

4/95
RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE CIVIL

BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Thème :

*Etude Comparative D'un Tablier
de Pont-Dalle Courbe par la
Méthode de Guyon-Massonnet et
la Méthode des Eléments Finis.*

Proposé par :

La S.A.P.T.A

Etudié par :

BENGUERGOURA Mohamed Cherif
MECHETI Othmane

Dirigé par.:

Mr. R. BAYASLI
Mr. B. ZEGHLACHE

Promotion : JUILLET 1995

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

- *A mes parents*
- *A notre très chère et regretté El Mezouar MISSOUM.*
- *A mes adorables neveux,*
- *A tous ceux qui nous aiment.*

Je dédie ce mémoire

Mohamed Cherif

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- *Mes parents.*
- *Mes soeurs .*
- *Mes frères.*
- *Tous ceux qui me sont très chers*

Othmane

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à remercier notre promoteur Monsieur Rachid BAYASLI pour nous avoir encadré et confié un aussi important travail, et pour qui nous exprimons nos sincères reconnaissances.

Nos remerciements vont également à notre co-promoteur Monsieur B. ZEGHLACHE et aux membres de jury, pour l'honneur qu'il nous ont accordé en acceptant d'examiner notre travail.

Nous exprimons toute notre gratitude aux enseignants du département de Génie-Civil spécialement Monsieur L. LEFKI pour l'aide qu'il nous a apportée pour la réalisation de ce projet.

Nous remercions vivement pour toute l'aide que nous avons trouvé auprès d'eux :

- Monsieur BOUGHOUFFALA
- Abchiche Hakim.
- Belkheir Kamel
- Salhi Adel.
- Guettouche Ali.

Nous profitons par la même occasion, pour remercier Monsieur Boumehdi Mourad pour le remarquable travail qu'il a effectué pour nous.

Nos chaleureux remerciements vont à tous nos camarades qui nous ont soutenus moralement.

Nous remercions enfin l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.

TABLE DES MATIERES PARTIE I

- INTRODUCTION :	1
I - PRESENTATION DE L'OUVRAGE :	3
I-1. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DE LA DALLE :	3
I-2. CALCUL DE LA LARGEUR DE LA DALLE EQUIVALENTE :	5
I-3. DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES MECANQUES DE LA DALLE:	6
I-3.1. module de déformation longitudinale du béton de la dalle : E	6
I-3.2. module de déformation transversale du béton de la dalle : G	7
II - CHARGES ET SURCHARGES :	8
II-1. CHARGES PERMANENTES :	8
II-2. LES SURCHARGES :	8
III - LIGNES D'INFLUENCE DU MOMENT :	13
III-1. NOTION DE LIGNE D'INFLUENCE :	13
III-2. DETERMINATION DE L'EFFET D'UNE CHARGE DONNEE :	14
III-2.1. - Charges concentrées :	14
III-2.2. - Charges réparties :	15
III-3. LIGNE D'INFLUENCE DANS UNE SECTION D'ABSCISSE x D'UNE POUTRE CONTINUE :	16
III-3.1. Détermination des rapports focaux :	16
III-3.2. Ligne d'influence des moments aux appuis :	16
III-3.3. Ligne d'influence dans une section d'abscisse x dans la travée n° I	17
:	:
III-4. CALCULS DES MOMENTS DE FLEXIONS EN TRAVEES :	19
III-4.1. calculs des moments au droit de la section $s_x = 0,4 l$	19
III-5. CALCUL DES MOMENTS DE FLEXION AUX APPUIS :	26
III-5.1. calcul des moments dus aux surcharges sur l' appui N°1 :	26
IV - ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA COURBURE EN PLAN :	30
IV-1. <u>INTRODUCTION</u> :	30
IV-2. <u>NOTATIONS ET HYPOTHESES DE L'ETUDE</u> :	30
IV-3. <u>EQUATIONS ELEMENTAIRES D'EQUILIBRE</u> :	33
IV-4. ETUDES DES DEFORMATIONS EN L'ABSENCE DE GAUCHISSEMENT NON UNIFORME :	35
IV-5. QUELQUES APPLICATIONS PARTICULIERES :	38
IV-6. EFFET D'UN CHARGEMENT PAR UNE DENSITE UNIFORME FZ=-Q CENTREE :	39
IV-6.1. effet d'une charge concentrées :	40

V - RAPPELS SUR LE CALCUL DES POUTRES CONTINUES	43
V-1. POUTRES CONTINUES SUR APPUIS SIMPLES :	43
V-2. LA FORMULE DES TROIS MOMENTS (FORMULE DE CLAPEYRON) :	43
V-3. CAS DES POUTRES CIRCULAIRES CONTINUES :	45
VI - CALCUL DES MOMENTS LONGITUDINAUX :	48
VI-1. CALCUL DES ROTATIONS AUX APPUIS SOUS DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENT :	48
VI-1.1. charge uniformément répartie :	48
VI-2. CHARGES CONCENTREES	48
VI-3. CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE :	49
VI-4. CALCUL DES ROTATIONS D'APPUIS SOUS LA CHARGE PERMANENTE :	50
VI-5. CALCUL DES CONSTANTES MECANIQUES :	53
VI-6. CALCUL DES MOMENTS AUX APPUIS SOUS LES DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENTS :	55
VI-7. DETERMINATION DU MOMENT MAX EN TRAVEE SOUS LES DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENT :	57
VII - REPARTITION TRANSVERSALE DU MOMENT DE FLEXION LONGITUDINAL:	63
VII-1. DETERMINATION DES PARAMETRES ET	63
VII-1.1. calcul des rigidites flexionelles	65
VII-1.2. calcul des rigidites torsionelle	66
VII-2. CALCUL DE K a:	66
VII-3. CALCUL DE K a moy:	67
VIII - EFFORT TRANCHANT ET REACTION D'APPUIS :	70
VIII-1. LIGNE D'INFLUENCE DDE L'EFFORT TRANCHANT :	70
VIII-2. EFFORT TRANCHANT DANS UNE POUTRE CONTINUE :	70
VIII-2.1. effort tranchant pour les charges uniformement reparties :	71
VIII-2.2. effort tranchant pour le convoi mc120 :	74
IX - REPARTITION TRANSVERSALE DE L'EFFORT TRANCHANT ET REACTION D'APPUI :	80
IX-1. EFFORT TRANCHANT :	80
IX-1.1. calcul du coefficient de répartition transversal pour l'effort tranchant :	80
IX-1.2. calcul de pour les différents cas de chargement :	81
IX-2. REACTIONS D'APPUI :	82
IX-2.1. calcul de	83
IX-2.2. calcul des coefficients pour les différents cas de chargement :	83
X - CALCUL DES MOMENTS TRANSVERSAUX :	86

X -1. CALCUL DE Pm POUR CHAQUE CAS DE CHARGE :	86
X -1.1. charge partiellement répartie :	86
X -1.2. charge uniformément répartie :	86
X -1.3. charges concentrées :	87
X -2. CALCUL DES MOMENTS M_y :	87
X -2.1. exemple de calcul :	87
XI - MOMENT DE TORSION DU A L'EXCENTREMENT DES CHARGES:	92
XI -1. CALCUL DES M_{xy} POUR LES DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENTS :	93
XI -2. CALCUL DU COEFFICIENT DE REPARTITION :	93
XII - ETUDE DE LA TORSION DUE A LA COURBE :	95
XII -1. EXPRESSION DU MOMENT DE TORSION :	95
XII -1.1. charge uniformément répartie centrée :	95
XII -1.2. charge concentrée centrée repérée par l'angle :	95
XII -2. DETERMINATION DU MOMENT MAX EN TRAVEE :	96
XIII - CALCUL AUX DENIVELLATIONS D'APPUIS ET AUX VERRINAGE:	104

TABLE DES MATIERES PARTIE II

I - THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE :	107
I-1. INTRODUCTION :	107
I-2. ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT	107
I-2.1. TENSEUR CONTRAINTE :	107
I-2.2. EQUATIONS D'EQUILIBRE:	109
I-3. ETAT DE DEFORMATION:	109
I-3.1. TENSEUR DEFORMATION:	109
I-3.2. EQUATION DE COMPATIBILITE:	113
I-4. LOIS CONSTITUTIVES : LOI DE HOOKE.	114
I-5. EQUATIONS GENERALES DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE:	117
I-5.1. APPROCHE BASEE SUR LES CONTRAINTES:	118
I-5.2. APPROCHE BASEE SUR LES DEPLACEMENTS:	119
I-6. PROBLEMES DE L'ELASTICITE PLANE:	119
I-6.1. CONTRAINTE PLANE:	119
I-6.2. DEFORMATION PLANE:	120
I-6.3. FONCTION DE CONTRAINTE D'AIRY:	121
II - FLEXION DES PLAQUES	122
II-1. INTRODUCTION	122
II-2. PLAQUES MINCES AVEC FAIBLE FLECHE : THEORIE DE KIRCHOFF	123
II-3. PLAQUES EPAISSES : THEORIE DE MINDLIN :	124
II-3.1. DEPLACEMENTS, DEFORMATIONS ET CONTRAINTES :	124
II-3.2. EFFORTS INTERNES :	126
II-3.3. EQUATION D'EQUILIBRE :	127
II-4. CONDITIONS AUX LIMITES :	128
II-4.1. BORDS ENCASTREE:	128
II-4.2. BORD SIMPLEMENT APPUYE:	129
II-4.3. BORDS LIBRES :	129
II-5. METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTES :	129
II-5.1. METHODES VARIATIONELLES :	129
II-5.2. METHODES NUMERIQUES :	130
III - METHODE DES ELEMENTS FINIS	131
III-1. INTRODUCTION :	131

TABLE DES MATIERES PARTIE III

I - COMPARAISON DES RESULTATS :	146
I-1. MOMENT DE FLEXION LONGITUDINAUX	147
I-1.1. CHARGE PERMANENTE CP :	147
I-1.2. SURCHARGE DE TROTTOIR : ST	148
I-1.3. SURCHARGE A (L) :	149
I-1.4. SURCHARGE M_{C120} :	150
I-1.5. COMBINAISON DE CHARGES POUR LE MOMENT EN TRAVEE:	151
I-1.6. COMBINAISON DE CHARGES POUR LE MOMENT SUR APPUIS:	152
I-2. REPARTITION TRANSVERSALE DU MOMENT DE FLEXION LONGITUDINALE:	153
I-3. REACTIONS D'APPUI :	154
I-4. MOMENT DE TORSION DU A L'EXCENTREMENT DES CHARGES :	156
I-5. MOMENT DE TORSION DU A LA COURBURE :	157
I-6. MOMENT TRANSVERSAL :	159
I-7. TASSEMENT D'APPUI :	159
- CONCLUSION :	160
- BIBLIOGRAPHIE	
- ANNEXE	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PARTIE I

INTRODUCTION :

Si la résistance des matériaux (R.D.M) classique a, en particulier, pour objet la détermination des sollicitations et des contraintes dans les poutres, elle repose cependant sur un certain nombre d'hypothèses et d'approximations que l'on oublie parfois.

Depuis longtemps, l'analyse structurale des ponts a été développée dans le contexte de la R.D.M à l'aide de modèles mécaniques plus ou moins simplifiés, et on ne pouvait juger de la qualité des résultats jusqu'à l'apparition des méthodes et programmes numériques qui sont utilisés à grande échelle de nos jours car ils ont maintes fois prouvé leur efficacité.

Les tabliers de ponts courbes sont des structures tridimensionnelles dont l'état de sollicitation résultant des divers actions auxquelles elles sont soumises ne peut être évalué avec précision qu'à l'aide de méthodes numériques sophistiquées ou même de programme de calcul aux éléments finis.

La méthode des éléments finis qui a suivi l'avènement de l'ordinateur comme outil de calcul indispensable, a permis d'établir et de résoudre les équations gouvernantes de problèmes complexes de manière très efficace.

Cependant, pour un ouvrage donnée, il appartient au projeteur d'apprécier la validité de la méthode qu'il souhaite employer, en fonction des dispositions géométriques et mécaniques prévues pour le tablier, et c'est dans ce but précis qu'une étude comparative entre la méthode classique de calcul des tabliers de ponts (pont courbe dans notre cas) dite de Guyon-Massonnet et la méthode des éléments finis, nous a été confiée par le département études de la S.A.P.T.A (Société Algérienne des Ponts et Travaux d'Art) afin de visualiser l'ordre de grandeur de la différence entre les deux méthodes point de vue sollicitations.

Le tablier courbe que nous allons analyser est formé par une dalle pleine nervurée, cependant quelques approximations seront faites pour des raisons de commodité d'étude.

Le travail que nous allons effectuer se divise comme le titre du projet l'indique en trois grandes parties qui sont :

- La méthode de Guyon-Massonnet.
- La méthode des éléments finis.
- Comparaison des résultats.

La première partie basée principalement sur la méthode des forces comprend une analyse longitudinale du tablier selon un modèle de poutre puis à l'aide de la méthode de Guyon-Massonnet on s'intéressera à son comportement dans le sens transversal pour apprécier le caractère bidimensionnel de ce fonctionnement.

La deuxième partie basée, elle, sur la méthode des déplacements, est la méthode des éléments finis qui est un outil informatique très puissant pour l'analyse des structures complexes dans le cas de milieux continus. Le principe de cette méthode est de considérer la structure comme un assemblage d'éléments reliés entre eux par des noeuds, de résoudre le système linéaire $F = K.U$ avec :

- F : vecteur forces nodales
- K : matrice de rigidité globale de la structure
- U : vecteur déplacements nodaux

et enfin, à partir des déplacements déduire les contraintes et les efforts ainsi que les déformations dans chaque élément.

La troisième partie consiste à comparer les principaux résultats obtenus par les deux méthodes à l'aide de tableaux et de graphiques, de les interpréter, et par conséquent pouvoir enfin juger de l'efficacité des deux méthodes, appliquées à un tel problème en respectant bien sûr, quelques règles de bon sens.

Nous rappelons toutefois que le travail que nous allons faire n'inclut pas l'étude de la précontrainte pour les raisons suivantes :

- La tâche la plus importante lors de l'étude d'un tablier de pont est la détermination en premier lieu des efforts sollicitant cette structure. Ceux-ci seront pris en compte par la suite pour l'étude de la précontrainte.

- Le torseur des sollicitations de la précontrainte se réduit à un effort normal de compression, à un moment de flexion et enfin à un moment de torsion. Nous estimons que l'inclusion de ces efforts dans notre étude n'aura pas grand effet sur l'erreur entre les deux méthodes utilisées.

CHAPITRE I

I- PRESENTATION DE L'OUVRAGE :

Le travail que nous allons effectuer consiste à déterminer les sollicitations dans le tablier de l'échangeur O.A.O5B situé à SIDI MABROUK wilaya de CONSTANTINE.

Cet ouvrage d'art a une portée de 214 m.

TRACE EN PLAN :

L'ouvrage en plan est constitué de sept travées dont une est droite (travée N° 7) et les six autres courbes. La première travée a un rayon de 60 m et les autres travées courbes ont un rayon constant de 89,5 m.

PROFILS EN TRAVERS :

La chaussée est à sens unique de 5,50 m de largeur avec deux trottoirs de largeur respectives 3,25 m et 1,22 m.

DEVERS :

Le dévers varie de 2,5 % à 5 % car on a un raccordement d'un alignement droit de rayon infini avec une courbe circulaire de rayon constant.

TABLIER :

Le tablier est constitué de sept travées de portées respectives : 28.570 m, 32.442 m, 32.175 m, 32.142 m, 34.755 m, 19.822 m. La structure porteuse du pont est constituée d'une dalle continue reposant sur huit appuis car la dalle résiste bien à la torsion et est d'une esthétique meilleure.

Nous rappelons toutefois que l'ensemble des travées est formé d'une dalle pleine d'épaisseur constante $e = 1,50$ m.

I-1 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DE LA DALLE :

RAPPELS :

* Moment d'inertie d'une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h :

$$I_G = \frac{(b.h^3)}{12}$$

* Moment d'inertie d'une section triangulaire de base b et de hauteur h :

$$I_G = \frac{(b.h^3)}{36}$$

* Moment d'inertie d'une section circulaire de rayon R :

$$I_G = \frac{\pi.R^4}{4}$$

Remarque : Les formules des moments d'inertie sont toutes données par rapport au centre de gravité de la section considérée.

NOTATIONS:

* Y_i : Ordonnée du centre de gravité de la section N° i par rapport à l'axe (Δ)

* d_i : Distance entre l'axe passant par le centre de gravité de la section n° i et l'axe passant par le centre de gravité de toute la section.

* I_{Gi} : Moment d'inertie de la section (i) par rapport à son centre de gravité.

Quelques formules nécessaires :

a - Ordonnée du centre de gravité : $Y_G = \frac{\sum_i Y_i S_i}{\sum_i S_i}$

b - Moment d'inertie de la section totale : $I_{GX} = \sum_i (I_{Gi} + S_i d_i^2)$

Calcul des différentes caractéristiques géométriques :

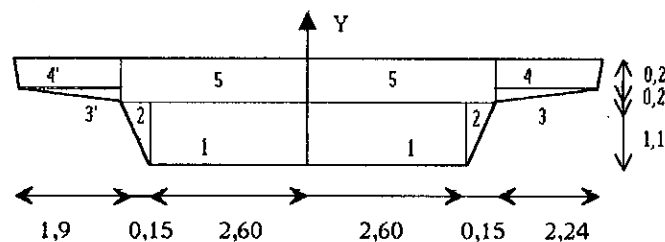


Fig 1-1 : Caractéristiques géométriques de la section de la dalle

a - Calcul de Y_G : $Y_G = \frac{\sum Y_i S_i}{\sum S_i} = \frac{7,7967807}{9,327} = 0,836 m$

$$Y_G = 0,836 m$$

b - Calcul de la surface de la dalle :

$$S = \sum_{i=1} S_i = 9,327 m^2$$

c - Calcul du moment d'inertie de la section de la dalle :

N° de la section	$Y_i / O (m)$	$S_i (m^2)$	$Y_G (m)$	$I_{Gx} \cdot 10^{-3} (m^4)$	$S_i (Y_i - Y_G) m^4$	$I / G (m^4)$
1	0,550	2,860	0,836	288,38	0,2339	0,5223
2	0,733	0,0815		5,54	0,00087	0,00641
3	1,233	0,224		0,497	0,0353	0,0358
3'	1,233	0,190		0,420	0,02999	0,0304
4	1,400	0,448		1,490	0,14250	0,1440
4'	1,400	0,380		1,266	0,12080	0,1220
5	1,300	1,100		14,660	0,23680	0,2514

$$I_{Gx} = \sum (I_{Gi} + S_i d_i^2) = 1,8925 m^4$$

1-2 CALCUL DE LA LARGEUR DE LA DALLE EQUIVALENTE :

Afin de tenir compte de la participation des encorbellements à la flexion générale qui a pour effet de réduire la torsion de la dalle, on attribue à la dalle avec encorbellements, la notion de " dalle équivalente " de la section rectangulaire, présentant même inertie que la dalle avec encorbellements et dont l'épaisseur est celle de la dalle centrale .

Soit $2b$ la largeur droite de la dalle équivalente rectangulaire, cette valeur $2b$ est intermédiaire entre la largeur droite du tablier (dalle centrale + encorbellements) et la largeur gauche de celle ci; on aura alors :

Le moment d'inertie de la dalle avec encorbellement : I_{Gx} (calculé précédemment)

Le moment d'inertie de la dalle équivalente : $\frac{(2b).(e)^3}{12}$

$$I_{Gx} = \frac{(2b).(e)^3}{12} \Leftrightarrow 2b = \frac{12I_{Gx}}{e^3}$$

AN : $e = 1,50 \text{ m}$; $I_{Gx} = 1,8925 \text{ m}^4$

$$2b = \frac{12 \cdot 1,8925}{(1,50)^3} = 6,7288 \text{ m}$$

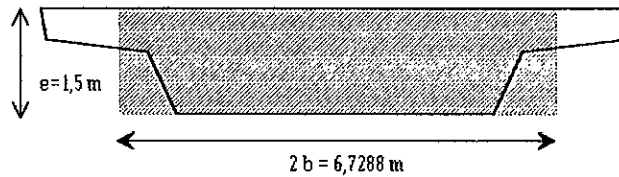


Fig 1-2 Schéma de la dalle équivalente

I-3 DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES MECANIQUES DE LA DALLE:

I-3.1 MODULE DE DEFORMATION LONGITUDINALE DU BETON DE LA DALLE : E

a - Charges de courtes durée :

Le temps nécessaire au développement du fluage est très grand devant la durée d'application de ces charges.

On considère donc, que la déformation maximale du béton est supposée égale à la déformation élastique instantanée : $\epsilon_{b, \max} = \epsilon_{b, \text{elast}}$

$$E = E_i = 392874,02 \text{ Kg / cm}^2$$

Dans la construction des ponts routes, les charges suivantes sont de courtes durée.

- Les surcharges du trafic ou les surcharges mobiles.
- Les charges dues aux séismes et aux vents.
- Les efforts de démarrages et de freinages.

b- Charges de longues durées :

Ce sont les charges permanentes et constantes. Pour ce type de charges, la déformation du béton est supposée égale à la déformation élastique différée,

$$\text{donc : } E = E_v = \frac{E_i}{3}.$$

$$E_v = 130958 \text{ Kg / cm}^2$$

I-3.2 MODULE DE DEFORMATION TRANSVERSALE DU BETON DE LA DALLE : G

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Avec : ν : coefficient de poisson $\nu = 0,2$ pour le béton.

$$E = E_i = 392874,02 \text{ Kg / cm}^2$$

$$\text{Donc } G = 163697,51 \text{ Kg / cm}^2$$

Constante de torsion K :

$$K = \beta \cdot B \cdot h^3 \quad B = 6,7288 \text{ m} \quad h = 1,5 \text{ m}$$

β est un coefficient qui dépend du rapport $\frac{B}{h}$ (donné par les tableaux)

$$\frac{B}{h} = 4,48 \quad , \quad \beta = 0,286 \quad (\text{ après interpolation linéaire entre } \frac{B}{h} = 4 \text{ et } \frac{B}{h} = 6)$$

$$\text{Donc } K = 6,49$$

1 - RIGIDITE A LA FLEXION EI :

$$1 - E_i \cdot I = 7435140,83 \text{ tm}^2$$

pour les charges de courtes durées.

$$2 - E_v \cdot I = 2631672,815 \text{ tm}^2$$

pour les charges de longues durées.

2 - RIGIDITE A LA TORSION UNIFORME : G.K

$$G.K = 1063211,10 \text{ Kg / cm}^2$$

CHAPITRE II

II - CHARGES ET SURCHARGES :

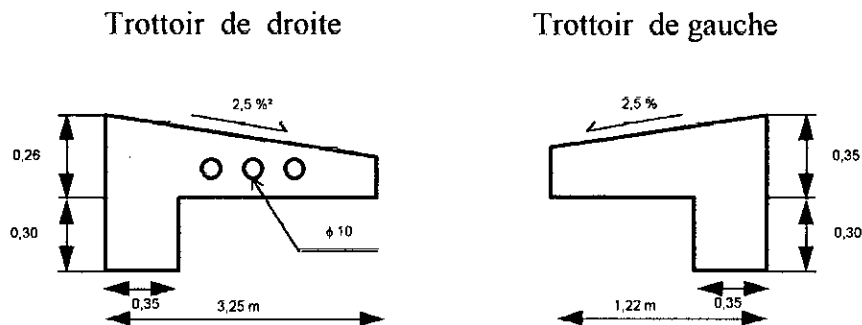
II -1 CHARGES PERMANENTES :

a - La dalle : Section de la dalle : $S = 9,327 \text{ m}^2$

Masse volumique du béton : $\rho = 2,5 \text{ t/m}^3$

Donc $\rho = 23,32 \text{ t/m}^3$

b - Les trottoirs et les corniches :



$$S_{T\text{DROITE}} = 1,11 \text{ m}^2$$

$$S_{T\text{GAUCHE}} = 0,501 \text{ m}^2$$

$$P_{Tr} = (S_{TD} + S_{TG}) \rho = 4,02 \text{ t/ml}$$

c - Gardes corps + Glissières : $P_s = 2 \cdot 0,16 = 0,32 \text{ t/ml}$

d - Revêtement + Chape d'étanchéité :

$e_r = 0,08 \text{ m}$; $l = 5,5 \text{ m}$; $\rho_r = 2,2 \text{ t/m}^3$ (masse volumique du béton).

Donc $P_r = 0,968 \text{ t/ml}$

D'où le poids propre du tablier : $P_p = P + P_{Tr} + P_g + P_r$

$$= 23,32 + 4,02 + 0,32 + 0,968$$

$$= 28,625 \text{ t/ml}$$

II -2 LES SURCHARGES :

Largeur roulable et largeur chargeable : Dans notre cas la largeur roulable est égale à la largeur chargeable et vaut $5,5 \text{ m}$; $l_c = l_r = 5,5 \text{ m}$

Détermination du nombre de voies de circulation : n

$$n = \text{partie entière du quotient : } \frac{\text{Largeur Chargeable } l_c}{3} \quad \text{Si } l_c \geq 6 \text{ m}$$

Or : $5,5 m \leq l_c \leq 6 m$ donc on a deux voies de circulation $n = 2$

Classe du pont :

Le pont étant un échangeur comportant deux voies de circulations, il est donc classé par les documents techniques comme un pont de première classe

Etude des charges :

Les charges pour lesquelles on doit effectuer le calcul sont celles décrites dans le fascicule 61 titre II du C.P.C relatif aux ponts routes . Ces charges sont les suivantes :

* Charges routières normales : - Système de charges A

- Système de charges B (Bc , Br et Bt)

* Charges routières à caractères particuliers : - Charges militaires (Mc et M_E)

- Charges exceptionnelles (convoi D)

* Charges sur les trottoirs et les pistes cyclables.

* Charges dues aux effets du vents et des séismes.

Remarque :

Nous nous restreindrons dans notre étude au calcul pour les charges A(I) , Bc , Mc₁₂₀ et ST (Surcharge de trottoirs) car ces charges sont les plus répandues et leurs combinaisons provoquent généralement l'effet le plus défavorable sur le pont.

A - Charges routières normales :

Elles comprennent deux systèmes de charges qui sont le système A et le système B (surcharges de chaussée) non applicable simultanément.

a - Système A : La chaussée supporte une charge uniforme qui est employée pour la justification de la stabilité d'ensemble. La charge $A(l)$ exprimée en Kg / m^2 est fonction de la longueur chargée L de la surface positive de la ligne d'influence exprimée en mètre (m)

$$A_1(l) = 230 + \frac{36000}{L+12} (Kg/m^2)$$

Cette formule tient compte des majorations pour effet dynamique.

Les règles de détermination des zones à charger de manière à produire l'effet le plus défavorable sont :

1 er Cas ; sens transversal : Il faut charger un nombre entier de voies de circulation , en fonction de la classe du pont et de la largeur des voies. La surcharge $A(l)$ est multipliée par deux coefficients a_1 et a_2 définis comme suit :

a_1 : tiré du tableau en fonction de la classe du pont et du nombre de voies.

$$a_2 = \frac{l_0}{l_v} \quad \text{Avec } l_0 = 3,5 \text{ m (Pont de première classe)}$$

$$l_v : \text{Largeur de la voie } l_v = \frac{l_c}{n}$$

Pour notre cas $a_1 = 1$ et $a_2 = 1$

$$\text{Soit } A(l) = A_1(l) \cdot a_1 \cdot a_2$$

2^{ème} cas : sens longitudinal :

Les limites des zones à charger correspondent aux zéro des lignes d'influence pour les surfaces positives.

b - SYSTEME Bc : ce système est employé pour la stabilité locale des éléments du tablier. Il représente un camion de poids total de 30 tonne, soit un essieu avant de 6 tonnes et deux essieux arrières de 12 tonnes chacun.

Disposition du système Bc :

* Dans le sens transversal : le nombre de files qu'on peut disposer est égal au nombre de voies de circulation.

* Dans le sens longitudinal : le nombre de camions par file est limité à deux.

REMARQUE : Tous les camions sont orientés dans le même sens.

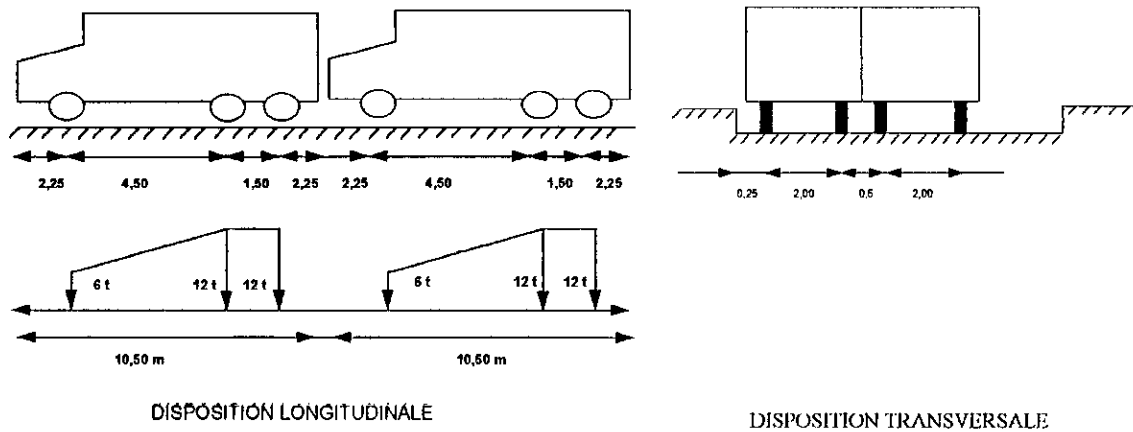


Fig 2 - 1 DISPOSITION LONGITUDINALE ET TRANSVERSALE

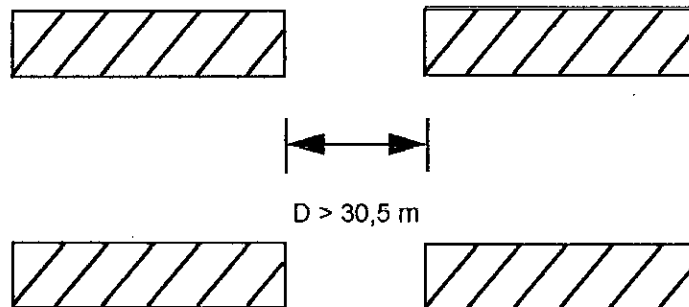
B - Charge militaire $M_{C_{120}}$:

Les charges militaires sont souvent les plus défavorables pour les éléments de couverture (dalle) aux ossatures des tabliers. Il est à noter que le char $M_{C_{120}}$ ne développe pas de force de freinage ou de force centrifuge. Le poids du char $M_{C_{120}}$ est de 110 tonnes, soit 55 tonnes pour chaque chenille.

Disposition du système $M_{C_{120}}$

* Dans le sens transversal: un seul char est supposé circuler sur le pont quelque soit la largeur de la chaussée.

* Dans le sens longitudinal, le nombre de chars est illimité, toutefois la distance libre entre eux doit être égale à au moins égale à 30,5 m



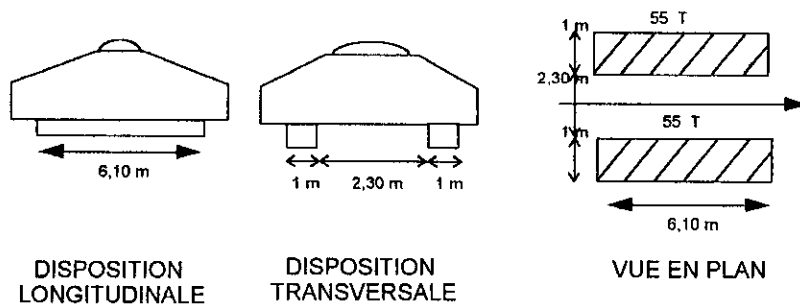


FIG 3 - 2 Disposition du char M_c120

c - Surcharge de trottoirs :

Cette surcharge n'est pas affecté par un coefficient de majoration dynamique et existe sous deux formes.

1 - Charges locales: utilisées pour la justification des éléments du tablier. La valeur de la surcharge dans ce cas vaut $450 \text{ Kg} / \text{m}^2$.

2 - Charges générales : Pour la justification des fermes qui supportent une chaussée et un ou deux trottoirs. On applique alors une densité de charge de $150 \text{ Kg} / \text{m}^2$ de façon à produire l'effet le plus défavorable, cette charge est cumulable avec les charges générales de chaussée A et B. C'est cette charge qu'on prendra en compte dans notre étude.

CHAPITRE III

III -LIGNES D'INFLUENCE DU MOMENT :

INTRODUCTION :

L'utilisation des lignes d'influence permet de localiser les sections les plus sollicitées pour chaque travée du pont, ainsi de déterminer les charges produisant l'effet le plus défavorable.

Pour la détermination des lignes d'influence, on assimile le pont courbe à un pont droit, soit dans notre cas, à une poutre reposant sur huit appuis dont la portée de chaque travée est égale à la longueur de la ligne moyenne de la travée courbe correspondante.

III -1 NOTION DE LIGNE D'INFLUENCE :

On doit chercher la variation du moment de flexion et de l'effort tranchant dans une section Σ d'abscisse x d'une poutre droite $A_0 A_1$, lorsqu'une charge unité se déplace sur cette poutre.

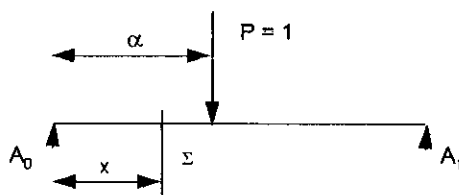


Fig 3 - 1 Position de la charge unitaire

Principe de superposition :

Une charge p_i d'abscisse α_i produit un moment $p_i y_i$ et un effort tranchant $p_i y'_i$. Le système total des charges produit un moment :

$$M(x) = \Sigma p_i y_i \text{ et un effort tranchant : } T(x) = \Sigma p_i y'_i .$$

La ligne d'influence du moment fléchissant dans la section Σ d'abscisse x est donné la formule suivante :

$$M(x, \alpha) = \begin{cases} \alpha \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{si } \alpha \leq x \\ \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) \cdot x & \text{si } \alpha \geq x \end{cases} \quad (3-1)$$

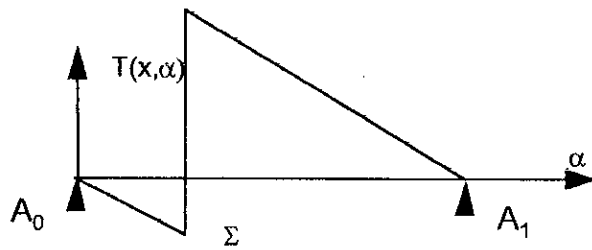


Fig (3 - 2) Ligne d'influence du moment fléchissant dans la section Σ

La ligne d'influence de l'effort tranchant dans la section Σ d'abscisse x est donnée par la formule:

$$T(x, \alpha) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{l} & \text{pour } \alpha \leq x \\ 1 - \frac{\alpha}{l} & \text{pour } \alpha \geq x \end{cases} \quad (3-2)$$

III -2 DETERMINATION DE L'EFFET D'UNE CHARGE DONNEE :

III -2.1 - CHARGES CONCENTREES :

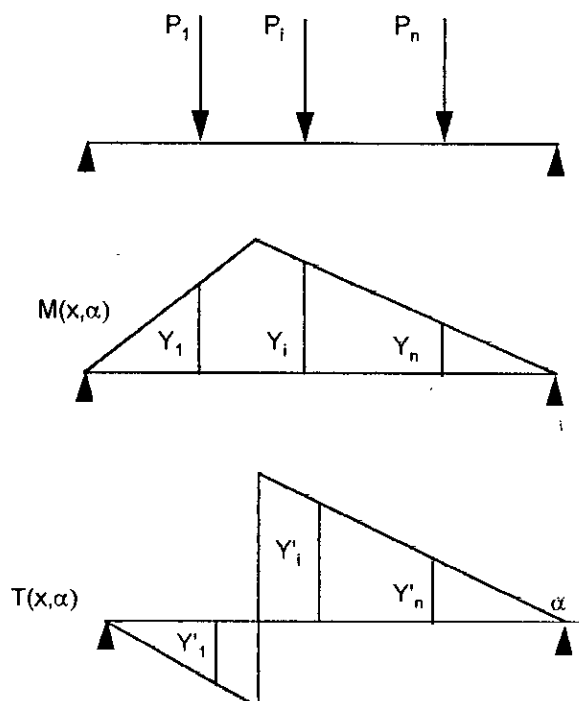


Fig (3 - 3) Ligne d'influence du moment de flexion effort tranchant d'une charge concentrée

III -2.2 - CHARGES REPARTIES :

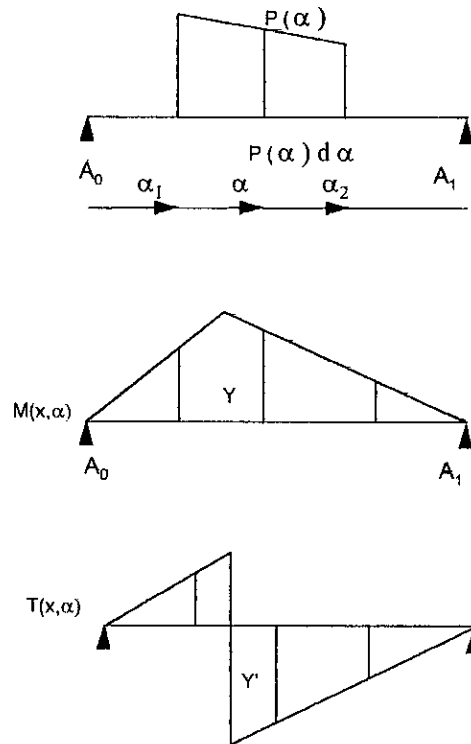


Fig (3 - 4) Ligne d'influence du moment de flexion effort tranchant
d'une charge répartie

D'après le principe de superposition, une charge $P(\alpha) d\alpha$ d'abscisse α produit un moment $P(\alpha) y d\alpha$ et un effort tranchant $P(\alpha) y' d\alpha$.

Pour l'ensemble des charges réparties on a :

$$M(x) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(\alpha) y d\alpha \quad \text{et} \quad T(x) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(\alpha) y' d\alpha$$

Pour une charge répartie de densité constante p :

$$M(x) = p \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y d\alpha \quad \text{et} \quad T(x) = p \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y' d\alpha$$

On conclut donc que l'effort tranchant ou le moment de flexion est égal au produit de la charge uniforme par la valeur algébrique de l'aire limitée par la ligne d'influence entre α_1 et α_2 .

III-3 LIGNE D'INFLUENCE DANS UNE SECTION D'ABSCISSE x D'UNE POUTRE CONTINUE :

La détermination des lignes d'influence s'effectue par la méthode des foyers aux appuis ($x = 0$) en premier lieu et en travée en second lieu. Il est nécessaire de calculer donc, les rapports focaux φ et φ' de gauche et de droite respectivement pour chaque travée.

III -3.1 DETERMINATION DES RAPPORTS FOCaux :

Les rapports focaux sont donnés par les formules suivantes en fonction des coefficients de souplesse a_i , b_i , et c_i que nous allons voir dans un prochain chapitre.

