

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Mécanique



Mémoire de Magister

Option : Construction Mécanique
Ecole Doctorale : Mécanique et Ingénierie des Systèmes

Thème

Problème axisymétrique de traction d'un milieu élastique le long d'un orifice annulaire

Présenté par :

Mr **MEZIANE Tarik**

Devant le jury composé de :

Président :	Mr BOUAZIZ Mohamed	Professeur, ENP
Directeur :	Mr KEBLI Belkacem	Professeur, ENP
Examineur:	Mr RECHAK Said	Professeur, ENP
Examineur :	Mr KESSI Arezki	Professeur, USTHB

Année universitaire 2014

ملخص

من خلال هذه المذكرة قمنا بدراسة التشوه المتناسق مع المحور بسحب وسيلة مرنة على طول فتحت حلقيّة نحن مهتمون بدراسة التشريد و التشدد في الوسط المرن المتعلق على قاعدة جامدة و صفيحة معدنية بوجود ثقب حلقي الذي يتم تطبيق حوله قوة شد متجانسة. حل هذه المشكلة يتم عن طريق نضام المعادلات التفاضلية الجزئية التي تدعى بمعادلات التوازن, مع شروط الحدود المختلطة. بتطبيق تحويلات هنكل و وضائف القيود لبوس نسك يتم تقليل المشكلة الى معادلات ثلاثية و التي يتم تخفيضها الى حل نضام جبري لا نهائي. سيتم عرض النتائج العددية لتوزيع التشريد و الضغوط.

الكلمات المفتاحية التشوه المتناسق , وسيلة مرنة , تحويل تكاملي هنكل, وضائف القيود لبوس نسك

Résumé

Nous traitons à travers ce mémoire le problème axisymétrique de traction d'un milieu élastique le long d'un orifice annulaire. Nous nous intéresseront à l'étude des déplacements et contraintes du milieu élastique attaché à une base rigide et couvert par une plaque métallique ayant un trou annulaire sur la quelle est appliquée une force de traction. Ce problème est modélisé par un système d'équations différentiels partiels appelés « équation d'équilibre de Lamé » avec des conditions aux limites mixtes. En appliquant la transformation de Hankel suivant la variable polaire r et moyennant les fonctions de contraintes de Boussinesq, le problème se réduit aux équations intégrales triples, lesquels seront réduites à la solution d'un système algébrique infini. Des résultats numériques seront donnés pour illustré la distribution des déplacements et contraintes.

Mots clés : système de Lamé, fonctions de contraintes de Boussinesq, transformation de Hankel, équations intégrales triples.

Abstract

We are interested in this study of displacements and stresses of an elastic medium attached to a rigid base and covered by a metal plate with an annular hole to which one applies an absorption force. This problem is modeled by a system of partial differential equations called equilibrium system « Lamé system » with mixed boundary conditions. Applying the Hankel transformation following the polar variable r and with the Boussinesq stress functions, the problem is reduced to a triple integral equations, which will be reduced to the solution of an infinite system of algebraic equations. Numerical results are also given to illustrate the distribution of displacements and stresses.

Key Words: Lamé system, Boussinesq stress functions, Hankel transformation, mixed boundary conditions.

Remerciements

En premier lieu, je remercie ALLAH, notre créateur qui m'a donné la force pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier vivement mon promoteur M^r B. KEBLi, pour sa disponibilité et son sérieux,

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements à tous les gens qui m'ont aidé dans l'accomplissement de ce mémoire.

Ainsi que l'ensemble des enseignants qui m'ont bien enseigné durant les années de mes études.

Je remercie aussi les membres du jury qui me feront l'honneur d'examiner ce modeste travail.

Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- ✓ *Mes très chers parents qui mon toujours soutenu.*
- ✓ *A la mémoire de mes grands parents.*
- ✓ *Mes très chers frères*
- ✓ *Ma très chère sœur et son mari.*
- ✓ *Mes neveux et mes nièces.*
- ✓ *Mes tentes et oncles.*
- ✓ *Mes cousins et cousines.*
- ✓ *Tous mes amis (es).*
- ✓ *Toute la famille MEZIANE.*

TARIK

SOMMAIRE

Introduction générale.....	1
Etude bibliographique.....	4

Chapitre I Généralités sur les fonctions spéciales

I – 1 - Introduction.....	7
II– Equations intégrales.....	7
II - 1 – Equation de Fredholm.....	8
II – 1 – 1 – Equation de Fredholm de première espèce.....	8
II – 1 – 2 – Equation de Fredholm de seconde espèce.....	9
II – 2 – Equation de Voltera.....	10
II – 2 -1 – Equation de Voltera de première espèce.....	10
II – 2 – 2 – Equation de Voltera de seconde espèce	10
III – Fonctions de Bessel.....	11
III – a – Fonction de Bessel de première espèce.....	11
III –b – Fonction de Bessel de seconde espèce.....	12
IV – Fonctions de Hankel.....	13
IV – a – Fonction de Hankel du premier type.....	13
IV -b - Fonction de Hankel de second type.....	14
V - Transformée de Hankel.....	14
VI - Equations intégrales triples en J_0	15
VI - 1 - Rappel de quelques formules intégrales.....	15
VI - 2 – Applications.....	16
VI – 2 -1 Problèmes de conduction thermique triplement mixte.....	16
a - 1 - Température dans un demi-espace.....	16
a - 2 – Température dans une plaque 1 ^{er} cas.....	18

a - 3 - Température dans une plaque 2 ^{ème} cas.....	21
VI – 2 - 2 – Problème de poinçonnement dans un demi - space	30
VI.2. 3. Poinçonnement annulaire sur une couche.....	32

Chapitre II : Théorie de l'élasticité linéaire

I – Introduction	37
II - Quelques hypothèses fondamentales.....	37
II – 1 – Hypothèse de continuité	37
II – 2 – Hypothèse d'homogénéité	38
II – 3 – Hypothèse d'isotropie.....	38
II – 4 – Hypothèse de proportionnalité.....	38
II – 5 - Hypothèse des petites déformations	39
III – 1 – Elasticité classique.....	39
III – 2 – Elasticité axisymétrique.....	39
III – 3 – Les modules élastiques.....	40
III – 3 – 1 Module d'Young et coefficient de Poisson.....	40
III – 3 – 1 – 1- Unité du Module d'Young et de coefficient de Poisson.....	41
III - 3 – 1 – 2 - Mesure du module de Young.....	42
III – 3 - 2 Module de coulomb.....	42
III – 3 – 3 - Module de Lamé.....	43
III – 3 – 4 - Module de compressibilité et de cisaillement.....	44
IV - Equations de l'élasticité.....	45
IV.1 Loi de Hooke.....	45
V - Equations fondamentales de la théorie d'élasticité.....	49
V - 1 Fonction de contrainte de Love.....	50
V - 2 - Les fonctions de contrainte de Boussinesq.....	50
VI - Concentration de contrainte.....	52
VI. 1. Différents modes de sollicitations.....	52

Chapitre III : Résultats et discussions

I - Introduction.....	55
II - Formulation du problème.	55
II - 1 - Formules principales.....	55
II - 2 - Formulation du problème et sa solution.....	56
II - 3 Calcul numérique.....	70
III - Conclusion.....	78
IV - Perspectives.....	80
Conclusion générale	82

Introduction Générale

Introduction générale

Introduction :

La mécanique de rupture et de contact est un domaine d'importance capitale intervenant dans diverses applications pratiques. La détermination des champs de déplacements et de contraintes autour d'une fissure ou d'un trou, se révèle nécessaire, pour prévenir le comportement des matériaux.

Motivés par le rôle grandissant que jouent les problèmes de contacts en élasticité, notamment dans l'industrie, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à ce type de problèmes.

Williams [1], Cooke [2], Noble [3], Collins [4], et Jain et Kanwel [5], ont montré que ce type de problèmes peut être réduit à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm, la solution du problème a été donnée par une méthode itérative. Gubenko et Mossakovski [6], ont réduit ce problème en 1960 à une paire d'équations intégrales de Fredholm dont la solution est complexe.

En 1974, Shibuya, Koizumi et Nakahara [7], ont étudié un problème de contact élastique d'un demi plan entaillé par un poinçon rigide annulaire plat, et en 1975, puis en 1977, respectivement référencés [8], [9], ils ont étudié le problème de traction d'un milieu élastique fissuré, pour lesquels ils ont proposé une méthode plus simple qui consiste à réduire ces types de problèmes à la résolution d'un système linéaire d'équations algébriques infini qui permet le calcul des déplacements et contraintes des problèmes proposés.

Introduction générale

Sakamoto, et Kobayashi [10], [11] se sont inspirés de la méthode de Shibuya, Koizumi et Nakahara pour étudier le problème de contact d'un corps élastique fixé à sa base rigide (encastré) et couvert d'une plaque métallique ayant un trou circulaire, et ont donné la distribution des contraintes et des déplacements relatifs au problème.

En se basant sur la méthode de Sakamoto et Kobayashi, nous avons étudié un problème de contact d'un corps élastique attaché à une base rigide et couvert d'une plaque métallique ayant un trou annulaire sur lequel on applique une force de traction. Ce problème est modélisé par un système d'équations différentiels partiels appelés équations d'équilibre de Lamé avec conditions aux limites mixtes.

Appliquons la transformation de Hankel suivant la variable polaire r et moyennant les fonctions de contraintes de Boussinesq, le problème se réduit aux équations intégrales triples, contrairement à la méthode traditionnelle consistant à résoudre l'équation de Fredholm correspondante, le système a été directement réduit à la solution d'un système algébrique infini.

Les coefficients du système algébrique ont été donnés sous forme de suites convergentes. Les déplacements et les contraintes, ainsi que les facteurs d'intensités de contraintes ont été calculés et illustrés graphiquement.

Introduction générale

Organisation du mémoire :

Notre travail est partagé en trois chapitres, après une introduction générale, le premier chapitre va porter sur des généralités sur les fonctions spéciales. Nous avons consacré le second chapitre sur quelques définitions en élasticité linéaire, et dans le troisième chapitre, nous avons donné les solutions de notre problème, et enfin nous avons terminé par une conclusion générale et donné quelques perspectives de recherches.

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Etude Bibliographique

Williams [1], et Collins [4] ont montré que la solution de certains problèmes axisymétriques, moyennant les équations intégrales peut être réduite à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm, la solution du problème a été donné par une méthode itérative.

En effet en 1963 Williams [1], a réduit ce type de problème à la résolution d'une équation intégral de Fredholm.

Et à la même année (1963) Collins [4] a essayé de résoudre le même type de problème qui se réduit à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm.

Une autre solution au problème de l'espace annulaire a été développée par Gubenko et Mossakovski [6]. Ils ont considéré le problème axisymétrique et montré qu'il peut être réduit à la solution d'une paire simultanée d'équations intégrales de Fredholm. Ces équations ont l'avantage qu'elles peuvent être résolues de manière itérative. La méthode adoptée, est de diviser le problème original en deux cas séparés et ensuite utiliser des représentations intégrales adaptées pour réduire ces problèmes pour aller au potentiel de la théorie à deux dimensions. Ces derniers problèmes sont alors réduits de façon ingénieuse à la solution d'une paire d'équations intégrales couplées de Fredholm.

Etude Bibliographique

Le problème de traction d'un milieu élastique fissuré [9], a été étudié par Shibuya, Koizumi et Nakahara en 1977, pour lequel ils ont proposé une méthode plus simple qui consiste à réduire ce type de problème à la résolution d'un système linéaire d'équation algébrique infini qui permet le calcul des déplacements et contraintes du problème proposé.

En 2005 Sakamoto, et Kobayashi [11] se sont inspirés de la méthode de Shibuya, koizumi et Nakahara pour étudier le problème de contact d'un corps élastique fixé à sa base rigide (encastré) et couvert d'un support métallique ayant un trou circulaire, et ont donné la distribution des contraintes et des déplacements relatifs au problème.

Shibuya, Koizumi et Nakahara [7] ont étudié le cas de contact élastique entre un demi-espace et un poinçon annulaire, avec lequel est appliquée une force de poinçonnement, qui est un problème aux limites triplement mixtes. La distribution de la pression sur la zone de contact est supposée continue en tous points à l'exception des surfaces interne et externe du poinçon, ainsi le problème de contact sera réduit à la résolution d'un système algébrique infini d'équations simultanées, les résultats numériques des déplacements et de la distribution de contraintes du demi-espace ont été illustrés.

Etude Bibliographique

En 1975 Shibuya, Koizumi et Nakahara [8] ont étudié un problème axisymétrique de distributions de contraintes d'un solide élastique infini contenant une fissure annulaire plate sous pression interne, qui est un problème aux limites triplement mixtes. En supposant que la déformation à la surface de la fissure est continue, ils l'ont modélisé par les séries de Fourier, ainsi le problème a été réduit à la résolution d'un système infini d'équations algébriques.

Les déplacements et les composantes des contraintes obtenues sont donnés par séries impliquant les intégrales infinies. En particulier ils ont exprimés les intégrales sur le plan de la fissure en termes de fonctions hypergéométriques. La distribution radiale du déplacement et les composantes des contraintes et les variations du facteur d'intensité de contraintes aux extrémités de la fissure ont été représentés graphiquement.

CHAPITRE I

Généralités sur les fonctions spéciales

I. INTRODUCTION :

L'analyse mathématique regroupe sous le terme de fonctions spéciales un ensemble de fonctions analytiques non élémentaires, qui sont apparues au XIXe siècle comme solutions d'équations de la physique mathématique, particulièrement les équations aux dérivées partielles d'ordre deux et quatre.

Parmi ces fonctions, on trouve un grand nombre de fonctions qui sont des solutions d'équations différentielles du second ordre, sans que cette propriété soit exclusive. Ces fonctions sont toutefois très utiles, car elles apparaissent très souvent, dès que l'on cherche à résoudre des équations différentielles du second ordre dont les coefficients ne sont pas constants.

Les fonctions spéciales sont disponibles en programmation sous la forme de bibliothèques. Elles sont aussi définies pour un grand nombre d'entre elles dans les logiciels de calcul symbolique (Maple, Mathematica, Matlab, etc).

Comme leurs propriétés étaient étudiées (et continuent d'être étudiées) extensivement, on dispose à leur sujet d'une multitude d'informations. Non seulement elles interviennent dans l'expression des solutions exactes de certaines équations aux dérivées partielles pour des conditions aux limites particulières, mais elles fournissent, par le biais des méthodes spectrales, les meilleures approximations numériques pour des conditions aux limites quelconques.

II. Equations intégrales :

Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale. Elles sont importantes dans plusieurs domaines physiques. Les équations de Fredholm et Volterra, sont plus connues d'entre elles. Elles apparaissent dans des problèmes de transfert d'énergie et

ceux d'oscillations, d'une membrane ou d'un axe. Les problèmes d'oscillations peuvent aussi être résolus à l'aide d'équations différentielles. Les équations intégrales sont à priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles.

II. 1. Equation de Fredholm :

II. 1. 1. Equation de Fredholm de première espèce :

L'équation de Fredholm non homogène de première espèce est donnée comme suit :

$$\int_a^b K(t,s)f(s) ds = g(t) \quad (\text{I. 1})$$

où $f(s)$ est la fonction inconnue à déterminer, $g(t)$ est le terme de source, et $K(t,s)$ est le noyau.

Par suite en notant $g_i = g(t_i)$ et $K_{ij} = K(s_i, t_j)$, $f_j = f(t_j)$ où i et j sont des indices variants respectivement de 1 à n et de 1 à m (m et n peuvent être différents).

L'équation (I. 1) devient alors :

$$\sum_{j=1}^m K_{ij} f_j = g_i \quad (\text{I. 2})$$

où encore sous forme matricielle :

$$K f = g \quad (\text{I. 3})$$

La solution de cette équations existe et est unique, si le noyau K n'est pas singulier, elle est donnée par :

$$f = K^{-1} g \quad (\text{I. 4})$$

II. 1. 2. Equation de Fredholm de seconde espèce :

L'équation de Fredholm non homogène de seconde espèce est donnée comme suit :

$$\lambda f(t) = \int_a^b K(t,s)f(s) ds + g(t) \quad (I.5)$$

où $f(t)$ est une fonction inconnue à déterminer. Le terme de source est $g(t)$, $K(t,s)$ est appelé noyau et λ est un scalaire introduit par commodité de calcul.

Suivant le même principe de notation défini précédemment, une fois discrétisée, l'équation (1.5) devient :

$$\lambda f_i = \sum_{j=1}^m K_{ij} f_j + g_i \quad (I.6)$$

où encore sous forme matricielle :

$$(K - \lambda I) f = -g \quad (I.7)$$

Le problème se ramène à la détermination des valeurs propres de la matrice I , si la fonction g est nulle, et on parle d'équation de Fredholm homogène, où I est la matrice identité. Dans le cas où g est différent de zéro, la solution existe et est unique si λ n'est pas l'une des valeurs propres du noyau, sinon la matrice à inverser $(K - \lambda I)$ devient singulière. Si cette dernière est inversible, on a formellement la solution comme suite :

$$f = (\lambda I - K)^{-1} g \quad (I.8)$$

La résolution numérique de ces équations homogène de première espèce de Fredholm est difficile car le noyau correspondant à souvent une matrice non inversible (avec un

déterminant voisin de zéro). Corrélativement, si λ est suffisamment différent de zéro, la solution des équations de Fredholm de seconde espèce est relativement simple à obtenir.

II. 2. Equation de Voltera [14] :

Les équations de Voltera sont des cas particuliers de celles de Fredholm, telle que le noyau K est :

$$K(t, s) = 0 \text{ pour } s > t \quad (\text{I. 9})$$

II. 2. 1. Equation de Voltera de première espèce :

L'équation homogène de première espèce de Voltera est défini comme suite :

$$g(t) = \int_a^b K(t, s)f(s) ds \quad (\text{I. 10})$$

où $f(s)$ est la fonction inconnue à déterminer, $g(t)$ est le terme de source, et $K(t, s)$ est le noyau.

La forme matricielle de l'équation de Voltera est identique à celle de Fredholm, avec la particularité que la matrice associée au noyau K est une matrice triangulaire inférieure.

A la différence des équations de Fredholm qui sont mal conditionnées, celles de Voltera ne le sont pas.

