

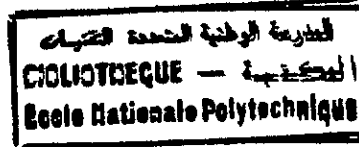
2/93

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et populaire

وزارة التربية الوطنية
Ministère de l'Education Nationale

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT: GENIE CIVIL



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

INVESTIGATION DES COMPORTEMENTS
STATIQUE ET DYNAMIQUE DES VOILES
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
ET LA METHODE DES
ELEMENTS DE FRONTIERE.

Proposé par:

M.K. BERRAH
M. DEMIDEM

Etudé par:

Y. AIMENE
A.F. AOUAMEUR

Dirigé par:

M. DEMIDEM
M.K. BERRAH

PROMOTION

1992 - 1993

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi, EL Harrach - Alger

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et populaire

وزارة التربية الوطنية
Ministère de l'Education Nationale

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT: GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة
BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

INVESTIGATION DES COMPORTEMENTS
STATIQUE ET DYNAMIQUE DES VOILES
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
ET LA METHODE DES
ELEMENTS DE FRONTIERE.

Proposé par:

M.K. BERRAH
M. DEMIDEM

Etudié par:

Y. AIMENE
A.F. AOUAMEUR

Dirigé par:

M. DEMIDEM
M.K. BERRAH

PROMOTION
1992 -1993

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi, EL Harrach - Alger

Je dédie ce modeste travail à:

- Mon père adoré .
- Ma mère, que je chérie tant .
- Mes frères et soeurs.
- Aniss.
- Tous mes amis.
- Tous ceux qui me sont chers .

Yamina.

Je dédie ce modeste travail à :

- Mon père qui aurait tant voulu être là ce jour.
- Ma chère mère.
- mes deux frères Farid et Nabil .
- Mon oncle Mohamed.
- La mémoire de Mr M'hamed Boukhobza père de mon ami
Taha .
- Tonton Mohamed et tata Warda .
- Fouzia.
- Tous ceux qui me sont chers .

AMEL.

Sommaire

INTRODUCTION

CHAPITRE I : Théorie de l'élasticité linéaire

- 1- Introduction
- 2- Équations constitutives
- 3- Problèmes de l'élasticité plane.
 - 3-1 cas de contraintes planes
 - 3-2 cas de déformations planes
- 4- Résolution des problèmes de l'élasticité linéaire

CHAPITRE II: Dynamique des structures

- 1- Introduction
- 2- Formulation des équations de mouvement
 - 2-1 Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe de d'ALEMBERT.
 - 2-2 Principe des déplacements virtuels
 - 2-3 Principe de HAMILTON.
- 3- Etude des systèmes dynamiques.

CHAPITRE III: Présentation de la méthode des éléments finis

- 1- Introduction
- 2- Formulation de la méthode des éléments finis basée sur les déplacements en statique
 - 2-1 Formulation des équations d'équilibre
 - 2-2 Formulation en coordonnées généralisées
- 3- Formulation de la méthode des éléments finis basée sur les déplacements en dynamique
 - 3-1 Formulation des équations d'équilibre dynamique
 - 3-2 Détermination de la matrice masse
- 4- Vibrations libres
- 5- Convergence

CHAPITRE IV: Présentation de la méthode des équations intégrales aux frontières

- 1- Introduction
- 2- Formulation des équations intégrales aux frontières en statique
 - 2-1 Solution fondamentale
 - 2-2 Formulation de l'équation intégrale aux frontières.
 - 2-3 Représentation matricielle en statique
 - 2-3-1 Interpolation linéaire
 - 2-3-2 Interpolation constante
- 3- Équations intégrales aux frontières en dynamique
 - 3-1 Équations gouvernantes et conditions aux frontières
 - 3-2 Formulation de l'équation intégrale en dynamique
 - 3-2-1 Formulation directe en dynamique

- 3-2-2 Formulation par la transformée de Laplace
- 3-3 Représentation matricielle en dynamique
 - 3-3-1 Approximation de l'intégrale inertielle
 - 3-3-2 Discrétisation de l'équation intégrale
 - 3-3-3 Vibrations libres

CHAPITRE V: Présentation des programmes FEMSTAT et BEMSTAT

- 1- Introduction
- 2- Présentation du programme FEMSTAT
- 3- Présentation du programme BEMSTAT
- 4- Application

CHAPITRE VI: Méthodes de résolution des systèmes propres

- 1- Introduction
- 2- Propriétés fondamentales des systèmes propres
- 3- Méthodes de résolution
 - 3-1 Méthodes d'itération vectorielles
 - 3-2 Méthodes de transformation
 - 3-3 Méthodes d'itération polynomiale
- 4- Résolution des problèmes de grande dimension (méthode des sous-espaces)

CHAPITRE VII: Présentation des programmes FEMDYN et BEMDYN

- 1- Introduction
- 2- Présentation du programme FEMDYN
- 3- Présentation du programme BEMDYN

CHAPITRE VIII: Applications

- 1- Voile plein
- 2- Voile avec une file d'ouvertures
- 3- Voile avec plusieurs files d'ouvertures

CONCLUSION

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Le calcul des structures, en particulier celui des milieux continus, couvre une grande variété d'applications dans les secteurs industriels de la construction génie civil, mécanique et aéronautique.

Ce domaine a pour **objet** la modélisation théorique au stade de la conception d'une structure ou d'un système mécanique, où l'ingénieur recherche la distribution des contraintes et les déformations afin de faire une simulation du comportement des structures et d'entraîner ainsi une procédure d'optimisation des formes ainsi que des dimensions, et ce en tenant compte des fonctions de la structure et du choix du matériau.

L'analyse de tout système d'Engineering nécessite:

- L'idéalisation du système (c'est à dire: sa mise sous forme analysable).
- La formulation des équations gouvernantes pour le système idéalisé.
- La résolution des équations.
- L'interprétation des résultats.

Cependant, il est très rare de résoudre ces équations analytiquement, même au développement actuel des méthodes mathématiques. Une approche numérique est alors utilisée avec l'emploi de méthodes numériques qui sont dans notre cas, les éléments finis et les éléments de frontière et qui ont à maintes reprises et dans plusieurs domaines, prouvé leur efficacité ainsi que leur puissance.

Dans le cadre de notre travail, nous avons élaboré trois programmes en vue d'une analyse statique des problèmes de l'élasticité bidimensionnelle par la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière et ce en usitant l'élément constant en premier lieu puis l'élément linéaire en second lieu.

Pour ce qu'il est de l'analyse dynamique de ces structures qui consiste en l'investigation des modes propres, nous avons élaboré deux autres programmes en éléments finis et éléments de frontière.

Pour conclure, nous dirons donc que l'objectif essentiel de cette étude sera la comparaison entre les différentes façons (qui sont dans notre cas les deux méthodes citées ci-avant) de modéliser les structures relevant du génie civil, telles que: les voiles.

CHAPITRE I
THEORIE DE L'ELASTICITÉ LINEAIRE

1- Introduction:

Un matériau est élastique idéal si à la suite de son déchargement total, il revient à son état initial; autrement dit il restitue entièrement l'énergie. Ainsi, pour un tel modèle, on dira qu'il existe entre l'état de contrainte et l'état de déformation, à une température donnée, une bijection ou alors une relation bi-univoque.

Le but principal de la théorie de l'élasticité linéaire est l'étude des états de contraintes et de déformations d'un solide soumis à un chargement donné.

Pour cela, afin de faciliter cette étude, nous devons tenir compte de certaines hypothèses simplificatrices qui sont:

- * Le solide est supposé isotrope, homogène et élastique.
- * Les déformations sont supposées petites.
- * La loi de comportement contrainte-déformation est supposée linéaire.

2- Équations constitutives de la théorie de l'élasticité linéaire:

Soit un solide élastique, homogène, isotrope occupant une région Ω de frontière Γ . Les équations nécessaires à la résolution d'un problème d'élasticité sont:

- * Les équations déformations-déplacements.
- * Les équations d'équilibre.
- * Les équations contraintes- déformations

2-1 Équations déformations- déplacements

L'état de déformation $[\epsilon]$ est donné par le tenseur suivant:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

tel que :

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31}$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$$

Ainsi, les équations déformations-déplacements sont au nombre de six et sont données par:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i})$$

où $i = \overline{1,3} \quad j = \overline{1,3}$

2-2 Équations d'équilibre:

L'état de contrainte $[\sigma]$ en un point du solide est donné par le tenseur suivant:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

tel que: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Ainsi, les équations d'équilibre sont au nombre de trois et sont données par:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{sur } \Omega \text{ où } i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$$

b_i : composantes des forces volumiques.

Sur la frontière Γ , les composantes du tenseur contrainte doivent satisfaire les équations suivantes:

$$P_i = \sigma_{ij} n_j$$

p_i : tractions surfaciques sur Γ

n_j : composante de la normale par rapport à la direction x_j .

2-3 Équations de compatibilité

Il existe six composantes de déformation

$$(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}, \epsilon_{33})$$

et trois de déplacement (U_1, U_2, U_3)

Ainsi, il nous serait parfaitement possible de déterminer les six fonctions ϵ_{ij} en nous donnant arbitrairement trois fonctions déplacements suffisamment dérivables.

Par contre, l'inverse ne peut se faire, ceci car du point de vue mathématique il y aurait un surplus (six équations différentielles et trois inconnues).

- Les déplacements sont obtenus à des constantes près déterminées grâce aux conditions aux limites.