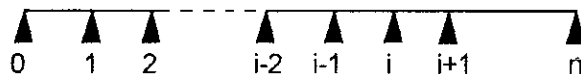
Rapports focaux pour les foyers de gauche :

$$\varphi_n = \frac{b_n}{a_n + C_{n-1} - b_{n-1} \varphi_{n-1}}$$

Rapports focaux pour les foyers de droite :

$$\varphi'_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{a_n + C_{n-1} - b_n \varphi'_n}$$

III -3.2 LIGNE D'INFLUENCE DES MOMENTS AUX APPUIS :



Soit une poutre à n travées (n + 1 appuis)

La ligne d'influence du moment sur l'appui N° i est définie comme suit :

1^{er} cas : La charge $p = 1$ se trouve sur la travée N° i

$$M_i(\alpha) = - \frac{1}{b_i \left(\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1 \right)} \left[\omega'_i(\alpha) + \frac{1}{\varphi_i} \omega''_i(\alpha) \right] \quad (3-3)$$

où $\omega'(\alpha)$ et $\omega''(\alpha)$ sont les rotations des sections aux appuis de la poutre droite $A_{i-1} A_i$ simplement appuyée et soumise à la charge unité d'abscisse α .

$$\omega'_i(\alpha) = - \int_0^{l_i} \mu(\alpha, x) \left(1 - \frac{x}{l_i} \right) \frac{dx}{EI_i} \quad (3-4a)$$

$$\omega''_i(\alpha) = + \int_0^{l_i} \mu(\alpha, x) \frac{x}{l_i} \frac{dx}{EI_i} \quad (3-4b)$$

Avec

$$\mu(\alpha, x) = \begin{cases} \alpha \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) & \text{pour } \alpha \leq x \\ \xi \left(1 - \frac{\alpha}{l_i}\right) & \text{pour } \alpha \geq x \end{cases} \quad (3-5)$$

Après intégration, on obtient :

$$\omega'_i(\alpha) = -\frac{1}{El_i} \frac{\alpha(l_i - \alpha)(2l_i - \alpha)}{6l_i} \quad (3-6a)$$

$$\omega''_i(\alpha) = \frac{1}{El_i} \frac{\alpha(l_i - \alpha)(l_i + \alpha)}{6l_i} \quad (3-6b)$$

2 eme cas : La charge $p = 1$ se trouve sur la travée $i + 1$.

$$M_i(\alpha) = \frac{1}{b_{i+1} + \left(\frac{1}{\varphi_{i+1} \varphi'_{i+1}} - 1\right)} \left[\frac{1}{\varphi'_{i+1}} \omega'_{i+1}(\alpha) + \omega''_{i+1}(\alpha) \right] \quad (3-7)$$

3 eme cas : La charge unitaire ($p = 1$) se trouve à droite de l'appui $i+1$.

$$M_i(\alpha) = (-1)^{S-i-1} \varphi_{i+1} \varphi_{i+2} \dots \varphi_i M_{S-1}(\alpha) \quad (3-8)$$

4 eme cas : La charge se trouve à gauche de l'appui i :

$$M_i(\alpha) = (-1)^{r-1} \varphi'_{r+1} \dots \varphi'_i M_r(\alpha) \frac{x}{l_i} \quad (3-9)$$



Tracée de la ligne d'influence

III -3.3 LIGNE D'INFLUENCE DANS UNE SECTION D'ABSCISSE X DANS LA TRAVEE N° I :

Quand la charge unitaire ($p=1$) se trouve sur la travée N° i :

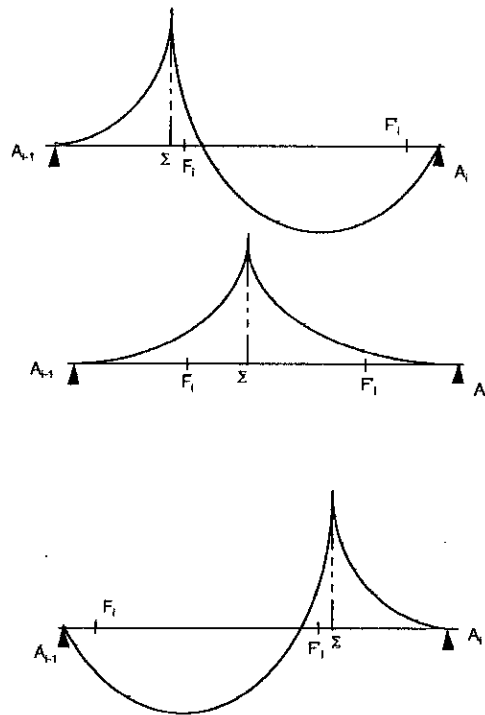
$$M(x, \alpha) = \mu(x, \alpha) + M_{i-1}(\alpha) \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i(\alpha) \frac{x}{l_i} \quad (3-10)$$

Ou l_i est la longueur de la travée N° i .

$\mu(x, \alpha)$ est représenté par la ligne d'influence du moment fléchissant dans la section d'abscisse x de la poutre droite $A_{i-1} A_i$ simplement appuyée.

$M_{i-1}(\alpha)$ et $M_i(\alpha)$ sont représentées par les lignes d'influence des moments dans les sections au droit des appuis A_{i-1} et A_i .

L'allure de la ligne d'influence $M(x, \alpha)$ suivant la position de la section Σ et par rapport au foyers F_i et F'_i de la travée est représentée ci dessous :



Quand la charge unité ($p = 1$) se trouve sur une travée autre que la travée i , le moment $M(x, \alpha)$ est donné par la relation suivante :

$$M(x, \alpha) = M_{i-1}(\alpha) \left(1 - \frac{x}{l_i} \right) + M_i(\alpha) \frac{x}{l_i} \quad (3-11)$$

Si la charge est appliquée à gauche de l'appui A_{i-1} :

$$M_{i-1}(\alpha) = -\frac{1}{\varphi_i} M_i(\alpha) \quad (3-12)$$

et par conséquent :

$$M(x, \alpha) = \left[\frac{x}{l_i} \left(1 + \frac{1}{\varphi_i} \right) - \frac{1}{\varphi_i} \right] M_i(\alpha) \quad (3-13)$$

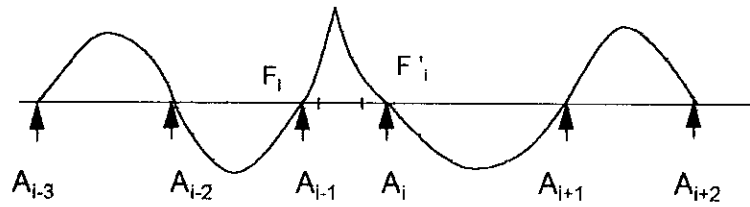
Si la charge unité est appliquée à droite de l'appui A_i

$$M_{i-1}(\alpha) = -\varphi_i M_i(\alpha)$$

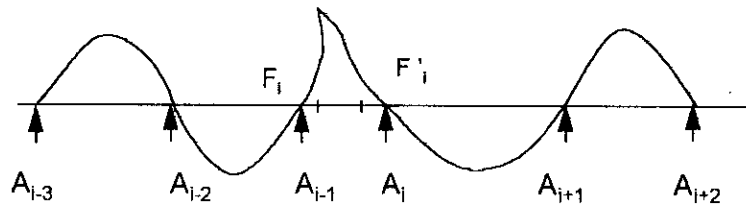
Donc :

$$M(x, \alpha) = \left[\frac{x}{l_i} (1 + \varphi_i) - \varphi_i \right] M_i(\alpha) \quad (3-14)$$

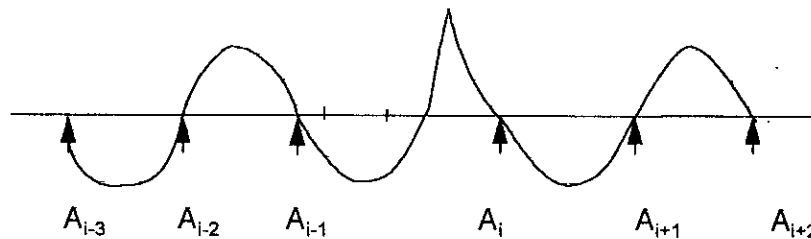
La ligne d'influence aura l'allure suivante :



La charge unitaire P est appliquée sur la travée $A_{i-1}A_i$



La charge unitaire P est appliquée à gauche de l'appui A_{i-1}



La charge unitaire P est appliquée à droite de l'appui A_{i-1}

Fig 2 - 4 Ligne d'influence pour différentes positions de la charge P

III -4 CALCULS DES MOMENTS DE FLEXIONS EN TRAVEES :

III -4.1 CALCULS DES MOMENTS AU DROIT DE LA SECTION $\Sigma_x = 0,4 L1$

Surcharge A(l) :

$$A(l) = 0,23 + \frac{36}{l+12}$$

Travée N° 1 surchargée :

$$A_1(l_1) = 1,11 \text{ t/m}^2 \quad (a_2 = a_1 = 1)$$

$$A(l_1) = A_1(l_1) \cdot l_1 \cdot l_c = 1,11 \cdot 28,57 \cdot 5,5 = 174,42 \text{ t}$$

$$S = \frac{L_c \cdot l}{3} [1,9145 + 4 \cdot 5,8101 + 2 \cdot 3,0904 + 0,4984]$$

$$S = 101,25 \text{ m}^2$$

$$M(0,4l_1) = M_Y = Y_{moy} \cdot A(l_1) \Rightarrow M(0,4l_1) = 617,45 \text{ t.m}$$

Travées 1 et 3 chargées :

$$A_2(l_1 + l_3) = 0,72 \text{ t/m}^2$$

$$A(l_1 + l_3) = 0,72 \cdot 61,38 \cdot 5,5 = 243,06 \text{ t}$$

$$S_1 = 101,25 \text{ m}^2$$

$$S_3 = \frac{32,817}{3 \cdot 4} (0 + 4 \cdot 0,2132 + 2 \cdot 0,2431 + 4 \cdot 0,1435 + 0) \\ = 5,22 \text{ m}^2$$

$$Y_{moy} = \frac{S_1 + S_3}{l_1 + l_3} = \frac{101,25 + 5,22}{28,57 + 32,817} = 1,73 \text{ m}$$

$$M(0,4l_1) = 1,73 \cdot 243,06 = 420,49 \text{ t.m}$$

Travées 1, 3 et 5 chargées :

$$A_3(l_1 + l_3 + l_5) = 0,57 \text{ t/m}^2$$

$$A(l_1 + l_3 + l_5) = 293 \text{ t}$$

$$S_5 = 0,366 \text{ m}^2$$

$$Y_{moy} = 1,14$$

$$\text{d'où : } M(0,4l_1) = 334,93 \text{ t.m}$$

REMARQUE : La surcharge $A(l)$ est inversement proportionnelle à la longueur chargée.

Surcharge Bc :

On a autant de fils que de voies sachant qu'une file est composée de deux camions au plus.

La ligne d'influence du moment dû à la surcharge Bc peut être représentée comme suit :

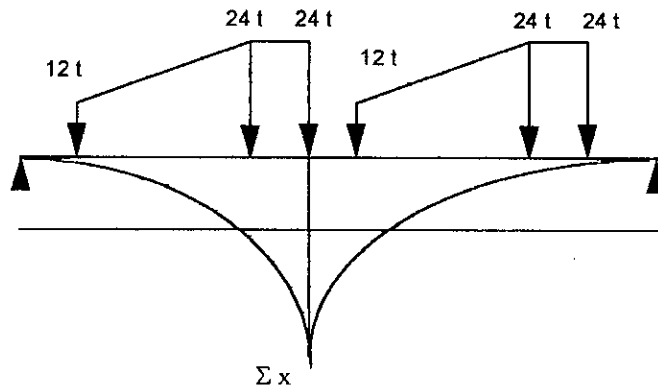


Figure (3 - 5) Ligne d'influence sous Bc

Pour déterminer le moment max au droit de la section (Σ), on doit disposer l'essieu arrière du premier camion au niveau de celle ci tout en vérifiant le théorème de Barré qui est le suivant :

$$\begin{cases} R_g < \frac{a}{b} (R_d + P_{ar}) & \dots (1) \\ R_g + P_{ar} \geq \frac{a}{b} R_d & \dots (2) \end{cases}$$

Avec :

R_g et R_d : résultante des charges ponctuelles situées à gauche et à droite de la section Σ respectivement.

P_{ar} : poids de l'essieu arrière du camion.

APPLICATION :

$$a = 0,4 l_1 \quad b = 0,6 l_1$$

$$R_g = 24 + 12 = 36 \text{ t}$$

$$R_d = 12 + 24 + 24 = 60 \text{ t}$$

$$P_{ar} = 24 \text{ t}$$

Condition 1 :

$$36 < \frac{11,42}{17,15} \cdot 84 \quad \text{Vérifiée}$$

Condition 2 :

$$60 \geq \frac{11,42}{17,15} \cdot 60 \quad \text{Vérifiée}$$

N.B : on chargera seulement la première travée (lieu de la section $\Sigma (0,4 l_1)$)
où les ordonnées de la ligne d'influence sont les plus grandes.

$$M(0,4 l_1) = \sum p_i y_i = \sum P_{ar} \cdot y_{ar} + \sum P_{av} y_{av}$$

Avec : P_{ar} : Poids de l'essieu arrière.

P_{av} : Poids de l'essieu avant.

Av	Ar	Ar	Av	Ar	Ar
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
3,4	4,83	5,82	4,5	2,3	1,95

$$M(0,4 l_1) = 452,4 \cdot \delta_{bc}$$

Avec δ_{bc} : Coefficient de majoration dynamique pour la surcharge Bc

$$\delta_{bc} = 1 + \frac{0,4}{0,2+l} + \frac{0,6}{1+4P/S}$$

$$\delta_{bc} = 1,1$$

$$\text{Donc : } M(0,4 l_1) = 452,4 \cdot 1,1 = 497,64 \text{ t.m}$$

Surcharge M_C120 :

Le char M_C120 est une charge partiellement répartie de 6,10 m de longueur et pour avoir l'effet le plus défavorable, on doit centrer cette charge sur la section Σ_x d'abscisse $x = 0,4 l_1$. (Voir figure).

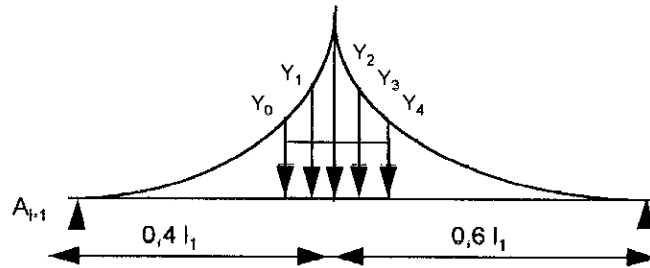


Figure (3-6) Ligne d'influence sous M_C120

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
4,6	4,9	5,82	5,5	4,6

$$Y_{moy} = \frac{1}{3.4} [4,6 + 4.(4,9 + 5,5) + 2.5,82 + 4,6] = 5,20 m$$

$$M(0,4 l_1) = P y_{moy} \delta_{M_C120}$$

Avec : P : Poids total du char M_C120

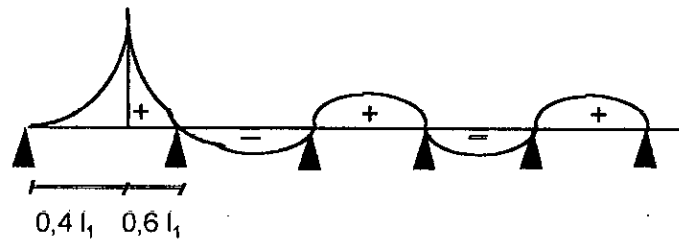
δ_{M_C120} : Coefficient de majoration dynamique de la surcharge M_C120

$$AN : M(0,4 l_1) = 110.5,2.1,09 = 623,48 t.m.$$

Tableau donnant les moments de flexion au droit de la section Σ ($0,4 l_1$) dus aux différentes surcharges :

N° des travées chargées	Surcharge	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
1	A(l)	6,10 t/ml	617,45
1+3		3,96 t/ml	420,49
1+3+5		3,14 t/ml	334,93
1	Bc	132 t	497,94
1	$M_c 120$	110 t	583,48

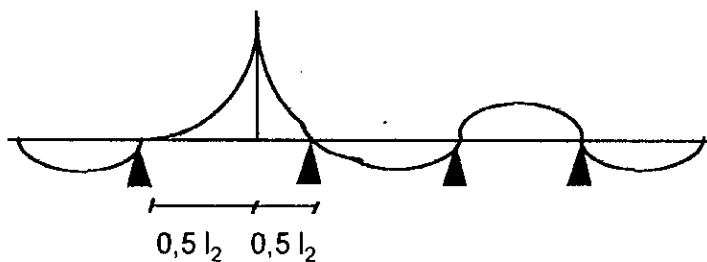
Allure de la ligne d'influence Figure (3 - 7):



Valeur du moment de flexion au droit de la section Σ ($0,5 l_2$) sous les différentes surcharges.

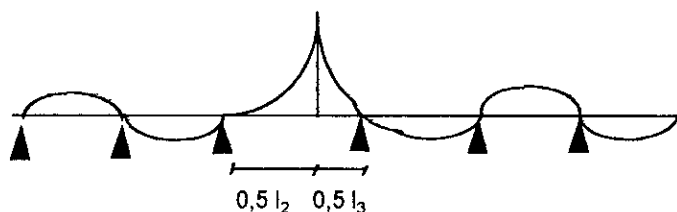
N° des travées chargées	Surcharge	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
2	A(l)	5,72 t/ml	482
2+4		3,82 t/ml	345
2+4+6		3,03 t/ml	273,8
2	Bc	132 t	435,28
2	$M_c 120$	110 t	552,01

Allure de la ligne d'influence figure (3-8)



Valeurs du moment de flexion au droit de la section Σ ($0,5 l_3$) sous les différentes surcharges.

N° des travées chargées	Surcharge	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
3	A(l)	5,68 t/ml	455,36
3+5		3,83 t/ml	325,72
3	Bc	132 t	414,74
3	M _c 120	110 t	549,08



Valeurs du moment de flexion au droit de la section Σ ($0,5 l_4$) sous les différentes surcharges.

N° des travées chargées	Surcharge	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
4	A(l)	5,68 t/ml	459,1
4+6		3,75 t/ml	328
4	Bc	132 t	412
4	M _c 120	110 t	548,9

Valeurs du moment de flexion au droit de la section $\Sigma (0,5 l_5)$ sous les différentes surcharges.

N° des travées chargées	Surcharge	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
5	A(l)	5,78 t/ml	463,61
5	Bc	132 t	408,6
5	M _c 120	110 t	566,59

Valeurs du moment de flexion au droit de la section $\Sigma (0,5 l_6)$ sous les différentes surcharges.

N° des travées chargées	Surcharge	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
6	A(l)	5,49 t/ml	478,5
6	Bc	132 t	416,16
6	M _c 120	110 t	555,68

III -5 CALCUL DES MOMENTS DE FLEXION AUX APPUIS :

III -5.1 CALCUL DES MOMENTS DUS AUX SURCHARGES SUR L' APPUI N°1 :

Surcharge A(l) :

$$A_{1,2}(l) = 0,23 + \frac{36}{l+12} = 3,97 \text{ t/m}^2 \quad (\text{travées 1 et 2 chargées})$$

$$A(l) = 5,5 \cdot (32,442 + 28,57) = 242,63 \text{ t}$$

$$y_{\text{moy}} = \frac{S_1 + S_2}{l_1 + l_2}$$

$$S_1 = \frac{28,57}{3,4} [0 + 4 \cdot (-1,38) + 2 \cdot (-2,3) + 4 \cdot (-1,78)] = -41,17 \text{ m}^2$$

$$S_2 = \frac{32,442}{3,4} [0 + 4 \cdot (2,06) + 2 \cdot (-2,42) + 4 \cdot (-1,51) + 0] = -51,777 \text{ m}^2$$

$$\text{d'où : } y_{\text{moy}} = -1,52 \text{ m}$$

$$\text{et par conséquent : } M_{\text{app}_1} = -369,66 \text{ t.m}$$

Surcharge Bc : Nous devons vérifier à chaque fois le théorème de Barré :

$$* R_g < \frac{a}{b}(R_d + P_{ar})$$

qui se traduit par : $12 + 24 < \frac{11,42}{17,25} (24 + 24 + 12 + 24)$ Vérifiée

$$* R_g + P_{ar} \geq \frac{a}{b} R_d$$

qui se traduit par : $12 + 24 + 24 \geq \frac{11,42}{17,25} (24 + 24 + 12)$ Vérifiée

av	ar	ar	av	ar	ar
-1,85	-2,4	-2,48	2,25	-1,7	-1,45

$$\delta_{bc} = 1,1$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } M_{app1} &= [24(-8,03) + 12(-4,1)] \\ &= -219,92 \cdot 1,1 = -241,92 \text{ t.m} \end{aligned}$$

Surcharge M_{c120} :

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
-2,32	-2,45	-2,48	-2,4	-2,3

$$y_{moy} = \frac{-1}{3,4} [2,32 + 4.(2,45 + 2,4) + 2.2,48 + 2,3] = -2,41 \text{ m}$$

$$\delta_{M_{c120}} = 1,09$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } M_{app1} &= -243,21 \cdot 1,09 \\ &= -265,1 \text{ t.m} \end{aligned}$$

Tableau donnant le moment de flexion sur l'appui N°1 :

N° des travées chargées	Surcharges	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
1+2	A(l)	3,82 t / ml	-369,66
2	Bc	132 t	-241,92
2	M_{c120}	110 t	-265,1

Tableau donnant le moment de flexion sur l'appui N°2 :

N° des travées chargées	Surcharges	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
2+3	A(l)	3,82 t / ml	-377,45
3	Bc	132 t	-195,08
3	M _c 120	110 t	-253,73

Tableau donnant le moment de flexion sur l'appui N°3 :

N° des travées chargées	Surcharges	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
3+4	A(l)	3,81 t / ml	-366,2
4	Bc	132 t	-196,46
4	M _c 120	110 t	-255,27

Tableau donnant le moment de flexion sur l'appui N°4 :

N° des travées chargées	Surcharges	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
4+5	A(l)	3,83 t / ml	-371,42
5	Bc	132 t	-146,2
5	M _c 120	110 t	-255,27

Tableau donnant le moment de flexion sur l'appui N°5

N° des travées chargées	Surcharges	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
5+6	A(l)	3,77 t / ml	-426,5
6	Bc	132 t	-298,11
6	M _c 120	110 t	-358,1

Tableau donnant le moment de flexion sur l'appui N°6

N° des travées chargées	Surcharges	Valeur de la surcharge	Moment max (t.m)
6+7	A(l)	4,24 t / ml	--330.65
6	Bc	132,7 t	- 209,1
6	M _c 120	110 t	- 279,2

CHAPITRE IV

IV - ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA COURBURE EN PLAN :

IV -1 INTRODUCTION :

Si nous envisageons d'étudier un tablier de pont courbe d'une manière générale, cette étude est très délicate et il est usuel de recourir à des programmes de calculs de structures spatiales sophistiquées, ou même des programmes de calculs aux éléments finis.

Nous allons dans ce chapitre analyser le comportement d'un tablier de pont courbe sous différents cas de chargement moyennant les résultats de la résistance des matériaux et ceux de la mécanique rationnelles établis pour ce genre de problème.

Si nous considérons que le comportement d'un pont dalle courbe est identique à celui d'une poutre courbe de même rigidité, nous pourrions alors mettre en évidence l'interaction complexe entre les sollicitations et les déformations en supposant que le rayon de courbure est constant. Ainsi, d'une façon générale, nous supposerons que la section transversale des poutres étudiées est indéformable et nous établirons nos équations en négligeant les effets d'un éventuel gauchissement non uniforme des sections droites.

Enfin, nous supposerons que le rayon de courbure de leur fibre moyenne est grand devant les dimensions de la section transversale et qu'il est identique à celui de la ligne des centres de torsion.

IV -2 NOTATIONS ET HYPOTHESES DE L'ETUDE :

- L'espace étant rapporté à un repère orthonormé et direct $OXYZ$, on considère une poutre à fibre moyenne circulaire contenue dans le plan OXY . On suppose que les axes principaux d'inertie de la section droite sont l'un contenue dans ce plan OXY et l'autre parallèle à OZ (donc de direction constante).

- La fibre moyenne étant rectifiée, on appelle (S) son abscisse curviligne et on introduit, au point courant d'abscisse S , un repère local G_{xyz} tel que G_x soit portée par la tangente en $G(S)$ à la fibre moyenne et que G_y et G_z soient les axes principaux d'inertie de la section droite associée.

- En appelant R le rayon de courbure " arithmétique " de l'arc de cercle portant la fibre moyenne, on conviendra de choisir son sens de parcours sur cette fibre de telle sorte que l'axe G_y du repère local soit toujours dirigé dans la concavité de courbe.

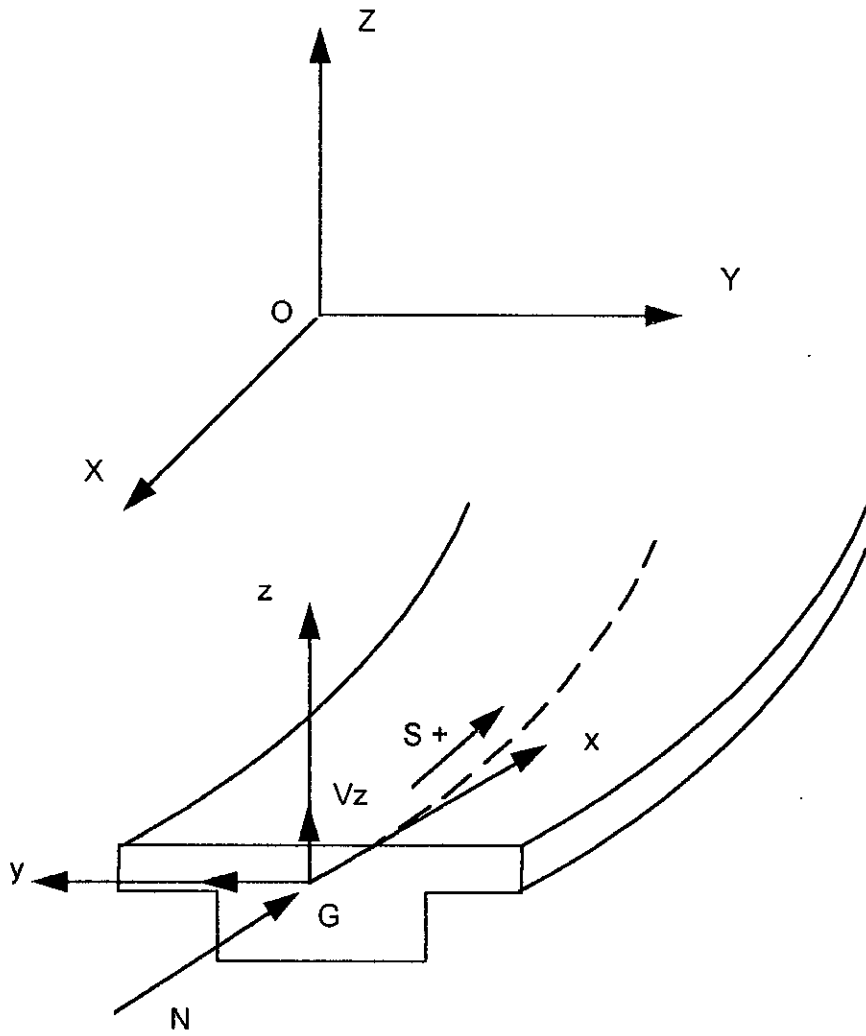
- Sur les dessins de la figure () sont précisées les conventions de notations et de signe relatives aux sollicitations dans la section d'abscisse curviligne S. En appelant $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs unitaires des axes G_x, G_y, G_z , les éléments de réductions du tenseur des sollicitations sont:

- Un effort résultant : $\vec{R} = N \vec{i} + V_Y \vec{j} + V_Z \vec{k}$

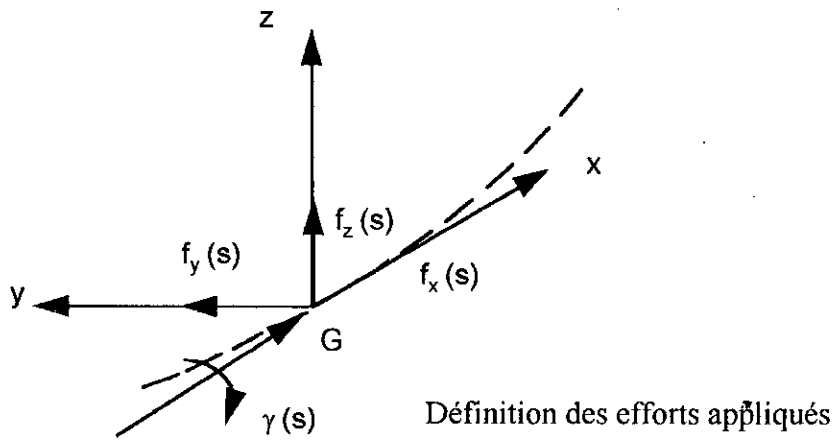
- Un moment résultant : $\vec{M} = M_X \vec{i} + M_Y \vec{j} + M_Z \vec{k}$

- Le chargement de la poutre est constitué par une densité de forces $\vec{f}(S)$, de composantes $f_x(S), f_y(S)$ et $f_z(S)$ selon les axes du repère mobile, et une densité de couples $\vec{\gamma}(S)$ que l'on supposera uniquement portés par G_x :

$$\vec{\gamma}(S) = \gamma(S) \cdot \vec{i}$$



Définition des sollicitations



Définition des efforts appliqués

Figure (4 - 1)

IV -3 EQUATIONS ELEMENTAIRES D'EQUILIBRE :

Les équations élémentaires d'équilibres s'établissent en considérant l'ensemble des efforts appliqués à un tronçon de poutre compris entre les sections d'abscisse S et S + dS.

EQUILIBRE EN FORCES :

Sur la section d'abscisse S est appliqué l'effort résultant $-(\vec{R} + d\vec{R})$.

Le tronçon considéré reçoit l'application directe d'un effort extérieur égal à $\vec{F}(S).dS$.

L'équilibre du tronçon élémentaire se traduit donc par :

$$\frac{d\vec{R}}{dS} = \vec{F}(S)$$

Or,

$$\frac{d\vec{R}}{dS} = \left(\frac{dN}{dS} - \frac{V_Y}{R} \right) \vec{i} + \left(\frac{dV_Y}{dS} + \frac{N}{R} \right) \vec{j} + \frac{dV_Z}{dS} \vec{k}$$

Car avec le sens de parcours choisi sur l'arc de cercle:

$$\frac{d\vec{i}}{dS} = \frac{\vec{j}}{R} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{j}}{dS} = -\frac{\vec{i}}{R} \quad \left(\frac{d\vec{k}}{dS} = \vec{0} \right)$$

On en déduit :

$$\frac{dN}{dS} - \frac{V_Y}{R} = F_X$$

$$\frac{dV_Y}{dS} + \frac{N}{R} = F_Y$$

$$\frac{dV_Z}{dS} = F_Z$$

EQUILIBRE DES MOMENTS :

Le tronçon élémentaire déjà considéré est soumis :

- Sur la face d'abscisse S, à un couple \vec{M}
- Sur la surface d'abscisse S + dS, à un couple $-(\vec{M} + d\vec{M})$
- A un couple extérieur $\gamma(S). \vec{i} . dS$

Ecrivons l'équilibre en moments par rapport au point de la fibre moyenne d'abscisse $S + dS$. Il vient :

$$\frac{d\vec{M}}{dS} = \vec{R} \wedge \vec{i} + \gamma(s) \cdot \vec{i}$$

Or :

$$\frac{d\vec{M}}{dS} = \left(\frac{dM_x}{dS} - \frac{M_y}{R} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{dM_y}{dS} - \frac{M_x}{R} \right) \cdot \vec{j} + \frac{dM_z}{dS} \cdot \vec{k}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dS} - \frac{M_y}{R} &= \gamma(s) \\ \frac{dM_y}{dS} - \frac{M_x}{R} &= V_z \\ \frac{dM_z}{dS} &= -V_y \end{aligned} \quad (10-2)$$

La fibre moyenne étant circulaire, toutes les fonctions peuvent être exprimées en fonction d'un paramètre angulaire α tel que $ds = R \cdot d\alpha$.

Si l'on admet, de plus, qu'elles sont toutes dérivables, on tire de la première des relations (4-1) :

$$\frac{d^2N}{dS^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{dV_y}{ds} = \frac{dF_x}{dS}$$

Mais, la seconde des relations (4-1) permet d'écrire :

$$\frac{dV_y}{dS} = -\frac{N}{R} + F_y$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{d^2N}{dS^2} + \frac{N}{R^2} = \frac{1}{R} \cdot F_y(s) + \frac{dF_x}{dS} \quad (4-3)$$

ou, en fonction du paramètre α :

$$\frac{d^2N}{d\alpha^2} + N = R \left[F_y(\alpha) + \frac{dF_x}{d\alpha} \right]$$

De même, la deuxième des équations () conduit à :

$$\frac{d^2M_y}{dS^2} + \frac{1}{R} \frac{dM_x}{dS} = \frac{dV_z}{dS} = F_z(s)$$

Mais :

$$\frac{dM_x}{ds} = \frac{M_y}{R} + \gamma(s) \text{ de sorte que :}$$

$$\frac{d^2M_y}{ds^2} + \frac{M_y}{R^2} = -\frac{1}{R}\gamma(s) + F_z(s) \quad (4-4)$$

ou en fonction du paramètre α :

$$\frac{d^2M_y}{d\alpha^2} + M_y = -R\gamma(\alpha) + R^2F_z(\alpha).$$

Les équation (4-3) et (4-4) peuvent être substituées à une des équations des groupes (4-1) et (4-2). Ainsi, on peut retenir comme système différentiel de base le système suivant:

$$N''(\alpha) + N(\alpha) = R[F_y(\alpha) + F'_x(\alpha)]$$

$$V_y = N'(\alpha) - RF_x(\alpha)$$

$$V'_z = RF_z(\alpha)$$

$$M''_y(\alpha) + M_y(\alpha) = -R\gamma(\alpha) + R^2F_z(\alpha) \quad (4-5)$$

$$M_x(\alpha) = -M'_y(\alpha) + RV_z(\alpha)$$

$$M'_z(\alpha) = -RV_y(\alpha)$$

IV -4 ETUDES DES DEFORMATIONS EN L'ABSENCE DE GAUCHISSEMENT NON UNIFORME :

Le déplacement de la section contenant le point G(s) peut être caractérisé par le vecteur translation $\vec{\lambda}$ et le vecteur-rotation $\vec{\Omega}$. Etudions d'abords la loi de variation du vecteur translation. Il est clair qu'à l'abscisse s + ds, le vecteur translation est:

$$\vec{\lambda}(s + ds) = \vec{\lambda}(s) + \frac{d\vec{\lambda}}{ds} \cdot ds$$

Mais en application de la formule de calcul des déplacements, et en tenant compte de ce que:

- L'effort normal entraîne un allongement algébrique relatif $-\frac{N}{ES}$.
- On néglige les déformations d'efforts tranchants :

$$\vec{\lambda}(s + ds) = \vec{\lambda}(s) + \vec{\Omega} \wedge \vec{i} ds - \frac{N}{Es} \cdot ds \cdot \vec{i}$$

Sachant que S est l'aire de la section droite de la poutre et E le module d'élasticité longitudinal.

On en déduit donc que :

$$\frac{d\vec{\lambda}}{ds} = -\frac{N}{ES} \vec{i} + \omega_z \vec{j} - \omega_y \vec{k}$$

Mais par ailleurs :

$$\frac{d\vec{\lambda}}{ds} = \left(\frac{du}{ds} - \frac{V_y}{R} \right) \vec{i} + \left(\frac{dV_y}{ds} + \frac{u}{R} \right) \vec{j} + \frac{dV_z}{ds} \vec{k}$$

On en déduit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} - \frac{V_y}{R} &= -\frac{N}{ES} \\ \frac{dV_y}{ds} + \frac{u}{R} &= \omega_z \\ \frac{dV_z}{ds} &= -\omega_y \end{aligned} \quad (4-6)$$

En ce qui concerne la rotation relative de la section d'abscisse $s+ds$ par rapport à la section d'abscisse s , cette rotation est due aux composantes du moment résultant, plus exactement, au moment de torsion T et aux moments de flexion M_y et M_z :

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} = -\frac{T}{GK} \vec{i} - \frac{M_y}{EI_y} \vec{j} - \frac{M_z}{EI_z} \vec{k}$$

Dans cette expression, K est le moment d'inertie de torsion pure, I_y et I_z sont les moments principaux d'inertie de flexion, G et E sont les modules de déformation transversales et longitudinales respectivement. On rappelle qu'en général le centre de torsion n'est pas confondu avec le centre de gravité d'une section. Si ξ désigne l'ordonnée du centre de torsion suivant l'axe G_z pour (la poutre admettant G_z pour axe de symétrie de ses sections, le centre de torsion C est évidemment sur cet axe), le moment de torsion T est lié au moment longitudinal M_x et aux composantes de l'effort résultant par la relation : $T = M_x + \xi V_y$

Mais :

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} = \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{\omega_y}{R} \right) \vec{i} + \left(\frac{d\omega_y}{ds} - \frac{\theta}{R} \right) \vec{j} + \frac{d\omega_z}{ds} \vec{k}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} - \frac{\omega_y}{R} &= -\frac{1}{GK} (M_x + \xi V_y) \\ \frac{d\omega_y}{ds} + \frac{\theta}{R} &= -\frac{M_y}{EI_y} \\ \frac{d\omega_z}{ds} &= -\frac{M_z}{EI_z} \end{aligned} \quad (4-7)$$

Comme pour les sollicitations, il est possible de synthétiser certaines des équations des groupes (4-6) et (4-7). Considérons tout d'abord les équations du groupe (4-6); en admettant que toutes les fonctions soient dérivables, il vient :

$$\frac{d^2V_y}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{ds} = \frac{d\omega_z}{ds} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (\text{d'après 4-7})$$

or ;

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{R} V_y - \frac{N}{ES}$$

On en déduit :

$$\frac{d^2V_y}{ds^2} + \frac{V_y}{R^2} = \frac{1}{R} \frac{N}{ES} - \frac{M_z}{EI_z} \quad (4-8)$$

ou, en employant le paramètre α :

$$V_y''(\alpha) + V_y(\alpha) = R \cdot \frac{N}{ES} - R^2 \frac{M_z}{EI_z}$$

Une fois déterminée la fonction V_y , on peut calculer :

$$u(\alpha) = R \cdot \omega_z(\alpha) - V_y'(\alpha)$$

De même, du groupe (), on tire :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d\omega_y}{ds} = -\frac{1}{GK} \left(\frac{dM_x}{ds} + \xi \frac{dV_y}{ds} \right)$$

or :

$$\frac{dM_x}{ds} = \frac{M_y}{R} + \gamma(s) \quad \text{et} \quad \frac{dV_y}{ds} = -\frac{N}{R} + F_y$$

Par ailleurs :

$$\frac{d\omega_y}{ds} = -\frac{\theta}{R} - \frac{M_y}{EI_y}$$

On en déduit :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{\theta}{R^2} = -\left(\frac{1}{EI_y} + \frac{1}{GK} \right) \frac{M_y}{R} + \frac{1}{GK} \frac{\xi N}{R} - \frac{1}{GK} (\gamma + \xi F_y)$$

ou, en utilisant le paramètre α :

$$\theta''(\alpha) + \theta(\alpha) = -R \left(\frac{1}{EI_y} + \frac{1}{GK} \right) M_y + \frac{R}{GK} \xi N - \frac{R^2}{GK} (\gamma + \xi F_y)$$

On peut ensuite calculer :

$$\omega_y = R \frac{d\theta}{ds} + \frac{R}{GK} (M_x + \xi V_y) \quad \text{ou}$$

$$\omega_y(\alpha) = \theta''(\alpha) + \frac{R}{GK} (M_x + \xi V_y)$$

En résumé, le système différentiel permettant de déterminer les déplacements et les déformations, exprimé en fonction du paramètre α , peut se mettre sous la forme :

$$V_y''(\alpha) + V_y(\alpha) = \frac{R}{ES} N - \frac{R^2}{EI_z} M_z$$

$$U = R \omega_z - V_y'(\alpha)$$

$$V_z'(\alpha) = -R \omega_y \quad (4-9)$$

$$\theta''(\alpha) + \theta(\alpha) = -R \left(\frac{1}{EI_y} + \frac{1}{GK} \right) M_y + \frac{R}{GK} \xi N - \frac{R^2}{GK} (\gamma + \xi F_y)$$

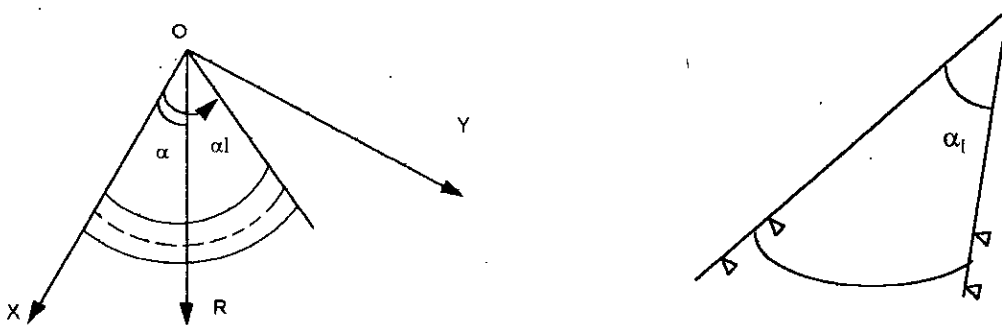
$$\omega_y(\alpha) = \theta'(\alpha) + \frac{R}{GK} (M_x + \xi V_y)$$

$$\omega_z'(\alpha) = -\frac{R}{EI_z} M_z$$

IV -5 QUELQUES APPLICATIONS PARTICULIERES :

A présent, nous allons examiner le fonctionnement d'un tablier de pont formant géométriquement, un arc de cercle d'angle d'ouverture égal à α_l (Voir figure 4 - 7).

Il s'agit d'une travée dont les extrémités sont encastrees à la torsion (déformation angulaire θ nulle) et simplement appuyée en flexion.



Condition de liaison : Appui simple en flexion

Encastrement à la torsion.