II. 2. 2. Equation de Voltera de seconde espèce :

De la même manière, l'équation de Voltera de seconde espèce non homogène s'écrit comme suite :

$$\lambda f(t) = \int_a^t K(t,s) f(s) ds + g(t) \quad (\text{I.11})$$

De manière similaire, la forme matricielle de l'équation de Volterra est identique à celle de Fredholm, seule la structure du noyau diffère car pour toutes les équations linéaires de Volterra, la matrice K est triangulaire inférieure.

III. Fonctions de Bessel :

Ces fonctions sont des solutions canoniques $y(x)$ de l'équation différentielle de Bessel ci-dessous :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (\text{1.12})$$

Pour tout nombre réel ou complexe α , le plus souvent, α est un entier naturel (on dit alors que c'est l'ordre de la fonction), ou un demi-entier.

Il existe deux sortes de fonctions de Bessel :

III. a. Fonction de Bessel de première espèce :

J_n solutions de l'équation différentielle ci-dessus qui sont définies en 0.

Les fonctions de Bessel de première espèce J_n , sont définies par la série entière suivante :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} p! (n+p)!} x^{2p} \quad (\text{1.13})$$

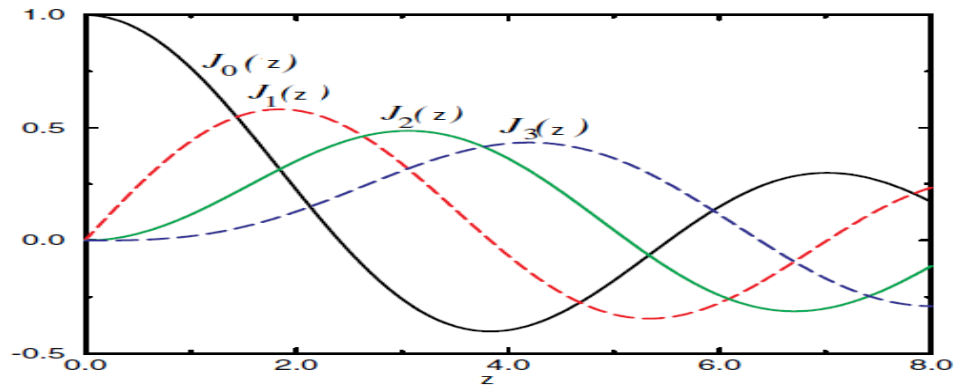


Figure I. 1: Représentation des quatre premières fonctions de Bessel de première espèce

III. b. Fonction de Bessel de seconde espèce :

Y_n , solutions qui ne sont pas définies en 0 (mais qui ont une limite infinie en 0).

Les fonctions de Bessel de seconde espèce ou fonctions de Neumann sont définies par :

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(x) \cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)} \tag{1.14}$$

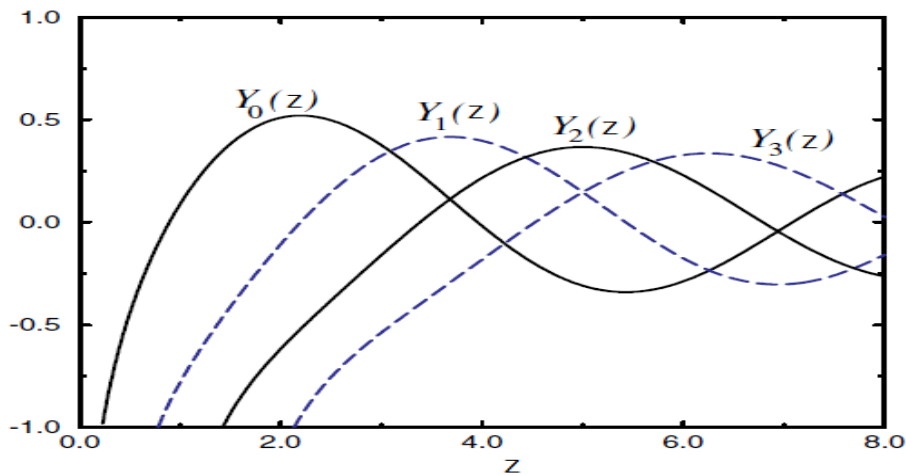


Figure I. 2: Représentation de quatre premières fonctions de Bessel de deuxième espèce

Plus généralement, pour α non entier, on a le développement analogue :

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \tag{1.15}$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction gamma, généralisant la fonction factorielle à des valeurs non entières.

Pour des valeurs entières de $\alpha = n$, les fonctions de Bessel peuvent être représentées par des intégrales :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\tau - x \sin \tau) d\tau \quad (1.16)$$

ou encore

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\tau - x \sin \tau)} d\tau \quad (1.17)$$

IV. Fonctions de Hankel :

Les fonctions de Hankel, du nom du mathématicien Hermann Hankel, notées $H_\alpha^{(1)}(x)$ et $H_\alpha^{(2)}(x)$, sont des fonctions spéciales de la physique mathématique. Ce sont les solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel, elles sont données par :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

où α est un nombre arbitraire réel ou complexe. Dans le cas où α est un entier, on le note alors généralement par n dans l'équation de Bessel, et il est dénommé ordre de la fonction.

IV. a. Fonction de Hankel du premier type:

Elle est donnée par la fonction suivante :

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + i Y_\alpha(x) \quad (1.18)$$

IV. b. Fonction de Hankel de second type :

Elle est donnée comme suite :

$$H_{\alpha}^{(2)}(x) = J_{\alpha}(x) + i Y_{\alpha}(x) \quad (1.19)$$

Les fonctions de Hankel sont des combinaisons linéaires des 2 autres solutions de l'équation de Bessel que sont $J_n(x)$ et $Y_n(x)$, dites fonctions de Bessel de première et deuxième espèce.

Les fonctions de Hankel sont par conséquent aussi nommées Fonctions de Bessel de troisième espèce.

V. Transformée de Hankel :

La transformée de Hankel est une transformation intégrale, elle exprime une fonction donnée $f(z)$, comme la somme pondérée d'un nombre infini de fonctions de Bessel de première espèce $J_{\nu}(kz)$. La transformation de Hankel d'ordre ν de la fonction $f(z)$ est donnée par :

$$F_{\nu}(K) = \int_0^{\infty} f(z) J_{\nu}(kz) z dz$$

où J_{ν} , est la fonction de Bessel de premier ordre avec $\nu \geq -1/2$.

L'inverse de la transformée de Hankel $F_{\nu}(K)$, s'écrit :

$$f(z) = \int_0^{\infty} F_{\nu}(K) J_{\nu}(kz) k dk$$

VI. Equations intégrales triples en J_0 :**VI. 1. Rappel de quelques formules intégrales [7] et [8] :**

Dans la résolution des systèmes d'équations intégrales triples intervient l'intégrale I_n suivante

$$I_n = \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) d\lambda = \begin{cases} \frac{\cos n \varphi}{\pi c d \sin \varphi}, & a < r < b \\ 0, & r < a, r > b \end{cases}$$

où

$a = c - d, b = c + d$ c'est-à-dire

$$c = \frac{(a + b)}{2}, d = \frac{(b - a)}{2}$$

alors que

$$\varphi = \arccos \left(\frac{c^2 + d^2 - r^2}{2 c d} \right) \text{ et } r = \sqrt{c^2 + d^2 - 2 c d \cos \varphi}$$

Remarquons que

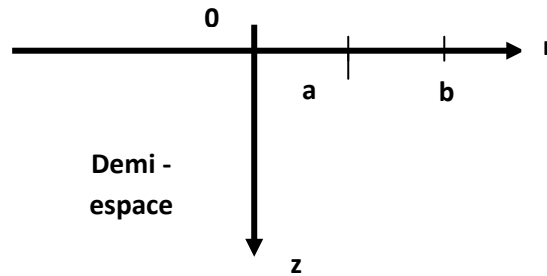
$$J_n = I_{n-1} - I_{n+1} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) G_n(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \frac{2 \sin n \varphi}{\pi c d}, & a \leq r \leq b \\ 0, & r \leq a, \quad r \geq b \end{cases}$$

où

$$G_n(\lambda) = \lambda [Z_{n-1}(\lambda) - Z_{n+1}(\lambda)]$$

tel que

$$Z_n(\lambda) = J_n(\lambda c) J_n(\lambda d)$$

VI. 2. Applications :**VI. 2. 1 Problèmes de conduction thermique triplement mixte:****a . 1. Température dans un demi-espace :****Figure I. 3 :Demi-espace**

L'équation différentielle partielle régissant le problème est :

$$\Delta T (r, z) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad r, z \geq 0$$

alors que les conditions limites du problème sont

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad r < a, \quad r > b$$

$$T|_{z=0} = 0, \quad a < r < b$$

La solution de l'équation différentielle partielle est donnée comme suit

$$T (r, z) = \int_0^{\infty} B(\lambda) J_0 (\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

où B est une fonction auxiliaire qui s'obtient des conditions limites mixtes, c'est-à-dire des équations intégrales triples suivantes

$$\int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r < a, \quad r > b \quad (1.20)$$

$$\int_0^{\infty} B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad a < r < b \quad (1.21)$$

En tenant compte de la formule intégrale (1.20) l'équation intégrale (1.20) est satisfaite si l'on choisit B comme suite

$$B(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\lambda c) J_n(\lambda d)$$

où a_n sont des inconnues à déterminer

Ainsi, l'équation (1.21) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda = 1 \quad (1.22)$$

avec

$$\alpha_n = \frac{a_n}{T_0}$$

Par suite en tenant compte de la formule de Gegenbauer suivante

$$J_0(\lambda r) = J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi, \quad a < r < b \quad (1.23)$$

En remplaçant l'équation (1.23) dans (1.22), cette dernière devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \left[J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi \right] J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda = 1 \quad (1.24)$$

Or, le système trigonométrique $\{\cos m\varphi\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ est linéairement indépendant.

par suite on trouve le système algébrique infini suivant

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) d\lambda = \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (1.25)$$

où δ_{0m} , est le symbole de Kronecker tel que $\delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$

a . 2 . Température dans une plaque : 1^{er} cas :

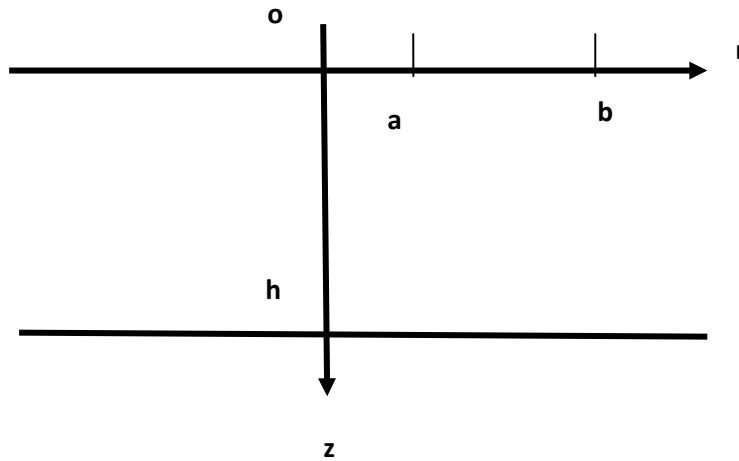


Figure I.4 : Plaque dans la quelle on impose une température fixe entre a et b

Les conditions limites du problème sont tel que :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad r > b, r < a$$

$$T|_{z=0} = T_0, \quad a < r < b$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} = 0$$

Par l'application de la transformation de Hankel à l'équation de Laplace, on trouve

$$T_*'' - \lambda^2 T_* = 0$$

où

$$T_*(z) = \int_0^{\infty} r J_0(\lambda r) T(r, z) dr$$

Ansi,

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) T_* d\lambda \quad (1.26)$$

avec

$$T_* = A \operatorname{ch} \lambda z + B \operatorname{sh} \lambda z$$

Comme

$$T'_* = A \lambda \operatorname{sh} \lambda z + \lambda B \operatorname{ch} \lambda z$$

on aura

$$T'_*|_{z=h} = 0 \Rightarrow B = -A \operatorname{th} \lambda h$$

L'équation de la température devient alors

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) [\operatorname{ch} \lambda z - \operatorname{th} \lambda h \operatorname{sh} \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.27)$$

où A est une fonction à déterminer

Les équations intégrales triples du problème proposé s'obtiennent par :

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 A(\lambda) \operatorname{th} \lambda h J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r < a, \quad r > b \quad (1.28)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = T_0, \quad a < r < b \quad (1.29)$$

Posons

$$\lambda A \operatorname{th} \lambda h = C \text{ c'est à dire } \lambda A = \operatorname{cth} \lambda h C$$

les deux équations intégrales deviennent

$$\int_0^{\infty} \lambda C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r < a, \quad r > b \quad (1.30)$$

$$\int_0^{\infty} C(\lambda) \operatorname{cth} \lambda h J_0(\lambda r) d\lambda = T_0, \quad a < r < b \quad (1.31)$$

Pour satisfaire les deux équations homogènes ($r < a$, $r > b$) posons

$$C(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\lambda c) J_n(\lambda d)$$

L'équation (1.31), donne

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) \operatorname{cth} \lambda h d\lambda = 1$$

avec

$$\alpha_n = a_n / T_0$$

En utilisant la formule de Gegenbauer suivante

$$J_0(\lambda r) = J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi, \quad a < r < b$$

l'équation devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) \operatorname{cth} \lambda h \left\{ J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi \right\} d\lambda = 1$$

Le système trigonométrique $\{\cos m\varphi\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ est linéairement indépendant, alors,

on trouve le système algébrique infini suivant

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \operatorname{cth} \lambda h d\lambda = \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

où δ_{0m} , est le symbole de Kronecker tel que $\delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$

a. 3 Température dans une plaque : 2ème cas :

Les conditions limites de ce problème sont :

$$\Delta T(r, z) = 0$$

$$T|_{z=0} = 0; r < a \text{ et } r > b$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -T_0; a < r < b$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} = 0$$

Procédons comme précédemment on trouve

$$T = \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) T_* d\lambda$$

avec

$$T_* = A \operatorname{Ch} \lambda z + B \operatorname{Sh} \lambda z$$

La condition limite

$$T'_*|_{z=h} = 0 \text{ implique } A \lambda \operatorname{Sh} \lambda z + B \lambda \operatorname{Ch} \lambda z|_{z=h} = A \lambda \operatorname{Sh} \lambda h + B \lambda \operatorname{Ch} \lambda h = 0,$$

$$\text{c'est à dire } B = -A \operatorname{th} \lambda h$$

Ainsi

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) [\operatorname{Ch} \lambda z - \operatorname{th} \lambda h \operatorname{Sh} \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda$$

Les équations intégrales triples correspondantes sont donc

$$\int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad 0 < r < a, \quad r > b$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 A(\lambda) J_0(\lambda r) [\text{th } \lambda h] d\lambda = T_0, \quad a < r < b$$

Pour satisfaire la première équation intégrale on pose

$$\lambda A(\lambda) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n(\lambda)$$

tel que

$$G_n(\lambda) = \lambda [J_{n-1}(\lambda c) J_{n-1}(\lambda d) - J_{n+1}(\lambda c) J_{n+1}(\lambda d)]$$

la deuxième équation donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda G_n(\lambda) J_0(\lambda r) \text{th } \lambda h = 1, \quad a < r < b$$

Utilisons la formule de Gegenbauer suivante

$$J_0(\lambda r) = J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi, \quad a < r < b$$

On obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda \text{th } \lambda h G_n(\lambda) \left\{ J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi \right\} d\lambda = 1$$

Sachant que le système trigonométrique $\{\cos m\varphi\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ est linéairement

indépendant, on obtient en fin le système algébrique infini suivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda \text{th } \lambda h G_n(\lambda) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) d\lambda = \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

La matrice du système n'est pas symétrique, et ce dernier est lentement convergent, afin de le résoudre numériquement effectuons la différence entre les deux équations d'ordre m et $m+2$, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} th \lambda h G_n(\lambda) G_{m+1}(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \delta_{0m+2} = \delta_{0m}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Enfin on obtient le système algébrique infini suivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} th \lambda h G_n(\lambda) G_m(\lambda) d\lambda = \delta_{1m}, m = 1, 2, \dots$$

La matrice du système est maintenant symétrique

on peut aussi écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n A_{nm} = \delta_{1m}$$

avec

$$A_{nm} = \int_0^{\infty} th \lambda h G_n(\lambda) G_m(\lambda) d\lambda$$

Sachant que

$$G_m(\lambda) G_n(\lambda) = \lambda^2 [J_{m-1}(\lambda c) J_{m-1}(\lambda d) - J_{m+1}(\lambda c) J_{m+1}(\lambda d)] [J_{n-1}(\lambda c) J_{n-1}(\lambda d) - J_{n+1}(\lambda c) J_{n+1}(\lambda d)]$$

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - (2n + 1) \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4n^2 - 1}{8x} \sin\left(x - (2n + 1) \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], x \rightarrow \infty$$

$$J_n(x) J_n(y) = \frac{2}{\pi \sqrt{xy}} \left\{ \left[\cos \left(x - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) - \frac{4n^2-1}{8x} \sin \left(x - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[\cos \left(y - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) - \frac{4n^2-1}{8y} \sin \left(y - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) \right] + O \left(\frac{1}{x^2} \right) \right\}$$

Or,

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

alors

$$2 \cos \left(x - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(y - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) = \cos(y-x) + \cos \left(x+y - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right)$$

Sachant que

$$2 \sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$$

on trouve

$$2 \sin \left(x - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(y - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right) = \sin(x-y) + \sin \left(x+y - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right)$$

Par suite,

$$J_n(x) J_n(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{xy}} \left\{ \cos(x-y) + \cos \left(x+y - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right) - \frac{4n^2-1}{8x} \left[\frac{1}{x} \left[\sin(x-y) + \sin \left(x+y - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{1}{y} \left[\sin(y-x) + \sin \left(x+y - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right) \right] \right] + O \left(\frac{1}{x^2} \right) \right\}$$

Remarquons aussi que

$$\cos\left(x + y - (2m + 1)\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x + y - (2m + 3)\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

car
$$(2m + 3)\frac{\pi}{2} = (2m - 1 + 4)\frac{\pi}{2} = (2m - 1)\frac{\pi}{2} + 2\pi$$

et que

$$\begin{aligned} \sin\left(x + y - (2m - 1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(x + y - (2m + 3)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + y + \frac{\pi}{2} - m\pi\right) \\ &= (-1)^m \sin\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m \cos(x + y) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x} \left[\sin(x - y) + \sin\left(x + y - (2m - 1)\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{y} \left[-\sin(x - y) + \sin\left(x + y - (2m - 1)\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \sin(x - y) \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right] + (-1)^m \cos(x + y) \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] \\ &= \frac{1}{xy} \{ (y - x) \sin(x - y) + (-1)^m (x + y) \cos(x + y) \} \end{aligned}$$

