2 - X_1$$

$$\Delta X_2 = X_3 - X_2$$

$$\Delta Y_1 = Y_2 - Y_1$$

$$\Delta Y_2 = Y_3 - Y_2$$

$$\Delta Z_1 = Z_2 - Z_1$$

$$\Delta Z_2 = Z_3 - Z_2$$

$$\Delta_{11} = \Delta X_1^2 + \Delta Y_1^2 + \Delta Z_1^2$$

$$\Delta_{22} = \Delta X_2^2 + \Delta Y_2^2 + \Delta Z_2^2$$

$$\Delta_{12} = \Delta X_1 \Delta X_2 + \Delta Y_1 \Delta Y_2 + \Delta Z_1 \Delta Z_2$$

Alors de la même manière que pour la matrice masse, on pourra démontrer les matrices K_E et K_G comme suit:

$$K_E = \frac{AE}{30L^3} \begin{bmatrix} \hat{K}_E \\ SYM \end{bmatrix}$$

où $\hat{K}_E(i,j)$ sont tels que:

$$1,1 - 2,2 - 3,3 = 183\Delta_{11} - 66\Delta_{12} + 23\Delta_{22} - 35L^2$$

$$4,4 - 5,5 - 6,6 = 272\Delta_{11} - 224\Delta_{12} + 272\Delta_{22} - 80L^2$$

$$7,7 - 8,8 - 8,9 = 23\Delta_{11} - 66\Delta_{12} + 183\Delta_{22} - 35L^2$$

$$1,4 - 2,5 - 3,6 = -216\Delta_{11} + 112\Delta_{12} - 56\Delta_{22} + 40L^2$$

$$1,7 - 2,8 - 3,9 = 33\Delta_{11} - 46\Delta_{12} + 33\Delta_{22} - 5L^2$$

$$4,7 - 5,8 - 6,9 = -56\Delta_{11} + 112\Delta_{12} - 216\Delta_{22} + 40L^2$$

$$K_L = \frac{AE}{30L^3} \begin{bmatrix} \hat{K}_L \\ \text{SYM} \end{bmatrix}$$

où $\hat{K}_L(i,j)$ sont tels que:

$$1,1 = 366\Delta X_1^2 - 132\Delta X_1 X_2 + 46\Delta X_2^2$$

$$2,2 = 366\Delta Y_1^2 - 132\Delta Y_1 Y_2 + 46\Delta Y_2^2$$

$$3,3 = 366\Delta Z_1^2 - 132\Delta Z_1 Z_2 + 46\Delta Z_2^2$$

$$4,4 = 544\Delta X_1^2 - 448\Delta X_1 \Delta X_2 + 544\Delta X_2^2$$

$$5,5 = 544\Delta Y_1^2 - 448\Delta Y_1 \Delta Y_2 + 544\Delta Y_2^2$$

$$6,6 = 544\Delta Z_1^2 - 448\Delta Z_1 \Delta Z_2 + 544\Delta Z_2^2$$

$$7,7 = 46\Delta X_1^2 - 132\Delta X_1 \Delta X_2 + 366\Delta X_2^2$$

$$8,8 = 46\Delta Y_1^2 - 132\Delta Y_1 \Delta Y_2 + 366\Delta Y_2^2$$

$$9,9 = 46\Delta Z_1^2 - 132\Delta Z_1 \Delta Z_2 + 366\Delta Z_2^2$$

$$1,2 - 366\Delta X_1\Delta Y_1 - 66(\Delta X_1\Delta Y_2 + \Delta X_2\Delta Y_1) + 46\Delta X_2\Delta Y_2$$

$$1,3 - 366\Delta X_1\Delta Z_1 - 66(\Delta X_1\Delta Z_2 + \Delta X_2\Delta Z_1) + 46\Delta X_2\Delta Z_2$$

$$2,3 - 366\Delta Y_1\Delta Z_1 - 66(\Delta Y_1\Delta Z_2 + \Delta Y_2\Delta Z_1) + 46\Delta Y_2\Delta Z_2$$