Figure 4 - 7

IV -6 EFFET D'UN CHARGEMENT PAR UNE DENSITE UNIFORME FZ=-Q CENTREE :

Voir figure ()

Il est clair que $N = 0$ et $V_y = 0$. La troisième équation du système () donne :

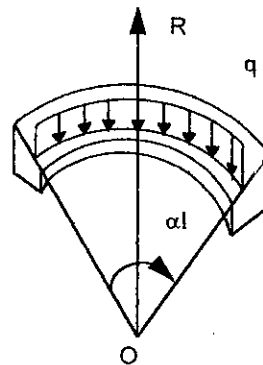
$$V'_z(\alpha) = -Rq$$

L'origine de la fibre moyenne étant prise en son milieu, l'effort tranchant est nul en cette origine. Donc :

$$V_z = -Rq$$

Par ailleurs :

$$M''_y(\alpha) + M_y(\alpha) = -R^2q$$



Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la solution générale est :

$$M_y(\alpha) = A \cos \alpha + B \sin \alpha - qR^2$$

Les constantes A et B dépendent des conditions aux limites. Si par exemple, il s'agit d'une travée indépendante, le moment M_y doit être nul pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha_l$, de sorte que :

$$B = qR^2 \text{ et } A = \frac{qR^2(1 - \cos \alpha_l)}{\sin \alpha_l}$$

$$\text{d'ou : } M_y(\alpha) = 2qR^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\alpha_l - \alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_l}{2}\right)}$$

L'équation du groupe se traduit par :

$$M_x(\alpha) = -\frac{dM_y(\alpha)}{d\alpha} + RV_z(\alpha)$$

$$\text{soit : } M_x(\alpha) = R V_z(\alpha) - qR^2 \frac{\sin\left(\frac{\alpha_I}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_I}{2}\right)}$$

$$\text{Par ailleurs : } V_z(\alpha) = V_{zA} - qR \int_0^\alpha d\alpha = V_{zA} - qR\alpha \text{ Avec } V_{zA} = qR\frac{\alpha_I}{2}$$

$$\text{d'ou : } V_z(\alpha) = qR\left(\frac{\alpha_I}{2} - \alpha\right)$$

Enfin, on en déduit:

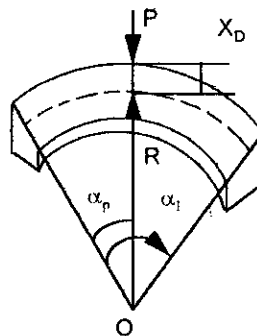
$$M_x(\alpha) = qR^2 \left[\left(\frac{\alpha_I}{2} - \alpha\right) - \frac{\sin\left(\frac{\alpha_I}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_I}{2}\right)} \right]$$

REMARQUE : Le moment de torsion est très faible en comparaison du moment de flexion maximum

IV -6.1 EFFET D'UNE CHARGE CONCENTREES :

La poutre étant considérée circulaire, simplement appuyée à la flexion et bi-encastree à la torsion, on détermine alors les efforts internes développés par une charge concentrée P appliquée au droit de la section d'angle α_p .

(Voir figure).



a - Moment de torsion $M_x(\alpha)$:

1 er cas : $0 < \alpha \leq \alpha_p$

$$\text{on a : } M_x(\alpha) = M_{xA} \cos \alpha + V_{zA} R(1 - \cos \alpha)$$

2 eme cas : $\alpha_p \leq \alpha < \alpha_I$

on a :

$$M_x(\alpha) = M_{x_A} \cos \alpha + V_{z_A}(1 - \cos \alpha) + P x_D \cos(\alpha - \alpha_p) - PR[1 - \cos(\alpha - \alpha_p)]$$

a - Moment de torsion $M_x(\alpha)$:

$$0 < \alpha \leq \alpha_p : M_y(\alpha) = M_{y_A} \cos \alpha - M_{x_A} \sin \alpha + V_{z_A} R \sin \alpha \dots ()$$

$$\alpha_p \leq \alpha < \alpha_l : M_{y_A} \cos \alpha - M_{x_A} \sin \alpha + V_{z_A} R \sin \alpha - PR \sin(\alpha - \alpha_p) - P X_D \sin(\alpha - \alpha_p)$$

Soit :

$$M_y(\alpha) = M_{y_A} \cos \alpha - M_{x_A} \sin \alpha + V_{z_A} R \sin \alpha - P(R + X_D) \sin(\alpha - \alpha_p)$$

c - Effort tranchant $V_z(\alpha)$

$$0 < \alpha \leq \alpha_l : V_z(\alpha) = V_{z_A}$$

$$\alpha_p \leq \alpha < \alpha_l : V_z(\alpha) = V_{z_A} - P$$

Conditions aux limites :

$$i - M_y(0) = M_y(\alpha_l) = 0$$

L'équation () donne :

$$-M_{x_A} \sin \alpha_l + V_{z_A} R \sin \alpha_l - P(R + X_D) \sin(\alpha_l - \alpha_p) = 0$$

$$\text{d'ou : } M_{x_A} = V_{z_A} R - P(R + X_D) \frac{\sin(\alpha_l - \alpha_p)}{\alpha_l}$$

$$ii - \text{Equation de compatibilité : } \int_0^{\alpha_l} \frac{M_x(\alpha)}{GK} d\alpha = 0$$

$$\text{d'ou : } V_{z_A} = P \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \right)$$

$$\text{et par conséquent : } M_{x_A} = PR \left[\left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \right) - \frac{\left(1 + \frac{X_D}{R} \right) \sin(\alpha_l - \alpha_p)}{\sin \alpha_l} \right]$$

Finalement on obtient :

$$\text{Effort tranchant : } \begin{cases} V_z(\alpha) = P \left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \right) & \text{si } 0 < \alpha \leq \alpha_p \\ V_z(\alpha) = -P \frac{\alpha_p}{\alpha_l} & \text{si } \alpha_p < \alpha < \alpha_l \end{cases}$$

Moment fléchissant :

$$\begin{cases} M_y(\alpha) = PR \left(1 + \frac{X_D}{R} \right) \frac{\sin(\alpha_l - \alpha_p)}{\sin \alpha_l} \sin \alpha & \text{si } 0 < \alpha \leq \alpha_p \\ M_y(\alpha) = PR \left(1 + \frac{X_D}{R} \right) \frac{\sin \alpha_p \sin(\alpha_l - \alpha)}{\sin \alpha_l} & \text{si } \alpha_p < \alpha \leq \alpha_l \end{cases}$$

Moment de torsion :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x(\alpha) = PR \left[\left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \right) - \frac{\left(1 - \frac{X_D}{R} \right) \sin(\alpha_l - \alpha_p)}{\sin \alpha_l} \cos \alpha \right] \quad \text{si } 0 < \alpha \leq \alpha_p \\ M_x(\alpha) = -PR \left[\frac{\alpha_p}{\alpha_l} - \left(1 - \frac{X_D}{R} \right) \frac{\sin \alpha_p \cos(\alpha_l - \alpha)}{\sin \alpha_l} \right] \quad \text{si } \alpha_p \leq \alpha < \alpha_l \end{array} \right.$$

REMARQUE : Le moment fléchissant dû à une charge excentrée est donc égal au moment fléchissant dû à cette même charge supposée centrée, multipliée par le coefficient d'excentricité Δ : $\Delta = 1 + X_D / R$.

X_D est positif si il se situe du coté opposé au centre de courbure de la fibre moyenne.

CHAPITRE V

V - RAPPELS SUR LE CALCUL DES POUTRES CONTINUES :

V-1 POUTRES CONTINUES SUR APPUIS SIMPLES :

DEFINITION DE LA STRUCTURE ETUDIEE :

On considère une poutre droite continue, à plan moyen, chargée dans son plan par des efforts qui lui sont normaux. Elle comporte n travées et repose donc sur $(n+1)$ appuis notés A_0, A_1, \dots, A_n .

La travée N° i , comprise entre les appuis A_{i-1} et A_i a une longueur L_i . L'abscisse x étant définie à l'origine de chaque travée, le moment d'inertie de flexion I_y (noté, plus simplement I) est une fonction de x , soit $I(x)$, de même que sa section droite $s(x)$.

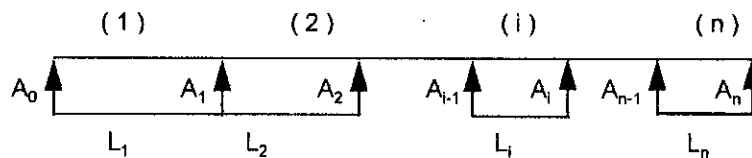


Figure (5 - 1)

Cette poutre est un système hyperstatique de degrés $(n-1)$ et il est d'usage de considérer les $(n-1)$ moments sur appuis intermédiaires (notés M_1, M_2, \dots, M_{n-1}).

V-2 LA FORMULE DES TROIS MOMENTS (FORMULE DE CLAPEYRON) :

La mise en équation de ce problème par la méthode des forces conduit à un système linéaire de $(n-1)$ équations, à $(n-1)$ inconnues que l'on met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(c_1 + a_2)M_1 + b_2M_2 &= \theta_1^d - \theta_1^g \\ b_iM_{i-1} + (c_i + a_{i+1})M_i + b_{i+1}M_{i+1} &= \theta_i^d - \theta_i^g \quad (5-1) \\ b_{n-1}M_{n-2} + (c_{n-1} + a_n)M_{n-1} &= \theta_{n-1}^d - \theta_{n-1}^g\end{aligned}$$

Dans ce système, les coefficients a_i , b_i et c_i ne sont fonction que des caractéristiques géométriques de la poutre. Il sont appelés coefficients de souplesse de la poutre et leur définition est la suivante, pour chaque travée (l'indice i étant supprimé pour alléger les écritures) :

$$a = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} \quad b = \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI} \quad c = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} \quad (5-2)$$

ou E est le module de YOUNG du matériau constitutif de la poutre.

Par ailleurs, si on considère une travée courante de longueur L supposée simplement appuyée en ses extrémités, les charges extérieures induisent un moment fléchissant dans chaque poutre noté $M_{i,0}(x)$ (isostatique). Les grandeurs θ_i sont définies, pour chaque travée, par les formules :

$$\theta^d = -\int_0^L M_{i,0}(x) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI} \quad \theta^g = \int M_{i,0}(x) \frac{x}{L} \frac{dx}{EI} \quad (5-3)$$

θ^d et θ^g représentent les angles de rotation (avec les conventions de signes de la résistance des matériaux usuelle pour les poutres droites) à l'origine et à l'extrémité de la travée de longueur L supposée simplement appuyée, sous l'effet des charges extérieures.

On notera toutefois que :

$$\int_0^L \frac{dx}{EI} = a + 2b + c \quad \text{et} \quad \int_0^L \frac{x}{L} \frac{dx}{EI} = b + c \quad (5-4)$$

Le calcul de la poutre continue peut être fait par la méthode des rapports focaux en chargeant successivement toutes les travées, puis en cumulant les résultats obtenus. Ainsi, dans la travée n° i, le moment fléchissant total a pour expression:

$$M_i(x) = M_{i,0}(x) + M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \frac{x}{L_i} \quad (5-5)$$

et l'effort tranchant vaut :

$$V_i(x) = V_{i,0}(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} \quad (5-6)$$

Avec $V_{i,0}(x)$: l'effort tranchant isostatique dans la travée N° i .

Si la fonction $M_{i,0}(x)$ est dérivable au sens des fonctions, on peut écrire :

$$V_{i,0}(x) = \frac{d}{dx}(M_{i,0}(x))$$

Enfin, la réaction d'appui au droit de l'appui simple A_i a pour expression :

$$\begin{aligned} R_i &= V_{i+1}(0) - V_i(L_i) \\ &= V_{i+1,0}(0) - V_{i,0}(L_i) + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}} - \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} \end{aligned} \quad (5-7)$$

V-3 CAS DES POUTRES CIRCULAIRES CONTINUES :

La détermination des efforts internes pour les poutres continues revient tout d'abord à déterminer des efforts sur les sollicitation et les déformations, des moments fléchissant sur les appuis.

Les conditions d'équilibre internes sont :

a - Effort tranchant :

$$V_{zA} \text{ et } V_{zB} = \text{constante}$$

b - Moment fléchissant :

$$M_y(\alpha) = M_{yA} \cos(\alpha) - M_{xA} \sin(\alpha) + V_z R \sin(\alpha)$$

$$M_y(\alpha_l) = M_{yB} = M_{yA} \cos(\alpha_l) - (M_{xA} - TR) \sin(\alpha_l)$$

$$\text{d'ou } M_y(\alpha) = M_{yA} \frac{\sin(\alpha_l - \alpha)}{\sin \alpha_l} + M_{yB} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_l}$$

c - Moment de torsion :

$$M_x(\alpha) = V_z R - \frac{dM_y(\alpha)}{d\alpha} = V_z R + M_{yA} \frac{\cos(\alpha_l - \alpha)}{\sin \alpha_l} - M_{yB} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_l}$$

d - Rotations des extrémités :

Conditions aux limites :

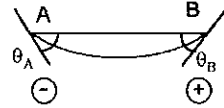


Figure (5 - 2)

$$V_{zA} = V_{zB} = 0$$

$$\varphi_A = \varphi_B = 0 \text{ (rotation autour de l'axe de gravité)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_A = \varphi_A - a M_{yA} - b M_{yB} \\ \theta_B = \varphi_B + b M_{yA} + c M_{yB} \end{array} \right. \text{ Avec } \theta_A \text{ et } \theta_B \text{ les rotations normales à l'axe de gravité aux extrémités A et B de la poutre}$$

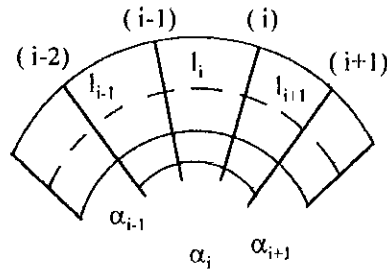
$$\text{d'ou : } \left\{ \begin{array}{l} \theta_A = -a M_{yA} - b M_{yB} \\ \theta_B = b M_{yA} + c M_{yB} \end{array} \right.$$

$$\text{Avec } \left\{ \begin{array}{l} a = c = R \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \frac{\alpha_l - \sin \alpha_l \cos \alpha_l}{2 \sin^2 \alpha_l} - \frac{R}{GK} \left(\frac{1}{\alpha_l} - \frac{\cos \alpha_l}{\sin \alpha_l} \right) \end{array} \right. \quad (5 - 8)$$

$$\text{Si } K = \text{Cst } \left\{ \begin{array}{l} b = R \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \frac{\sin \alpha_l - \alpha_l \cos \alpha_l}{2 \sin^2 \alpha_l} - \frac{R}{GK} \left(\frac{1}{\sin \alpha_l} - \frac{1}{\alpha_l} \right) \end{array} \right.$$

Tous les résultats cités ci-avant nous permettent de déterminer les efforts internes dans une poutre circulaire continue au moyen de la méthode des forces.

Les moments de continuité M_i sont alors déterminés de manière à satisfaire les conditions de compatibilité des déformations (θ_i) aux appuis intermédiaires .



Rotation en (i) de la travée n° i considérée comme isostatique (indépendante) :

$$\theta_i = b_i M_{i-1} + C_i M_i + \theta_{i,0}^g \quad (5 - 9a)$$

Rotation en (i) de la travée n° i+1 considérée comme isostatique

$$\theta_i = -a_{i+1} M_i - b_{i+1} M_{i+1} + \theta_{i,0}^d \quad (5 - 9b)$$

La condition de compatibilité des rotations à l'appui (i) nous donne :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} + \theta_{i,0} = 0 \quad (5 - 10)$$

Avec $\theta_{i,0}$: rotation à l'appui (i) dans le cas d'une poutre isostatique associée à la travée (i) sous charges externes.

Cette condition (compatibilité des rotations) nous donne (n-1) équations à (n-1) inconnues (M_i).

Les efforts internes dans chaque travée s'obtiennent par superposition des efforts dans le système fondamental et des effets des grandeurs hyperstatiques M_i .

Finalement on obtient les formules donnant M_y , M_x , et V_z des poutres circulaires continues.

$$\begin{aligned}
M_{y_i}(\alpha) &= M_{y_i,0}(\alpha) + M_{y_{i-1}} \frac{\sin(\alpha_{l_i} - \alpha)}{\sin \alpha_{l_i}} + M_{y_i} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_{l_i}} \\
M_{x_i}(\alpha) &= M_{x_{i,0}}(\alpha) - M_{y_{i-1}} \left(\frac{1}{\alpha_{l_i}} - \frac{\cos(\alpha_{l_i} - \alpha)}{\sin \alpha_{l_i}} \right) + M_{y_i} \left(\frac{1}{\alpha_{l_i}} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_{l_i}} \right) \quad (5-11) \\
V_{z_i}(\alpha) &= V_{z_{i,0}}(\alpha) + \frac{M_{y_i} - M_{y_{i-1}}}{R \alpha_{l_i}}
\end{aligned}$$

CHAPITRE VI

VI - CALCUL DES MOMENTS LONGITUDINAUX :

VI-1 CALCUL DES ROTATIONS AUX APPUIS SOUS DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENT :

Les angles de rotation θ^g et θ^d qui vont intervenir pour résoudre le système de CLAPEYRON sont les rotations (avec les conventions de signes de la résistance des matériaux) à l'origine et à l'extrémité de la travée de longueur l_i supposée simplement appuyée et sont données ci-dessous sous l'effet de différents cas de chargement.

VI -1.1 CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE :

a - travée droite :

$$\theta_{i,0}^d = -\frac{q l_i^3}{24 EI} \quad (6-1a)$$

$$\theta_{i+1,0}^g = +\frac{q l_i^3}{24 EI} \quad (6-1b)$$

Donc $\theta_{i,0}^d = -\theta_{i+1,0}^g$

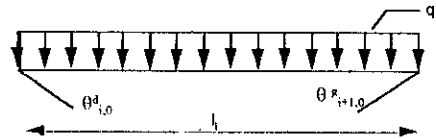


Figure (6 - 1)

b - travée courbe :

$$\theta_{i,0}^d = +\frac{q R^3}{GK} \left| \frac{\alpha l_i}{2} + \frac{\alpha l_1}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha l_i}{2}\right)} - \frac{3}{2} \tan \frac{\alpha l_i}{2} \right| - \frac{q R^3}{2 EI} \left| \frac{\alpha l_1}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha l_i}{2}\right)} - \tan \frac{\alpha l_i}{2} \right| \quad (6-2a)$$

$$\theta_{i+1,0}^g = -\frac{q R^3}{GK} \left| \frac{\alpha l_i}{2} + \frac{\alpha l_1}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha l_i}{2}\right)} - \frac{3}{2} \tan \frac{\alpha l_i}{2} \right| - \frac{q R^3}{2 EI} \left| \frac{\alpha l_1}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha l_i}{2}\right)} - \tan \frac{\alpha l_i}{2} \right| \quad (6-2b)$$

Donc : $\theta_{i,0}^d = -\theta_{i+1,0}^g$

VI-2 CHARGES CONCENTREES

a - travée droite :

charge concentrée centrée : $a = b = l_i / 2$

$$\theta_{i,0}^d = -\frac{P l_i^2}{16 EI}$$

$$\theta_{i,0}^d = -\theta_{i+1,0}^g \quad (6-3a)$$

$$\theta_{i+1,0}^g = \frac{P l_i^2}{16 EI} \quad (6-3b)$$

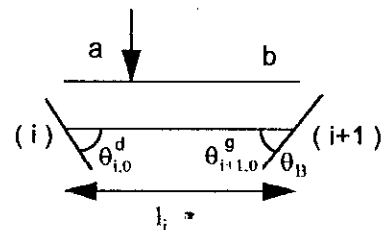


Figure (6 - 2)

Charge concentrée excentrée :

$$\theta_{i,0}^d = -\frac{pb(l_i^2 - b^2)}{6EI l_i} \quad (6-4a)$$

$$\theta_{i+1,0}^g = \frac{pa(l_i^2 - a^2)}{6EI l_i} \quad (6-4b)$$

b - Travée courbe : La position de la charge p étant repérée par l'angle α_p .

$$\theta_{i,0}^d = -\frac{pR^2}{\sin \alpha_{l_i}} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \left[\frac{\alpha_{l_i}}{2} \frac{\sin \alpha_{l_i}}{\sin \alpha_{l_i}} - \frac{\alpha_{l_i}}{2} \cos(\alpha_{l_i} - \alpha_{l_i}) \right] \quad (6-5a)$$

$$+ \frac{pR^2}{\sin \alpha_{l_i}} \frac{1}{GK} \left[\sin(\alpha_{l_i} - \alpha_p) - \frac{\alpha_{l_i} - \alpha_p}{\alpha_{l_i}} \sin \alpha_{l_i} \right]$$

$$\theta_{i+1,0}^g = \frac{pR^2}{\sin \alpha_{l_i}} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \left[\frac{\alpha_{l_i}}{2} \frac{\sin(\alpha_{l_i} - \alpha_{l_i})}{\sin \alpha_{l_i}} - \frac{(\alpha_{l_i} - \alpha_{l_i}) \cos(\alpha_{l_i})}{2} \right] \quad (6-5b)$$

$$- \frac{pR^2}{\sin \alpha_{l_i}} \frac{1}{GK} \left[\sin(\alpha_p) - \frac{\alpha_p}{\alpha_{l_i}} \sin \alpha_{l_i} \right]$$

VI-3 CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE :

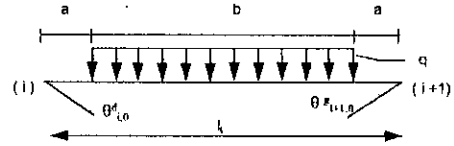
a - Travée droite :

Charge répartie partiellement et centrée

$$\theta_{i,0}^d = -\frac{qb(3l_i^2 - b^2)}{48EI} \quad (6-6a)$$

$$\theta_{i+1,0}^g = \frac{qb(3l_i^2 - b^2)}{48EI} \quad (6-6b)$$

$$\theta_{i,0}^d = -\theta_{i+1,0}^g$$



Charge partiellement répartie excentrée :

$$\theta_{i,0}^d = \frac{qb(2c+b)}{48EI l_i} \left[4l_i^2 - (b+2c)^2 - b^2 \right] \quad (6-7a)$$

$$\theta_{i+1,0}^g = \frac{qb(2a+b)}{48EI l_i} \left[4l_i^2 - (b+2a)^2 - b^2 \right] \quad (6-7b)$$

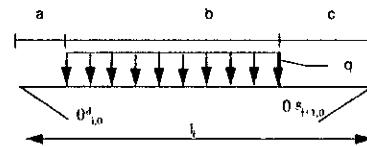


Figure (6-4)

b - Travée courbe : On utilise les mêmes formules que dans le cas de la travée courbe sous une charge concentrée.

VI-4 CALCUL DES ROTATIONS D'APPUI SOUS LA CHARGE PERMANENTE :

avec la travée N° 6 courbe (CP = 28,62 t / ml)

N° d'appui	0	1	2	3	4	5	6	7
$\theta_{i,0}^s(\text{rd}) 10^{-3}$		10,03	15,07	12,89	12,89	12,89	18,66	3,55
$\theta_{i,0}^d(\text{rd}) 10^{-3}$	-10,03	-15,07	-12,89	-12,89	-12,89	-18,66	-3,55	
$[\theta_{i,0}^d(\text{rd}) - \theta_{i,0}^s(\text{rd})] 10^{-3}$	-10,03	-25,1	-27,96	-25,78	-25,78	-31,91	-22,57	-3,55

Avec la travée N° 6 droite :

N° d'appui	0	1	2	3	4	5	6	7
$\theta_{i,0}^s(\text{rd}) 10^{-3}$		10,03	15,07	12,89	12,89	12,89	19,02	3,55
$\theta_{i,0}^d(\text{rd}) 10^{-3}$	-10,03	-15,07	-12,89	-12,89	-12,89	-19,02	-3,55	
$[\theta_{i,0}^d(\text{rd}) - \theta_{i,0}^s(\text{rd})] 10^{-3}$	-10,03	-25,1	-27,96	-25,78	-25,78	-31,91	-22,57	-3,55

Calcul des rotations sur la surcharge des trottoirs ST = 0,67 t / ml:

Avec la travée n°6 courbe

N° d'appui	0	1	2	3	4	5	6	7
$\theta_{i,0}^s(\text{rd}) 10^{-5}$		7,03	11,3	11,5	11,5	11,5	14,07	2,75
$\theta_{i,0}^d(\text{rd}) 10^{-5}$	-7,03	-11,3	-11,5	-11,5	-11,5	-14,07	-2,75	
$[\theta_{i,0}^d(\text{rd}) - \theta_{i,0}^s(\text{rd})] 10^{-5}$	-7,03	-18,33	-22,8	-23	-23	-25,57	-16,82	-2,75

Avec la travée N° 6 droite :

N° d'appui	0	1	2	3	4	5	6	7
$\theta_{i,0}^s(\text{rd}) 10^{-5}$		7,03	11,3	11,5	11,5	11,5	14,85	2,75
$\theta_{i,0}^d(\text{rd}) 10^{-5}$	-7,03	-11,3	-11,5	-11,5	-11,5	-14,85	-2,75	
$[\theta_{i,0}^d(\text{rd}) - \theta_{i,0}^s(\text{rd})] 10^{-5}$	-7,03	-18,33	-22,8	-23	-23	-26,35	-17,6	-2,75

CALCUL DES ROTATIONS D'APPUIS SOUS LA SURCHARGE A(I) AVEC
UNE SEULE TRAVEE CHARGEE A CHAQUE FOIS :

N° de la travée chargée	N° d'appui	rotation gauche $\theta_{i,0}^s$ (rd) 10^{-4}	rotation droite $\theta_{i,0}^d$ (rd) 10^{-4}	$[\theta_{i,0}^d - \theta_{i,0}^s]$ (rd) 10^{-4}
1	0	0	-7,18	-7,18
	1	7,18	0	-7,18
2	1	0	-10,16	-10,16
	2	10,16	0	-10,16
3	2	0	-9,96	-9,96
	3	9,96	0	-9,96
4	3	0	-9,96	-9,96
	4	9,96	0	-9,96
5	4	0	-9,98	-9,98
	5	9,98	0	-9,98
6	5	0	-12,93	-12,93
	6	12,93	0	-12,93
7	6	0	-3,26	-3,26
	7	3,26	0	-3,26

SURCHARGE A(I) AVEC LA TRAVÉE N° 6 COURBE ET DEUX TRAVÉES CHARGÉES A CHAQUE FOIS :

N° de la travée chargée	N° d'appui	rotation gauche $\theta_{i,0}^g$ (rd) 10^{-4}	rotation droite $\theta_{i,0}^d$ (rd) 10^{-4}	$[\theta_{i,0}^d - \theta_{i,0}^g]$ 10^{-4} (rd)
1+2	0	0	-4,16	-4,16
	1	4,16	-6,69	-10,85
	2	6,69	0	-6,69
2+3	1	0	-6,49	-6,49
	2	6,49	-6,62	-13,11
	3	6,62	0	-6,62
3+4	2	0	-6,63	-6,63
	3	6,63	-6,63	-13,26
	4	6,63	0	-6,63
4+5	3	0	-6,63	-6,63
	4	6,63	-6,63	-13,26
	5	6,63	0	-6,63
5+6	4	0	-6,6	-6,6
	5	6,6	-8,06	-14,66
	6	8,06	0	-8,06
6+7	5	0	-9,08	-9,08
	6	9,08	-1,78	-10,86
	7	1,78	0	-1,78

Avec la travée N° 6 droite :

N° de la travée chargée	N° d'appui	rotation gauche $\theta_{i,0}^g$ (rd) 10^{-4}	rotation droite $\theta_{i,0}^d$ (rd) 10^{-4}	$[\theta_{i,0}^d - \theta_{i,0}^g]$ 10^{-4} (rd)
5+6	4	0	-6,6	-6,6
	5	6,6	-8,5	-15,1
	6	8,5	0	-8,5
6+7	5	0	-9,58	-9,58
	6	9,58	-1,78	-11,37
	7	1,78	0	-1,78

Calcul des rotations d'appuis sous la surcharge M_C 120

- Avec la travée N°6 courbe :

N° de la travée chargée	N° d'appui	rotation gauche $\theta_{i,0}^g$ (rd) 10^{-4}	rotation droite $\theta_{i,0}^d$ (rd) 10^{-4}	$[\theta_{i,0}^d - \theta_{i,0}^g$ (rd)] 10^{-4}
1	0	0	-9,48	-9,48
	1	8,48	0	-8,48
2	1	0	-10,9	-10,9
	2	10,9	0	-10,9
3	2	0	-10,72	-10,72
	3	10,72	0	-10,72
4	3	0	-10,72	-10,72
	4	10,72	0	-10,72
5	4	0	-10,72	-10,72
	5	10,72	0	-10,72
6	5	0	-12,70	-12,70
	6	12,70	0	-12,70
7	6	0	-3,37	-3,37
	7	2,89	0	-2,89

- Avec la travée N° 6 droite :

N° de la travée chargée	N° d'appui	rotation gauche $\theta_{i,0}^g$ (rd) 10^{-4}	rotation droite $\theta_{i,0}^d$ (rd) 10^{-4}	$[\theta_{i,0}^d - \theta_{i,0}^g$ (rd)] 10^{-4}
6	5	0	-10,40	-10,40
	6	10,40	0	-10,40
7	6	0	-3,37	-3,37
	7	2,89	0	-2,89

VI -5 CALCUL DES CONSTANTES MECANIQUES :

Le calcul des poutres continues nous a permis de déterminer les constantes mécaniques ou coefficients de souplesse intervenant dans la résolution du système de CLAPEYRON. Ces coefficients ne sont fonctions que des caractéristiques géométriques de la poutre et sont définies comme suit :

Pour des travées droites :

$$a_i = c_i = \frac{p_i}{3EI} \quad (6-8a)$$

$$b_i = \frac{p_i}{6EI} \quad (6-8b)$$

Pour des travées courbes :

$$a_i = c_i = R \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \frac{\alpha_{l_i} - \sin \alpha_{l_i} \cos \alpha_{l_i}}{2 \sin^2 \alpha_{l_i}} - \frac{R}{GK} \left(\frac{1}{\alpha_{l_i}} - \frac{\cos \alpha_{l_i}}{\sin \alpha_{l_i}} \right) \quad (6-9a)$$

$$b_i = R \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \frac{\sin \alpha_{l_i} - \alpha_{l_i} \cos \alpha_{l_i}}{2 \sin^2 \alpha_{l_i}} - \frac{R}{GK} \left(\frac{1}{\sin \alpha_{l_i}} - \frac{1}{\alpha_{l_i}} \right) \quad (6-9b)$$

REMARQUE :

Les constantes mécaniques pour les charges de longues durées sont calculées avec la rigidité flexionnelle $E_v I$, et celles pour les charges de courtes durées avec la rigidité flexionnelles $E_i I$.

Les résultats des calculs sont présentés dans les tableaux suivants :

Pour les charges de longues durées :

N° de la travée	Type de la travée	$a_i = c_i \times 10^{-6}$	$b_i \times 10^{-6}$
1	Courbe	4,02	2,01
2	Courbe	4,35	2,17
3	Courbe	4,34	2,17
4	Courbe	4,34	2,17
5	Courbe	4,34	2,17
6	Courbe	4,73	2,36
6	Droite	4,4	2,2
7	Droite	2,51	1,25

Pour les charges de courtes durées :

N° de la travée	Type de la travée	$a_i = c_i \times 10^{-6}$	$b_i \times 10^{-6}$
1	Courbe	1,55	0,77
2	Courbe	1,65	0,82
3	Courbe	1,63	0,81
4	Courbe	1,63	0,81
5	Courbe	1,63	0,81
6	Courbe	1,78	0,89
6	Droite	1,55	0,78
7	Droite	0,88	0,44

VI-6 CALCUL DES MOMENTS AUX APPUIS SOUS LES DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENTS :

Il s'agit dans notre cas de calculer les six moments aux appuis ($M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$) intermédiaires sachant que ceux aux appuis des extrémités sont nulles

$$(M_0 = M_7 = 0)$$

L'équation des trois moments (équation 5.1) peut être écrite sous la formulation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} (a_2 + c_1) & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & (a_3 + c_2) & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & (a_4 + c_3) & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & (a_5 + c_4) & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & (a_6 + c_5) & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & (a_7 + c_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{1,0}^d - \theta_{1,0}^g \\ \theta_{2,0}^d - \theta_{2,0}^g \\ \theta_{3,0}^d - \theta_{3,0}^g \\ \theta_{4,0}^d - \theta_{4,0}^g \\ \theta_{5,0}^d - \theta_{5,0}^g \\ \theta_{6,0}^d - \theta_{6,0}^g \end{bmatrix}$$

(6 - 10)

ou plus simplement : $[CM] \cdot [M_i] = [\theta_i]$

Avec [CM] matrice des constantes mécaniques ou coefficients de souplesse de la poutre.

[M i] Vecteur des moments aux appuis.

[θ_i] Vecteur rotation aux appuis.

La matrice des constantes mécaniques [CM] est calculée une fois pour les charges de longue durée et une fois pour les charges de courtes durées. Le vecteur rotation aux appuis étant connu, on déterminera alors les moments aux appuis après résolution matricielle numérique.

CALCUL DES MOMENTS AUX APPUIS :

1 - Sous la charge permanente :

N° d'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (tm)	0	-2 451,93	-2 109,37	-1 985,65	-1 828,22	-2 581,65	-2 443,96	0

2 - Sous la charge des trottoirs :

N° d'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (tm)	0	-45,39	-46,1	-48,01	-43,9	-58,2	-53,7	0

3 - Calcul des moments aux appuis sous la surcharge A(l) avec 1 seule travée chargée à chaque fois :

N° de la travée chargée	Valeur de la surcharge A(l) (t/ml)	Moments aux appuis (t.m)						
		M ₀ = M ₇	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆
1	6,145	0	-241,2	65,17	-17,5	4,7	-1,3	-0,4
2	5,720	0	-249,11	-264,6	71,01	-19,1	5,3	-1,7
3	5,740	0	66,14	-255,9	-258,89	69,6	-19,3	6,2
4	5,740	0	-17,7	68,6	-257,8	-258,98	71,9	-23,09
5	5,740	0	-17,7	68,6	-257,8	-258,98	71,9	-23,09
6	5,500	0	-1,59	6,18	-23,23	86,64	-322,9	-328,48
7	7,480	0	0,19	-0,7	2,7	-10,32	38,49	-146,5

Sous la surcharge $M_C 120$: le char $M_C 120$ est centré sur l'appui à chaque fois .

$$M_0 = M_7 = 0$$

N° de la travée chargée	Moments aux appuis (t.m)					
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
1	-283,54	76,6	-20,56	5,53	-1,53	0,5
2	-267,26	-283,88	76,18	-20,49	5,69	-1,8
3	71,18	-275,45	-278,64	74,9	-20,82	6,68
4	-199,1	73,06	277,5	-278,7	77,4	-24,8
5	5,1	-19,6	73,7	-275,1	-288,5	92,6
6	-1,28	4,9	-18,6	69,6	-259,7	-344,6
7	0,19	-0,76	2,8	10,67	39,7	-151,4

VI-7 DETERMINATION DU MOMENT MAX EN TRAVEE SOUS LES DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENT :

Pour pouvoir calculer le moment max en travée on doit tout d'abord déterminer l'abscisse ou l'angle donnant la section dangereuse pour la travée et le chargement considérés, et ceci en dérivant en premier lieu la fonction du moment longitudinal en travée par rapport à la variable x ou α selon le type de la travée étudiée (droite ou courbe), ensuite annuler l'expression de la dérivée pour enfin obtenir l'abscisse ou l'angle donnant le moment max dans cette travée.

1 er cas : Travée droite

En partant de la formule de CLAPEYRON on a pu obtenir l'expression du moment de flexion dans la travée N° i donnée par :

$$M_i(x) = M_{i,0}(x) + M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \frac{x}{L_i} \quad (6 - 11)$$

ou $M_{i,0}(x)$ est le moment isostatique dans la travée N° i

M_{i-1} et M_i sont les moments aux appuis de la travée N° i.

Pour une charge uniformément répartie sur la longueur L_i (charge permanente, surcharge de trottoir, surcharge $A(1)$), l'expression du moment isostatique en travée est donnée par :

$$M_{i,0}(x) = \frac{qx}{2}(L_i - x) \Leftrightarrow M_i(x) = \frac{qx}{2}(L_i - x) + M_{i-1}\left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \frac{x}{L_i}$$

$$\frac{dM_i(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{L_i}{2} + \frac{M_i - M_{i-1}}{qL_i} \quad (6-12)$$

x_0 est l'abscisse donnant le moment max dans la travée N° i.

En ce qui concerne la surcharge M_c120 , l'abscisse x_0 est donné directement par le résultat des lignes d'influence soit $x_0 = 0,5 L_6$ et $0,6 L_7$ (L_6 et L_7 étant des travées droites).

2^{ème} cas : travée courbe :

De la même façon que pour la travée droite, on obtient la formule du moment en travée exprimée comme suit :

$$M_i(\alpha) = M_{i,0}(\alpha) + M_{i-1} \frac{\sin(\alpha_{l_i} - \alpha)}{\sin(\alpha_{l_i})} + M_i \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_{l_i}} \quad (6-13)$$

Pour déterminer l'angle α_0 donnant le moment max en travée, on utilise la méthode itérative dite de NEWTON, ceci par la recherche de la solution de l'équation suivante :

$$\frac{dM_i(\alpha)}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\alpha} \left[2qR^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\alpha_{l_i} - \alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_{l_i}}{2}\right)} + M_{i-1} \frac{\sin(\alpha_{l_i} - \alpha)}{\sin \alpha_{l_i}} + M_i \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_{l_i}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{qR^2}{\cos\left(\frac{\alpha_{l_i}}{2}\right)} \sin\left(\frac{\alpha_{l_i}}{2} - \alpha\right) - \frac{M_{i-1}}{\sin \alpha_{l_i}} \sin(\alpha_{l_i} - \alpha) - \frac{M_i}{\sin(\alpha_{l_i})} \cos(\alpha) = 0 \quad (6-14)$$

Pour le convoi de type M_c120 , l'angle α_0 est déterminé également par le résultat des lignes d'influence soit $\alpha_0 = 0,4 \alpha_{l_1} ; 0,5 \alpha_{l_2} ; 0,5 \alpha_{l_3} ; 0,5 \alpha_{l_4} ; 0,5 \alpha_{l_5} ; 0,5 x_{l_6} ; 0,6 x_{l_7}$

(Les travées 1, 2, 3, 4, 5 étant des travées courbes).

REMARQUE : Dans les calculs qui suivront, nous allons considérer que la travée N° 6 est droite, cela induit un moment de flexion plus grand que celui de la même travée considérée courbe.

CALCUL DES MOMENTS EN TRAVEES :

1 - Sous la charge permanente :

N° de la travée (i)	Type de travée	Moments aux appuis (tm)		x(m) ou α (rd) donnant M_{Tl} max	Moment max en travée M_{Tl} (tm)
		M_{i-1}	M_i		
1	Courbe	0	-2 451,93	0,193	1 892,25
2	Courbe	-2 451,93	-2 109,37	0,180	1 487,64
3	Courbe	-2 109,37	-1 985,65	0,178	1 661,81
4	Courbe	-1 985,68	-1 828,22	0,179	1 805,21
5	Courbe	-1 828,22	-2 581,69	0,179	1 501,95
6	Droite	-2 581,69	-2 443,96	17,59	1 808,9
7	Droite	-2 443,96	0	14,22	476,89

2 - Sous la surcharge de trottoirs ST :

N° de la travée (i)	Type de travée	Moments aux appuis (tm)		x(m) ou α (rd) donnant M_{Tl} max	Moment max en travée M_{Tl} (tm)
		M_{i-1}	M_i		
1	Courbe	0	-45,39	0,20	49,35
2	Courbe	-45,39	-46,10	0,181	42,71
3	Courbe	-46,1	-48,00	0,178	39,88
4	Courbe	-48,00	-43,9	0,181	41,01
5	Courbe	-43,9	-58,2	0,172	35,97
6	Droite	-58,2	-53,7	17,57	45,3
7	Droite	-53,7	0	13,95	11,55

3 - Moment max en travée dû à la surcharge A(l) avec un seul travée chargée à chaque fois :

N° de la travée (i)	Type de travée	Valeur de la surcharge A(l) (t/ml)	Moments aux appuis (tm)		x(m) ou α (rd) donnant M_{T1} max	Moment max en travée M_{T1} (tm)
			M_{i-1}	M_i		
1	Courbe	6,145	0	-241,2	0,210	530,98
2	Courbe	5,720	-249,11	-264,6	0,181	499,79
3	Courbe	5,740	-255,9	-258,89	0,179	489,2
4	Courbe	5,740	-257,8	-258,89	0,179	488,18
5	Courbe	5,740	-257,8	-258,9	0,179	489,53
6	Droite	5,500	-322,9	-328,44	17,34	506,34
7	Droite	7,480	-146,5	0	10,89	297,73

4 - Moment max en travée dû à la surcharge A(l) avec deux travées chargées à chaque fois:

travée chargée	N° de la travée (i)	Type de travée	Valeur de la surcharge A(l) (t/ml)	Moments aux appuis (tm)		x(m) ou α (rd) donnant M_{T1} max	Moment max en travée M_{T1} (tm)
				M_{i-1}	M_i		
1+2	1	Courbe	3,97	0	-303,79	0,195	277,64
	2	Courbe		-303,79	-136,48	0,192	307,53
2+3	2	Courbe	3,85	-115,17	-339,13	0,161	287,31
	3	Courbe		-339,13	-126,70	0,198	272,42
3+4	3	Courbe	3,86	-124,58	-343,99	0,159	272,53
	4	Courbe		-343,94	-126,03	0,199	271,78
4+5	4	Courbe	3,86	-126,03	-342,50	0,160	272,56
	5	Courbe		-342,50	-130,50	0,198	270,05
5+6	5	Courbe	3,84	-113,40	-389,60	0,154	256,31
	6	Droite		-389,60	-224,7	18,6	276,01
6+7	6	Droite	4,33	-218,5	-397,76	16,45	348,90
	7	Droite		-397,76	0	14,54	60,28

5 - Moment max en travée dû à la surcharge M_c120 :

N° de la travée (i)	Type de travée	Moments aux appuis (tm)		x(m) ou α (rd) donnant M_{T1} max	Moment max en travée M_{T1} (tm)
		M_{i-1}	M_i		
1	Courbe	0	-283,54	0,191	653,83
2	Courbe	-267,26	-283,88	0,181	620,68
3	Courbe	-275,45	-278,64	0,179	611,63
4	Courbe	-277,5	-278,7	0,179	610,56
5	Courbe	-275,1	-288,5	0,179	606,8
6	Droite	-259,7	-344,6	17,39	653,2
7	Droite	-151,4	0	10,70	593,54

6 - Combinaison des charges donnant le moment de flexion longitudinal max sur appuis

Combinaison de charge	CP	ST	Max M_c120	Max A(l)	CP + 1,2 (Al+ST)	CP + M_c120	CP+(ST+AL) Max CP+ M_c120
M ₀	0	0	0	0	0	0	0
M ₁	-2 451,93	-45,39	-283,54	-303,79	-2 870,94	2 735,47	-2 870,94
M ₂	-2 109,37	-46,1	-283,88	-339,17	-2 571,69	-2 395,25	-2 571,69
M ₃	-1 985,65	-48	-278,64	-343,99	-2 456,04	-2 264,3	-2 456,04
M ₄	-1 828,22	-43,9	-278,7	-342,5	-2 291,9	-2 106,92	-2 291,9
M ₅	-2 581,65	-58,2	-288,5	-278,6	-2 985,81	-2 870,15	-2 985,81
M ₆	-2 443,95	-53,7	-344,6	-397,76	-2 985,7	-2 788,55	-2 985,7
M ₇	0	0	0	0	0	0	0

Le moment max de flexion longitudinal sur appui est donné sur l'appui N° par la combinaison de charge :

$$M_{\max} = M_5 = -2985,81 \text{ t.m} \quad \text{Avec } K_{\alpha_{\text{moy}}} = 1$$

Combinaison des charges donnant le moment de flexion longitudinal max M_T en travée.

