

3/95

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SUJET

**ETUDE COMPARATIVE
ENTRE L'APPROCHE MIXTE
ET L'APPROCHE DEPLACEMENT
DE LA
METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par :
M. M.K.BERRAH
M. M.DEMIDEM

Etudié par :
ALMIKDAD OUACIM
AOUDIA SALIM

Dirigé par :
M. M.DEMIDEM
M. M.K.BERRAH

PROMOTION : 95

ENP 10, Avenue Hassen Badi EL HARRACH - ALGER

ملخص

تهدف هذه الأطروحة إلى دراسة مقارنة بين التقريب في الإنتقال و التقريب المزدوج لطريقة العناصر المنتهية المطبقة على المسائل المتعلقة بالأوساط المرنة ثنائية البعد.

RESUME

Le présent travail consiste en une étude comparative entre l'approche déplacement et l'approche mixte de la méthode des éléments finis appliquée aux problèmes de l'élasticité bidimensionnelle.

SUMMURY

This work aims at comparing between assumed displacement approach, and mixed approach, of the finite element method applied to two dimensional elasticity problems.

Je dedie ce modeste travail à :

- mes parents
- mes frères et soeurs
- toute ma famille
- mon binome : Ouacim
- tous mes amis (es)

Et à mon beau pays : L'ALGERIE

Salim

الإهداء

إلى من لو كان يهدي الإنسان قيمته لأهديتهما الدنيا و ما فيها :

إلى والديّ

إلى رفيقي دربي في الحياة إخوتي :

مازن و سامر

إلى وطني الأول و منبت جنوري :

سورية الحبيبة

إلى وطني الثاني حيث نشأت :

الجزائر الحبيبة

إلى من سررت بمشاركته في هذه الأطروحة :

سليم

إلى أخلص و أحب الأصدقاء لديّ :

مروان، كمال، ميلود

إلى من وقفت بجانبني و كانت لي السند المعنوي :

ميرة

إلى الصديقات :

حسيّنة، سعاد، سكيّنة

إلى كل من بيني و بينه حب و مودة

أهدي ثمرة عملي المتواضع.

TABLE DES MATIERES

<i>Avant-propos</i>	
<i>CHAPITRE zéro : Introduction générale</i>	
<i>CHAPITRE I : Notions d'élasticité</i>	3
<i>I-1- Introduction</i>	4
<i>I-2- Equations gouvernantes</i>	4
<i>I-2-1- Equations d'équilibre</i>	4
<i>I-2-2- Equations déformation-déplacement</i>	5
<i>I-2-3- Equations de compatibilité</i>	5
<i>I-2-4- Relation contraintes-déformations</i>	5
<i>I-3- Elasticité plane</i>	6
<i>I-3-1- Etat de contrainte plane</i>	6
<i>I-3-2- Etat de déformation plane</i>	6
<i>CHAPITRE II : Présentation de la M.E.F</i>	7
<i>II-1- Introduction</i>	8
<i>II-2- Historique</i>	8
<i>II-3- Différents types de formulation</i>	11
<i>II-4- Principes variationnels</i>	12
<i>II-5- Principe du minimum de l'énergie potentielle totale</i>	13
<i>II-6- Principe du maximum de l'énergie complémentaire</i>	14
<i>II-7- Principes variationnels mixtes</i>	15
<i>II-8- Fonctionnelle de REISSNER</i>	15
<i>CHAPITRE III : Approche déplacement</i>	21
<i>III-1- Introduction</i>	22
<i>III-2- Formulation des éléments type déplacement</i>	22
<i>III-2-1- Evaluation de la matrice de rigidité</i>	22
<i>III-2-1-1- Choix de la fonction déplacement</i>	22
<i>III-2-1-2- Calcul de la rigidité de l'élément quadrilatéral</i>	22
<i>A- Élément rectangulaire</i>	22
<i>B- Élément isoparamétrique</i>	25
<i>III-2-1-3- Calcul de la rigidité de l'élément triangulaire</i>	28
<i>III-2-2- Propriétés de la matrice de rigidité</i>	28
<i>III-3- Les critères de convergence</i>	28
<i>III-4- Les avantages et les inconvénients de l'approche déplacement</i>	29
<i>CHAPITRE IV : Mise en oeuvre informatique</i>	30
<i>IV-1- Introduction</i>	31
<i>IV-2- Structure du programme MEFEP</i>	31
<i>IV-3- Structure du programme MEFISO</i>	34

<i>CHAPITRE V : Approche mixte</i>	36
<i>V-1- Introduction</i>	37
<i>V-2- Formulation des éléments de type mixte</i>	37
<i>V-2-1- Approximation du champ de déplacement</i>	37
<i>V-2-2- Approximation du champ de contrainte</i>	38
<i>V-2-3- Evaluation de la matrice de rigidité-souplesse</i>	39
<i>V-2-3-1- Calcul de la matrice de rigidité-souplesse de l'élément quadrilatéral mixte linéaire à quatre noeuds</i>	41
<i>A- Élément rectangulaire</i>	41
<i>B- Élément isoparamétrique</i>	43
<i>V-2-3-2- Calcul de la matrice de rigidité-souplesse de l'élément triangulaire</i>	44
<i>V-2-4- Propriété de la matrice de rigidité-souplesse issue de l'approche mixte</i>	45
<i>V-3- Les critères de convergence</i>	45
<i>V-3-1- Etude de la convergence</i>	45
<i>V-3-2- Etude des valeurs et des vecteurs propres</i>	46
<i>V-3-3- Critère théorique et sélection des éléments mixtes</i>	47
<i>V-4- Avantages et inconvénients de l'approche mixte</i>	48
 <i>CHAPITRE VI : Mise en oeuvre informatique</i>	 49
<i>VI-1- Introduction</i>	50
<i>VI-2- Structure du programme QMIXT et TRIMIXT</i>	50
<i>VI-3- Structure du programme ISOMIXT</i>	53
 <i>CHAPITRE VII : Applications</i>	 56
 <i>Conclusion</i>	
<i>Annexes</i>	
<i>Bibliographie</i>	

AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur le traitement numérique des problèmes de mécanique des structures par la méthode des éléments finis mixtes. Cet effort a été accompli à l'école nationale polytechnique d'Alger sous la direction de M. M.K. BERRAH et M. M.EMIDEM.

Nous tenons à exprimer à M. M.K. BERRAH et M. M.EMIDEM notre attachement à l'aide toujours efficace et les encouragements qu'ils nous ont prodigués durant toute l'année. Sous leur direction à l'ENP nous avons eu l'occasion d'aborder un problème d'une grande importance et qui n'a pas été traité de cette façon explicite auparavant.

Nous tenons à remercier nos amis, particulièrement O.SAHA, H.ABCHICHE et K.BELKHEIR pour leurs aides et disponibilités, au personnel du centre de calcul, particulièrement L.YAHI, de la bibliothèque et du périodique de l'ENP.

Que tous ceux qui ont contribué à ce travail de manière directe ou indirecte trouvent l'expression de notre profonde gratitude.

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

Introduction

L'apparition des ordinateurs, l'évolution de la technologie, la complexité des projets réalisés par les ingénieurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures donnant naissance à la méthode des éléments finis vers les années 60, où l'élément triangulaire était utilisé pour l'analyse des problèmes d'élasticité plane; Depuis, elle subit des développements rapides et de nouveaux éléments sont développés (rectangulaires, isoparamétriques, élément de coque, etc...)

La méthode des éléments finis, par ses multiples avantages, constitue une approche du problème de l'analyse d'une très grande variété des structures dont la solution, bien que très rapide, est relativement précise.

La méthode des éléments finis classique en déplacement, en raison de son fondement sur une approximation en déplacement, d'une part assure seulement la continuité des déplacements, et d'autre part nécessite une dérivation ultérieure pour l'obtention des contraintes, circonstance peu favorable à un calcul précis de ces dernières.

Par la méthode force (éléments finis contraintes), la continuité du tenseur contrainte est assurée et cela impose une continuité très forte des contraintes; par contre la continuité des déplacements n'est pas assurée.

Les éléments finis en variables mixtes (déplacements et contraintes) assurent la continuité des deux types de variables, ce qui améliore sensiblement les résultats, surtout ceux des contraintes.

La continuité des déplacements n'est pas assurée.

Les éléments finis en variables mixtes (déplacements et contraintes) assurent la continuité des deux types de variables, ce qui améliore sensiblement des résultats, surtout ceux des contraintes.

L'idée principale de notre travail consiste à faire une étude comparative entre l'approche déplacement et l'approche mixte. On a décomposé notre travail en cinq parties.

La première partie est consacrée au rappel des notions générales de l'élasticité linéaire.

Dans la deuxième partie, on a présenté la méthode des éléments fins d'une façon générale.

La treizième partie commence par la présentation du modèle compatible (approche déplacement) puis les programmes informatiques associés.

La quatrième partie est consacrée pour le modèle mixte et ses programmes informatiques.

La dernière partie concerne les différentes applications pour illustrer la comparaison.

**CHAPITRE I:
NOTIONS D'ELASTICITE**

1-1- Introduction

Un modèle élastique est caractérisé par la correspondance bi-univoque entre les déformations et les contraintes. Cette correspondance implique le caractère réversible de la déformation, autrement dit, un corps élastique revient à son état initial une fois déchargé.

La théorie de l'élasticité est une méthode directe de formulation des équations forces-déplacements.

Pour un solide soumis à un changement donné, cette théorie a pour but l'étude des contraintes et déformations qui en résultent avec des hypothèses :

- les déformations sont supposées petites;
- la loi de comportement reliant les contraintes et les déformations est linéaire;
- le solide est élastique, homogène, isotrope.

1-2- Equation gouvernantes :

1-2-1- Equations d'équilibre :

L'état de contrainte en un point du corps est défini par le tenseur de contrainte $[\sigma]$ tel que

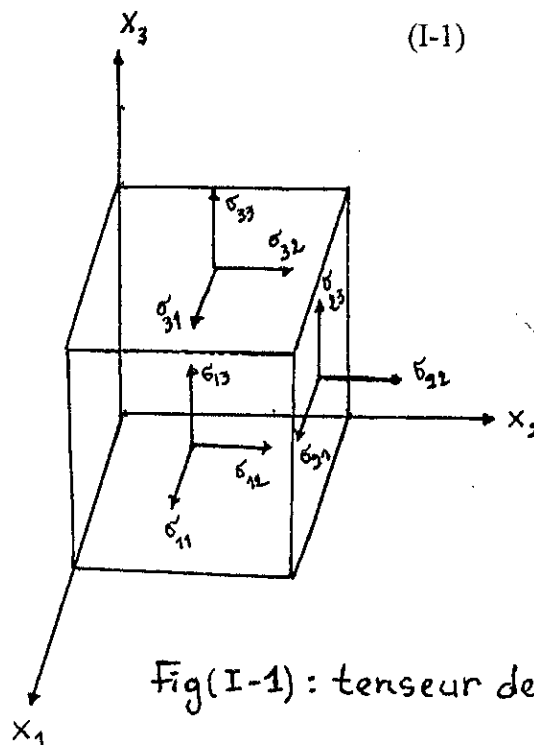
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (I-1)$$

où :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$



Fig(I-1) : tenseur de Contrainte $[\sigma]$

Les composantes de ce tenseur doivent satisfaire les équations d'équilibre, qui s'expriment comme suit :

$$\sigma_{jk,k} + b_k = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad \begin{matrix} k = 1,3 \\ j = 1,3 \end{matrix} \quad (I-2)$$

Dans lesquelles

b_k : représente les composantes des forces volumiques suivant les directions k sur la frontière, les équations d'équilibre sont satisfaites par les équations suivantes :

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \quad \begin{matrix} i = 1,3 \\ j = 1,3 \end{matrix} \quad (I-3)$$

où n : sont les cosinus directeurs de la normale n par rapport à la direction x .

P : les forces surfaciques prescrites sur la frontière.

1-2-2- Equations déformation-déplacement :

l'état de déformation est donné par le tenseur $[\varepsilon]$, tel que :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (I-4)$$

où

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$$

Les relations déformation-déplacement pour la théorie linéaire sont au nombre de six :

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \begin{matrix} i = 1,3 \\ j = 1,3 \end{matrix} \quad (I-5)$$

1-2-3- Equations de compatibilité :

Il existe des relations qui expriment les restrictions sur la forme des déformations pour que le système d'équation soit intégrable.

Ces conditions d'intégrabilité sont appelées conditions de compatibilité de déformation.

Elles sont exprimées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} \right] \\ 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} \right] \\ 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right] \end{aligned} \quad (I-6)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2} \quad (I-7)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1}$$

1-2-4- Relation contraintes-déformations:

Les états de contraintes et de déformation sont reliés de la manière suivante :

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (I-8)$$

matériau isotrope

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (I-29)$$

Avec

$$\lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{(1+\nu)}$$

1-3-Elasticité plane:

Les problèmes de la théorie d'élasticité sont simplifiés dans une large mesure lorsque les tensions ou les déformations sont toutes parallèles à un plan. On a donc affaire à des problèmes bidimensionnels.

1-3-1- Etat de contraintes planes

Le modèle de contrainte plane convient bien aux plaques minces sollicitées dans leur plan. Pour ce cas là on a :

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$$

Pour un matériau isotrope on a les relations contraintes déformations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (I-10)$$

avec $\varepsilon_{33} = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})/E$

1-3-2- Etat de déformation plane :

C'est le cas d'un cylindre élancé, pour ce cas là on a :

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$$

de la même manière on a :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (I-11)$$

avec : $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})/E$

**CHAPITRE II:
PRESENTATION DE
LA M.E.F**

II 1 Introduction

La nécessité de la réalisation de projets d'envergure et souvent complexe amène l'ingénieur à rechercher des modèles adéquats lui permettant de simuler les comportements des systèmes physiques complexes imposés par l'évolution technologique.

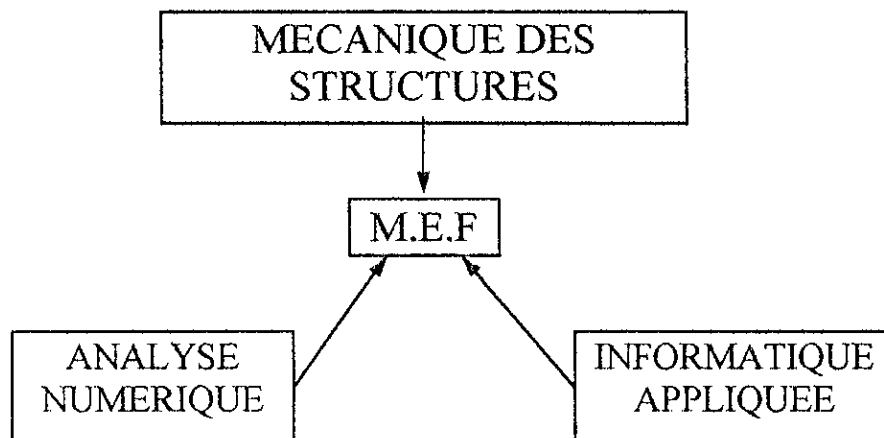
La méthode des éléments finis constitue aujourd'hui un procédé général de discrétisation des problèmes continus; elle utilise pour cela une approximation simple des variables inconnues pour transformer les relations mathématiques (équations aux dérivées partielles) décrivant le comportement des systèmes physiques ou équations algébriques dont la résolution numérique se fait par ordinateurs.

II 2 Historique :

Les techniques de calcul des structures ont connu ces vingt dernières années, un développement considérable motivés par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs.

Ainsi, la méthode des éléments finis (M.E.F) est-elle communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie: Aérospatial, Nucléaire, Génie-civil, Construction navale, mécanique, techniques off-shore, etc...

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la M.E.F appliquée au calcul des structures est une technique récente, à caractère pluridisciplinaire, car elle met en oeuvre les connaissances de trois disciplines de base.



* La mécanique des structures:

Elasticité, Résistance des matériaux, Dynamique, Plasticité, etc ...

* L'analyse numérique :

Méthode de proximation, Résolution des systèmes, Lénéaires des problèmes aux valeurs propres etc ...

*L'informatique appliquée :

Technique de développement et maintenance des grands logiciels.

Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

En ce qui concerne des théorèmes énergétiques de l'élasticité, leur formulation a été effectuée au siècle dernier: en 1819, NAVIER définis une méthode d'étude des système hyperstatique basés sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité, puis MAXWELL. En 1864 et CASTIGLIANO en 1878 établissant de façon complète les théorème de l'énergie.

Cependant, les applications de cette formulation au calcul des structures complexes ont été pratiquement inexistantes, à cause de l'indisponibilité de moyen de calcul.

Il faut noter en 1932, l'établissement par H-CROSS d'une méthode rendant possible l'analyse des systèmes de pointe avec les moyens de calcul à l'époque.

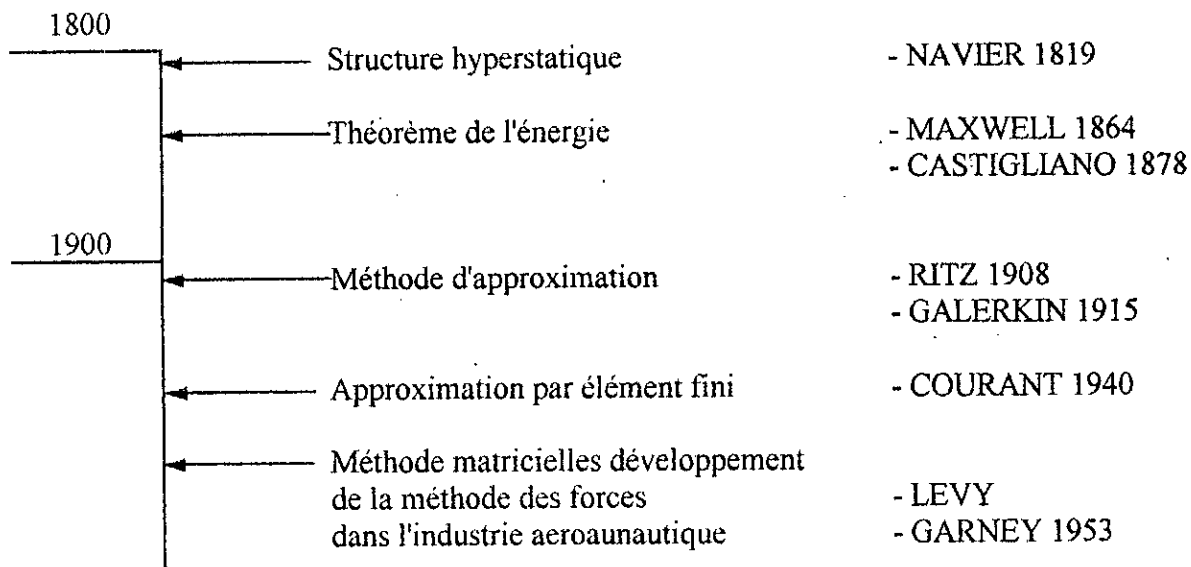
Cependant, ces technique ne permettaient pas jusqu'alors la résolution des problèmes de milieux continus rendu possible uniquement par la décritisation du problème continu à l'aide des méthodes d'approximation adéquates.

C'est au début du 20^{ème} siècle qu'on été acquis des résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de PITZ en 1908 et de GALARKIN en 1915. Puis en 1943, COURANT établit les bases de la M.E.F en montrant que la résolution de certaines problèmes de milieux continus est possible en effectuant une décritisation spatiale du domaine tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Après la 2^{ème} guerre mondiale, on assiste, dans l'industrie aeraunautique, au développement de méthodes matricielles permettant de traiter des problèmes de structures assez complexes avec les calculatrices de bureaux disponibles alors, parmi les contribution les plus importantes citons celles de LEVY en 1947 et GARVEY en 1951 pour la méthode des forces et LEVY en 1953 pour la méthode des déplacements.

1954 DENKE systématise la méthode des forces. En fin, en 1955 ARIYPIS présente une approche unifiée des méthodes de déplacements et forces, puis l'année suivante, TURNER et GLOUGH publient une présentation systématique de la méthode des déplacements. Ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F comme technique de calcul des structures complexes. En effet, ces publication grâce à l'introduction du concept d'élément fini, ont apporté une unification des méthodes matricielles employées jusqu'alors pour les structures discrètes et des méthodes de résolution de problèmes de milieux continus.

Historique des méthodes modernes d'analyse des structures synoptique des principaux développements jusqu'en 1956.



A partir de cette date, la M.E.F va connaître un développement intense sous l'impulsion de l'industrie aérospatiale et grâce à la disponibilité des premiers ordinateurs, la méthode des déplacements va être choisie de façon quasi universelle comme technique de résolution matricielle de préférence à la méthode des forces malgré la mise au point de procédures de traitement automatique des inconnues hyperstatiques par ROBINSON et DINKE dès lors, on assiste au développement de nouveaux éléments tels que les membranes, plaques, coques, éléments de volume et à l'établissement de nouvelles formulations telles que les formulations équilibrées ou mixtes (FRAESSJES DE VEUBEKE, PIAN).