De ce fait on a

$$\begin{aligned} &J_{m-1}(x) J_{m-1}(y) - J_{m+1}(x) J_{m+1}(y) = \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{xy}} \left\{ \left[\frac{4(m+1)^2 - 1}{8} - \frac{4(m-1)^2 - 1}{8} \right] \frac{1}{xy} [(y-x) \sin(x-y) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^m (x+y) \cos(x+y)] + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right\} \\ &= \frac{2m}{\pi (xy)^{3/2}} [- (x-y) \sin(x-y) + (-1)^m (x+y) \cos(x+y)] + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Posons maintenant : $x = \lambda c$, $y = \lambda d$, avec

$$c + d = b; c - d = a$$

$$\Rightarrow x - y = \lambda a; x + y = \lambda b$$

La dernière équation devient

$$\begin{aligned} J_{m-1}(x) J_{m-1}(y) - J_{m+1}(x) J_{m+1}(y) \\ &= \frac{2m}{\pi \lambda^3 (c d)^{3/2}} [-\lambda a \sin \lambda a + (-1)^m \lambda b \cos \lambda b] + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{2m}{\pi \lambda^2 (c d)^{3/2}} [-a \sin \lambda a + (-1)^m b \cos \lambda b] + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} [-a \sin \lambda a + (-1)^m b \cos \lambda b] [-a \sin \lambda a + (-1)^n b \cos \lambda b] = \\ = a^2 \sin^2 \lambda a + (-1)^{m+n} b^2 \cos^2 \lambda b - [(-1)^m + (-1)^n] a b \sin \lambda a \cos \lambda b \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} G_m(\lambda) G_n(\lambda) = \frac{4 m n}{\pi^2 (c d)^3} \frac{1}{\lambda^2} \{ a^2 \sin^2 \lambda a + (-1)^{m+n} b^2 \cos^2 \lambda b \\ - [(-1)^m + (-1)^n] a b \sin \lambda a \cos \lambda b \} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \end{aligned}$$

Ce qui permet de trouver l'approximation de l'intégrale

$$\begin{aligned} A'_{mn} = \int_{\lambda_0}^{\infty} G_m(\lambda) G_n(\lambda) d\lambda \approx \\ \approx \frac{4 m n}{\pi^2 (c d)^3} \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \{ a^2 \sin^2 \lambda a + (-1)^{m+n} b^2 \cos^2 \lambda b \\ - [(-1)^m + (-1)^n] a b \sin \lambda a \cos \lambda b \} d\lambda \end{aligned}$$

Dans ces transformations nous aurons calculé les trois intégrales comme suit:

$$a) \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda a}{\lambda^2} d\lambda$$

comme $2 \sin^2 \lambda a = 1 - \cos 2 \lambda a$, alors

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1 - \cos 2 \lambda a}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{1}{\lambda} \Big|_{\lambda_0}^{\infty} - \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos 2 \lambda a}{\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{\cos 2 \lambda_0 a}{\lambda_0} + 2a \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin 2 \lambda a}{\lambda} d\lambda$$

Ainsi, à l'aide du changement de variable

$$\cos 2 \lambda a \rightarrow -2 a \sin 2 \lambda a$$

$$-\frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$$

on aura

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1 - \cos 2 \lambda a}{\lambda^2} d\lambda = 2 \frac{\sin^2 \lambda_0 a}{\lambda_0} - 2a \operatorname{Si}(2 \lambda_0 a)$$

où Si et Ci sont les sinus et cosinus intégrales définies par

$$\operatorname{Si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt; \quad \operatorname{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

Sachant

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin 2 \lambda a}{\lambda} d\lambda = \int_{2\lambda_0 a}^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau; \quad \tau = 2 \lambda a \Rightarrow d\lambda = \frac{d\tau}{2a}$$

c'est à dire

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin 2 \lambda a}{\lambda} d\lambda = -\operatorname{Si}(2 \lambda_0 a)$$

$$b) \frac{\cos^2 \lambda b}{\lambda^2}$$

sachant que

$$2 \cos^2 \lambda b = 1 + \cos 2 \lambda b$$

on trouve

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1 + \cos 2 \lambda b}{\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{\cos 2 \lambda_0 b}{\lambda_0} + 2b \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin 2 \lambda b}{\lambda} d\lambda = 2 \frac{\cos^2 \lambda_0 b}{\lambda_0} - 2b \operatorname{Si}(2 \lambda_0 b)$$

$$c) \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda b}{\lambda^2} d\lambda$$

la relation

$$2 \sin \lambda a \cos \lambda b = \sin \lambda(a - b) + \sin \lambda(a + b)$$

$$\text{donne } \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin \lambda(a - b) + \sin \lambda(a + b)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{\lambda_0} \sin \lambda_0 a \cos \lambda_0 b - c \operatorname{Ci}(2 \lambda_0 c) + d \operatorname{Ci}(2 \lambda_0 d)$$

$$= -\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{Ci}\left(2 \lambda_0 \left(\frac{a+b}{2}\right)\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \operatorname{Ci}\left(2 \lambda_0 \left(\frac{b-a}{2}\right)\right) = -c \operatorname{Ci}(2 \lambda_0 c) + d \operatorname{Ci}(2 \lambda_0 d)$$

avec

$$c = \frac{a+b}{2}; d = \frac{b-a}{2}$$

car

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\sin \lambda_0 x}{\lambda_0} + x \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \frac{\sin \lambda_0 x}{\lambda_0} - x \operatorname{Ci}\left(2 \lambda_0 \frac{x}{2}\right)$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned}
 A'_{mn} &= \int_{\lambda_0}^{\infty} G_m(\lambda) G_n(\lambda) d\lambda = \\
 &= \frac{4 m n}{\pi^2 (cd)^3} \left[a^2 \left(\frac{\sin^2 \lambda_0 a}{\lambda_0} - a \operatorname{Si}(2 \lambda_0 a) \right) \right. \\
 &\quad + (-1)^{m+n} b^2 \left(\frac{\cos^2 \lambda_0 b}{\lambda_0} + b \operatorname{Si}(2 \lambda_0 b) \right) \\
 &\quad \left. - [(-1)^m + (-1)^n] ab \left(\frac{\sin \lambda_0 a \cos \lambda_0 b}{\lambda_0} - c \operatorname{Ci}(2 \lambda_0 c) + d \operatorname{Ci}(2 \lambda_0 d) \right) \right]
 \end{aligned}$$

VI. 2.2. Problème de poinçonnement dans un demi - espace [7] :

Il s'agit d'un problème de poinçonnement d'un demi-espace par un poinçon annulaire

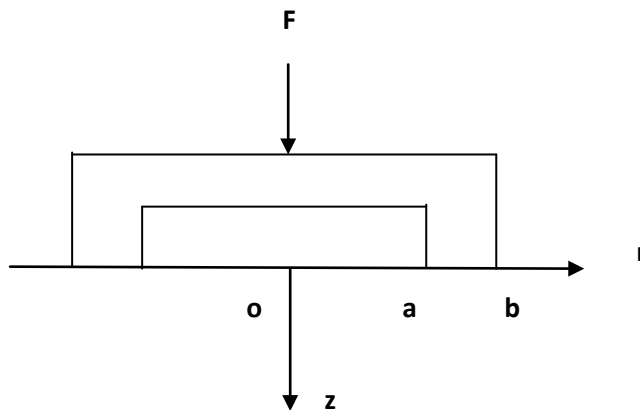


Figure I.6. Problème de poinçonnement dans un demi-espace

Les conditions limites de ce type de problème sont

$$\sigma_z|_{z=0} = 0, \quad r < a, \quad r > b$$

$$U_z|_{z=0} = -\delta, \quad a < r < b$$

$$\tau_{rz}|_{z=0} = 0, r > 0$$

Par suite, les équations intégrales triples sont :

$$\int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r < a, \quad r > b$$

$$\int_0^{\infty} B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{G \delta}{1 - \nu}, \quad a < r < b$$

Les déplacements et contraintes sont donnés par

$$2G U_r = \int_0^{\infty} [(1 - 2\nu) - \lambda z] B(\lambda) J_1(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

$$2G U_r|_{z=0} = (1 - 2\nu) \int_0^{\infty} B(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$2G U_z = - \int_0^{\infty} [2(1 - \nu) + \lambda z] B(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

$$2G U_z|_{z=0} = -2(1 - \nu) \int_0^{\infty} B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\sigma_z = \int_0^{\infty} (1 + \lambda z) \lambda B(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

$$\sigma_z|_{z=0} = \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

où $B(\lambda)$ est la fonction auxiliaire qui doit satisfaire les équations intégrales triples

Elle s'obtient par

$$B(\lambda) = \frac{G\delta}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_n(\lambda c) J_n(\lambda d)$$

Identiquement aux exemples précédents nous obtenons le système algébrique infini suivant

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) d\lambda = \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

où δ_{0m} est le delta de Kronecker, tel que

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

Les déplacements et les contraintes en surface sont :

$$\frac{U_r|_{z=0}}{\delta} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n I_n$$

$$\frac{U_z|_{z=0}}{\delta} = - \sum_{n=0}^{\infty} b_n I_{0n}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=0} &= \frac{G\delta}{1-\nu} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda = \frac{G\delta}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\cos n\varphi}{\pi c d \sin\varphi} \\ &= \frac{G\delta}{(1-\nu)\pi c d} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\cos n\varphi}{\sin\varphi}, \quad a < r < b \end{aligned}$$

où

$$I_{kn} = \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda, \quad k = 0, 1$$

VI.2. 3. Poinçonnement annulaire sur une couche :

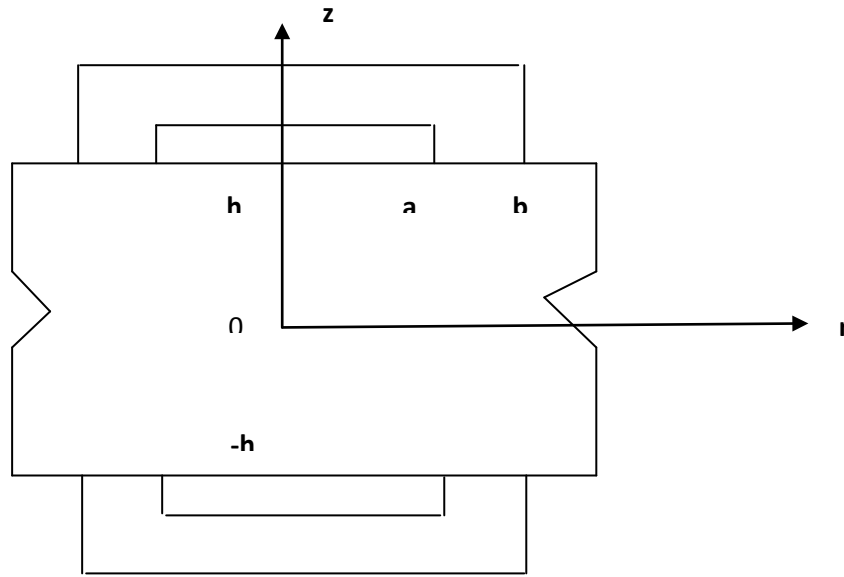


Figure I.7. Poinçonnement annulaire sur une couche

Les équations intégrales triples du problème sont

$$\int_0^{\infty} \lambda C_*(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r < a, \quad r > b$$

$$\int_0^{\infty} C_*(\lambda) \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{2\lambda h + \text{sh} 2\lambda h} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{G \delta}{2(1 - \nu)}, \quad a < r < b$$

On cherche la solution du problème comme suit

$$C_*(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\lambda c) J_n(\lambda d)$$

Ainsi la première équation est satisfaite

la deuxième donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{2\lambda h + \text{sh } 2\lambda h} d\lambda = 1$$

avec

$$b_n = \frac{2(1-\nu)}{G \delta} a_n$$

Posons maintenant

$$F(\lambda) = \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{2\lambda h + \text{sh } 2\lambda h}$$

la dernière équation devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(1-\nu)}{G \delta} a_n \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{2\lambda h + \text{sh } 2\lambda h} d\lambda = 1$$

Moyennant la formule de Gegenbauer suivante

$$J_0(\lambda r) = J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi, \quad a < r < b$$

la dernière équation devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} J_n(\lambda) J_n(\lambda d) F(\lambda) \left\{ J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi \right\} d\lambda = 1$$

Sachant que le système trigonométrique $\{\cos m\varphi\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ est linéairement

indépendant, alors, on trouve le système algébrique infini suivant

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{2\lambda h + \text{sh } 2\lambda h} d\lambda = \delta_{0m}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Par suite

$$C(\lambda) = \frac{2 \text{sh } \lambda h}{2\lambda h + \text{sh } 2\lambda h} C_*(\lambda) = \frac{G \delta}{1 - \nu} \frac{\text{sh } \lambda h}{2\lambda h + \text{sh } 2\lambda h} \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_n(\lambda c) J_n(\lambda d)$$

$$2 G U_z|_{z=h} = -2 (1 - \nu) \int_0^{\infty} \text{sh } \lambda h C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

Ce qui donne

$$\frac{U_z|_{z=h}}{\delta} = - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{2\lambda h + \text{sh } 2\lambda h} J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda$$

$$\frac{U_z|_{z=h}}{\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left\{ \int_0^{\infty} [1 - K(\lambda h)] J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda - \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda \right\}$$

avec

$$K(\lambda h) = \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{2\lambda h + \text{sh } 2\lambda h}$$

L'intégrale du produit des fonctions de Bessel se calcule par

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) d\lambda \\ &= \int_0^{\lambda_0} J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{\infty} J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) d\lambda \end{aligned}$$

La première partie de cette intégrale se calcule par la méthode de Simpson et la deuxième se calcule par son équivalent.

Sachant que

$$J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \approx \frac{2}{\lambda \pi \sqrt{cd}} \cos\left(\lambda c - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\lambda d - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

Or

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

comme

$$a = c - d, b = c + d$$

ce qui donne

$$2c = a + b, 2d = b - a$$

Cette dernière équation devient

$$J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) = \frac{2}{\lambda \pi \sqrt{cd}} \left[\cos\left(\lambda(c + d) - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\lambda(c - d)) \right]$$

avec

$$\cos\left(\lambda(c + d) - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \lambda b \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m \sin \lambda b$$

Ainsi on obtient

$$J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) = \frac{2}{\lambda \pi \sqrt{cd}} [(-1)^m \sin \lambda b + \cos \lambda a]$$

Par conséquent nous avons :

$$\begin{aligned} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) &\approx \frac{4}{\lambda^2 \pi^2 cd} [\cos \lambda a + (-1)^m \sin \lambda b] [\cos \lambda a + (-1)^n \sin \lambda b] \\ &= \frac{4}{\lambda^2 \pi^2 cd} \{ \cos^2 \lambda a \\ &\quad + [(-1)^m + (-1)^n] \cos \lambda a \sin \lambda b + (-1)^{m+n} \sin^2 \lambda b \} \end{aligned}$$

Utilisons les équivalents suivants

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos^2 \lambda a}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\cos^2 \lambda_0 a}{\lambda_0} + a \operatorname{Si}(2 \lambda_0 a)$$

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda b}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\sin^2 \lambda_0 b}{\lambda_0} - b \operatorname{Si}(2 \lambda_0 b)$$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos \lambda a \sin \lambda b}{\lambda^2} d\lambda &= \\ &= \frac{\cos \lambda_0 a \sin \lambda_0 b}{\lambda_0} - \frac{1}{2} [(b+a) \operatorname{Ci}(\lambda_0(b+a)) + (b-a) \operatorname{Ci}(\lambda_0(b-a))] \end{aligned}$$

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\cos \lambda a \sin \lambda b}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\cos \lambda_0 a \sin \lambda_0 b}{\lambda_0} - c \operatorname{Ci}(2\lambda_0 c) - d \operatorname{Ci}(2\lambda_0 d)$$

Enfin on obtient l'équivalent suivant

$$A'_{mn} = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{4}{\lambda^2 \pi^2 cd} \{ \cos^2 \lambda a + [(-1)^m + (-1)^n] \cos \lambda a \sin \lambda b + (-1)^{m+n} \sin^2 \lambda b \} d\lambda$$

$$\begin{aligned} A'_{mn} &= \frac{1}{\pi^2 cd} \left\{ \frac{\cos^2 \lambda_0 a}{\lambda_0} + a \operatorname{Si}(2 \lambda_0 a) + (-1)^{m+n} \left[\frac{\sin^2 \lambda_0 b}{\lambda_0} - b \operatorname{Si}(2 \lambda_0 b) \right] \right. \\ &\quad \left. + [(-1)^m + (-1)^n] \left[\frac{\cos \lambda_0 a \sin \lambda_0 b}{\lambda_0} - c \operatorname{Ci}(2\lambda_0 c) - d \operatorname{Ci}(2\lambda_0 d) \right] \right\} \end{aligned}$$

CHAPITRE II

Théorie de l'élasticité linéaire

I. Introduction :

Les physiciens et les ingénieurs ont tenté de mettre en évidence le comportement de la matière, à tel ou tel sollicitation pour ce faire ils ont établi des lois régissant ce comportement.

La théorie de l'élasticité concerne les déformations « élastique » du solide, c'est-à-dire les déformations réversibles faibles, elle étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un solide soumis à des forces extérieures.

II. Quelques hypothèses fondamentales :

Comme la théorie de l'élasticité, la mécanique des matériaux est basée sur plusieurs hypothèses fondamentales qui sont énumérés ci-dessous :

II.1. Hypothèse de continuité [18] :

Les atomes sont les constituants principaux des solides dans lesquels la masse est répartie de façon uniforme. En effet, elle est presque entièrement concentrée dans les noyaux qui ne représentent qu'une proportion infime du volume total. De plus, les noyaux eux-mêmes sont de nature complexe.