Remarques:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} &= - \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= - \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= - \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right\} \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} \right\} \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} \right\}
 \end{aligned}$$

Ces conditions sont données par les relations suivantes:
 déplacement, mais non son unicité.
 forme des déformations, et assurant l'existence d'un champ de conditions de compatibilité exprimant les restrictions sur la
 C'est pour cela, qu'en 1864 "Saint-Venant" a établi des

- Les équations de compatibilité sont au nombre de six, mais leur degré d'indépendance est de trois.

2-4 Équations contraintes-déformations

Soit un état de contrainte en un point défini par $[\sigma_{ij}]$; et soit un état de déformation infinitésimal défini par $[\epsilon_{ij}]$.

La relation la plus simple pouvant exister entre les contraintes et les déformations est une relation linéaire exprimée de la manière suivante:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

et qui s'écrit matriciellement:

$$[\sigma] = [C]_{6 \times 6} \{\epsilon\}$$

ou encore:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{44} \\ \sigma_{55} \\ \sigma_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & \dots & \dots & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & \dots & \dots & C_{26} \\ C_{31} & & \dots & \dots & \dots & C_{36} \\ C_{41} & & & \dots & \dots & C_{46} \\ C_{51} & & & & \dots & C_{56} \\ C_{61} & & & & & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \end{Bmatrix}$$

Remarques:

- * Les coefficients C_{ijkl} sont les fonctions réponses du matériau ayant la dimension $F.L^{-2}$
- * Les coefficients C_{ijkl} sont les composantes d'un tenseur du quatrième ordre de 81 termes.
- * Pour un matériau homogène, les C_{ijkl} sont indépendants de la position, alors que pour un matériau isotrope, ils sont indépendants du repère de référence.
- * Vu la symétrie des tenseurs contrainte et déformation, le nombre de constantes C_{ijkl} indépendantes se réduit à 36.

En effet:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & \text{ donne } C_{ijkl} = C_{jikl} \\ \epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} & \text{ donne } C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{aligned}$$

* Pour un matériau linéaire élastique, la matrice [C] devient symétrique, ainsi le nombre de termes indépendants passe de 36 à 21.

Il est important de noter que lorsque la structure du matériau possède un ou plusieurs plans de symétrie élastique, le nombre de termes indépendants pour la matrice [C] est réduit selon le cas.

λ et μ : coefficients de LAMÉ donnés en fonction du module de Young "E", du coefficient de Poisson " ν " et du coefficient de cisaillement " G " par les relations suivantes:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Le nombre de termes indépendants dans ce cas se réduira à 2. La matrice [C] s'écrira alors comme suit:

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$$

symétrie

On peut exprimer la matrice inverse de [C] par:

$$[D] = [C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}$$

symétrie

La loi de "HOOKE" pour un matériau isotrope est alors:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ \epsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \\ \epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} \end{cases}$$

3- Problèmes de l'élasticité plane:

D'une manière générale, il est impossible de déterminer une solution rigoureuse pour les problèmes tridimensionnels; en effet, ceci n'est faisable que pour quelques cas simples. C'est pour cela, qu'on a souvent tendance à simplifier ce genre de problèmes en les ramenant à des problèmes bidimensionnels de manière à trouver une solution mathématique raisonnable. Afin d'explicitier ce qui a été dit, voici deux cas particuliers:

3-1 Cas de contraintes planes:

Le modèle de contraintes planes convient bien aux plaques minces sollicitées dans leur plan.
Les hypothèses de base de ce modèle sont:

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$$

Pour un matériau isotrope, les relations contraintes-déformations deviennent:

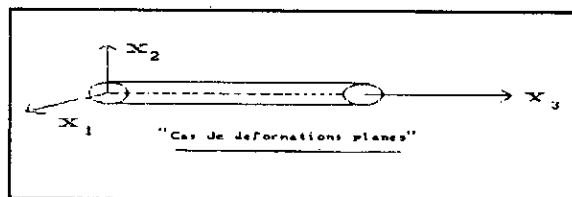
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

ou encore:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

3-2 Cas de déformations planes:

Pour ce genre de problèmes, on suppose que la dimension du corps dans la direction de l'axe x_3 est très étendue. Un exemple très simple pour ce cas est celui d'un cylindre élancé dont la dimension selon x_3 est très grande par rapport aux deux autres dans le plan x_1x_2 .



Les hypothèses de base sont données par les relations suivantes:

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$$

Pour un matériau isotrope, les relations contraintes-déformations deviennent:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Ne perdons pas de vue que la contrainte σ_{33} n'est pas nulle, mais peut être déterminée en posant $\epsilon_{33} = 0$

On a alors:

$$\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0$$

d'où $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$

Remarque:

Les formules trouvées pour le cas des contraintes planes peuvent être déterminées à partir de celles du cas des déformations planes et ceci en remplaçant le module de Young par:

$$\bar{E} = E(1 - \bar{\nu}^2)$$

et le coefficient de Poisson par:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{(1 + \nu)}$$

4- Résolution des problèmes de l'élasticité linéaire:

La résolution des problèmes de l'élasticité linéaire se fait par des:

- Méthodes analytiques pour des cas simples.
- Méthodes numériques pour des cas plus complexes.

Parmi les méthodes analytiques les plus usitées, nous avons celles de la fonction contrainte où une solution appelée "fonction d'AIRY" notée $\Phi(x_1, x_2)$ est au préalable donnée. Par conséquent, l'équation de compatibilité pour un cas de déformations ou de contraintes planes, en négligeant les forces volumiques, s'écrira:

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

Les contraintes sont reliées à la fonction d'AIRY $\Phi(x_1, x_2)$ par:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}$$

$$\sigma_{12} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

On en déduit que:

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \right) = 0$$

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

"Équation biharmonique"

Ainsi, s'il est possible de trouver une fonction Φ satisfaisant l'équation biharmonique à l'intérieur du domaine, et où les contraintes et déplacements sur la frontière vérifient les conditions aux limites; la fonction Φ donnera la solution du problème proposé.

En général, il est plus pratique d'utiliser les méthodes numériques et ce vu leur rapidité et leur efficacité. Parmi ces méthodes, nous citerons la méthode des éléments finis qui a fourni des résultats très proches de ceux des méthodes analytiques.

CHAPITRE II
DYNAMIQUE DES STRUCTURES

1- Introduction:

D'une manière générale, la DYNAMIQUE se traduit par le fait que les forces excitatrices ainsi que les réponses varient dans le temps.

Il est évident que pour un problème dynamique la solution n'est pas unique, l'analyste doit donc établir une succession de solutions correspondant à chaque temps, et par conséquent, l'analyse dynamique devient beaucoup plus complexe que celle en statique.

Si la fréquence d'excitation se trouve être inférieure au tiers de la fréquence propre fondamentale de la structure, alors les effets inertiels seront négligés et le problème deviendra quasi-statique.

2- Formulation des équations de mouvement:

Les expressions mathématiques définissant les déplacements dynamiques sont appelées "équations de mouvement" de la structure.

La formulation de ces dernières s'avère la phase la plus importante et la plus difficile de la procédure.

Pour palier à ceci, nous exposerons dans ce qui suit trois méthodes ainsi que leur concepts fondamentaux.

2-1 Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe de d'ALEMBERT:

Selon la deuxième loi de NEWTON qui dit que le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse m est égal à la force qui lui est appliquée $p(t)$, on a:

$$P(t) = \frac{d}{dt} (m \frac{dx}{dt})$$

ou encore:

$$P(t) - m\ddot{x}(t) = 0$$

Ainsi, la masse m produira une force inertielle proportionnelle à son accélération, d'où le principe de d'ALEMBERT dont l'application nous permettra d'exprimer les équations de mouvement comme les équations d'un équilibre dynamique.

2-2 Principe des déplacements virtuels:

Si un système en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces est soumis à un déplacement virtuel, alors le travail total effectué par ces forces est nul. par conséquent, ceci se traduira par l'expression d'un équilibre.

2-3 Principe de HAMILTON:

Le principe de HAMILTON est un principe variationnel s'exprimant mathématiquement par:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T-U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

où:

T : Energie cinétique totale du système.
U : Energie potentielle totale du système.
W_{nc} : Travail des forces non conservatrices agissant sur le système. (Amortissement et charges extérieures arbitraires).

L'application de ce principe nous conduit aux équations de mouvement de n'importe quel système donné.

Remarques:

- Ce principe fait appel à des grandeurs énergétiques scalaires et non vectorielles comme c'est le cas pour le principe des travaux virtuels.

- Pour un cas statique on a:

$$T=0, \text{ l'équation se réduit à: } \delta(U - W_{nc}) = 0$$

D'où le principe du minimum de l'énergie potentielle souvent usité pour des analyses statiques.