Combinaison de charge	CP	ST	Max M_{c120}	Max A(l)	CP + (A1+ST)	CP + M_{c120}	CP+(ST+AL) Max CP+ M_{c120}
M _{T1}	1 892,25	49,35	530,98	653,83	2 588,64	2 546,08	2 588,64
M _{T2}	1 487,64	42,71	499,79	620,68	2 138,64	2 108,32	2 138,64
M _{T3}	1 661,81	39,88	489,2	612,63	2 296,7	2 274,44	2 296,7
M _{T4}	1 805,21	41,01	488,18	610,56	2 296,7	2 415,77	2 440,24
M _{T5}	1 501,95	35,97	489,53	606,8	2 440,24	2 108,75	2 132,55
M _{T6}	1 808,9	45,67	506,34	659,2	2 471,31	2 468,1	2 471,31
M _{T7}	473,89	11,55	297,73	593,54	854,02	1 067,43	1 067,43

Le moment max de flexion longitudinal sur appui est donné par la travée N°6 et par la combinaison de charge : $CP + 1,2 [A(l) + ST]$

$$M_{T_{max}} = M_{T6} = 2471.31 \text{ t.m} \quad \text{Avec } K_{\alpha \text{ moy}} = 1$$

CHAPITRE VII

VII-REPARTITION TRANSVERSALE DU MOMENT DE FLEXION LONGITUDINAL:

D'après les hypothèses de GUYON et MASSONNET, la construction réelle est remplacée par une dalle orthotrope d'épaisseur constante ayant les mêmes rigidités moyennes de flexion et de torsion. Dans notre cas le rôle d'entretoisement est joué par la dalle.

Pour répartir l'ensemble des efforts (moment de flexion, effort tranchant, réaction d'appuis, moment de torsion), la méthode de GUYON-MASSONNET donne des coefficients de répartition transversale tabulés: $K, \varepsilon, \mu, \tau$ correspondant au couple de valeurs (α, θ) qui sont respectivement, paramètre de torsion et d'entretoisement.

Le coefficient de répartition transversale du moment de flexion K est défini comme étant le rapport du déplacement vertical $\varpi(x, y)$ d'un point de la construction sous l'effet d'une charge $P(x)$, à $\varpi_0(x)$ déplacement vertical du même point sous l'effet d'une charge $P_0(x)$ supposée répartie sur toute la construction.

Les tables de BARES et MASSONNET donnent les valeurs de K en fonction de :

- L'excentricité (e) de la charge.
- La position transversale (y) considérée.
- Le paramètre d'entretoisement θ .
- Le paramètre de torsion α .

VII -1 DETERMINATION DES PARAMETRES α ET θ :

$$\theta = \frac{b}{I} \sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_E}} \quad (\text{paramètre d'entretoisement}). \quad (7-1)$$

avec :

ρ_P : Rigidité de flexion longitudinale.

ρ_E : Rigidité de flexion transversale.

$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2 \cdot \sqrt{\rho_P \cdot \rho_E}} \quad (\text{Paramètres de torsion}). \quad (7-2)$$

avec :

γ_P : Rigidité torsionnelle longitudinale.

γ_E : Rigidité torsionnelle transversale.

Considérons une travée isolée de longueur l_i

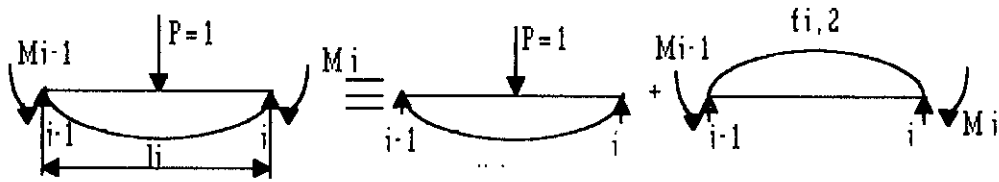


Figure (7 - 1)

La flèche de la travée (i) du système hyperstatique soumise d'une part à la charge unité ($P=1$) centrée et d'autre part aux moments de continuité M_{i-1} et M_i est donnée par :

$$f_i = -\frac{(M_{i-1}+M_i)}{16EI_i} \cdot l_i^2 + \frac{l_i^3}{48EI_i} \quad (7-3)$$

La flèche de travée isostatique associée à la travée (i) du système hyperstatique est :

$$f_i' = \frac{l_i^3}{48EI_i^*} \quad (7-4)$$

Cherchons l'inertie I^* de la travée isostatique de telle sorte à avoir la même flèche pour les deux systèmes précédents.

$$\begin{aligned} f_i = f_i' &\Leftrightarrow \frac{l_i^3}{48EI_i^*} = -\frac{(M_{i-1}+M_i)}{16EI_i} l_i^2 + \frac{l_i^3}{48EI_i} \\ &\Leftrightarrow I_i^* = l_i \cdot \frac{l_i}{l_i - 3(M_{i-1}+M_i)} \end{aligned} \quad (7-5)$$

posons $v = \frac{l_i}{l_i - 3(M_{i-1}+M_i)}$

On aura donc $I_i^* = v I_i$ avec I_i^* : inertie fictive de la travée n° i.

Pour le calcul de I_i on chargera la travée la plus longue soit, la travée n°6.

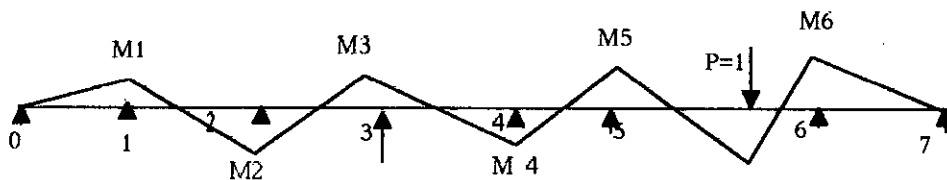


Figure (7 - 2)

On obtient les valeurs suivantes :

n° d'apuis	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	-0,013	0,050	-0,170	0,700	-2,622	-3,330	0

Calcul de v :
$$v = \frac{l_6}{l_6 - 3(M_5 + M_6)} = \frac{34,75}{34,75 - 3(2,62 + 3,33)} = 2,05$$

VII -1.1 CALCUL DES RIGIDITES FLEXIONNELLES:

transversalement : $\rho_E = \frac{EI_E}{l_0}$ avec $I_E = \frac{l_0 \times e^3}{12}$

d'ou $\rho_E = \frac{E \cdot e^3}{12}$

Longitudinalement :

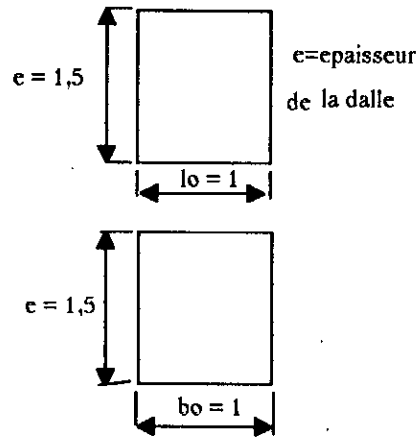
$\rho_p^* = \frac{EI_p^*}{b_0}, I_p^* = v I_p$

avec $I_p = \frac{b_0 \cdot e^3}{12} = \frac{e^3}{12}$

d'ou $I_p^* = \frac{v \cdot e^3}{12}$

donc :

$\rho_p^* = \frac{E v e^3}{12}$



et enfin
$$\theta = \frac{b}{l}^4 \sqrt{\frac{\rho_p^*}{\rho_E}} = \frac{b}{l}^4 \sqrt{v} \quad (7-6)$$

avec

b : la demi largeur de la dalle équivalente.

l : la portée de la sixième travée.

A.N : $l = 34,75$ m, $b = 3,365$ m, $v = 2,05$

$$\theta^* = \frac{3,365}{34,75}^4 \sqrt{2,05} = 0,116$$

$$\theta^* = 0,116$$

VII -1.2 CALCUL DES RIGIDITES TORSIONNELLES:

$$\alpha^* = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2 \cdot \sqrt{\rho_P \cdot \rho_E}} \quad \text{avec} \quad \gamma_P = \frac{GI_P}{b_0} \quad \text{et} \quad \gamma_E = \frac{GI_E}{I_0}$$

$$I_{IP} = I_{IE} = \frac{e^3}{12} \quad \text{car} \quad b_0 = I_0 = 1m$$

Le paramètre de torsion est donc :

$$\alpha^* = \frac{GI_P + GI_E}{\sqrt{\rho_P \cdot \rho_E}}$$

VII -2 CALCUL DE K_α :

Les tables de barès et Mossonnet donnent les valeurs de K_0 et K_1 correspondant à $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$

Pour avoir les coefficients K_α pour $\alpha = 0,29$, on fait une interpolation entre K_0 et K_1 avec la formule de SATTLER :

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \alpha^{1 - e^{\frac{0,065 - \alpha}{0,663}}}$$

Soit pour notre cas :

$$K_\alpha = K_0 + 0,92 (K_1 - K_0)$$

A l'aide du tableau donnant K_α on trace les lignes d'influence du coefficient de réparation transversale et cela pour les excentricités suivantes : $b, 3b/4, b/2, b/4, 0$ et pour les neuf section de la largeur de la dalle équivalente : $-b, -3b/4, -b/2, -b/4, 0, b/4, b/2, 3b/4$ et b . On retiendra pour le calcul des efforts, l'excentricité qui donne les plus grandes valeurs de K_α .

Tableau donnant K_0 pour $\theta = 0,116$:

e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
y									
0	0,9983	0,9992	1,0003	1,0008	1,0011	1,0008	1,0003	0,9992	0,9983
b/4	0,2488	0,4369	0,6250	0,8129	1,0008	1,1880	1,3752	1,5619	1,7484
b/2	-0,5001	-0,1250	0,2497	0,6250	1,0003	1,3752	1,7502	2,1248	2,4990
3b/4	-1,2488	-0,6870	-0,1250	0,4369	0,9992	1,5619	2,1248	2,6880	3,2512
b	-1,9974	-1,2488	-0,5001	0,2488	0,9983	1,7484	2,4990	3,2512	4,0034

Tableau donnant K1 pour $\theta = 0,116$:

e y	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,9985	0,9993	1,0001	1,0008	1,0046	1,0008	1,0001	0,9993	0,9985
b/4	0,9820	0,9867	0,9914	0,9961	1,0008	1,0050	1,0088	1,0123	1,0156
b/2	0,9661	0,9744	0,9828	0,9914	1,0001	1,0088	1,0174	1,0254	1,0330
3b/4	0,9506	0,9624	0,9744	0,9867	0,9993	1,0123	1,0254	1,0380	1,0515
b	0,9353	0,9506	0,9661	0,9820	0,9985	1,0156	1,0330	1,0515	1,07

Tableau donnant $K\alpha$ pour $\alpha = 0,29$ et $\theta = 0,116$:

e y	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,9984	0,9993	1,0001	1,0008	1,0043	1,0008	1,0001	0,9993	0,9984
b/4	0,9182	0,9388	0,9595	0,9801	1,0008	1,0209	1,0406	1,0601	1,0793
b/2	0,8385	0,8787	0,9190	0,9595	1,0001	1,0406	1,0811	1,1210	1,1600
3b/4	0,7592	0,8190	0,8787	0,9388	0,9993	1,0601	1,1210	1,1815	1,2410
b	0,7012	0,7592	0,8385	0,9182	0,9984	1,0793	1,1600	1,2410	1,3250

VII -3 CALCUL DE $K\alpha_{moy}$:

On doit déterminer les $K\alpha_{moy}$ sous les différents cas de chargement et pour les neuf positions sur la dalle : $\pm b, \pm 3b/4, \pm b/2, \pm b/4$.

Les charges et les surcharges réparties, on utilise la méthode dite de SIMPSON afin de déterminer les surfaces correspondant aux chargements, le coefficient $K\alpha_{moy}$ est donné par la formule suivante :

$$K\alpha_{moy} = \frac{\text{surface de la ligne d'influence chargée}}{\text{largeur chargée}}$$

soit
$$K\alpha_{moy} = \frac{S}{L_c} = \frac{1}{3n} \left[y_0 + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots} y_i + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots} y_i + y_n \right] \quad (7-7)$$

Pour les charges concentrées :

$$K\alpha_{moy} = \frac{\sum P_i K_i}{\sum P_i} = \frac{\sum K_i}{n}$$

avec K_i : Ordonnée K au droit de la charge P_i .

n : nombre de roues de la rangée considérée.

Calcul des coefficients $K\alpha_{moy}$ sous différents chargements :

Nous citerons seulement un seul exemple de calcul, les autres calculs se font de la même manière.

Exemple de calcul :

Position : $Y = 0$, charge permanente, $n = 8$

$$\begin{aligned} K\alpha_{moy} &= \frac{S}{L_c} = \frac{1}{3.8} [Y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8] \\ &= \frac{1}{24} [0,9984 + 4(0,9993 + 1,0008 + 1,0008 + 0,9993) \\ &\quad + 2(1,0001 + 1,0043 + 1,0001) + 0,9984] \\ &= 1,0003 \approx 1 \quad \text{donc } K\alpha_{moy} = 1 \end{aligned}$$

Tableau donnant $K\alpha_{moy}$ pour différents cas de chargement et différents Y:

e surcharges	0	b/4	b/2	3b/4	b
Poids propre CP	1,0003	0,9999	0,9999	0,9998	1,0004
Surcharge A(l)	1,0011	1,00025	1,0000	1,0190	0,9990
Surcharge de trottoirs ST	0,9981	1,0001	1,0192	1,0290	1,0131
Surcharge Mc120	1,0013	1,0400	1,0800	1,0201	1,0631

On remarque que $K\alpha_{moy}$ est proche de 1 dans tous les cas de chargement, On le prendra donc égal à 1; $K\alpha_{moy} = 1$.

Le moment transversal $M_{(x)}$ est égal au produit du moment fléchissant longitudinal moyen M_0 et du coefficient de répartition transversal $K\alpha_{moy}$ calculé ci-avant.

$$M_{(x)} = K\alpha_{moy} \cdot M_0 \quad (7-9)$$

COMBINAISON DE CHARGES DONNANT LE MOMENT LONGITUDINAL MAX
ENTRAVEE ET SUR APPUIS.

$$M_{\max} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} M[\text{CP} + 1,2 (\text{AL} + \text{ST})] \\ M[\text{CP} + \text{Mc } 120] \end{array} \right.$$

1,2: Coefficient de majoration pour le béton précontraint des surcharges A(l)
et ST.

CHAPITRE VIII

VIII - EFFORT TRANCHANT ET REACTIONS D'APPUI:

VIII -1 LIGNE D'INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT:

La ligne d'influence de l'effort tranchant au droit de la section Σ d'abscisse x de la travée $A_{i-1} A_i$ est donnée par la formule :

$$T(\alpha, x) = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, \alpha) + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}$$

avec : $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, \alpha) = T_{0,\alpha}$: effort tranchant isostatique

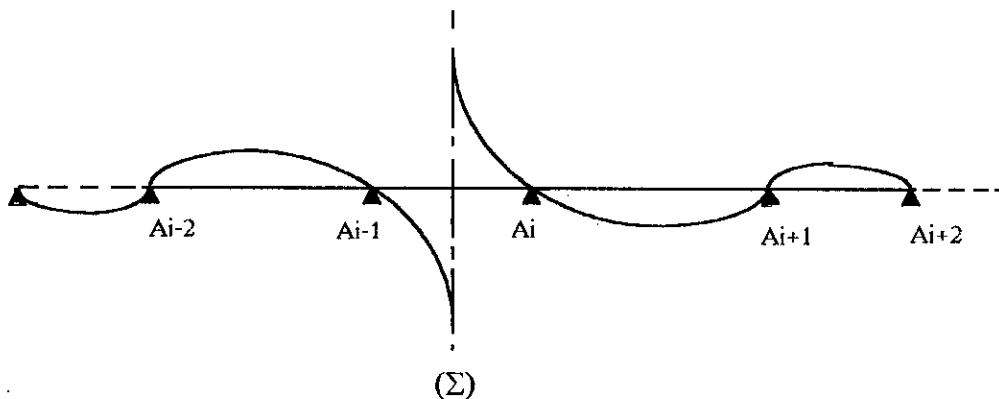


Figure (8 - 1) Ligne d'influence de l'effort tranchant.

$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, \alpha) = 0$ quand la charge se trouve dans une travée autre que la travée $A_{i-1} A_i$.

Dans notre étude, on établira les calculs seulement pour les sections d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

VIII -2 EFFORT TRANCHANT DANS UNE POUTRE CONTINUE:

L'effort tranchant dans une poutre continue s'obtient dans chaque travée par superposition des efforts dans le système fondamental soit la travée isostatique associée, et les efforts dus aux grandeurs hyperstatiques (M_i).

REMARQUE :

L'effort tranchant dans les poutre circulaires est identiques à celui dans une poutre droite de longueur égale à la développée de la ligne moyenne de la poutre courbe soumise à la même charge.

VIII -2.1 EFFORT TRANCHANT POUR LES CHARGES UNIFORMEMENT REPARTIES:

Pour les travées droites : $T_i(x) = P\left(\frac{l_i}{2} - x\right) + \frac{M_i - M_{i+1}}{l_i}$ (8 - 2)

Pour les travées courbes : $T_i(\alpha) = PR\left(\frac{\alpha l_i}{2} - \alpha\right) + \frac{M_i - M_{i+1}}{R\alpha l_i}$ (8 - 3)

a - travées droites : on a $\frac{dT_i(x)}{dx} = -P < 0$

$T_i(x)$ est une fonction linéaire en x, décroissante sur l'intervalle [0, l_i]

On distingue alors deux cas :

1^{er} cas : $0 < x < l_i$, l'effort tranchant à gauche de l'appui (i) est donné par :

$$T_i^g = -\frac{Pl_i}{2} + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \quad (8 - 4)$$

2^{eme} cas : $0 < x < l_{i+1}$, l'effort tranchant à droite de l'appui (i) est donné par :

$$T_i^d = \frac{Pl_{i+1}}{2} + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \quad (8 - 5)$$

b - Travée courbes : $\frac{dT_i(\alpha)}{d\alpha} = -PR < 0$

$T_i(\alpha)$ est une fonction linéaire décroissante sur l'intervalle [0, αl_i]

De la même manière que précédemment

1^{er} cas : $0 < \alpha < \alpha l_i$, $T_i^g = -PR\frac{\alpha l_i}{2} + \frac{M_i - M_{i-1}}{R\alpha l_i}$ (8 - 6)

2^{eme} cas : $0 < \alpha < \alpha l_{i+1}$, $T_i^d = T_{i+1}(0) = \frac{PR\alpha_{i+1}}{2} + \frac{M_i - M_{i-1}}{R\alpha_{i+1}}$ (8 - 7)

Les résultats de calculs pour les charges et surcharges uniformément réparties sont présentés dans les tableaux ci-après.

a - EFFORT TRANCHANT AUX APPUIS DU A LA CHARGE PERMANENTE:

n° de la travée (i)	1	2	3	4	5	6	7
Effort tranchant à l'appui							
à droite de l'appui $T_{i-1}^d(t)$	324,95	474,20	463,63	464,68	436,33	501,30	406,95
à gauche de l'appui $T_i^g(t)$	-496,58	-453,05	-455,93	-454,88	-483,33	-493,38	-160,35

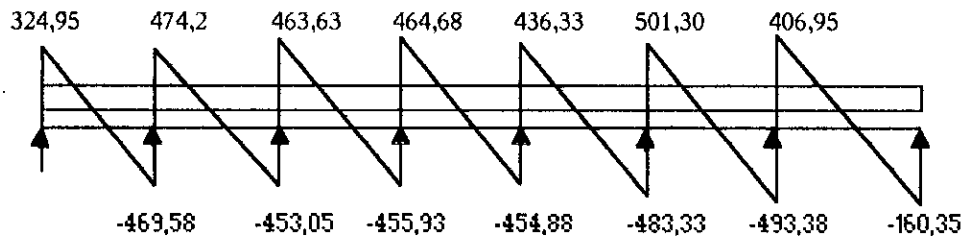


Figure (8 - 2) Diagramme de l'effort tranchant

b - Effort tranchant aux appuis dû à la surcharge des trottoirs :

n° de la travée (i)	1	2	3	4	5	6	7
Effort tranchant à l'appui							
à droite de l'appui $T_{i-1}^d(t)$	8,05	10,84	10,71	10,89	10,32	11,78	9,35
à gauche de l'appui $T_i^g(t)$	-11,21	-10,88	-10,83	-10,64	-11,21	-11,52	-3,93

c - Effort tranchant aux appuis sous la surcharges a (l) :

Travée 1+2 chargées : valeur de la surcharge A(l) : $P = 3,970 \text{ t/ml}$

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Moment fléchissant à l'appui (i) $M_i(t.m)$	0	-303,79	-136,48	36,60	-9,80	2,70	-0,88	0
Effort tranchant à gauche de l'appui (i) $T_i^g(t)$	0	-67,62	-59,14	5,41	-1,44	0,39	-0,10	0,04
Effort tranchant à droite de l'appui (i) $T_i^d(t)$	46,47	69,47	59,40	-1,44	0,39	-0,10	0,04	0

Travées 2+3 chargées valeur de la surcharge A(l) : $P = 3,849 \text{ t/ml}$

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
$M_i(t.m)$	0	-115,16	-339,13	-126,70	34,08	-9,46	3,04	0
$T_i^g(t)$	0	-4,01	-69,26	-55,22	5,13	-1,39	0,35	-0,15
$T_i^d(t)$	-4,01	55,44	68,44	5,13	-1,39	0,35	-0,15	0

Travées 3+4 chargées valeur de la surcharge A(l) : P = 3,858 t/ml

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	32,21	-124,68	-343,95	-126,03	35,01	-11,23	0
T _i ^s (t)	0	1,12	-4,84	-68,80	-55,19	5,01	-1,33	0,56
T _i ^d (t)	1,12	-4,84	55,15	68,76	5,01	-1,33	0,56	0

Travées 4+5 chargées valeur de la surcharge A(l) : P = 3,859 t/ml

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	-8,66	33,50	-126,03	-342,50	-130,50	41,90	0
T _i ^s (t)	0	-0,30	1,30	-4,96	-68,73	-55,39	4,96	-2,11
T _i ^d (t)	-0,30	1,30	-4,96	55,26	68,59	4,96	-2,11	0

Travées 5+6 chargées valeur de la surcharge A(l) : P = 3,840 t/ml

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	2,01	-8,09	30,40	-113,40	-389,60	-224,70	0
T _i ^s (t)	0	0,07	-0,31	0,34	-4,47	-70,28	-61,98	11,33
T _i ^d (t)	0,07	-0,31	0,34	-4,47	53,09	71,47	11,33	0

Travées 6+7 chargées valeur de la surcharge A(l) : P = 4,330 t/ml

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	-1,1	4,18	-15,7	58,6	-218,50	-397,76	0
T _i ^s (t)	0	-0,04	0,16	-0,62	2,31	-8,62	-80,40	62,98
T _i ^d (t)	-0,04	0,16	-0,62	2,31	-8,62	70,08	-22,84	0

VIII -2.2 EFFORT TRANCHANT POUR LE CONVOI MC120 :

Méthode de calcul:

Pour les appuis de rive on placera l'extrémité de la charge Mc120 sur les appuis comme indiqué sur la figure (8-3).

En ce qui concerne les appuis intermédiaires, l'effort tranchant max est produit si le milieu de la charge Mc120 est placée sur ces appuis (voir figure : 8 - 4)

- Appuis dérive : Travée 1 et 7 :

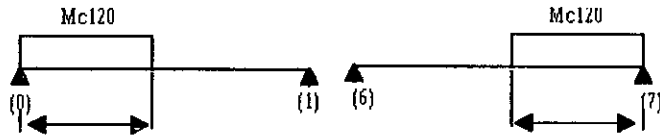


Figure (8 - 7)

- Appuis intermédiaires : Travées 2, 3, 4, 5, 6

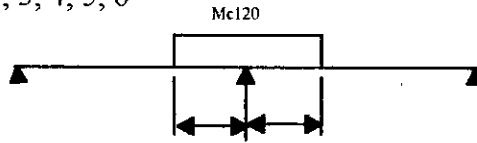


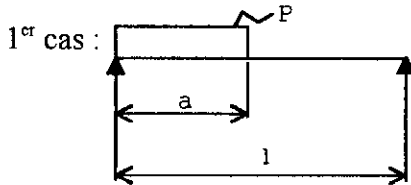
Figure ()

L'effort tranchant est donnée par les formules suivantes:

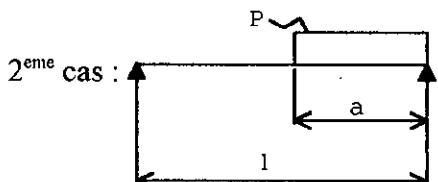
Pour les travées droites :
$$T_i(x) = T_{i,0}(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \quad (8 - 8)$$

Pour les travées courbes
$$T_i(\alpha) = T_{i,0}(\alpha) + \frac{M_i - M_{i-1}}{R\alpha l_i} \quad (8 - 9)$$

a - Travées droites :



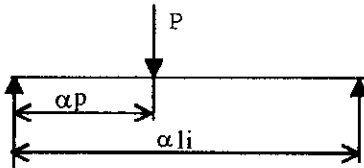
$$\begin{cases} T_{i,0}(x) = \frac{P}{2l}[a(2l-a) - 2lx] & \text{si } 0 < x \leq a \\ T_{i,0}(x) = -\frac{Pa^2}{2l} & \text{si } a \leq x \leq l \end{cases}$$



$$\begin{cases} T_{i,0}(x) = -\frac{Pa^2}{2l} & \text{si } 0 < x \leq l-a \\ T_{i,0}(x) = \frac{P}{2l}[a(a-2l) + 2l(l-x)] & \text{si } l-a \leq x < l \end{cases}$$

b - Travées courbes :

Pour les travées courbes, on considère que la surcharge Mc120 est une charge concentrée de 110 tonnes. L'effort tranchant isostatique est donné dans ce cas par:


$$T_{i,0}(\alpha) = \begin{cases} P\left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_{l_i}}\right) & 0 < \alpha \leq \alpha_p \\ -P\frac{\alpha_p}{\alpha_{l_i}} & \alpha_p \leq \alpha < \alpha_{l_i} \end{cases}$$

Nous rappelons toute fois qu'il faut d'abord calculer les rotations aux appuis pour pouvoir déterminer les moments aux appuis et enfin les efforts tranchants.

Les résultats des calculs sont dans les tableaux suivants:

EFFORT TRANCHANT AUX APPUIS SOUS LA SURCHARGE Mc120

Calcul des rotations aux appuis

Travées chargées	n° des appuis (i)	rotation gauche $\theta_{i,0}^g$ (rd) 10^{-4}	rotation droite $\theta_{i,0}^d$ (rd) 10^{-4}	$\theta_{i,0}^d - \theta_{i,0}^g$ (rd) 10^{-4}
1	0	0	-4,26	-4,26
	1	2,67	0	-2,67
1+2	0	0	-0,75	-0,75
	1	1,26	-1,23	-2,49
	2	0,69	0	-0,69
2+3	1	0	-0,67	-0,67
	2	1,2	-1,23	-2,43
	3	0,69	0	-0,69
3+4	2	0	-0,66	-0,66
	3	1,18	-1,21	-2,39
	4	0,68	0	-0,68
4+5	3	0	-0,68	-0,68
	4	1,21	-1,21	-2,42
	5	0,68	0	-0,68
5+6	4	0	-0,68	-0,68
	5	1,21	-1,19	-2,40
	6	0,65	0	-0,65
6+7	5	0	-0,65	-0,65
	6	1,19	-0,63	-1,82
	7	0,36	0	-0,36
7	6	0	-1,42	-1,42
	7	2,13	0	-2,13

Calcul des moments aux appuis :

Moment aux appuis M_i (t.m) n° des travées chargées	$M_0 = M_7$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
1	0	-89,70	24,20	-6,50	1,70	-0,48	0,15
1+2	0	-77,39	-1,60	0,40	-0,10	0,03	-0,01
2+3	0	-2,10	-72,50	-3,10	0,80	-0,20	0,07
3+4	0	0,60	-2,37	-71,90	-3,06	0,83	-0,27
4+5	0	-0,20	0,70	-2,80	-72,80	-2,90	0,90
5+6	0	0,05	-0,17	0,65	-2,43	-74,30	-2,90
6+7	0	-0,01	0,04	-0,16	0,60	-2,30	-74,50
7	0	0,08	-0,30	1,20	-4,50	16,70	-63,80

Calcul des efforts tranchants:

Travée N° 1 chargée uniquement selon la figure (8 - 3).

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Moment fléchissant à l'appui (i) M_i (t.m)	0	-89,70	24,20	-6,50	1,70	-0,48	0,15	0
Effort tranchant à gauche de l'appui (i) T_i^g (t)	0	-14,79	3,51	-0,95	0,25	0,07	$1,81 \cdot 10^{-2}$	$-0,75 \cdot 10^{-2}$
Effort tranchant à droite de l'appui (i) T_i^d (t)	95,20	3,51	-0,95	0,25	-0,07	$1,81 \cdot 10^{-2}$	$-0,75 \cdot 10^{-2}$	0

Travée 1+2 chargées selon la figure (8 - 4)

n° de l'appuis (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
M_i (t.m)	0	-77,39	-1,60	0,40	-0,10	0,03	-0,01	0
T_i^g (t)	0	-54,36	-4,8	0,06	-0,01	-0,01	$-0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$
T_i^d (t)	0,64	50,19	0,06	-0,01	$0,4 \cdot 10^{-2}$	$-0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	

Travée 2+3 chargées selon la figure (8 - 4)

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	-2,1	-72,50	-3,1	0,80	-0,20	0,07	0
T _i ^o (t)	0	-0,07	-54,6	-0,44	0,12	-0,03	0,77.10 ⁻²	-0,35.10 ⁻²
T _i ^d (t)	-0,07	0,34	54,55	0,12	-0,03	0,77.10 ⁻²	-0,35.10 ⁻²	0

Travée 3+4 chargées selon la figure (8 - 4)

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	0,6	-2,37	-71,90	-3,06	0,83	-0,27	0
T _i ^o (t)	0	0,02	-0,09	-54,63	-0,46	0,12	-3,33.10 ⁻²	1,36.10 ⁻²
T _i ^d (t)	0,02	-0,09	0,37	54,53	0,12	-3,33.10 ⁻²	1,36.10 ⁻²	0

Travée 4+5 chargées selon la figure (8 - 4)

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	-0,20	0,70	-2,80	-72,80	-2,90	0,90	0
T _i ^o (t)	0	-0,7.10 ⁻²	0,27.10 ⁻²	-0,11	-54,63	-0,44	0,11	-4,5.10 ⁻²
T _i ^d (t)	-0,7.10 ⁻²	0,27.10 ⁻²	-0,11	0,36	54,56	0,11	-4,5.10 ⁻²	0

Travée 5+6 chargées selon la figure (8 - 4)

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	0,05	-0,17	0,65	-2,43	-74,30	-2,90	0
T _i ^o (t)	0	0,17.10 ⁻²	-0,68.10 ⁻²	2,5.10 ⁻²	-9,6.10 ⁻²	-54,63	-0,35	0,14
T _i ^d (t)	0,17.10 ⁻²	-0,68.10 ⁻²	2,5.10 ⁻²	-9,6.10 ⁻²	0,37	54,64	0,14	0

Travée 6+7 chargées selon la figure (8 - 4)

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	-0,01	0,04	-0,16	0,60	-2,30	-74,50	0
T _i ^o (t)	0	-0,34.10 ⁻³	1,51.10 ⁻³	-0,6.10 ⁻²	2,36.10 ⁻²	-9,1.10 ⁻²	-50,37	-7,99
T _i ^d (t)	-0,34.10 ⁻³	1,51.10 ⁻³	-0,6.10 ⁻²	2,36.10 ⁻²	-9,1.10 ⁻²	4,62	47,01	0

Travée 7 chargées selon la figure (8 - 4)

n° de l'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Mi (t.m)	0	0,08	-0,30	1,20	-4,50	16,70	-63,80	0
T _i ^o (t)	0	2,78.10 ⁻³	-1,2.10 ⁻²	4,66.10 ⁻²	-0,17	0,65	-2,31	-89,85
T _i ^d (t)	2,78.10 ⁻³	-1,2.10 ⁻²	4,66.10 ⁻²	-0,17	0,65	-2,31	20,14	0

CHAPITRE IX

IX - REPARTITION TRANSVERSALE DE L'EFFORT TRANCHANT ET REACTION D'APPUI :

IX - I EFFORT TRANCHANT :

Pour l'obtention de la répartition transversale de l'effort tranchant, on procède de la même façon que pour la répartition transversale du moment de flexion longitudinal.

L'effort tranchant en un point de coordonnées (x,y) sous l'effet d'une charge d'excentricité e est donné par la formule :

$$T(x) = 2 b \varepsilon_{\alpha moy} T_0(x) \quad (9 - 1)$$

Avec : $\varepsilon_{\alpha moy}$: effort tranchant partiel qui produirait une charge partielle $P_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ d'excentricité e ($P_1 = 1$).

2 b : largeur de la dalle équivalente .

$T_0(x)$: Effort tranchant moyen .

IX -1.1 CALCUL DU COEFFICIENT DE REPARTITION TRANSVERSAL ε_{α} POUR L'EFFORT TRANCHANT :

On détermine les valeurs de ε_{α} par interpolation entre les valeurs de ε_0 et ε_1 à l'aide des formules suivantes :

Effort tranchant en travée :

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \alpha^* \text{ si } |Y| + |e| \leq \frac{3}{4} b \quad (9-2a)$$

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sqrt{\alpha^*} \text{ si } |Y| + |e| > \frac{3}{4} b \quad (9-2b)$$

Effort tranchant aux appuis :

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha} = \varepsilon_0 + (\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_0) \alpha^* \text{ si } |Y| + |e| \leq \frac{3}{4} b \quad (9-2c)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha} = \varepsilon_0 + (\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_0) \sqrt{\alpha^*} \text{ si } |Y| + |e| > \frac{3}{4} b \quad (9-2d)$$

La position de la charge donnant l'effet le plus défavorable sera déterminé de la même manière que pour le moment de flexion après avoir tracé les lignes d'influence de ε_{α} et $\bar{\varepsilon}_{\alpha}$.

Tableau donnant ϵ_α pour $\theta = 0,116$ et $\alpha = 0,29$

e Y	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,1534	0,1574	0,1591	0,1607	0,1608	0,1607	0,1591	0,1574	0,1534
b/4	0,0970	0,1134	0,1155	0,1382	0,1606	0,1829	0,1929	0,1998	0,2065
b/2	0,0418	0,0713	0,1438	0,1161	0,1597	0,2034	0,2203	0,2442	0,3236
3b/4	-0,0128	0,0301	0,0730	0,1161	0,1590	0,2024	0,2458	0,2893	0,3268
b	-0,07	-0,0104	0,0459	0,1023	0,1586	0,2160	0,2723	0,3290	0,3870

IX-1.2 CALCUL DE $\epsilon_{\alpha moy}$ POUR LES DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENT :

Le calcul de $\epsilon_{\alpha moy}$ s'effectue de la même façon que pour $K_{\alpha moy}$ (vu au chapitre précédent). Les résultats sont cumulés dans le tableau ci dessous :

Tableau donnant $\epsilon_{\alpha moy}$ pour différents cas de chargement :

Y		0	b/4	b/2	3b/4	b
Charges						
CP		0,1587	0,1583	0,1647	0,1592	0,1567
ST	gauche	0,1495	0,2132	0,4030	0,3643	0,4450
	droite	0,1534	0,0970	0,0418	-0,0128	-0,0668
	g + d	0,1514	0,1551	0,2224	0,1757	0,1891
M _c 120		0,1591	0,1690	0,2036	0,2027	0,2156
AI	une voie chargée	0,1465	0,1397	0,1434	0,1160	0,1023
	deux voies chargées	0,1421	0,1575	0,1694	0,1593	0,1590
B _c		0,1507	0,1573	0,1552	0,1598	0,2160

$$T_{i \max}(x) = 2 b (\epsilon_{\alpha moy})_{\max} T_0(x) \text{ en tonnes.} \quad (9 - 3)$$

Tableau donnant l'effort tranchant T(x) max (en tonnes) :

N° d'appui	Effort tranchant T(x) ^{Ed} (t)	Cas de chargement			
		CP	ST	Al	M _c 120
0	T _{x0} ^d	360,69	24,05	52,97	138,04
1	T _{x1} ^e	-591,2	-33,51	-77,08	-78,82
	T _{x1} ^d	526,36	32,44	79,19	72,77
2	T _{x2} ^e	-502,8	-32,53	-78,95	-79,17
	T _{x2} ^d	514,63	32,02	78,02	79,09
3	T _{x3} ^e	-506,08	-32,38	-78,4	-79,21
	T _{x3} ^d	515,78	32,56	78,38	79,06
4	T _{x4} ^e	-504,91	-31,81	-78,35	-79,21
	T _{x4} ^d	484,32	30,85	78,19	79,11
5	T _{x5} ^e	-536,38	-33,51	-80,11	-79,21
	T _{x5} ^d	556,44	35,22	81,47	79,22
6	T _{x6} ^e	-547,65	-34,44	-91,65	-73,03
	T _{x6} ^d	451,71	27,95	71,79	68,28
7	T _{x7} ^e	-177,98	-11,75	-25,99	-130,28

IX-2 REACTIONS D'APPUI :

La réaction d'appui par unité de largeur est donnée par la formule suivante :

$$R_i(x) = \bar{\epsilon}_\alpha R_i(0) \quad (9-4)$$

ou $\bar{\epsilon}_\alpha$ est la réaction partielle que produirait une charge partielle $P_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ d'excentricité e ($P_1=1$) et $R_i(0)$ la réaction d'appui.

IX -2.1 CALCUL DE $\bar{\epsilon}_\alpha$

Tableau donnant $\bar{\epsilon}_\alpha$ pour $\theta = 0,116$ et $\alpha = 0,29$

e Y	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	0,1481	0,1559	0,1566	0,1629	0,1654	0,1629	0,1566	0,1559	0,1481
b/4	0,0923	0,1102	0,1150	0,1387	0,1625	0,1869	0,2039	0,1981	0,2053
b/2	0,0379	0,0685	0,0994	0,1161	0,1591	0,2049	0,2247	0,2443	0,2627
3b/4	-0,0158	0,0264	0,0719	0,1155	0,1591	0,2034	0,2476	0,2920	0,3244
b	-0,0668	-0,0100	0,0458	0,1022	0,1587	0,2155	0,2723	0,3293	0,3871

IX -2.2 CALCUL DES COEFFICIENTS $\epsilon_{\alpha moy}$ POUR LES DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENT :

De la même façon que précédemment, on calcule les $\bar{\epsilon}_{\alpha moy}$ avec la formule de SIMPSON toujours .

Tableau donnant $\epsilon_{\alpha moy}$ pour différents cas de chargement :

Charges		Y	0	b/4	b/2	3b/4	b
CP			0,1585	0,1818	0,1584	0,1589	0,1592
ST	gauche		0,1481	0,0923	0,0379	-0,0158	-0,0668
	droite		0,1310	0,2105	0,2838	0,3638	0,4321
	g + d		0,1425	0,1514	0,1606	0,1740	0,1826
$M_c 120$			0,1594	0,1684	0,1802	0,2037	0,2157
Al	une voie chargée		0,1610	0,1403	0,1286	0,1154	0,1023
	deux voies chargées		0,1598	0,1599	0,1604	0,1594	0,1589
B_c			0,1594	0,1591	0,1402	0,1571	0,1989

$$R_i(0) = T_i^d - T_i^g \quad (9 - 5)$$

Avec : $R_i(0)$: Réaction d'appuis.