Par ailleurs, le domaine d'application de la M.E.F limité au début à la statique linéaire, s'étend progressivement à la dynamique linéaire sous l'impulsion notamment de ARCHER et HURTY au flambement linéarisé (stabilité initiale) et plus récemment à l'analyse non-linéaire avec non linéarité géométrique et constitutive sous l'impulsion de ODEN, MARCAL GALLAGHER. Cet historique serait incomplet si l'on omettait de mentionner le développement de programmes généraux d'analyse (encore appelés codes généraux) à partir des années 60. Ce phénomène a été particulièrement important parce qu'il a véritablement permis de faire rentrer la M.E.F dans la pratique industrielle. Il est certain que, d'une part, la M.E.F se prête bien à la programmation sur ordinateur (les procédures numériques peuvent être rendues automatiques et modulaires par son universalité et son adaptabilité au traitement des problèmes les plus divers. D'où l'idée de développer ces codes généraux. C'est ainsi vers 1965, on assiste en EUROPE et aux USA au développement intensif de tels programmes sous l'impulsion d'universités, d'agences gouvernementales, et de groupes industriels. Parmi les codes actuels les plus importants citons:

NASTRAN, ASKA, MARC, STARDYNE, ANSYS, SAMCEF, SESAM, ASAS, SAP / NON SAP.

II-3 Méthodes de formation des éléments finis

D'une manière générale, il existe trois approches pour discrétiser les équations de la M.M.C.

II-3-1 La méthode directe:

L'idée fondamentale est de combiner directement pour chaque élément, les trois systèmes d'équations élastiques: équations de l'équilibre, équations déformations-déplacements, équations intrinsèques du matériau.

La méthode directe est une application limitée. Elle est utilisée souvent pour formuler des éléments simples, mais il est difficile de l'appliquer à la formulation des éléments complexes (éléments de plaque) où à des phénomènes spéciaux. Elle présente aussi plusieurs inconvénients à savoir :

- a- elle ne garantit pas toujours la symétrie de la matrice.
- b-elle est limitée quant à la détermination du niveau de continuité inter-élément auquel doivent satisfaire les fonctions d'interpolation choisies.
- c-une troisième limite concerne le traitement des charges réparties, les déformations initiales, et d'autres phénomènes comme les effets transitoires et l'instabilité élastique.

II-3-2 La méthode des résidus pondérés:

L'idée de base suppose que l'on choisit à priori une fonction d'approximation; cette fonction ne sera généralement pas solution de l'équation différentielle du phénomène, et la substitution dans cette équation entraînera l'apparition d'un résidu afin de déterminer de meilleures solutions on essayera de minimiser l'intégrale du résidu portant sur le domaine. Cette méthode est plus générale que la méthode précédente et son application peut s'étendre à des domaines plus larges. En outre, certains formes de cette méthode donnent des formulations identiques à celles que l'on établit par application de principes variationnels. Cette méthode présente elle aussi plusieurs inconvénients.

II-3-3 Les méthodes fondées sur les principes variationnels:

Dans chacune des approches précédentes, on peut formuler les éléments en dérivant les modèles cherchés par rapport aux inconnues considérées ainsi on peut obtenir plusieurs types de formulations d'éléments finis en mécanique des structures qui sont basés sur les principes variationnels dans cette approche, nous pouvons distinguer plusieurs modèles d'éléments finis à partir des champs considérés comme inconnus:

A- Formulation à un seul champ :

1- formulation en déplacements ou méthode de déplacements (modèle empâtible) dans lequel les variables figurant comme inconnues sont les champs de déplacements. La dérivation de cette méthode est issue du principe de l'énergie potentielle totale. Ce modèle assure généralement la continuité des déplacements partout mais les contraintes sont discontinuées aux frontières inter-éléments. En conséquence, les conditions de continuité du vecteur contrainte à l'interface ne sont pas vérifiées et les conditions aux limites de bord libre ne peuvent pas être satisfaites exactement.

2- formulation en contraintes ou méthode des forces (modèles quilibres) dans lequel on se donne une approximation, soit sous forme d'un champ de contrainte, soit sous forme d'une fonction de contraintes. Ce modèle est basé sur le principe variationnel de l'énergie potentielle complémentaire, il est rarement utilisé en pratique; son principal intérêt réside dans la possibilité d'encadrer la solution lors d'une utilisation conjointe avec des modèles ou

déplacements dans cette approche, étant donné que les inconnus qui interviennent dans la formulation sont les contraintes. La continuité des déplacements n'est pas assurée au passage inter-éléments. De plus, ce modèle impose une continuité forte sur toutes les contraintes aux frontières des éléments alors que seules, certaines d'entre elles doivent y être continues.

B- Formulation à plusieurs champs :

1- Les formulations hybrides :

Le principe des modèles hybrides est dû à PIAN (1969). Il est basé sur un principe variationnel énergétique modifié. Le modèle hybride repose sur une première approximation de champ de contraintes ou de déplacement à l'intérieur de l'élément et sur une seconde forme indépendante de champ de contraintes et/ou de déplacements définis à la frontière de l'élément. Tous les champs sont exprimés en fonction de paramètres généralisés sauf un seul champ, qui est donné en fonction de variables nodales (physiques). Les équations finales de l'éléments sont exprimées en fonction de ce seul champ. Ainsi, cette formulation se ramène soit à une méthode déplacement soit à une méthode force, c'est-à-dire à la contrainte d'un seul champ à l'interface.

2- les formulations mixtes (multi-champ) :

Elles sont basées sur les principes variationnels intrinsèquement mixtes (fonctionnelle de REISSNER)... Tous les champs sont exprimés de la même manière à l'intérieur de l'élément et sur les frontières, donc les variables statiques et cinématiques (contraintes et déplacements) concernant l'élément dans son entier, et sont continues partout dans le domaine.

3- Les formulations mixtes-hybrides :

elles conduisent à un modèle d'élément fini basé sur un principe variationnel mixte avec relaxation des conditions sur la frontière de l'élément. Dans ce modèle, on représente plusieurs champs à l'intérieur de l'élément des variables indépendants aux frontières.

Parmi les formulations citées ci-dessus, nous nous intéressons aux modèles mixtes car ils présentent de multiples avantages sur les autres modèles.

II - 4- Principes variationnels :

Les problèmes de physique appliquée qui se posent pour un système continu, peuvent être formulés de deux manières différentes:

a- Sous forme locale : c'est-à-dire sous forme d'équations aux dérivés partielles avec des conditions aux limites associées (équations différentielles définissant le comportement du domaine);

b- Sous forme globale, ou variationnelle (énergétique) c'est à dire sous forme de conditions de stationarité de fonctionnelles valables sur tout le domaine étudié.

Les équations des systèmes continus ne peuvent en général pas être résolus directement; il est donc nécessaire de discrétiser ces équations, c'est à dire de les remplacer par les équations algébriques. Les deux points de vue précédents sont mathématiquement équivalents; les équations découlant de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes peuvent indifféremment servir à l'étude de base du problème considéré. Il est possible aussi par simples manipulations mathématiques de passer de l'une à l'autre des deux formulations.

Des différences interviennent dans les procédés de calcul de solutions approchées : tandis que certaines méthodes comme les différences finies s'attaquent directement à la solution par discrétisation, d'autres comme la méthode de RITZ et la méthode des éléments finis préfèrent effectuer directement une minimisation approchée d'une fonctionnelle, la solution correcte étant celle qui minimise une quantité définie par intégration convenable des inconnues sur tout le domaine étudié. Cette quantité fonction de fonctions inconnues, porte le nom de fonctionnelle.

Bien que la minimisation d'une fonctionnelle soit la technique la plus largement admise pour arriver à un modèle d'élément fini, ce n'est pas l'unique méthode disponible. Il est possible d'arriver mathématiquement à l'approximation des éléments finis en portant des équations

différentielles gouvernant de problème par le biais de plusieurs approches comme la méthode des résidus pondérés et la méthode de GALERKIN (ZIENKIEWICZ, 1973), (GALLAGHER, 1976). Mais ces formulations présentent plusieurs inconvénients telles que la limite du choix des fonctions qui décrivent les variables de l'élément ou le problème de continuité inter-élément (ZIENKIEWICZ, 1973). Nous ne nous intéresserons ici qu'aux formulations variationnelles du fait de leur importance dans le fondement de formulations des éléments finis.

En mécanique des solides, la notion de fonctionnelle est souvent utilisée pour construire directement une formulation intégrale en utilisant le principe de stationnarité de la fonctionnelle d'énergie. La recherche d'une solution approchée par la méthode des éléments finis se réduit à la minimisation de cette fonctionnelle définie comme fonction de paramètres nodaux, en nombre fini et conduit à poser mathématiquement en termes de résolution d'un système d'équations algébriques.

Les principes variationnels ont apporté plusieurs contributions au développement de l'analyse des structures par la méthode des éléments finis: dérivations de la formulation des éléments, propriétés de convergence et conditions sur la continuité.

Voici les principes les plus importants qui définissent les conditions d'équilibre:

- Principe du minimum de l'énergie potentielle totale.
- Principe du maximum de l'énergie complémentaire.
- Principes de stationnarité d'une fonctionnelle à plusieurs champs (principes variationnels mixtes).

Nous allons décrire rapidement chaque principe.

II-5-Principe de minimum de l'énergie potentielle totale :

Il s'agit du principe suivant :

Parmi tous les déplacements cinématiquement admissibles, ceux qui satisfont les conditions d'équilibre rendent l'énergie potentielle totale stationnaire et réciproquement; de plus l'énergie potentielle totale est minimale pour un état d'équilibre stable.

L'énergie de déformation pour un corps solide déformable et en état d'équilibre stable peut être écrite :

$$U = \int_V W \, dV = \int_V \bar{f}_i u_i \, dV + \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i \, ds = \bar{W} \quad (\text{II-1})$$

U : énergie de déformation interne

W : potentiel de déformation $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ (II-2)

σ_{ij} : composantes du tenseurs des contraintes.

ε_{ij} : composantes du tenseur des déformations.

f_i : forces de volume.

u_i : composantes du vecteur des déplacements.

S_σ : partie de la surface extérieure où les efforts \bar{T}_i sont donnés.

\bar{T}_i : forces de surface imposées sur S_σ .

\bar{W} : travail des forces appliquées.

L'énergie potentielle totale est définie par

$$\Pi_p = U - \bar{W} = \int_V W \, dV - \int_V \bar{f}_i u_i \, dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i \, dS_\sigma \quad (\text{II-3})$$

la première variation de Π_p est :

$$\delta\Pi_p = \delta U - \delta W = 0 \quad (\text{II-4})$$

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad (\text{II-5})$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (\text{II-6})$$

Les conditions de stationnarité de la fonctionnelle Π_p conduisent aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites sur S_σ , avec des conditions aux limites de types cinématiques :

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } S_u \quad (\text{II-7})$$

La valeur stationnaire de l'énergie potentielle totale Π_p est un minimum absolu pour un corps en équilibre stable; on peut le démontrer en calculant la deuxième variation.

$$\delta^2 \Pi_p \geq 0 \quad (\text{II-8})$$

Le processus des éléments finis dans cette approche cinématiques consiste à rechercher un tel minimum tout en se limitant à un type imposé de champ de déplacements.

Le principe du minimum de l'énergie potentielle totale est souvent utilisé. C'est le fondement pour la formulation directe des équations de rigidité des éléments classiques (éléments de déplacement). Alors pour un domaine discrétisé par élément finis, les équations des éléments finis résultent de l'écriture de la variation de Π_p par rapport à l'ensemble des déplacements qui sont limités à un nombre fini de paramètres:

les déplacements nodaux. Donc si Π_p pourrait être fixée a priori, on pourrait en déduire directement les équations des éléments par des derivations de Π_p par rapport aux déplacements nodaux.

II-6- Principe du maximum de l'énergie complémentaire:

Le principe s'énonce comme suit :

Parmi tous les états de contraintes qui satisfont aux conditions d'équilibre à l'intérieur du corps d'une part et aux conditions de contraintes aux frontières d'autre part, l'état de contraintes qui satisfait également aux équations contraintes déplacements à l'intérieur et à tous les déplacements imposées aux frontières, donne à l'énergie complémentaire une valeur stationnaire; de plus l'énergie complémentaire est maximale pour un état d'équilibre stable d'énergie de déformation complémentaire s'écrit :

$$U_c = \int_V W_c dV \quad (\text{II-9})$$

Avec U_c : énergie complémentaire de déformation.

W_c : potentiel complémentaire de déformation.

\bar{W}_c : travail complémentaire des forces extérieures

L'énergie potentielle complémentaire est donnée par

$$\Pi_c = U_c - \bar{W}_c$$

et sa variation pour un état d'équilibre, quand le corps subit un accroissement de contraintes admissibles $\delta\sigma_{ij}$ par :

$$\delta\Pi_c = \delta U_c - \delta\bar{W}_c \quad (\text{II-10})$$

Π_c est stationnaire pour tout accroissement des contraintes admissibles. Cette priorité de stationnarité conduit aux conditions de compatibilité et la condition aux limites cinématiques

$\delta u_i = 0$ sur S_u , en tenant compte des conditions subsidiaires de types statiques suivantes :

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij,j} &= 0 & \text{dans } V \\ \delta\sigma_{ij} n_j &= 0 & \text{sur } S_\sigma \end{aligned} \quad (II-1)$$

Ce principe constitue la base variationnelle de la formulation directe des souplesses des éléments, c'est à dire de l'expression des déplacements des éléments en fonction des forces. Le processus des éléments finis dans cette approche (statique) consiste à rechercher un maximum de Π_c tout en se limitant à un type impose de champs de contraintes.

II-7- Principes variationnels mixtes de formulation des éléments finis :

L'analyse technique des problèmes de mécanique des solides basée sur un principe variationnel utilisant une fonctionnelle à un seul champ (déplacement ou contrainte), rencontre plusieurs difficultés de calcul et conduit à des solutions qui ne sont pas tout à fait exactes. Des comparaisons ont été faites par rapports aux fonctionnelles multichamps et montrent cet effet. Comme il est possible d'écrire les équations de la théorie de l'élasticité de plusieurs manières différentes, il existe plusieurs fonctionnelles à deux champs.

Il s'agit des principes variationnels intrinséquement multichamps (mixtes) pour lesquels les champs des déplacements et des contraintes concernent directement l'élément dans son entier. Le premier principe variationnel mixte à deux champs indépendants (déplacement et contraintes variant indépendamment) a été présenté par HELLINGER en 1914. PRANGE en 1958 a modifier ce principe par l'introduction des conditions aux limites pour les problèmes de l'élasticité linéaire.

REISSNER (1950) a établi le principe variationnel en prenant en compte les conditions aux limites. Sa fonctionnelle contient toutes les grandeurs cinématiques et statiques. D'autres principes (canoniques) plus généraux ont été établis, tel que le principe de (HU - WASHIZU) où les fonctionnelles contiennent trois champs indépendants (déplacements, contraintes et déformations), ou des principes variationnels modifiés à deux ou trois champs.

Des principes à fonctionnelle mixte intermédiaire dans lesquels certaines grandeurs statiques et cinématiques interviennent simultanément ont été développés par (VERCHERY, 1973), (VERCHERY, 1974). L'application de ces principes est faite pour des modélisations théoriques.

Dans le présent travail, nous choisissons la fonctionnelle de REISSNER, celle qui a suscité le plus d'intérêt jusqu'à présent en analyse par élément finis. L'équation de REISSNER peut être utilisée sans que l'on ait à imposer aux fonctions de déplacements et de contraintes aucune condition préalable; en particulier ces fonctions ne sont en aucune façon dépendantes les unes des autres, et ceci élargit les champs d'utilisation possible de la méthode.

Les principes variationnels mixtes présentent les avantages suivants :

- a- ils sont plus flexibles par rapport aux principes à un seul champ car on peut générer plusieurs éléments finis à partir de ceux-ci ;
- b- on peut faire des changements pour que le principe accepte une discontinuité de certains champs;
- c- ces principes mènent directement aux formes mixtes des équations force-déplacement des éléments.

Malheureusement ces principes présentent certains inconvénient, comme par exemple le nombre plus élevé des champs inconnus et par conséquent un nombre important de degré de liberté dans un élément fini mixte.

FONCTIONNELLE DE REISSNER (\mathcal{R}) :

Cette fonctionnelle est à deux champs : les déplacements et les contraintes, nous pourrons l'obtenir en partant soit de l'énergie potentielle totale soit de l'énergie complémentaire à l'aide des conditions subsidiaires nous allons l'établir à partir de l'énergie potentielle totale est passant par le principe de l'énergie potentielle généralisé.

l'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\Pi_p = \int_V \left(W(\varepsilon_{ij}) - \bar{f}_i u_i \right) dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS \quad (\text{II-12})$$

Compte tenu des conditions subsidiaires suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) && \text{dans } V \\ u_i &= \bar{u}_i && \text{sur } S_u \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

L'utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour tenir compte des conditions des contraintes dans V et sur S_u revient à rendre stationnaire la fonctionnelle J suivante :

$$J = \int_V \left\{ W(\varepsilon_{ij}) - \bar{f}_i u_i + \lambda_{ij} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right) \right\} dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS - \int_{S_u} \mu_i (u_i - \bar{u}_i) dS \quad (\text{II-14})$$

$$\text{Avec : } \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{II-15})$$

λ_{ij} et μ_i étant des multiplicateurs de Lagrange.

Nous allons chercher les conditions de stationnarité de J :

$$\begin{aligned} \delta J = \int_V \left\{ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} - \bar{f}_i \delta u_i - \delta \lambda_{ij} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right) \right\} dV + \int_V \lambda_{ij} \left(\frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) - \delta \varepsilon_{ij} \right) dV \\ - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS - \int_{S_u} \{ \delta \mu_i (u_i - \bar{u}_i) + \mu_i \delta u_i \} dS \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

En regroupant les termes en $\delta \varepsilon_{ij}$ on obtient $\lambda_{ij} = \sigma_{ij}$ symétrique.

D'où :

$$\lambda_{ij} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right) = \frac{1}{2} (\lambda_{ij} \delta u_{i,j} + \lambda_{ji} \delta u_{j,i}) = \lambda_{ij} \delta u_{i,j}$$

Ensuite, nous avons :

$$\int_V \lambda_{ij} (\delta u_{i,j}) dV = \int_S \lambda_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_V (\lambda_{ij,j}) \delta u_i dV \quad (\text{II-17})$$

En regroupant tous les termes :

$$\begin{aligned} \delta J = \int_V \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \lambda_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} - (\lambda_{ij,j} + \bar{f}_i) \delta u_i + \delta \lambda_{ij} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right) \right\} dV \\ + \int_{S_\sigma} (\lambda_{ij} n_j - \bar{T}_i) \delta u_i dS + \int_{S_u} (\lambda_{ij} n_j - \mu_i) \delta u_i dS - \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta \mu_i dS \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

D'où les conditions de stationnarité :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ij} &= \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \lambda_{ij,j} + \bar{f}_i &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &= 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \right\} \text{ dans } V \quad (\text{II-19})$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ij} n_{ij} &= \bar{T}_i \\ \lambda_{ij} n_{ij} &= \mu_i \\ u_i &= \bar{u}_i \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{sur } S_\sigma \\ \text{sur } S_u \\ \text{sur } S_u \end{array} \quad (\text{II-20})$$

si l'on tient compte des deux relations : (II-19), (II-20) on obtient la fonctionnelle :

$$J(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = \int_V \left\{ W(\varepsilon_{ij}) - \bar{f}_i u_i + \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right) \right\} dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS \quad (\text{II-21})$$

A partir de cette fonctionnelle à trois champs s'énonce le principe mixte à trois champs (principe canonique) (WASHIZU, 1955); u_i , ε_{ij} , σ_{ij} sont considérées comme variables indépendantes compte tenu de la symétrie de σ_{ij} .

Le principe de REISSNER se déduit du principe généralisé (J) en supposant a priori que les champs ε_{ij} , σ_{ij} satisfont les relations de comportement (II-13)

En outre nous avons la relation :

$$\begin{aligned} W + W_c &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \text{ donc ,} \\ W_c &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W(\sigma_{ij}) \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

Compte tenu de ces relations la fonctionnelle (J) devient une fonctionnelle à deux champs :

$$\begin{aligned} J(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) &= \mathcal{R}(\sigma_{ij}, u_i) = \int_V (-W_c - \bar{f}_i u_i) dV - \int_V \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right) dV \\ &\quad - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i + \bar{u}_i) dS_u \end{aligned} \quad (\text{II-23})$$

La fonctionnelle \mathcal{R} ne dépend que de deux champs indépendants (σ_{ij} , u_i); les contraintes sont supposées a priori dépendantes des déformations par les relations de comportement.

Le principe de REISSNER s'énonce comme suit :

parmi tous les champs de déplacements u_i et de contraintes σ_{ij} , l'état réel (σ_{ij} , u_i) qui vérifie les équations d'équilibre, les lois de comportement, et les conditions aux limites mixtes rendent stationnaire la fonctionnelle $\mathcal{R}(\sigma_{ij}, u_i)$.