3- Etude des systèmes dynamiques:

3-1 Système à un degré de liberté (SDOF)

Un modèle mécanique simple représentant un système à un degré de liberté serait le suivant: (Fig (a) et (b))

L'équation de mouvement de ce système peut être déterminée par l'une des trois procédures citées ci-dessus; mais pour un cas simple comme celui-ci il serait plus facile de formuler directement l'expression de l'équilibre de toutes les forces agissant sur la masse m, d'où:

$$f_i + f_d + f_s = p(t)$$

où: f_s : force élastique de rappel tel que: f_s = ku

f_i : force inertielle tel que: f_i = m \ddot{u}

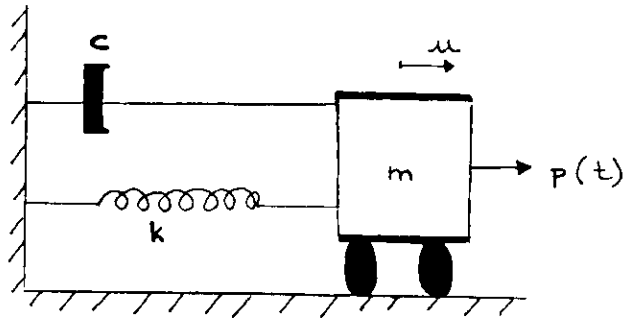


Fig- a-

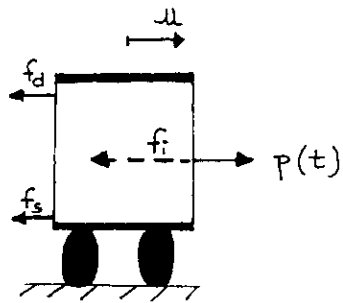


Fig- b-

" systeme à un
degré de
liberté "

f_d : force d'amortissement telle que: $\dot{f} = c\dot{U}$

$p(t)$: force extérieure appliquée.

L'équation s'écrira alors:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

3-2 Système à plusieurs degrés de liberté: (MDOF)

En général, les systèmes rencontrés en pratique sont plus compliqués que celui décrit ci-dessus, c'est pour cela qu'on les modélise par des oscillateurs à plusieurs degrés de liberté (MDOF).

En dynamique, l'équilibre à l'instant "t" d'un système linéaire à "n" degrés de liberté est gouverné par l'équation suivante:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t)$$

où: M : Matrice des masses.
C : Matrice d'amortissement.
K : Matrice de rigidité
P(t): Vecteur des forces extérieures dépendant du temps.
U : Vecteur déplacement

CHAPITRE III
PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE
DES ÉLÉMENTS FINIS

1- Introduction

L'avènement de la méthode des éléments finis comme outil d'analyse a suivi l'avènement de l'ordinateur comme outil de calcul.

L'utilisation de la MEF sur ordinateur permet d'établir et de résoudre les équations gouvernantes pour des problèmes complexes et de manière efficace.

L'appellation MEF revient au professeur R.W CLOUGH de U.C BERKELEY (publication datant de 1960).

La MEF est une méthode numérique qui, basée sur la description simple de variables inconnues, transforme les équations d'équilibre en équations algébriques.

La structure est discrétisée puis mise sous forme d'un assemblage d'éléments finis connectés aux noeuds. Il est à noter que la solution obtenue est approximative, elle est d'autant plus exacte que le nombre d'éléments augmente.

La méthode des éléments finis a été développée sur la base de fondements physiques, puis s'est généralisée.

2- Formulation de la méthode des éléments finis basée sur les déplacements

2-1 Formulation des équations d'équilibre

Notre problème consiste en la détermination des déplacements, déformations et contraintes dans la structure représentée ci dessous sous l'effet du chargement extérieur et des CAL données.

Pour ce faire, il nous faut préalablement établir les équations d'équilibre, en se basant sur le principe de la stationnarité du potentiel total du système, principe d'ailleurs équivalent au principe des travaux virtuels. Ce principe est le suivant :

$$\delta\pi = 0 \text{ avec } \pi = u - w$$

π : énergie potentielle totale

u : énergie de déformation

w : potentiel des charges ou travail des charges.

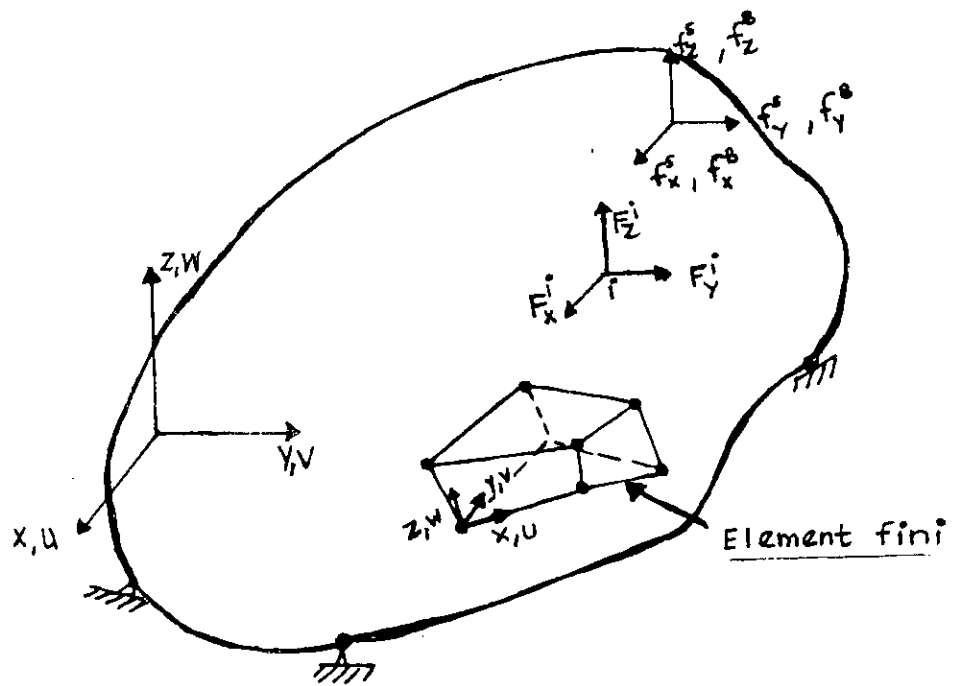
(voir Figure ci - après)

Dans le cas tridimensionnel

----- Déplacement virtuel

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{F}^i = \begin{Bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_z^i \end{Bmatrix}$$



"Système tridimensionnel"

$$\underline{f}^B = \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \\ f_z^B \end{bmatrix} \quad \underline{f}^S = \begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \\ f_z^S \end{bmatrix} \quad (1)$$

Soit \underline{U} le vecteur déplacement $\underline{U}^T = [u, v, w]$ (2)

Les déformations correspondant à \underline{U} sont :

$$\underline{\epsilon}^T = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}] \quad (3)$$

Les contraintes correspondant à \underline{E} sont :

$$\underline{\tau}^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}] \quad (4)$$

Le principe des travaux virtuels stipule que l'équilibre du système impose que pour tout champ de déplacements virtuels, compatible satisfaisant les CAL essentielles (de type déplacement) il y ait égalité des travaux intérieur et extérieur c'est à dire :

$$\int_V \bar{\underline{\epsilon}}^T \underline{\tau} dv = \int_V \bar{\underline{U}}^T \underline{f}^B dv + \int_S (\bar{\underline{U}}^S) \underline{f}^S ds + \sum_i (\bar{\underline{U}}^i) \underline{F}^i \quad (5)$$

- : virtuel.

Dans la MEF, on suppose que le milieu est discrétisé en un ensemble d'éléments. Chaque élément possède son propre système de coordonnées (système de coordonnées locales).

Le déplacement $\underline{U}^{(m)}$ au niveau de l'élément (m) s'exprime en fonction des autres déplacements nodaux comme suit :

$$\underline{U}^{(m)} = H^{(m)} \hat{\underline{U}} \quad (6)$$

où $\underline{U}^{(m)} = \begin{bmatrix} u^{(m)} \\ v^{(m)} \\ w^{(m)} \end{bmatrix}$

et $\underline{\hat{U}}^T = [u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n]$ vecteur de dimension $3n$,
regroupant les déplacements nodaux
 n : nombre de noeuds dans la structure discrétisée

$H^{(m)}$: matrice d'interpolation des déplacements.

Remarques:

1°) malgré que $\underline{\hat{U}}^T$ renferme tous les déplacements nodaux,
il est à préciser cependant que seuls ceux de l'élément considéré
affectent les déplacements et les déformations de celui-ci :

nous avons:

$$\underline{U}^{(m)} = H^{(m)} \underline{\hat{U}} \Rightarrow \underline{\epsilon}^m = B^{(m)} \underline{\hat{U}} \quad (7)$$

$B^{(m)}$: matrice opérateur différentiel
: matrice déformations-déplacements nodaux.

2°) donc les lignes de $B^{(m)}$ sont le résultat de
différenciation et combinaison des lignes de $H^{(m)}$

L'équation (5) devient alors

$$\sum_m \int_V \underline{\epsilon}^{(m)T} \underline{\tau}^{(m)} dV^{(m)} = \sum_m \int_V \underline{U}^{(m)T} B^{(m)} \underline{f}^{(m)} dV^{(m)} + \sum_m \int_S \underline{U}^{(m)T} \underline{f}^{(m)} ds + \sum_I \underline{U}_i^T F_i \quad (8)$$

$m = 1, 2, \dots, k$, nombre total d'éléments = n

Les différentes intégrations (volumique et surfacique) ont lieu au niveau de chaque élément par rapport au système de coordonnées attaché à celui-ci. Ainsi, le calcul des intégrales peut se faire de manière efficace.

Les relations contraintes-déformations à l'intérieur de l'élément sont:

$$\underline{\tau}^{(m)} = C^{(m)} \underline{\epsilon}^{(m)} \quad (9)$$

La combinaison des équations (7), (8), (9) conduit à:

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\underline{U}}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \right] \underline{\underline{U}} = \bar{\underline{\underline{U}}}^T \left[\left\{ \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)} \underline{\underline{f}}^{B^{(m)}} dV^{(m)} \right\} \right] \\ + \bar{\underline{\underline{U}}}^T \left[\left\{ \sum_m \int_{S^{(m)}} H^{S(m)T} \underline{\underline{f}}^{S(m)} dS^{(m)} \right\} + \underline{\underline{F}} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

où

$\bar{\underline{\underline{U}}}^T$: est indépendant de l'élément considéré

$\underline{\underline{F}}$: vecteur des forces extérieures dont la $i^{\text{ème}}$

composante est une force nodale concentrée correspondant à la $i^{\text{ème}}$ composante de: $\underline{\underline{U}}$.