T_i^d : effort tranchant à droite de l'appui (i)

T_i^g : effort tranchant à gauche de l'appui (i)

Tableau donnant les réactions d'appui R_i :

Réaction d'appui $R_i(t)$	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
Charges								
CP	324,95	970,78	916,66	920,61	891,21	984,12	899,91	160,35
ST	8,05	22,05	21,59	21,72	20,96	22,98	20,86	3,93
Al	46,47	137,09	137,66	137,56	137,32	141,75	151,08	62,98
M_c120	95,2	104,55	109,25	109,16	109,12	109,27	97,38	89,85

$$R_i(x)_{\max} = 2b(\bar{\epsilon}_{\alpha, moy})_{\max} R_i(0) \quad (9-6)$$

Les résultats de calculs des réactions d'appui max sont regroupés dans le tableau suivant :

Tableau donnant la réaction d'appui sous les différentes combinaisons de charges : $R_i(x)_{\max}$.

N° d'appui (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Réaction d'appui $R_i(x)$ (t)	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
Combinaison de charge								
CP	397,41	1 187,26	1 121,07	1 125,9	1 089,95	1 203,57	1 100,58	196,1
ST	23,26	63,72	62,39	62,77	60,57	66,41	60,28	11,35
Al	50,18	148,05	148,67	148,56	148,3	153,09	163,16	68,01
M_c120	138,04	151,59	158,41	158,28	158,2	158,44	141,2	130,28
CP + 1,2 (Al + ST)	544,33	1 441,38	1 374,34	1 379,49	1 340,59	1 466,97	1 368,71	291,33
CP+ M_c120	535,45	1 338,85	1 279,48	1 284,18	1 248,15	1 362,01	1 241,78	326,38
max CP+1,2(Al + ST) CP+ M_c120	544,33	1 441,28	1 374,34	1 379,49	1 340,59	1 466,97	1 368,71	326,38

La réaction d'appui max est donné au droit de l'appui N° 5 par la combinaison de charge CP + 1,2 (A1 + ST)

$$R_{\max} = 1466.97 \text{ t}$$

CHAPITRE X

X- CALCUL DES MOMENTS TRANSVERSAUX :

Le moment transversal produisant l'effet le plus défavorable est donné pour une largeur de bande unitaire par la fonction sinusoïdale suivante :

$$M_y = P_m \mu_{\alpha m} b \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (10 - 1)$$

Avec : P_m : Surcharges transformée en une sinusoïde par le développement en série de Fourier.

$\mu_{\alpha m}$: Coefficient de répartition transversale moyen calculé à l'aide des tables de Bares-Massonet.

b : Demi largeur de la dalle équivalente.

l : Portée de la travée.

m : Entier naturel. $m = 1, 2, \dots, n$

X-1 CALCUL DE P_m POUR CHAQUE CAS DE CHARGE :

P_m est donnée par la formule suivante :

$$P_m = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad (10 - 2)$$

X-1.1 CHARGE PARTIELLEMENT REPARTIE :

$$p_m = \frac{4}{2l} \int_{d-c}^{d+c} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad (10 - 3a)$$

d'ou

$$p_m = \frac{4p}{m\pi} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi d}{l} \quad (10 - 3b)$$

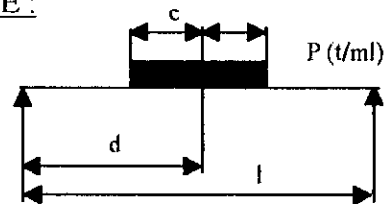


Figure (10 - 1)

X-1.2 CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE :

On replace dans la formule précédente d par $l/3$ et c par $l/2$.

On aura donc : $P_m = \frac{4l}{m\pi}$

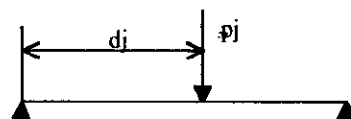


Figure (10 - 2)

X-1.3 CHARGES CONCENTREES :

$$\text{On a : } p_m = \frac{4p}{m\pi} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi d_j}{l}$$

Posons $p_j = 2.P.c$

$$\text{Donc : } p_m = \frac{2p_j}{l \frac{m\pi c}{l}} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi d_j}{l}$$

En faisant tendre c vers 0, on obtient :

$$\text{- Pour une charge concentrée : } p_m = \frac{2p_j}{l} \sin \frac{m\pi d_j}{l}$$

$$\text{- Pour plusieurs charges concentrées : } P_m = \sum_j \frac{2}{l} p_j \sin \left(\frac{m\pi d_j}{l} \right)$$

X-2 CALCUL DES MOMENTS M_y :

$$M_y = m y \mu_{\alpha, moy}$$

$$\text{Avec : } m y = p_m b \sin \frac{\pi x}{l}$$

REMARQUE : On établira le calcul pour les trois premiers termes harmoniques de la fonction à savoir $m=1, 3$ et 5 .

X-2.1 EXEMPLE DE CALCUL :

Pour la charge permanente :

$$m = 1 \Leftrightarrow m y_1 = p_1 b \sin \frac{\pi}{2} = p_1 b \quad , b = 3,36 \text{ m}$$

$$p_1 = \frac{4p}{m\pi} = 36,46 \text{ t/ml}$$

$$\text{d'ou : } m y_1 = 36,46 \cdot 3,36 \cdot 1 = 122,52 \text{ t m / ml}$$

$$m = 3 \Leftrightarrow p_3 = \frac{4p}{3\pi} = 12,15 \text{ t/ml}$$

$$m y_3 = 12,15 \cdot 3,36 \cdot (-1) = -40,82 \text{ t m / ml}$$

$$m = 5 \Leftrightarrow p_5 = 7,29 \text{ t/ml} \Leftrightarrow m y_5 = 24,50 \text{ t m / ml}$$

$$m y_{\text{total}} = m y_1 + m y_3 + m y_5 = 106,2 \text{ t m / ml}$$

$$m y_T = 106,2 \text{ t m / ml}$$

Tableau donnant $\mu_\alpha 10^4$ pour $\theta = 0,116$ et $\alpha = 0,29$

e Y	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-2 261	-1 150,97	-22,8	1 138,9	2 355,5	1 138,9	-22,8	-1 150,97	-2 261
b/4	-2 059,66	-1 257,3	-442,38	398,04	1 277,66	2 211,22	707,75	-750,1	-2 185,49
b/2	-1 604,13	-1 090,6	-570,93	-30,64	533,13	1 132,02	1 776,5	-30,19	-1 805,6
3b/4	-912,94	-667,5	-418,07	-139,84	109,55	396,9	706,71	961,46	-1 089,53
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau donnant $\mu_\alpha 10^4$ pour $3 \theta = 0,348$ et $\alpha = 0,29$

e y	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-1 309,2	-744,45	-108,23	687,45	1 754,8	687,46	-108,23	-744,45	-1 309,2
b/4	-1 123,93	-779,01	-390,03	98,03	758,25	1 690,35	474,06	-499,4	-1 361,59
b/2	-878,1	-654,22	-445,25	-180,3	183,66	706,36	1 471,76	39,67	-1 224,88
3b/4	-466,4	-394,51	-312,29	-205,89	-550,74	165,86	498,48	998,36	-812,86
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau donnant $\mu_\alpha 10^4$ pour $5 \theta = 0,58$ et $\alpha = 0,29$

e y	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0	-670,06	-446,22	-144,11	363,7	1 294,9	363,7	-144,11	-446,22	-670,06
b/4	-507,86	-412,54	-282,41	-52,42	394,03	1 196,01	258,7	-350,5	-800,84
b/2	-324,89	-315,7	-276,27	-159,18	-14,64	371,18	1 152,44	-6,32	-838,62
3b/4	-182,98	-180,4	-179,86	-167,59	-121,56	1,93	282,56	866,33	-646,08
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau donnant $\mu_{\alpha moy}$ pour $\theta = 0,116$ et $\alpha = 0,29$

y		0		b/4		b/2		3b/4		b
μ_α		-	+	-	+	-	+	-	+	μ_α
CP		0	0	0	0	0	0	0	0	0
A(l)	vc+ba	0,07	0,12	0,07	0,11	0,06	0,09	0,03	0,05	0
	vc	0,07	0,14	0,07	0,11	0,07	0,06	0,04	0,02	0
Bc	1 file	0,12	0,12	0,08	0,17	0	0,08	0,1	0,03	0
ST	td	0,23	0	0,21	0	0,16	0	0,09	0	0
	tg	0,34	0	0,36	0	0,35	0	0,31	0	0
	td+tg	0,28	0	0,28	0	0,25	0	0,2	0	0
Mc120		0	0,05	0,03	0,07	0,04	0,03	0,08	0,02	0

Tableau donnant $\mu_{\alpha moy}$ pour $3\theta = 0,348$ et $\alpha = 0,29$

y		0		b/4		b/2		3b/4		b
μ_α		-	+	-	+	-	+	-	+	μ_α
CP		0	0	0	0,01	0	0	0	0,08	0
A(l)	vc+ba	0,04	0,07	0,04	0,07	0,04	0,06	0,03	0,01	0
	vc	0,04	0,09	0,04	0,07	0,04	0,03	0,02	0,02	0
Bc	1 file	0,07	0,12	0,05	0,12	0	0,05	0,1	0,01	0
ST	td	0,13	0	0,11	0	0,09	0	0,05	0	0
	tg	0,18	0	0,23	0	0,25	0	0,26	0	0
	td+tg	0,15	0	0,17	0	0,17	0	0,15	0	0
Mc120		0	0,05	0,01	0,03	0,05	0,02	0,07	0,03	0

Tableau donnant $\mu_{\alpha moy}$ pour $5\theta = 0,58$ et $\alpha = 0,29$

y		0		b/4		b/2		3b/4		b
μ		-	+	-	+	-	+	-	+	μ
CP		0	0	0	0,1	0,02	0	0	0,12	0
A(l)	vc+ba	0,03	0,05	0,02	0,05	0,02	0,05	0,01	0,03	0
	vc	0,03	0,06	0,03	0,05	0,02	0,01	0,01	0	0
Bc	1 file	0,05	0,08	0,04	0,08	0,01	0,06	0,08	0	0
ST	td	0,07	0	0,05	0	0,03	0	0,02	0	0
	tg	0,08	0	0,11	0	0,12	0	0,12	0	0
	td+tg	0,08	0	0,08	0	0,08	0	0,07	0	0
Mc120		0	0,04	0,02	0,02	0,04	0,02	0,06	0,02	0

Tableau donnant la valeur du moment transversal max M_y pour les différents types de charges :

Y	0		b/4		b/2		3b/4		b
	M_y^-	M_y^+	M_y^-	M_y^+	M_y^-	M_y^+	M_y^-	M_y^+	M_y
CP	0	0,022	0	1,83	0,22	0	0	0,39	0
ST	0,63	0	0,64	0	0,6	0	0,52	0	0
Al	0,97	1,9	1,01	1,5	0,97	1,22	0,52	0,72	0
$M_c 120$	0	3,23	1,39	2,77	2,85	1,65	4,89	1,47	0
Bc	1,63	1,64	1,04	2,45	2,02	1,06	1,24	0,42	0

Tableau donnant la valeur du moment transversal max M_y pour différentes combinaisons de charge :

Y	0		b/4		b/2		3b/4		b
	M_y^-	M_y^+	M_y^-	M_y^+	M_y^-	M_y^+	M_y^-	M_y^+	M_y
CP+1,2 (Al + ST)	1,92	2,3	1,98	3,63	2,11	1,46	1,24	1,26	0
CP + 1,2 (Bc + ST)	2,71	1,99	2,02	4,77	0,97	1,27	2,1	0,89	0
CP + M_c 120	0	3,25	1,39	4,6	3,07	1,65	4,89	1,86	0

Le moment M_y^+ max est donné par la combinaison de charges

$$cp + 1,2 (Bc + ST) \quad M_{y \max}^+ = 4,77 \text{ t.m}$$

Le moment $M_{y \max}^-$ est donné par la combinaison de charges CP + M_c 120 .

$M_{y \max}^-$ est donné par la combinaison de charges CP + M_c 120

$$M_{y \max}^- = 4,89 \text{ t.m}$$

CHAPITRE XI

XI - MOMENT DE TORSION DU A L'EXCENTREMENT DES CHARGES:

les ponts sont sollicités en torsion par les charges excentrées telles que :

- Les surcharges du trafic.
- Le vent.
- Les chocs des véhicules.

Le moment de torsion dû à l'excentrement des charges est formulé comme suit :

$$M_{xy_m} = \frac{l}{\pi m} \tau_{\alpha.moy} p_m \cos m \pi x$$

Avec : M_{xy} : Moment de torsion unitaire.

$$p_m = \begin{cases} \frac{4p}{m\pi} \sin \frac{m\pi d}{l} \sin \frac{m\pi c}{l} & \text{pour une charge partiellement répartie.} \\ \frac{4P}{m\pi} \sin^2 \frac{m\pi}{l} & \text{pour une charge uniformément répartie} \\ \frac{2}{p} \sum_i p_{m_i} \sin^2 \left(\frac{m d_i}{l} \right) & \text{Pour plusieurs charges concentrées} \end{cases} \quad (11 - 2)$$

$\tau_{\alpha.moy}$: coefficient de répartition transversal calculé à partir des tables de BARES-MASSONET

l : portée de la travée.

$$m = 1, 3, 5$$

REMARQUE :

p_m est une charge transformée en sinusoïde par développement en série de FOURRIER.

Pour $m = 1$

$$M_{xy} = \frac{l}{\pi} \tau_{\alpha.moy} p_1 \cos \frac{\pi x}{l} \quad (11 - 3)$$

Le moment M_{xy} est max pour $\left| \cos \frac{\pi x}{l} \right| = 1$ c'est à dire $x = 0$ ou $x = l$.

Dans ce cas : $M_{xy} = \frac{l}{\pi} \tau_{\alpha.moy} p_1$

posons $m_{xy} = p_1 \frac{l}{\pi}$

On obtient :
$$M_{xy} = \tau_{\alpha.moy} m_{xy} \quad (11 - 4)$$

XI-1 CALCUL DES M_{xy} POUR LES DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENTS :

Le calcul des m_{xy} s'effectue de la même manière que pour les m_y vus au chapitre précédent.

XI-2 CALCUL DU COEFFICIENT DE REPARTITION τ_α :

D'après la méthode de BARES MASSONET :

$$\tau_\alpha = \tau_1 \sqrt{\alpha^*} \quad (11-5)$$

Calcul de τ_α pour les différents cas de chargements : $\tau_\alpha = \tau_1 \sqrt{\alpha}$

Y	e	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b
0		-0,13139	-0,09998	-0,0680 2	-0,0348 9	0	0,0349	0,06802	0,0999	0,1314
b/4		-0,1273	-0,0976	-0,0677	-0,0362	0	0,0317	0,0674	0,1017	0,1355
b/2		-0,1238	-0,0953	-0,0663	-0,0364	-0,0049	0,0286	0,065	0,1024	0,1391
3b/4		-0,1213	-0,0935	-0,0653	-0,0361	-0,0054	0,0272	0,0626	0,1013	0,1417
b		-0,1203	-0,0928	-0,0648	-0,0358	-0,0054	0,0269	0,0619	0,1	0,1427

Tableau donnant $\tau_{\alpha, moy}$ pour différents cas de chargement :

Y	e	-b	b/4	b/2	3b/4	0
CP		0	-0,0106	0,0032	-5.10 ⁻⁶	-10 ⁻⁶
Al		0,0670	-0,0510	-0,0507	-0,0498	-0,0490
ST	Droite	-0,1314	-0,1273	-0,1258	-0,1235	-0,1203
	Gauche	0,1576	0,1626	0,1669	0,1704	0,1712
Bc		0,0590	0,0680	0,0608	0,0550	0,0570
$M_c 120$		0,0320	0,0320	0,033	0,0326	0,0320

Tableau donnant $M_{XY} = m_{xy} \tau_{\alpha, moy}$ pour les différentes charges : M_{XY} (t.m) :

Charges	Y	-b	b / 4	b / 2	3b / 4	0
CP		0	-4,27	1,31	-2.10 ⁻³	-0,4 .10 ⁻³
Al		3,29	-2,51	-2,46	-2,41	-2,4
ST		1,88	1,1	1,15	1,18	1,19
Bc		2,84	2,93	2,9	2,65	2,75
M _c 120		2,75	2,75	2,83	2,8	2,75

Tableau donnant M_{XY} (t.m) pour les différentes combinaisons de charges :

Combinaison de Charges	Y	0	b / 4	b / 2	3b / 4	b
CP + 1,2 (Al + ST)		5,24	-5,96	-0,26	-1,47	-1,45
CP + 1,2 (Bc + ST)		4,7	0,56	6,17	4,59	4,72
CP + M _c 120		2,75	-1,52	4,14	2,79	2,75
Max des combinaisons		5,24	-5,96	6,17	4,59	4,72

La combinaison de charge donnant M_{XY} max est : CP + 1,2 (Bc + ST) sur la position $y = b / 2$

$$M_{XY \max} = 6,17 \text{ t.m}$$

CHAPITRE XII

XII - ETUDE DE LA TORSION DUE A LA COURBE :

Il existe deux types de charges pouvant solliciter un pont courbe en torsion :

a - Charges excentrées : citons comme exemples :

- Les surcharges du trafic .

- Les chocs des véhicules.

Le poids propre du tablier pour les sections transversales dissymétriques.

b - Charges centrées : Ce sont les surcharges à résultantes centrée provoquant la torsion seulement pour les pont courbes et les pont biais .

XII -1 EXPRESSION DU MOMENT DE TORSION :

Considérons une poutre circulaire simplement appuyée en flexion et bi-encastée à la torsion d'angle d'ouverture α_l .

XII -1.1 CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE CENTREE :

Le moment de torsion dans une section repérée par l'angle α est donné par la formule :

$$M_x(\alpha) = P R^2 \left[\left(\frac{\alpha_l}{2} - \alpha \right) - \frac{\sin \left(\frac{\alpha_l}{2} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\alpha_l}{2} \right)} \right] \quad (12 - 1)$$

XII -1.2 CHARGE CONCENTREE CENTREE REPEREE PAR L'ANGLE α_p :

1 er Cas : $0 \leq \alpha \leq \alpha_p$

$$M_x(\alpha) = P R \left[\left(1 - \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \right) - \frac{\sin (\alpha_l - \alpha_p)}{\sin (\alpha_l)} \cos \alpha \right] \quad (12 - 2)$$

2 eme Cas : $\alpha_p \leq \alpha \leq \alpha_l$

$$M_x(\alpha) = -P R \left[\frac{\alpha_p}{\alpha_l} - \frac{\sin \alpha_p \cos (\alpha_l - \alpha)}{\sin \alpha_l} \right] \quad (12 - 3)$$

Pour une poutre circulaire continue, le moment de torsion dans une section repérée par l'angle α sur la travée (i) est formulé comme suit : (règle des trois moments).

$$M_{x_i}(\alpha) = M_{x_i}(\alpha) - M_{i-1} \left[\frac{1}{\alpha_{i_i}} - \frac{\cos(\alpha_{i_i} - \alpha)}{\sin \alpha_{i_i}} \right] + M_i \left[\frac{1}{\alpha_{i_i}} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_{i_i}} \right] \quad (12-4)$$

Avec : $M_{x_i}(\alpha)$: Moment de flexion isostatique de la travée N° i

M_{i-1} et M_i sont les moments aux appuis de la travée N° i

XII-2 DETERMINATION DU MOMENT MAX EN TRAVEE :

Le moment de torsion dans une section d'angle α est lié au moment de flexion par la relation suivante :

$$\frac{dM_x(\alpha)}{d\alpha} = M_y(\alpha) \quad (12-5)$$

Pour chercher les extremums de la fonction $M_x(\alpha)$, on doit annuler la dérivée de celle-ci soit :

$$\frac{dM_x(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

Donc $M_x(\alpha) = 0$

Nous constatons que dans les sections ou le moment de torsion est nul, le moment de flexion est maximum ou minimum et vice-versa.

La détermination des zéros de la fonctions $M_y(\alpha)$ se fera par la méthode numérique dite de NEWTON .

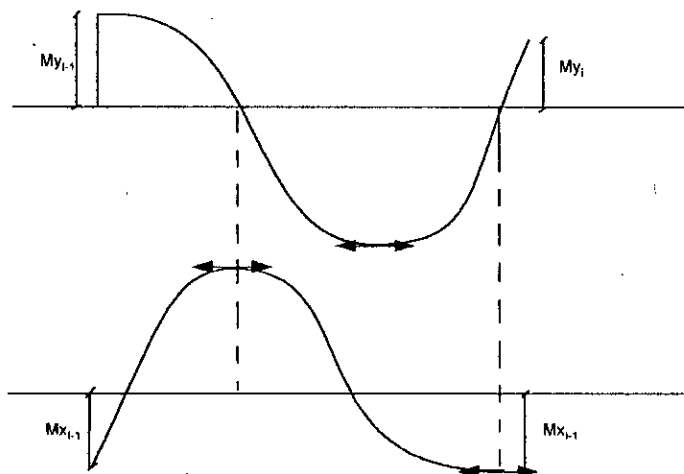


Fig (12-1)

Diagramme des moments de flexion et de torsion pour une travée intermédiaire chargée

Les valeurs pour lesquelles sera calculé le moment de torsion sont $\alpha = 0$, $\alpha = \alpha_p$ ainsi que les valeurs correspondantes aux zéros de l'équation $M_y(\alpha) = 0$.

La continuité du pont permet de transmettre directement le moment de torsion des travées courbes aux travées droites, et cela pour des raisons d'équilibre.

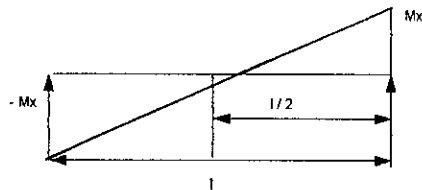


Fig (12 - 2) - Moment de torsion sur une travée droite

Tableau donnant $M_x(\alpha)_{\max}$ pour la charge permanente : $M_x(\alpha)$ en (t.m)

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{li} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{li})$ ou M_x (li)	85,27	52,14	79,91	106,43	28,05	77,25	-77,25
$M_x(0)$	-281,77	-31,43	-72,5	-96,9	-70,23	-68,32	77,25
α_1 (rd)	0,380	0,071	0,061	0,056	0,056	0,07	--
$M_x(\alpha_1)$	197,96	-112,03	-132,45	-146,49	-117,94	-152,04	--
α_2 (rd)	--	0,299	0,30	0,306	0,285	0,321	--
$M_x(\alpha_2)$	--	113,95	133,7	-151,65	112,97	153,2	--

Tableau donnant $M_x(\alpha)_{\max}$ pour la surcharge des trottoirs :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	3,95	2,36	1,89	2,27	0,79	2,42	-2,42
$M_x(0)$	-7,59	-2,41	-2,01	-2,03	-1,65	-2,13	2,42
α_1 (rd)	0,401	0,055	0,057	0,058	0,056	0,066	--
$M_x(\alpha_1)$	5,62	-3,58	-3,24	-3,34	-2,81	-3,93	--
α_2 (rd)	--	0,306	0,30	0,305	0,287	0,326	--
$M_x(\alpha_2)$	--	3,57	3,22	-3,39	2,71	3,98	--

Tableau donnant $M_x(\alpha)_{\max}$ pour la surcharge AI avec une seule travée chargée à chaque fois .

1 er cas : Travée N° 1 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	3,95	2,36	1,89	-0,49	0,13	-0,03	-2,42
$M_x(0)$	-83,59	-25,37	-6,80	1,82	-0,49	-0,14	-0,03
α_1 (rd)	0,434	0,285	0,283	0,283	0,282	0,297	--
$M_x(\alpha_1)$	69,81	-9,33	2,5	-0,67	-0,17	-0,05	--
α_2 (rd)	0	--	--	--	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	-83,59	--	--	--	--	--	--

2 eme cas : Travée N° 2 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	-40,39	44,29	-7,5	2,00	-0,52	-0,12	-0,12
$M_x(0)$	-20,43	-45,23	27,62	-7,41	-1,98	-0,58	-0,12
α_1 (rd)	0	0,033	0,283	0,283	0,282	0,294	--
$M_x(\alpha_1)$	20,43	-49,20	-10,17	-2,72	-0,72	-0,2	--
α_2 (rd)	--	0,327	--	--	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	48,74	--	--	--	--	--

3 eme cas : Travée N° 3 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	-10,72	27,1	43,01	13,40	1,89	-0,46	0,46
$M_x(0)$	-5,42	-7,62	-43,01	-39,1	-7,22	-2,11	-0,46
α_1 (rd)	0	0,073	0,034	0,283	0,281	0,294	--
$M_x(\alpha_1)$	-5,42	-10,06	-47,34	-15,21	-2,64	-0,79	--
α_2 (rd)	--	--	0,324	--	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	47,3	--	--	--	--

4 eme cas : Travée N° 4 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{li} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{li})$ ou M_x (li)	-2,87	7,26	-26,95	42,87	-7,05	1,71	-1,71
$M_x(0)$	-1,47	-2,09	7,32	-42,94	26,89	-7,87	1,71
α_1 (rd)	0	0,073	0,074	0,034	0,281	0,294	--
$M_x(\alpha_1)$	1,45	-2,7	9,94	-47,22	-9,83	2,79	--
α_2 (rd)	--	--	--	0,324	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	--	47,18	--	--	--

5 eme cas : Travée N° 5 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{li} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{li})$ ou M_x (li)	0,76	-1,93	7,18	-26,86	-41,97	-6,41	6,41
$M_x(0)$	-0,38	0,54	-1,96	7,33	42,72	29,41	-6,41
α_1 (rd)	0	0,073	0,074	0,079	0,034	0,294	--
$M_x(\alpha_1)$	-0,38	0,72	-2,65	9,9	46,9	-10,44	--
α_2 (rd)	--	--	--	--	0,323	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	--	--	46,59	--	--

6 eme cas : Travée N° 6 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	-0,26	0,65	-2,42	9,04	-34,4	47,65	-47,65
$M_x(0)$	-0,13	-0,18	0,66	-2,46	9,15	-45,65	47,65
α_1 (rd)	0	0,073	0,074	0,079	0,075	0,042	--
$M_x(\alpha_1)$	0,13	-0,24	9,89	-3,33	12,7	-51,59	--
α_2 (rd)	--	--	--	--	--	0,345	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	--	--	--	51,44	--

7 eme cas : Travée N° 7 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	-0,03	-0,07	0,28	-1,08	4,01	-16,61	-16,61
$M_x(0)$	-0,01	0,02	-0,08	3	-1,09	-4,62	-16,61
α_1 (rd)	0	0,076	0,073	0,073	0,075	0,079	--
$M_x(\alpha_1)$	-0,01	0,03	-0,1	0,40	-1,47	-6,15	--
α_2 (rd)	--	--	--	--	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	--	--	--	--	--

Tableau donnant $M_x(\alpha)_{\max}$ pour la surcharge $M_c 120$ avec une seule travée chargée à chaque fois :

1 er cas : Travée N° 1 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	51,71	-8,05	2,17	-0,58	0,17	-0,04	0,04
$M_x(0)$	-75,9	29,82	-7,99	2,14	-0,62	0,16	-0,04
α_1 (rd)	0	0,286	0,286	0,279	0,286	0,293	--
$M_x(\alpha_1)$	-75,9	-10,96	2,94	-0,78	0,23	-0,05	--
α_2 (rd)	0,392	--	--	--	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	53,24	--	--	--	--	--	--

2 eme cas : Travée N° 2 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	- 43,34	30,81	-8,05	2,15	-0,56	0,14	- 0,14
$M_x(0)$	21,92	-31,82	-29,64	- 7,95	2,13	-0,62	0,14
α_1 (rd)	0	0,054	0,284	0,283	0,281	0,295	--
$M_x(\alpha_1)$	21,92	-39,09	-10,91	2,92	-0,78	-0,22	--
α_2 (rd)	--	0,305	--	--	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	38,87	--	--	--	--	--

3 eme cas : Travée N° 3 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	11,54	-29,87	30,01	-7,83	2,03	-0,49	0,49
$M_x(0)$	-5,83	8,26	-30,20	- 29,08	-7,77	2,28	0,49
α_1 (rd)	0	0,073	0,055	0,283	0,281	0,294	--
$M_x(\alpha_1)$	-5,83	10,83	-37,89	-10,7	2,84	-0,81	--
α_2 (rd)	--	--	0,303	--	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	37,83	--	--	--	--

4 eme cas : Travée N° 4 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	-3,09	2,2	-29,01	29,88	-7,59	-1,85	-1,85
$M_x(0)$	-1,56	-7,82	-7,94	-29,95	28,94	-8,48	1,85
α_1 (rd)	0	0,074	0,075	0,056	0,281	0,294	--
$M_x(\alpha_1)$	-1,56	-3,06	-10,70	-37,73	-10,58	3,01	--
α_2 (rd)	--	--	--	0,03	--	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	--	37,71	--	--	--

5 eme cas : Travée N° 5 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	0,83	2,2	-7,7	-28,73	28,84	-6,89	6,89
$M_x(0)$	-0,42	0,58	-2,11	7,81	-29,65	31,59	-6,89
α_1 (rd)	0	0,074	0,075	0,076	0,056	0,272	--
$M_x(\alpha_1)$	-0,42	0,77	-2,84	10,58	-37,34	-10,97	--
α_2 (rd)	--	--	--	--	0,302	--	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	--	--	37,18	--	--

6 eme cas : Travée N° 6 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	-0,2	-0,52	-1,94	7,29	-27,12	31,99	-31,99
$M_x(0)$	-0,1	-0,14	0,53	-1,98	7,31	-37,5	31,99
α_1 (rd)	0	0,074	0,074	0,075	0,076	0,055	--
$M_x(\alpha_1)$	-0,1	-0,19	-0,72	-2,68	9,99	-44,6	--
α_2 (rd)	--	--	--	--	--	0,321	--
$M_x(\alpha_2)$	--	--	--	--	--	43,45	--

7 eme cas : Travée N° 7 chargée uniquement :

N° de travée	1	2	3	4	5	6	7
α_{ii} (rd)	0,479	0,362	0,359	0,359	0,359	0,388	--
$M_x(\alpha_{ii})$ ou M_x (li)	0,03	-0,08	0,29	-1,12	4,14	-17,16	17,16
$M_x(0)$	-0,01	0,02	-0,08	0,31	-1,12	4,77	-17,16
α_1 (rd)	0	0,071	0,076	0,074	0,08	0,08	2,93
$M_x(\alpha_1)$	-0,01	0,03	-0,10	0,41	-1,52	6,36	--
α_2 (rd)	--	--	--	--	--	--	0
$M_x(\alpha_2)$	--	--	--	--	--	--	--

CHAPITRE XIII

XIII - CALCUL AUX DENIVELLATIONS D'APPUIS ET AUX VERRINAGE:

Une dénivellation d'appui produit (le système étant hyperstatique) des efforts tranchants et des moments fléchissant supplémentaires dans une poutre continue.

Ces dénivellations d'appuis résultent généralement des tassements des fondations des piles produisant ainsi, des effets néfastes dans la construction, soit dans le cas d'un vérinage du tablier (changement des appareils d'appuis). Il est donc très important de tenir compte des tassements d'appuis lors du calcul de la construction.

Les moments aux appuis dus aux dénivellations d'appuis sont déterminés par la règle des trois moments :

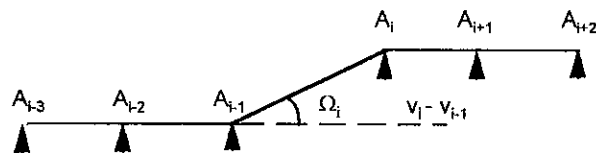


Figure 13 - 1

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \Omega_{i+1} - \Omega_i$$

$$\text{Avec : } \Omega_i = \frac{V_i - V_{i+1}}{l_i}$$

V_i : Valeur du tassement de l'appui N° (i)

NB : Le tassement d'appui est une sollicitation différée, on utilisera donc pour les calculs la matrice des constantes mécaniques correspondant aux charges de longues durée.

$$[CM][M_i] = [\Omega_i]$$

On suppose en premier lieu que tous les Ω sont nuls sauf Ω_i et en second lieu que tous les Ω sont nuls sauf les Ω_i et Ω_{i+2} .

Il est à noter que le G.P.S recommande de prendre un tassement d'appui unitaire de 1 cm pour le calcul des moments hyperstatiques aux appuis.

Dans les calculs qui suivront, nous supposerons d'abord que chaque appui tasse individuellement de 1 cm ensuite les deux appuis A_i et A_{i+2} vont tasser ensemble de 1 cm dans chaque cas.

Les résultats finaux des calculs sont regroupés dans le tableau ci-après.

EXEMPLE DE CALCUL :

1 er cas : L'appui N° 0 tasse de 1 cm

$$\Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = \Omega_5 = \Omega_6 = \Omega_7 = 0$$

$$\Omega_1 = \frac{V_1 - V_0}{l_1} = \frac{(1-0)10^{-2}}{28,57} = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ rd}$$

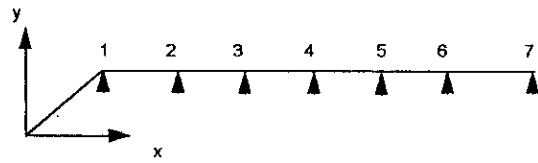


Figure (13 - 2)

$$[CM][M_i] = \begin{bmatrix} -3,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-4} \Leftrightarrow [M_i] = \begin{bmatrix} -44,93 \\ 12,02 \\ -3,2 \\ 0,80 \\ -0,23 \\ 0,07 \end{bmatrix}$$

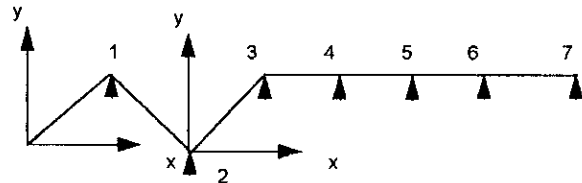
2 eme cas : Les appuis N° 0 et 2 tassent de 1 cm

$$\text{On a : } \Omega_4 = \Omega_5 = \Omega_6 = \Omega_7 = 0$$

$$\Omega_1 = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ rd}$$

$$\Omega_2 = -3,8 \cdot 10^{-4} \text{ rd}$$

$$\Omega_3 = 2,51 \cdot 10^{-4} \text{ rd}$$



$$[CM][M_i] = [\Omega_i] \Leftrightarrow [M_i] = \begin{bmatrix} -105,10 \\ 102,20 \\ -55,90 \\ 14,99 \\ -4,04 \\ 1,3 \end{bmatrix} \text{ t.m}$$

Tableau donnant les moments sur appuis dus aux dénivellations des appuis :

Mi(t.m) N° d'appui	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆
0	-44,93	12,02	-3,2	0,86	-0,23	0,07
1	89,92	-62,05	16,6	-4,45	1,2	-0,38
2	-63,62	103,4	-66,02	17,69	-4,77	1,5
3	17,12	-66,05	104,5	-66,3	17,9	-5,7
4	-4,59	17,7	-66,36	104,88	-67,01	21,3
5	1,2	-4,7	17,6	-69,8	102,38	-73,13
6	-0,36	1,38	-5,2	19,4	-72,44	137,69
7	0,1	-0,41	1,54	-5,7	21,52	-79,8
0+2	-105,1	102,2	-55,9	14,99	-4,04	1,3
1+3	108,74	-116,2	108,2	-67,3	18,16	-5,78
2+4	-64,7	107,9	-119,06	119,01	-70,8	22,55
3+5	14,9	-57,48	108,8	-128,58	119,3	-78,9
4+6	-4,94	19,08	-71,4	123,9	-138,03	157,4
5+7	1,32	-5,12	19,18	-71,6	123,9	-152,9

PARTIE II

CHAPITRE I

I- THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE :

I-1 INTRODUCTION :

Tous les matériaux de construction possèdent à un certain degré la propriété d'être élastiques, c'est à dire que si les forces extérieures, qui provoquent la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaît en même temps que la force qui lui a donné naissance.

Les plaques dont il est question dans cette présente étude sont supposées constituées d'un matériau linéaire élastique. Par conséquent, nous exposons dans ce chapitre les concepts fondamentaux de la théorie de l'élasticité, particulièrement les concepts de contrainte, de déformation . Cela nous permettra d'établir les équations générales de l'élasticité linéaire.

Du fait de la complexité de ces équations, la solution basé sur la théorie exacte n'existe que pour des problèmes simples et souvent des hypothèses simplificatrices sont émises pour la résolution des problèmes de grande complexité.

I-2 ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT

I-2.1 TENSEUR CONTRAINTE :

Dans l'étude d'un milieu continu, on s'intéresse à la manière avec laquelle les forces sont transmises à travers celui-ci.

Deux type de forces extérieures sont susceptibles d'agir sur un corps:

1° - Les forces dites volumiques qui sont distribuées dans tout le volume du corps lui-même telle que la force de gravitation.

2° - Les forces dites surfaciques réparties sur toutes la surface du corps telle que la pression hydrostatique.

Dans un grand nombre de cas les forces volumiques sont négligées ou considérées comme uniformes.

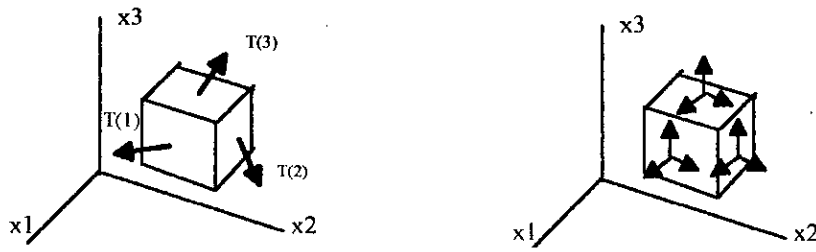


Figure 1-1: contraintes .

Soit un parallélépipède infinitésimal découpé dans un milieu continu (Fig. 1-1)

Les forces surfaciques sont représentées sur trois faces rectangulaires de l'élément, l'exposant indiquant la face sur la-quelle s'exerce la force. On désigne par τ_{11}, τ_{12} et τ_{13} les trois composantes du vecteur $T^{(1)}$ selon les axes X_1, X_2 et X_3 respectivement.

En général:

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \tau_{11} \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{13} \\ T^{(2)} &= \tau_{21} \cdot \tau_{22} \cdot \tau_{23} \\ T^{(3)} &= \tau_{31} \cdot \tau_{32} \cdot \tau_{33} \end{aligned}$$

Ou alors :

$$T_j^{(i)} = \tau_{ij} \quad (1-1)$$

Les neuf quantités τ_{ij} sont appelées contraintes. Ce sont des forces par unité de surface. Le premier indice indique la direction de la normale à la face tandis que quand les trois vecteurs contraintes $T^{(1)}, T^{(2)}$ et $T^{(3)}$ agissant en un point selon trois plan perpendiculaires sont connus, il est possible de déterminer le vecteur contrainte s'exerçant en ce point selon un plan de normale extérieure \underline{n} arbitrairement orientée en utilisant la formule de Cauchy:

$$T_j^{(n)} = Tn \quad (1-2)$$

ou T est le tenseur contrainte relatif au point considéré:

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

Les termes diagonaux sont appelés contraintes normales et sont souvent désignés par σ , tandis que les termes extradiagonaux sont appelés contraintes de cisaillement.

I-2.2 EQUATIONS D'EQUILIBRE:

Ecrivons la loi de Newton en un point P quelconque appartenant à un élément de masse dm :

$$df = 0$$

Où df représenté la somme de toutes les forces, surfaciques et volumiques, agissant sur l'élément. En intégrant cette équation sur un domaine arbitraire de volume V et de frontière surfacique S , parmi les forces surfaciques, seules celles qui agissent sur S subsistent (3^{ème} loi de Newton):

$$\oint_S T_i^{(n)} dA + \int_D B_i dV = 0$$

or :

$$T_i^{(n)} = \tau_{ij} n_j$$

donc:

$$\oint_S \tau_{ij} n_j dA + \int_D B_i dV = 0$$

en utilisant le théorème de la divergence on obtient:

$$\int_D (\tau_{ij,j} + B_i) dV = 0$$

Comme le domaine est arbitraire:

$$\tau_{ij,j} + B_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-4)$$

Cette équation traduit l'équation statique d'équilibre en un point selon trois directions.

I-3 ETAT DE DEFORMATION:

I-3.1 TENSEUR DEFORMATION:

On cherche à présent un moyen pour exprimer les déformations de notre solide. Pour ce faire, on considère une configuration initiale dans laquelle les deux points P et Q de la figure (1-2) sont distants d'une quantité Δy .

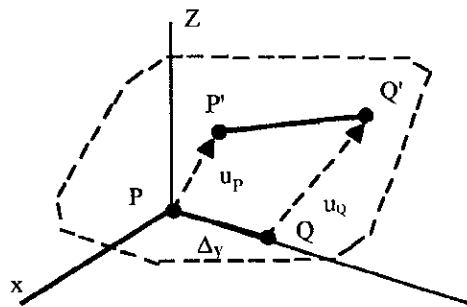


Figure 1-2 : Déformation d'un segment linéaire.

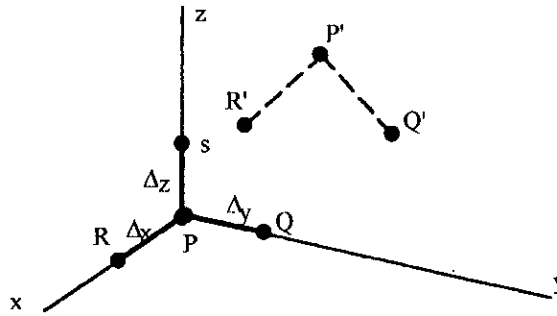


Figure 1-3 : Déformation de segments linéaires.