En introduisant les relations d'élasticité linéaire on écrit :

$$R(\sigma_{ij}, u_i) = \int_V \left(-\frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \bar{f}_i u_i + \sigma_{ij} u_{i,j} \right) dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS_\sigma - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS_u \quad (\text{II-24})$$

avec $i, j, k, l = 1, 2, 3$

Compte tenu de la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ij} u_{i,j}) dV &= \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS - \int_V (\sigma_{ij,j}) u_i dV \\ &= \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j u_i dS + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_i dS - \int_V (\sigma_{ij,j}) u_i dV \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

La fonctionnelle (fig. II-1) devient :

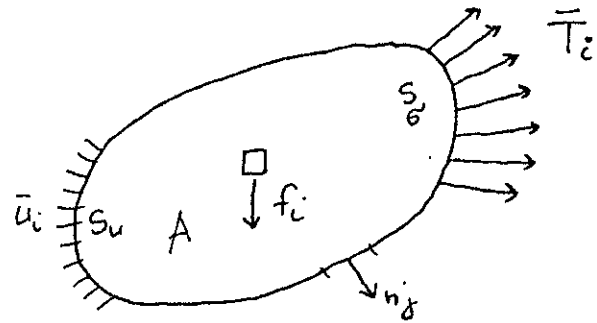
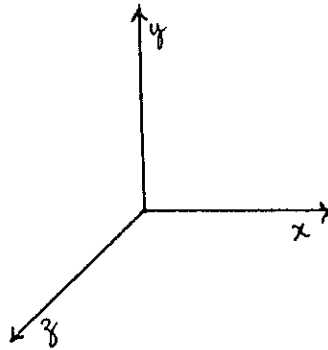


Fig. (II-1) :

$$\mathcal{R}(\sigma_{ij}, u_i) = - \int_V \left\{ (\bar{f}_i + \sigma_{ij,j}) u_i + \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right\} dV + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) u_i dS_\sigma + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS_u \quad (\text{II-26})$$

où :

\bar{u}_i : déplacements imposés sur S_u .

\bar{T}_i : forces de surface imposée sur S_σ .

S_{ijkl} : matrice de souplesse.

La première variation de \mathcal{R} , après calcul, est donnée par la relation suivante :

$$\delta \mathcal{R} = - \int_V (\bar{f}_i + \sigma_{ij,j}) \delta u_i dV + \int_V (\epsilon_{ij} - S_{ijkl} \sigma_{kl}) \delta \sigma_{ij} dV + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) \delta u_i dS_\sigma + \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS_u \quad (\text{II-27})$$

La condition de stationnarité de \mathcal{R} s'écrit : $\delta \mathcal{R} = 0$ (II-28)

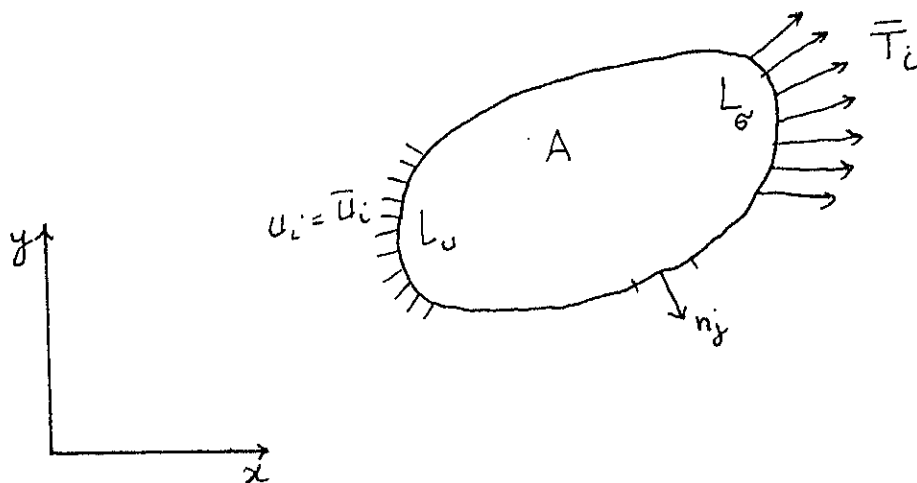
d'où l'on déduit les conditions de stationnarité de \mathcal{R} :

$$\begin{array}{lll} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{dans } V & \text{(II-29)} \\ \epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} & \text{dans } V & \text{(II-30)} \\ \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i & \text{sur } S_\sigma & \text{(II-31)} \\ u_i = \bar{u}_i & \text{sur } S_u & \text{(II-32)} \end{array}$$

Le calcul de la deuxième variation de la fonctionnelle de REISSNER montre que le point stationnaire de R n'est ni un minimum ni un maximum puisque $\delta^2 R$ ne garde pas un signe constant comme le montre la relation suivante :

$$\delta^2 R = -2 \int_V \left(\delta(\sigma_{ij,j}) \delta u_i + \frac{1}{2} S_{ijkl} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} \right) dV + 2 \int_{S_\sigma} \delta(\sigma_{ij} n_j) \delta u_i \cdot dS_\sigma \quad \text{(II-33)}$$

Pour discrétiser la fonctionnelle de REISSNER en vue de l'analyse par élément finis, nous devons exprimer les champs de déplacement et de contraintes en fonction de degrés de liberté physiques. A présent nous allons essayer d'obtenir la relation (II-31) de R sous forme matricielle dans le cas plan ($i, j = 1, 2$) (fig. II-2). Pour cela, nous commençons par écrire les conditions de stationnarité (II-29), (II-30) sous forme matricielle.



$$\begin{bmatrix} [0] & [\Omega_1] \\ [\Omega_2] & -[S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(II-34)}$$

où :

$$[\Omega_1] = [\Omega_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II-35})$$

[S] : matrice des souplesses

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & 2S_{1112} \\ & S & 2S_{2212} \\ & & 4S_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{II-36})$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix} = \langle u_1 \quad u_2 \quad \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \rangle \quad (\text{II-37})$$

$$\{f\} = \langle f_1 \quad f_2 \rangle$$

Les conditions aux limites mixtes s'écrivent :

$$\{u_i\} = \{\bar{u}_i\} \quad \text{sur } L_u \quad (\text{II-38})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{sur } L_\sigma \quad (\text{II-39})$$

En reportant ces notations dans (II-24), nous trouvons :

$$R(\{u\}, \{\sigma\}) = \frac{h}{2} \int_A \begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [0] & [\Omega] \\ [\Omega] & -[S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix} dA - h \int_A \{f\}^T \{u\} dA - h \int_{L_u} \{\bar{T}\} (\{u\} - \{\bar{u}\}) dL_u - h \int_{L_\sigma} \{\bar{T}\}^T \{u\} dL_\sigma \quad (\text{II-40})$$

Avec :

h : l'épaisseur (constante)

A : la surface totale

L_u : la partie du contour où sont imposés les déplacements $\{\bar{u}\}$

L_σ : la partie du contour où sont imposés les efforts $\{\bar{T}\}$.

La méthode variationnelle au sens du principe de REISSNER conduit à la décomposition du problème en deux étapes :

- le choix des fonctions qui représentent les champs du déplacement (u_i) et des contraintes (σ_{ij})
- la résolution du problème $\delta R = 0$

Résoudre cette équation revient à tirer les fonctions de u_i et de σ_{ij} en ne retenant que celles qui vérifient les équations d'équilibre, les relations de comportement et les conditions aux limites mixtes.

CHAPITRE III

APPROCHE

DEPLACEMENT

III-1-Introduction :

Cette formulation est pratiquement la plus utilisée dans la résolution par la M.E.F, elle suppose le champ de déplacement comme inconnu primaire du problème, à partir duquel seront déterminées les contraintes et les déformations en tout point du milieu, en utilisant les relations d'élasticité.

Elle se résume dans les étapes suivantes:

- Subdivision du milieu à étudier par des lignes (cas plan) ou par des plans (cas tridimensionnel), ce qui donne un certain nombre finis d'éléments.
- Ces éléments sont supposés reliés entre eux par un nombre fini de points appelés "point nodaux" ou " noeuds" dont les déplacements seront les inconnus du problème.
- On choisit une fonction (ou plusieurs) appelée (s) " fonction (s) de forme", qui définira au mieux possible le champ de déplacement de ces noeuds.
- On détermine le système de force concentrées aux noeuds, équivalent à l'ensemble des charges appliquées aux milieux.
- On évalue la matrice de rigidité $[K^e]$ de chaque élément fini, puis celle du milieu entier par assemblage des matrices élémentaires.
- On résout le système d'équations pour déterminer les déplacements aux noeuds, puis les déformations et les contraintes.

III-2- Formulation des éléments types déplacement :

III-2-1- Evaluation de la matrice de rigidité :

III-2-1-1- Choix de la fonction déplacement :

Cette approche nous impose un champ de déplacement qui rempli les conditions suivantes:

- 1- les fonctions choisies doivent être continues au sein de l'élément, ainsi qu'au passage des frontières entre les éléments, lorsque les éléments adjacents sont de même type ou possédant les mêmes fonctions de déformation sur les frontières.
- 2- les équations force-déplacement découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement de corps rigide.
- 3- les fonctions choisies doivent permettre la représentation des valeurs uniformes pour toutes les contraintes ou déformations.
- 4- le nombre de termes indépendants dans le polynôme doit être égale au nombre de composantes des déplacements qui sont à calculer.

III-2-1-2- calcul de la rigidité de l'élément quadrilatéral :

A- Element rectangulaire :

Le premier élément utilisé pour l'étude de l'élasticité plane est l'élément rectangulaire à quatre noeuds avec deux degrés de libertés pour chaque noeud à savoir deux translations U et V.

L'élaboration de la matrice de rigidité passe par sept étapes de base :

Première Etape :

Cette étape consiste en un choix du système de coordonnées convenable et la numérotation de l'élément de référence :

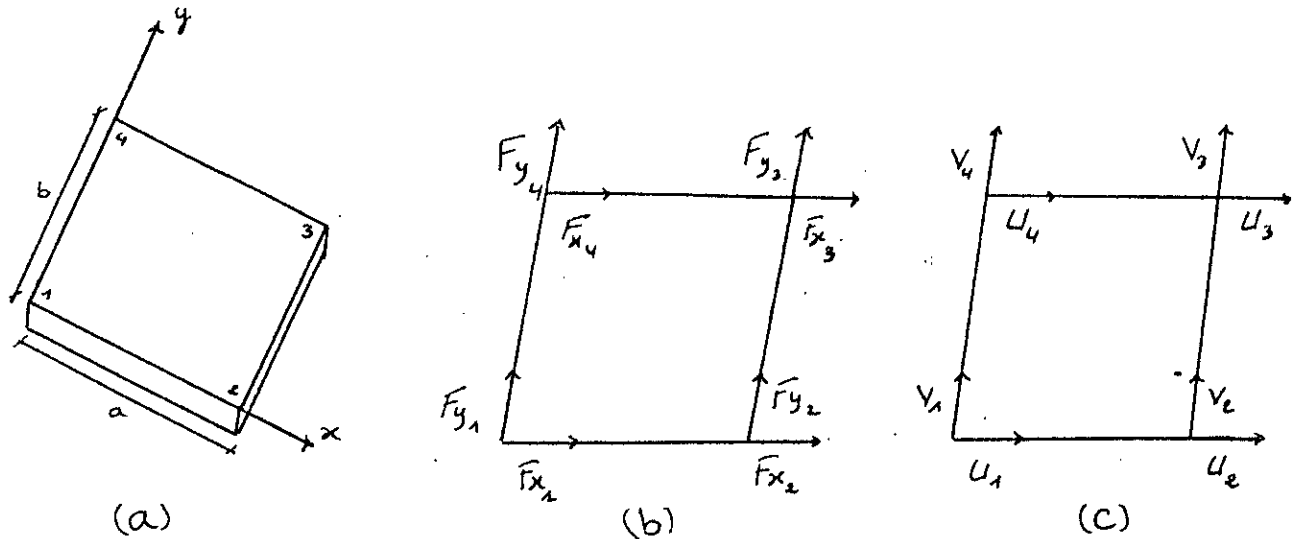


Fig. III-1 Elément rectangulaire

- (a)- Elément rectangulaire
 (b)- Forces nodales
 (c)- Déplacements nodaux

On note par : $\{a(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$ (III-1)

Le vecteur déplacement en un point de coordonnées (x, y).
 On note le vecteur déplacements nodaux comme suit :

$$\{a^e\} = \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \{a_3\} \\ \{a_4\} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad \text{(III-2)}$$

Deuxieme etape :

Elle concerne le choix de la fonction de déplacement qui peut-être représenté par deux polynômes en x et y :

$$U(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$U(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

Le nombre de degré de liberté de l'élément rectangulaire étudié ici est égal à 8, c'est pour cela qu'on a choisi deux polynômes à quatre coefficients inconnus pour chacun.
 on a :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{\alpha\} \\ \{a(x,y)\} &= [f(x,y)] \{\alpha\} \end{aligned} \quad (\text{III-4})$$

Troisième étape :

On substitue (x,y) par les coordonnées des quatre noeuds de l'élément de référence, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \{a^e\} &= [A] \{\alpha\} \Rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1} \{a^e\} \\ \{a(x,y)\} &= [f(x,y)] [A]^{-1} \{a^e\} \\ \{a(x,y)\} &= [N(x,y)] \{a^e\} \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

Quatrième partie :

On exprime les déformations en fonction des déplacements :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(x,y)\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \\ \Leftrightarrow \{\varepsilon(x,y)\} &= [L] \{a(x,y)\} \\ &= [L] [N] \{a^e\} \\ &= [B] \{a^e\} \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

[B] : est appelée matrice des déformations.

Cinquième étape :

Après avoir déterminé les déformations, on en déduit les contraintes par le biais de la loi de HOOKE généralisé :

$$[\sigma(x,y)] = [D] \{\varepsilon(x,y)\} \quad (\text{III-8})$$

$$[[D]] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III-9})$$

avec :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{\nu d_{11}}{(1-\alpha\nu)} \quad (\text{III-10})$$

$$d_{33} = \frac{E}{2[1+\nu]}$$

On a :

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] [B] \{a^e\}$$

$$\{\sigma(x,y)\} = [H(x,y)] \{a^e\} \quad (\text{III-11})$$

[H] : est appelée matrice des contraintes.

Sixième étape :

Cette étape permet de trouver une relation entre les forces nodales et les déplacements.

En appliquant le théorème des travaux virtuels, on a :

travail des forces extérieures = travail interne total.

d'où :

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (\text{III-12})$$

[K] : est appelée matrice de rigidité.

Septième étape :

Dans cette étape, on doit exprimer le vecteur élémentaire des forces nodales et ceci à partir des charges cohérentes qui s'appliquent à l'élément considéré.

d'après le théorème des travaux virtuels, on a :

$$\{F^e\} = \int_V [N]^T \{Q\} dV \quad (\text{III-13})$$

{Q} : chargement cohérent.

B- Element isoparamétriques :

Introduction:

Dans le cas général, la forme de la structure est arbitraire, d'où on ne peut pas la modéliser par des éléments de formes régulières, donc on a recours à d'autres éléments qui peuvent mieux discrétiser le domaine, ces éléments sont appelés: éléments isoparamétriques, superparamétriques et subparamétriques. Les éléments isoparamétrique sont ceux pour lesquels les fonctions de déplacement sont les mêmes que les fonctions de forme. Ceci n'est pas toujours nécessaire, il peut être plus avantageux d'utiliser les fonctions de forme et d'interpolation d'ordre différents.

Si la fonction de forme est d'ordre supérieur à la fonction d'interpolation (déplacement), l'élément est superparamétrique, dans le cas contraire, il est subparamétrique.

Il est visible que les autres structures, à géométrie complexes et chargement simple, l'élément superparamétrique est plus avantageux. Le cas contraire est valable pour les éléments subparamétriques.

Les fonctions de déplacement sont :

$$u(x,y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy$$

$$v(x,y) = c_5 + c_6x + c_7y + c_8xy$$

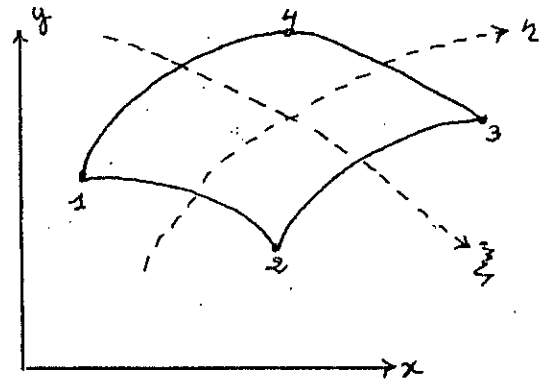
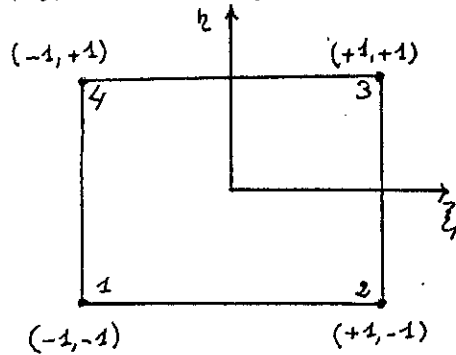


Fig III-2 Element isoparamétrique

On doit définir une transformation de l'élément de référence vers l'élément isoparamétrique vérifiant les conditions suivantes:

- la bijection
- les noeuds isoparamétriques coïncident avec les noeuds géométriques.
- les fonctions d'interpolation sont équivalentes aux fonctions de transformation.

Les déplacements internes (u) en fonction des déplacements nodaux (u_i):

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(x,y) u_i \quad (\text{III-14})$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i(x,y) v_i \quad (\text{III-15})$$

Les fonctions de formes sont exprimées en coordonnées globales comme suit :

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y) \\ N_2(x,y) &= \frac{1}{4}(1+x)(1-y) \\ N_3(x,y) &= \frac{1}{4}(1+x)(1+y) \\ N_4(x,y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1+y) \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

La transformation du système de coordonnées globales en coordonnées locales se fait comme suit :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi,\eta) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi,\eta) v_i \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

$$\text{avec : } N_i(\xi, \eta) = N_i(x, y) \quad (\text{III-18})$$

La fonction N_i prend la valeur (1) au point "i" et (0) ailleurs.

En utilisant le principe des travaux virtuels, on obtient la matrice de rigidité :

$$[K] = \iint_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (\text{III-19})$$

la matrice [D] est la matrice des propriétés physiques.

la matrice [B] est la matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux :

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u_i\} \quad (\text{III-20})$$

puisque N_i est défini en fonction de (ξ, η) on doit changer les dérivées ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} \text{ par } \frac{\partial}{\partial \xi} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \eta}$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

avec :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III-23})$$

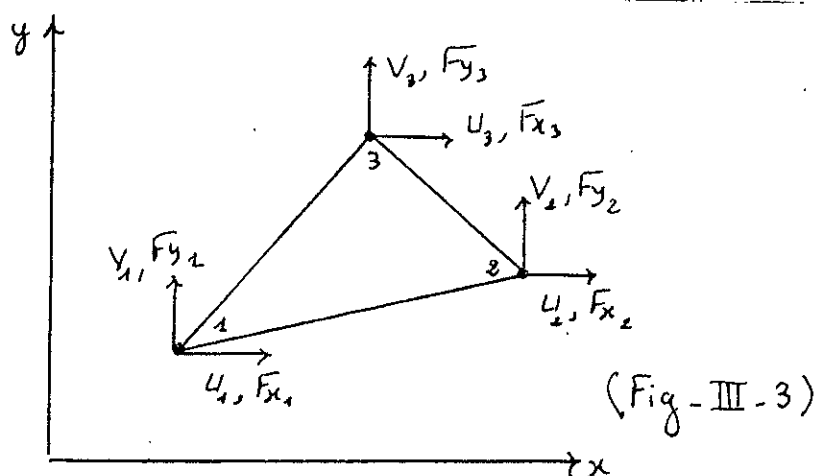
la matrice de rigidité [K] devient alors :

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] [J] d\xi d\eta \quad (\text{III-25})$$

III-2-1-3- Calcul de la matrice de rigidite de l'element triangulaire :

En suivant les mêmes étapes que précédemment, on obtient la matrice de rigidité de l'élément triangulaire sous la forme suivante

$$[K] = \iint_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$$



III-2-2- propriétés de la matrice de rigidite :

La matrice de rigidité est :

- 1- symétrique en vertu du théorème MAXWELL-BETTI.
- 2- singulière avant l'introduction des conditions aux limites, ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément.
- 3- définie positive, ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle.

III-3- Les critères de convergence :

Le choix des fonctions de forme limite le nombre de degrés de liberté du système (qui en réalité devrait être infini) et donc le minimum réel de l'énergie ne pourra jamais être atteint quelle que soit la finesse du maillage. Pour assurer la convergence de la solution approchée vers la solution exacte, certaines conditions simples doivent être vérifiées. Par exemple, il faudra évidemment que les fonctions représentatives des déplacements puissent représenter aussi précisément que possible le champ des déplacements réels.

CRITERE N°1 :

La fonction représentative des déplacements doit être telle qu'il soit impossible qu'un élément se déforme quand les déplacements de ces noeuds sont causés par un mouvement de corps solide.

CRITERE N°2 :

La fonction représentative des déplacements doit être telle que, si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, on obtient effectivement ces déformations constatés.