La théorie de l'élasticité et de la mécanique des structures se basent sur l'hypothèse d'un milieu continu, constitué de matière répartie uniformément en tous points, et cela pour des raisons suivantes :

a) si on tient compte de la vraie constitution de la matière, on aboutit à des lois totalement inutilisables à l'échelle macroscopique.

b) les résultats obtenus à partir de l'hypothèse de continuité sont plus précis que ceux réalisés avec des mesures plus fines, bien évidemment cela est possible si la solution mathématique du problème existe.

II.2. Hypothèse d'homogénéité [18] :

Dans cette hypothèse nous admettrons que la matière est homogène, c'est-à-dire que ses propriétés mécaniques sont les mêmes en tous points du solide considéré. Cette hypothèse est généralement tout à fait suffisante. Dans le cas contraire, on peut découper le solide en plusieurs parties considérées comme homogènes et étudier l'interaction de ces parties entre elles. Par exemple, les matériaux composites (matrices/fibres/stratifiés).

Cependant, il arrive exceptionnellement que l'on soit obligé de prendre en considération une variation continue des propriétés mécaniques et abandonner ainsi l'hypothèse d'homogénéité.

On peut considérer l'exemple d'une pièce métallique dont il existe un gradient de température en son sein, ce qui entraîne des modifications importantes de certaines propriétés (tel que le module d'élasticité).

II.3. Hypothèse d'isotropie :

Un matériau est dit isotrope, si en un point il possède les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions.

Mis à part certains produits laminés, pour les métaux cette condition est satisfaite. Par contre, pour les matériaux composites stratifiés, l'hypothèse d'isotropie s'écarte trop de la réalité.

II.4. Hypothèse de proportionnalité :

La mécanique des structures est basée sur la loi énoncée par Hooke découverte en 1660 qui ne fut publiée qu'en 1978. Elle traduit la proportionnalité qui existe entre les contraintes et les

déformations. C'est la base de toute la théorie de l'élasticité, et dont on peut donner l'expression générale suivante :

Dans un solide continu, les déformations sont liées en tous points aux contraintes par des relations linéaires et homogènes.

II.5. Hypothèse des petites déformations :

L'expérience montre que dans les limites normales d'utilisation, les matériaux subissent des déformations relativement faibles par rapport aux dimensions du solide. En conséquence, les conditions d'équilibre établies par la statique pour les corps parfaits indéformables sont applicables. Cela revient à dire que les déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures.

Les matériaux isotropes sont caractérisés par deux modules élastiques indépendants.

III.1. Elasticité classique :

L'élasticité classique est l'étude du comportement des solides déformables élastiques isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire.

On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le couple d'hypothèses petits déplacements et petites déformations est souvent appelé : Hypothèse des petites perturbations. Ces hypothèses ont pour conséquence de rendre linéaire les équations différentielles de l'élasticité.

III.2. Elasticité axisymétrique :

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique est symétrique de révolution autour d'un axe, et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution autour de cet axe.

Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Si on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphérique autour de l'axe d'axisymétrie, les dérivées des composantes sur la base naturelle par rapport à θ sont nulles. On est donc ramené à un problème à deux variables (r, z) .

Il convient de bien noter que bien que le problème soit à deux variables, ce n'est pas un problème d'élasticité plane, car ni le tenseur des contraintes, ni le tenseur des déformations ne sont des plans en général.

III.3 Les modules élastiques :

III.3.1 Module d'Young et coefficient de Poisson :

Vers 1800 Young, s'intéresse à l'élasticité linéaire. En procédant à des essais de traction uniaxiale (Figure II. 1), il constate que la déformation ε_{11} mesurée selon l'axe de traction est proportionnelle à la contrainte σ appliquée [12], il définit le coefficient de proportionnalité

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{11}}$$

Poisson complète l'analyse en constatant que l'allongement dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires, il définit le coefficient de proportionnalité.

Le module d'Young E a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa . Il représente la contrainte qu'il faudrait appliquer pour obtenir une déformation unité soit doubler la longueur initiale. Aucun matériau ne correspond linéairement à une telle contrainte.

Le coefficient de Poisson ν est un nombre adimensionnelle sa valeur est comprise entre 0 et 1/2, à l'exception des élastomères comme le caoutchouc dont le coefficient de Poisson

avoisine 1/2, la plupart des matériaux isotropes ont un coefficient de Poisson compris entre 0,25 et 0,35.

Cependant il y a des matériaux dont le coefficient de Poisson est supérieur à 0,5, ce sont les matériaux structurellement complexes. C'est le cas des granulaires, des poreux, des textiles et de nombreux tissus biologiques comme les muscles qui gonflent fortement lorsqu'on les contracte avec un coefficient de Poisson $\nu = 1$. A l'opposé le coefficient de Poisson du liège $\nu = 0$. Un bouchon ne s'allonge pas quand on l'étreint dans un bouche bouteille.

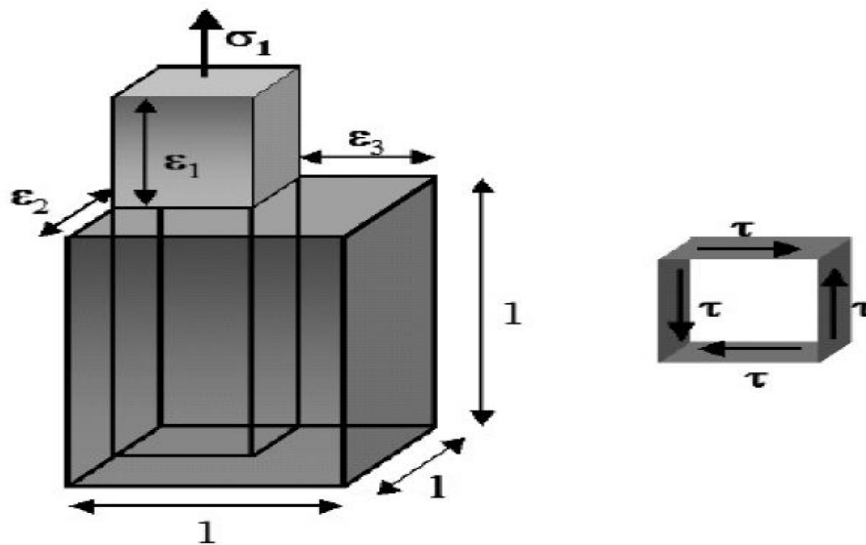


Figure II .1: Modules de Young et de Poisson

III.3.1.1 Unité du Module d'Young et de coefficient de Poisson :

Le module de Young est homogène à une contrainte. L'unité internationale est le Pascal (Pa), il peut aussi être exprimé en méga pascal (Mpa) , ou en newton par millimètre carré (N/mm^2), l'orsque ce module prend des valeurs élevées

Un matériau dont le module de Young est très élevé est dit rigide. L'acier, l'iridium, le diamant, sont des matériaux très rigides, l'aluminium et le plomb le sont moins, les matières

plastiques et organiques sont généralement peu rigides. Il ne faut cependant pas confondre élasticité et rigidité puisque la rigidité d'une poutre par exemple dépend de son module de Young mais aussi du moment d'inertie de sa section

III.3.1.2 Mesure du module de Young :

Le plus simple reste bien sûr de réaliser un essai de traction, et connaissant les dimensions de l'éprouvette, d'en déduire le module de Young E . Cependant, il est difficile de réaliser cette mesure avec une bonne précision.

C'est pourquoi, on préfère, lorsque cela est possible, de déduire le module de Young de la fréquence propre de vibration d'une tige de matériau maintenue à ses extrémités et chargée en son milieu.

On peut aussi mesurer la vitesse du son dans le matériau de masse volumique ρ dont on désire en déduire le module de Young sachant qu'on a la relation suivante :

$$V_{\text{son}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Cependant, cette loi est approchée, la vitesse du son dépend aussi du coefficient de Poisson.

Le module de Young augmente avec la vitesse de déformation.

III.3.2 Module de coulomb :

Coulomb a procédé à des essais de torsions (cisaillement pur) et constate que le glissement γ est proportionnel au cisaillement τ appliqué (Figure II. 2). Il définit le coefficient de proportionnalité $G = \frac{\gamma}{\tau}$, le module de Coulomb G a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa.

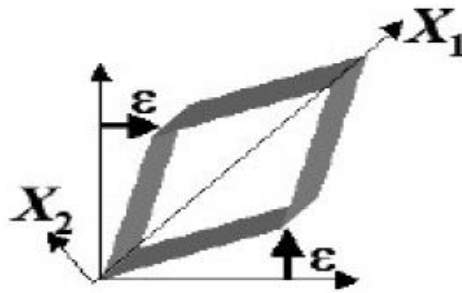


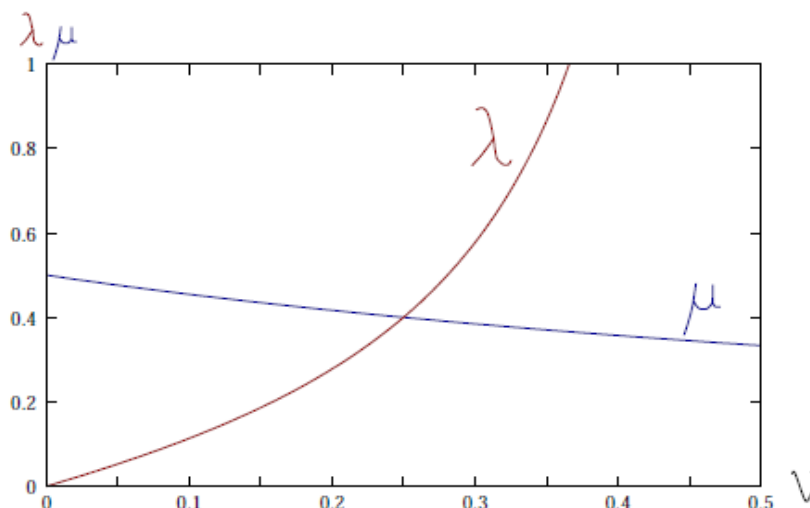
Figure II .2: Module de coulomb

III.3.3 Module de Lamé :

Le physicien Lamé a introduit le couple de modules (λ, μ) (voir figure II- 3) dans une formule tels que l'énergie libre F en fonction des invariants du tenseur de déformation est donnée sous forme :

$$F = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2(\bar{\epsilon}) + \mu \text{Tr}(\bar{\epsilon}^2) \quad (2.1)$$

Avec λ et μ : modules de Lamé ayant une dimension d'une contrainte

Figure II .3: Évolution de λ et μ lorsque ν varie entre 0 et 0.5, pour un E donné (210 GPa)

III.3.4 Module de compressibilité et de cisaillement :

La déformation se décomposant en un changement de volume à forme constante et un changement de forme à volume constant, ces deux opérations seront caractérisées respectivement par les modules K et G.

Le changement de volume à forme constante est une déformation isotrope, le module K établit la relation entre la contrainte moyenne σ_m et la variation relative de volume résultante, elle est donnée par :

$$\sigma_m = K\theta = 3 K \varepsilon_m$$

avec

$$\theta = \frac{dV}{V} = 3 \varepsilon_m$$

Dans le cas d'une compression hydrostatique dP laquelle lui est associée la valeur moyenne $\sigma_m = -dP$, la relation $\sigma_m = K\theta$ s'écrit $K = -V \frac{dP}{dV}$. Le module de compressibilité K, dont la dimension est celle d'une contrainte, n'est autre que l'inverse du coefficient de compressibilité thermodynamique.

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$$

Le changement de forme à volume constant est une déformation qui ne fait intervenir que les déviateurs des contraintes et des déformations caractérisés par les : contrainte σ_d et déformation ε_d déviatorique moyenne.

On définit le module de cisaillement G (en fonction des deux grandeurs précédentes), dont la dimension est celle d'une contrainte, par la relation suivante :

$$G = \frac{\sigma_d}{2 \varepsilon_d}$$

IV. Equations de l'élasticité :

IV.1 Loi de Hooke [13] :

Le physicien britannique Thomas Young (1773-1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant (figure II.4), tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte.

La loi d'élasticité est la loi de Hooke qui est donnée par :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.2)$$

où σ : est la contrainte (N/m^2),

E : est le module de Young (N/m^2),

ε : est l'allongement relatif (adimensionnel).

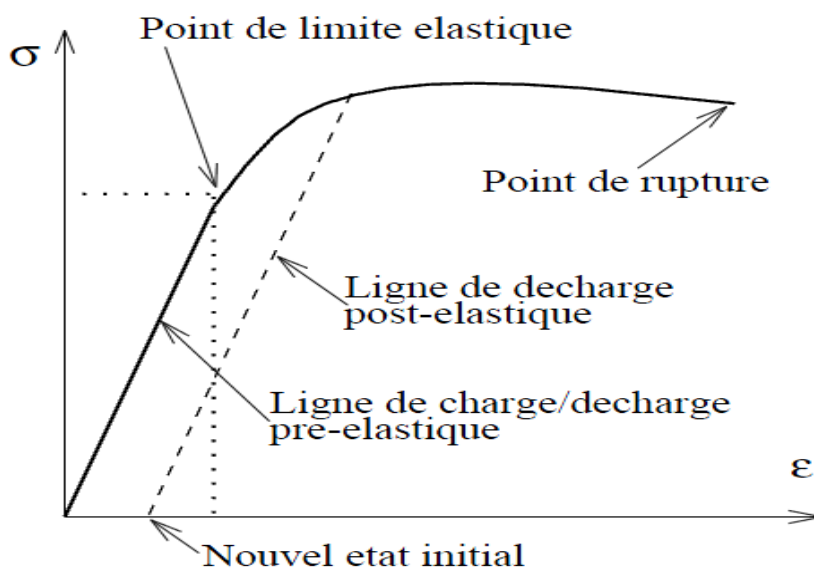


Figure II .4: Diagramme contrainte-déformation

Cette loi se généralise à l'étude des structures élastiques. Si σ_{ij} sont les six composantes du tenseur des contraintes et si ε_{ij} sont les six composantes du tenseur des déformations, la loi de Hooke se donne ici en notation indicielle par:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.3)$$

Avec : δ_{ij} : Indice de Kronecker.

Avec le module de Young et le coefficient de Poisson, il existe une autre forme inverse de la loi faisant apparaître les deux coefficients de Lamé λ et μ .

Par la loi de Hooke on aura

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

avec

μ , premier coefficient de Lamé ou module de rigidité, il est donné par

$$\mu = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Le deuxième coefficient de Lamé λ , est égale à

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

alors que le module de Young E , est donné par

$$E = \frac{\nu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \nu}$$

Le coefficient de poisson ν , s'exprime en fonction de λ par

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \nu)}$$

La loi de Hooke générale pour les matériaux anisotropes est une relation linéaire entre la matrice des contraintes et la matrice des déformations faisant intervenir 21 coefficients.

Note: Il ne faut pas confondre rigidité et raideur. La rigidité caractérise les matériaux, la raideur concerne les produits et les constructions. Une pièce mécanique massive en matière plastique peut être beaucoup plus raide qu'un ressort en acier.

Pour un milieu isotrope, la loi de Hooke nous permet d'obtenir les relations suivantes :

a) Les relations contrainte-déformation :

$$\sigma_r = \frac{E}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} [(\nu - 1)\varepsilon_r - \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)] \quad (2.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} [(\nu - 1)\varepsilon_\theta - \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)] \quad (2.6)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} [(\nu - 1)\varepsilon_z - \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)] \quad (2.7)$$

b) Les relations déformation-déplacement :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{zr} = \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_r}{r}$$

c) **Les contraintes tangentielles :**

$$\tau_{r\theta} = G \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right)$$

$$\tau_{z\theta} = G \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)$$

En effectuant les remplacements des relations déformations-déplacement dans celles des contrainte-déformation, on obtient les expressions des contraintes.

- **Contrainte normale :**

La contrainte normale est :

$$\sigma_z = \frac{2G}{(2\nu - 1)} \left[(\nu - 1) \frac{\partial U_z}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) \right]$$

$$= \frac{2G(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} \frac{U_r}{r}$$

- **Contrainte radiale :**

$$\sigma_r = \frac{2G}{(2\nu - 1)} \left[(\nu - 1) \frac{\partial U_r}{\partial r} - \nu \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) \right]$$

$$= \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2G\nu}{(2\nu-1)} \frac{\partial U_z}{\partial z} + 2G\nu \frac{U_r}{r}$$

- **Contrainte orthogonale :**

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{2G}{(2\nu-1)} \left[(\nu-1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) - \nu \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{U_r}{r} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{aligned}$$

V. Equations fondamentales de la théorie d'élasticité :

L'équation de Navier régit les problèmes de la théorie de l'élasticité classique. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'équation de Navier en petites déformations, et dans les directions r, θ , et z , a pour déplacement $U(r, \theta, z), V(r, \theta, z)$, et $W(r, \theta, z)$.

$$\nabla^2 U_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 U_\theta + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 U_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

L'expression de e est donnée par :

$$e = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

et ∇^2 , est le Laplacien qui s'exprime par :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

La résolution de ces équations d'équilibre est faite généralement par la transformée de Hankel, mais peuvent aussi être résolus par d'autres méthodes à savoir les fonctions de contraintes de Love, de Boussinesq, ou de Neuber-Papkovich.

V. 1. Fonction de contrainte de Love :

La fonction de contrainte de Love vérifie l'équation :

$$\nabla^2 \varphi(r, z) = 0$$

où ∇ , est le Laplacien

Les déplacements sont donnés par la résolution du système d'équilibre, ainsi nous aurons :

$$2GU_r = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}$$

$$2GU_z = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2(1 - \nu)\Delta\varphi$$

Ainsi en effectuant un remplacement de ces déplacements dans les expressions des contraintes données par la loi de Hooke, on aura :

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial r} [(2 - \nu)\Delta\varphi] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} [(1 - \nu)\Delta\varphi] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

V. 2. Les fonctions de contrainte de Boussinesq :

En absence des forces volumiques, la résolution du système d'équilibre s'obtient à l'aide de deux fonctions harmoniques.

$$\begin{cases} 2GU_r = -(1-2\nu)\frac{\partial F}{\partial r} - 2(1-\nu)\frac{\partial G}{\partial r} \\ 2GU_z = -(1-2\nu)\frac{\partial F}{\partial z} + 2(1-\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rG) \end{cases} \quad (2.12)$$

où F et G sont des fonctions auxiliaires.