$$1,4 - -432\Delta X_1^2 + 224\Delta X_1\Delta X_2 - 112\Delta X_2^2$$

$$2,5 - -432\Delta Y_1^2 + 224\Delta Y_1\Delta Y_2 - 112\Delta Y_2^2$$

$$3,6 - -432\Delta Z_1^2 + 224\Delta Z_1\Delta Z_2 - 112\Delta Z_2^2$$

$$1,5 - 2,4 - -432\Delta X_1\Delta Y_1 + 112(\Delta X_1\Delta Y_2 + \Delta X_2\Delta Y_1) - 112\Delta X_2\Delta Y_2$$

$$1,6 - 3,4 - -432\Delta X_1\Delta Z_1 + 112(\Delta X_1\Delta Z_2 + \Delta X_2\Delta Z_1) - 112\Delta X_2\Delta Z_2$$

$$2,6 - 3,5 - -432\Delta Y_1\Delta Z_1 + 112(\Delta Y_1\Delta Z_2 + \Delta Y_2\Delta Z_1) - 112\Delta Y_2\Delta Z_2$$

$$1,7 - 66\Delta X_1^2 - 92\Delta X_1X_2 + 66\Delta X_2^2$$

$$2,8 - 66\Delta Y_1^2 - 92\Delta Y_1Y_2 + 66\Delta Y_2^2$$

$$3,9 - 66\Delta Z_1^2 - 92\Delta Z_1Z_2 + 66\Delta Z_2^2$$

$$1,8 - 2,7 - 66\Delta X_1\Delta Y_1 - 46(\Delta X_1\Delta Y_2 + \Delta X_2\Delta Y_1) + 66\Delta X_2\Delta Y_2$$

$$1,9 - 3,7 - 66\Delta X_1\Delta Z_1 - 46(\Delta X_1\Delta Z_2 + \Delta X_2\Delta Z_1) + 66\Delta X_2\Delta Z_2$$

$$3,8 - 2,9 - 66\Delta Y_1\Delta Z_1 - 46(\Delta Y_1\Delta Z_2 + \Delta Y_2\Delta Z_1) + 66\Delta Y_2\Delta Z_2$$

$$4,5 - 544\Delta X_1\Delta Y_1 - 244(\Delta X_1\Delta Y_2 + \Delta X_2\Delta Y_1) + 544\Delta X_2\Delta Y_2$$

$$4,6 - 544\Delta X_1\Delta Z_1 - 244(\Delta X_1\Delta Z_2 + \Delta X_2\Delta Z_1) + 544\Delta X_2\Delta Z_2$$

$$5,6 - 544\Delta Y_1\Delta Z_1 - 244(\Delta Y_1\Delta Z_2 + \Delta Y_2\Delta Z_1) + 544\Delta Y_2\Delta Z_2$$

$$4,7 - -112\Delta X_1^2 + 224\Delta X_1X_2 - 432\Delta X_2^2$$

$$5,8 - -112\Delta Y_1^2 + 224\Delta Y_1Y_2 - 432\Delta Y_2^2$$

$$6,9 - -112\Delta Z_1^2 + 224\Delta Z_1Z_2 - 432\Delta Z_2^2$$

$$4,8 - 5,7 - -112\Delta X_1\Delta Y_1 + 112(\Delta X_1\Delta Y_2 + \Delta X_2\Delta Z_1) - 432\Delta X_2\Delta Y_2$$

$$4,9 - 6,7 - -112\Delta X_1\Delta Z_1 + 112(\Delta X_1\Delta Z_2 + \Delta X_2\Delta Z_1) - 432\Delta X_2\Delta Z_2$$

$$5,9 - 6,8 - -112\Delta Y_1\Delta Z_1 + 112(\Delta Y_1\Delta Z_2 + \Delta Y_2\Delta Z_1) - 432\Delta Y_2\Delta Z_2$$

$$7,8 - 46\Delta X_1\Delta Y_1 - 66(\Delta X_1\Delta Y_2 + \Delta X_2\Delta Y_1) + 366\Delta X_2\Delta Y_2$$

$$7,9 - 46\Delta X_1\Delta Z_1 - 66(\Delta X_1\Delta Z_2 + \Delta X_2\Delta Z_1) + 366\Delta X_2\Delta Z_2$$

$$8,9 - 46\Delta Y_1\Delta Z_1 - 66(\Delta Y_1\Delta Z_2 + \Delta Y_2\Delta Z_1) + 366\Delta Y_2\Delta Z_2$$