On projette les segments $(\overline{P'Q'})$ et $(\overline{P'R'})$ sur le plan (x, y) c'est à dire sur le plan que formaient ces segments avant déformation.

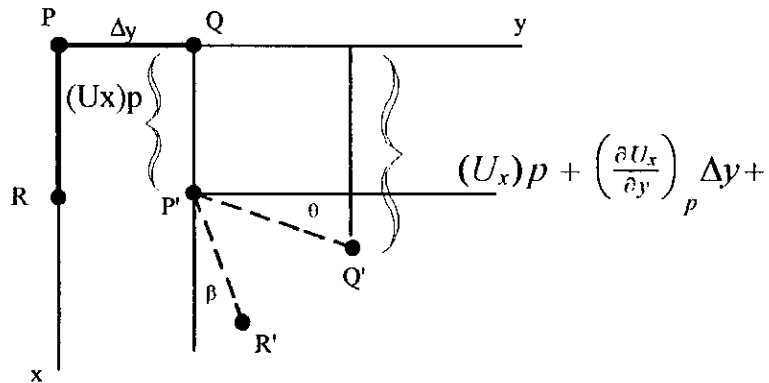


Figure 1-4 : Projection des segments déformés.

On note que θ représente l'angle entre la projection de $(\overline{P'Q'})$ et l'axe des y tandis que β est l'angle que forme la projection de $(\overline{P'R'})$ et l'axe des x .

En exprimant le déplacement du point Q dans la direction x en terme de $(u_x)_p$ comme suit:

$$(u_x)_Q = (u_x)_p + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_p \Delta y + \dots$$

La composante de la projection de $(\overline{P'Q'})$ selon Y est : $\Delta y + \delta^2 y$ ou $\delta^2 y$ est incrément de second ordre pour les petites déformations.

L'angle θ peut à présent être exprimé comme suit:

$$\tan \theta = \frac{(\partial(u_x)/\partial y)_p \Delta y + \dots}{\Delta y + \delta^2 y}$$

En faisant tendre Δy vers 0, Les termes d'ordre supérieur dans le numérateur s'annulent ainsi que l'incrément du second ordre $\delta^2 y$.

$$\tan \theta = 0 = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

D'une façon analogue:

$$\tan \beta = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

La somme $(\theta + \beta)$ peut être directement liée à la déformation de cisaillement comme suit:

$$(\theta + \beta) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2 \epsilon_{xy} = \gamma_{xy}$$

Parce que les déformations sont supposées petites, on peut dire que γ_{ij} représente la variation de l'angle droit initialement formé par deux segments de droite infinitésimaux dans la i ème et la j ème direction en un point.

Les composantes du tenseur déformation sont liées à celles du champ de déplacement par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-5)$$

Ou d'une façon explicite:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \quad (1-6)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz}$$

On considère présent, l'effet de ces déformations sur un parallélépipède infinitésimal.

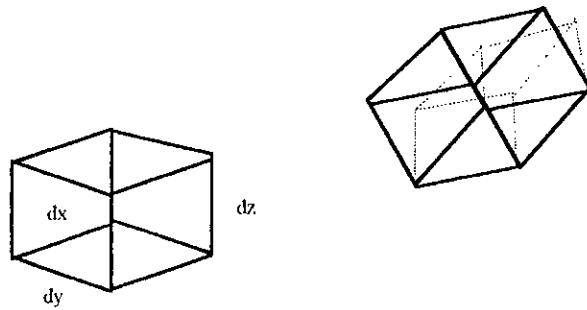


Figure 1-5 : Déformation d'un cube élémentaire.

En l'absence de déformations de cisaillement, les faces du parallélépipède demeurent orthogonales entre elles alors que sa position et son orientation peuvent changer comme le peuvent ses dimensions et son volume. En présence des déformations de cisaillement, les faces du parallélépipède peuvent perdre leur perpendicularité mutuelle transformant ainsi les rectangles en parallélogrammes.

En résumé, on peut dire que les déformations normales affectent la taille de l'élément tandis que les déformations de cisaillement modifient sa forme.

I-3.2 EQUATION DE COMPATIBILITE:

On considère les relations déplacements déformations:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-5)$$

Si le champ de déplacement est connu, il est facile de trouver les six composantes du tenseur de déformation en substituant les expressions de U_i dans les équations ci-dessus.

Le problème inverse qui consiste à retrouver le champ de déplacement à partir d'un champ de déformation donné n'est pas si simple. En effet, cela revient à intégrer un système de six équations aux dérivées partielles à trois inconnues.

Pour assurer l'intégrabilité de ce système, on impose certaines restrictions sur les termes du tenseur ϵ_{ij} .

Les équations qui traduisent mathématiquement cette condition d'intégrabilité sont dites équations de compatibilité et sont données par:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ij,ki} - \epsilon_{kl,ij} = 0 \quad (1-7)$$

En raison de la symétrie des indices et de la présence d'identité le nombre de ces équations se réduit à 6:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1-8a)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1-8b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (1-8c)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1-8d)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (1-8e)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \quad (1-8f)$$

1-4 LOIS CONSTITUTIVES : LOI DE HOOKE.

Dans les sections précédentes, on a décrit le tenseur contrainte résultant des considérations d'équilibre et le tenseur déformation résultant des considérations cinématiques.

Ces deux tenseurs sont en fait liés entre eux par des relations appelées lois constitutives. En général ces relations impliquent la température et le temps comme autres variables.

La plus simple relation qui puisse exister entre contraintes et déformations est une relation linéaire de la forme:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-9)$$

La relation de l'équation (1-9) est appelée loi de HOOKE généralisée.

C_{ijkl} est un tenseur du quatrième ordre qui consiste en 81 termes qui sont indépendants de la position du point pour un matériau homogène. Cependant, vu la symétrie des tenseurs τ_{ij} et ϵ_{kl} le nombre de termes se réduit à 36.

L'équation (1-10) peut s'écrire:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & \dots & C_{16} \\ C_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{61} & \dots & \dots & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

GREEN (1839 -1841) a défini un matériau comme étant élastique s'il existait une fonction d'énergie de déformation W telle que:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (1-10)$$

Pour que cette fonction vérifie l'équation (1-12) et la loi de HOOKE simultanément elle doit prendre la forme:

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{il} \epsilon_{kl} \quad (1-11)$$

Ou le tenseur C_{ijkl} doit, en plus des propriétés de symétrie déjà citées, avoir la propriété $C_{ijkl} = C_{klij}$ réduisant ainsi le nombre de termes de 36 à 21.

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \dots & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \dots & \dots & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \dots & \dots & \dots & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \dots & Sym & \dots & \dots & C_{55} & C_{56} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

En général les constantes C_{ij} dépendent de l'orientation du système de coordonnées.

En introduisant la notion de symétrie élastique, on peut, dans le cas d'un plan de symétrie élastique, réduire le nombre de termes indépendants.

En effet, lorsque les constantes élastique C_{ij} en un point ont les mêmes valeurs pour toute paire de systèmes de coordonnées qui sont une réflexion l'un de l'autre par rapport à un plan, alors ce plan est appelé plan de symétrie élastique pour le matériau en ce point.

1° - Cas d'un plan de symétrie:

On démontre que dans ce cas :

$$C_{15} = C_{16} = C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0$$

Le nombre de termes indépendants est alors de 13.

2°- Cas de symétrie orthotrope:

Dans ce cas, il existe trois plans perpendiculaires de symétrie élastique et en plus des constantes nulles du cas précédent on a:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{36} = 0$$

3° - Isotropie :

Si les valeurs des constantes C_{ij} sont indépendantes du système de coordonnées, le matériau est alors dit isotrope et le nombre de constantes indépendantes est réduit à deux.

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 & 0 \\ \cdot & Sym & \cdot & \cdot & \mu & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

Où λ et μ sont les coefficients de lamé.

$$\lambda = \frac{VE}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

E : module de Young.

ν : coefficient de poisson.

G : coefficient de cisaillement.

$$D = C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2(1+\nu)/E & 0 & 0 \\ \cdot & Sym & \cdot & \cdot & 2(1+\nu)/E & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

la loi HOOKE pour un matériau isotrope est:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1-14)$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{pp} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (1-15)$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (1-16)$$

1-5 EQUATIONS GENERALES DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE:

Le système d'équations nécessaire à la résolution d'un problème d'élasticité linéaire en tout point comprend:

Les équations d'équilibre:

$$\tau_{i,j,l} + B_i = 0 \quad (1-4)$$

Les équations contraintes déformations:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-9)$$

En particulier:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (1-14)$$

Les équations déformations déplacements:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-5)$$

Ce système consiste donc en 15 équations à 15 inconnues.

Si les fonctions de déplacements ne sont pas explicitement incluses, on doit s'assurer que les équations de compatibilité sont satisfaites.

Il existe trois types de conditions aux limites auxquels correspondent trois types de problèmes.

Problèmes du 1^{er} type:

Dans ce type de problèmes, le champ de contrainte est imposé en tout point de la frontière et on doit déterminer les champs de déplacement et de contrainte en tout point du milieu considéré.

Problème du 2^{sd} type:

Le champ de déplacement en tout point de la frontière du milieu considéré constitue les données aux limites de ce type de problème tandis que ses inconnues sont les champs de contraintes et de déformations en tout point du corps.

Problème mixtes:

Dans ce type de problème, il faut déterminer les champs de déplacements et de contraintes en tout point du milieu en ayant comme donnée le champs de contraintes sur une partie S_1 de la frontière et le champ de déplacement sur l'autre partie S_2 . Les problèmes envisagés précédemment sont des cas particuliers des problèmes mixtes.

I-5.1 APPROCHE BASEE SUR LES CONTRAINTES:

Pour les problèmes du premier type il est plus convenable d'exprimer les équations de base en termes de contraintes. Pour ce faire, on substitue l'expression de ϵ_{ij} de l'équation (1-15) dans les équations de compatibilité (1-8) et utilisant les équations d'équilibre on aboutit à:

$$\nabla^2 \tau_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)} \tau_{pp,ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} \nabla^2 \tau_{pp} = -(B_{i,j} + B_{j,i}) \quad (1-17)$$

Cette équation représente en fait un ensemble de trois équations indépendantes. Ce sont les équations de compatibilité de BELTRAMI-MICHELL.

Vu la complexité de ces équations, une formulation plus intéressante se fait en terme de fonction de contrainte.

I-5.2 APPROCHE BASEE SUR LES DEPLACEMENTS:

Dans le cas où les données aux limites sont du second type, il est plus commode de recourir à une formulation du problème en fonction du champ de déplacement. Pour cela, on substitue (1-14) dans (1-4) pour obtenir les équations d'équilibre en terme de déformations:

$$\lambda \epsilon_{pp,r} + 2G \epsilon_{ij,j} + B_i = 0$$

En substituant cette même équation dans (1-5), on arrive à l'équation de NAVIER:

$$G \nabla^2 u_i + (\lambda + G) u_{j,i} + B_i = 0 \quad (1-18)$$

I-6 PROBLEMES DE L'ELASTICITE PLANE:

La solution rigoureuse des problèmes tri-dimensionnels n'existe que pour quelque cas simples. Par conséquent, on est souvent amené à simplifier les problèmes, de façon à obtenir une solution mathématique qui puisse interpréter raisonnablement le problème physique.

Pour illustrer ceci, on expose à présent deux cas particuliers de problèmes où les équations sont simplifiées.

I-6.1 CONTRAINTE PLANE:

les solutions du type contraintes plane sont souvent adoptées et peuvent être considérées comme de bonnes approximations dans le cas, par exemple, d'une plaque épaisse chargée dans son plan.

Un cas de contraintes planes est caractérisé par:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0$$

On a alors pour un matériau isotrope les relations:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

et

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

I-6.2 DEFORMATION PLANE:

on arrive a la même simplification du problème lorsque l'on considère la situation inverse a celle d'un cas de contrainte plane, celle dans laquelle la dimension du corps dans la direction de l'axe Z est très étendue. Un exemple de ce genre de problèmes est celui d'un barrage de retenue soumis à l'action d'une pression transversale qui reste constante sur sa longueur. En effet, toute portion du corps située à une distance considérable de ses extrémités subit une déformation plane et les déplacements de tous les points du corps déformé se trouvent dans des plans perpendiculaires à la longueur du corps.

Un cas de déformation plane est caractérisé par:

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

Les relations contraintes déformations pour un matériau isotrope en déformation plane sont:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

La contrainte τ_{zz} bien que celle ci ne soit pas toujours nulle, n'apparaît pas dans les relations ci dessus. Cependant, elle peut être obtenue à partir de la relation $\epsilon_{zz} = 0$ comme suit:

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} &= 0 \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(\tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})) \quad \Rightarrow \tau_{zz} = \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \end{aligned}$$

1-6.3 FONCTION DE CONTRAINTE D'AIRY:

on a déjà établi que la solution d'un problème d'élasticité revient à l'intégration d'un système d'équation aux dérivées partielles.

Dans les situations de déformation plane ou de contrainte plane, l'équation de compatibilité de BELTRAMI-MICHELL s'écrit en l'absence des forces volumiques:

$$\nabla_l^2(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = 0 \quad (1-22)$$

La méthode habituelle employée pour résoudre ces équations, consiste à introduire une nouvelle fonction scalaire $\Phi(x,y)$ appelée fonction de contrainte d'AIRY. Les contraintes sont reliées à cette fonction par:

$$\tau_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \tau_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1-23)$$

En substituant les expressions de τ_{xx} et de τ_{yy} ci-dessus dans l'équation (1-24) on aboutit à:

$$\nabla_l^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = \nabla_l^2 \left(\nabla_l^2 \right) \Phi = \nabla_l^4 \Phi = 0 \quad (1-24)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (1-25)$$

S'il est possible de trouver une fonction $\Phi(x,y)$ satisfaisant l'équation Biharmonique (1-26) à l'intérieur du domaine et telle que les contraintes et les déformations sur la frontière vérifient les conditions aux limites, alors la fonction $\Phi(x,y)$ donne la solution du problème.

CHAPITRE II

II - FLEXION DES PLAQUES

II -1 INTRODUCTION

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (x,y) et par une épaisseur notée h petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

Une plaque, contrairement à une membrane, possède une rigidité à la flexion résultant de son épaisseur et de l'élasticité du matériau qui la constitue. Comme exemple de plaques, on peut citer :

- Le plancher d'un immeuble.
- Le tablier d'un pont.

Les propriétés de flexion d'une plaque dépendent essentiellement de son épaisseur par rapport à ses autres dimensions, ainsi une plaque est dite mince si son épaisseur est petite par rapport à ses autres dimensions (de l'ordre du $1/15$), sinon elle est dite épaisse.

On distingue trois sortes de plaques:

- Les plaques minces avec faibles flèches.
- Les plaques minces avec grandes flèches.
- Les plaques épaisses.

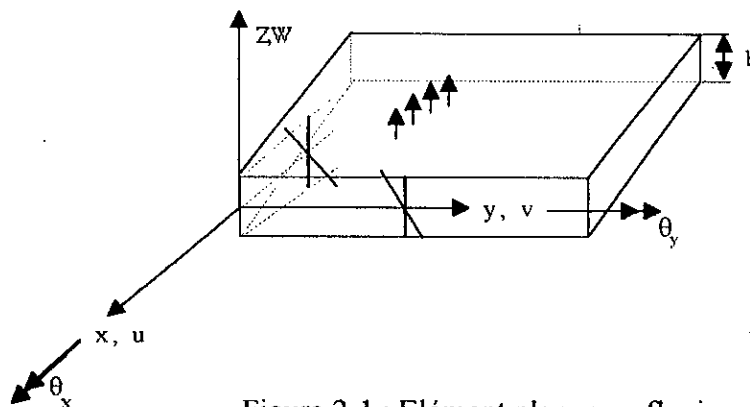


Figure 2-1 : Élément plaque en flexion .

Le type de plaques qu'il s'agit d'étudier dans ce présent chapitre sont les plaques épaisses selon la théorie de Mindlin et afin de mieux comprendre le comportement d'une plaque épaisse en flexion, nous avons jugé utile d'exposer en premier lieu un aperçu sur les hypothèses de base émises pour l'étude des plaques minces

II-2 PLAQUES MINCES AVEC FAIBLE FLECHE : THEORIE DE KIRCHOFF

Pour ce type de plaque, les hypothèses de base sont les suivantes :

1 - Il n'y a pas de déformation dans le plan moyen de la plaque avant, pendant et après déformation.

2 - Les points de la plaque situés initialement sur une normale au plan moyen de la plaque demeurent sur celle-ci après flexion. Les déformations de cisaillement sont donc négligées.

3 - Les contraintes normales selon la direction transversales sont négligées par rapport aux autres contraintes.

4 - Il n'y a pas de déformation selon la direction transversale c'est à dire qu'un élément linéaire conserve sa longueur après déformation.

Ces hypothèses sont appelées hypothèses de KIRCHOFF et permettent de déterminer les déplacements, w , du système.

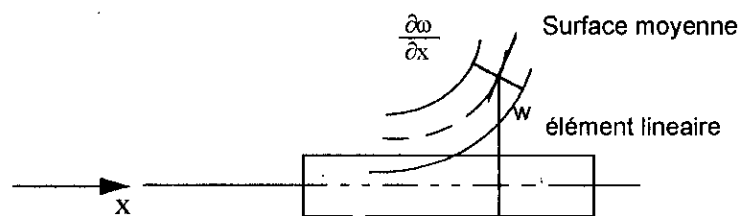


Figure (2 - 2) Déformation d'un élément linéaire

L'hypothèse 4 implique :

$$\epsilon_{zz} = 0$$

sachant que :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2-1)$$

Alors :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ce qui montre immédiatement que w est indépendante de z :

$$w = w(x,y) \quad (2 - 2)$$

L'hypothèse 2 implique:

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad (2 - 3)$$

II -3 PLAQUES EPAISSES : THEORIE DE MINDLIN :

Lorsque l'épaisseur de la plaque dépasse le 1 / 10 de sa plus petite dimension dans son plan, on dit que la plaque est épaisse. La théorie de KIRCHOFF n'est plus valable et on doit adopter une autre théorie qui est la théorie de MINDLIN.

Un élément linéaire normal au plan moyen avant déformation est supposée rester linéaire mais pas forcément normal à celui-ci après déformation. Ceci veut dire que, contrairement à la théorie de KIRCHOFF, les déformations de cisaillement ne sont pas négligées.

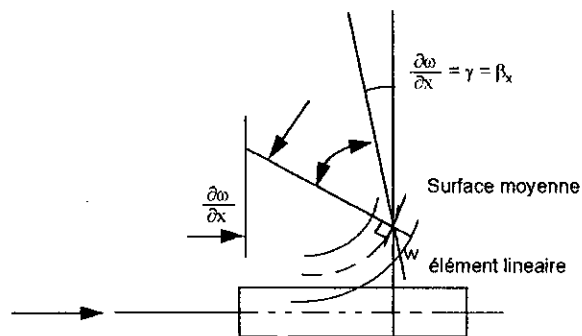


Figure (2 - 3) Déformation d'un élément linéaire

II -3.1 DEPLACEMENTS, DEFORMATIONS ET CONTRAINTES :

Le déplacement d'un point n'appartenant pas au plan moyen n'est plus gouverné par les rotations w_x et w_y . En effet, le mouvement dépend maintenant de β_x et β_y qui représentent les rotations d'une ligne normale à la surface moyenne non déformée dans le plan (x,z) et (y,z) respectivement. On a alors:

$$u = z \beta_x(x,y) \quad v = -z \beta_y(x,y) \quad w = w(x,y) \quad (2 - 4)$$

Considérant la plaque de la figure (2.1), les déformations de flexion varient linéairement à travers l'épaisseur de la plaque et sont données par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

Alors que le cisaillement transversal est supposée constant sur toute l'épaisseur de la plaque et vaut :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

On peut également obtenir les contraintes en utilisant la loi de HOOKE :

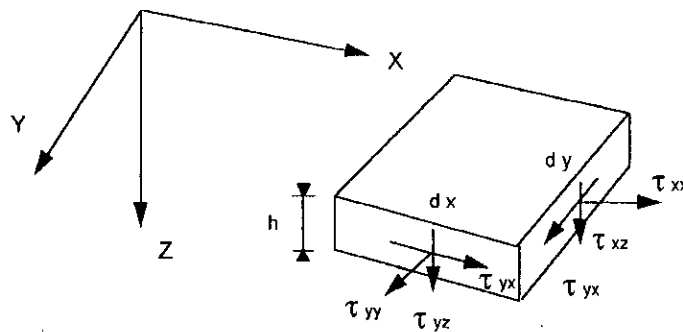


Figure (2-4) Contraintes

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad (2-7 a)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad (2-7 b)$$

$$\gamma_{xy} = 2\frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2-7 c)$$

L'état de contraintes en tout point de la plaque correspond à un état de contrainte plane, c'est à dire que $\sigma_{zz} = 0$. Pour un matériau isotrope, on a donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = z \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

Pour déterminer les deux dernières contraintes τ_{xz} et τ_{yz} , on utilise les équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2-9a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2-9b)$$

Qui donnent :

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

II-3.2 EFFORTS INTERNES :

Les moments de flexion et de torsion par unité de longueur peuvent être obtenus par intégration des contraintes sur l'épaisseur de la plaque :

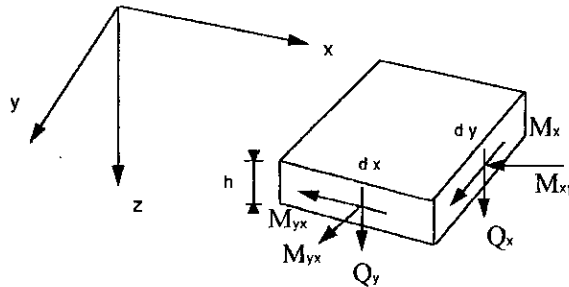


Figure (2 - 5) Efforts résultants

Les efforts résultants sont :

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) z^2 dz \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) = D \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2-11)$$

De la même façon :

$$M_y = D \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \quad (2-12)$$

$$M_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (2-13)$$

Les forces de cisaillement résultantes, elles, valent :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = k \tau_{xz} h \quad (2-14)$$

où k est le facteur de cisaillement introduit pour corriger l'hypothèse selon laquelle le cisaillement transversal est constant à travers l'épaisseur de la plaque. On prend généralement égal à 5/6 dans le cas d'un matériau isotrope.

$$Q_x = k h G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) \quad (2-15)$$

De la même façon, on obtient :

$$Q_y = k h G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) \quad (2-16)$$

II-3.3 EQUATION D'EQUILIBRE :

De l'ensemble des équation précédemment établies, on peut établir l'équation de l'équilibre de l'élément ci-dessous en écrivant les équations d'équilibre (1-4) de la façon suivante:

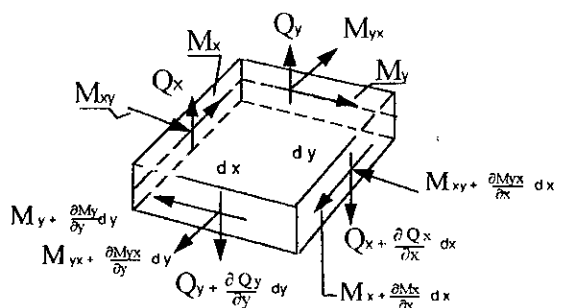


Figure (2 - 6) Equilibre d'un élément différentiel

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2-17a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2-17b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (2-17c)$$

En multipliant l'équation (2 - 17a) par z et en intégrant sur l'épaisseur de la plaque :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = 0$$

or :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = (z \tau_{xz}) \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz$$

Sachant que les contraintes de cisaillement sont nulles sur les faces d'équations $z = \pm h / 2$ on obtient:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2 - 18)$$

D'une façon analogue :

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (2 - 19)$$

En substituant les équations (2 - 11) à (2 - 15) dans les équations d'équilibre (2 - 17) à (2 - 19), on obtient:

$$D \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) + k G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) = 0 \quad (2 - 20a)$$

$$D \left(\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} \right) + k G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) = 0 \quad (2 - 20b)$$

$$-k G h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) = P \quad (2 - 20c)$$

Il est possible d'éliminer les fonctions β_x et β_y des équations ci-dessus au prix de substitution fastidieuses mais rigoureuses pour aboutir à:

$$D \nabla^4 w + \frac{D}{k G h} \nabla^2 w - p = 0 \quad (2 - 21)$$

II -4 CONDITIONS AUX LIMITES :

Le déplacement w doit satisfaire aux équations différentielles d'équilibre en tout point intérieur de la plaque et aux conditions aux limites en tout point de la frontière de celle-ci.

II -4.1 BORDS ENCASTREE:

Le long d'un bord encastéré, la flèche w est nulle ainsi que les rotations des normales à la surface moyenne non fléchie et donc :

$$w_{x=a} = \beta_{x \ x=a} = \beta_{y \ x=a} = 0$$

Notons que dans la théorie de KIRCHOFF $\beta_x = -\partial\omega / \partial y$ et $\beta_y = -\partial\omega / \partial x$ et la condition $\beta_x(x = a) = 0$ veut dire que le plan tangent à la surface moyenne fléchie le long de ce bord coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque.

II -4.2 BORD SIMPLEMENT APPUYE:

Si le bord de l'équation $x = a$ de la plaque est simplement appuyé, la flèche w le long de ce bord est nulle. Cependant, ce bord pourra tourner librement autour de l'axe y ($x = a$), c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion par rapport à l'axe y le long de ce bord.

La représentation des conditions aux limites est alors:

$$w_{x=a} = M_{x \ x=a} = 0$$

On a aussi $\beta_x_{x=a} = 0$ puisque la rotation autour de l'axe x n'est pas permise.

II -4.3 BORDS LIBRES :

Si le bord de l'équation $x = a$ est entièrement libre, cela veut dire que ce bord ne subit ni moment de torsion ou de flexion ni forces de cisaillement transversal et alors :

$$Q_{x \ x=a} = M_{x \ x=a} = M_{xy \ x=a} = 0$$

II -5 METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTES :

La résolution de l'équation gouvernante peut se faire par différentes méthodes que l'on peut classer en deux catégories.

II -5.1 METHODES VARIATIONELLES :

On exprime w sous la forme :

$$w = \sum_n a_n f_n(x, y)$$

Où $f_n(x, y)$ sont des fonctions qui vérifient les conditions aux limites. Les inconnues du problèmes sont les coefficients a_n qui seront déterminées en minimisant l'énergie potentielle totale.

Parmi ces méthodes, on peut citer:

- La méthode de RITZ.
- La méthode de GALERKINE.

II -5.2 METHODES NUMERIQUES :

La résolution analytique des problèmes de flexion n'existe que pour des problèmes de géométrie simple et de conditions aux limites régulières. En effet, la résolution de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne le comportement flexionnel d'une plaque est fastidieuse et parfois impossible c'est pourquoi on a recours aux méthodes numériques qui se sont avérées être un outil puissant, pratique et essentiel pour le calcul des structures. Parmi ces méthodes, on peut citer :

- La méthode des différences finies.
 - La méthode des bandes finies.
 - La méthode des éléments finis.
 - La méthode des éléments aux frontières.
- Nous développerons, dans la présente étude la méthode des éléments finis que nous détaillerons dans le prochain chapitre

CHAPITRE III

III - METHODE DES ELEMENTS FINIS

III -1 INTRODUCTION :

Depuis de nombreuses années, les ingénieurs sont capables de calculer les efforts dans les structures formées de poutres. Les hypothèses admises dans le cadre de la théorie des poutres permettent d'utiliser des méthodes rigoureuses et relativement simples à mettre en oeuvre. La méthode des rotations, la méthode de CROSS sont des solutions itératives et accessibles à la main qui permettent d'obtenir les déplacements et les efforts dans des structures simples

Il est apparu assez vite que la méthode des déplacements qui consiste à prendre comme inconnues de départ les déplacements (translations et rotations) de chacun des noeuds de la structure donnait une solution élégante pour le calcul des efforts. L'avènement des ordinateurs, capables d'effectuer dans des délais et à des coûts raisonnables la masse de calculs nécessaire a définitivement banalisé de telles méthodes.

De nos jours la méthode des déplacements est la plus couramment utilisée pour la formulation de la méthode des éléments finis. Ainsi, l'utilisation de cette méthode sur ordinateur permet d'établir et de résoudre les équations gouvernantes de problèmes complexes de manière efficace.

La méthode des éléments finis a été développée à l'origine pour l'analyse des problèmes de mécanique des structures mais il est apparu qu'elle était également applicable pour la résolution de problèmes tout à fait différents (problèmes thermiques, hydrodynamiques, ...) et en s'appuyant sur les méthodes numériques de résolution créées par l'informatique, la méthode des éléments finis a toujours donné de très bons résultats.

Le concept de la méthode des éléments finis est cependant très large, et elle peut en effet être utilisée sous différentes formulations éventuellement sous différentes approches:

- approche basée sur la méthode des déplacements (approche déformation).
- approche basée sur la méthode des forces (approche contraintes).
- et enfin, l'approche par la méthode mixte (contraintes-déformations).

III -2 METHODE DES ELEMENTS FINIS BASEES SUR LES DEPLACEMENTS :

La méthode des éléments finis basée sur les déplacement peut être vue comme une extension de la méthode des déplacements qui à été très longtemps utilisée (et qui l'est encore de nos jours) dans l'analyse des poutres et treillis.

PRINCIPE GENERAL :

Les différentes étapes de résolution sont :

- 1 - Modélisation (discretisation) de la structure comme un assemblage d'éléments liés entre eux aux noeuds. On la met ainsi sous une forme analysable.
- 2 - Prendre comme seules inconnues les déplacements des noeuds de ces éléments.
- 3 - Evaluation de la matrice de rigidité de chaque élément et calcul de la matrice de rigidité de la structure entière par simple addition des matrices de rigidité des éléments.
- 4 - Application des liaisons externes et internes (déplacement imposés nuls par exemple).
- 5 - Calcul à partir du chargement les charges appliquées aux noeuds des éléments
- 6 - Résoudre le système linéaire pour obtenir les déplacements.
- 7 - A partir des déplacements déduire les contraintes et déformations dans chaque élément.
- 8 - Interprétation des résultats

Nous tenons à signaler que les étapes les plus importantes sont la modélisation du problème et l'interprétation des résultats.

III -3 DEROULEMENT D'UN CALCUL DE STRUCTURE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS:

Les étapes fondamentales dans un calcul de structures par la méthode des éléments finis sont:

- 1 - Modélisation ou idéalisation de la structure: cette étape consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des matériaux, et à subdiviser la structure en un ensemble d'éléments de façon à représenter au mieux la structure à

étudier. Cette subdivision tient compte de deux paramètres fondamentaux : Le type d'éléments à utiliser et la finesse de la discrétisation.

2 - Type de comportement: Il convient d'autre part de définir le mode de fonctionnement de chaque élément.

Par exemple, si la structure n'est soumise qu'à des forces dans le plan, les éléments travaillent en élasticité plane.

3 - Calcul des matrices de rigidité: La matrice de rigidité K relie les forces appliquées aux noeuds de l'élément au déplacement de ces noeuds.

$$F = K U \quad (3 - 1)$$

Le vecteur U a pour composante les déplacements des noeuds.

Le vecteur F a pour composante les forces appliquées aux noeuds

PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

Si on impose à l'élément des déplacements arbitraires U , les forces F aux noeuds sont données par l'expression (3 - 1) et leur travail lors du déplacement U est égal à l'énergie potentielle interne:

$$U^T F = U^T K U = \int_V \varepsilon^T \sigma \, dv \quad (3 - 2)$$

Les vecteurs ε et σ ont pour composantes les déformations relatives et les contraintes en un point quelconque de l'élément.

L'intégration s'effectue sur le volume V de l'élément.

Les contraintes sont reliées aux déformations par la relation (1 - 9), et la relation (3 - 2) s'écrit alors :

$$U^T K U = \int_V \varepsilon^T C \varepsilon \, dv \quad (3 - 3)$$

La matrice K peut être évaluée à partir de la relation (3 - 3) si le vecteur ε , donc la déformée en tout point, peut être déduite du vecteur U représentant les déplacements des noeuds.

Dans le cas des poutres la théorie fournit cette relation de manière exacte, ce qui n'est pas le cas pour les éléments finis: on est donc obligés de faire une hypothèse.

On écrit en général les déformations ε sous la forme d'une fonction polynomiale des coordonnées locales dont les coefficients dépendent des déplacements nodaux.

On peut alors intégrer l'équation (3 - 3), valable quelque soit le vecteur U utilisé, et en comparant terme à terme les polynômes obtenus au premier et au second membre évaluer tous les coefficients de la matrice K .

REMARQUE :

Il est à retenir que cette matrice de rigidité n'est pas évaluée de manière rigoureuse.

4 - Calcul du vecteur de charge aux noeuds :

Le chargement appliqué sur un élément est pris en compte sous forme de charges aux noeuds puisque seuls les degrés de libertés des noeuds interviennent dans la matrice de rigidité globale de la structure.

Ainsi que pour les poutres, ces charges aux noeuds sont évaluées dans l'hypothèse d'un encastrement parfait.

Il faut donc tenir compte de la déformation de l'élément sous charges, et comme pour l'évaluation de la matrice de rigidité il est nécessaire d'exprimer les déplacements d'un point quelconque en fonction des déplacements des noeuds.

On est ainsi conduit à faire usages des polynômes d'interpolation, ce qui constitue une approximation.

Pour certains éléments simples on fait une approximation supplémentaire en rapportant directement les charges aux noeuds.

Par exemple dans le cas d'un élément de plaque rectangulaire soumis à une charge répartie uniforme on prend en chaque noeud une charge égale au quart de la charge totale appliquée, en négligeant donc les moments.

5 - Calcul des efforts dans les éléments :

Après assemblage de la matrice de rigidité générale de la structure, les déplacements des noeuds sont calculés par résolution du système linéaire d'équation.

Les efforts dans chaque élément sont alors évalués comme suit:

a - Calcul du vecteur ε des déformations en un point donné.

Ce vecteur est déduit des déplacements nodaux de l'élément à l'aide des fonctions polynomiales d'interpolation.

b - Calcul des contraintes dues à la déformation par la relation :

$$\sigma = C.\varepsilon \quad (1-9)$$

On voit donc que le calcul des contraintes en un point d'un élément s'effectue uniquement d'après le déplacement des noeuds, sans prendre en compte l'effet local des charges appliquées sur l'élément.

La théorie des éléments finis fournit donc une solution d'équilibre global (les noeuds sont équilibrés) alors que, dans le cas d'un assemblage de poutres, l'équilibre est à la fois global et local, on tient compte des charges appliquées le long d'une poutre pour évaluer les efforts en tout point.

III -4 EXPOSE DES PRINCIPES ENERGETIQUES :

Dans un problème mécanique, trois conditions doivent être satisfaites afin de pouvoir obtenir la solution exacte, ce sont:

- Les conditions d'équilibre
- Les conditions de compatibilité
- Les lois de comportement contrainte-déformation $\sigma - \varepsilon$.

Dans la méthode des éléments finis, les deux dernières conditions à savoir les conditions de comptabilités et de comportement, sont généralement satisfaites, cependant la première condition (condition d'équilibre) n'est satisfaite qu'approximativement ce qui confère à cette méthode son caractère quelque peu imprécis. Cette erreur peut cependant être fortement réduite en augmentant le nombre d'éléments. Comme nous l'avons dit précédemment, notre approche se fait par la méthode des déplacements en utilisant la formulation variationnelle qui garantit la symétrie de la matrice de rigidité.

La méthode variationnelle se base sur le principe des travaux virtuels qui constitue le fondement des principes variationnels tels: le principe de stationnarité de l'énergie de déformation ou du minimum de l'énergie de déformation.

III -4.1 - PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL :

Pour qu'un corps déformable soit en équilibre, il faut et il suffit que le travail des forces extérieures soit égal au travail de déformation pour tout le champs de déplacement virtuel cinématiquement admissible (vérifiant les conditions aux limites).

$$\delta w = \delta u \quad (3-4)$$

III -4.2 PRINCIPE DE STATIONNARITE DE L'ENERGIE DE DEFORMATION:

On a :

$\Pi = u - w$: Energie potentielle

Théorème : De tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, celui satisfaisant aux conditions aux limites correspond à une énergie potentielle totale Π stationnaire. Si le système est stable, l'énergie potentielle totale est minimum dans la configuration réelle du système (par définition).

$$\delta \Pi = \delta (u - w) \quad (3-5)$$

III -4.3 PRINCIPE DU MINIMUM DE L'ENERGIE DE DEFORMATION:

Si on choisit, dans un corps élastique, des déplacements virtuels nuls aux points d'application des forces extérieures, alors: $\delta w = 0$. Donc se basant sur le principe précédant:

$$\delta \Pi = \delta (u - w) = 0 \Rightarrow \delta u = 0 \quad (3-6)$$

III -5 FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS BASEE SUR LES DEPLACEMENTS:

III -5.1 FORMULATION EN COORDONNEES GENERALISEES:

Dans la méthode des éléments finis, on suppose que le milieu est discrétisé en un ensemble d'éléments ayant chacun leur propre système de coordonnées

(système de coordonnées locales). Le déplacement $U^{(m)}$ au niveau de l'élément m s'écrit comme une fonction des déplacements nodaux. Par conséquent:

$$U^{(m)} = H^{(m)} U \quad (3-7)$$

où :

$$U^{(m)} = \begin{bmatrix} u^{(m)} \\ v^{(m)} \\ w^{(m)} \end{bmatrix}$$

et $U^T = [u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n]$ est le vecteur de dimensions $3n$ (n : nombre de noeuds) regroupant les déplacements nodaux.

$H^{(m)}$: matrice d'interpolation des déplacements.

REMARQUE:

Bien que U^T renferme tous les déplacements nodaux, il faut savoir que seuls ceux de l'élément affectent les déplacements et les déformations au sein de celui-ci.

Revenons à l'équation (3-7) qui est :

$$u^{(m)} = H^{(m)} \hat{u}$$

Parmi toutes les classes de fonctions possibles que l'on peut utiliser pour décrire les déplacements à l'intérieur d'un élément la classe des fonctions polynomiales est celle qui s'adapte le mieux car les concepts d'interpolation polynomiale sont communément utilisées pour approcher des fonctions inconnues. En plus, les polynômes sont facilement dérivables et de ce fait les déformations peuvent facilement s'obtenir.

Considérant le cas d'un élément tridimensionnel pour lequel les déplacements u , v et w sont des fonctions de coordonnées x , y et z on a en général :

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy \dots \quad (3-8a)$$

$$v(x, y, z) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 xy \dots \quad (3-8b)$$

$$w(x, y, z) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 z + \gamma_5 xy \dots \quad (3-8c)$$

ou $\alpha_1, \dots, \beta_1, \dots, \gamma_1, \dots$ sont appelées coordonnées généralisées.

Les relations des équations (3-8) s'écrivent sous forme matricielle comme suit:

$$u = \Phi \alpha \quad (3-9)$$

ou:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Φ : regroupe les termes de la base polynomiale.

α : vecteur des coordonnées généralisée.

Pour exprimer les coordonnées généralisées en termes de déplacements nodaux, on écrit la relation (3-9) pour les noeuds de l'élément, en substituant les coordonnées de ceux-ci d'une façon appropriée, on obtient:

$$\hat{u} = A \alpha \quad (3-10)$$

En supposant que l'on puisse inverser la matrice A, on arrive à l'équation suivante:

$$\alpha = A^{-1} \hat{u} \quad (3-11)$$

En substituant l'équation (3-11) dans l'équation (3-9), on aboutit à:

$$u = \Phi A^{-1} \hat{u} = H \hat{u} \quad (3-12)$$

et donc:

$$H = \Phi A^{-1} \quad (3-13)$$

Comme le vecteur déformation s'obtient à partir de différentiations des déplacements et que la matrice A ne contient que des constantes, on a :

$$\varepsilon = B \hat{u} \quad (3-14)$$

Avec :

$$B = EA^{-1} \quad (3-15)$$

E étant la matrice liant les déformations aux coordonnées généralisées:

$$\varepsilon = E \alpha \quad (3-16)$$

CHAPITRE IV

IV - MODELISATION PAR LES ELEMENTS FINIS :

IV -1 ELEMENT CONSTITUTIFS DES MODELES DE DALLES :

Un modèle de structure est composé par un assemblage d'élément, reliant les différents noeuds, afin de représenter le mieux possible le comportement supposé de la structure.

Les dalles d'épaisseur constantes ou variant peu (plancher dalle, ponts dalle, etc...) sont modélisées à l'aide d'éléments finis.

IV -1.1 CHOIX DU TYPE DES ELEMENTS:

Si la dalle est plane et soumise uniquement à des forces perpendiculaires, seuls des moments de flexions seront développés, les efforts de membrane étant nuls: on pourra utiliser des éléments de plaques.

Dans le cas contraire on utilisera des éléments de coques.