H^S : matrice d'interpolation des déplacements de surface obtenue en substituant les coordonnées des éléments de surface dans la matrice d'interpolation de volume,

Après élimination de $\bar{\underline{\underline{U}}}^T$ dans (10), on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \right] \underline{\underline{U}} = \left[\left\{ \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)} \underline{\underline{f}}^{B^{(m)}} dV^{(m)} \right\} \right] \\ + \left[\left\{ \sum_m \int_{S^{(m)}} H^{S(m)T} \underline{\underline{f}}^{S(m)} dS^{(m)} \right\} + \underline{\underline{F}} \right] \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut s'écrire encore

$$K \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}} \text{ vraie particulièrement pour } \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}$$

$$\text{où } \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}_B + \underline{\underline{R}}_S + \underline{\underline{R}}_C$$

$$K^{(m)} = \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}$$

$$K = \sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}$$

$$\underline{R}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \underline{f}^{B(m)} dV^{(m)}$$

$$\underline{R}_S = \sum_m \int_{S^{(m)}} H^{S(m)T} \underline{f}^{S(m)} dS^{(m)}$$

$$\underline{R}_C = \underline{F}$$

Donc \underline{R} : vecteur chargement

$K^{(m)}$: matrice de rigidité élémentaire

Remarque:

- 1°/ L'équilibre est satisfait en tout noeud.
- 2°/ La condition de compatibilité est satisfaite dans la mesure où les éléments finis sont compatibles.
- 3°/ La loi de comportement $\sigma - \epsilon$ est satisfaite.

2-2 Formulation en coordonnées généralisées :

Soit l'équation suivante :

$$\underline{U}^{(m)} = H^{(m)} \underline{\hat{U}}$$

Parmi les classes de fonctions que l'on peut utiliser pour décrire d'une façon efficace les déplacements à l'intérieur d'un élément, celle des fonctions polynômiales s'adapte le mieux, car les concepts d'interpolation polynomiale sont communément utilisés pour approcher des fonctions inconnues. De plus, puisque les polynômes sont facilement dérivables, les déformations sont alors facilement obtenues.

Les déplacements u, v, w sont donc des fonctions des coordonnées x, y, z ; nous avons en général :

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \dots$$

$$v(x, y, z) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 xy + \dots$$

$$w(x, y, z) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 z + \gamma_5 xy + \dots$$

où $\alpha_1 \alpha_2 \dots \beta_1 \beta_2 \dots \gamma_1 \gamma_2 \dots$ sont les coordonnées généralisées. Le système précédent s'écrit sous forme matricielle comme suit:

$$\underline{U} = \Phi \underline{\alpha} \quad (11) \quad \text{où} \quad \underline{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Φ : regroupe les termes de la base polynomiale

$\underline{\alpha}$: vecteur des coordonnées généralisées

En substituant les coordonnées des noeuds des éléments dans l'équation (11), les coordonnées généralisées en termes de déplacements nodaux devient :

$$\underline{\hat{U}} = A \underline{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha} = A^{-1} \underline{\hat{U}} \quad (12)$$

après substitution de (12) dans (11), on obtient:

$$\underline{U} = \Phi A^{-1} \underline{\hat{U}} \quad \text{i.e.} \quad \underline{U} = H \underline{\hat{U}} \quad \text{où} \quad H = \Phi A^{-1}$$

Le vecteur des déformations s'obtient après différenciation de \underline{U} :

$$\underline{\epsilon} = B \underline{\hat{U}} \quad \text{où} \quad B = E A^{-1}$$

E : la matrice liant les déformations aux coordonnées généralisées

$$\underline{\epsilon} = E \underline{\alpha}$$

3- Formulation de la méthode des éléments finis basée sur les déplacements en dynamique :

Dans le cas où les forces excitatrices varient dans le temps, alors les déplacements qu'elles sont susceptibles d'engendrer varient dans le temps, et donc l'équation (5) ne représentera qu'un état d'équilibre de la structure à un instant bien précis.

3-1- FORMULATION DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DYNAMIQUE :

Les équations de la réponse dynamique d'une structure sont obtenues à partir de l'équilibre des travaux virtuels des forces extérieures et des forces internes d'inertie et de frottement :

$$\int_{ve} \delta \underline{U}^T \underline{F} dV_e + \int_{se} \delta \underline{U}^T \underline{\phi} dS + \sum_{i=1}^n \delta \underline{U}_i^T \underline{P}_i = \int_{ve} (\delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} + \delta \underline{U}^T \rho \underline{\ddot{U}} + \delta \underline{U}^T \underline{K}_d \dot{\underline{U}}) dV$$

où:

$\delta \underline{U}$ et $\delta \underline{\epsilon}$ sont les déplacements et leurs déformations.

\underline{F} et $\underline{\phi}$ sont les forces de volume et de surface.

\underline{P}_i et $\delta \underline{U}_i$ sont les charges ponctuelles en i et les déplacements correspondants.

Après utilisation de la notation éléments-finis i.e.:

$$\underline{U} = H \underline{\hat{U}} \quad \text{on a:}$$

$$\delta \underline{\hat{U}}^T \left[\int_{V^e} B^T \underline{\sigma} dV^e + \int_{V^e} \rho H^T dV^e \ddot{\underline{\hat{U}}} \right] + \delta \underline{\hat{U}}^T \left[\int_{V^e} K_d H^T H dV^e \dot{\underline{\hat{U}}} - \int_{V^e} H^T \underline{F} dV^e - \int_{S^e} H^T \underline{\phi} dS^e - \sum_{i=1}^n \underline{P}_i \right] = 0$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$[m] \ddot{\underline{\hat{U}}} + [C] \dot{\underline{\hat{U}}} + \underline{\Gamma}^{int} = \underline{\Gamma}^{ext}$$

où

$$\begin{aligned} [m] &= \int_{V^e} \rho H^T H dV^e \\ [C] &= \int_{V^e} K_d H^T H dV^e \\ \underline{\Gamma}^{int} &= \int_{V^e} B^T \underline{\sigma} dV^e \\ \underline{\Gamma}^{ext} &= \int_{V^e} H^T \underline{F} dV^e \end{aligned}$$

- [m] : matrice masse élémentaire.
- [C] : matrice d'amortissement élémentaire.
- $\underline{\Gamma}^{int}$: vecteur des forces internes élémentaire.
- $\underline{\Gamma}^{ext}$: vecteur des forces externes élémentaire.

3-2 Détermination de la matrice masse :

La matrice masse est une distribution continue de masses, elle peut être soit cohérente, soit concentrée à coefficients égaux, soit concentrée à coefficients inégaux.

3-2-1 Matrice masse cohérente :

Lorsque le déplacement et la variation du champ accélération à travers l'élément sont décrits par les mêmes fonctions de formes, la matrice masse est dite matrice masse cohérente; elle est donnée par :

$$[m] = \int_{V^e} \rho H^T H dV^e$$

Cette matrice est symétrique définie positive

3-2-2 Matrice masse concentrée à coefficients égaux:

C'est la formulation la plus simple et la plus ancienne, elle consiste à répartir équitablement la masse totale en tous les noeuds de la structure; c'est une matrice diagonale de la forme :

$$m_{ii} = \frac{1}{n} \int_{S^e} \rho dS^e \quad i = 1, n$$

où

- n : nombre de noeuds.
- i : correspond aux translations

3-2-3 Matrice masse concentrée à coefficients inégaux :

Dans ce cas, la matrice masse [m] est diagonale, ses éléments sont les éléments diagonaux de la matrice masse cohérente, que l'on multiplie de manière à préserver la masse totale de l'élément. Les éléments de la matrice sont de la forme:

$$m_{ii} = \frac{\left(\int_{V^e} \rho H_i H_i dV^e \right) \left(\int_{V^e} \rho dV^e \right)}{\int_{V^e} \left(\sum_{i=1}^n \rho H_i H_i \right) dV^e}$$

où

$\left(\int_{V_e} \rho H_i H_i dV_e \right)$: élément diagonal de la masse cohérente.
	↑ matrice
$\left(\int_{V_e} \rho dV_e \right)$: masse totale de l'élément.
$\int_{V_e} \left(\sum_{i=1}^n \rho H_i H_i \right) dV_e$: Somme des éléments diagonaux de la matrice masse cohérente.

4- Vibrations libres:

L'équation de mouvement d'un système discret en l'absence de forces extérieures et de l'amortissement est donné par :

$$K \underline{\hat{U}} + M \underline{\hat{U}} = 0 \quad (*)$$

avec :

[K] : matrice de rigidité globale
[M] : matrice masse.

Si à chaque degré de liberté de la structure, on associe un mouvement harmonique en phase avec les autres degrés de liberté, on aura :

$$\underline{\hat{U}} = \Phi \sin \omega t \quad \text{et donc} \quad \underline{\hat{U}} = -\omega^2 \Phi \sin \omega t$$

avec: Φ : amplitude des degrés de liberté nodaux
 ω : pulsation

L'équation (*) s'écrira alors :

$$K \Phi = \omega^2 M \Phi$$

La résolution de cette équation appelée "système propre" permet d'avoir n couples $\omega^2 \Phi$ définissant chacun un mode propre de vibrations libres d'une structure, le mode pour lequel ω^2 est la plus petite est appelé "mode fondamental".