VI.6.4 Nondimensionalisation du problème aux valeurs propres

Pour l'étude des vibrations libres d'un câble isolé, la nondimensionalisation du problème peut s'effectuer aisément.

En effet, si l'on considère les variables :

$$X'_N = \frac{X_N}{L}$$

$$\tau = t \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\Omega = \omega \left(\sqrt{\frac{g}{L}} \right)^{-1}$$

Où

X'_N : nouvelle variable spatiale

L : longueur initiale du câble

τ : temps nondimensionalisé par rapport à la période d'un pendule simple de longueur L

Ω : Pulsation nondimensionalisée

Le problème aux valeurs propres s'exprime alors sous la forme suivante:

$$\frac{EA}{mgL} [K_T] \{\hat{V}\} - \Omega^2 [M] \{\hat{V}\}$$

Où:

K_T : dépend uniquement des coordonnées du câble à l'équilibre et du nombre d'éléments de discrétisation.

M : contenant uniquement des constantes

Ainsi, l'étude des modes de vibrations d'un câble s'effectue plus explicitement en fonction des conditions d'équilibre du câble et des effets élastiques (EA).

VI.7 ANALYSE DE QUELQUES EXEMPLES

Exemple 1

Nous allons tout d'abord étudier la variation des modes de vibrations en fonction du nombre d'éléments de discrétisation. Pour les deux configurations suivantes:

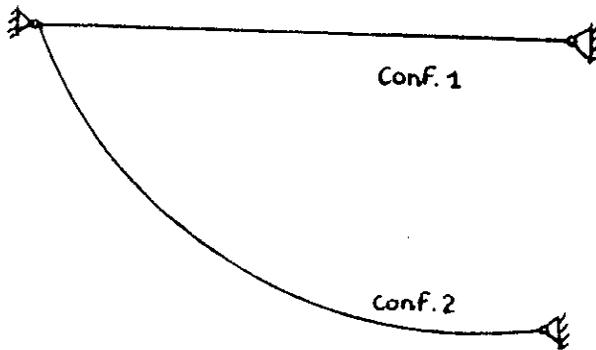


Figure VI.3

Nous avons obtenus les résultats suivants:

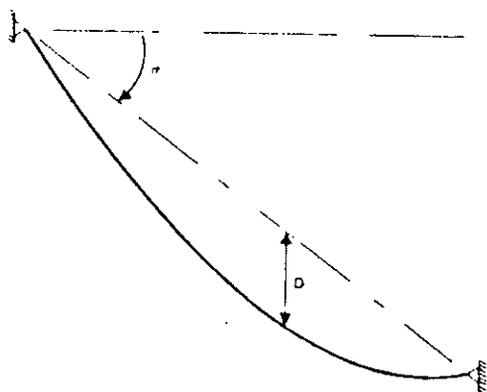
Nbr d'éléments	Conf. 1		Conf. 2	
	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2
2	27,7	88,4	12,6	17,1
4	27,2	57,3	5,11	8,82
6	27,2	54,9	4,93	8,01
8	27,2	54,3	4,88	7,76

On peut conclure que:

- Pour une discrétisation par huit éléments, on obtient une bonne approximation des modes fondamentaux.