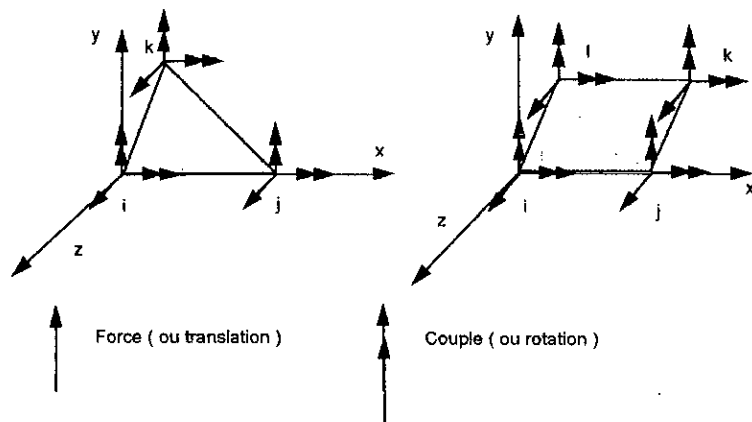
Le type d'éléments avec lesquels notre tablier de pont sera modélisé sont les éléments de plaques épaisses avec un comportement flexionnel seulement. On utilisera l'élément plaque rectangulaire car il s'adapte mieux à notre étude.

IV -2 ELEMENTS FINIS DE PLAQUE:

Les éléments finis de plaque les plus couramment utilisés comportent trois ou quatre noeuds. (fig 4.1).

Ces éléments n'équilibrent que des moments d'axe tangents à leur surface et des forces perpendiculaires au plan tangent. Ils ne transmettent donc pas d'effort de membranes.

Trois degrés de liberté sont pris en compte en chaque noeud, deux rotations dans le plan tangent, une translation perpendiculaire au plan auquel sont associés deux moments fléchissant et une force.



IV -2.1 DETERMINATION DU MAILLAGE

La dalle est en général découpée en bandes parallèles, établies dans deux directions perpendiculaires ou obliques, le modèle est ainsi composé d'éléments à quatre noeuds.

Les éléments à trois noeuds servent principalement à réaliser des changements de trames entre deux zones maillées en éléments à quatre noeuds.

Dans le cas des dalles soumises à des charges concentrées, le maillage doit être établi en fonction des surfaces d'impact de ces charges qui seront supposées réparties uniformément sur certains éléments. Si le maillage est trop grossier, seul un chargement aux noeuds sera possible.

IV -2.2 CONDITIONS D'APPUI :

Dans le cas courant les appuis (poteaux ou voiles) sont représentées par des blocages de certains degrés de libertés ou par des ressorts.

Un poteaux de faible dimension transversale sera modélisé par un blocage du déplacement vertical en un noeud, un voile mince par un blocage sur une file de noeuds.

IV -3 CHARGEMENT DES MODELES:

Les chargements les plus couramment employés sont constitués par :

- Des forces ou des moments fléchissants appliqués aux noeuds ou aux éléments du modèle.

- Des variations linéaires ou des gradient de température imposés aux éléments.

IV -4 FORCES ET MOMENTS APPLIQUES AUX NOEUDS

Dans le cas général d'un modèle à trois dimensions on peut imposer en chaque noeud trois forces et trois moments d'axe parallèles à ceux du repère global.

Il convient dans chaque cas de vérifier a priori si le chargement est compatible avec le type de modèle utilisé.

Par exemple un noeud commun à deux éléments de plaque, le chargement est compatible avec le type de modèle utilisé.

Par exemple un noeud commun à deux éléments de plaque, le chargement aux noeud peut être un moment fléchissant, et une force quelconque sauf dans le cas d'élément ayant même plan tangent, la force devant être alors perpendiculaire à ce plan.

IV -5 CHARGEMENT DES ELEMENTS FINIS:

IV -5.1 FORCES OU MOMENTS EXTERIEURS :

Les charges appliquées aux éléments finis sont en général réparties; dans le cas d'une force concentrée importante, il est nécessaire de prévoir un noeud du maillage au point d'application de la charge.

Ces chargements sont en fait ramenés à des forces concentrées aux noeuds.

Deux méthodes de répartition des charges sur les noeuds sont possibles:

a - On prend en compte la déformation de l'élément pour évaluer les efforts d'encastrement comme dans le cas des poutres. Pour cela on utilise les mêmes fonctions d'interpolation que pour le calcul de la matrice de rigidité, ce qui constitue une méthode cohérente mais approchée. (CF chapitre III)

b - On remplace directement la charge répartie par des charges concentrées aux noeuds respectant le centre de gravité du chargement.

IV -5.2 LIAISONS INTERNES ET EXTERNES :

Les modèles doivent être liés au milieu extérieur pour assurer leur stabilité et représenter correctement les conditions d'appui.

En plus de ces liaisons externes, on peut être amené à définir des liaisons internes lorsque des éléments jointifs n'activent pas les mêmes degrés de liberté ou lorsqu'on veut imposer une relation linéaire entre les déplacements de différents noeuds.

IV -6 REPRESENTATION DES RESULTATS :

Les résultats du calcul des efforts pour un cas de charge donné sont édités sous la forme suivante:

- Déplacement des noeuds de la structure.
- Réactions sur les noeuds liés au milieu extérieur .
- Efforts dans les éléments.

IV -6.1 ELEMENTS PLAQUES :

Les résultats édités sont:

- La valeur des moments fléchissant par mètre linéaire m_{11} , m_{22} , m_{12} agissant sur deux sections perpendiculaires situés aux noeuds de l'élément et orientées parallèlement aux axes locaux (Fig 4.3).
- La valeur des moments principaux et leur direction.
- Les contraintes de cisaillement de direction perpendiculaire à l'élément.

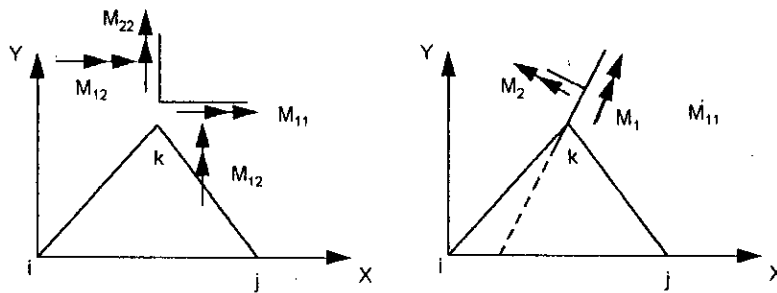


Figure (4 - 2) Elément de plaque

IV -7 CONTROLE DES CALCULS SUR ORDINATEUR

Lors de l'utilisation d'un programme de calcul sur ordinateur, il va de soi qu'il est nécessaire de vérifier soigneusement les données, mais malheureusement cette vérification ne suffit pas à garantir contre tout risque d'erreur.

En effet une erreur matérielle minimale, donc difficile à détecter, comme par exemple l'inversion de deux nombres ou l'oubli d'une virgule peut conduire à des résultats totalement aberrants.

Il est donc absolument nécessaire de compléter la vérification des données par un contrôle des résultats avant toute exploitation; pour des structures complexes, ce travail peut être fastidieux mais est amplement justifié par la forte proportion d'erreur que l'on détecte ainsi.

IV -7.1 CONTROLE DES DONNEES

La recherche des erreurs est facilitée dans certains programmes de calcul par une vérification automatique; les données sont alors réécrites en clair avec des commentaires.

On devra plus spécialement contrôler les points suivants:

IV -7.1.1- GEOMETRIE:

Le contrôle le plus efficace s'effectue à l'aide de dessins tracés par le programme, comportant le repérage des noeuds et des éléments.

Dans le cas d'un modèle spatial complexe on aura recours à la perspective.

Une erreur sur la position d'un noeud ou l'absence d'un élément sera alors aisément décelable.

IV -7.2 CONTROLE DES RESULTATS :

Les vérifications à effectuer sur les résultats concernent essentiellement les liaisons avec le milieu extérieur.

On devra faire éditer, au moins pour un cas de charge, la liste des déplacements de tous les noeuds et les réactions des noeuds d'appui.

On pourra ainsi vérifier :

- Si les noeuds d'appui seront bien disposés
- Si les conditions de symétrie sont respectées
- Si les réactions d'appuis sont bien dans la direction voulue

IV -8 CONSEILS GENERAUX POUR LA MODELISATION :

Les calculs sur ordinateur apportent une aide considérable sur le plan matériel, mais ne disposent en aucun cas d'une analyse de la structure étudiée.

Il convient en effet de définir a priori quels sont les résultats recherchés, et de quelle façon ils seront exploités; on pourra alors seulement définir un modèle en ne perdant pas de vue quelques règles de bon sens:

1 - Essayer de se ramener à un problème plan.

Les calculs en trois dimensions sont beaucoup plus longs à préparer et à exploiter que les calculs plans; il faut donc se ramener le plus possible à des problèmes plans quitte à faire des approximations.

2 - Bien modéliser les liaisons avec le milieu extérieur

Les liaisons avec le milieu extérieur doivent être déterminées avec soin car bien souvent les approximations ou les erreurs se situent à ce niveau.

3 - Ne pas compliquer inutilement un modèle. Un modèle inutilement compliqué ne peut qu'apporter des difficultés lors de l'exploitation.

4 - Penser à l'utilisation des calculs.

Pour que les calculs soient directement exploitables, le modèle doit être pensé en fonction de la présentation des résultats du logiciel utilisé.

5 - Ne pas considérer les résultats comme irréfutables.

Si les logiciels sont infaillible dans la majorité des cas, il n'en est pas de même pour l'utilisateur, et une erreur de données, un défaut du modèle, ou une mauvaise utilisation du logiciel sont toujours possibles.

Il est donc essentiel de toujours remettre en cause les résultats et de les vérifier soigneusement avant et même pendant leur exploitation.

IV -9 MODELISATION ET CALCUL DE LA STRUCTURE SUR LE LOGICIEL:

Vu la complexité géométrique et mécanique de notre structure, nous avons eu recours à un logiciel de calcul de structures aux éléments finis.

Celui ci permet en effet d'effectuer des calculs complexes difficilement réalisables par des méthodes manuelles ou bien procure un gain de temps important en évitant des opérations longues et fastidieuses.

Le logiciel utilisé est le SAP 90 (Structure Analysis Programme) dont le principe et les étapes de calcul sont conformes à ceux décrits auparavant dans ce même chapitre.

Afin de représenter au mieux le comportement de la structure (tablier du pont) lors de la discrétisation (modélisation), nous avons essayé d'exploiter le logiciel au maximum de sa capacité. Celle ci étant de 8000 degrés de liberté pour une analyse sous charges statiques.

Après une génération cylindrique plane des coordonnées des noeuds et l'utilisation d'élément plaque à quatre noeuds et à trois degrés de liberté par noeud (2 rotations par rapport aux axes X et Y, et une translation suivant l'axe Z), nous avons pu aboutir à un modèle comportant 2016 éléments soit 2277 noeuds et 6831 degrés de liberté. Le logiciel a donc été exploité à 85 % de sa capacité totale.

Nous signalons toutefois que le rapport des cotés des éléments utilisés est très proche de 1 ce qui représente une bonne modélisation.

Les résultats importants des calculs sont regroupés directement dans les tableaux de comparaison que nous allons présenter d'une manière détaillée dans la partie suivante:

PARTIE III

CHAPITRE I

I- COMPARAISON DES RESULTATS :

Pour des raisons de commodités, nous avons préférés utiliser les tableaux et les graphes afin de mieux visualiser la différence entre les résultats obtenus par les deux méthodes.

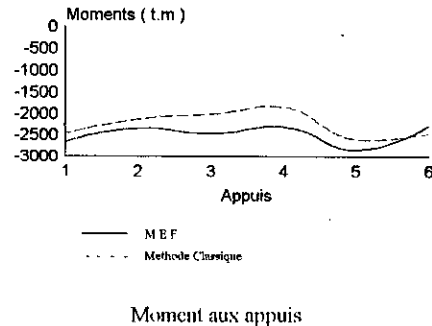
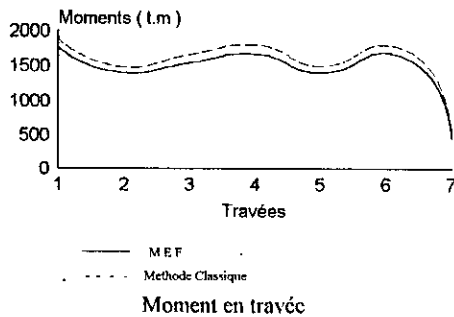
Nous exposerons dans ce chapitre les principaux résultats qui traduisent cette différence ainsi que les erreurs relatives correspondante commise par excès ou par défaut (de signe positif ou négatif), et enfin l'erreur moyenne totale qui représente directement notre grandeur de la différence entre la méthode de Guyon-Massonnet et la méthode des éléments finis (M E F) d'une manière globale.

Ce présent chapitre sera complété également par des commentaires qui à partir des quels on essayera de mettre en évidence les principaux facteurs pouvant affecter les résultats des deux méthodes

I-1 MOMENT DE FLEXION LONGITUDINAUX

I-1.1 CHARGE PERMANENTE CP :

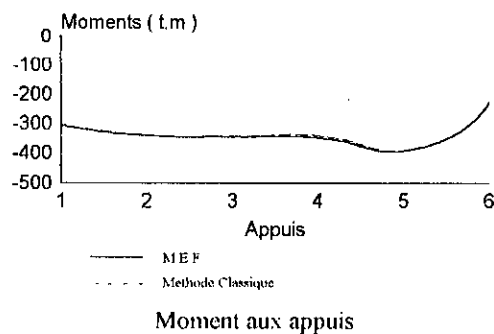
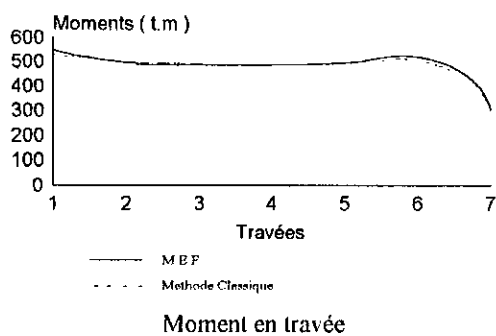
Moments en travée (t.m)				Moment sur appui (t.m)			
N° des travées	Méthode classique	Méthodes des E.F	Erreur relative	N° des appuis	Méthode classique	Méthode des E.F	Erreur relative
1	1 892,25	1 769,25	-6.8 %	1	-2 451,93	-2 651,1	7.5 %
2	1 487,64	1 396,89	-6.1 %	2	-2 109,37	-2 332,03	9.54 %
3	1 661,81	1 543,82	-7.1 %	3	-1 985,65	-2 453,7	19.07 %
4	1 805,21	1 669,8	-7.5 %	4	-1 828,22	-2 299,4	20.05 %
5	1 501,95	1 402,13	-6.88 %	5	-2 581,65	-2 828,56	8.73 %
6	1 808,9	1 688,08	-6.68 %	6	-2 443,96	-2 266,6	-7.25 %
7	473,89	446,84	-6.3 %				
ERREUR MOYENNE 6,76 %				ERREUR MOYENNE 12.02 %			



La charge permanente dans la méthode classique est prise comme une charge uniformément répartie par mètre linéaire, par contre le logiciel utilisé comprend un programme automatique de calcul de la charge permanente (prise comme charge volumique). Comme nous pouvons le constater, les moments en travées de la M.E.F sont moins importants que ceux de la méthode classique par contre, les moments aux appuis obtenus par la M.E.F sont relativement grands par rapport à ceux calculés par la première méthode, cela veut dire que la courbe enveloppe des moments de la M.E.F est supérieure à celle de la méthode classique

I-1.3 SURCHARGE A (L) :

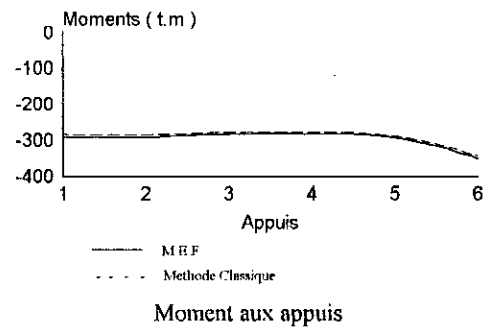
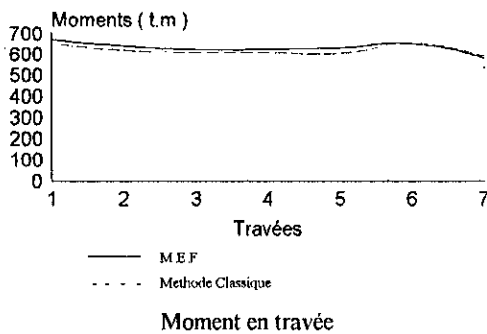
Moment en travée (t.m)				Moment sur appui (t.m)			
N° des travées	Méthode classique	Méthodes des E.F	Erreur relative	N° des appuis	Méthode classique	Méthode des E.F	Erreur relative
1	530,98	548,73	3.23 %	1	-303,79	-307,91	1.13 %
2	499,79	494,98	-0.96 %	2	-339,13	-345,71	1.9 %
3	489,2	485,98	-0.67 %	3	-343,99	-349,5	1.5 %
4	488,18	485,92	-0.36 %	4	-342,5	-349,61	2.03 %
5	489,53	486,38	1.24 %	5	-389,6	-393,2	0.91 %
6	506,34	495,7	-0.79 %	6	-224,7	-231,14	2.78 %
7	297,73	502,31	2.63 %				
ERREUR MOYENNE 1.41 %				ERREUR MOYENNE 1.70 %			



Pour la surcharge A (l) (densité surfacique pour la M.E.F) nous avons obtenu un très bon résultat pour les moments en travées et aux appuis. L'erreur moyenne étant très faible, nous pouvons dire que l'approximation faite par la méthode classique sur la surcharge A (l) (densité par mètre linéaire) est justifier.

I -1.4 SURCHARGE M_{C120}

Moment en travée (t.m)				Moment sur appui (t.m)			
N° des travées	Méthode classique	Méthodes des E.F	Erreur relative	N° des appuis	Méthode classique	Méthode des E.F	Erreur relative
1	653,83	669,49	2.33 %	1	-283,54	-291,25	2.64 %
2	620,68	641,39	3.23 %	2	-283,88	-291,32	2.55 %
3	611,63	623,63	1.9 %	3	-278,64	-283,1	1.57 %
4	610,56	625,11	2.32 %	4	-278,7	-282,92	1.49 %
5	606,8	631,98	3.98 %	5	-288,5	-293,51	1.7 %
6	653,2	652,27	-0.14 %	6	-344,6	-351,8	2.04 %
7	593,54	581,96	-1.95 %				
ERREUR MOYENNE 2.26 %				ERREUR MOYENNE 1.99 %			

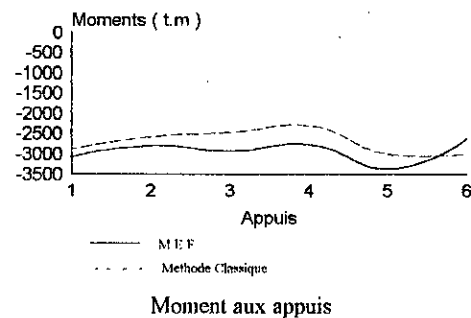
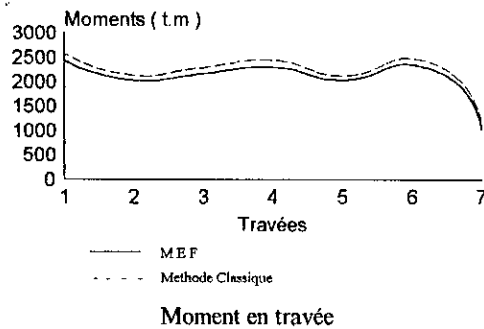


De même que pour la surcharge A (1), le système de charge M_{C120} présente un excellent résultat . Ceci est du au faite d'une part à la prise en compte de cette surcharge comme une force concentrée dans la M.E.F et d'autre part l'utilisation des formules de rotation d'appuis pour une charge concentrée dans la méthode classique.

I-1.5 COMBINAISON DE CHARGES POUR LE MOMENT EN TRAVÉE:

combinaison de charges	Méthode classique			Méthode des éléments finis			erreur relative
	(1)	(2)	Max. {(1), (2)}	(1)	(2)	Max. {(1), (2)}	
moment en travée (t, m)	CP + 1,2 (AI+ST)	CP+Mc120		CP + 1,2 (AI+ST)	CP+Mc120		
MT1	2 588,64	2 546,08	2 588,64	2 483,17	2 438,17	2 483	-5.8 %
MT2	2 138,64	2 108,32	2 138,64	2 038,59	2 038,28	2 038,59	-4.67 %
MT3	2 296,7	2 274,44	2 296,7	2 169,67	2 167,45	2 169,67	-5.53 %
MT4	2 440,24	2 415,77	2 440,24	2 300,46	2 294,91	2 300,46	-5.72 %
MT5	2 132,55	2 108,75	2 132,55	2 044,03	2 034,11	2 044,03	-4.15 %
MT6	2 471,31	2 468,1	2 471,31	2 347,92	2 340,35	2 347,92	-4.99 %
MT7	845,02	1 067,43	1 067,43	826,71	1 028,8	1 028,8	-3.61 %

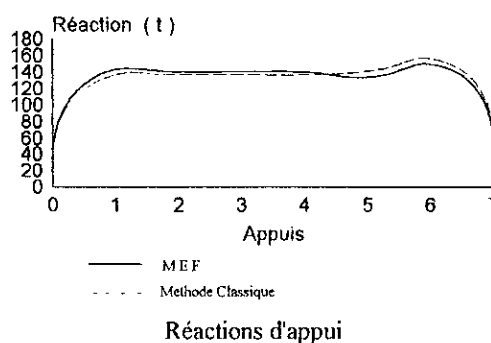
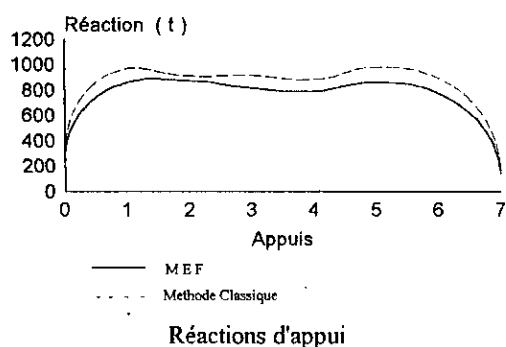
ERREUR MOYENNE 4.92 %



L'effet le plus défavorable pour les moments en travées est donnée par la combinaison CP + 1,2 (AI +ST) pour les deux méthode. Nous remarquons également que l'erreur relative est très faible et stabilisée a environ 5 %. La courbe enveloppe des moments pour la M.E.F sera décalée de 5% au dessus de celle de la méthode classique.

I-1.6 COMBINAISON DE CHARGES POUR LE MOMENT SUR APPUIS:

combinaison de charges	Méthode classique			Méthode des éléments finis			erreur relative
	(1)	(2)	Max. {(1), (2)}	(1)	(2)	Max. {(1), (2)}	
moment en travée (t, m)	CP + 1,2 (AI+ST)	CP+Mc120		CP + 1,2(AI+ST)	CP+Mc120		
MT1	-2 870,94	-2 735,47	-2 870,94	-3 065,79	-2 942,35	-3 065,79	6.35 %
MT2	-2 571,69	-2 395,25	-2 571,69	-2 793,22	-2 623,35	-2 793,22	7.93 %
MT3	-2 456,04	-2 264,3	-2 456,04	-2 921,29	-2 736,8	-2 921,29	15.92 %
MT4	-2 291,9	-2 106,92	-2 291,9	-2 763,08	-2 582,32	-2 763,08	17.05 %
MT5	-2 985,81	-2 870,15	-2 985,81	-3 358,36	-3 122,07	-3 358,36	11.09 %
MT6	-2 985,7	-2 788,55	-2 985,7	-2 618,4	-2 618,4	-2 618,76	-12.29 %
Erreur moyenne : 11,77%							



Comme pour les moments en travées, l'effet max. est donné également par la combinaison charge CP + 1,2 (AI + ST) pour les deux méthodes. cependant, la courbe enveloppe des moments de la M.E.F est décalée de 12 % environ au dessus de celle de la méthode classique. Les moments sont donc plus importants aux appuis qu'en travée.

I-2 REPARTITION TRANSVERSALE DU MOMENT DE FLEXION LONGITUDINALE:

Le coefficient de répartition transversale du moment de flexion longitudinale $K\alpha$ peut être déduit à partir de l'exemple suivant:

$K\alpha$ étant le rapport entre la valeur des moments correspondant à deux noeuds contigus .

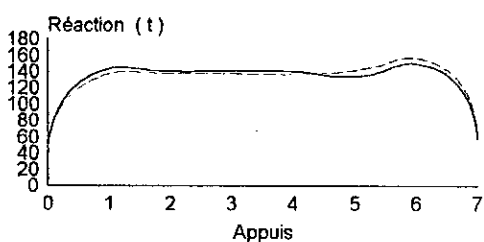
Moment de flexion en travée sous la charge permanente (voir annexe : moment en travée (6) sous CP)

n° des noeuds	1864	1 865	1 866	1 867	1 868	1 869	1 870	1 871	1 872
moment M_{yi} (t.m/ml)	226,4	224,04	222,07	220,46	219,19	218,26	217,67	217,39	217,9
$K\alpha = M_{yi} / M_{yi+1}$		1,0105	1,0088	1,0073	1,0058	1,0042	1,0027	1,0013	0,9976

Nous constatons effectivement par la M.E.F qu'il y a transmission total du moment de flexion longitudinale dans le sens transversale. Ceci s'explique par la grande rigidité flexionnelle de la dalle justifiée par un paramètre d'entretoisement très faible $\theta = 0,116$ calculé par la méthode de GUYON-MASSONNET.

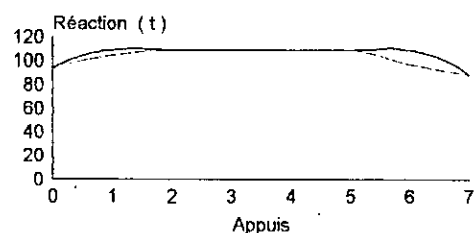
I-3 REACTIONS D'APPUI :

Charge permanente CP				Surcharge de trottoirs ST			
N° des appuis	Méthode classique	Méthodes des E.F	Erreur relative	N° des appuis	Méthode classique	Méthode des E.F	Erreur relative
0	324,95	277,47	-14.36 %	0	46,47	41,23	-11.27 %
1	970,78	862,81	-11.12 %	1	137,09	143,2	4.26 %
2	916,66	801,39	-12.57 %	2	137,66	140,2	1.8 %
3	920,61	820,15	-10.91 %	3	137,56	140,72	2.24 %
4	891,21	795,43	-10.74 %	4	137,32	140,25	2.09 %
5	984,12	868,8	-11.71 %	5	141,72	134,01	-4.73 %
6	899,91	780,2	-13.3 %	6	157,08	150,33	-4.29 %
7	160,35	146,13	-8.86 %	7	62,98	58,15	-7.67 %
ERREUR MOYENNE 13.36 %				ERREUR MOYENNE 5.42 %			



— MEF
- - - Méthode Classique

Réactions d'appui

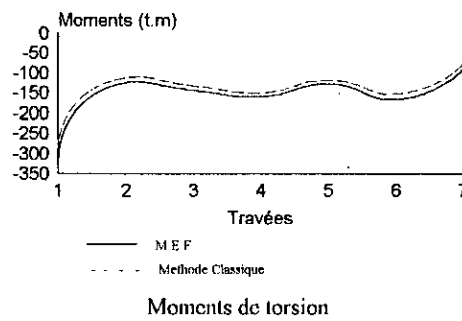
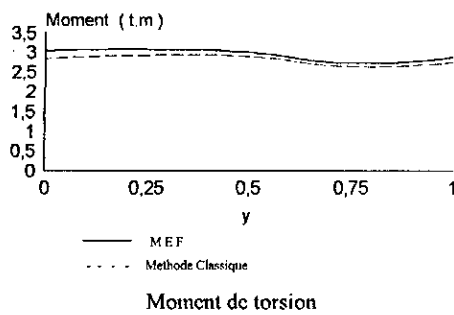


— MEF
- - - Méthode Classique

Réactions d'appui

Les réactions d'appui obtenu par la M.E.F sont relativement faible pour la poids propre, comme nous l'avons précisé dans l'interprétation des résultats du moment en travées.

N° des appuis	Surcharge A (l)			N° des appuis	Surcharge Mc120		
	Méthode classique	Méthodes des E.F	Erreur relative		Méthode classique	Méthode des E.F	Erreur relative
0	46,47	41,23	-11.27 %	0	95,2	93,86	-1.4 %
1	137,09	143,2	4.26 %	1	104,55	109,3	4.4 %
2	137,66	140,2	2.41 %	2	109,25	109,32	0.004 %
3	137,56	140,72	2.24 %	3	109,26	109,3	0.05 %
4	137,32	140,25	2.09 %	4	109,19	109,37	0.054 %
5	141,72	134,01	-5.44 %	5	109,24	99,18	0.01 %
6	157,08	150,33	-4.29 %	6	97,38	99,18	1.81 %
7	62,98	58,15	-7.67 %	7	89,38	88,08	-1.97 %
ERREUR MOYENNE 4.95 %				ERREUR MOYENNE 1.22 %			

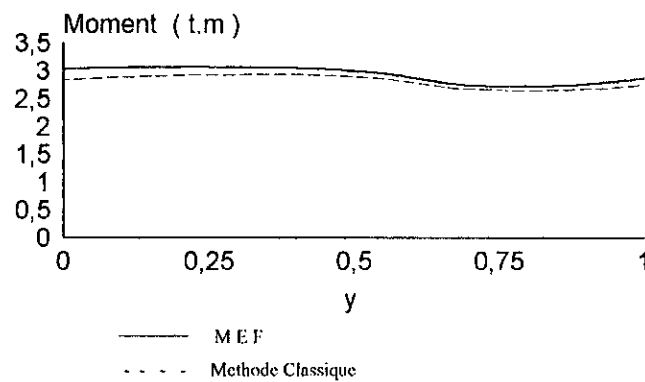


Les deux méthodes présentent des résultats relativement proches (erreur moyenne inférieure à 5%). La répartition de la surcharge A (l) par mètre linéaire pour la méthode classique a été encore une fois justifiée.

I-4 MOMENT DE TORSION DU A L'EXCENTREMENT DES CHARGES :

Surcharge Bc :

y	Méthode classique	M.E.F	Erreur relative
0	2,84	3,04	6,57 %
b/4	2,93	3,07	4,56 %
b/2	2,9	3,00	3,33 %
3b/4	2,65	2,73	2,93 %
b	2,75	2,85	3,5 %
Erreur moyenne	4,34 %		

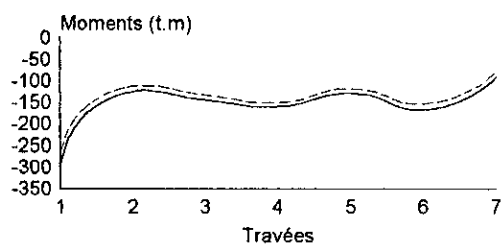


Moment de torsion

Comme nous pouvons le voir un bon résultat à été obtenu pour le moment de torsion dû à l'excentrement des charges, car le chargement s'effectue de la même manière pour les deux méthodes (charges concentrées).

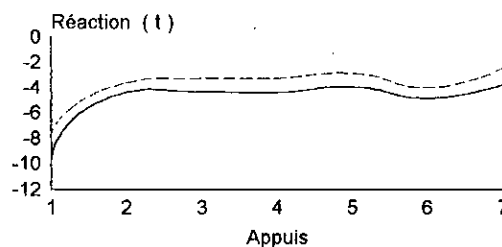
I-5 MOMENT DE TORSION DU A LA COURBURE :

Charge permanente CP					Surcharge de trottoirs ST				
N° des travées	(α)	Méthode classique	M.E.F	Erreur relative	N° des travées	(α)	Méthode classique	M.E.F	Erreur relative
1	$\alpha 0$	- 281,77	- 312,47	9,8 %	1	$\alpha 0$	- 7,55	- 9,85	23,35 %
2	$\alpha 1$	- 112,03	- 121,53	7,8 %	2	$\alpha 1$	- 3,58	- 4,33	17,32 %
3	$\alpha 1$	- 132,45	- 143,91	7,9 %	3	$\alpha 1$	- 3,24	- 4,31	24,8 %
4	$\alpha 1$	- 146,49	- 158,91	7,8 %	4	$\alpha 1$	- 3,21	- 4,29	25,17 %
5	$\alpha 1$	- 132,95	- 143,59	7,4 %	5	$\alpha 1$	- 2,81	- 3,92	28,31 %
6	$\alpha 1$	- 117,04	- 126,98	8,5 %	6	$\alpha 1$	- 3,93	- 4,81	8,8 %
7	αi	- 77,25	- 91,41	15,49 %	7	αi	- 2,42	- 3,74	35,29 %
Erreur moyenne : 8,39 %					Erreur moyenne : 23,29 %				



— MEF
- - - Methode Classique

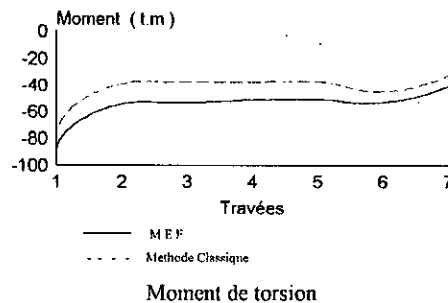
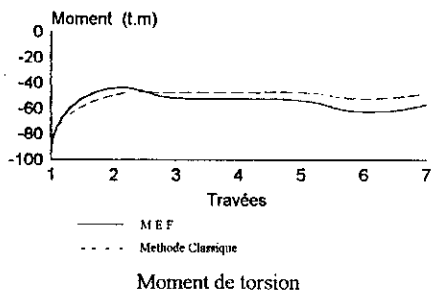
Moments de torsion



— MEF
- - - Methode Classique

Moment de torsion

Surcharge A (I)					Surcharge M_{C120}				
N° des travées	(α)	Méthode classique	M.E.F	Erreur relative	N° des travées	(α)	Méthode classique	M.E.F	Erreur relative
1	$\alpha 0$	- 83,99	- 93,71	10,37 %	1	$\alpha 0$	- 75,9	- 87,1	12,85 %
2	$\alpha 1$	- 49,2	- 53,73	8,43 %	2	$\alpha 1$	- 39,09	- 45,31	13,7 %
3	$\alpha 1$	- 47,39	- 51,3	7,62 %	3	$\alpha 1$	- 37,87	- 42,98	11,89 %
4	$\alpha 1$	- 47,22	- 52,11	9,38 %	4	$\alpha 1$	- 37,73	- 41,12	8,24 %
5	$\alpha 1$	- 46,95	- 53,23	11,79 %	5	$\alpha 1$	- 37,34	- 40,78	8,43 %
6	$\alpha 1$	- 51,58	- 62,24	17,12 %	6	$\alpha 1$	- 44,6	- 52,63	15,25 %
7	αi	- 47,65	- 56,54	8,89 %	7	αi	- 31,99	- 40,69	21,38 %
Erreur moyenne : 10,5 %					Erreur moyenne : 13,1 %				



On remarque que dans les quatre cas de chargement, le moment de torsion obtenu par la M.E.F est beaucoup plus importante que celui calculé par la méthode classique.

En effet, ceci est dû à la prise en compte du biais des appuis dans la M.E.F, celui ci provoque un moment de torsion supplémentaire dont la méthode classique n'en tient pas compte.

I-6 MOMENT TRANSVERSAL :

Moment transversal				
Charges	Section	Méthode classique	M.E.F	Erreur relative
CP	b/4	1,83	2,46	25,6 %
ST	b/4	0,64	0,82	21,95 %
A (I)	0	1,9	2,3	17,39 %
M_{C120}	3b/4	4,89	5,31	7,9 %
Bc	b/4	2,45	2,66	7,89 %
Erreur moyenne 16,41 %				

Pour le calcul des moments transversaux, la méthode classique néglige l'effet de concentration de contraintes dû à la courbure, ceci traduit les faibles valeurs du moment transversal calculé par cette méthode

I-7 TASSEMENT D'APPUI :

Tassement de l'appuis N° 1 (1 cm)

Moment à l'appui (t.m)	Méthode classique	M.E.F	Erreur relative
M_1	89,92	101,11	11,19 %

La prise en compte de la courbure du tablier dans la M.E.F nous a permis d'obtenir un moment d'appui plus grand.

CONCLUSION :

Le travail que nous avons effectué nous a permis de faire la synthèse suivante :

- Les résultats obtenus par les deux méthodes, son en fait très proches. Les erreurs moyennes calculées peuvent traduire directement cette différence pour chaque cas de chargement et de sollicitation.
- La méthode de Guyon-Massonnet malgré le nombre important d'hypothèses émises pour sa formulation, s'avère très appréciable vu les résultats qu'elle présente devant la méthode des éléments finis.
- L'élément plaque utilisé est d'une grande fiabilité pour la modélisation des ponts-dalle. En effet, le comportement du tablier à très bien été représenté par cet élément.
- L'erreur commise entre les résultats des deux méthodes, qui est d'ailleurs relativement faible, ne dépend pas seulement des hypothèses et des approximations sur les modèles mécaniques, mais aussi sur les approches différentes de celles-ci (la méthode classique basée essentiellement sur la méthode des forces et la méthode des éléments finis sur la méthode des déplacements).

Les projets d'études dans l'avenir devrons plutôt opter pour le développement des modélisations et l'optimisation sur le maillage qui permettra l'utilisation de techniques de résolution plus évoluées.

Le calcul sur ordinateur n'est en effet qu'une aide matérielle et ne peut en aucun cas se substituer à la réflexion de l'ingénieur; une confiance trop aveugle dans les possibilités de l'ordinateur ne peut conduire qu'à des déboires.

D'autre part un modèle n'est jamais qu'une approximation de la réalité et il est toujours possible, sinon souhaitable d'adapter les résultats.

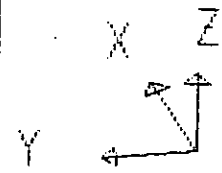
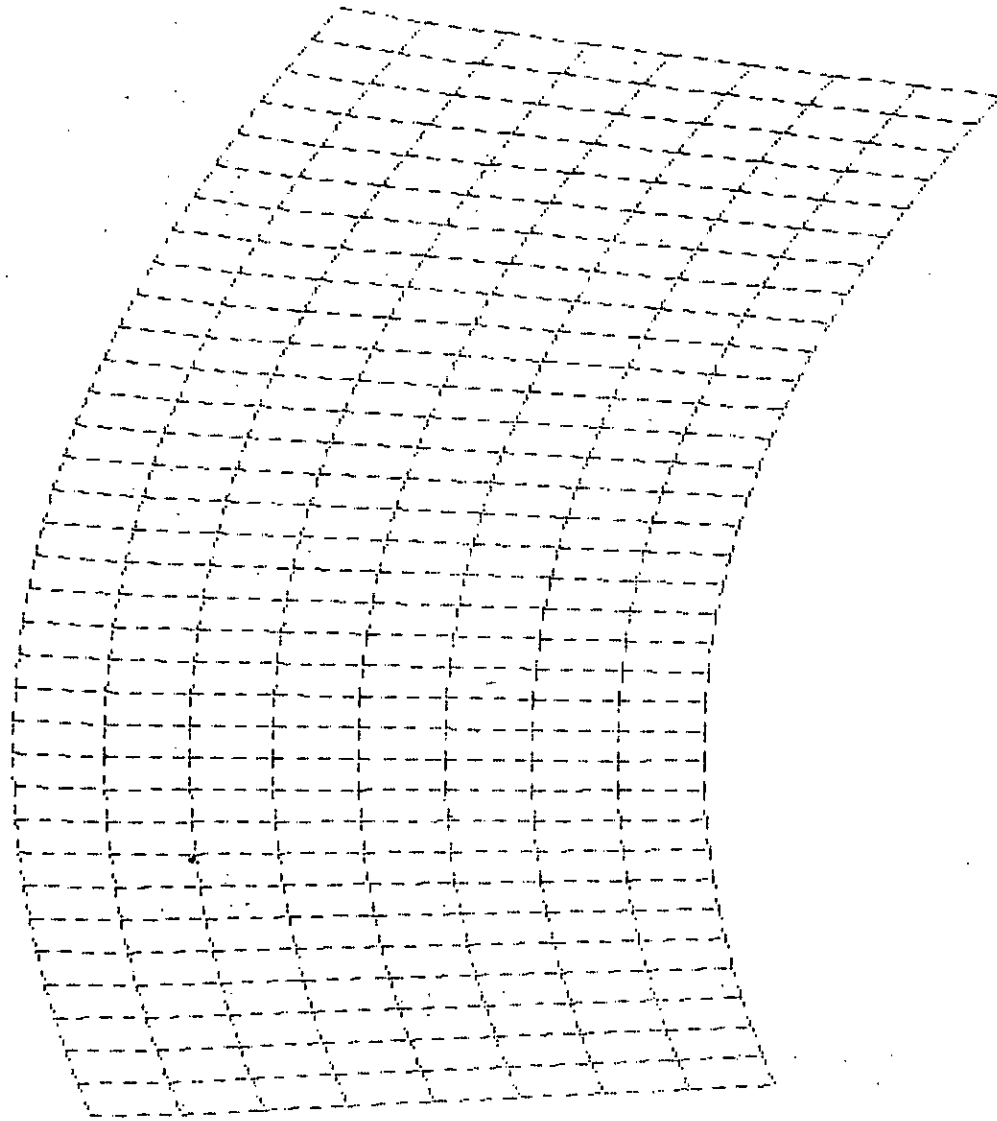
<< Ceux qui ont amassé tant de connaissances, qui nous ont conduits vers le savoir, ne sont-ils pas noyés eux-mêmes dans le doute ? >>

O. Rhayyam.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.A. Calgaro - M. Virlogeux "Projet et construction des ponts" Presse ponts et chaussées 1988.
- [2] J. Courbon "Cours de R.D.M " Tome 2. Dunod édition
- [3] L. Laroze "R.D.M et structures " Tome2.
- [4] R. Bares - C. Massonnet " Le calcul des grillages de poutres" . Dunod édition 1966.
- [5] J. F. Imbert "Analyse des structures par éléments finis" (SUP. AERO). CEPADUES - 2^{ème} édition - 1984.
- [6] DHAT et Touzot "Une présentation de la méthode des éléments finis" Maloine édition- 1981.
- [7] J.L Batoz et G. Dhatt, " Modélisation des structures par éléments finis" Volume 1 et 2 Hermes éditeur, Paris édition 1990.
- [8] A. Capra - M. Hautcoeur "Modélisation des structures pour calcul sur ordinateur" . Eyrolles 1983.
- [9] Projet de fin d'étude N. Boucheffa "Analyse dynamique des plaques minces et épaisses par la méthode des éléments finis" . E.N.P 1992.