5- Convergence de la méthode des éléments finis:

Dans une analyse de type éléments finis, la solution converge vers la solution exacte au fur et à mesure que l'on affine la discrétisation.

La convergence peut se faire de deux manières

* Convergence monotone :

Pour que la solution converge vers la solution analytique de façon monotone, les éléments doivent être complets et compatibles.

Élément complet:

Les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter :

- Déplacements de corps rigide
- Etat de déformations constantes.

Élément compatible:

La condition de compatibilité assure la continuité des déplacements au sein et à travers les limites séparant les éléments.

Cette condition peut s'exprimer physiquement par le fait qu'aucun vide ou recouvrement n'apparaît entre les éléments une fois l'assemblage effectué.

La compatibilité est difficile à satisfaire lorsque les degrés de liberté des noeuds sont dépendants (flexion des poutres, plaques et coques ...); c'est pourquoi il est plus avantageux d'avoir des degrés de liberté indépendants.

* Convergence non monotone :

En pratique, nous remarquons souvent que la solution éléments finis converge vers la solution exacte malgré l'emploi d'éléments ne préservant pas la continuité inter-éléments. Il s'agit dans ce cas de convergence non monotone due à l'utilisation d'éléments incompatibles.

Pour avoir une convergence non monotone, il faut assurer les deux conditions suivantes :

- Éléments complets
- Satisfaction du patch test, complétude collective

Le patch-test permet de prédire les déplacements de corps rigide. En effet, les incompatibilités entre éléments peuvent empêcher à l'assemblage de représenter des états de déformation constantes.

Ce test consiste à imposer aux noeuds extrêmes d'un groupe d'éléments, contenant au moins un noeud interne, des déplacements ou forces en accord avec un état de déformation constante.

Le test est satisfait si les solutions analytiques et numériques sont sensiblement égales.

CHAPITRE IV
PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE
DES ÉQUATIONS INTÉGRALES AUX
FRONTIÈRES

1- Introduction:

Malgré la diversité et l'efficacité des méthodes numériques telles que les différences finies et les éléments finis, l'analyste s'est senti dans le besoin de chercher après d'autres méthodes plus performantes.

La BEM (*Boundary element method*) a fait son apparition cette dernière décennie afin de remédier aux insuffisances des méthodes déjà existantes. En effet, cette méthode basée sur une formulation intégrale, a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du problème du fait que seules les inconnues sur la frontière sont prises en considération, aussi, est appliquée aux problèmes d'extension à l'infini.

Cependant, malgré le développement vertigineux qu'a connu cette méthode, elle présente quelques insuffisances en ce qui concerne les problèmes élastodynamiques ainsi que les problèmes non linéaires.

Les équations intégrales ont été étudiées par plusieurs mathématiciens, **Fredholm** (1905), **Voltera** (1959).

C'est à **Rizzo** (1967) que reviennent les premières approches numériques des problèmes d'élastostatique par des équations intégrales aux frontières.

La première formulation et solution de problèmes élastodynamiques par combinaison de la technique d'intégration aux frontières et de la transformée de **Laplace** revient aux professeurs **Cruse** et **Rizzo** qui ont appliqué cette méthode pour un problème de propagation d'ondes.

Cole et **Al** (1978) ont formulé le problème en terme d'équations intégrales aux frontières en fonction des coordonnées d'espace et de temps, et ont utilisé pour la résolution, les schémas d'intégrations pas à pas.

Très récemment, certains auteurs tels que **Hutchinson**, **Niwa** et **Al**, **Nardini** et **Brebbia** se sont intéressés à la résolution de problèmes aux valeurs propres.

2- Formulation des équations intégrales aux frontières en statique.

2-1 Solution fondamentale:

La formulation de l'équation intégrale aux frontières en élastostatique, nécessite la connaissance de la réponse d'un milieu infini possédant les mêmes propriétés due à une impulsion unitaire appliquée en un point i dans la direction du vecteur unitaire e_L , cette solution est dite solution de **Kelvin**.

Cette force produira un état de contrainte σ_{ij}^* , de déformations ϵ_{ij}^* et de déplacement de point U_j^* . L'équilibre impose:

$$\sigma_{Lj,j}^* + \Delta^i e_L = 0 \quad (1)$$

avec Δ^i fonction de **Dirac**

en substituant l'équation contrainte-déformation

$$\sigma_{Lj}^* = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{Lj} \epsilon_{mm}^* + \epsilon_{Lj}^* \right] \quad (2)$$

et l'équation déformation-déplacement:

$$\epsilon_{Lj}^* = \frac{1}{2} (U_{L,j}^* + U_{j,L}^*) \quad (3)$$

On obtient l'équation d'équilibre en terme de déplacement dite équation de Navier suivante:

$$\frac{1}{(1-2\nu)} U_{j,jL}^* + U_{L,jj}^* + \frac{1}{\mu} \Delta^i_{eL} = 0 \quad (4)$$

Une alternative pour déterminer cette solution fondamentale consiste à représenter le déplacement en terme de vecteur de Galerkin.

Les expressions des déplacements sont alors:

$$U_j^* = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (5)$$

en substituant l'équation (5) dans (4) on obtient:

$$G_{1,mmjj} + \frac{1}{\mu} \Delta^i_{eL} = 0 \quad (6)$$

ou encore:

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_L) + \frac{1}{\mu} \Delta^i_{eL} = 0 \quad (7)$$

en faisant un changement de variable, nous obtenons:

$$\nabla^2 F_L + \frac{1}{\mu} \Delta^i_{eL} = 0 \quad (8)$$

tel que: $F_L = \nabla^2 G_L$

La solution homogène sans le second membre de l'équation (8) est d'abord établie, puis on intègre dans le domaine pour déterminer les constantes d'intégration.

En exprimant le Laplacien en coordonnées polaires, l'équation homogène aura pour solution:

$$F_L = C_1 \ln(r) + C_2 \quad (9)$$

où

r: distance entre le point considéré et le point d'application de la force unitaire en "i".

Pour déterminer les constantes d'intégration, on intègre (8) tel que:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 F_L d\Omega = \int_{\Omega} -\frac{1}{\mu} \Delta^i_{e_L} d\Omega = -\frac{1}{\mu} e_L \quad (10)$$

En appliquant la formule de Green à l'équation précédente, nous avons:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 F_L d\Omega = \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial F_L}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{\mu} e_L \quad (11)$$

or l'équation (10) présente une singularité pour $r=0$, pour y remédier, en accord avec la figure (1), l'équation (10) est mise sous la forme suivante:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 F_L d\Omega = \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \nabla^2 F_L d\Omega + \int_{\Omega_\epsilon} \nabla^2 F_L d\Omega = -\frac{1}{\mu} e_L \quad (12)$$

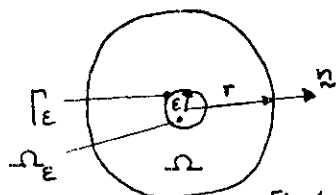


Fig. 1.

où Ω_ϵ est un disque de rayon r tendant vers zéro.

La résolution de l'équation (7) [voir ref H.A] donne

$$G_L = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(1/r) e_L \quad (13)$$

En considérant chaque force indépendamment, on écrit:

$$G_{lk} = G \delta_{lk} \quad (14)$$

$$\text{où } G = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(1/r) \quad (15)$$

où G_{lk} est la composante suivant la direction "k" du vecteur de Galerkin, quand une force unitaire est appliquée en "i" dans la direction "l"

Le déplacement d'un point du domaine infini dû à cette force unitaire est:

$$U_k^* = U_{1k}^* e_L$$

où

U_{1k}^* est le déplacement selon la direction "k" dû à l'application de la force unitaire selon la direction l en accord avec l'équation (5), nous avons:

$$U_{1k}^* = G_{1k,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{1m,km} \quad (16)$$

en substituant les équations (14) et (15) dans (16), on obtient pour un cas bidimensionnel en déformation plane l'équation suivante:

$$U_{1k}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \{ (3-4\nu) \text{Ln}(1/r) \delta_{kl} + r_{,L} \cdot r_{,k} \} \quad (17)$$

où

$$r_{,L} = \frac{\partial r}{\partial x_L} \quad r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k}$$

Cette force unitaire, produira aussi un état de contrainte en tout point du domaine infini, en utilisant la relation déformation-déplacement et la relation contrainte-déformation ceci nous conduit à:

$$\sigma_{kj}^* = S_{1kj}^* e_L \quad (18)$$

avec

$$S_{1kj}^* = \left[\frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)} \delta_{kj} U_{1m,m}^* + \mu (U_{1k,j}^* + U_{1j,k}^*) \right]$$

En remplaçant la dérivée de l'équation (17) dans l'équation (18), on obtient les tractions surfaciques suivantes:

$$P_{1k}^* = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{lk} + 2 r_{,L} r_{,k} \right] + (1-2\nu)(n_L r_{,k} - n_k r_{,L}) \right\} \quad (19)$$

ainsi:

P_{1k}^* et U_{1k}^* sont les solutions fondamentales en deux dimensions établies par Kelvin pour des domaines infinis.

2-2 Formulation de l'équation intégrale aux frontières

La méthode des résidus pondérés permet en utilisant des fonctions de pondérations, de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale.