En substituant ces expressions dans le système d'équilibre en déplacements, on trouve :

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z}\right) = 0 \quad (2.13)$$

$$\Delta\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rG)\right] = 0 \quad (2.14)$$

Choisissons maintenant les fonctions F et G tel que, l'équation suivante soit satisfaite :

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (2.15)$$

Posons

$$2\Psi = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rG) = 0 \quad (2.16)$$

Cette fonction est alors harmonique en tenant compte des deux équations (2.15) et (2.16), on trouve :

$$2\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial G}{\partial z}\right) = 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \Delta F \quad (2.17)$$

La solution générale de l'équation (2.17) est donnée par :

$$F = z\Psi + \varphi$$

où φ , est harmonique.

Puisque :

$$\Delta(z\Psi) = z \Delta\Psi + \Psi\Delta z + 2 \operatorname{grad} z \operatorname{grad} \Psi \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

Par suite, on a :

$$\begin{cases} 2GU_r = -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial r} - 2(1-\nu) \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r} \\ 2GU_z = -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial z} + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial F}{\partial z} - 4(1-\nu)\Psi \right] \end{cases}$$

Ainsi l'expression des contraintes nous donne :

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial r} + z \frac{\partial \Psi}{r \partial r} - 2\nu \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

VI. Concentration de contrainte :

VI. 1. Différents modes de sollicitations :

Les travaux d'Irwin sur la mécanique de la rupture ont permis de définir les trois modes de chargement ou de déformation d'une fissure, ils sont illustrés sur la figure II. 5.

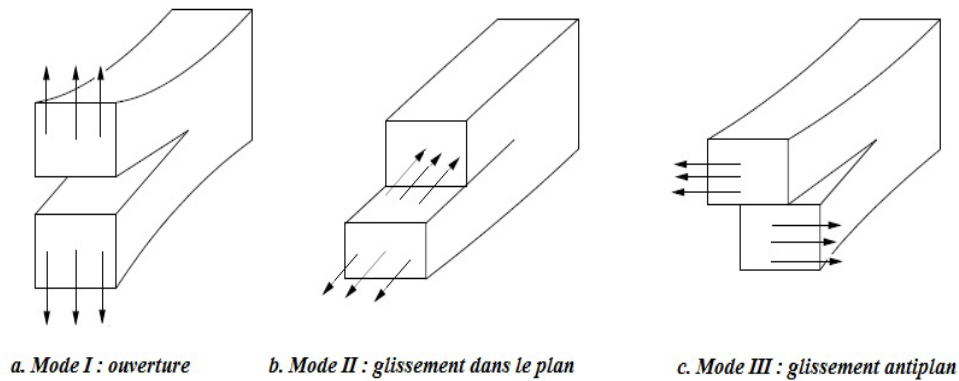


Figure II .5: Différents modes de chargement d'une fissure

Mode I : Mode d'ouverture où les lèvres de la fissure s'écartent l'une de l'autre selon la direction y , qui apparaît lors d'un chargement de tension σ_y . Le facteur d'intensité de contrainte du mode I est défini par :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y (r, 0, 0) \quad (2.18)$$

Dans le cas d'une compression, ce facteur ne peut être négatif car cela signifierait que les lèvres se pénètrent et il faut alors tenir compte du contact entre les lèvres.

Mode II : Mode de glissement où les lèvres glissent l'une sur l'autre selon la direction perpendiculaire au front de fissure x , qui apparaît lors d'un cisaillement τ_{xy} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode II défini par :

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0, 0) \quad (2.19)$$

Mode III : Mode de déchirement où les lèvres se déplacent l'une par rapport à l'autre selon la direction parallèle au front de fissure z , qui apparaît lors d'un cisaillement τ_{yz} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode III est défini par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \pi r} \tau_{yz}(r, 0, 0) \quad (2.20)$$

CHAPITRE III

Résultats et discussions

I - INTRODUCTION :

Dans ce chapitre nous allons définir le problème, et nous allons donner la méthode de résolution et discussion.

II . Formulation du problème :

On étudie le problème de déformation axisymétrique d'un milieu élastique attaché à une base rigide (encastrée) et couvert par une plaque de métal ayant un trou annulaire sur lequel on applique une force de traction.

Le problème est modélisé par le système d'équations aux dérivés partiels appelé système d'équilibre « système de Lamé », avec conditions aux limites mixtes.

Par la méthode de la transformation intégrale de Hankel et à l'aide des fonctions de contraintes de Boussinesq, ce problème se ramène à un système d'équations intégrales triple.

Par l'introduction d'une fonction auxiliaire on obtient un système couplé d'équations intégrales duales. En tenant compte de la formule de décomposition de Gegenbauer, on transforme ces dernières équations à un système algébrique infini dont la solution s'obtient par la méthode de réduction. Ce qui permet la détermination des contraintes et des déplacements ainsi que les facteurs d'intensité de contraintes du problème proposé.

II . 1 . Formules principales :

Dans notre étude, on utilise un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Et on note par : U_r , et U_z les déplacements suivant r et z respectivement, étant donné le problème est axisymétrique le déplacement suivant θ , U_θ est supposé nul .

A l'aide des fonctions de contraintes de Boussinesq, les déplacements d'un milieu élastique sont donnés en fonctions de φ_0 et φ_3 par :

$$2 G U_r = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}$$

$$2 G U_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3 - 4\nu) \varphi_3 \quad (2.1)$$

avec ν est le coefficient de poisson et, G le module de cisaillement du milieu élastique.

En utilisant la loi de Hooke en coordonnées cylindrique nous avons :

$$\sigma_z = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left(\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + (1 - \nu) \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zr} = G \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) \quad (2.2)$$

par le remplacement des expressions de U_r et U_z de (2.1) dans (2.2) nous aurons :

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}$$

$$\tau_{zr} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \quad (2.3)$$

II . 2 . Formulation du problème et sa solution :

On considère un espace élastique infini homogène et isotrope d'épaisseur h , fixé à une base rigide (encasté). Sa surface supérieure est couverte d'une plaque métallique ayant un trou annulaire de rayons intérieur et extérieur a et b respectivement, sur lequel est appliquée une contrainte de traction axisymétrique P_0 ($a < r < b$)

On prendra dans ce qui suit, un acier non allié de construction usuel dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

$$E = 210 \text{ GPa} \quad ; \quad \nu = 0.3 \quad ; \quad Re = 235 \text{ MPa}$$

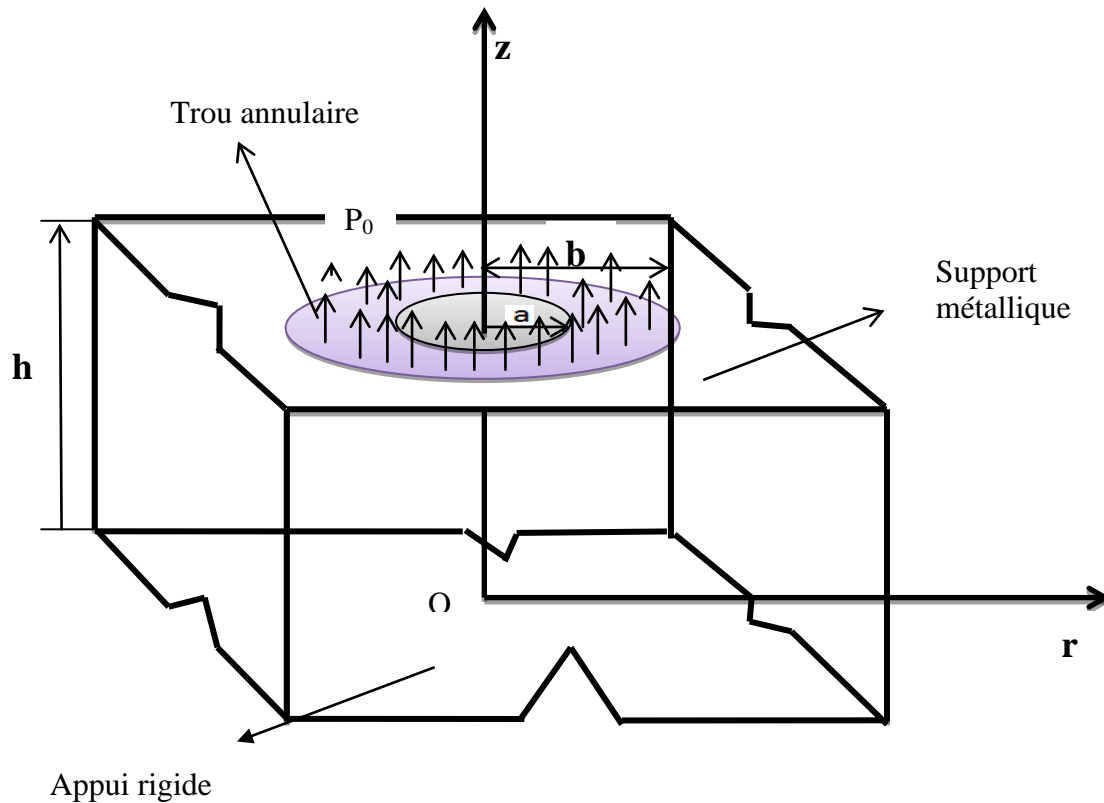


Figure 1 : Plaque élastique ayant un trou annulaire sur le quel est appliqué une force de traction.

En négligeant le frottement avec la plaque métallique, les conditions aux limites du problème sont :

$$\begin{aligned}
 U_r|_{z=0} &= U_z|_{z=0} = 0 \\
 U_z|_{z=h} &= 0, \quad r < a \text{ où } r > b \\
 \tau_{zr}|_{z=h} &= 0, \quad r \geq 0 \\
 \sigma_z|_{z=h} &= P_0, \quad a < r < b
 \end{aligned}$$

Le problème est modélisé par le système d'équations différentiels partiels appelé système de Lamé qui est donné par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases}
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{U_r}{r^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} = 0 \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = 0
 \end{cases} \quad (2.4)$$

Les fonctions appelées fonctions de contraintes de Boussinesq sont les solutions de ce système d'équations :

$$\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_3 = 0 ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

Le système (2.4) est satisfait par ces fonctions harmoniques. En appliquant la transformation de Hankel d'ordre zéro et sa transformation inverse, la solution du système (2.5) est donnée par

$$\varphi_0 = \int_0^{\infty} (A(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z + B(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\varphi_3 = \int_0^{\infty} (C(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z + D(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda$$

avec J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro, et A , B , C et D sont des fonctions de λ à déterminés avec les conditions limites .

De l'équation (2.1) on obtient les déplacements comme suit

$$U_r = -\frac{1}{2G} \int_0^{\infty} \lambda [(A(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z + B(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z) + z(C(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z + D(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z)] J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$U_z = \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} [\lambda (A(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z + B(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z) + z \lambda (C(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z + D(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z) - (3 - 4\nu)(C(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z + D(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z)] J_0(\lambda r) d\lambda$$

les contraintes se calculent par

$$\sigma_z = \int_0^{\infty} [\lambda^2 (A(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z + B(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z) + z \lambda (C(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z + D(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z) - 2(1 - \nu) \lambda (C(\lambda) \operatorname{Sh} \lambda z + D(\lambda) \operatorname{Ch} \lambda z)] J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\tau_{zr} = \int_0^{\infty} [-\lambda^2 (A(\lambda) \text{Sh } \lambda z + B(\lambda) \text{Ch } \lambda z) + z(C(\lambda) \text{Sh } \lambda z + D(\lambda) \text{Ch } \lambda z)] J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$+ (1 - 2\nu)\lambda(C(\lambda) \text{Ch } \lambda z + D(\lambda) \text{Sh } \lambda z) J_1(\lambda r) d\lambda$$

Les coefficients A, B, C et D se calculent avec les conditions aux limites :

$$U_r|_{z=0} = 0 \Rightarrow A(\lambda) = 0$$

l'autre condition

$$U_z|_{z=0} = 0$$

donne

$$\lambda B(\lambda) = (3 - 4\nu)C(\lambda)$$

et

$$\tau_{zr}|_{z=h} = 0$$

Cela implique

$$-\lambda^2 (B(\lambda) \text{Ch } h + h(C(\lambda) \text{Sh } h + D(\lambda) \text{Ch } \lambda h)) + (1 - 2\nu)\lambda(C(\lambda) \text{Ch } \lambda h + D(\lambda) \text{Sh } h) = 0$$

ce qui donne

$$D(\lambda) = \frac{2(\nu - 1) \text{Ch } \lambda h - \lambda h \text{Sh } \lambda h}{\lambda h \text{Ch } \lambda h - (1 - 2\nu) \text{Sh } \lambda h} C(\lambda)$$

Ainsi

$$U_z|_{z=h} = \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} \{ [(3 - 4\nu) \text{Ch } \lambda h + \lambda h \text{Sh } \lambda h - (3 - 4\nu) \text{Ch } \lambda h] C(\lambda) + [\lambda h \text{Ch } \lambda h - (3 - 4\nu) \text{Sh } \lambda h] D(\lambda) \} J_0(\lambda r) d\lambda$$

alors

$$\int_0^{\infty} \frac{2 \lambda h - (3 - 4\nu) \text{Sh } 2 \lambda h}{(1 - 2\nu) \text{Sh } \lambda h - \lambda h \text{Ch } \lambda h} C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 ; \quad r < a \text{ ou } r > b \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z|_{z=h} &= \int_0^{\infty} \lambda \left[((3-4\nu)\text{Sh } \lambda h + \lambda h \text{Ch } \lambda h - 2(1-\nu)\text{Sh } \lambda h) \right. \\
&\quad \left. + (\lambda h \text{Sh } \lambda h - 2(1-\nu)\text{Ch } \lambda h) \frac{\lambda h \text{Sh } \lambda h + 2(\nu-1)\text{Ch } \lambda h}{(1-2\nu)\text{Sh } \lambda h - \lambda h \text{Ch } \lambda h} \right] \times C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\
&= \int_0^{\infty} \lambda \frac{-(1-2\nu)^2 - (3-4\nu)\text{ch}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2}{(1-2\nu)\text{sh } \lambda h - \lambda h \text{ch } \lambda h} C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda
\end{aligned}$$

Par suit nous avons

$$\int_0^{\infty} \lambda \frac{-(1-2\nu)^2 - (3-4\nu)\text{Ch}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2}{(1-2\nu)\text{Sh } \lambda h - \lambda h \text{Ch } \lambda h} C(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = P_0; \quad a < r < b \quad (2.7)$$

La substitution de ces expressions dans : U_r, U_z, σ_z et τ_{zr} , nous donne les équations intégrales triples suivantes :

$$\int_0^{\infty} C_*(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0; \quad r < a \text{ et } r > b \quad (2.8)$$

et

$$\int_0^{\infty} \lambda \Omega(\lambda) C_*(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = P_0; \quad a < r < b \quad (2.9)$$

avec

$$C_*(\lambda) = \frac{(1-\nu)(\lambda h - (3-4\nu)\text{Ch } \lambda h \text{Sh } \lambda h)}{(1-2\nu)\text{Sh } \lambda h - \lambda h \text{Ch } \lambda h} C(\lambda)$$

alors que

$$\Omega(\lambda) = \frac{(1-2\nu)^2 \text{Sh}^2 \lambda h - 4(1-\nu)^2 \text{Ch}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2}{2\lambda h - (3-4\nu)\text{Sh}^2 \lambda h}$$

Prenons

$$r = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \varphi}$$

$$c = \frac{a + b}{2}$$

et

$$d = \frac{b - a}{2}$$

Nous avons les trois formules intégrales suivantes : [3]

$$\int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) J_n(\lambda d) d\lambda = \begin{cases} 0, & r < a, r > b \\ \frac{\cos n \varphi}{\pi c d \sin \varphi}, & a \leq r \leq b \end{cases} \quad (2.10)$$

avec

$$\varphi = \arccos \left(\frac{c^2 + d^2 - r^2}{2 c d} \right)$$

Posons $Z_n(\lambda) = J_n(\lambda c) J_n(\lambda d)$ et $G_n(\lambda) = \lambda (Z_{n-1}(\lambda) - Z_{n+1}(\lambda))$, on obtient :

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) G_n(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0, & r < a, r > b \\ \frac{2 \sin n \varphi}{\pi c d}, & a < r < b \end{cases} \quad (2.11)$$

Posons maintenant

$$C_*(\lambda) = -P_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n(\lambda) \quad (2.12)$$

Après remplacement dans (2.9), on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) G_n(\lambda) \Omega(\lambda) d\lambda = 1 ; \quad a < r < b \quad (2.13)$$

Utilisons la formule suivante de Gegenbauer

$$J_0(\lambda r) = J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi ; \quad a < r < b \quad (2.14)$$

ainsi (2.13) devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda \left\{ J_0(\lambda c) J_0(\lambda d) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) \cos m\varphi \right\} G_n(\lambda) \Omega(\lambda) d\lambda = 1$$

Or, le système trigonométrique $\{\cos m\varphi\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ est linéairement indépendant par suite on trouve le système algébrique infini suivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda \Omega(\lambda) G_n(\lambda) J_m(\lambda c) J_m(\lambda d) d\lambda = \delta_{0m}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

où δ_{0m} est le delta de Kronecker tel que $\delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$.