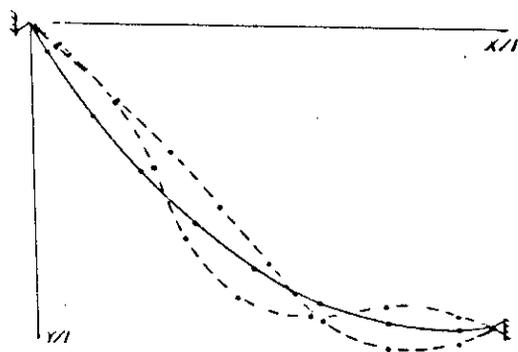
- Pour une configuration de câble tendu, la discrétisation par quatre éléments fournit une bonne valeur du mode fondamental de vibration.

Exemple 2



Câble typique

Figure VI.4



Les deux premiers modes de vibrations

d'un câble

Figure VI.5

Sur la figure (VI.4), θ représente l'angle d'inclinaison de la corde avec l'horizontale. D représente la flèche du câble nondimensionalisée: $D = f/L$

La valeur de la flèche d'un câble a une influence considérable sur les modes propres de vibrations. Le rapport entre la fréquence fondamentale d'un câble tendue et celle d'un câble de faible flèche peut être de l'ordre de 3.

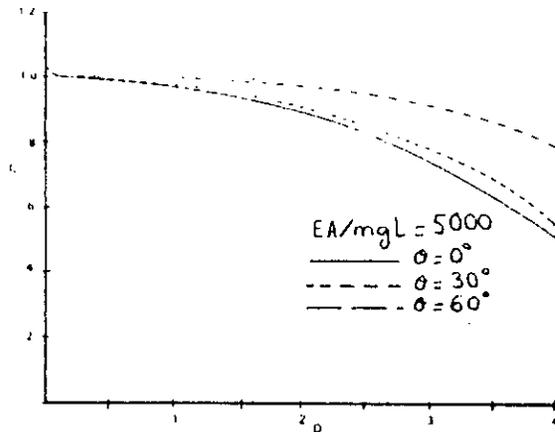
C'est pourquoi, l'analyse de la variation des modes de vibrations en fonction de la flèche a une grande importance.

L'étude de trois exemples de configurations, a fournie les résultats suivants:

C = 0,95	EA/mgL = 5000		
	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 60^\circ$
D	0,137	0,155	0,251
Ω_1	3,02	2,83	2,24
Ω_2	5,65	5,17	3,65
Ω_3	6,05	5,67	4,53
Ω_4	8,77	8,17	6,30

Où C = corde/L

On voit tout de suite que l'inclinaison θ a une influence importante sur la flèche. Afin d'illustrer cette relation directe, nous avons tracé le graphe suivant:



Variation de la flèche avec l'inclinaison θ

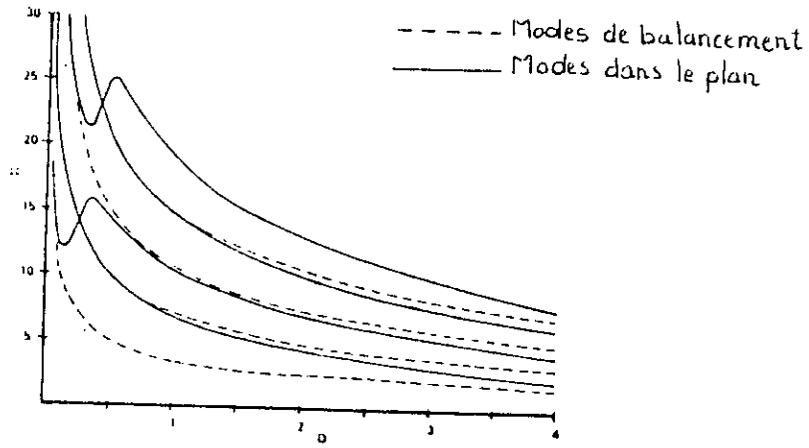
Figure VI.6

On remarque sur la figure (VI.6) que pour atteindre une certaine flèche D , on doit diminuer le coefficient C . Seulement, cette diminution est moindre sur la configuration ($\theta = 60^\circ$) que sur celle de ($\theta = 0^\circ$).