CRITERE N°3 :

les fonctions représentatives des déplacements doivent être choisies de telle sorte que les déformations aux interfaces entre éléments restent bornées (bien qu'indéterminées).

III-4- Avantages et inconvénients de l'approche déplacement

La formulation des éléments finis par l'approche déplacement présente des avantages et des inconvénients que nous citons ci-dessous :

A- Avantages:

1. Le mode de déplacement dérive d'un principe variationnel primal avec seulement les déplacements comme champ variable, ce qui fait que sa dérivation est la plus simple.
2. Le modèle déplacement trouve son application pour les problèmes avec une continuité (C^0).

B- Inconvénients:

1. dans le modèle déplacement le champ de contrainte est fonction de la dérivée première du champ de déplacement, ce qui diminue sa précision
2. Les contraintes issues d'un modèle déplacement sont discontinues.
3. Le phénomène de blocage apparaît lors de son application sur les matériaux incompressibles et quasi-incompressibles.

CHAPITRE IV
MISE EN OEUVRE
INFORMATIQUE

IV-1 Introduction :

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis nécessite la manipulation de matrices et vecteurs de tailles assez importantes et la résolution du système d'équations d'ordre élevé. Le recours à la programmation devient alors indispensable.

Du point de vue mathématique, la méthode des éléments finis revient poser le problème en terme de résolution d'un système d'équations simultanées, écrit sous forme :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

Pour cela, on a élaboré trois programmes en éléments finis pour l'approche déplacement, le premier est le programme MEFEP, qui utilise des éléments rectangulaires avec numérotation automatique, le deuxième est MEFISO, utilisant des éléments isoparamétriques et le dernier, c'est le programme TRI qui utilise des éléments triangulaires.

IV-2 Structure du programme MEFEP :

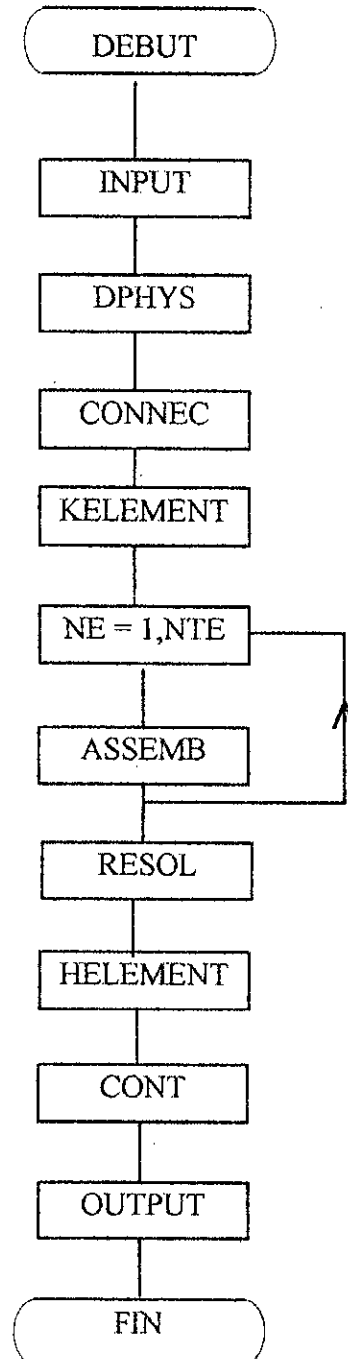


Fig IV-1 Structure globale du programme MEFEP

IV-2-1 La lecture des données :

La lecture des données se fait à partir d'un fichier d'entrée ou sont stockées les différentes données du problème, sous format libre. La lecture de ces données se fait par appel de la subroutine IN PUT .

Les différentes données sont :

Informations generales :

- ICODE : code d'étude :
 - 0 pour le cas de contrainte plane
 - 1 pour le cas de déformation plane
- E : module de YOUNG
- NU : coefficient de POISSON
- L : longueur du corps
- H : hauteur du corps
- NEX : nombre d'élément suivant x
- NEY : nombre d'élément suivant y.

Conditions aux limites :

- NNR : nombre de noeuds restreints
- NNCH : nombre de noeuds chargés
- DPHYS : subroutine qui calcul la matrice d'élasticité [D]
- CONNEC : subroutine qui génère la connectivité des noeuds de chaque élément.

IV-2-2 Assemblage des matrices :

- a- KELEMENT : avant de faire l'assemblage, on doit calculer la matrice de rigidité élémentaire une fois pour toute, car tous les éléments sont identiques pour toutes la structure, on utilise pour cela la subroutine KELEMENT.
- b- ASSEMB : cette subroutine fait l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires, en les plaçant dans la matrice de rigidité globale par le biais de numérotation faite par la connexion.

IV-2-3 Prise en considération de C.A.L. :

La matrice de rigidité obtenue est singulière, pour remédier ce problème, il faut introduire les conditions aux limites (C.A.L), et cela se fait à l'aide de plusieurs techniques:

- a) La technique d'élimination :
 Cette technique élimine la ligne et la colonne correspondant au degré de liberté restreint. On a utilisé cette technique dans les programmes de l'approche mixte (voir chapitre VI)
- b) La technique de terme unitaire sur la diagonale :
 Elle consiste à annuler toutes les lignes et les colonnes correspondants au degré de liberté restreint sauf le terme diagonal, on le pose égal à 1, et la force correspondante égale à 0.
- c) La technique du terme diagonal dominant :

Cette technique a été utilisée dans le programme MEFEP, car elle est facile à programmer et permet de modéliser des appuis élastiques.

Elle consiste à ajouter un terme très grand (α) au terme diagonal de la matrice de rigidité correspondant au degré de liberté restreint et remplacer la force correspondante par le déplacement prescrit, multiplier par ce même facteur (α)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & & K_{2n} \\ & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & & K_{nn} + \alpha \\ & & & K_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \\ U_n \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \\ F_n \alpha \\ F_n \end{bmatrix}$$

IV-2-4 Résolution :

L'algorithme de résolution qu'on va adopter est l'algorithme L, U.

On va résoudre le système $[K] \{X\} = \{F\}$

On décompose la matrice $[K]$ en deux matrices triangulaires, l'une supérieure, l'autre inférieure tel que : $[K] = [L] \cdot [U]$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & L_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ L_{n1} & \dots & \dots & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & \dots & U_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & U_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & & & K_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & & K_{nn} \end{bmatrix}$$

avec $L_{ii} = 1$.

On détermine les termes de $[L]$ et $[U]$ par l'algorithme suivant :

pour $j < i$ on a :

$$K_{ij} = L_{ij} U_{ij} + \dots + L_{ij-1} U_{j,j-1} + L_{ij} U_{jj}$$

d'où :

$$L_{ij} = \frac{K_{ij} - L_{iq} U_{qj}}{U_{jj}}$$

pour $j > i$, on a :

$$K_{ij} = L_{i1} U_{1j} + \dots + L_{i,i-1} U_{i-1,j} + 1 \cdot U_{ii}$$

d'où :

$$U_{ij} = K_{ij} - \sum_{q=1}^{j-1} L_{iq} U_{qj}$$

Après avoir formé L et U, le système précédent devient :

$$[L] \cdot [U] \{X\} = \{F\} \text{ ou } [L] \{W\} = \{F\}$$

$$\text{avec } [U] \cdot \{X\} = \{W\}$$

On résout le système $[L] \cdot \{W\} = \{F\}$, et on obtient les termes de $\{W\}$ par substitution directe, puis on résout le système $[U] \cdot \{X\} = \{W\}$, et on obtient $\{X\}$ par back-substitution.

IV-2-5- Calcul des contraintes :

- a- Subroutine HELEMENT : ce sous programme est utilisé pour le calcul de la matrice de contraintes élémentaires [H].
- b- Subroutine CONT : une fois les déplacements sont déterminés, et la matrice [H] est calculée, ce sous programme permet de trouver les contraintes pour chaque élément.

IV-3- Structure du programme MEFISO :

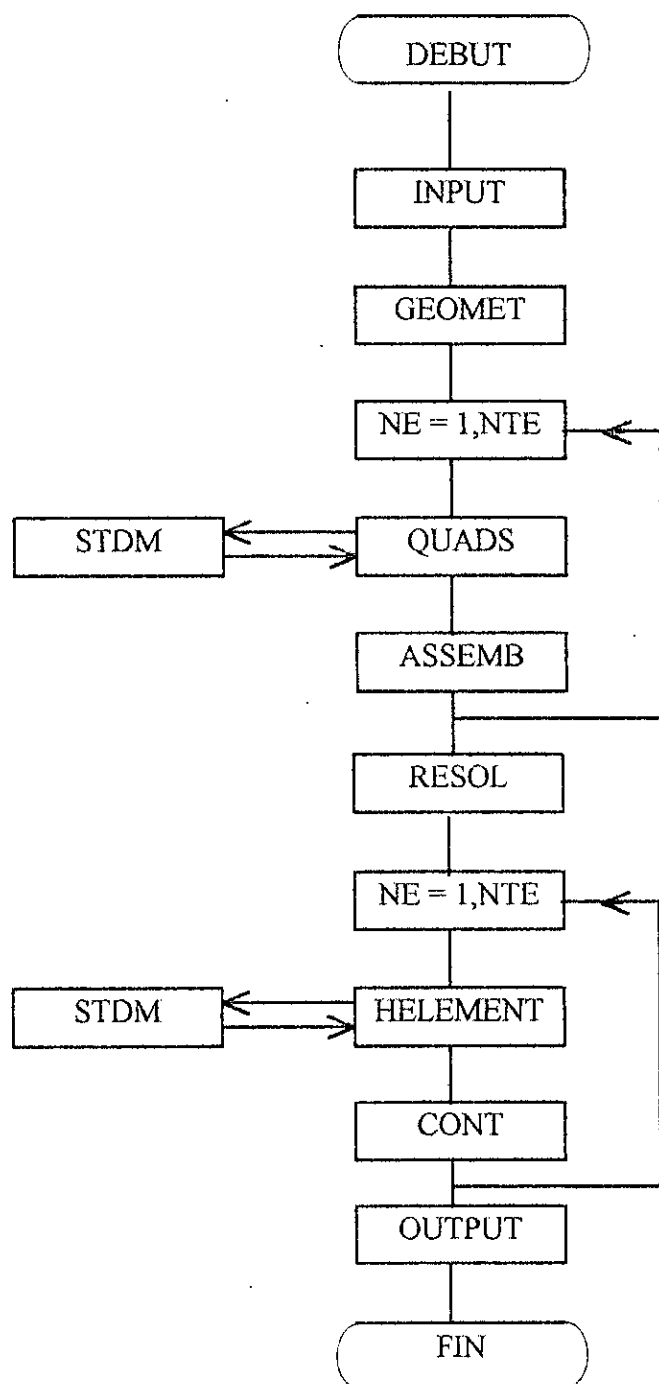


Fig. IV-2 Structure du programme MEFISO

CHAPITRE V
APPROCHE MIXTE

V-1 Introduction :

Un élément est dit mixte si les degrés de libertés associés sont de type déplacements et contraintes. Les premières formulations d'éléments finis mixtes ont été réalisées par Herzman, 1967 pour les plaques minces; depuis, plusieurs éléments mixtes furent formulés par différents auteurs (Dunham & Pister, 1968), (Chatterja & Setlur, 1972), (Tseng & Olson, 1981), (Olson, 1983).

Pour l'étude des problèmes d'élasticité plane, de poutre en flexion et de contact dans le cas bidimensionnel.

V-2- Formulation des éléments de type mixte :

Nous nous intéressons sur la formulation basée sur le principe variationnel de Reissner cité dans le chapitre II.

V-2-1- Approximation du champs de déplacement :

L'approximation du champs de déplacement s'écrit :

$$\{U^e\} = [\Phi(x, y)] \{\alpha_n^e\} \quad (V-1)$$

$2 \times 1 \quad \quad 2 \times n \quad \quad n \times 1$

avec : $\{U^e\}^T = \langle U(x, y) \quad V(x, y) \rangle \quad (V-2)$

Tel que $U(x, y)$, $V(x, y)$ sont les deux composantes du déplacement suivant les axes des X et Y respectivement.

$[\Phi]$: matrice des bases polynomiales avec

$$[\Phi(x, y)] = \begin{bmatrix} \langle \Phi(x, y) \rangle & \dots & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \dots & \langle \Phi(x, y) \rangle \end{bmatrix} \quad (V-3)$$

Pour le cas d'un triangle on a :

$$\langle \Phi \rangle = \langle 1 \quad x \quad y \rangle \quad (V-4)$$

Et pour le cas d'un rectangle on a :

$$\langle \Phi \rangle = \langle 1 \quad x \quad y \quad xy \rangle \quad (V-5)$$

pour une variation linéaire complète.

n : le nombre de variables généralisées de l'approximation

$\{\alpha_n^e\}$: vecteur des n variables généralisées de l'approximation du champs de déplacement.

On calcul les variables généralisées en fonction des degrés de liberté nodaux, on aura :

$$\{q^e\} = [X^e] \{\alpha_n^e\} \quad (V-6)$$

$\{q^e\}$: vecteurs regroupant les déplacements nodaux dans l'élément.

$[X^e]$: matrice reliant les variables généralisées aux déplacements nodaux; elle est fonction des coordonnées des noeuds.

A partir de la relation (V-6) on pourra écrire :

$$\{\alpha_n^e\} = [X^e]^{-1} \{q^e\} \quad (V-7)$$

La relation (V-1) devient alors :

$$\{U^e\} = [\Phi(x,y)] [X^e]^{-1} \{q^e\} = [N(x,y)] \{q^e\} \quad (V-8)$$

$2 \times 1 \quad 2 \times n \quad n \times n \quad n \times 1 \quad 2 \times n \quad n \times 1$

[N] est la matrice des fonctions d'interpolation ou encore des fonctions de forme pour les déplacements.

V-2-2- Approximation du champ de contraintes :

De la même manière le champ de contrainte est approximé comme suit :

$$\{\sigma^e\} = [\Psi(x,y)] \{\beta_m^e\} \quad (V-9)$$

$3 \times 1 \quad 3 \times m \quad m \times 1$

où : $\{\sigma^e\}^T = \langle \sigma_{11}(x,y) \quad \sigma_{22}(x,y) \quad \sigma_{12}(x,y) \rangle \quad (V-10)$

[Ψ] : matrice des bases polynomiales :

$$[\Psi(x,y)] = \begin{bmatrix} \langle \varphi(x,y) \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle \varphi(x,y) \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle \varphi(x,y) \rangle \end{bmatrix} \quad (V-11)$$

avec :

- pour le cas d'un triangle

$$\langle \varphi \rangle = \langle 1 \quad x \quad y \rangle \quad (V-12)$$

- pour le cas d'un rectangle

$$\langle \varphi \rangle = \langle 1 \quad x \quad y \quad xy \rangle \quad (V-13)$$

pour une variation linéaire complète.

m : le nombre de variables généralisées de l'approximation.

$\{\beta_m^e\}$: vecteur des m variables généralisées de l'approximation du champ des contraintes.

Pour le calcul des variables généralisées on peut écrire

$$\{\tau^e\} = [Y^e] \{\beta_m^e\} \quad (V-14)$$

$\{\tau^e\}$: est le vecteur regroupant toutes les variables nodales en contraintes.

$[Y^e]$: matrice reliant les variables généralisées aux contraintes nodales; elle est fonction des coordonnées des noeuds.

A partir de la relation (V-14) on pourra écrire

$$\{\beta_m^e\} = [Y^e]^{-1} \{\tau^e\} \quad (V-15)$$

La relation (V-9) devient alors :

$$\{\sigma^e\} = [\Psi(x,y)] [Y^e]^{-1} \{\tau^e\} = [M(x,y)] \{\tau^e\} \quad (V-16)$$

$3 \times 1 \quad 3 \times m \quad m \times m \quad m \times 1 \quad 3 \times m \quad m \times 1$

$[M]$: est la matrice des fonctions d'interpolation ou encore des fonctions de forme pour les contraintes.

Enfin nous pouvons écrire les deux relations (V-8) et (V-16) sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \{U^e\} \\ \{\sigma^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q^e\} \\ \{\tau^e\} \end{Bmatrix} \quad (V-17)$$

tel que :

$$\{q^e\}^T = \langle U_1 \ V_1 \ U_2 \ V_2 \ \dots \rangle \quad (V-18)$$

$$\{\tau^e\}^T = \langle \sigma_{11}^1 \ \sigma_{22}^1 \ \sigma_{12}^1 \ \dots \rangle \quad (V-19)$$

V-2-3- Evaluation de la matrice rigidité :

On a :

$$\{\epsilon^e\} = [L] \{U^e\} \quad (V-20)$$

avec :

$[L]$: matrice des opérateurs différentiels.

En substituant la relation (V-8) dans (V-20) on obtient la relation :

$$\begin{aligned} \{\epsilon^e\} &= [L] [N] \{q^e\} \\ &= [B] \{q^e\} \end{aligned} \quad (V-21)$$

La relation (V-17) devient :

$$\begin{Bmatrix} \{\epsilon^e\} \\ \{\sigma^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q^e\} \\ \{\tau^e\} \end{Bmatrix} \quad (V-22)$$

$$6 \times 1 \quad 6 \times (n+m) \quad (n+m) \times 1$$

En substituant la relation (V-21) dans la formule (II-40) de la fonctionnelle de Reissner on aura :

$$R(\{U^e\}, \{\sigma^e\}) = \frac{h}{2} \int_{A^e} \begin{Bmatrix} \varepsilon^e \\ \sigma^e \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [I] & -[S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^e \\ \sigma^e \end{Bmatrix} dA^e - h \int_{A^e} \{f^e\}^T \{U^e\} dA^e - h \int_{L_\sigma} \{\bar{T}^e\}^T \{U^e\} dL_\sigma \quad (V-23)$$

où :

[I] : matrice unitaire

[S] : matrice des souplesses.

En remplaçant (V-22) dans (V-23), la fonctionnelle de Reissner :

$$R = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{q^e\} \\ \{\tau^e\} \end{Bmatrix}^T [K^e] \begin{Bmatrix} \{q^e\} \\ \{\tau^e\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{q^e\} \\ \{\tau^e\} \end{Bmatrix}^T \{F^e\} \quad (V-24)$$

où [K^e] : la matrice élémentaire de rigidité-souplesse :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [0] & [K_{\sigma U}]^T \\ [K_{\sigma U}] & [K_{\sigma\sigma}] \end{bmatrix} \quad (V-25)$$

Avec :

$$[K_{\sigma\sigma}] = -h \int_{A^e} [M]^T [S] [M] dA^e \quad (V-26)$$

$m \times m$

$$[K_{\sigma U}] = h \int_{A^e} [M]^T [B] dA^e \quad (V-27)$$

$m \times n$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_U^e\} \\ \{F_\sigma^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_U^e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (V-28)$$

$$\{F_\sigma^e\} = \{0\} \quad \text{en l'absence de contraintes initiales.}$$

Pour l'ensemble de la structure, la fonctionnelle R s'écrit :

$$\mathcal{R}^g(\{q^g\}, \{\tau^g\}) = \sum_{e=1}^n \mathcal{R}^e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{q^g\} \\ \{\tau^g\} \end{Bmatrix}^T \left(\sum_{e=1}^n [K^g] \right) \begin{Bmatrix} \{q^g\} \\ \{\tau^g\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{q^g\} \\ \{\tau^g\} \end{Bmatrix}^T \sum_{e=1}^n \begin{Bmatrix} \{F_u^g\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (\text{V-29})$$

L'introduction de la condition de stationnarité de la fonctionnelle R : δR conduit aux équation d'équilibre de la structure globale :

$$\begin{bmatrix} [0] & [K_{\sigma u}]^T \\ [K_{\sigma u}] & [K_{\sigma\sigma}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q^g\} \\ \{\tau^g\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_u^g\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (\text{V-30})$$

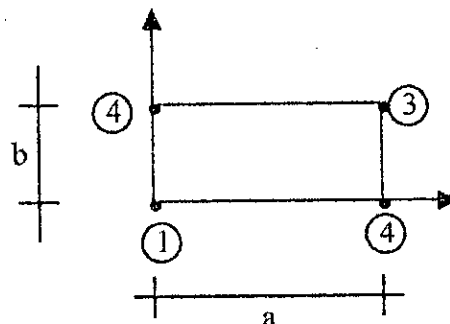
Le vecteur $\{F_u^g\}$ est le même que celui calculé par l'approche déplacement (voir ch.III-2-2-2)

V-2-3-1- Calcul de la matrice rigidité de l'élément quadrilatéral à quatre noeuds :

A- Élément quadrilatérale à angle droit :

Cet élément est un rectangle à quatre côtés rectilignes, à quatre noeuds et cinq degrés de liberté par noeuds (tous les déplacements et toutes les contraintes).

(Fig. V-1)



La formulation de cet élément est basée sur le principe variationnel de Reissner cité auparavant. Soit :

$$\begin{Bmatrix} \{U^e\} \\ \{\sigma^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi(x,y)] & [0] \\ [0] & [\Psi(x,y)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_j^e\} \\ \{\beta_j^e\} \end{Bmatrix}$$

$$5 \times 1 \quad \quad 5 \times 20 \quad \quad 20 \times 1$$

Avec Φ , Ψ sont données par (V-3), (V-11), pour une variation linéaire du champ de déplacement et de contrainte.