Pour illustrer comment la BEM peut être déduite d'une technique de résidus pondérés, nous considérons le problème régit par l'équation suivante:

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

satisfaisant les conditions aux frontières suivantes:

(i) essentielles ou déplacement prescrits:

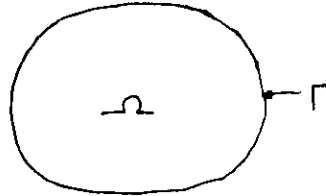
$$U_k = \bar{U}_k \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2)$$

(ii) naturelles ou tractions prescrites:

$$P_k = \sigma_{kj} n_j = \bar{P}_k \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (3)$$

avec

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$



Pour résoudre cette équation, nous interpolons le champ de déplacement. Ceci nous conduit à un résidu qu'on va minimiser par le biais des résidus pondérés.

L'énoncé des résidus pondérés est écrit:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{kj,j} + b_k \right) U_k^* d\Omega = 0 \quad (4)$$

en appliquant la formule de Green, on obtient:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{kj} U_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \sigma_{kj} U_k^* n_j d\Gamma \quad (5)$$

or

$$\sigma_{kj} n_j = P_k \quad (6)$$

$$\sigma_{kj} U_{k,j}^* = \sigma_{kj} \epsilon_{kj}^*$$

Grâce au principe de réciprocité dû à la symétrie du tenseur d'élasticité, nous avons:

$$\sigma_{kj} \epsilon_{kj}^* = \sigma_{kj}^* \epsilon_{kj} \quad (7)$$

En substituant les équations (6) et (7) dans l'équation (5) nous obtenons la forme équilibrée de l'équation intégrale suivante:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj}^* \varepsilon_{kj} d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k U_k^* d\Gamma \quad (8)$$

En intégrant par partie le terme de gauche, on obtient la forme inversée de l'équation intégrale suivante:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* U_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* U_k d\Gamma \quad (9)$$

En considérant à présent les conditions aux frontières, équations (2) et (3), l'équation (9) deviendra :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* U_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_1} p_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k p_k^* d\Gamma \quad (10)$$

En intégrant 2 fois par partie le terme de gauche, on obtient:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{kj,j} + b_k \right) U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} \left(p_k - \bar{p}_k \right) U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \left(U_k - \bar{U}_k \right) p_k^* d\Gamma \quad (11)$$

L'équation (11) exprime l'énoncé généralisé des résidus pondérés dans le cas où les conditions aux frontières sont imposées, utilisé pour établir les équations intégrales aux frontières. Les fonctions de pondération, sont dans ce cas les solutions fondamentales établies par Kelvin dues à une force unitaire dans la direction 1 i.e.:

$$\sigma_{jk,j}^* + \Delta_{el}^i = 0 \quad (12)$$

Δ_{el}^i : fonction delta Dirac dont la propriété principale est:

$$\int_{\Omega} f(x) \Delta_{e_L}^i d\Omega = f(x_i) \quad (13)$$

moyennant l'équation (13), l'équation (10) devient:

$$U_1^i + \int_{\Gamma_1} P_{1k}^* \bar{U}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} P_{1k}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma_1} U_{1k}^* P_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_{1k}^* \bar{P}_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{1k}^* b_k d\Omega \quad (14)$$

tel que:

$$U_k^* = U_{Lk}^* e_L$$

$$P_k^* = P_{Lk}^* e_L$$

La forme compacte de l'équation (14) est en considérant

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

$$U_1^i + \int_{\Gamma} P_{1k}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{1k}^* P_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{1k}^* b_k d\Omega \quad (15)$$

L'équation (15) est dite identité de Somigliana et détermine le déplacement d'un point particulier "i" où l'impulsion unitaire est appliquée:

Les contraintes pour un point intérieur "i" sont obtenues après différentiation de l'équation P_{Lk}^* [Ref:8] soit

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} P_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} U_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (15)'$$

où les composantes des tenseurs D_{kij} et S_{kij} sont

$$D_{kij} = \frac{1}{\Gamma} \left\{ (1-2\nu) \left[\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \right] + 2r_{,j} r_{,i} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
S_{kij} = \frac{2\mu}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} r_{,k} + \nu(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \right. \\
+ 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + ((1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\
\left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (17)
\end{aligned}$$

Cependant les déplacements des points internes ne peuvent être déterminés que si toutes les inconnues sur la frontière à savoir les déplacements U_k et les tractions P_k sont toutes connues. Par conséquent, il est intéressant d'examiner la forme limite de l'équation où le point source "i" appartient à la frontière Γ du domaine.

Cependant quand "i" est pris sur la frontière, il apparaît une singularité dans l'intégrale, pour y remédier, on suppose le point "i" entouré d'une hémisphère de rayon ϵ tendant vers zéro.



Après un calcul aux limites [Ref], on obtient l'équation intégrale aux frontières suivante:

$$C^i_{lk} U^i_k + \int_{\Gamma} p^*_{lk} U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U^*_{lk} p_k d\Gamma + \int_{\Omega} U^*_{lk} b_k d\Omega \quad (18)$$

où les intégrales sont au sens des valeurs principales de Cauchy.

C^i est un coefficient qui dépend de la forme et de l'état de surface au point "i".

$$\begin{aligned}
C^i &= \delta_{ij}/2 \text{ quand } i \text{ se trouve sur une frontière lisse et plane} \\
C^i &= \delta_{ij} \text{ quand } i \text{ est un point interne}
\end{aligned}$$

en pratique C^i est déterminé en considérant des mouvements de corps rigides.

2-3 Représentation matricielle en statique

La résolution analytique de l'équation (18) étant difficile à mener même au niveau actuel du développement des méthodes mathématiques, la BEM utilise alors une approche numérique.

Cette approche consiste à diviser la frontière Γ en une série d'éléments sur lesquels les déplacements et les tractions sont supposés varier selon un choix approprié des fonctions d'interpolations généralement, constantes, linéaire, quadratiques, ou cubiques.

Pour cet effet, exprimons les inconnues U et P en fonction des déplacements nodaux des éléments de frontière "j" i.e.

$$\begin{aligned} U &= \phi U^j \\ P &= \phi P^j \end{aligned} \quad (19)$$

Dans un cas bidimensionnel, nous avons:

$$\begin{aligned} \{U\} &= \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \text{ Vecteur déplacement} \\ \{P\} &= \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \text{ Vecteur traction} \\ \{b\} &= \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \text{ Vecteur forces volumiques} \end{aligned}$$

Les solutions fondamentales sont exprimées matriciellement:

$$\begin{aligned} [P^*] &= \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \text{ matrice dont les composantes } P_{lk} \\ &\text{ sont les tractions dans la direction } k \text{ dues à l'application d'une} \\ &\text{ force unitaire en "i" dans la direction "L".} \\ [U^*] &= \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \text{ matrice dont les composantes } U_{lk} \text{ sont les} \\ &\text{ déplacements dans la direction } k \text{ dues à l'application d'une force unitaire en} \\ &\text{ "i" dans la direction "L"} \end{aligned}$$

Avec ces notations l'équation est exprimée matriciellement

$$\boxed{[C^i] \{U^i\} + \int_{\Gamma} [P^*] \{U\} d\Gamma = \int_{\Gamma} [U^*] \{P\} d\Gamma} \quad (20)$$

En discrétisant la frontière en éléments, on obtient l'équation suivante en absence des forces de volume:

$$C^i U^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} P^* \phi \, d\Gamma \right\} U^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} U^* \phi \, d\Gamma \right\} P^j \quad (21)$$

où

- N : nombre d'élément de la frontière
- U^i, P^j : les déplacements et tractions nodales de l'élément "j"
- ϕ : fonctions d'interpolations

En projetant l'équation (21) dans un système de coordonnées curvilignes, et en appliquant la quadrature de Gauss, on obtient:

$$[C^i] \{U^i\} + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{s=1}^m |J| \omega_s [P^*]_s [\phi^i]_s \right) U_j = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{s=1}^m |J| \omega_s [U^*]_s [\phi^j]_s \right) P_j \quad (22)$$

- m : nombre de points d'intégration
- ω_s : coefficients de pondération correspondants
- $[P^*]_s, [\phi^i]_s, [U^*]_s$ les valeurs des fonctions aux points d'intégration.
- |J|: jacobien de la transformation du système de coordonnées.

L'équation est écrite ensuite:

$$[C^i] \{U^i\} + \sum_{j=1}^N [\hat{H}_{ij}] \{U_j\} = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \{P_j\} \quad (23)$$

$[\hat{H}_{ij}]$ et $[G_{ij}]$: matrices (2x2)

Pour un noeud "i" se déplaçant sur toute la frontière l'équation (23) donne 2N équations.

en posant:

$$\begin{aligned} [H_{ij}] &= [\hat{H}_{ij}] \text{ pour } i \neq j \\ [H_{ij}] &= [\hat{H}_{ij}] + [C^i] \text{ pour } i = j \end{aligned} \quad (24)$$

où $[C^i]$ matrice (2x2) qui dépend de la géométrie de la frontière.