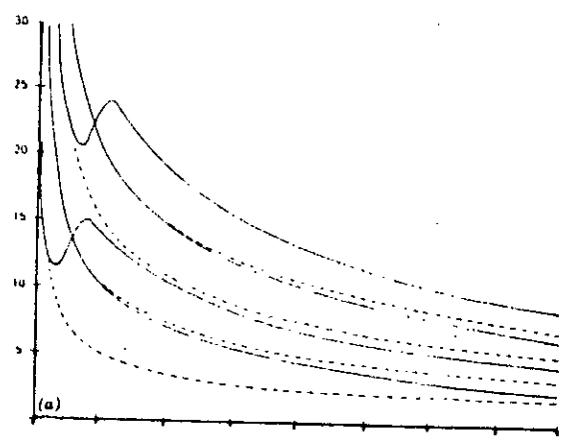
D'une autre manière, la variation de C sur la configuration ($\theta = 60^\circ$) engendre une variation de la flèche plus importante que sur une configuration de ($\theta = 0^\circ$).

Enfin nous avons tracé les graphes représentant les variations des quatre premiers modes de vibrations en fonction de la flèche, pour les trois configurations précédentes:

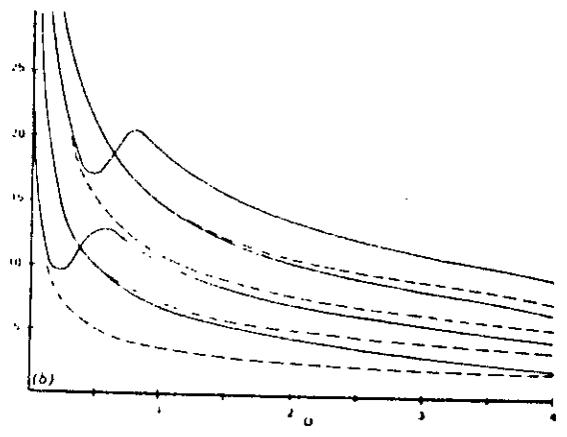
$\theta = 0^\circ$



$\theta = 30^\circ$



$\theta = 60^\circ$



(EA/mgL = 5000)

Figure VI.7

Des trois graphes précédents, on peut arriver aux conclusions suivantes:

1 - Pour une faible flèche, les modes de vibrations hors du plan X,Y et dans le plan X,Y sont les mêmes. Sinon, les plus petits modes correspondent toujours à ceux hors du plan X,Y.

2 - Lorsque l'inclinaison θ augmente, les valeurs des fréquences propres diminuent.

3 - Au delà d'une certaine flèche, les modes de vibrations S ont tendance à ce stabiliser.

Exemple 3

Etude des effets élastiques:

EA/mgL	Ω_i	50000	500	50
C = 0,96		D = 0,1226	D = 0,1251	D = 0,1457
	1	6,08	5,95	5,36
	2	9,37	9,03	7,37
	3	13,5	13,0	9,50
	4	17,5	16,5	11,8
C = 0,80		D = 0,2676	D = 0,2677	D = 0,2727
	1	3,37	3,36	3,29
	2	5,90	5,84	5,70
	3	8,54	8,41	8,18
	4	11,2	11,0	10,7

La variation de EA/mgL engendre toujours une variation de la flèche D. Les résultats vont dans le sens des conclusions

faites dans l'exemple 2 (à savoir l'influence de la flèche sur les modes propres).

VI.8 CONCLUSION

1 - Nous avons vu lors de la précédente étude que les modes propres de vibrations d'un câble dépendent uniquement des conditions d'appuis et du rapport EA/mgL

2 - L'analyse développée pour un câble, peut facilement être étendue à un réseau de câbles.

3 - Il existe des méthodes basées sur des formules empiriques, obtenues à partir des équations d'équilibres d'un câble, qui donnent de bonnes approximations des modes fondamentaux, et qui sont d'une utilisation rapide pour l'ingénieur.