A l'aide des relations (V-8) et (V-16) on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \{U^e\} \\ \{\sigma^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q^e\} \\ \{\tau^e\} \end{Bmatrix}$$

avec : $\{q^e\}^T = \langle U_1 \ V_1 \ U_2 \ V_2 \ U_3 \ V_3 \ U_4 \ V_4 \rangle$

$$\{\tau^e\}^T = \langle \sigma_{11}^1 \ \sigma_{22}^1 \ \sigma_{12}^1 \ \sigma_{11}^2 \ \sigma_{22}^2 \ \sigma_{12}^2 \ \sigma_{11}^3 \ \sigma_{22}^3 \ \sigma_{12}^3 \ \sigma_{11}^4 \ \sigma_{22}^4 \ \sigma_{12}^4 \rangle$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (V-31)$$

t.q :

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N_2 = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (V-32)$$

$$N_3 = \frac{xy}{ab}$$

$$N_4 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b}$$

A partir de la relation (V-21) nous obtenons la matrice [B] :

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{1}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ -\frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) & -\frac{1}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix} \quad (V-33)$$

D'autre part :

$$[M] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (V-34)$$

les N_i sont données par (V-32).

Soit la matrice [D] reliant les déformations aux contraintes :

$$\{\sigma^e\} = [D] \{\epsilon^e\} \quad (V-35)$$

[D] : la matrice loi de comportement.

La relation (V-35) peut s'écrire de la manière suivante : $\{\epsilon^e\} = [S] \{\sigma^e\}$ (V-36)

[S] : la matrice de souplesse.

Pour l'état de contrainte plane :

$$[S] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (V-37)$$

$$[S] = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (V-38)$$

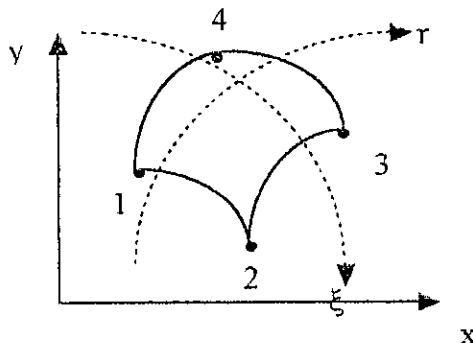
Maintenant la matrice $[K^e]$ donnée par :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [0] & [K_{\sigma u}]^T \\ [K_{\sigma u}] & [K_{\sigma\sigma}] \end{bmatrix}$$

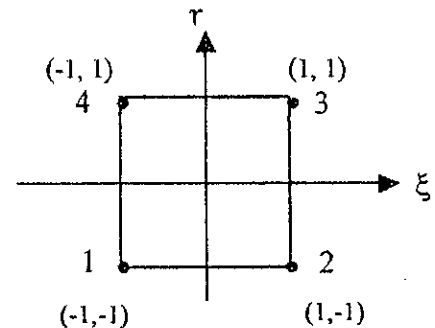
est bien définie en prenant l'épaisseur $h = 1$ (élasticité plane).

Les blocs élémentaires $[K_{\sigma\sigma}]$ et $[K_{\sigma u}]$ sont donnés dans l'annexe.A

B- Élément quadrilatéral isoparamétrique mixte :



Plan physique



Plan isoparamétrique

De la même manière que pour l'élément quadrilatéral isoparamétrique classique, on doit définir une transformation vérifiant les propriétés données dans le chapitre III.

Cette transformation géométrique qui permet le passage de l'élément de référence à l'élément réel considéré est linéaire et s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{array} \right. \quad (V-39)$$

$$\text{avec } N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, 4$$

$$\xi_i = \pm 1 \quad \eta_i = \pm 1 \quad (\text{V-40})$$

L'intégration sur une région du plan (x, y) devient sur une région du plan (ξ, η) et un élément d'aire devient :

$$dx dy = \det [J] d\xi d\eta \quad (\text{V-41})$$

on aura alors :

$$[K^e] = \int_A [K^e(x, y)] dx dy = \int_{-1-1}^1 [K^e(\xi, \eta)] \det[J] d\xi d\eta \quad (\text{V-42})$$

ou bien :

$$[K_{\sigma\sigma}] = h \int_{-1-1}^1 [M(\xi, \eta)]^T [S] [M(\xi, \eta)] \det[J] d\xi d\eta \quad (\text{V-43})$$

$$[K_{\sigma u}] = h \int_{-1-1}^1 [M(\xi, \eta)]^T [B(\xi, \eta)] \det[J] d\xi d\eta \quad (\text{V-44})$$

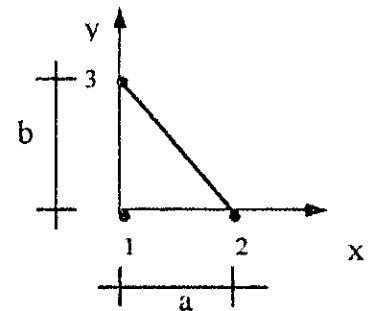
[J] : étant la matrice jacobienne.

V-2-3-2- Calcul de la matrice de rigidité de l'élément triangulaire mixte linéaire à trois noeuds

Cet élément est un triangle à angle droit à trois côtés rectilignes, à trois noeuds et cinq degrés de liberté par noeud (tous les déplacements et toutes les contraintes). (fig. V-3)

Cette formulation est basée aussi sur le principe de REISSNER.

En suivant les mêmes étapes que la formulation de l'élément quadrilatéral mixte à angle droit on obtient :



$$\begin{Bmatrix} \{U^e\} \\ \{\sigma^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q^e\} \\ \{\tau^e\} \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec : } \{q^e\}^T = \langle U_1 \ V_1 \ U_2 \ V_2 \ U_3 \ V_3 \rangle$$

$$\{\tau^e\}^T = \langle \alpha_1^1 \ \alpha_2^1 \ \alpha_1^2 \ \alpha_2^2 \ \alpha_1^3 \ \alpha_2^3 \ \alpha_2^3 \rangle$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (V-45)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (V-46)$$

avec :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

$$N_2 = \frac{x}{a} \quad (V-47)$$

$$N_3 = \frac{y}{b}$$

A partir de la relation (V-21) nous obtenons la matrice [B] :

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad (V-48)$$

de la même manière que pour l'élément quadrilatéral mixte on obtient la matrice $[K^e]$:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [0] & [K_{ou}]^T \\ [K_{ou}] & [K_{\sigma\sigma}] \end{bmatrix}$$

est bien définie en prenant l'épaisseur $h = 1$ (élasticité plane).

Les blocs élémentaires $[K_{\sigma\sigma}]$ et $[K_{ou}]$ sont donnés dans l'annexe.B

V-2-4- Propriétés de la matrice de rigidité - souplesse issue de l'approche mixte :

La matrice de rigidité - souplesse est :

1. Symétrique.
2. Singulière.
3. N'est pas définie positive

V-3- Critères de convergence de l'approche mixte :

V-3-1- Etude de la convergence :

Il existe des critères de convergences qui sont nécessaires ou tout au moins souhaitables au niveau de l'élément afin d'obtenir de bonnes solutions au niveau de la structure complète. Ces critères peuvent se présenter comme suit :

1- représentation des modes rigides:

Quand on donne aux déplacements nodaux $\{q\}$ des valeurs correspondant à un déplacement d'ensemble, on doit trouver un état de déformation et de contraintes nul dans l'élément.

2- représentation des états de déformations et de contrainte constante :

Les deux fonctions de déplacement et de contrainte choisies doivent être telles que, si les déplacements nodaux et les contraintes nodales sont compatibles avec des états de déformations et de contraintes constantes, on puisse obtenir réellement ces états dans tout l'élément.

3- compatibilité en déplacement :

un élément fini est compatible quand le champ de déplacement est continu à la fois à l'intérieur et aux frontières des éléments.

4- compatibilité des interpolations :

d'après MIRZA et ORSON, dans le cas où les déplacements et contraintes sont approximées indépendamment, les interpolations pour former l'énergie de déformation de la fonctionnelle de REISSNER doivent respecter le critère suivant :

- les déformations obtenues à partir de l'approximation de contraintes doivent posséder au moins tous les modes de déformations qui sont obtenus en dérivant le champ de déplacement.

La violation de ce critère conduit à l'apparition de mécanismes, c'est à dire de modes parasites de déformation à énergie nulle.

V-3-2- Etude des valeurs propres et des vecteurs propres :

L'énergie de déformation dans la fonctionnelle de REISSNER s'écrit :

$$U_R = \frac{h}{2} \int_{A^e} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^e \\ \sigma^e \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [I] & -[S] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^e \\ \sigma^e \end{matrix} \right\} dA^e \quad (V-49)$$

ou bien sous la forme suivante :

$$U_R = \int_{A^e} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12}) dA^e - \frac{1}{2E} \int_{A^e} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\nu\sigma_{11}\sigma_{22} + 2(1+\nu)\sigma_{12}^2) dA^e \quad (V-50)$$

Pour que l'énergie de déformation soit nulle, il faut que les trois modes de déplacement d'ensemble soient les suivants :

$$1- U = \text{constante}, V = 0; \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0$$

$$2- U = 0, V = \text{constant}; \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0 \quad (V-51)$$

$$3- U = -cy, V = cx; \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0$$

Pour que le premier critère de convergence (représentation du mode rigide) soit vérifié, tous les éléments que nous avons développés doivent contenir les trois modes rigides représentés par (V-51) pour la vérification, on calcule des valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de la matrice élémentaire pour chaque élément.

Ce calcul a été réalisé à l'aide d'un logiciel qui utilise la transformation de HOUSEHOLDEL et résout le système ci-dessous :

$$[K]^e \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\tau\} \end{Bmatrix}^e - \lambda [I] \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\tau\} \end{Bmatrix}^e = 0 \quad (V-52)$$

où :

$[K]^e$: matrice élémentaire de l'élément.

$[I]$: Matrice unité

λ : les valeurs propres de $[K]^e$

le tableau (V-4) nous donne les valeurs propres et les vecteurs propres de différents éléments.

Les valeurs propres négatives dans le tableau (V-4) et leur nombre correspondent aux contraintes, et au nombre de degrés de liberté en contrainte.

Pour les valeurs propres nulles, dans le tableau (V-4) les variables représentées dans la colonne " composition du vecteur propre" sont les variables nodales pour chaque élément; il est évident que d'autres variables sont également nulles: σ_{ij} dans le cas de l'élément Q4.

Discussion et commentaire :

Le tableau (V-4) nous montre que tous nos éléments vérifient le premier critère de convergence (représentations des modes rigides).

Le deuxième critère dans lequel les fonctions choisies pour les déplacements et les contraintes doivent permettre la représentation de valeurs uniformes pour toutes les contraintes et les déformations, est satisfaisant puisque les bases polynomiales choisies (bilinéaires) comportent tous les termes linéaires aussi bien pour les déplacements que pour les contraintes.

Le troisième critère de convergence (condition de continuité inter-éléments) est satisfait car les fonctions choisies varient linéairement à la fois à l'intérieur de l'élément et sur la frontière entre les éléments.

TYPE D'ELEMENT	DEGRES DE LIBERTE			VALEURS PROPRES		Composition des vecteurs - propres
	dépl	Contraintes	Total	Signe	Nombre	
Q4	8	0	8	(-) (0) (+)	— 3 5	— $\epsilon_{ij} = 0$ U, V bilinéaires
REISSNER	8	12	20	(-) (0) (+)	12 3 5	U, σ bilinéaires $\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} = 0,$ $i, j = 1, 2$ U, σ bilinéaires
C.S.T	6	0	6	(-) (0) (+)	— 3 3	— $\epsilon_{ij} = 0, i, j = 1, 2$ —
REISSNER	6	9	15	(-) (0) (+)	9 3 3	U, V, σ linéaires $\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} = 0,$ $i, j = 1, 2$ U, V, σ linéaires

Tableau (V-4) : résultats des valeurs propres pour différents types d'éléments

V-3-3- Critère théorique et sélection des éléments mixtes :

Afin de vérifier le respect du critère énoncé par MIRZA et OLSON, il fallait calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices élémentaires des éléments. Il a paru désirable à certains auteurs de définir des règles ou des conditions à vérifier pour sélectionner les éléments avant même de procéder au calcul des valeurs propres.

La condition à satisfaire est la suivante :

$$n_{\sigma} \geq n_u - n_r \quad (V-53)$$

où : n_{σ} : nombre de degrés de liberté en contraintes

n_u : nombre de degrés de liberté en déplacements

n_r : nombre de mouvement de corps rigide

Sinon, il apparaît des mécanismes excédentaires.

Ce test est un test nécessaire mais non suffisant, et il peut être appliqué au niveau de chaque élément mixte et au niveau de plusieurs éléments mixtes assemblés

V-4- Avantages et inconvénients de l'approche mixte

La formulation des éléments finis par l'approche mixte présente des avantages et des inconvénients que nous citons ci-dessous:

A- avantages :

1. Les conditions de continuité sur les fonctions de forme sont réduites (la réduction de la continuité est d'une importance particulière dans les problèmes des palques et coques).
2. L'utilisation d'une approximation continue (C^0) des contraintes améliore de façon considérable les résultats d'une analyse aux déplacements standard (pour les matériaux homogènes).
3. Les principes mixtes sont plus flexibles par rapport aux principes à un seul champ car on peut générer plusieurs éléments finis à partir de ceux-ci.
4. Elle donne directement les variables recherchées u et σ et avec une précision uniforme pour les différents champs.
5. Diversité d'applications : analyse des milieux avec des propriétés matériels discontinues et des matériaux non homogènes, ainsi que les matériaux incompressibles ou quasi incompressibles.

La formulation de Reissner par rapport à d'autres formulations mixtes ou hybrides est simple car

- Elle comporte à un ordre moins élevé de dérivées .
- Le développement du modèle mixte exige moins de calculs après résolution.

B- Inconvénients:

1. Le modèle mixte impose un nombre plus élevé des champs inconnus et par conséquent un nombre plus élevé des champs inconnus et par conséquent un nombre important de degrés de libertés par élément.

Les matrices de rigidité-souplesse obtenues à partir de la fonctionnelle de Reissner ne sont définies positives, cela fait naître une difficulté pour résoudre le système global des équations par des méthodes de résolution classiques appliquées aux matrices définies positives (méthodes de résolution de Gauss, sans recherche de pivot non nul).

**CHAPITRE VI
MISE EN OEUVRE
INFORMATIQUE**

VI-1 Introduction:

La croissance de plus en plus accrue des performances des micro-ordinateurs en particulier du point de vue rapidité de calcul et de capacité de mémoire, a stimulé le développement des codes de calcul par éléments finis sur ces machines. On peut citer CASMIC (Ramahéfarison, 1983).

L'utilisation des méthodes mixtes en calcul de structures ne connaît pas autant de succès que les méthodes classiques, ceci malgré leur adaptation aux structures hétérogènes.

Le taux de calcul dans les méthodes mixtes est très grand par rapport à celui des méthodes classiques du fait que les méthodes mixtes prennent en considération le calcul des déplacements et des contraintes de façon indépendante, ce qui n'est pas le cas pour les modèles classiques.

La structure d'un programme de calcul en approche mixte est un peu différente à celle en approche déplacement du fait qu'on a fait introduire deux types de variables, les déplacements et les contraintes ce qui a donné une nouvelle forme à la matrice élémentaire reliant les forces nodales aux variables généralisées.

Nous avons réalisé trois programmes en approche mixte: QMIXT, ISOMIXT, TRIMIXT.

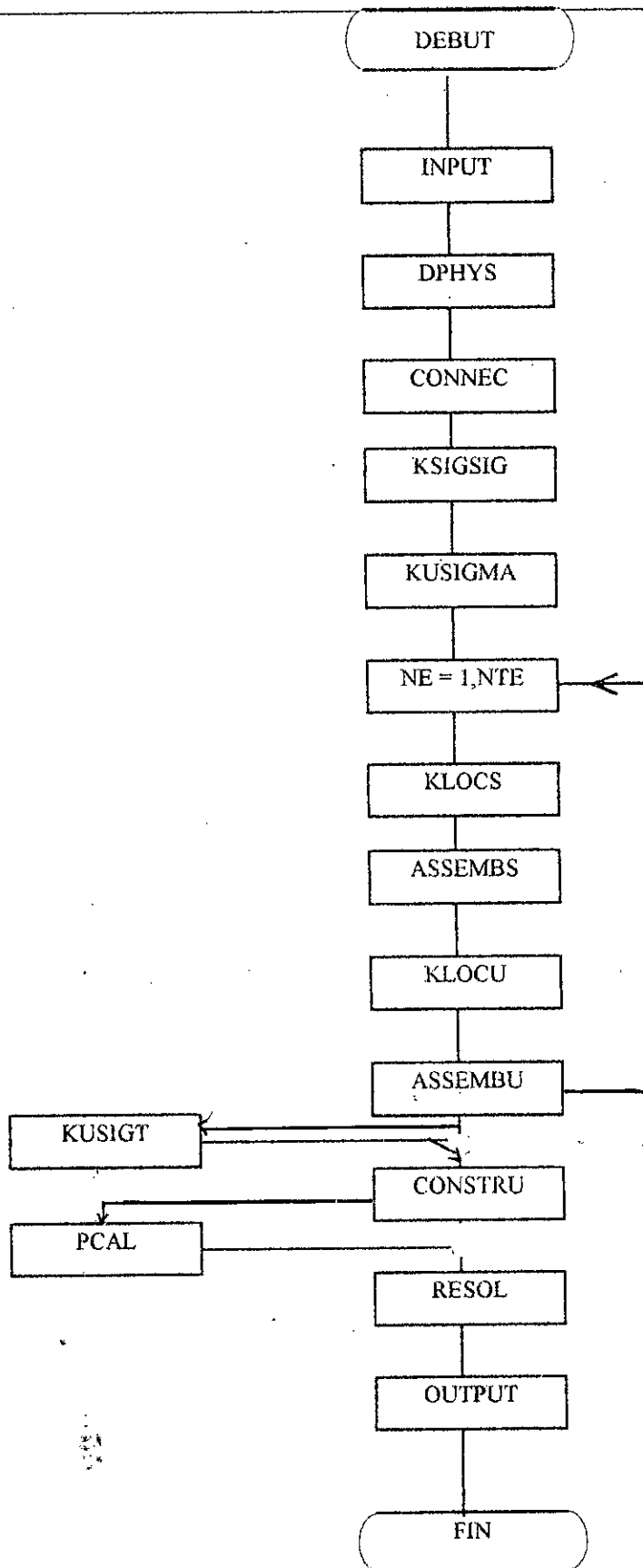
Le programme QMIXT utilise des éléments rectangulaires mixtes avec numérotation automatique.

Le programme TRIMIXT utilise des éléments triangulaires mixtes.

Le programme ISOMIXT utilise des éléments quadrilatéraux isoparamétriques à quatre noeuds.

Les deux programmes QMIXT ET TRIMIXT ont la même structure, par contre le programme ISOMIXT possède une structure un peu différente.

VI-2 Structure du programme QMIXT et TRIMIXT



(Fig VI-1) Structure globale du programme QMIXT et TRIMIXT

VI-2-1 Entrée des données:

Les données de la structure après modélisation et la lecture de ces données se fait par appel de la subroutine IN PUT.

Ces données consiste en :

1- Information générale :

ICODE : code d'étude : 0 pour l'état de contrainte plane
1 pour l'état de déformation plane.

E : modèle de YOUNG

NU : coefficient de Poisson

L,H : dimension du corps

NEX : nombre d'élément suivant x

NEY : nombre d'élément suivant y

2- Conditions aux limites:

NNR : nombre de noeuds restreints

NNCH : nombre de noeuds chargés

DPHYS : subroutine qui calcul la matrice d'élasticité [D]

KCONNEC : subroutine génère la connectivité des noeuds de chaque élément.

VI -2-2 Construction de la matrice globale:

La construction de la matrice globale reliant le vecteur forces nodales aux vecteurs variables nodales généralisées se fait en quatre étapes :

1- Construction des blocs élémentaires KUS, KSS: Elle se fait par l'appel des subroutines KUSIGMA et KSIGSIG calculant respectivement les blocs [K] [K]

2- Assemblage des blocs élémentaires : pour cela quatre subroutines sont appelées, deux pour construire le bloc global $[K_{ou}]^G$ (les subroutines KLOCU, ASSEMBU) et deux autres pour construire le bloc global $[K_{\sigma\sigma}]^G$ (les subroutines KLOCS, ASSEMBS).

3- Calcul de la transposée du bloc $[K_{ou}]^G$.

4- Arrangement des blocs globaux : Cette étape consiste à construire la matrice globale constituée de blocs globaux $[K_{ou}]^G$, $[K_{\sigma\sigma}]^G$, $[K_{ou}]^G$ (transposée de $[K_{ou}]^G$) et un bloc contenant des zéro.