Annexe

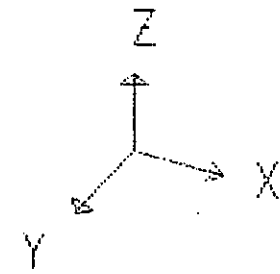
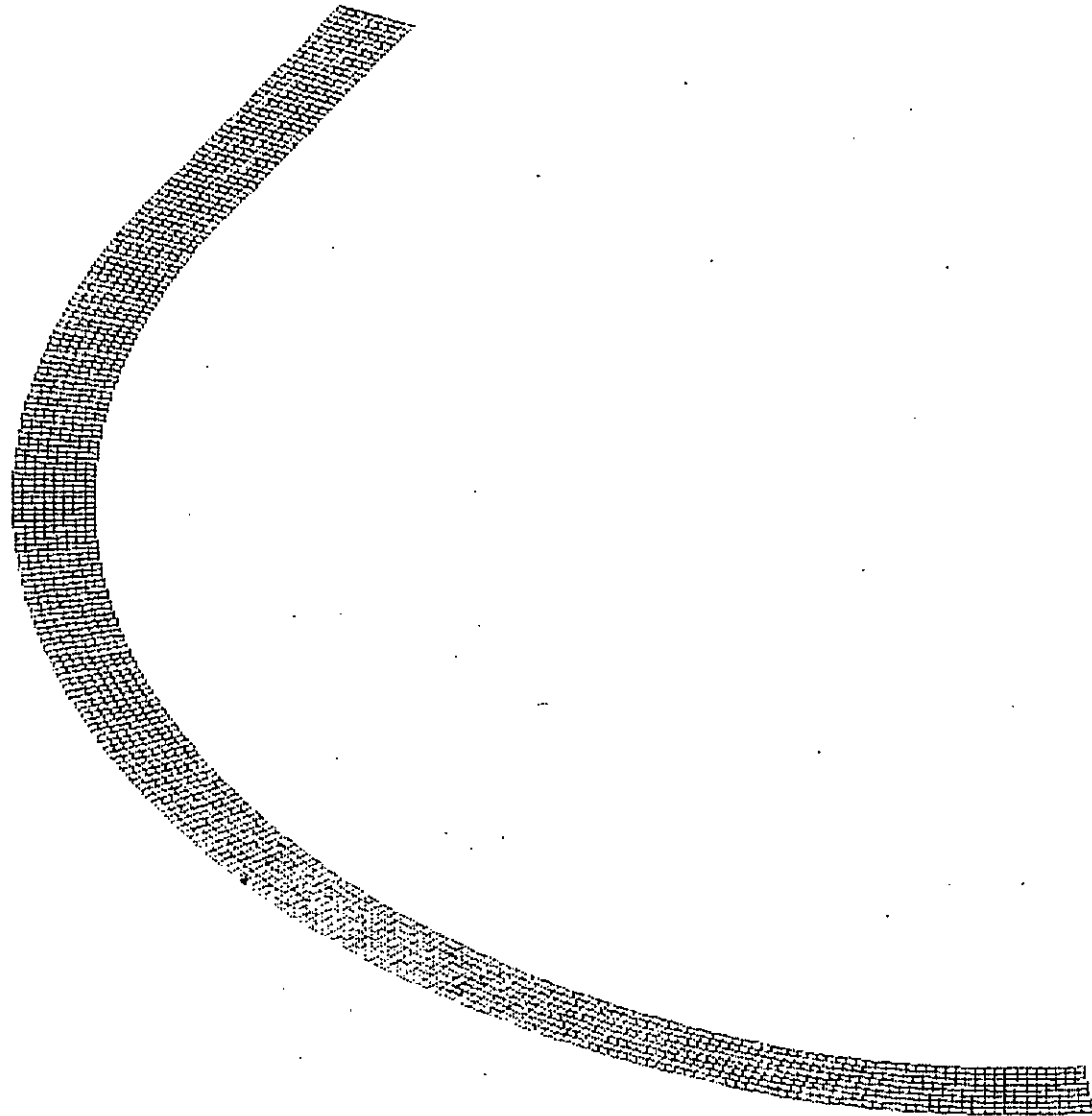


Sap
JOINT
LOADS
LOAD 1

MINIMA
M .00000E+00
MAXIMA
M .00000E+00

MODELISATION DE LA TRAVEE n°1

SAP90



Sap
JOINT
LOADS
LOAD 1

MINIMA
M .0000E+00
MAXIMA
M .0000E+00

MODELISATION DU TABLIER

SAP90

Remarque :

Les valeurs des moments édités sont de signes opposé seulement pour les surcharges. Ceci est dû à l'orientation opposée de l'axe z du repère local par rapport au repère globale de génération des coordonnées

SHELL ELEMENT FORCES

MEMBRANE FORCES ARE IN FORCE PER UNIT LENGTH
BENDING MOMENTS ARE IN MOMENTS PER UNIT LENGTH

ELEMENT ID 1649 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1855	1.0651E-01	2.2642E+02	8.4863E+00	2.2674E+02	-2.1126E-01	87.86	
1856	2.9015E+00	2.2404E+02	8.0988E+00	2.2433E+02	2.6053E+00	87.91	
1864	-5.6582E-02	2.2993E+02	7.2928E+00	2.3016E+02	-2.8761E-01	88.19	
1865	2.7376E+00	2.2747E+02	6.9295E+00	2.2768E+02	2.5242E+00	88.24	

ELEMENT ID 1650 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1856	2.9004E+00	2.2404E+02	7.6315E+00	2.2430E+02	2.6373E+00	88.03	
1857	3.8764E+00	2.2207E+02	7.2511E+00	2.2231E+02	4.6346E+00	88.09	
1865	2.7351E+00	2.2747E+02	6.6476E+00	2.2766E+02	2.5387E+00	88.31	
1866	3.6725E+00	2.2535E+02	6.2856E+00	2.2553E+02	4.4936E+00	88.37	

ELEMENT ID 1651 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1857	3.8736E+00	2.2207E+02	6.8021E+00	2.2228E+02	4.6607E+00	88.21	
1858	2.5854E+00	2.2046E+02	6.4499E+00	2.2065E+02	5.8915E+00	88.28	
1866	3.6875E+00	2.2536E+02	6.0066E+00	2.2552E+02	4.5242E+00	88.44	
1867	2.9384E+00	2.2355E+02	5.6680E+00	2.2370E+02	5.7909E+00	88.51	

ELEMENT ID 1652 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1858	2.5944E+00	2.2046E+02	6.0323E+00	2.2063E+02	5.9148E+00	88.39	
1859	3.5318E+00	2.1919E+02	5.7275E+00	2.1935E+02	6.3776E+00	88.46	
1867	2.9527E+00	2.2355E+02	5.4410E+00	2.2369E+02	5.8168E+00	88.57	
1868	3.4571E+00	2.2213E+02	5.1445E+00	2.2226E+02	6.3344E+00	88.63	

ELEMENT ID 1653 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1859	3.5351E+00	2.1919E+02	5.4016E+00	2.1933E+02	6.3980E+00	88.55	
1860	2.5715E+00	2.1826E+02	5.1392E+00	2.1839E+02	6.0471E+00	88.61	
1868	3.4695E+00	2.2213E+02	5.0172E+00	2.2225E+02	6.3529E+00	88.67	
1869	2.5487E+00	2.2106E+02	4.7578E+00	2.2117E+02	6.0434E+00	88.73	

ELEMENT ID 1654 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1860	2.5688E+00	2.1826E+02	4.7377E+00	2.1837E+02	6.0630E+00	88.72	
1861	3.9603E+00	2.1767E+02	4.5066E+00	2.1777E+02	4.8648E+00	88.79	
1869	2.5594E+00	2.2107E+02	4.5611E+00	2.2116E+02	6.0627E+00	88.79	
1870	3.9446E+00	2.2032E+02	4.3275E+00	2.2040E+02	4.8577E+00	88.85	

S H E L L E L E M E N T F O R C E S

ELEMENT ID 1655 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1861	3.9600E+00	2.1767E+02	4.1714E+00	2.1776E+02	4.8783E+00	88.88	
1862	2.9070E+00	2.1739E+02	3.9484E+00	2.1747E+02	2.8343E+00	88.95	
1870	3.9524E+00	2.2032E+02	4.2113E+00	2.2040E+02	4.8701E+00	88.88	
1871	2.8539E+00	2.1994E+02	3.9803E+00	2.2001E+02	2.7809E+00	88.95	

ELEMENT ID 1656 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1862	2.9052E+00	2.1739E+02	3.6156E+00	2.1746E+02	2.8443E+00	89.03	
1863	4.3956E-02	2.1740E+02	3.3875E+00	2.1746E+02	-8.8257E-03	89.11	
1871	2.8620E+00	2.1994E+02	3.8539E+00	2.2001E+02	2.7936E+00	88.98	
1872	-5.5715E-02	2.1987E+02	3.6126E+00	2.1993E+02	-1.1504E-01	89.06	

S H E L L E L E M E N T F O R C E S

MEMBRANE FORCES ARE IN FORCE PER UNIT LENGTH
BENDING MOMENTS ARE IN MOMENTS PER UNIT LENGTH

```

ELEMENT ID 1649 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1855 -3.0122E-03 -6.3528E+00 -2.3462E-01  5.6447E-03 -6.3615E+00 -2.11
1856 -1.2089E-01 -6.2924E+00 -2.2415E-01 -1.1276E-01 -6.3005E+00 -2.08
1864  1.4614E-03 -6.4472E+00 -2.0040E-01  7.6833E-03 -6.4534E+00 -1.78
1865 -1.1672E-01 -6.3843E+00 -1.9077E-01 -1.1092E-01 -6.3901E+00 -1.74

```

```

ELEMENT ID 1650 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1856 -1.2098E-01 -6.2924E+00 -2.1159E-01 -1.1373E-01 -6.2996E+00 -1.96
1857 -2.8811E-01 -6.2586E+00 -2.0131E-01 -2.8133E-01 -6.2654E+00 -1.93
1865 -1.1677E-01 -6.3844E+00 -1.8342E-01 -1.1140E-01 -6.3897E+00 -1.67
1866 -2.8303E-01 -6.3464E+00 -1.7408E-01 -2.7803E-01 -6.3514E+00 -1.64

```

```

ELEMENT ID 1651 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1857 -2.8815E-01 -6.2586E+00 -1.8929E-01 -2.8216E-01 -6.2646E+00 -1.81
1858 -5.0487E-01 -6.2507E+00 -1.7966E-01 -4.9926E-01 -6.2563E+00 -1.79
1866 -2.8355E-01 -6.3465E+00 -1.6691E-01 -2.7896E-01 -6.3511E+00 -1.58
1867 -5.0111E-01 -6.3331E+00 -1.5833E-01 -4.9682E-01 -6.3374E+00 -1.55

```

```

ELEMENT ID 1652 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1858 -5.0495E-01 -6.2507E+00 -1.6845E-01 -5.0001E-01 -6.2556E+00 -1.68
1859 -7.7027E-01 -6.2682E+00 -1.5983E-01 -7.6563E-01 -6.2728E+00 -1.66
1867 -5.0161E-01 -6.3332E+00 -1.5248E-01 -4.9763E-01 -6.3372E+00 -1.50
1868 -7.6800E-01 -6.3467E+00 -1.4502E-01 -7.6423E-01 -6.3504E+00 -1.49

```

```

ELEMENT ID 1653 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1859 -7.6955E-01 -6.2679E+00 -1.5092E-01 -7.6541E-01 -6.2721E+00 -1.57
1860 -4.9661E-01 -6.1915E+00 -1.4422E-01 -4.9296E-01 -6.1951E+00 -1.45
1868 -7.6751E-01 -6.3465E+00 -1.4154E-01 -7.6392E-01 -6.3501E+00 -1.45
1869 -4.9530E-01 -6.2661E+00 -1.3395E-01 -4.9219E-01 -6.2692E+00 -1.33

```

```

ELEMENT ID 1654 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1860 -4.9665E-01 -6.1916E+00 -1.3323E-01 -4.9354E-01 -6.1947E+00 -1.34
1861 -2.7851E-01 -6.1379E+00 -1.2714E-01 -2.7575E-01 -6.1406E+00 -1.24
1869 -4.9574E-01 -6.2663E+00 -1.2846E-01 -4.9288E-01 -6.2691E+00 -1.27
1870 -2.7736E-01 -6.2079E+00 -1.2162E-01 -2.7486E-01 -6.2104E+00 -1.17

```

S H E L L E L E M E N T F O R C E S

ELEMENT ID		-----						
LOAD COMBO		-----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE		
1861	-2.7862E-01	-6.1379E+00	-1.1790E-01	-2.7625E-01	-6.1403E+00	-1.15		
1862	-1.1356E-01	-6.1065E+00	-1.1196E-01	-1.1147E-01	-6.1086E+00	-1.07		
1870	-2.7772E-01	-6.2080E+00	-1.1832E-01	-2.7536E-01	-6.2104E+00	-1.14		
1871	-1.1169E-01	-6.1737E+00	-1.1176E-01	-1.0963E-01	-6.1757E+00	-1.06		

ELEMENT ID		-----						
LOAD COMBO		-----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE		
1862	-1.1364E-01	-6.1065E+00	-1.0286E-01	-1.1187E-01	-6.1083E+00	-.98		
1863	-1.1978E-03	-6.0975E+00	-9.6776E-02	3.3805E-04	-6.0990E+00	-.91		
1871	-1.1204E-01	-6.1738E+00	-1.0836E-01	-1.1010E-01	-6.1757E+00	-1.02		
1872	1.6030E-03	-6.1624E+00	-1.0180E-01	3.2838E-03	-6.1641E+00	-.95		

SHELL ELEMENT FORCES

MEMBRANE FORCES ARE IN FORCE PER UNIT LENGTH
BENDING MOMENTS ARE IN MOMENTS PER UNIT LENGTH

ELEMENT ID	LOAD COMBO	JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
ELEMENT ID 1025	LOAD COMBO 1	JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
1153			-3.9378E-02	-7.0500E+01	1.9431E+00	1.4166E-02	-7.0553E+01	1.58
1154			-4.9712E-01	-6.9753E+01	1.9542E+00	-4.4202E-01	-6.9808E+01	1.62
1162			-9.1418E-02	-7.0892E+01	2.2933E+00	-1.7210E-02	-7.0966E+01	1.85
1163			-5.3100E-01	-7.0175E+01	2.2995E+00	-4.5516E-01	-7.0251E+01	1.89
ELEMENT ID 1026	LOAD COMBO 1	JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
1154			-4.4394E-01	-6.9809E+01	-4.6048E-02	-4.4390E-01	-6.9809E+01	-.04
1155			-7.5204E-01	-6.9197E+01	-7.8637E-03	-7.5203E-01	-6.9197E+01	-.01
1163			-4.4519E-01	-7.0248E+01	2.3104E-01	-4.4442E-01	-7.0249E+01	.19
1164			-7.5808E-01	-6.9647E+01	2.6487E-01	-7.5706E-01	-6.9648E+01	.22
ELEMENT ID 1027	LOAD COMBO 1	JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
1155			-7.5220E-01	-6.9197E+01	7.2174E-02	-7.5212E-01	-6.9197E+01	.06
1156			-9.3590E-01	-6.8721E+01	1.0786E-01	-9.3572E-01	-6.8721E+01	.09
1164			-7.5944E-01	-6.9647E+01	2.9115E-01	-7.5821E-01	-6.9648E+01	.24
1165			-9.4115E-01	-6.9151E+01	3.2366E-01	-9.3961E-01	-6.9153E+01	.27
ELEMENT ID 1028	LOAD COMBO 1	JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
1156			-9.7623E-01	-6.8662E+01	1.9452E+00	-9.2037E-01	-6.8718E+01	1.64
1157			-1.0659E+00	-6.8255E+01	1.9702E+00	-1.0081E+00	-6.8312E+01	1.68
1165			-1.0121E+00	-6.9088E+01	2.1195E+00	-9.4617E-01	-6.9154E+01	1.78
1166			-1.0832E+00	-6.8696E+01	2.1427E+00	-1.0154E+00	-6.8764E+01	1.81
ELEMENT ID 1029	LOAD COMBO 1	JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
1157			-1.0588E+00	-6.8273E+01	-1.6740E+00	-1.0171E+00	-6.8315E+01	-1.43
1158			-9.7412E-01	-6.8011E+01	-1.6368E+00	-9.3418E-01	-6.8051E+01	-1.40
1166			-1.0435E+00	-6.8726E+01	-1.5753E+00	-1.0069E+00	-6.8762E+01	-1.33
1167			-9.8603E-01	-6.8482E+01	-1.5388E+00	-9.5097E-01	-6.8517E+01	-1.31
ELEMENT ID 1030	LOAD COMBO 1	JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
1158			-1.1800E+00	-6.7849E+01	-3.7479E+00	-9.7002E-01	-6.8059E+01	-3.21
1159			-9.3903E-01	-6.7716E+01	-3.7166E+00	-7.3282E-01	-6.7922E+01	-3.18
1167			-1.1582E+00	-6.8313E+01	-3.7125E+00	-9.5362E-01	-6.8518E+01	-3.15
1168			-9.5452E-01	-6.8111E+01	-3.6776E+00	-7.5372E-01	-6.8312E+01	-3.13

S H E L L E L E M E N T F O R C E S

ELEMENT ID 1031 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1159	-1.0823E+00	-6.7567E+01	4.8686E+00	-7.2767E-01	-6.7922E+01	4.17	
1160	-8.3119E-01	-6.7441E+01	4.8992E+00	-4.7278E-01	-6.7800E+01	4.18	
1168	-1.1203E+00	-6.7955E+01	4.9093E+00	-7.6164E-01	-6.8313E+01	4.18	
1169	-8.2145E-01	-6.7841E+01	4.9425E+00	-4.5891E-01	-6.8203E+01	4.20	

ELEMENT ID 1032 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
1160	-4.5582E-01	-6.7793E+01	4.9567E-01	-4.5217E-01	-6.7796E+01	.42	
1161	4.6814E-03	-6.7752E+01	5.2465E-01	8.7436E-03	-6.7756E+01	.44	
1169	-4.6250E-01	-6.8200E+01	4.6676E-01	-4.5928E-01	-6.8204E+01	.39	
1170	-6.8785E-03	-6.8186E+01	4.9777E-01	-3.2445E-03	-6.8190E+01	.42	

MOMENT SUR APPUI(1) SOUS CP

ELEMENT ID	265 -----						
LOAD COMBO	1 -----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
298	-2.4670E+00	-3.2259E+02	3.2297E+01	7.5896E-01	-3.2581E+02	5.70	
299	-4.2633E+01	-2.9116E+02	2.4064E+01	-4.0324E+01	-2.9347E+02	5.48	
307	3.4457E+00	-2.4582E+02	1.8917E+01	4.8732E+00	-2.4725E+02	4.32	
308	-8.8140E+01	-3.7150E+02	1.0526E+01	-8.7749E+01	-3.7189E+02	2.12	

ELEMENT ID	266 -----						
LOAD COMBO	1 -----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
299	-4.1350E+01	-2.9089E+02	1.5284E+01	-4.0418E+01	-2.9183E+02	3.49	
300	-6.1303E+01	-3.0848E+02	9.3113E+00	-6.0952E+01	-3.0883E+02	2.15	
308	-8.9790E+01	-3.7183E+02	1.0531E+01	-8.9397E+01	-3.7222E+02	2.14	
309	-7.0653E+01	-3.7778E+02	4.6334E+00	-7.0583E+01	-3.7785E+02	.86	

ELEMENT ID	267 -----						
LOAD COMBO	1 -----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
300	-6.0055E+01	-3.0823E+02	5.9740E+00	-5.9911E+01	-3.0837E+02	1.38	
301	-6.2252E+01	-3.1335E+02	6.1804E+00	-6.2100E+01	-3.1350E+02	1.41	
309	-7.3558E+01	-3.7836E+02	4.8017E+00	-7.3482E+01	-3.7844E+02	.90	
310	-7.5014E+01	-3.7962E+02	5.0173E+00	-7.4932E+01	-3.7971E+02	.94	

ELEMENT ID	268 -----						
LOAD COMBO	1 -----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
301	-6.2404E+01	-3.1337E+02	5.7647E+00	-6.2272E+01	-3.1350E+02	1.32	
302	-6.3697E+01	-3.1334E+02	5.4615E+00	-6.3577E+01	-3.1346E+02	1.25	
310	-7.5425E+01	-3.7970E+02	5.4202E+00	-7.5329E+01	-3.7979E+02	1.02	
311	-7.9233E+01	-3.8244E+02	5.1069E+00	-7.9147E+01	-3.8253E+02	.96	

SHELL ELEMENT FORCES

ELEMENT ID	-----						
LOAD COMBO	1 -----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
302	-6.3425E+01	-3.1331E+02	4.2878E+00	-6.3351E+01	-3.1338E+02	.98	
303	-6.1951E+01	-3.1284E+02	4.3383E+00	-6.1877E+01	-3.1292E+02	.99	
311	-8.0035E+01	-3.8263E+02	4.8250E+00	-7.9958E+01	-3.8270E+02	.91	
312	-7.2023E+01	-3.7836E+02	4.8974E+00	-7.1945E+01	-3.7844E+02	.92	
ELEMENT ID	270 -----						
LOAD COMBO	1 -----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
303	-6.1486E+01	-3.1272E+02	4.7742E+00	-6.1395E+01	-3.1281E+02	1.09	
304	-6.0613E+01	-3.0545E+02	5.2405E+00	-6.0501E+01	-3.0556E+02	1.23	
312	-7.2983E+01	-3.7852E+02	5.9556E+00	-7.2867E+01	-3.7864E+02	1.12	
313	-7.5128E+01	-3.8065E+02	6.3996E+00	-7.4994E+01	-3.8078E+02	1.20	
ELEMENT ID	271 -----						
LOAD COMBO	1 -----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
304	-6.1285E+01	-3.0559E+02	1.6487E+00	-6.1274E+01	-3.0560E+02	.39	
305	-4.2616E+01	-2.8725E+02	-3.8664E+00	-4.2555E+01	-2.8731E+02	-.91	
313	-7.3917E+01	-3.8043E+02	6.5043E+00	-7.3779E+01	-3.8056E+02	1.22	
314	-9.0053E+01	-3.7583E+02	9.2374E-01	-9.0050E+01	-3.7584E+02	.19	
ELEMENT ID	272 -----						
LOAD COMBO	1 -----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
305	-3.9510E+01	-2.8702E+02	3.0315E+00	-3.9473E+01	-2.8706E+02	.70	
306	-1.5752E+00	-3.1037E+02	-2.4624E+00	-1.5556E+00	-3.1039E+02	-.46	
314	-9.1707E+01	-3.7501E+02	1.6669E+01	-9.0730E+01	-3.7599E+02	3.36	
315	5.3693E+00	-2.6483E+02	9.6067E+00	5.7105E+00	-2.6517E+02	2.03	

REACTIONS D'APPUI [2] SOUS Mc120

649	5.5584	.0000	.0000
650	-7.4066	.0000	.0000
651	-12.2853	.0000	.0000
652	-25.4976	.0000	.0000
653	-30.6808	.0000	.0000
654	-24.8890	.0000	.0000
655	-11.9649	.0000	.0000
656	-7.4980	.0000	.0000
657	5.3329	.0000	.0000

S H E L L E L E M E N T F O R C E S

MEMBRANE FORCES ARE IN FORCE PER UNIT LENGTH
BENDING MOMENTS ARE IN MOMENTS PER UNIT LENGTH

ELEMENT ID 312 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
350	1.4193E+00	6.6747E+00	-3.9840E+00	8.0231E+00	7.0990E-02	-65.68	
351	-2.3665E-02	7.2497E+00	-3.2214E+00	7.8745E+00	-6.4846E-01	-74.29	
359	1.1757E+00	-3.3559E+00	-3.6100E+00	2.3661E+00	-4.5464E+00	-24.52	
360	1.3511E-02	-2.7520E+00	-2.8564E+00	9.4556E-01	-3.6840E+00	-26.66	
ELEMENT ID 313 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
352	-9.9335E-02	-7.1015E+00	-2.0315E+01	7.2930E+00	-1.4494E+01	-35.63	
353	3.2401E-01	-6.9184E+00	-1.4177E+01	6.7927E+00	-1.3387E+01	-34.48	
361	8.1881E-02	-1.8486E+01	-1.1158E+01	4.5594E+00	-2.2963E+01	-23.79	
362	-1.0115E-01	-1.7848E+01	-1.2615E+01	3.8516E+00	-2.1801E+01	-23.11	
ELEMENT ID 314 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
353	3.3657E-01	-6.9161E+00	-9.6608E+00	6.0996E+00	-1.2679E+01	-33.64	
354	8.3320E-01	-6.6577E+00	-9.0240E+00	5.9429E+00	-1.1767E+01	-32.49	
362	-1.0695E-01	-1.7850E+01	-9.5089E+00	3.3141E+00	-2.1271E+01	-21.90	
363	-6.1512E-03	-1.7250E+01	-8.8727E+00	3.0475E+00	-2.0303E+01	-21.20	
ELEMENT ID 315 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
354	8.3886E-01	-6.6567E+00	-8.4998E+00	5.4751E+00	-1.1293E+01	-31.72	
355	1.2633E+00	-6.2511E+00	-8.0131E+00	5.4622E+00	-1.0450E+01	-30.91	
363	-1.2833E-02	-1.7251E+01	-8.2960E+00	2.6606E+00	-1.9925E+01	-20.12	
364	2.6958E-01	-1.6535E+01	-7.8103E+00	2.6830E+00	-1.8948E+01	-19.51	
ELEMENT ID 316 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
355	1.2871E+00	-6.2652E+00	-7.5882E+00	5.1045E+00	-1.0083E+01	-30.09	
356	1.6773E+00	-5.6364E+00	-7.1482E+00	5.1740E+00	-9.1330E+00	-29.63	
364	2.8173E-01	-1.6550E+01	-7.3028E+00	2.3802E+00	-1.8649E+01	-18.41	
365	7.4005E-01	-1.5677E+01	-6.8645E+00	2.6198E+00	-1.7556E+01	-17.77	
ELEMENT ID 317 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
356	1.6293E+00	-5.5958E+00	-6.7580E+00	4.8142E+00	-8.7807E+00	-28.95	
357	2.1910E+00	-4.7912E+00	-6.2844E+00	5.0334E+00	-7.6336E+00	-28.27	
365	6.8744E-01	-1.5640E+01	-6.4421E+00	2.3351E+00	-1.7287E+01	-16.84	
366	1.4660E+00	-1.4634E+01	-5.9696E+00	2.8764E+00	-1.6044E+01	-15.84	

S H E L L E L E M E N T F O R C E S

ELEMENT ID		-----						
LOAD COMBO		-----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE		
357	2.2400E+00	-4.8388E+00	-5.7655E+00	4.6367E+00	-7.2355E+00	-26.70		
358	1.9498E+00	-4.0336E+00	-5.2121E+00	4.1246E+00	-6.2084E+00	-27.31		
366	1.4960E+00	-1.4681E+01	-5.3659E+00	2.5990E+00	-1.5784E+01	-14.18		
367	1.4983E+00	-1.3734E+01	-4.8173E+00	2.4014E+00	-1.4637E+01	-13.31		

ELEMENT ID		-----						
LOAD COMBO		-----						
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE		
358	1.9408E+00	-4.0116E+00	-4.6332E+00	3.6612E+00	-5.7320E+00	-25.34		
359	1.1260E+00	-3.3070E+00	-3.9798E+00	2.6233E+00	-4.8043E+00	-26.68		
367	1.4789E+00	-1.3716E+01	-4.2504E+00	2.1450E+00	-1.4382E+01	-11.58		
368	9.5223E-01	-1.2927E+01	-3.6037E+00	1.4246E+00	-1.3400E+01	-10.28		

MOMENT DE TORSION SOUS Bc

```

ELEMENT ID 1649 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1855 -3.3682E-02 -6.1602E+01 -3.8876E+00  2.1082E-01 -6.1847E+01 -3.60
1856 -7.2066E-01 -6.1135E+01 -3.9232E+00 -4.6695E-01 -6.1389E+01 -3.70
1864  4.0637E-02 -6.0692E+01 -3.6282E+00  2.5661E-01 -6.0908E+01 -3.41
1865 -5.8608E-01 -6.0127E+01 -3.6692E+00 -3.6082E-01 -6.0352E+01 -3.51
    
```

```

ELEMENT ID 1650 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1856 -7.2482E-01 -6.1136E+01 -3.9501E+00 -4.6762E-01 -6.1393E+01 -3.73
1857 -1.8883E+00 -6.0578E+01 -3.8758E+00 -1.6335E+00 -6.0833E+01 -3.76
1865 -5.8530E-01 -6.0126E+01 -3.6535E+00 -3.6196E-01 -6.0350E+01 -3.50
1866 -1.3053E+00 -5.9597E+01 -3.5860E+00 -1.0855E+00 -5.9816E+01 -3.51
    
```

```

ELEMENT ID 1651 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1857 -1.8987E+00 -6.0580E+01 -3.6972E+00 -1.6667E+00 -6.0812E+01 -3.59
1858 -2.7258E+00 -6.0154E+01 -3.4841E+00 -2.5152E+00 -6.0364E+01 -3.46
1866 -1.3137E+00 -5.9598E+01 -3.4599E+00 -1.1091E+00 -5.9803E+01 -3.39
1867 -1.9356E+00 -5.9153E+01 -3.2521E+00 -1.7514E+00 -5.9337E+01 -3.24
    
```

```

ELEMENT ID 1652 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1858 -2.7254E+00 -6.0154E+01 -3.2022E+00 -2.5474E+00 -6.0332E+01 -3.18
1859 -2.8978E+00 -5.9919E+01 -2.9820E+00 -2.7423E+00 -6.0075E+01 -2.99
1867 -1.9392E+00 -5.9154E+01 -3.0722E+00 -1.7747E+00 -5.9318E+01 -3.06
1868 -2.2395E+00 -5.8851E+01 -2.8543E+00 -2.0960E+00 -5.8995E+01 -2.88
    
```

```

ELEMENT ID 1653 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1859 -2.8865E+00 -5.9915E+01 -2.7861E+00 -2.7507E+00 -6.0051E+01 -2.79
1860 -2.4492E+00 -5.9762E+01 -2.6807E+00 -2.3241E+00 -5.9888E+01 -2.67
1868 -2.2417E+00 -5.8850E+01 -2.7363E+00 -2.1097E+00 -5.8982E+01 -2.76
1869 -2.1563E+00 -5.8655E+01 -2.6304E+00 -2.0341E+00 -5.8777E+01 -2.66
    
```

```

ELEMENT ID 1654 -----
LOAD COMBO 1 -----
JOINT      M11      M22      M12      Mmax      Mmin      ANGLE
1860 -2.4470E+00 -5.9764E+01 -2.6111E+00 -2.3283E+00 -5.9882E+01 -2.60
1861 -1.8607E+00 -5.9546E+01 -2.6052E+00 -1.7433E+00 -5.9663E+01 -2.58
1869 -2.1544E+00 -5.8656E+01 -2.5906E+00 -2.0359E+00 -5.8775E+01 -2.62
1870 -1.7033E+00 -5.8565E+01 -2.5831E+00 -1.5862E+00 -5.8682E+01 -2.60
    
```

ELEMENT ID 1655 -----
LOAD COMBO 1 -----

JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
1861	-1.8667E+00	-5.9547E+01	-2.5738E+00	-1.7520E+00	-5.9661E+01	-2.55
1862	-1.0486E+00	-5.9480E+01	-2.5951E+00	-9.3353E-01	-5.9595E+01	-2.54
1870	-1.6966E+00	-5.8563E+01	-2.6295E+00	-1.5753E+00	-5.8685E+01	-2.64
1871	-9.3426E-01	-5.8571E+01	-2.6473E+00	-8.1293E-01	-5.8692E+01	-2.62

ELEMENT ID 1656 -----
LOAD COMBO 1 -----

JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE
1862	-1.0420E+00	-5.9479E+01	-2.5877E+00	-9.2767E-01	-5.9593E+01	-2.53
1863	-2.9489E-02	-5.9564E+01	-2.6288E+00	8.6364E-02	-5.9680E+01	-2.52
1871	-9.3039E-01	-5.8570E+01	-2.7060E+00	-8.0364E-01	-5.8697E+01	-2.68
1871	-9.3039E-01	-5.8570E+01	-2.7060E+00	-8.0364E-01	-5.8697E+01	-2.68
1872	3.7892E-02	-5.8636E+01	-2.7422E+00	1.6577E-01	-5.8764E+01	-2.67

TASSEMENT D'APPUI

```

ELEMENT ID   272 -----
LOAD COMBO   1 -----
JOINT        M11          M22          M12          Mmax          Mmin          ANGLE
305  5.3697E-01  6.8066E+00  1.4097E+00  7.1090E+00  2.3461E-01  77.89
306 -4.1339E-01  7.5012E+00  1.6921E+00  7.8478E+00 -7.5999E-01  78.42
314  1.2638E+00  6.2517E+00  5.8906E-01  6.3203E+00  1.1952E+00  83.36
315 -3.7949E-01  1.3404E+00  1.2149E+00  1.9688E+00 -1.0080E+00  62.65
    
```

```

ELEMENT ID   273 -----
LOAD COMBO   1 -----
JOINT        M11          M22          M12          Mmax          Mmin          ANGLE
307 -9.3132E-02  1.0311E+01  7.9802E-01  1.0372E+01 -1.5399E-01  85.64
308  3.2285E+00  1.3261E+01  5.3465E-01  1.3289E+01  3.2000E+00  86.96
316  6.8196E-02  1.1966E+01  9.2712E-01  1.2038E+01 -3.6120E-03  85.57
317  1.6432E+00  1.0648E+01  6.7137E-01  1.0698E+01  1.5935E+00  85.76
    
```

```

ELEMENT ID   274 -----
LOAD COMBO   1 -----
JOINT        M11          M22          M12          Mmax          Mmin          ANGLE
308  3.2773E+00  1.3270E+01  5.3747E-01  1.3299E+01  3.2485E+00  86.93
309  2.2471E+00  1.2276E+01  3.3886E-01  1.2287E+01  2.2356E+00  88.07
317  1.6025E+00  1.0640E+01  3.6279E-01  1.0655E+01  1.5879E+00  87.71
318  2.1363E+00  1.0690E+01  1.6522E-01  1.0693E+01  2.1331E+00  88.89
    
```

```

ELEMENT ID   275 -----
LOAD COMBO   1 -----
JOINT        M11          M22          M12          Mmax          Mmin          ANGLE
309  2.3318E+00  1.2293E+01  3.3452E-01  1.2304E+01  2.3206E+00  88.08
310  2.3565E+00  1.1433E+01  3.2546E-01  1.1445E+01  2.3448E+00  87.95
318  2.1001E+00  1.0682E+01  4.9275E-02  1.0683E+01  2.0999E+00  89.67
319  1.9777E+00  1.0157E+01  4.3302E-02  1.0157E+01  1.9775E+00  89.70
    
```

```

ELEMENT ID   276 -----
LOAD COMBO   1 -----
JOINT        M11          M22          M12          Mmax          Mmin          ANGLE
310  2.3596E+00  1.1435E+01  3.1094E-01  1.1445E+01  2.3490E+00  88.04
311  1.9968E+00  1.0416E+01  2.8870E-01  1.0426E+01  1.9869E+00  88.04
319  1.9841E+00  1.0158E+01 -1.5987E-02  1.0158E+01  1.9840E+00 -89.89
320  1.8380E+00  9.5206E+00 -3.5592E-02  9.5207E+00  1.8378E+00 -89.73
    
```

```

ELEMENT ID   277 -----
LOAD COMBO   1 -----
JOINT        M11          M22          M12          Mmax          Mmin          ANGLE
311  2.0072E+00  1.0416E+01  3.1173E-01  1.0427E+01  1.9956E+00  87.88
312  2.0058E+00  9.5044E+00  2.6754E-01  9.5139E+00  1.9963E+00  87.96
320  1.8327E+00  9.5200E+00 -5.5953E-02  9.5204E+00  1.8322E+00 -89.58
321  1.6298E+00  8.6674E+00 -9.6112E-02  8.6687E+00  1.6285E+00 -89.22
    
```

ELEMENT ID 278 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
312	2.0004E+00	9.5061E+00	2.2414E-01	9.5128E+00	1.9937E+00	88.29	
313	1.5482E+00	8.1419E+00	1.4610E-01	8.1452E+00	1.5450E+00	88.73	
321	1.6293E+00	8.6654E+00	-2.3369E-01	8.6732E+00	1.6216E+00	-88.10	
322	1.2962E+00	7.7358E+00	-3.0852E-01	7.7506E+00	1.2815E+00	-87.26	

ELEMENT ID 279 -----							
LOAD COMBO 1 -----							
JOINT	M11	M22	M12	Mmax	Mmin	ANGLE	
313	1.5091E+00	8.1332E+00	1.6128E-01	8.1371E+00	1.5052E+00	88.61	
314	1.4036E+00	6.1225E+00	-5.8110E-02	6.1233E+00	1.4029E+00	-89.29	
322	1.3186E+00	7.7420E+00	-4.7946E-01	7.7776E+00	1.2830E+00	-85.76	
323	5.4761E-01	6.6194E+00	-6.9341E-01	6.6976E+00	4.6942E-01	-83.57	

ORDONNEES DE LA LIGNE D'INFLUENCE A L'APPUI N°1 ET A 0.4(11)

appui	1	
alpha	m(appui)	m(travee)
0	0.000	-0.000
2	-0.534	0.987
4	-1.045	1.982
6	-1.511	2.996
8	-1.910	4.036
10	-2.220	4.712
12	-2.418	3.833
14	-2.481	3.007
16	-2.388	2.245
18	-2.116	1.554
20	-1.642	0.943
22	-0.944	0.422
24	-0.523	0.215
26	-0.322	0.102
28	0.000	0.000
30	-1.358	-0.543
32	-1.706	-0.682
34	-1.871	-0.748
36	-1.881	-0.753
38	-1.765	-0.706
40	-1.551	-0.620
42	-1.267	-0.507
44	-0.942	-0.377
46	-0.603	-0.241
48	-0.000	-0.000
50	-0.000	-0.000
52	-0.000	-0.000
54	0.214	0.086
56	0.364	0.146
58	0.457	0.183
60	0.501	0.201
62	0.504	0.202
64	0.473	0.189
66	0.416	0.166
68	0.339	0.136
70	0.252	0.101
72	0.000	0.000
74	0.000	0.000
76	0.000	0.000
78	0.000	0.000
80	-0.057	-0.023
82	-0.098	-0.039
84	-0.123	-0.049
86	-0.135	-0.054
88	-0.135	-0.054
90	-0.127	-0.051
92	-0.112	-0.045
94	-0.091	-0.037
96	-0.000	-0.000
98	-0.000	-0.000
100	-0.000	-0.000
102	-0.000	-0.000
104	-0.000	-0.000
106	0.017	0.007
108	0.029	0.012
110	0.037	0.015
112	0.041	0.016
114	0.042	0.017
116	0.041	0.016
118	0.037	0.015
120	0.032	0.013

122	0.000	0.000
124	0.000	0.000
126	0.000	0.000
128	0.000	0.000
130	0.000	0.000
132	0.000	0.000
134	-0.004	-0.002
136	-0.007	-0.003
138	-0.009	-0.004
140	-0.010	-0.004
142	-0.010	-0.004
144	-0.009	-0.004
146	-0.000	-0.000
148	-0.000	-0.000
150	-0.000	-0.000
152	-0.000	-0.000
154	-0.000	-0.000
156	-0.000	-0.000
158	-0.000	-0.000
160	0.001	0.001
162	0.002	0.001
164	0.003	0.001
166	0.003	0.001
168	0.004	0.001
170	0.004	0.001
172	0.004	0.001
174	0.003	0.001
176	0.000	0.000
178	0.000	0.000
180	0.000	0.000
182	0.000	0.000
184	0.000	0.000
186	0.000	0.000
188	0.000	0.000
190	0.000	0.000
192	-0.000	-0.000
194	-0.000	-0.000
196	-0.000	-0.000
198	0.000	0.000
200	0.000	0.000
202	0.000	0.000
204	0.000	0.000
206	0.000	0.000
208	0.000	0.000
210	0.000	0.000
212	0.000	0.000
214	0.000	0.000