Il est vrai que la méthode présentée peut être coûteuse en temps de résolution, néanmoins, elle est d'une grande précision. Ainsi, si on a à faire l'étude d'une structure à câbles, se trouvant dans une zone de forte sismicité par exemple, il serait plus recommandable d'utiliser la méthode présentée, basée sur la M.E.F.

CHAPITRE VII

CONCLUSION

L'analyse statique des structures à câbles, se ramène à la résolution de systèmes non linéaires d'équations algébriques. On utilise pour cela des méthodes incrémentales ou itératives (type Newton-Raphson), ou encore une combinaison des deux.

On a aussi tendance à élaborer des méthodes spécifiques à chaque type de problème. C'est le cas de la formulation analytique qui n'est applicable que pour les structures à câbles droits; ceci a pour avantage de faciliter la convergence du processus.

Par l'approche en éléments finis, on a vu deux méthodes applicables à tout types de structures à câbles: la méthode directe qui donne de bon résultats et la méthode énergétique. Cette dernière est plus précise mais présente des difficultés de convergence dans certains cas dues à son aspect hautement non linéaire.

Par la suite, nous avons fait l'étude modale d'un câble en le discrétisant en éléments finis. La méthode présentée peut

aussi être appliquée à un réseau de câbles. Il est vrai qu'il existe d'autres méthodes simplifiées pour la détermination des modes propres de vibrations de ces structures, cependant, l'approche par la M.E.F reste plus précise.

En définitive, il est à noter que les méthodes appliquées précédemment, nécessairement basées sur des formulations théoriques non linéaires, sont de mise en oeuvre délicates; elles sont encore en pleine évolution en dépit d'une utilisation de plus en plus fréquente de structures à câbles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.F.Imbert "Analyse des Structures par Eléments Finis"
CEPADUES EDITIONS 1979.
- [2] K.J.Bathé "Finite Element Procedures in Engineering
Analysis" Prentice Hall 1982.
- [3] R.H.Gallagher "Introduction aux Eléments Finis" Editions
Pluralis 1976.
- [4] G.Dhatt, G.Touzot "Une Présentation de la Méthode des
Eléments Finis" Maloine S.A.Editeur, Paris 1984.
- [5] S.Timoshenko "Théorie des Vibrations" Librairie
Polytechnique C.H.Béranger 1954.
- [6] J.Pietrzak "Matrix Formulation of Static Analysis of
Câble Structures" article publié le 14 Juillet 1977.
- [7] A.H.Peyrott, A.M.Goulois "Analysis of Câble Structures"
article publié le 2 novembre 1978.
- [8] E.P.Foster "Analysis of Câble Net Panel Roof System"
article publié le 3 avril 1978.
- [9] C.G.Hood "A General Stiffness Method for the Solution of
Non Linear Câble Networks with Arbitrary Loading"
article reçu à la publication le 30 novembre 1975.

- [10] W.M.Henghold, J.J.Russell "Equilibrium and Natural Frequencies of Câble Structures (a non linear finite element approach)" article reçu à la publication le 30 novembre 1975.
- [11] W.M.Henghold, J.J.Russell, J.D.Morgan "Free Vibrations of Câble in Three Dimensions" Journal of the structural division, Mai 1977.
- [12] M.Demidem "Cours calcul automatique des structures" E.N.P (1991-1992).
- [13] M.Hadid A.Benazzouz "Méthode des Eléments Finis" Mini projet à l'E.N.P 1991.
- [14] C.H.Massonnet "Calcul des Structures sur ordinateur" tome 1 et tome 2, Eyrolles Editeur, Masson et C^{ie} Editeurs.
- [15] M.Boumahrat, A.Gourdin "Méthodes Numériques Appliquées" O.P.U 1981.
- [16] N.Boucheffa, M.Iberbachen "Etude Comparative Des Elements Conformes et Non Conformes dans L'Analyse des Plaques en Flexion par la M.E.F " p.f.e à l'E.N.P 1992.