La matrice associée à ce système algébrique n'est pas symétrique, afin de réduire le calcul à une solution numérique, on calcule la différence de deux équations d'ordre m et $m+2$ on trouve enfin le système algébrique suivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n A_{mn} = \delta_{1m}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

où

$$A_{nm} = \int_0^{\infty} \Omega(\lambda) G_n(\lambda) G_m(\lambda) d\lambda$$

En substituant l'équation (2.12) dans (2.9), nous aurons

$$\begin{aligned} U_z|_{z=h} &= \frac{1-\nu}{2G} \int_0^{\infty} C_*(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ &\quad - \frac{P_0(1-\nu)}{2G} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} G_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= \begin{cases} 0; & r < a \quad r > b \\ -\frac{P_0(1-\nu)}{\pi cd G} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi; & a < r < b \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z|_{z=h} &= -P_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda \Omega(\lambda) G_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\
&= P_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\int_0^{\infty} \lambda (1 - \Omega(\lambda)) G_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - \int_0^{\infty} \lambda G_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right] \\
&= P_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda (1 - \Omega(\lambda)) G_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - P_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda G_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda
\end{aligned}$$

Utilisons les propriétés des fonctions J_n , on aura

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} J_0(\lambda r) = \lambda r \frac{\partial}{\partial \lambda r} J_0(\lambda r) = r \frac{\partial}{\partial r} J_0(\lambda r) \quad (2.16)$$

$$\lambda J_0(\lambda r) Z_n(\lambda)|_0^{\infty} = 0 \quad ; \quad J_0(0) = 1 \quad (2.17)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} Z_n(\lambda) &= c J_n(\lambda d) \frac{d}{d\lambda c} J_n(\lambda c) + d J_n(\lambda c) \frac{d}{d\lambda d} J_n(\lambda d) \\
&= \frac{cd}{2n} G_n(\lambda)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$G_n(\lambda) = \frac{2n}{cd} \frac{d}{d\lambda} Z_n(\lambda) \quad (2.18)$$

En intégrant par parties, avec $u = \lambda J_0(\lambda r)$ et $dv = G_n(\lambda) d\lambda$, et en utilisant les formules (2.16) et (2.17), on obtient

$$\int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) G_n(\lambda) d\lambda = -\frac{2n}{cd} \left[I_0^n + r \frac{\partial}{\partial r} I_0^n \right]$$

où

$$I_0^n = \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda$$

Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=0} &= P_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda (1 - \Omega(\lambda)) G_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ &+ \frac{2P_0}{cd} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \left[I_0^n + r \frac{\partial}{\partial r} I_0^n \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour calculer l'intégrale (2.19) on utilise la formule intégrale suivante [3]

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} J_{\xi}(\lambda t) J_{\mu}(\lambda x) J_{\nu}(\lambda y) d\lambda \\ &= \frac{t^{\xi} x^{\mu} \Gamma\left(\frac{\xi + \mu + \nu + 1}{2}\right)}{y^{\xi + \mu + 1} \Gamma(\xi + 1) \Gamma(\mu + 1) \Gamma\left(\frac{1 - \xi - \mu + \nu}{2}\right)} \\ &\times F_4\left(\frac{\xi + \mu - \nu + 1}{2}, \frac{\xi + \mu + \nu + 1}{2}; \xi + 1; \mu + 1; \frac{t^2}{y^2}; \frac{x^2}{y^2}\right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

où $[R_e(\xi + \mu + \nu) > -1, t, x > 0, y > t + x]$ telle que

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{m+n} x^m}{(\gamma)_m (\gamma')_n m!}, \quad [|\sqrt{x}| + |\sqrt{y}| < 1] \quad (2.21)$$

Utilisons ensuite la relation

$$\begin{aligned} &F_4(\alpha, \gamma + \gamma' - \alpha - 1, \gamma, \gamma'; x(1-y), y(1-x)) \\ &= F(\alpha, \gamma + \gamma' - \alpha - 1, \gamma; x) \times F(\alpha, \gamma + \gamma' - \alpha - 1, \gamma'; y) \end{aligned}$$

où

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n x^n}{(\gamma)_n}, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.22)$$

Calculons ensuite F_4 en terme de F

procédons par les changements de variables suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\xi + \mu + \nu + 1}{2} \\ \gamma = \xi + 1 \\ \gamma' = \mu + 1 \end{array} \right. \Rightarrow \gamma + \gamma' - \alpha - 1 = \xi + \mu + 1 - \frac{\xi + \mu - \nu + 1}{2} = \frac{\xi + \mu + \nu + 1}{2}$$

et

$$\begin{cases} \frac{t^2}{y^2} = \alpha_0 (1 - \beta_0) \\ \frac{x^2}{y^2} = \beta_0 (1 - \alpha_0) \end{cases}$$

Calculons ensuite α_0 et β_0 , posons $t = y \sin\Phi \cos\Psi$, $x = y \cos\Phi \sin\Psi$,

$$0 < \Phi, \Psi < \frac{\pi}{2}$$

on aura alors

$$\begin{cases} \frac{t^2}{y^2} = \sin^2 \Phi \cos^2 \Psi = \sin^2 \Phi (1 - \sin^2 \Psi) \\ \frac{x^2}{y^2} = \sin^2 \Psi (1 - \sin^2 \Phi) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \sin^2 \Phi, \beta_0 = \sin^2 \Psi$$

Remarquons

$$\frac{x+t}{y} = \sin(\Psi + \Phi), \frac{x-t}{y} = \sin(\Psi - \Phi)$$

Ce qui donne

$$\Psi + \Phi = \arcsin\left(\frac{x+t}{y}\right), \Psi - \Phi = \arcsin\left(\frac{x-t}{y}\right)$$

Par ailleurs nous aurons

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(\frac{x+t}{y}\right) \pm \arcsin\left(\frac{x-t}{y}\right) \right]$$

Posons maintenant $\sigma = \xi + \mu$, la relation (2.20) devient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} J_{\xi}(\lambda t) J_{\mu}(\lambda x) J_{\nu}(\lambda y) d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1+\sigma+\nu}{2}\right)}{\Gamma(\xi+1)\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\frac{1-\sigma+\nu}{2}\right)} \left(\frac{t}{y}\right)^{\xi} \left(\frac{x}{y}\right)^{\mu} \frac{1}{y} \\
 & \times F\left(\frac{1+\sigma-\nu}{2}, \frac{1+\sigma+\nu}{2}; \xi+1; \sin^2 \Phi\right) \\
 & \times F\left(\frac{1+\sigma-\nu}{2}, \frac{1+\sigma+\nu}{2}; \mu+1; \sin^2 \Psi\right) \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Remarquons aussi que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} \sin^{2n} \Phi = 2n \cos \Phi \sin^{2n-1} \Phi = n \sin 2\Phi \sin^{2n-2} \Phi$$

on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \varphi} F(\alpha, \beta; \gamma; \sin^2 \Phi) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sin 2\Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n) (\sin^2 \Phi)^{n-1}}{\Gamma(\gamma+n) (n-1)!} \\
 &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sin 2\Phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\beta+1+n) (\sin^2 \Phi)^n}{\Gamma(\gamma+n) (n)!} \\
 &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sin 2\Phi F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; \sin^2 \Phi) \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Distinguons les différents cas suivants

a . cas ou $0 < r < a$: on pose : $\xi = 0, \mu = \nu = n, t = r, y = c$ et $x = d$

alors on trouve

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \Psi(r) \\ \Phi(r) \end{array} \right] &= \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(\frac{r+d}{c}\right) \pm \arcsin\left(\frac{r-d}{c}\right) \right] \\
 \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{array} \right] &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{(c-r-d)(c+r+d)}} \pm \frac{1}{\sqrt{(c-r+d)(c+r-d)}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_0^n &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1+2n}{2}\right)}{\Gamma(1)\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{c} \left(\frac{d}{c}\right)^n \times \\
&\times F\left(\frac{1}{2}, \frac{1+2n}{2}; 1; \sin^2\Phi\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1+2n}{2}; n+1; \sin^2\Phi\right) \quad (2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_0^n}{\partial r} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1+2n}{2}\right)}{\Gamma(1)\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{c} \left(\frac{d}{c}\right)^n \times \\
&\times \left[\frac{1+2n}{8} \sin 2\Phi F\left(\frac{3}{2}, n+\frac{3}{2}; 2; \sin^2\Phi\right) \right. \\
&\times F\left(\frac{1}{2}, \frac{1+2n}{2}; n+1; \sin^2\Phi\right) \left[\frac{1}{\sqrt{(c-r-d)(c+r+d)}} \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{\sqrt{(c-r+d)(c+r-d)}} \right] \right. \\
&+ \frac{1+2n}{8(n+1)} \sin 2\Phi F\left(\frac{3}{2}, n+\frac{3}{2}; n+2; \sin^2\Phi\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1+2n}{2}; 1; \sin^2\Phi\right) \\
&\left. \times \left[\frac{1}{\sqrt{(c-r-d)(c+r+d)}} + \frac{1}{\sqrt{(c-r+d)(c+r-d)}} \right] \right]
\end{aligned}$$

b . cas ou $r > b$: on pose : $v = 0, \mu = \xi = n, t = c, y = r,$ et $x = d,$ alors on trouve

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} \Psi(r) \\ \Phi(r) \end{array} \right] &= \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(\frac{b}{r}\right) \pm \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) \right] \\
\left[\begin{array}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{array} \right] &= \frac{-1}{2} \left[\frac{b}{\sqrt{(r-b)(r+b)}} \pm \frac{a}{\sqrt{(r-a)(r+a)}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_0^n \\
&= \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_n(\lambda c) J_n(\lambda d) d\lambda \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1+2n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)} \frac{1}{r} \left(\frac{c}{r}\right)^n \left(\frac{d}{r}\right)^n \times \\
&\times F\left(\frac{1+2n}{2}, \frac{1+2n}{2}; n+1; \sin^2\Phi\right) F\left(\frac{1+2n}{2}, \frac{1+2n}{2}; n \\
&+ 1; \sin^2\Psi\right) \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_0^n}{\partial r} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1+2n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{c}{r}\right)^n \left(\frac{d}{r}\right)^n \right. \\
&\times \left[\frac{(1+2n)^2}{8(n+1)} \sin 2\Phi F\left(n+\frac{3}{2}, n+\frac{3}{2}; n+2; \sin^2\Phi\right) \right. \\
&\times F\left(\frac{1+2n}{2}, \frac{1+2n}{2}; n+1; \sin^2\Psi\right) \left[\frac{a}{\sqrt{(r-a)(r+a)}} - \frac{b}{\sqrt{(r-b)(r+b)}} \right] \\
&+ \frac{(1+2n)^2}{8(n+1)} \sin 2\Psi F\left(n+\frac{3}{2}, n+\frac{3}{2}; n+2; \sin^2\Psi\right) F\left(\frac{1+2n}{2}, \frac{1+2n}{2}; n \\
&+ 1; \sin^2\Phi\right) \times \left[\frac{a}{\sqrt{(r-a)(r+a)}} - \frac{b}{\sqrt{(r-b)(r+b)}} \right] \left. \right] + (cd)^n \frac{1}{2n r^{2n}} \\
&\times F\left(\frac{1+2n}{2}, \frac{1+2n}{2}; n+1; \sin^2\Phi\right) F\left(\frac{1+2n}{2}, \frac{1+2n}{2}; n+1; \sin^2\Psi\right) \left. \right]
\end{aligned}$$

Par suite on peut calculer les facteurs d'intensité de contraintes en tenant compte des formules précédentes

$$K_{Ia} = \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{a-r} \sigma_z|_{z=h} \text{ et } K_{Ib} = \lim_{r \rightarrow b} \sqrt{r-b} \sigma_z|_{z=h}$$

on trouve

$$KI_a = \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{a-r} \frac{2 P_0}{c d} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \left[I_0^n + r \frac{\partial}{\partial r} I_0^n \right] = \frac{2 P_0}{c d} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{a-r} \frac{\partial I_0^n}{\partial r}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } KI_a = & \frac{2 p_0 a}{\sqrt{a+b} cd} \sum_1^{\infty} n a_n \left\{ A_n \left[\frac{1+2n}{8} \sin 2 \Phi(a) F\left(\frac{3}{2}, n \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{3}{2}; 2; \sin^2 \Phi(a) \right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1+2n}{2}; n+1; \sin^2 \Psi(a) \right) \frac{1}{\sqrt{c+a+d}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1+2n}{8(n+1)} \sin 2 \Psi(a) F\left(\frac{3}{2}, n + \frac{3}{2}; n \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2; \sin^2 \Psi(a) \right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1+2n}{2}; 1; \sin^2 \Phi(a) \right) \frac{1}{\sqrt{c+a+d}} \right] \right\} \end{aligned}$$

avec

$$A_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1+2n}{2}\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{c} \left(\frac{b}{c}\right)^n \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

La formule du second coefficient est aussi donné par

$$\begin{aligned} KI_b = & \frac{2 p_0 b \sqrt{b/2}}{cd} \sum_1^{\infty} n a_n \left\{ \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3+2n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 \frac{1}{n+1} \frac{1}{b^2} \left(\frac{cd}{b^2}\right)^n \left[\right. \right. \\ & \times \left[-\sin 2 \Phi(b) F\left(n + \frac{3}{2}, n + \frac{3}{2}; n+2; \sin^2 \Phi(b) \right) \right. \\ & \times F\left(\frac{1+2n}{2}, \frac{1+2n}{2}; n+1; \sin^2 \Psi(b) \right) \left[\frac{a}{\sqrt{(b-a)(b+a)}} \right] \\ & \left. + \sin 2 \Psi(b) F\left(n + \frac{3}{2}, n + \frac{3}{2}; n+2; \sin^2 \Psi(b) \right) F\left(\frac{1+2n}{2}, \frac{1+2n}{2}; n \right. \right. \\ & \left. \left. + 1; \sin^2 \Phi(b) \right) \times \left[\frac{a}{\sqrt{(b-a)(b+a)}} \right] \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

II . 3 Calcul numérique :

A fin de calculer les différentes valeurs des contraintes et déplacements, on doit résoudre le système algébrique (3.12) pour trouver a_n . Pour ce faire il est nécessaire de déterminer les coefficients A_{nm} du système, ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}
 A_{mn} &= \int_0^{\infty} \frac{(1-2\nu)^2 Sh^2 \lambda h - 4(1-\nu)^2 Ch^2 \lambda h - \lambda^2 h^2}{2\lambda h - (3-4\nu)Sh2 \lambda h} G_n(\lambda) G_m(\lambda) d\lambda \\
 &= \int_0^{\infty} \left[\frac{(1-2\nu)^2 Sh^2 \lambda h - 4(1-\nu)^2 Ch^2 \lambda h - \lambda^2 h^2}{2\lambda h - (3-4\nu)Sh2 \lambda h} - 1 \right] G_n(\lambda) G_m(\lambda) d\lambda \\
 &\quad + \int_0^{\lambda_0} G_n(\lambda) G_m(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{\infty} G_n(\lambda) G_m(\lambda) d\lambda \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 G_m(\lambda) G_n(\lambda) &= \lambda^2 [J_{m-1}(\lambda c) J_{m-1}(\lambda d) - J_{m+1}(\lambda c) J_{m+1}(\lambda d)] \\
 &\quad \times [J_{n-1}(\lambda c) J_{n-1}(\lambda d) - J_{n+1}(\lambda c) J_{n+1}(\lambda d)]
 \end{aligned}$$

En tenant compte du développement à l'infini de la fonction de Bessel suivant

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) - \frac{4n^2-1}{8x} \sin\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

ainsi nous aurons A'_{mn} tel que

$$\begin{aligned}
 A'_{mn} &= \int_{\lambda_0}^{\infty} G_m(\lambda) G_n(\lambda) d\lambda \\
 &\approx \frac{4mn}{\pi^2 (cd)^3} \left[a^2 \left(\frac{\sin^2 \lambda_0 a}{\lambda_0} - a Si(2\lambda_0 a) \right) + (-1)^{m+n} b^2 \left(\frac{\cos^2 \lambda_0 a}{\lambda_0} - b Si(2\lambda_0 b) \right) \right. \\
 &\quad \left. - [(-1)^m + (-1)^n] ab \left(\frac{\sin \lambda_0 a \cos \lambda_0 b}{\lambda_0} - c Ci(2\lambda_0 c) + d Ci(2\lambda_0 d) \right) \right]
 \end{aligned}$$

En utilisant l'expression approximative de A'_{mn} , et en intégrant numériquement des deux intégrales (2.27) par la méthode de Simpson, la valeur de λ_0 qui assure une convergence stable correspond à 1500 . Les valeurs des coefficients a_n correspondant à la solution algébrique approximative du système (2.15) sont données par le tableau suivant pour différentes valeurs du rapport a/b .

n	a/b = 0.25	a/b = 0.5	a/b = 0.75
1	0.1307098938	0.09340763759	0.03679930550
2	0.01955262661	0.009546554763	0.001879761186
3	0.01140490213	0.002855184289	-0.00001835160213
4	0.005725746550	0.0008945619114	0.00002674431474
5	0.002299701316	-0.00009542229681	-0.0002125758761
6	0.001332158276	0.00007954483505	0.00003648950242
7	0.0003439462745	-0.0002877469247	-0.0002171837669
8	0.0004203680366	0.00003675547388	0.00004721176634
9	-0.00009021950011	-0.0002895606801	-0.0002201819113
10	0.0002459725307	0.00008485631887	0.00002383582406

Table des valeurs de a_n

Le graphe ci-dessous montre la variation du déplacement radial au niveau de $z = h/2$ avec différentes valeurs de a/b

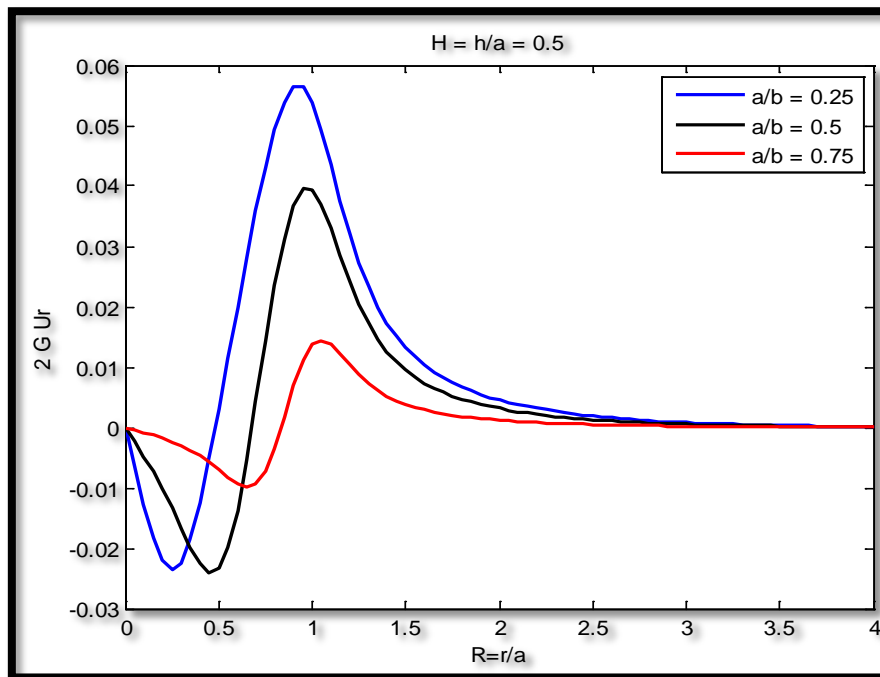


Figure 2 : Déplacements U_r pour $z = 0.5 h$ avec différentes valeurs de a/b

Sur la figure ci-dessous on trace la variation du déplacement radial sur la surface $z = h$