VI-2-3 Prise en considération des C.A.L. :

La matrice déjà calculée est singulière, pour remédier à cela, on doit introduire les conditions aux limites cinématique. Il y'a plusieurs techniques qui traite ce problème; nous avons choisis pour notre programme la technique d'élimination. Pour cela on a fait appel à la subroutine PCAL qui élimine les lignes et les colonnes correspondantes aux degrés de liberté imposés en réarrangeant matrice, ce qui diminuera sa taille.

VI-2-4 Résolution.

Les matrices $[K]$ globales issues du principe variationnel de Reissner contrairement aux modèles classiques, ne sont pas définies positives. Cette inconstance est peu favorable à l'utilisation de l'algorithme de Gauss sans recherche de pivots non nuls qui, dans ce cas, ne donne aucune garantie quant à la non singularité de celui-ci lors des opérations d'élimination.

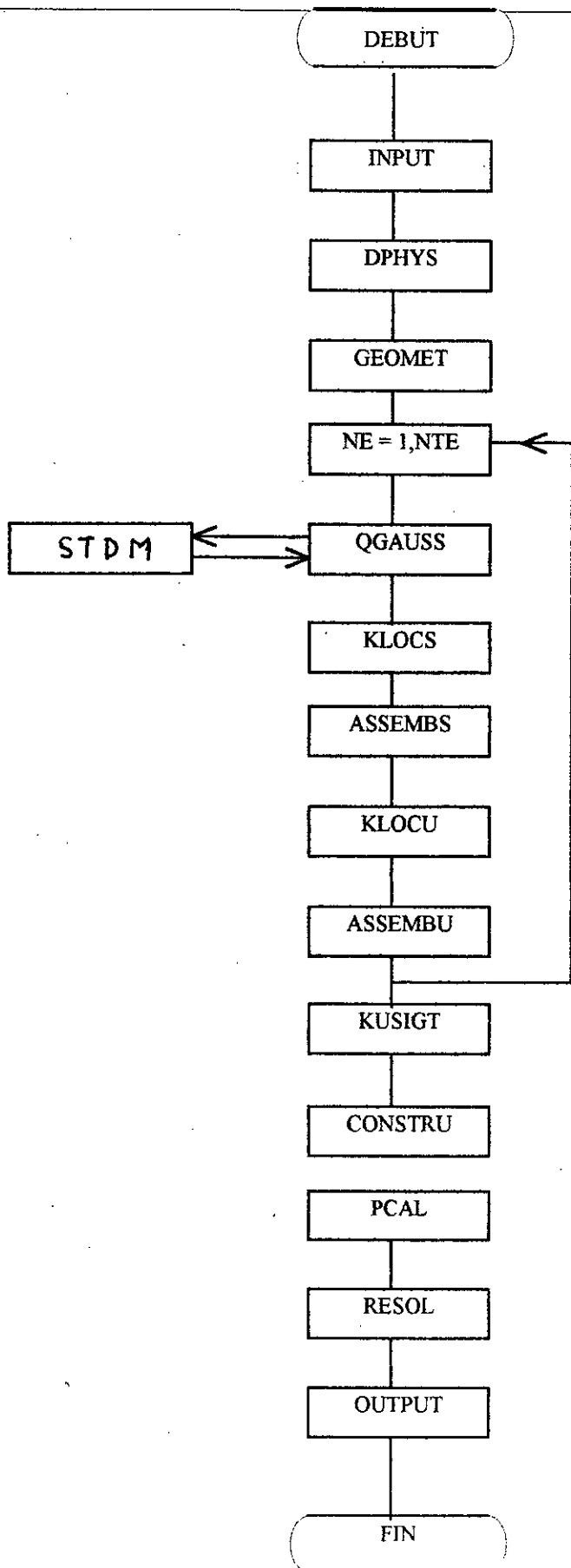
Cet inconvénient pénalise beaucoup l'emploi des méthodes mixtes et plus particulièrement quand on travaille sur micro-ordinateur. Cependant cet inconvénient peut être surmonté en utilisant l'algorithme de résolution de Gauss avec recherche de pivots. Cela suppose un support de calcul puissant si l'on veut avoir des temps de calcul raisonnables.

Toutefois une méthode classique de résolution peut être adaptée pour des modèles mixtes, en réarrangeant les blocs de la matrice globale de manière à éviter que les premiers termes diagonaux de la matrice globale soient nuls et cela en classant les variables de contraintes au début puis les variables de déplacement. Cette façon de procéder permet de placer à la fin du système global les termes à contribution nulle issus des noeuds en déplacement, qui sont souvent à l'origine de l'arrêt de la résolution.

Après résolution du système, les inconnues calculées sont stockées dans un fichier de sortie (tous les déplacements et toutes les contraintes en chaque noeud).

Remarque: le programme TRIMIXT possède en plus la sous-routine GEOMET.

VI-3 Structure du programme ISOMIXT:



(Fig VI-2) Structure globale du programme ISOMIXT

Il est à noter que la structure du programme ISOMIXT est pratiquement la même que celles des programmes AMIXT et TRIMIXT; toute fois il y'a des sous programme qui sont propres à lui.

VI-3-1 GEOMET : Subroutine permettant de lire les cordonnées des noeuds et la table de connectivités des éléments.

VI-3-2 QGAUSS : Subroutine qui calcul les blocs élémentaires $[K]$, $[K]$ grâce à l'intégration numérique de GAUSS et utilise la subroutine STD M .

VI-3-3 STD M : Subroutine qui calcul la matrice $[B]$

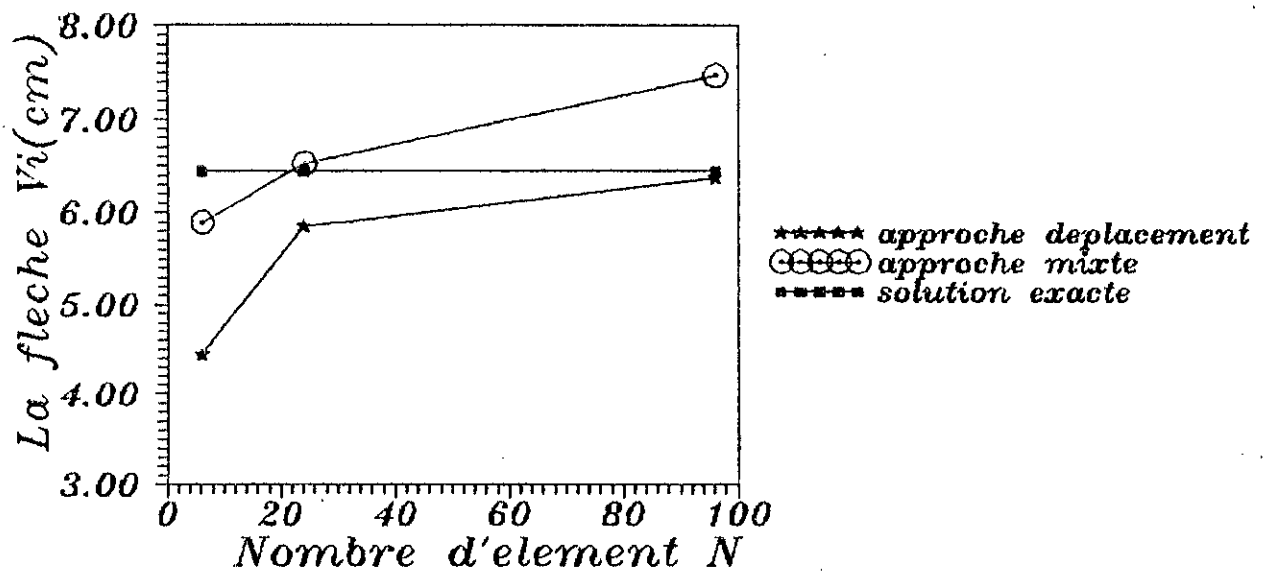
CHAPITRE VII
APPLICATIONS

x(m)	Approche Déplacement	Approche (m) Mixte	Solution (m) Exacte
0	0	0	0
2	-0.0229	-0.0254	-0.0254
4	-0.0873	-0.0968	-0.0955
6	-0.184	-0.204	-0.2015
8	-0.304	-0.338	-0.3343
10	0.440	-0.490	-0.4851
12	-0.585	-0.652	-0.6448

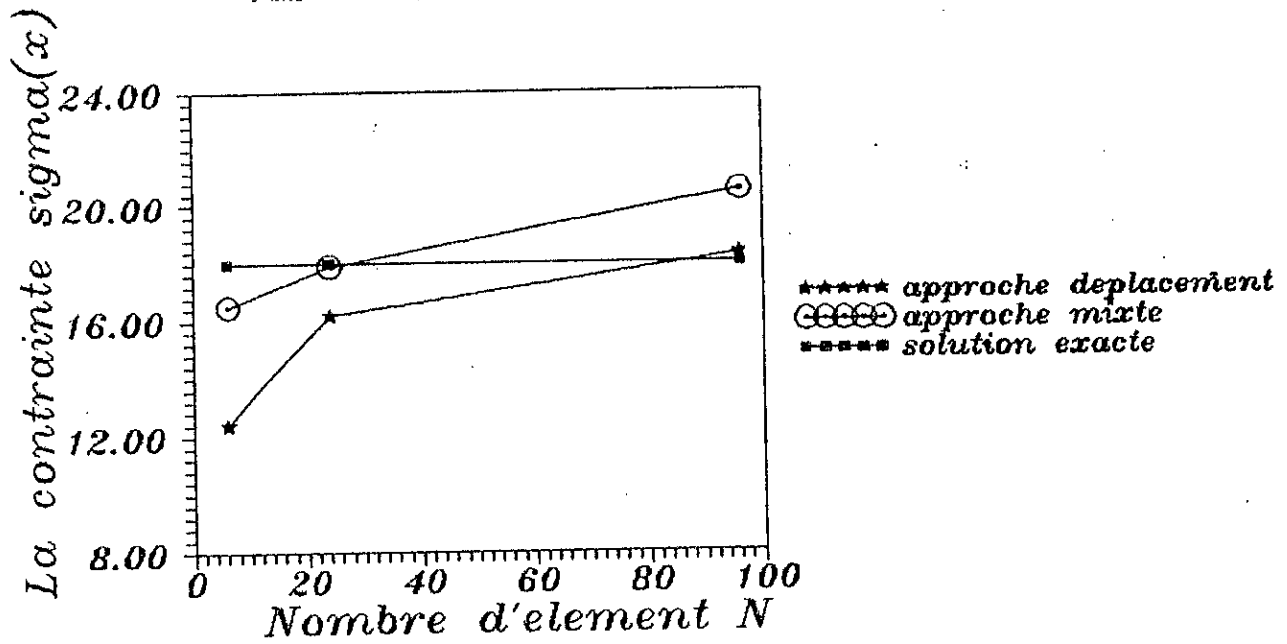
Tableau (VII-3) : La déformé de l'axe neutre. Comparaison entre les deux approches

COMMENTAIRE :

On voit que les résultats obtenus par l'approche mixte sont plus précis que ceux obtenus par l'approche déplacement, surtout ce qui concerne les déformée de l'axe neutre.



Convergence de la fleche.
 Comparaison entre les deux approches.



Convergence de la contrainte axiale.
 Comparaison entre les deux approches.

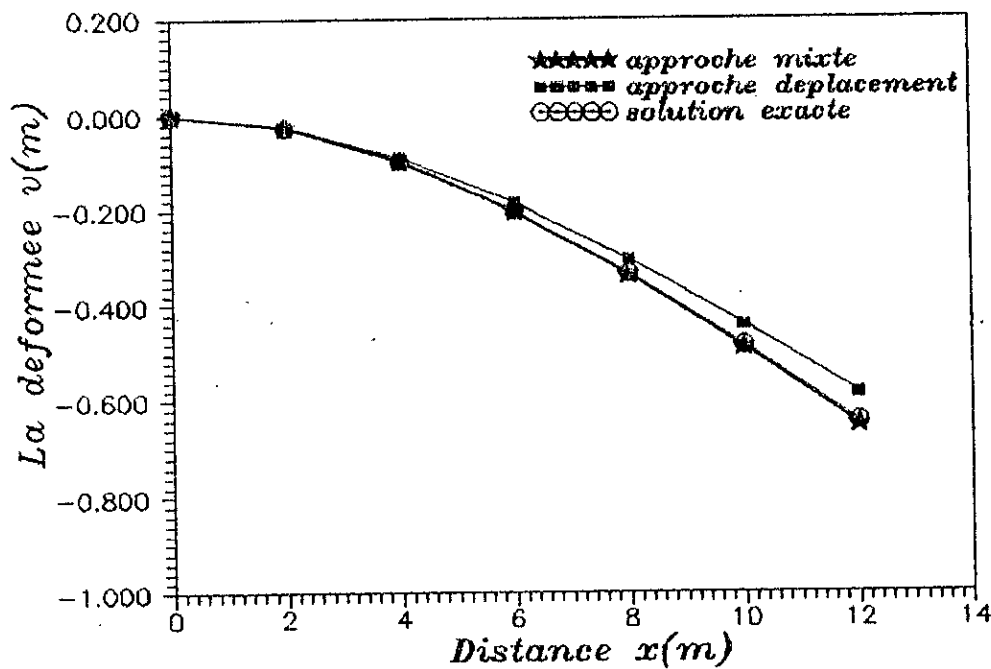
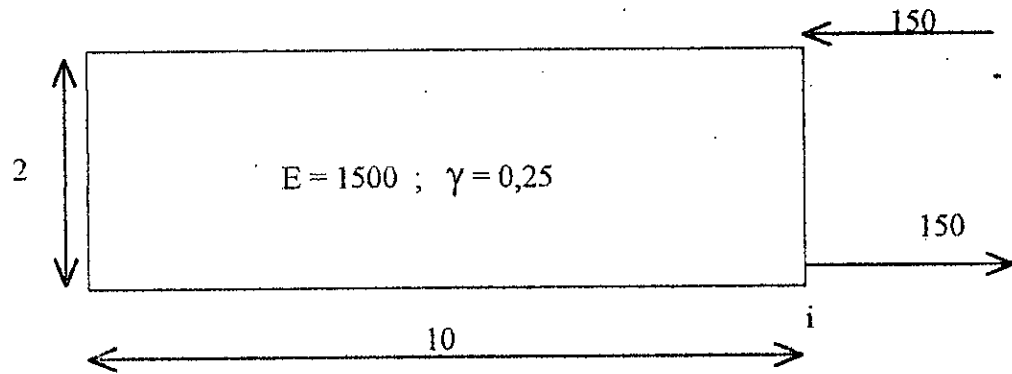


FIGURE La deformee de l'axe neutre

APPLICATION: POUTRE ENCASTREE SOUMISE A UN CHARGEMENT A L'EXTREMITE.

A- UTILISATION DES ELEMENTS QUADRILATERALES A ANGLES DROITS :



* RESULTAT :

Les tableaux suivant donnent les valeurs de la flèche au point i pour différents maillages.
La solution exacte est : $v_{iex} = 15$

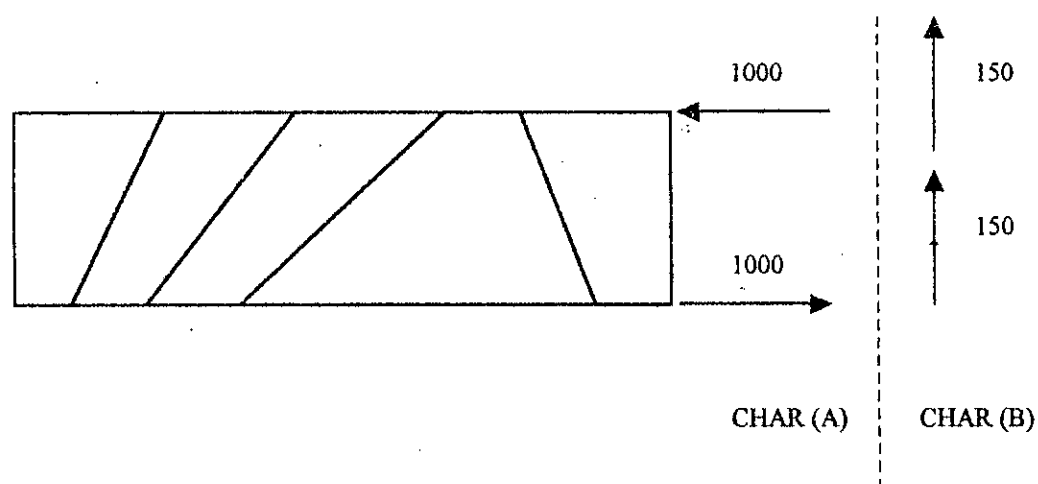
N	Les valeurs de v_i par l'approche mixte
2x2	40.7
4x2	24.6
6x2	19.3
8x2	16.6
10x2	15

Tableau (VII-4) : Convergence de la flèche par l'approche mixte

N	Les valeurs de v_i par l'approche déplacement
2x2	4.27
4x2	9.14
6x2	11.6
8x2	12.8
10x2	13.4
12x2	13.8
14x2	14.1
16x2	14.2
18x2	14.3
20x2	14.4
22x2	14.5

Tableau (VII-5) : Convergence de la flèche par l'approche déplacement

B- UTILISATION DE ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES :



*RESULTATS :

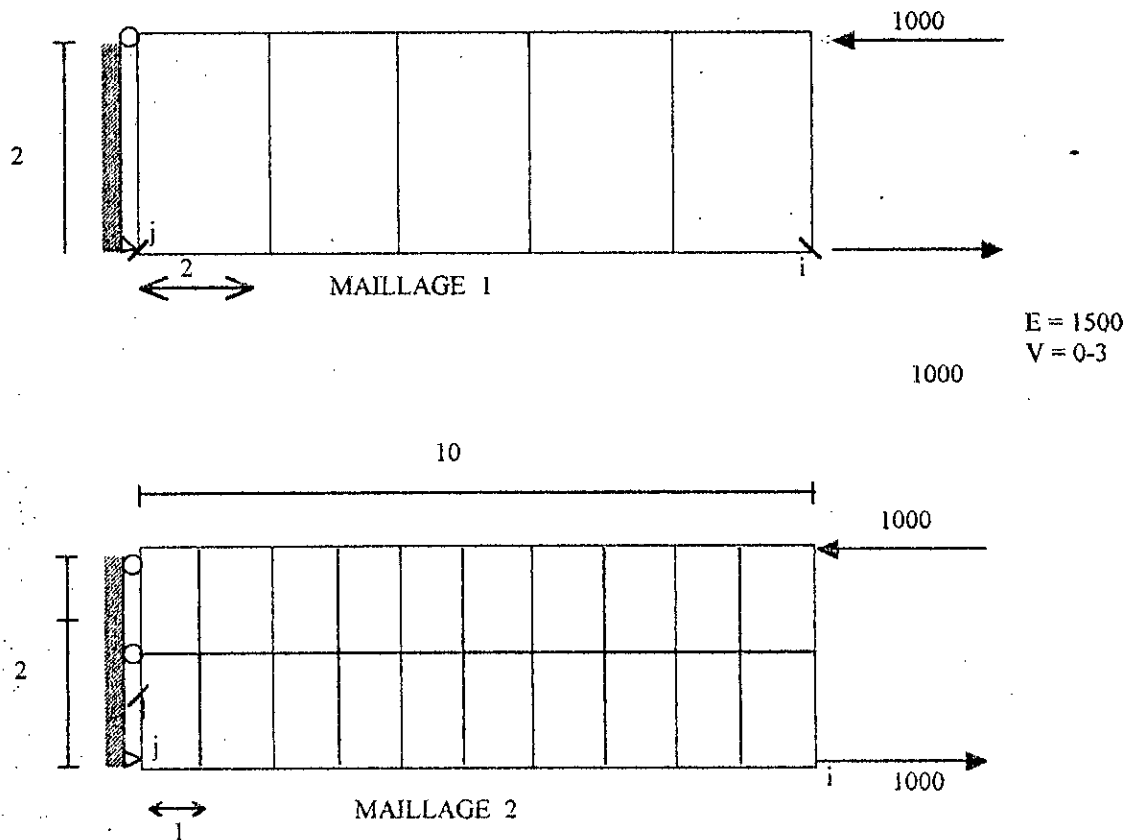
Les inconnues du probleme sont la flêche et les contraintes axiales du point A. Les resultats sont donnés sous d'un tableau :

	V_A CHAR (A)	$\xi_{x/A}$ CHAR (A)	V_A CHAR (B)
APPROCHE DEPLACEMENT	44,6	-1080	49,8
APPROCHE MIXTE	68,6	-1300	70,3
SOLUTION EXACTE	100	-3000	102,6

Tableau (VII-6) : Utilisation des elements isoparametriques. Comparaison entre les deux approches.

* COMMENTAIRE : On voit bien que nos resultats obtenus à partir de l'approche mixte sont plus performants que ceux donnés par l'approche déplacement.