Nous obtenons, après les considérations précédentes:

$$\sum_{j=1}^N [H_{ij}] \{U_j\} = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \{P_j\} \quad (25)$$

En appliquant cette dernière pour chaque noeud de la frontière, on obtient un système d'équations algébriques, de la forme:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\}$$

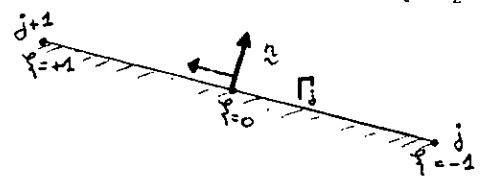
qui après prise en compte des conditions aux limites et réarrangement, donne un système d'équations linéaires, sous forme $[A]\{X\} = \{B\}$

2-3-1 Interpolation linéaire:

Nous interpolons deux valeurs pour U et P tel que:

$$U = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \end{Bmatrix} = \phi U^j \quad (28a)$$

$$P = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^j \\ P_2^j \\ P_1^{j+1} \\ P_2^{j+1} \end{Bmatrix} = \phi P^j \quad (28b)$$



où U^j et P^j font allusion à l'élément j dont les composantes U_1^k et P_1^k sont les déplacements et tractions au point "k" dans la direction "1"

Les fonctions ϕ_j sont les fonctions d'interpolation linéaires définies par:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \zeta)$$

L'équation (21) devient

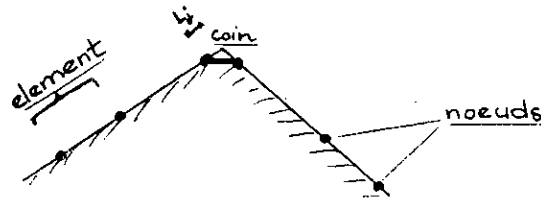
$$C^i U^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} P^* [\phi_1 \phi_2] d\Gamma \begin{Bmatrix} U^j \\ U^{j+1} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} U^* [\phi_1 \phi_2] d\Gamma \begin{Bmatrix} P^j \\ P^{j+1} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Problème du coin:

Lorsque le point source "i" est sur une frontière lisse, la valeur de C^i est la matrice diagonale avec $\frac{1}{2}$ sur la diagonale, mais quand "i" est sur un coin, l'intégrale

$\int_{\Gamma} P^* d\Gamma$ donne des résultats différents, en effet le déplacement a une valeur unique, alors que la traction qui est une dérivée de U par rapport à la normale peut en avoir plusieurs. Différentes approches ont été proposées afin de remédier à ce problème tel que le concept du noeud unique, de noeuds multiples indépendants et le concept de noeuds doubles non confondus adopté dans notre programme.

Cette approche consiste à dédoubler le noeud au coin et à considérer un segment L_j reliant les 2 noeuds.



Concept des noeuds doubles non confondus

2-3-2 Interpolation constante

Dans ce cas les valeurs de U et P sont constantes sur chaque élément et sont égales aux valeurs du noeud situé au milieu de l'élément.

Si la frontière est discrétisée en N éléments, l'équation intégrale s'écrira:

$$C^i U^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} P^* d\Gamma \right\} U^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} U^* d\Gamma \right\} P^j \quad (30)$$

et donc les fonctions d'interpolation sont: $\phi = 1$

3- Équations intégrales aux frontières en dynamique:

3-1 Équations gouvernantes et conditions aux frontières

Considérons un solide homogène, élastique, linéaire occupant une région Ω et ayant comme frontières de domaine, la surface Γ_0 .

Les équations fondamentales en dynamique sont:

- Équation de mouvement

$$\sigma_{jk,j} + b_k = \rho \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \quad (1)$$

- Équation constitutive

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2)$$

- Équation cinématique

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (3)$$

En substituant les équations (2) et (3) dans (1), on obtient:
L'équation de Navier-Cauchy suivante:

$$(\lambda + \mu) U_{j,jk} + \mu U_{k,jj} + b_k = \rho \ddot{U}_k \quad (4)$$

$$\text{où } \ddot{U}_k = \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \quad (5)$$

Les conditions aux frontières sont de deux types:

- Essentielles $U = \bar{U}$ sur Γ_1

- Naturelle $p = \bar{p}$ sur Γ_2

avec

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Les conditions initiales sont les suivantes:

$$U_i(x, t) = U_i^0(x)$$

$$\dot{U}_i(x, t) = v_i^0(x) \quad t=t_0 \text{ sur } \Omega \text{ et } \Gamma \quad (7)$$

3-2 Formulation de l'équation intégrale en dynamique:

3-2-1 Formulation directe de l'équation intégrale en dynamique:

Le système d'équations aux dérivées partielles illustré par l'équation (1) est ramené à une formulation intégrale grâce à la technique des résidus pondérés. Les fonctions de pondération étant les solutions fondamentales dépendant du temps, l'énoncé des résidus pondérés est dans le cas dynamique exprimé comme suit:

$$\int_{t_0}^{\tau} \int_{\Omega} \left(-\rho \ddot{U}_k + \sigma_{jk,j} + b_k \right) U_k^* d\Omega dt = \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Gamma_1} \left(P_k - \bar{P}_k \right) U_k^* d\Gamma dt + \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Gamma_2} \left(U_k - \bar{U}_k \right) P_k^* d\Gamma dt \quad (8)$$

En intégrant deux fois par partie le terme de gauche de l'équation (8) (voir chapitre) et deux fois par partie le terme exprimant l'accélération du système par rapport au temps nous obtenons, en absence des forces de volume:

$$-\int_{t_0}^{\tau} \int_{\Omega} \left(\sigma_{kj,j}^* - \rho \ddot{U}_k^* \right) U_k d\Omega dt = + \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Gamma} P_k U_k^* d\Gamma dt - \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Gamma} U_k P_k^* d\Gamma dt + \rho \int_{\Omega} \left[U_k^* \dot{U}_k \right]_{t_0} d\Omega + \rho \int_{\Omega} \left[\dot{U}_k^* U_k \right]_{t_0} d\Omega \quad (9)$$

Une impulsion unitaire appliquée au point "i" du domaine dans la direction L à un instant infinitésimal τ , produira un état de contrainte σ_{jk}^* vérifiant l'équation différentielle suivante:

$$\sigma_{jk,j}^* - \rho \ddot{U}_k^* + \Delta_{el}^i \Delta_{\tau}^{\tau} = 0 \quad (10)$$

où

Δ_{τ}^{τ} : fonction de Dirak fonction du temps.

L'équation deviendra d'après les propriétés des fonctions de Dirak:

$$U_i^1 + \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Gamma} U_k P_{1k}^* d\Gamma dt = \int_{t_0}^{\tau} \int_{\Gamma} P_k U_{1k}^* d\Gamma dt + \rho \int_{\Omega} \left[U_{1k}^* \dot{U}_k \right]_{t_0} d\Omega + \rho \int_{\Omega} \left[\dot{U}_{1k}^* U_k \right]_{t_0} d\Omega \quad (11)$$

On ramène cette équation à une intégrale sur la frontière de la même manière qu'en statique, et on obtient:

$$\begin{aligned}
 c^i U^i + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} U_k p_{1k}^* d\Gamma dt = \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} p_k U_k^* d\Gamma dt + \rho \int_{\Omega} \left[U_{1k}^* \dot{U}_k \right]_{t_0} d\Omega \\
 + \rho \int_{\Omega} \left[\dot{U}_{1k}^* U_k \right]_{t_0} d\Omega \quad (12)
 \end{aligned}$$

La résolution analytique de l'équation (12) est difficile à mener, c'est pourquoi des approches numériques sont utilisées pour la résolution d'une telle équation, soit:

- Par une discrétisation spatiale et temporelle par analogie à la statique.
- En utilisant la transformée de Laplace.

3-2-2 La formulation par la transformée de Laplace:

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

avec $f(t)$ différentiable par morceau avec un nombre fini de discontinuité, et conventionnellement $f(t) = 0 \quad t < 0$

La transformation inverse est:

$$f(t) = L^{-1} [F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\alpha}^{\gamma + i\alpha} F(s) e^{st} ds$$

Dans le but de faciliter l'intégration de l'équation gouvernante (4) (équation de Navier cauchy), une alternative consiste à éliminer le temps dans l'équation d'équilibre grâce à la transformée de Laplace, ainsi le problème est ramené à son équivalent statique, résolu numériquement dans l'espace de la transformée.

La projection de l'équation (4) dans l'espace de la transformée donne:

$$\frac{\lambda + \mu}{\rho} U_{i,ij} + \frac{\lambda}{\rho} U_{j,ii} + \frac{1}{\rho} B_j - S^2 U_j + S U_j^0 + V_j^0 = 0 \quad (13)$$

où

$$U_i(x, s) = L[U_i(x, t)]$$

$$B_i(x, s) = L[b_i(x, t)]$$

en posant $Q_j = B_j + \rho(SU_j^0 + V_j^0)$

tel que $Q_j =$ force volumique modifiée

L'équation (13) devient alors:

$$\frac{(\lambda + \mu)}{\rho} U_{i,ij} + \frac{\lambda}{\rho} U_{j,ii} - S^2 U_j + \frac{1}{\rho} Q_j = 0 \quad (14)$$

avec les conditions aux frontières suivantes:

$$U_i(x, s) = \bar{U}_i(x, s) \text{ sur } \Gamma_1$$

$$P_i(x, s) = \bar{P}_i(x, s) \text{ sur } \Gamma_2$$

La solution fondamentale de l'équation (14) est de la forme:

$$U_{ij}^*(x, S) = \frac{1}{\alpha \pi \mu} (\Psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}) \quad (15)$$

α : dépend de la dimension du problème tel que

$\alpha = 2$ Cas bidimensionnel

$\alpha = 4$ Cas tridimensionnel

Pour un cas bidimensionnel, nous avons:

$$\psi = K_0 \left(\frac{Sr}{D_2} \right) + \frac{Dz}{Sr} \left[K_1 \left(\frac{Sr}{D_2} \right) - \frac{Dz}{D_1} K_1 \left(\frac{Sr}{D_1} \right) \right] \quad (16)$$

où

$$\chi = K_2 \left(\frac{Sr}{D_2} \right) - \frac{Dz}{D_1^2} K_2 \left(\frac{Sr}{D_1} \right)$$

$$D_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad ; \quad D_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

où K_i désigne la fonction de Bessel modifiée d'ordre "i"
 Les tractions surfaciques sont obtenues en substituant les U_{ij}^*
 dans l'équation (11-11)

Grâce à la méthode des résidus pondérés, on se ramène à une
 formulation intégrale et après observation de la forme limite où
 le point de colocation est sur la frontière, on obtient:

$$c^i U^i + \int_{\Gamma} P_{jk}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{jk}^* P_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{jk}^* Q_k d\Omega \quad (17)$$

L'équation (17) donne promotion à l'équation intégrale
 classique, peut être cependant résolue pour une série de valeurs
 des paramètres de la transformée.