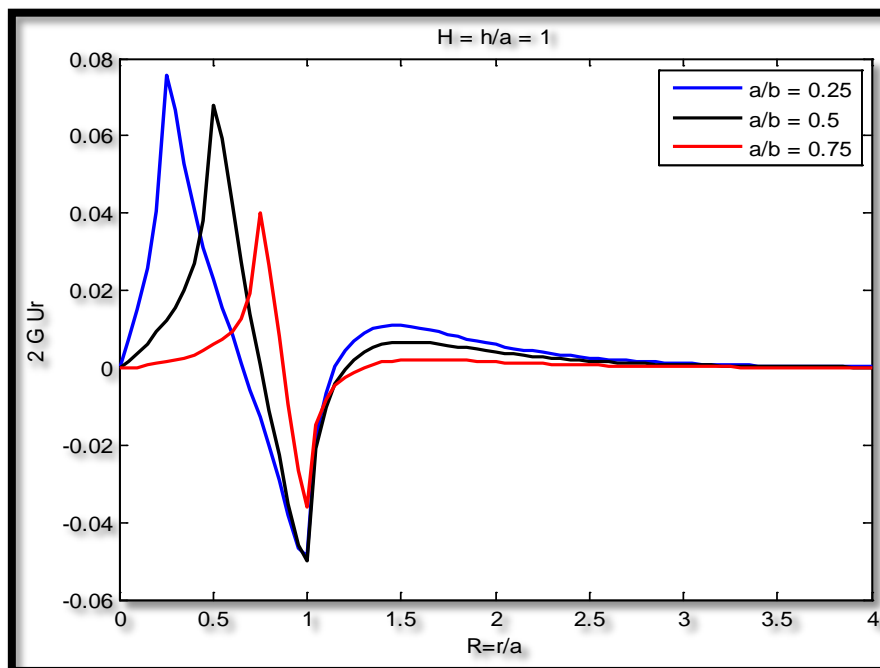


Figure 3 : Déplacements U_r pour $z = h$ avec différentes valeurs de a/b

Le déplacement axial U_z , au niveau $z = h$ (sur le trou annulaire) est tracé sur la figure ci-dessous

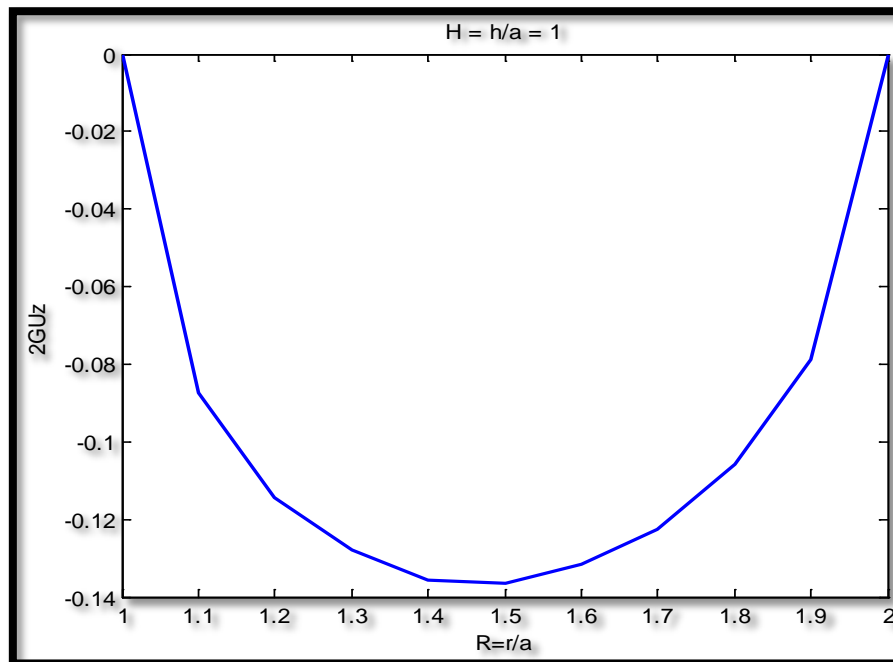


Figure 4 : Déplacement axiale sur la surface $z = h$

La figure ci-dessous montre la représentation du déplacement axial U_z , sur différents niveaux de hauteur h .

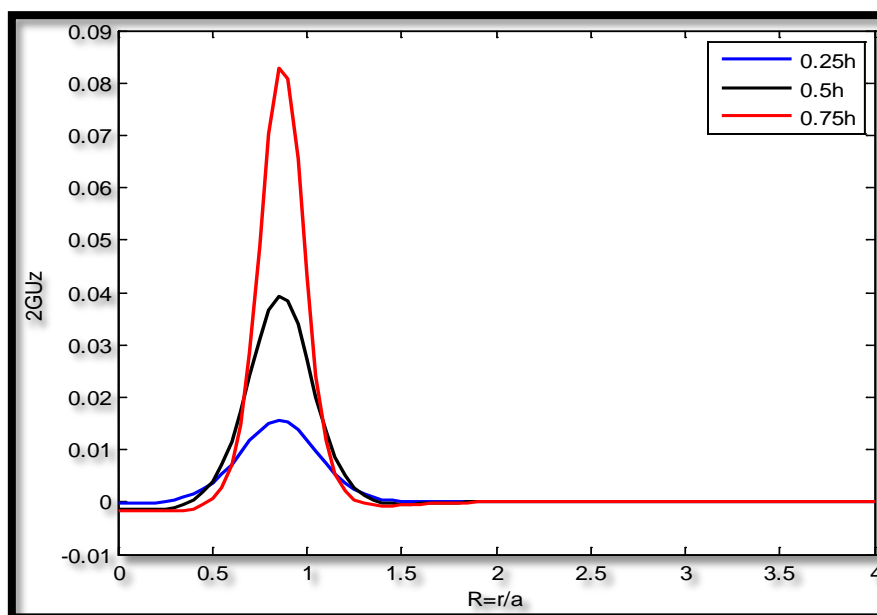


Figure 5 : Déplacement axiale sur différents niveaux de hauteur

Les contraintes tangentielles à différents niveaux de hauteur h sont représentées sur la figure ci-dessous

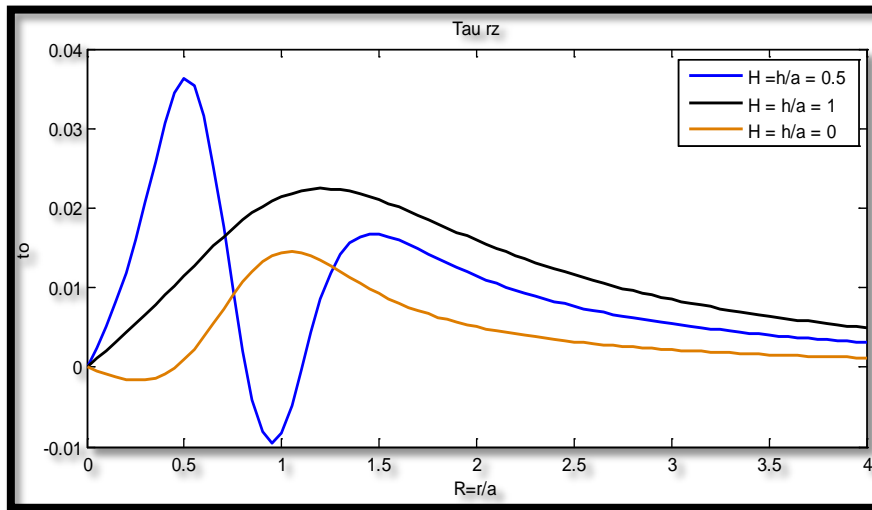


Figure 6 : Représentation des contraintes tangentielles sur différents niveaux de hauteur

Sur la figure suivante est représentée la variation de la contrainte normale sur la surface $z = h$, lorsque r est supérieur à b

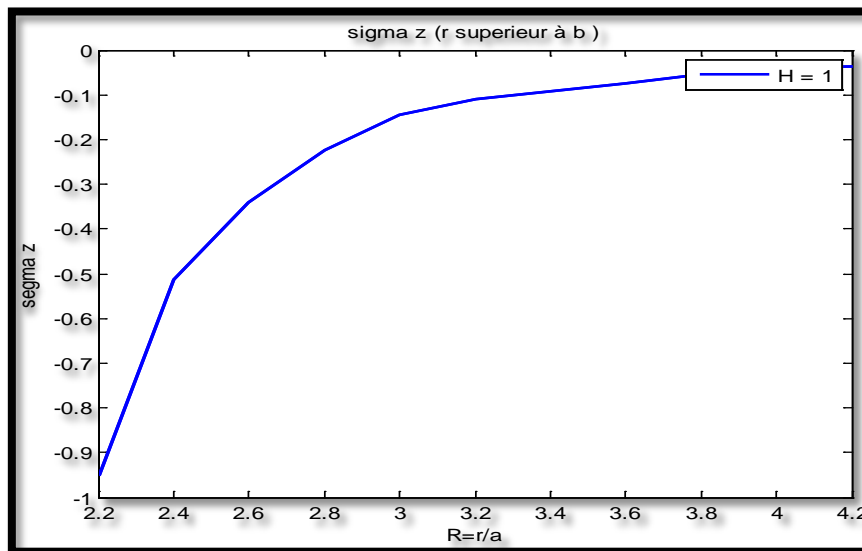
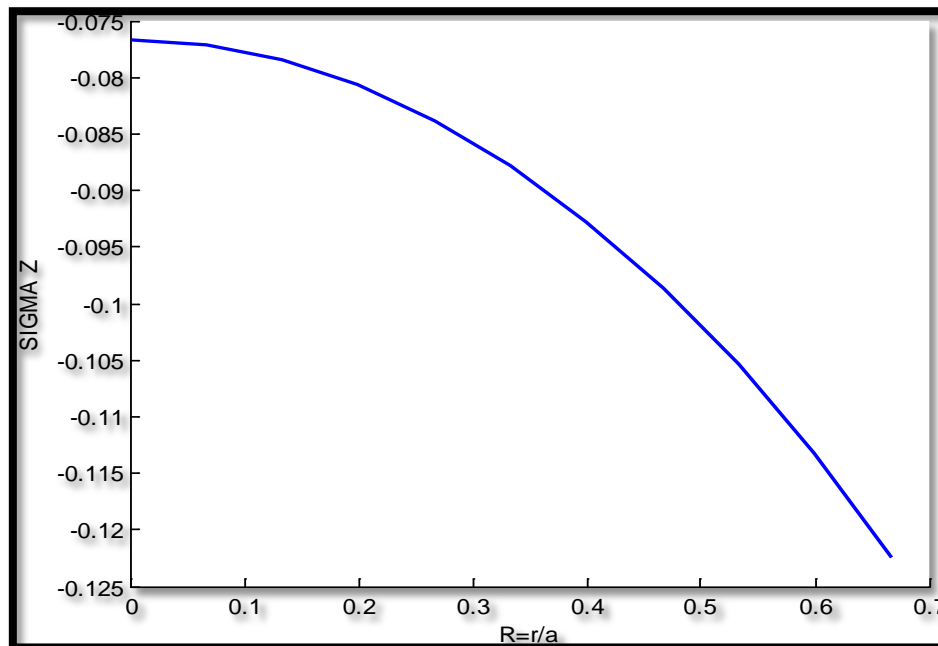


Figure 7 : Contrainte normale σ_z sur la surface $z = h$ (rayon extérieur)

Sur la figure suivante est représentée la variation de la contrainte normale sur la surface $z = h$, lorsque r est inférieur à a



Contrainte normale σ_z sur la surface $z = h$ (rayon intérieur)

La contrainte normale sur différents niveaux de hauteur h est représenté sur la figure ci-dessous.

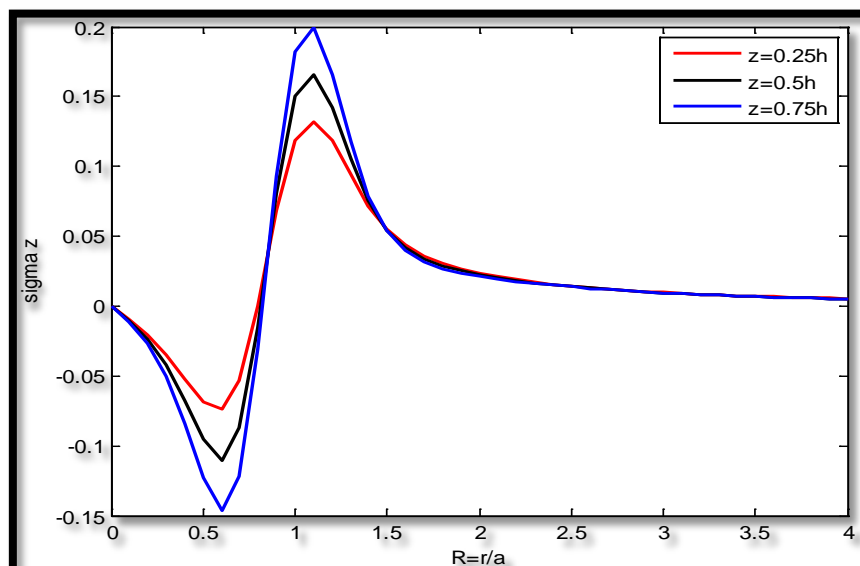


Figure 8 : Contrainte normale σ_z sur différents niveaux de hauteur h

Les contraintes normales σ_z sur la base rigide $z = 0$ sont représentées sur la figure ci-dessous

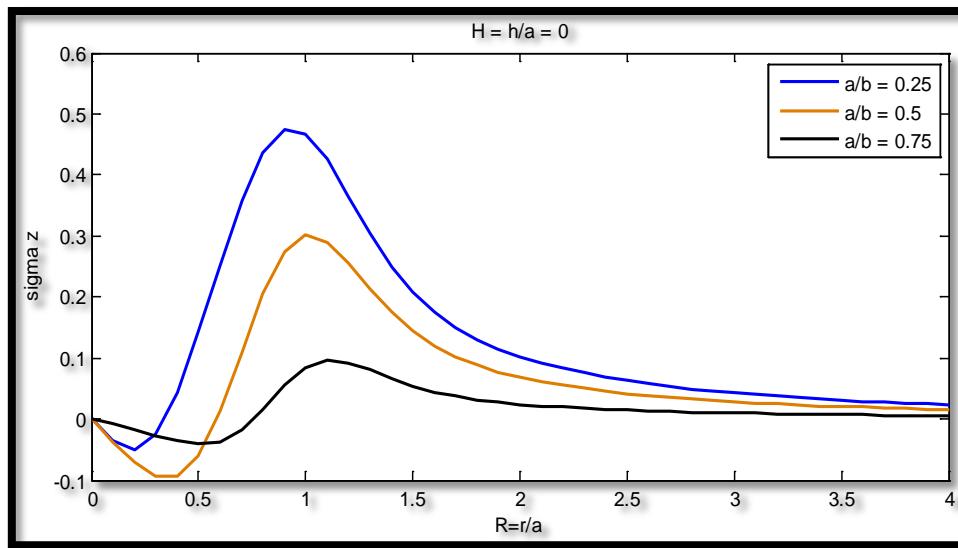


Figure 9 : Contrainte normal σ_z sur la base rigide pour différentes valeurs de a/b

La figure ci-dessous donne la variation du facteur d'intensité de contrainte K_a au voisinage du rayon intérieur du trou annulaire en fonction du rapport a/b

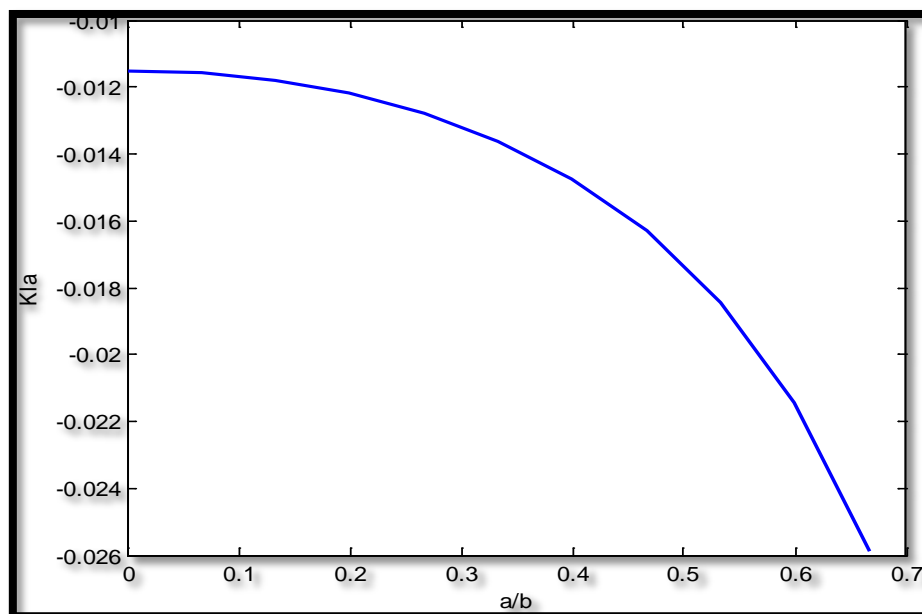


Figure 10 : Facteur d'intensité de contrainte KI_a

La figure ci-dessous nous montre la variation du facteur d'intensité de contraintes KI_a , en faisant varier la hauteur h .