APPLICATION: POUTRE EN FLEXION TRAITEE EN CONTRAINTE PLANE



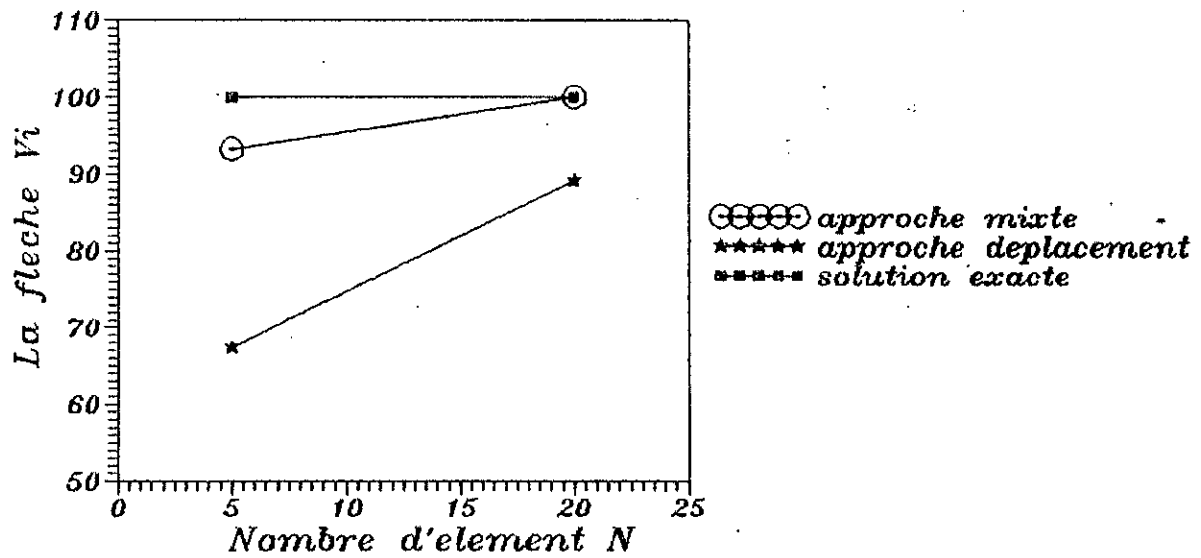
*RESULTATS :

	DEPLACEMENT EN i		contrainte de flexion en j	
	Q. MIXT. FOR	M.EFEP. FOR	Q. MIXT FOR	M.EFEP. FOR
MAILLAGE 1	93,2	67,4	2530	2220
MAILLAGE 2	100	89,2	3000	2810
SOLUTION EXACTE	100	100	3000	3000

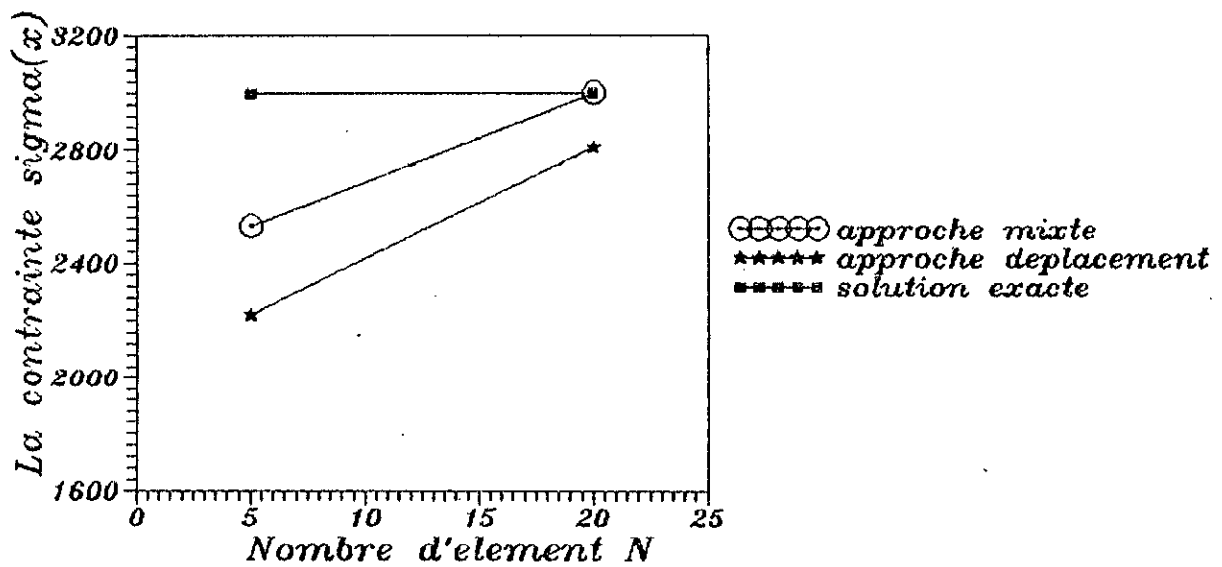
Tableau (VII-7) : Performance comparée du programme Q. MIXT-FOR de l'approche mixte

COMMENTAIRE :

D'après les résultats obtenus, on voit que notre programme a donné de très bon résultats, en déplacement et la contrainte, pour le maillage 1, on était très proche des solutions exactes, mais pour le maillage 2, on a obtenu les solutions exactes.



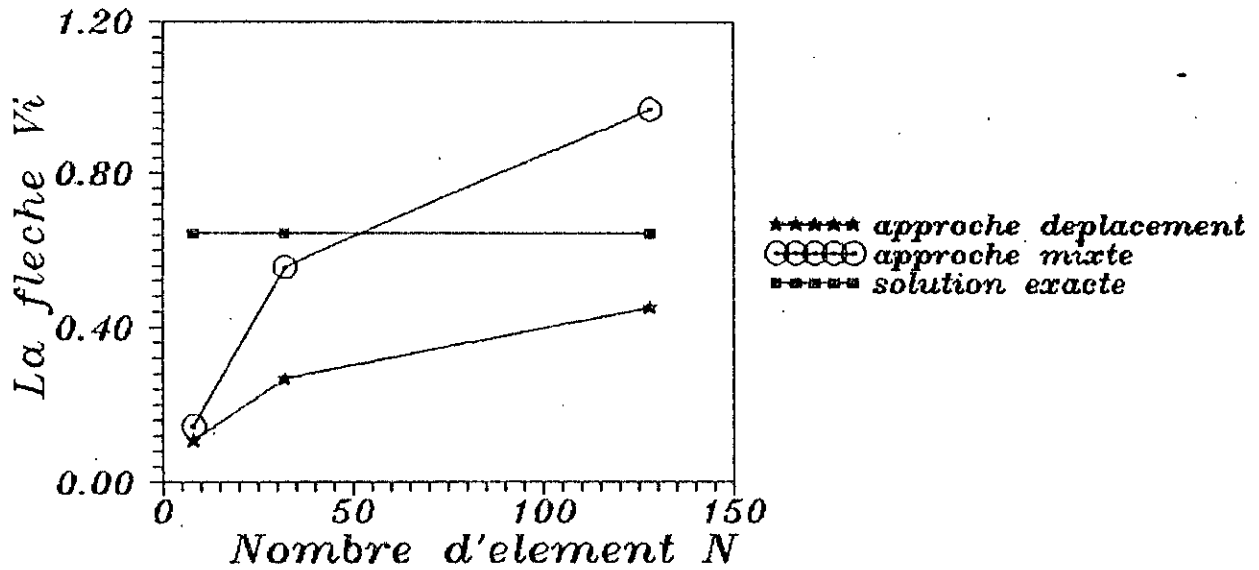
Convergence de la fleche.
 Comparaison entre les deux approches.



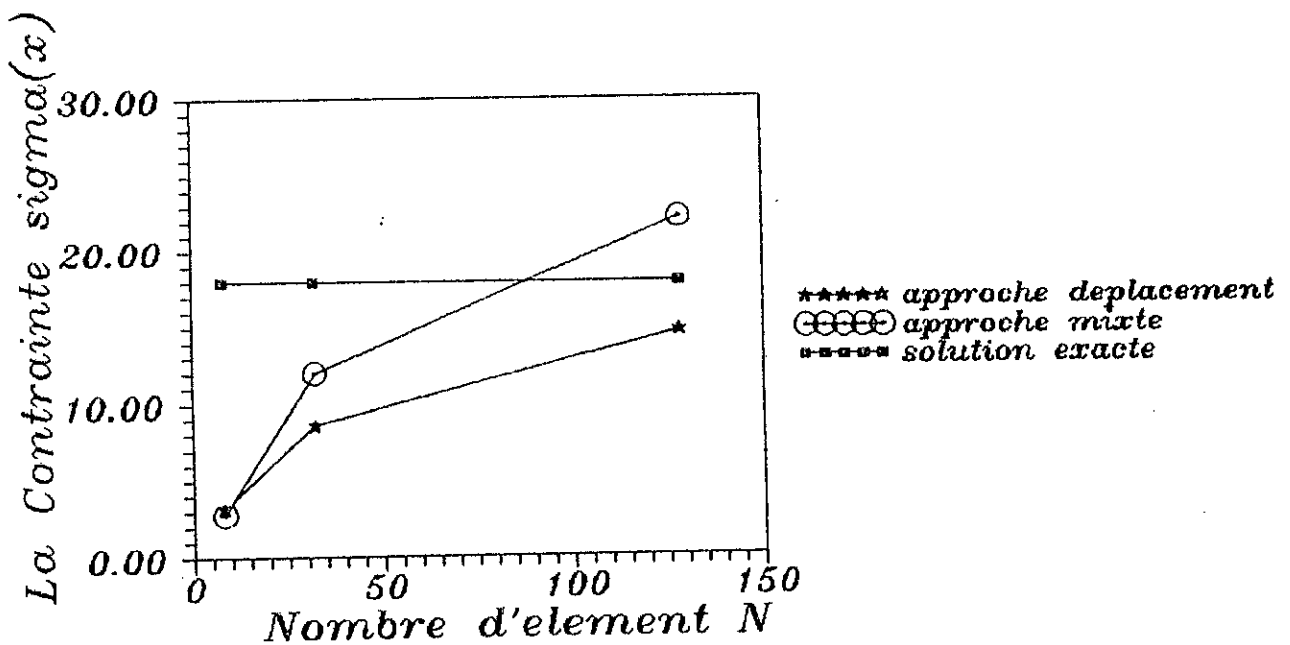
Convergence de la contrainte.
 Comparaison entre les deux approches.

COMMENTAIRE :

On voit que les résultats obtenus par le programme TRIMIXT sont plus précis que ceux obtenus par le programme TRI.

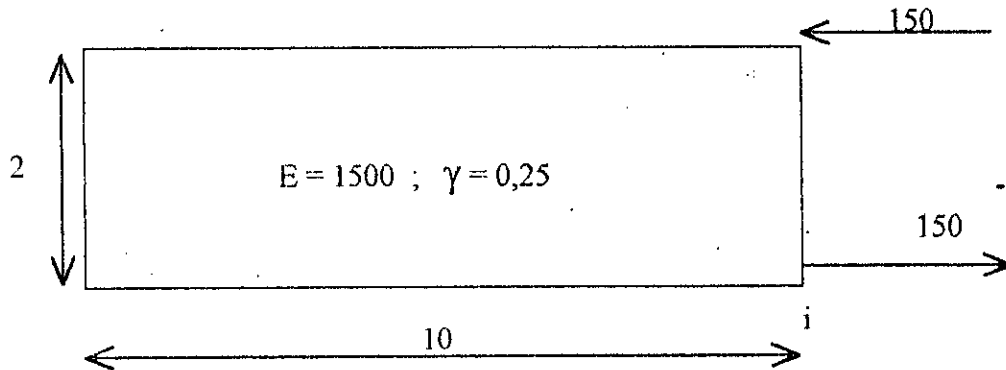


Convergence de la fleche.
 Comparaison entre les deux approches.



Convergence de la contrainte.
 Comparaison entre les deux approches.

APPLICATION: POUTRE ENCASTREE SOUMISE A UN CHARGEMENT A L'EXTREMITE.



* RESULTAT :

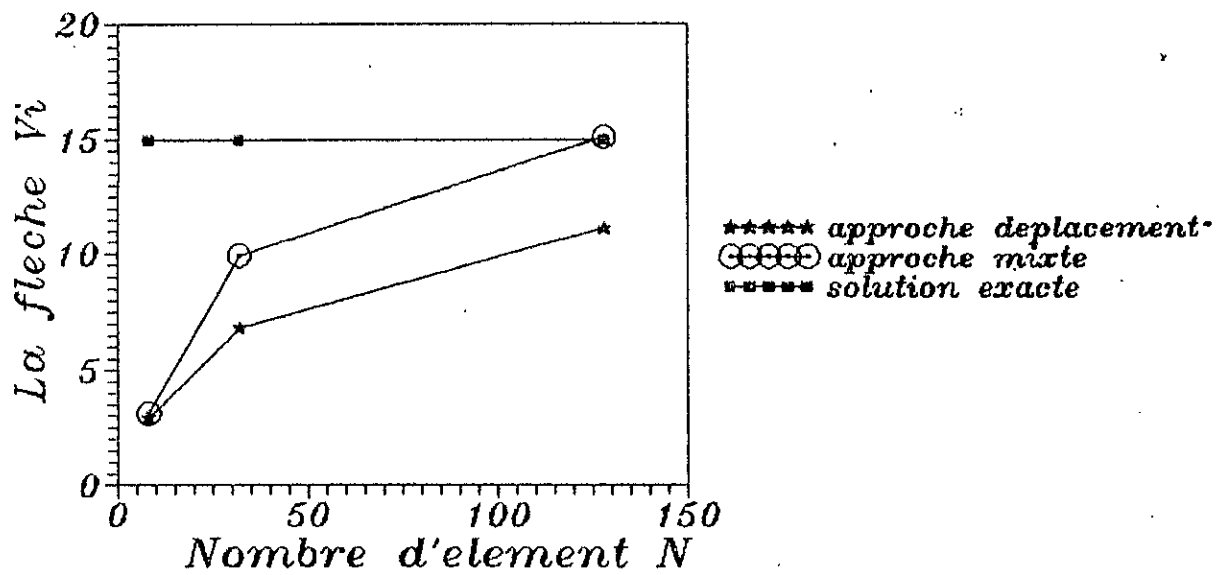
Les tableaux suivant donnent les valeurs de la flèche au point i pour différents maillages.
La solution exacte est : $v_{iex} = 15$

La flèche au point i : v_i (m)			
N	Approche Déplacement	Approche Mixte	Solution exacte
8	2,88	3,1	15
32	6,85	9,93	15
128	11,125	15,1	15

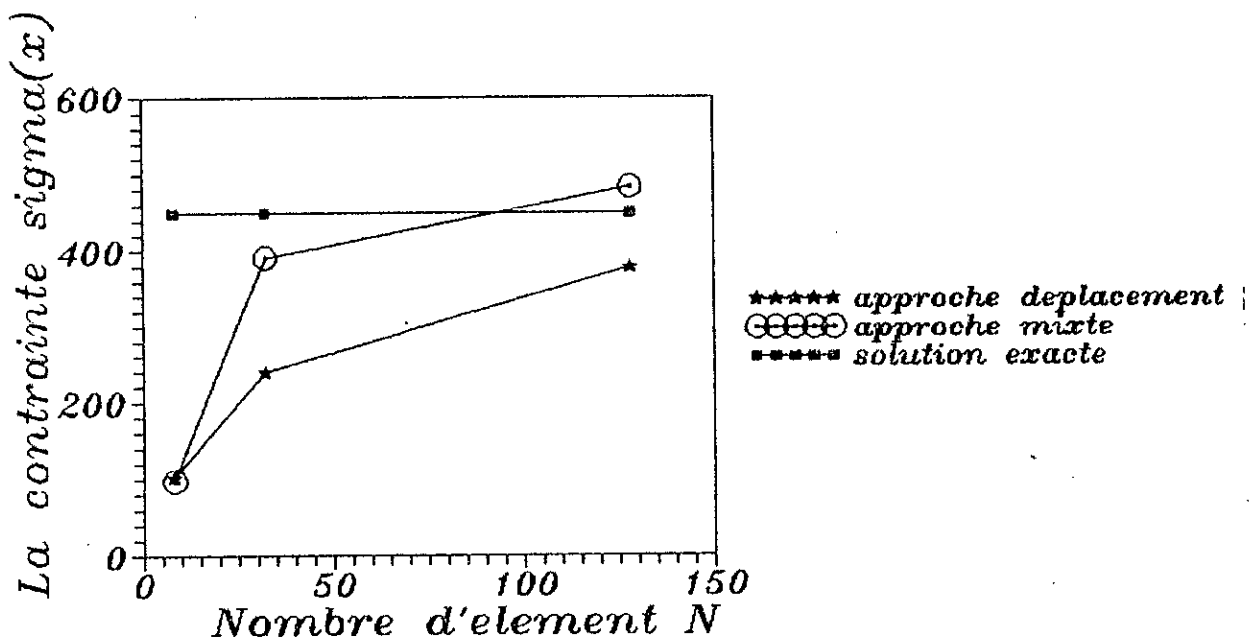
Tableau (VII-10) : Convergence de la flèche, comparaison entre les deux approches

La contrainte axiale au point j :			
N	Approche Déplacement	Approche Mixte	Solution exacte
8	102,41	97,5	450
32	239,74	391	450
128	377,67	483	450

Tableau (VII-11) : Convergence de la contrainte axiale. Comparaison entre les deux approches



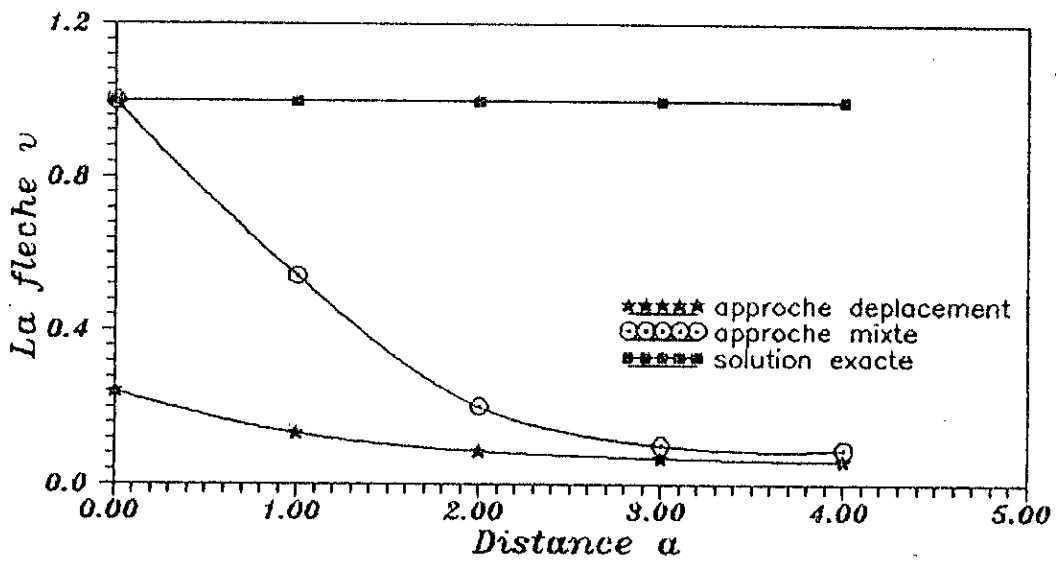
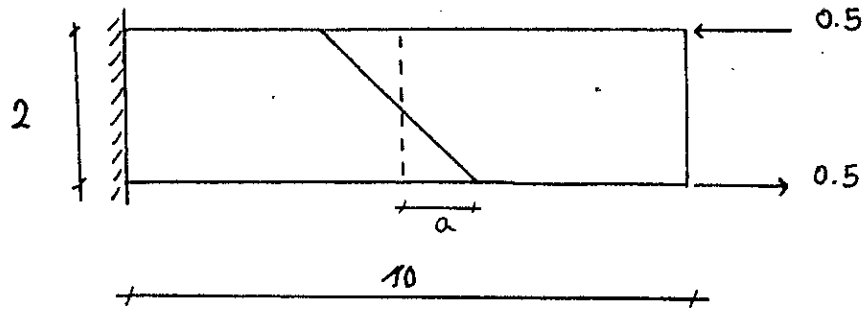
Convergence de la fleche.
 Comparaison entre les deux approches.



Convergence de la contrainte axiale.
 Comparaison entre les deux approches.

Application :

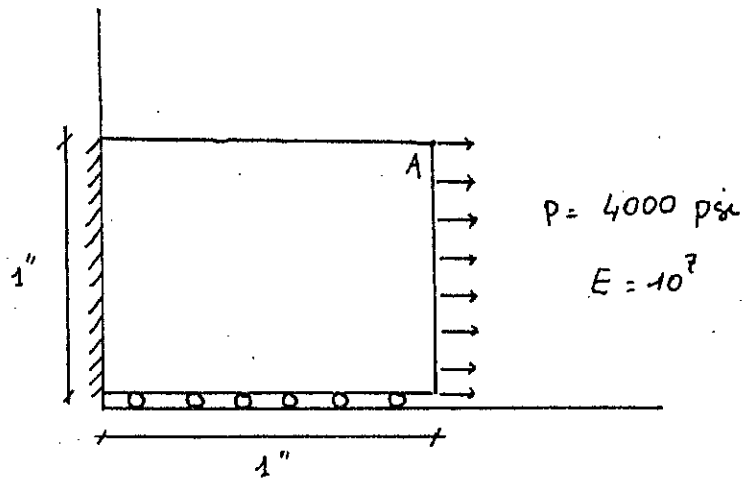
EFFET DE LA DEFORMEE DE L'ÉLÉMENT



Commentaire:

le graphe ci-dessus montre une autre fois la performance des éléments mixtes même qu'ils sont déformés.

Application sur un matériau quasi-incompressible
(Problème de déformation plane)



Dans cet exemple, on va calculer les déplacements horizontaux au point A (U_A) donnés par les deux approches, en faisant varier le coefficient de poisson ν .

Résultats obtenus :

• $\nu = 0,33$

Depl.	Mixte	Sol. de ref.
$0,356 \cdot 10^{-3}$	$0,262 \cdot 10^{-3}$	$0,185 \cdot 10^{-3}$

• $\nu = 0,49$

Depl.	Mixte	Sol. de ref.
$0,336 \cdot 10^{-3}$	$0,247 \cdot 10^{-3}$	$0,172 \cdot 10^{-3}$

• $\nu = 0,48$

Depl	Mixte	Sol. de ref.
$0,308 \cdot 10^{-3}$	$0,226 \cdot 10^{-3}$	$0,151 \cdot 10^{-3}$

• $\nu = 0,4999$

N	Depl	Mixte	Sol. de ref.
1	$0,300 \cdot 10^{-3}$	$0,220 \cdot 10^{-3}$	$0,144 \cdot 10^{-3}$
4	$0,559 \cdot 10^{-5}$	$0,213 \cdot 10^{-3}$	$0,144 \cdot 10^{-3}$
16	$0,159 \cdot 10^{-4}$	$0,372 \cdot 10^{-3}$	$0,144 \cdot 10^{-3}$

Commentaire :

Pour les trois premières valeurs de ν , nous avons utiliser un maillage avec un seul élément, nous avons constater que les résultats de l'approche mixte sont meilleurs que ceux de l'approche déplacement.

Pour la valeur $\nu = 0,499$ (matériau quasi-incompressible), nous avons utiliser 3 maillages différents et de même l'approche mixte est plus performante que l'approche déplacement.

Pour la valeur $\nu = 0,5$, c'est le blocage pour l'approche déplacement.

APPLICATION A UN BARRAGE :

Pour donner un aspect pratique à notre étude nous avons traité le cas d'un barrage plien en négligeant les forces volumiques et en utilisant les éléments isoparamétriques mixtes.

Caractéristiques du barrage :

- hauteur : 95 m
- largeur : 65m
- largeur de la crête : 8m
- hauteur de crête : 5m
- hauteur de l'eau : 90m
- poids volumique de l'eau : $1,1 \text{ t/m}^3$
- module de Young : $24 \cdot 10^5$
- coefficient de poisson : 0,30

Discretisation :

- Nombre d'éléments : 56
- Nombre de noeuds : 72
- Nombre de degrés de libertés : 360

Solution de référence :

-Le déplacement vers l'aval de la crête :

$$U_{ex} = 13,07 \text{ mm (RDM)}$$

$$U_{ex} = 14,30 \text{ mm (élasticité)}$$

- La contrainte de compression à la base:

$$\sigma_{ex} = -189,8025 \text{ t/m}^2 \text{ (RDM)}$$

$$\sigma_{ex} = -189,805 \text{ t/m}^2 \text{ (élasticité)}$$

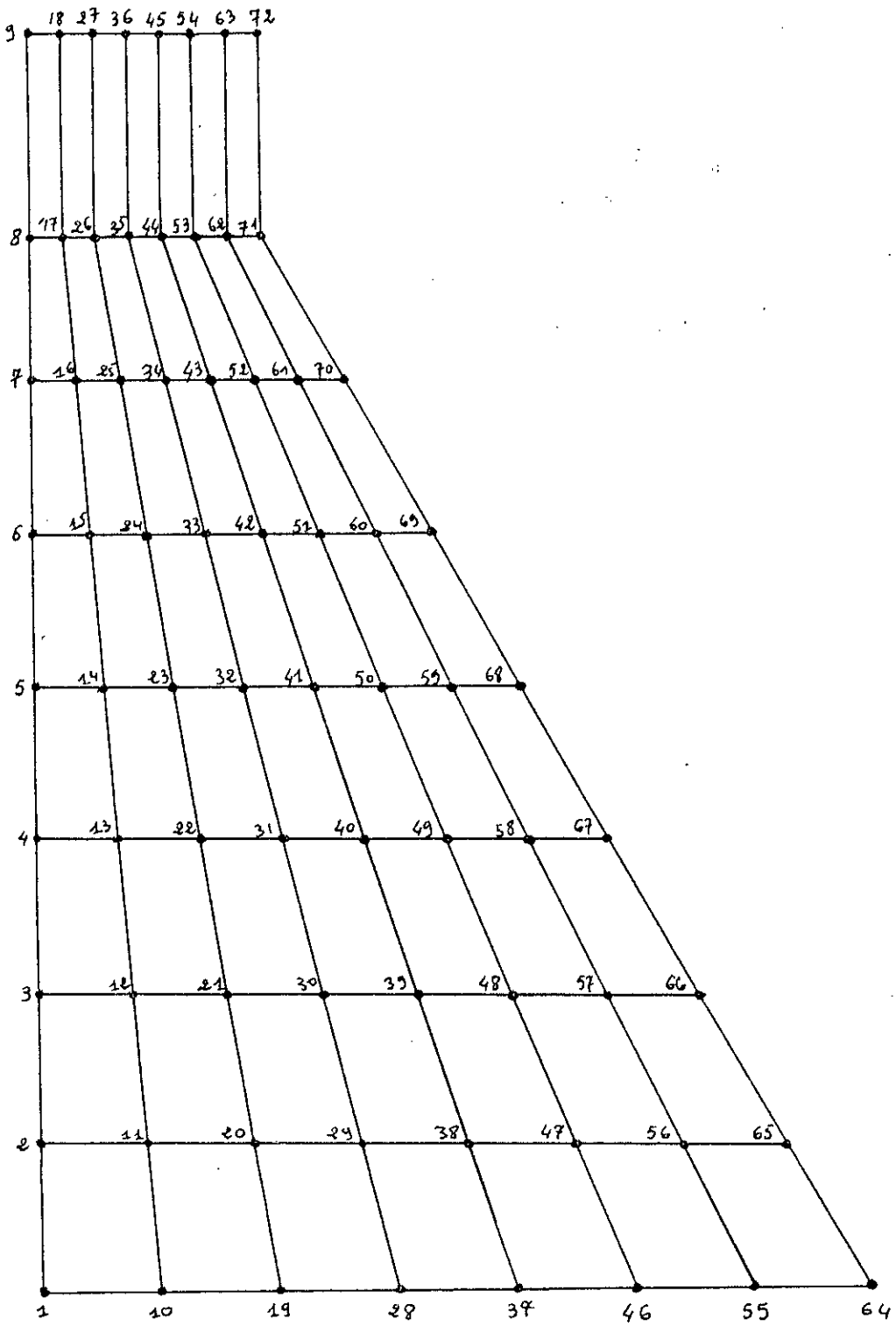
La solution éléments finis :

-Le déplacement vers l'aval de la crête :

$$U = 12,2 \text{ mm}$$

-La contrainte de compression à la base:

$$\sigma = -129 \text{ t/m}^2$$



Discretisation d'un barrage poids

Interprétation des résultats

les applications que nous avons traitées dans notre travail nous ont permis de voir le degré de puissance du modèle mixte en comparaison avec le modèle déplacement.

- * Pour les cas des poutres en flexion nous avons remarqué une convergence très rapide de la flèche ainsi que pour les contraintes à partir des éléments mixtes (avec un nombre faible de noeuds).
- * Pour l'effet de la déformée des éléments dans le cas de la poutre en flexion, nous avons remarqué que même les deux approches divergent en augmentant la déformée, les résultats de l'approche mixte restent plus acceptables que ceux de l'approche déplacement.
- * Avec les matériaux incompressibles ou quasi-incompressibles le modèle mixte s'adapte avec succès, ce qui n'est pas le cas pour le modèle déplacement qui présente un phénomène de blocage.
- * Nous avons utilisé les éléments isoparamétriques pour le calcul d'un barrage plein. Nous avons constaté qu'avec un nombre faible d'éléments les résultats sont satisfaisants (contraintes et déplacements).

Dans toutes les applications les valeurs des contraintes calculées à partir du modèle mixte sont meilleures à celles calculées à partir du modèle déplacement du fait que les contraintes sont approximées indépendamment des déplacements.

**CONCLUSION
GENERALE**

Ce travail est consacré à une étude comparative entre deux approches de la méthode des éléments finis: l'approche déplacement et l'approche mixte.

L'approche déplacement est la plus utilisable à cause de sa simplicité de point de vue formulation qui est basée sur le principe du minimum de l'énergie potentielle totale. Cette approche assure seulement la continuité du champ déplacement ce qui donne de bons résultats en déplacements, les contraintes sont calculées après dérivation des déplacements, ce qui diminue leur ordre de précision.

Par conséquent nous avons été amenés à développer un modèle basé sur le principe variationnel mixte de REISSNER qui présente les avantages principaux suivants :

- Il satisfait toutes les conditions de continuité statique et cinématique.
- Il donne directement les contraintes.
- Il converge très rapidement.

Les inconvénients de ce modèle résident dans la difficulté de résoudre le système global des équations par des méthodes de résolution classiques adaptées aux matrices définies positives, son nombre élevé de degrés de liberté (mais cet inconvénient est compensé par sa convergence très rapide).

D'après les applications que nous avons traitées, on remarque que le modèle mixte s'adapte mieux pour les matériaux incompressibles ou quasi incompressibles. Ce qui n'est pas le cas pour le modèle compatible.

L'approche mixte possède un large domaine d'application, citons quelques uns :

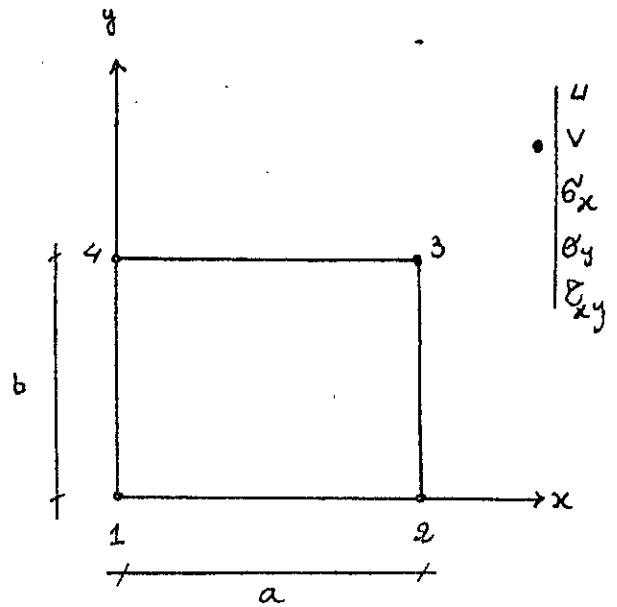
- Flexion des plaques et coques.
- Structures composites.
- assemblages collés.
- Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte dans les fissures.

Il serait intéressant d'étendre l'utilisation de l'approche mixte dans le cas dynamique, ainsi que dans le comportement plastique des structures et à l'optimisation du dimensionnement des structures hétérogènes à l'état limite.

ANNEXE A

Élément quadrilatère linéaire mixte à quatre nœuds de type REISSNER:

C'est un élément de forme rectangulaire à 20 degrés de liberté. (tous les déplacements et toutes les contraintes).



(Fig - 1)

$$[K^e]_{20 \times 20} = \begin{bmatrix} [0] & [K_{\epsilon_u}]^T \\ [K_{\epsilon_u}] & [K_{\epsilon\epsilon}] \end{bmatrix}$$

Symétrie					6x6					
					$[S^1]$					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{g}{9} D(1) ab$	$-\frac{g}{9} D(2) ab$	$-\frac{g}{9} D(3) ab$	$-\frac{g}{9} D(4) ab$	$-\frac{g}{9} D(5) ab$	$-\frac{g}{9} D(6) ab$	$-\frac{g}{9} D(7) ab$	$-\frac{g}{9} D(8) ab$	$-\frac{g}{9} D(9) ab$	$-\frac{g}{9} D(10) ab$	$-\frac{g}{9} D(11) ab$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{8r}{9} D(1) ab$	$-\frac{8r}{9} D(2) ab$	$-\frac{8r}{9} D(3) ab$	$-\frac{8r}{9} D(4) ab$	$-\frac{8r}{9} D(5) ab$	$-\frac{8r}{9} D(6) ab$	$-\frac{8r}{9} D(7) ab$	$-\frac{8r}{9} D(8) ab$	$-\frac{8r}{9} D(9) ab$	$-\frac{8r}{9} D(10) ab$	$-\frac{8r}{9} D(11) ab$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{g}{9} D(1) ab$	$-\frac{g}{9} D(2) ab$	$-\frac{g}{9} D(3) ab$	$-\frac{g}{9} D(4) ab$	$-\frac{g}{9} D(5) ab$	$-\frac{g}{9} D(6) ab$	$-\frac{g}{9} D(7) ab$	$-\frac{g}{9} D(8) ab$	$-\frac{g}{9} D(9) ab$	$-\frac{g}{9} D(10) ab$	$-\frac{g}{9} D(11) ab$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{g}{9} D(1) ab$	$-\frac{g}{9} D(2) ab$	$-\frac{g}{9} D(3) ab$	$-\frac{g}{9} D(4) ab$	$-\frac{g}{9} D(5) ab$	$-\frac{g}{9} D(6) ab$	$-\frac{g}{9} D(7) ab$	$-\frac{g}{9} D(8) ab$	$-\frac{g}{9} D(9) ab$	$-\frac{g}{9} D(10) ab$	$-\frac{g}{9} D(11) ab$

$$\begin{bmatrix}
 [K^{66}]_{12 \times 12} & \\
 & [S^1] \\
 & & [S^2] \\
 & & & [S^3]
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \text{Symétrie} & \\
 & [S^1] \\
 & & [S^2] \\
 & & & [S^3]
 \end{bmatrix}$$

$$D(3) = \frac{E}{2} (1+\nu)$$

$$D(2) = -\frac{E}{2} (1+\nu)$$

$$D(1) = \frac{E}{2} (1+\nu) (1-\nu)$$

pour état de déformation plane

$$D(3) = \frac{E}{2} (1+\nu)$$

$$D(2) = -\frac{E}{2}$$

$$D(1) = \frac{E}{2}$$

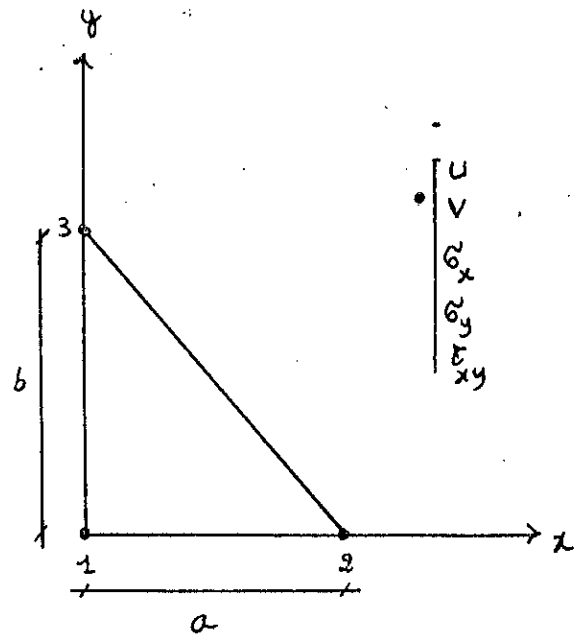
pour état de contrainte plane

$$[S]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D(2) \frac{ab}{18} & -D(1) \frac{ab}{18} & -D(1) \frac{ab}{18} & -D(2) \frac{ab}{18} & -D(1) \frac{ab}{18} & -D(2) \frac{ab}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D(1) \frac{ab}{18} & -D(2) \frac{ab}{18} & -D(1) \frac{ab}{18} & -D(2) \frac{ab}{18} & -D(1) \frac{ab}{18} & -D(2) \frac{ab}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D(3) \frac{ab}{36} & -D(1) \frac{ab}{36} & -D(2) \frac{ab}{36} & -D(1) \frac{ab}{36} & -D(2) \frac{ab}{36} & -D(3) \frac{ab}{36} \end{bmatrix}$$

ANNEXE B

Élément triangulaire linéaire mixte à trois nœuds de type REISSNER:

C'est un élément de forme triangulaire à angle droit et à 15 degrés de liberté (tous les déplacements et toutes les contraintes)



(Fig - 2)

$$[K^e]_{15 \times 15} = \begin{bmatrix} [0] & [K_{\sigma u}]^T \\ [K_{\sigma u}] & [K_{\sigma \sigma}] \end{bmatrix}$$

$$[K_{20}]$$

$$3 \times 6$$

$$=$$

1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0

$$[K_{66}] = 9 \times 9$$

$-D(1) \frac{ab}{12}$	$-D(2) \frac{ab}{12}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0
$-D(1) \frac{ab}{12}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	0
$-D(3) \frac{ab}{12}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	0	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$
$-D(1) \frac{ab}{12}$	$-D(2) \frac{ab}{12}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0
$-D(1) \frac{ab}{12}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	0
$-D(3) \frac{ab}{12}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$
$-D(1) \frac{ab}{12}$	$-D(2) \frac{ab}{12}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0
$-D(1) \frac{ab}{12}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	0
$-D(3) \frac{ab}{12}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$
$-D(1) \frac{ab}{12}$	$-D(2) \frac{ab}{12}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0
$-D(1) \frac{ab}{12}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	0
$-D(3) \frac{ab}{12}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$
$-D(1) \frac{ab}{12}$	$-D(2) \frac{ab}{12}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0	$-D(1) \frac{ab}{24}$	$-D(2) \frac{ab}{24}$	0
$-D(1) \frac{ab}{12}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	$-D(2) \frac{ab}{24}$	$-D(1) \frac{ab}{24}$	0	0
$-D(3) \frac{ab}{12}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$	0	$-D(3) \frac{ab}{24}$

Symétrie

Les valeurs de $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$, pour les deux états de contrainte et de déformation plane sont données dans l'annexe A.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AKAY H.U "dynamic large deflexion analysis of plates using mixed finite elements"
- [2] ALMIKDAD.M "formulation et évaluation d'un élément quadrilatéral plan pour l'analyse linéaire de coques", mémoire de DEA mécanique des solides et des structures 1994.
- [3] BATHE K.G "numerical method in finite element analysis" Prentice -hall, New Jersey.
- [4] BATOZ J.L et G.DHATT, "modélisation des structures par la méthodes des éléments finis" Hermes, Paris 1990.
- [5] DHATT.G et G.TOUZOU "presentation de la méthode des éléments finis", maloine S.A éditeur , Paris (1979).
- [6] LEAL R.P and CA MOTA SOARES "mixed elemnts in the optimal design of plates", strtuctural optimization . 1,127-136 (1986).
- [7] MALKUS SDAVID and THOMAS J.R.HUGUES "mixed finit element methods-reduced and selective integration : a unification of concepts", compute methods in applied mechanics and engineering 15 (1978) 63-81.
- [8] ODEN J.T and J.N REDDY "short communications. some observations on properties of certain mixed finite element approximations", Int.J.Num.Meth. engng vol 9, 933-949 (1975).
- [9] PIAN T.M.M and PIN TONG "basis of finit element methods for solid continua", Int-J Num . Meth engng, vol, 1, 3-28 (1969).
- [10] PIAN T.M.M " variational formulations of finit elements in structural machnics" IAP (1989).
- [11] PIAN T.M.M "improvement of plate and shell finite elements by mixed formulations", AIAA journal, vol 16 N°1, january 1978.
- [12] ROCKEY KC, M.R EVANS, D.W.GRIFFITHS et D.A NETHERCIOT " introduction à la méthode des éléments finis", Eyrolles, Paris (1979).
- [13] SAMA.O et M.BERBAS "analyse des problèmes de l'élasticité bidimensionnelle par la méthodes des éléments finis et la méthode des équations intégrales et leur couplage", thèse d'ingénieur à l'E.N.P (1993).
- [14] SARHAN BAJBOUJ A. "éléments finis d'interface pour le calcul des structures hétérogènes", thèse de doctorat, université Claude Bernard, Lyon. 18 décembre 1990.
- [15] TIMOSHENKO S.P "théorie de l'élasticité", librairie polytechnique CH-BERANGER (1948).
- [16] TIMOSHENKO S.P et COODIER J.N "théorie de l'élasticité", Mc Graw-Hill, Tokyo.
- [17] YANG T.Y "finit element structural analysis", Prentice Hall, Englwood Cliffs, New Jersey (1986).
- [18] ZIENKIEWICZ O.C et R.L TAYLOR "la méthode des éléments finis : formulation de base et problèmes linéaires", Coll.AFNOR, 1991.
- [19] ZIENKIEWICZ O.C, LI XI-KUI and S.NAKAZAWA "iterative solution of mixed problems and the stress recovery procedurs", communication in applied numerical methods, vol. 1, 3-9 (1985).