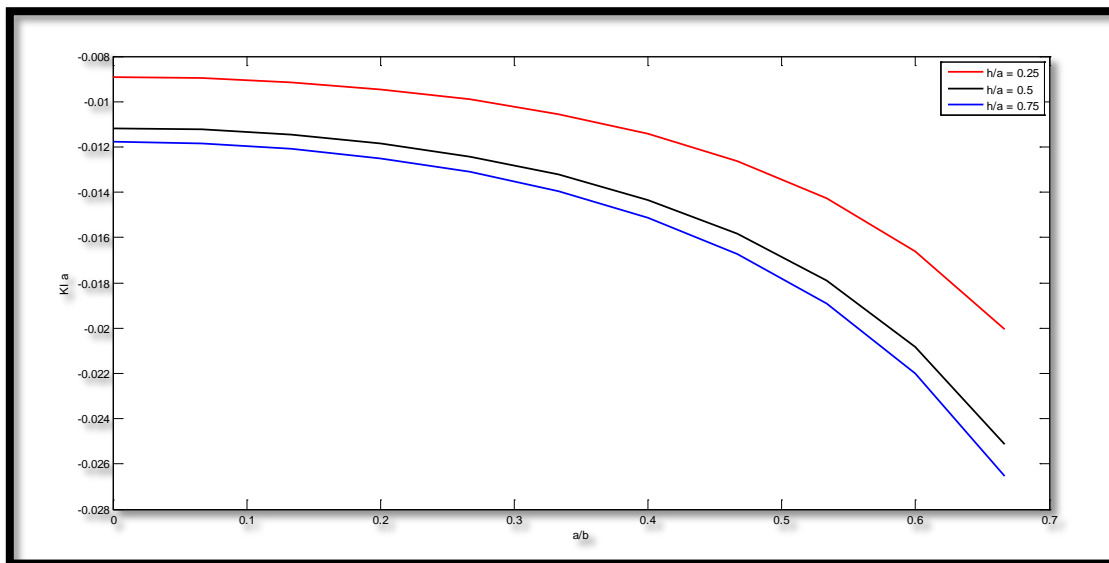


Figure 11 : Facteur d'intensité de contrainte KI_a sur différents niveaux de hauteurs

Le facteur d'intensité de contraintes KI_b au voisinage du rayon extérieur du trou annulaire en fonction du rapport a/b , est représenté sur la figure ci dessous

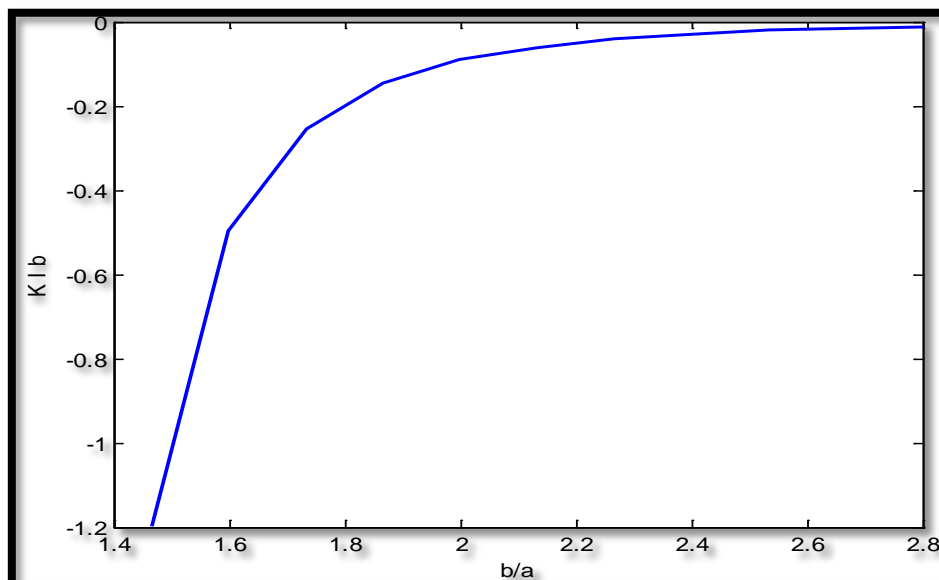


Figure 12 : Facteur d'intensité de contraintes KI_b

Sur la figure ci-dessous est représenté la variation du facteur d'intensité de contrainte KI_b en faisant varier la hauteur h .

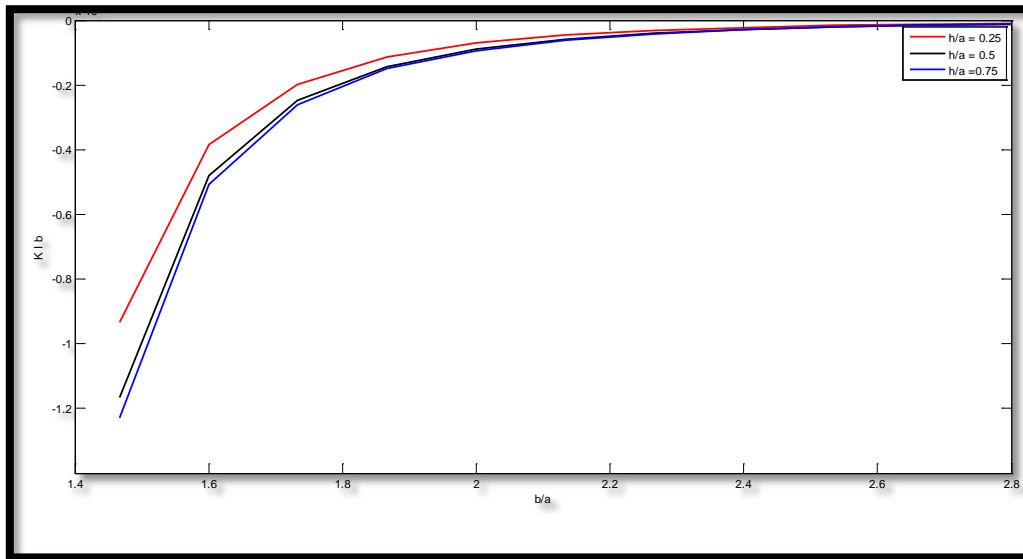


Figure 13 : Facteur d'intensité de contraintes KI_b sur différents niveaux de hauteurs

III . Conclusion :

La convergence des coefficients est obtenus au bout des 6 premières itérations et que la convergence est meilleurs lorsque le rapport a/b augmente.

Les déplacements radiale U_r et axial U_z ont été calculés et représentés graphiquement, sur différents niveaux de hauteur h , ainsi que les contraintes normal et tangentielle, et les facteurs d'intensité de contraintes.

Le déplacement axial U_z , ainsi que la contrainte σ_z sont importants lorsque on s'approche de la surface de la plaque.

La concentration de contrainte est maximale au voisinage des deux rayons intérieur et extérieur du trou annulaire. Le facteur KI_a augmente au fur et à mesure qu'on augmente le rapport a/b . Le facteur KI_b diminue lorsqu'on augmente le rapport a/b .

On remarque aussi que les facteurs d'intensité de contrainte KI_a , et KI_b augmentent avec la diminution de la hauteur h de la plaque, par conséquent la plaque est fragilisée si on diminue sa hauteur.

Les résultats obtenus lors de cette étude sont encourageants et reflètent les problèmes réels de traction.

IV . Perspectives :

La méthode analytique proposée dans ce mémoire de recherche peut être aussi utilisée dans la résolution de divers problèmes de conduction thermique et de déformation élastostatique.

Les problèmes à étudier sont :

A – Conductions thermiques : propagations de la température dans un milieu conducteur comportant une fissure annulaire de rayons a , b dans le plan $z = h$. Ce milieu subit un flux uniforme le long d'un domaine circulaire.

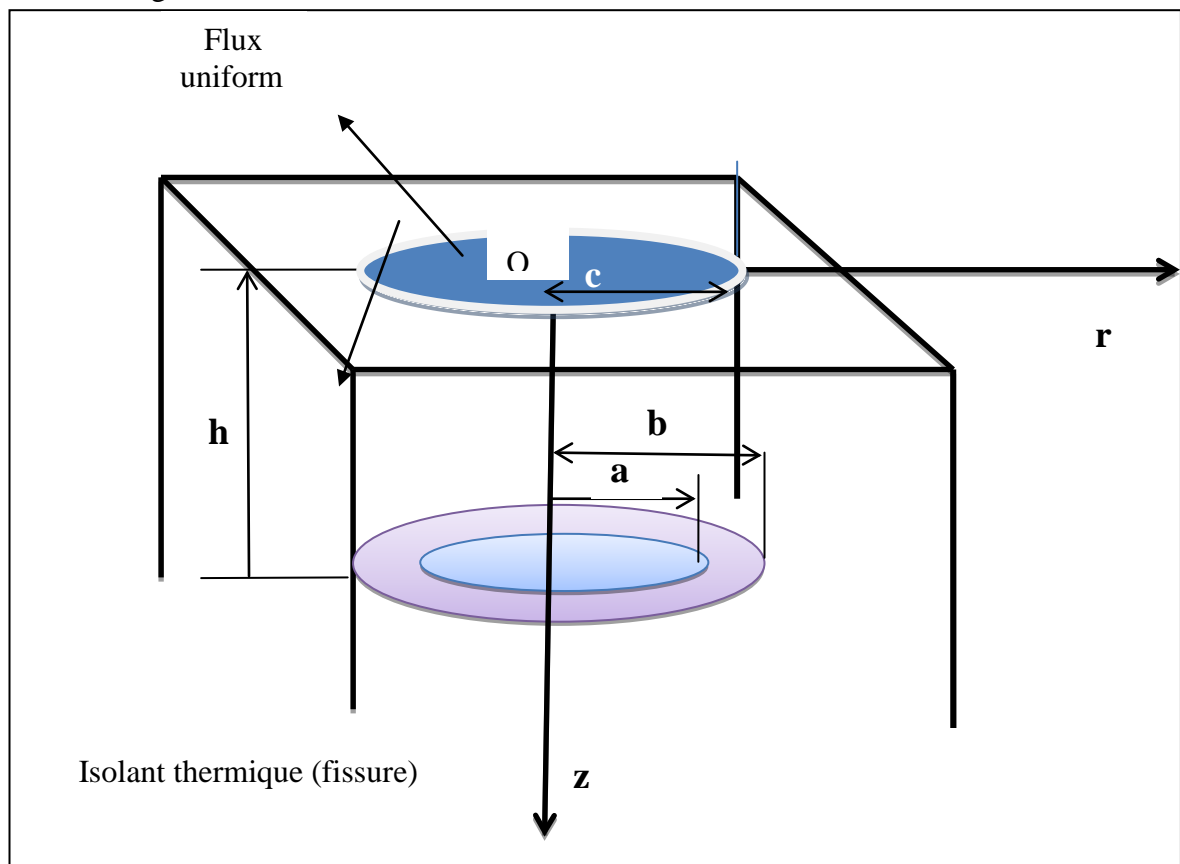


Figure 14 : Problème de conduction thermique

La formulation du problème est :

$$\Delta U(r, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

les conditions limites correspondantes sont :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad a < r < b$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = U_0, \quad r < c$$

$$U|_{z=0} = 0, \quad r > c$$

B – Problème élastostatique :

Le problème étudié par Sakamoto à savoir l'application d'un poinçon infini sur un milieu reposant sur une fondation rigide ayant un orifice circulaire, peut être traité par notre méthode dans le cas d'un orifice annulaire.

Les conditions limites de ce type de problème sont :

$$\text{Pour } z = 0 : \sigma_z = \tau_{zr} = 0 ; a < r < b$$

$$U_z = \tau_{zr} = 0 ; r < a ; r > b$$

$$\text{et pour } z = h : U_z = -\delta, \tau_{zr} = 0 ; r \geq 0$$

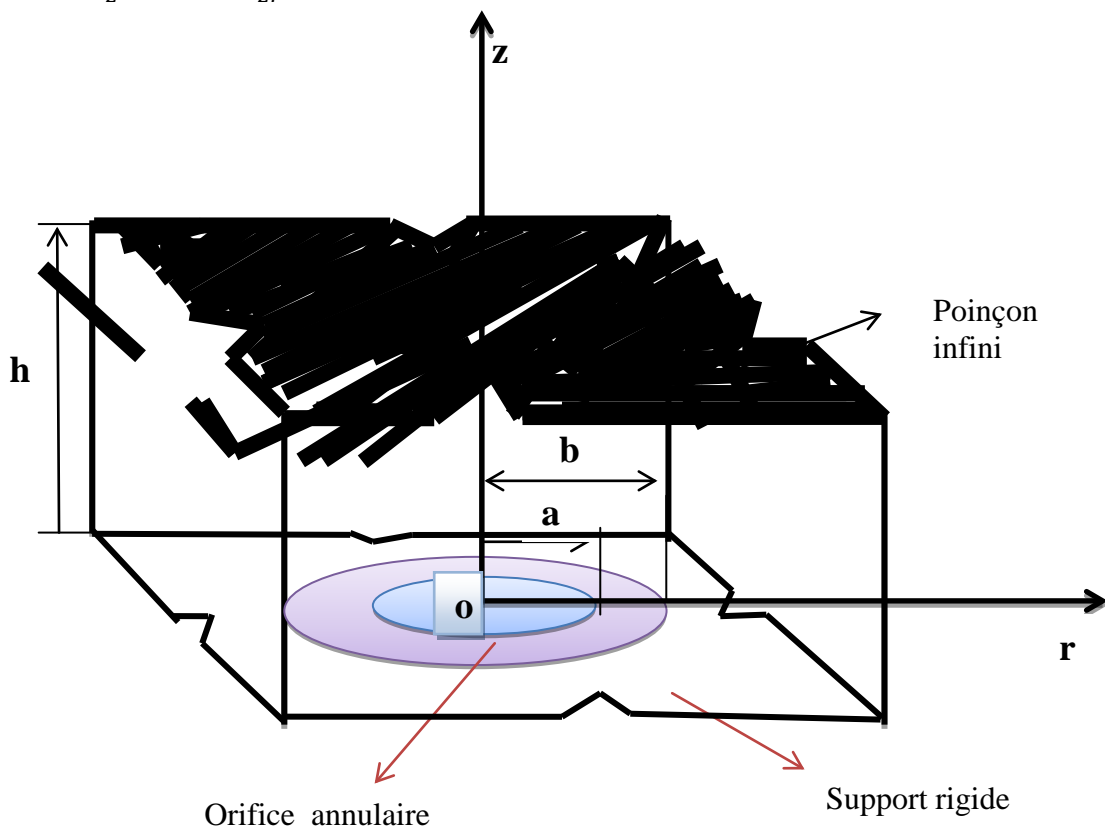


Figure 15 : problème élastostatique

Conclusion Générale

Conclusion générale

Conclusion générale :

Nous avons étudié le problème axisymétrique de traction d'un milieu élastique le long d'un orifice annulaire. La solution analytique, basée sur la transformation intégrale de Hankel a été obtenue à l'aide d'un développement en série de fonctions de Bessel dont les coefficients sont calculés à partir d'un système algébrique infini. La convergence de ce dernier système a été obtenue à partir des 8 premiers termes de la série.

Les déplacements radial et axial ont été calculés analytiquement et représentés graphiquement, ainsi que les contraintes normale et tangentielle. Cette étude nous a permis de constater que le déplacement axial ainsi que les contraintes normales, sont importantes au fur et à mesure qu'on approche de la surface de la plaque métallique.

Nous avons également calculé les facteurs d'intensité de contraintes le long des deux rayons intérieur et extérieur du trou annulaire. Nous avons constaté que KI_a augmente lorsque le rapport a/b augmente, par contre KI_b diminue lorsque le rapport b/a augmente. Nous avons également tracé KI_a et KI_b en faisant varier la hauteur h , et nous avons constaté que les deux facteurs d'intensité de contraintes augmentent lorsque la hauteur diminue, ainsi la plaque est fragilisée.

Les résultats obtenus dans cette étude sont d'une importance capitale. De part ce travail, nous ouvrons des perspectives intéressantes de recherche. Cette méthode de calcul peut être aussi appliquée à la résolution des problèmes de conduction thermique et d'élastostatique.

Références bibliographique

References bibliographique:

- [1] W. E. Williams. Integral equation formulation of some three part boundary value problems. Proc. Edinburgh. Math. Soc. Vol. 13 (1963) pp. 317-323.
- [2] J. C. Cooke. Triple integrale equations. Quart. J. Mech. Appl. Math. Vol. 16 (1963) pp. 193-203.
- [3] B. Noble. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying dual factor method. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 59 (1963) pp. 351-362.
- [4] W.D. Collins. On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations. Proc. Edinburgh. Math. Soc. Vol.13 (1963) pp. 235-246.
- [5] D. L. Jain and R. P. Kanwel. SIAM J. Appl. Math. Vol.20. 642 (1971).
- [6] V. S. Gubenko and V. I. Mossakovskii. Pressure of an axially symmetric circular die on an elastic half-space. PMM Vol. 24. 334 (1960) pp. 477-486.
- [7] T. Shibuya, T. Koizumi and I. Nakahara. An elastic contact problem for a half – space indented by a flat annular rigid stamp. Int. J. Engng Sci. 1974. Vol. 12. pp. 759 – 771.
- [8] T. Shibuya, T. Koizumi and I. Nakahara. The axisymmetric distribution of stresses in an infinite elastic solid containing a flat annular crack under internal pressure. ZAMM. Vol 55. (1975). pp 395-402.
- [9] T. Shibuya, T. Koizumi and I. Nakahara. A crack problem on a slab with an annular crack subjected to a pressure. Bulletin of JSME. Vol. 20. N° 139 (1977). pp 17-23.
- [10] M. Sakamoto and K. Kobayashi. The axisymmetric contact problem for an elastic layer subjected to a tensile stress applied over a circular region. Theo. Appl. Mech. Vol. 53 (2004). pp. 27-36.
- [11] M. Sakamoto and K. Kobayashi. Axisymmetric indentation of an elastic layer on a rigid foundation with a circular hole. WIT. Transactions of Engineering Sciences. Vol. 49. (2005). pp. 279-286.

Références bibliographique

- [12] B. Barthélémy. Notions pratique de mécanique de la rupture. Edition Eyrolles. 1980.
- [13] S. Timoshenko and J. N. Goodier. Theory of elasticity. New York. 1951.
- [14] L. Debnath and D. Bhatta. Integral transforms and their applications. Seventh edition. Hall/CRC. page 12. Vol. 703. 2007.
- [15] Makoto Sakamoto. Guoan Li. Toshiaki Hara and Edmund Y. S. Chao. A New Method For Theoretical Analysis of Static Indentation Test. The Johns Hopkins University. School of Medicine. Baltimore. MD 21205. U.S.A.
- [16] R. S. Dhaliwal. An axisymmetric mixed boundary value problem for a thick slab. SIAM J. App. Math. Vol. 15. N°1. (1977) pp. 98-106.
- [17] I. S. Gradshteyn. and I. M. Ryzhik. Table of integrals. Series. and Products. seventh edition. Academic press. 2007.
- [18] S. Forest. M. Amestoy. S. Cantournet. G. Damamme et S. Kruch. Mécanique des milieux continus. Ecole des mines de Paris. 2006.