Pour se ramener alors au domaine temporel et exprimer les
 solutions en terme d'évolution dans le temps, une inversion
 numérique est alors effectuée. Celle-ci peut être réalisée de
 plusieurs manières (Méthode de Cruse, Manolis, Beskos...)

3-3 Représentation matricielle en dynamique

Les travaux de Nardini et Brebbia se sont concentrés sur la
 formulation du terme d'inertie ou matrice masse, seulement en
 fonction des noeuds de la frontière. Par analogie aux éléments
 finis et différences finies, ce problème est réduit à un système
 d'équations différentielles exprimées sous forme matricielle.

L'idée de base de cette formulation consiste à utiliser les
 solutions fondamentales statiques établies par Kelvin au cas
 dynamique pour générer les matrices.

La forme intégrale de l'équation (1) est:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j} U_{1k}^* d\Omega - \rho \int_{\Omega} \ddot{U}_k U_{1k}^* d\Omega = 0 \quad (18)$$

La première intégrale de l'équation (18) est exprimée par
 son équivalent sur la frontière

$$C_{1k} U_k + \int_{\Gamma} P_{1k}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{1k}^* P_k d\Gamma \quad (19)$$

3-3-1 Approximation de l'intégrale inertielle:

La seconde intégrale dans l'équation (18) traduisant les amplitudes à l'intérieur du domaine, représente le terme d'inertie.

Dans le but de formuler le problème en terme d'inconnues sur la frontière, on exprime les déplacements $U_k(x,t)$ comme suit:

$$U_k(x,t) = \alpha_k^j(t) + f^j(x) \quad (20)$$

où

$f^j(x)$ sont des fonctions de coordonnées

$\alpha_k^j(t)$ sont des fonctions inconnues dépendant du temps.

L'intégrale inertielle s'écrit alors:

$$\int_{\Omega} \ddot{U}_k U_{1k}^* d\Omega = \ddot{\alpha}_k^j \int_{\Omega} f^j U_{1k}^* d\Omega \quad (21)$$

Pour ramener l'équation (21) à son équivalent sur la frontière, on peut donc associer les fonctions f^j au champ déplacement Ψ_{ik}^j et le champ contraintes correspondant comme suit:

$$\tau_{ikm,m}^j = \delta_{ik} f^j \quad (22)$$

L'équation intégrale obtenue après transformation de l'équation (21) de la façon standard est:

$$\ddot{\alpha}_k^j \int_{\Omega} f^j U_{1k}^* d\Omega = \ddot{\alpha}_i^j \left\{ -C_{1k ik} \Psi_{ik}^j + \int_{\Gamma} U_{1k}^* \eta_{ik}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{1k}^* \psi_{ik}^j d\Gamma \right\} \quad (23)$$

où

Ψ_{ik}^j : Champ déplacement résultant de la force volumique $\delta_{ik} f^j$

η_{ik}^j : Les tractions correspondantes sur la frontière.

En utilisant cette transformation, l'équation (18) devient alors:

$$\begin{aligned}
 C_{1k} U_k - \int_{\Gamma} U_{1k}^* P_k d\Gamma + \int_{\Gamma} P_{1k}^* U_k d\Gamma & \quad (24) \\
 = \rho \left\{ C_{1k} \psi_{ik}^j - \int_{\Gamma} U_{1k}^* \eta_{ik}^j d\Gamma + \int_{\Gamma} P_{1k}^* \psi_{ik}^j d\Gamma \right\} \ddot{a}_i^j
 \end{aligned}$$

Afin de définir les accélérations apparues dans le terme d'inertie, il est indispensable d'assimiler les fonctions $f^j(x)$.

Une classe simple de ces fonctions $f^j(x)$ est définie comme suit:

$$f^j(x) = R(A_j, x) \quad (25)$$

où

$R(A_j, x)$: Distance du point d'application des fonctions f^j au point considéré.

Les fonctions Ψ satisfaisant l'équation (24) sont de la forme:

$$\psi_{ik} = \left[\left(3 - \frac{10}{3} \nu \right) \delta_{ik} - r_i r_k \right] \frac{R^3}{30(1-\nu)} \quad (26)$$

où

r_i, r_k définissent les cosinus directeurs des rayons liant les points A_j et X .

Les fonctions η_{ik} correspondant sont obtenues en dérivant l'équation (26) et en la remplaçant dans l'équation (18), et sachant que:

$$\eta_{ik} = S_{ikj} n_j$$

On obtient:

$$\eta_{ik} = \frac{\mu r^2}{30(1-\nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (8 - 10\nu) \delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k} \right\} + 2(1 - 5\nu) \left\{ r_{,k} n_i - r_{,i} n_k \right\} + 6 r_{,k} n_i \right]$$

3-3-2 Discretisation de l'équation intégrale:

L'équation (24) est discretisée de la façon standard en divisant la frontière en un nombre fini d'éléments. De plus si on déplace le point source en tous points de la frontière, l'expression (24) conduit au système d'équations s'écrivant matriciellement:

$$\begin{aligned} [C] \{U\} - \int_{\Gamma} [U^*] \{P\} d\Gamma + \int_{\Gamma} [P^*] \{U\} d\Gamma \\ = \rho \left\{ [C] [\psi]^j - \int_{\Gamma} [U^*] [\psi]^j d\Gamma + \int_{\Gamma} [P^*] [\psi]^j d\Gamma \right\} \{\ddot{a}\}^j \end{aligned} \quad (28)$$

Les déplacements et tractions sont interpolés comme suit:

$$\{U\}^j = [\Phi] \{U\}_e^j \quad (29)$$

$$\{P\}^j = [\Phi] \{P\}_e^j \quad (30)$$

De même, les valeurs de Ψ et η sont approchées en utilisant les mêmes fonctions d'interpolation $[\Phi]$: $[\Psi]^j = [\Phi] [\Psi]_e^j$ et $[\eta]^j = [\Phi] [\eta]_e^j$ (31) (32)

En substituant ces équations dans l'équation (28)

$$[C] \{U\} - [g] \{P\}_e + [h] \{U\}_e = \rho \left\{ [C] [\psi]^j - [g] [\eta]_e^j + [h] [\psi]_e^j \right\} \{\ddot{a}\}^j \quad (33)$$

où

$$[g] = \int_{\Gamma_e} [U^*][\Phi] d\Gamma \quad (34)$$

$$[h] = \int_{\Gamma_e} [P^*][\Phi] d\Gamma \quad (35)$$

L'équation (33) s'écrira dans sa forme compacte comme suit:

$$[H]\{\dot{U}\} - [G]\{P\} - \rho \left\{ [H][\psi] - [G][\eta] \right\} \{\ddot{\alpha}\} = 0 \quad (36)$$

Les matrices [H] et [G] sont celles déterminées dans le cas statique.

Les matrices [\Psi] et [\eta] contiennent simplement les valeurs des fonctions \Psi et \eta aux points nodaux.

Les fonctions \{\ddot{\alpha}\} sont enfin exprimées en fonction des accélérations nodales \{\dot{U}\}, ceci étant possible grâce à la fonction (20)

Si A_n représente le n^{ème} noeud de la frontière, l'équation (20) devient:

$$\ddot{U}_i(A_n, t) = \alpha_i^j(t) f^j(A_n) \quad (37)$$

où

\ddot{U}_i(A_n, t) est l'accélération du n^{ème} noeud dans la direction i, en appliquant l'équation (37) en tous noeuds de la frontière, on obtient une équation algébrique de la forme:

$$\{\ddot{U}\} = [F]\{\alpha\}$$

Les fonctions f^j(x) étant choisies linéairement indépendantes La matrice [F] est carrée, régulière possédant ainsi un inverse [E] = [F]⁻¹, d'où:

$$\{\ddot{\alpha}\} = [E]\{\ddot{U}\}$$

En substituant l'équation (39) dans l'équation (36) on obtient:

$$[H]\langle U \rangle + [M]\langle \dot{U} \rangle = [G]\langle P \rangle \quad (40)$$

Où la matrice masse est donnée par:

$$[M] = -\rho \left\{ [H][\psi] - [G][\eta] \right\} [E] \quad (41)$$

En considérant les frontières Γ_1 et Γ_2 , les tractions sur Γ_1 peuvent être éliminées de l'équation (41), il résulte alors:

$$[\hat{H}]\langle U_2 \rangle + [\hat{M}]\langle \dot{U}_2 \rangle = [\hat{G}]\langle P_2 \rangle + [\hat{H}]\langle U_1 \rangle + [\hat{M}]\langle \dot{U}_1 \rangle \quad (42)$$

Où les matrices modifiées sont données par:

$$[\hat{A}] = [A_{22}] - [G_{21}][G_{11}]^{-1}[A_{12}] \quad (43)$$

$$[\hat{A}] = [G_{21}][G_{11}]^{-1}[A_{11}] - [A_{21}] \quad (44)$$

Où A représente H ou M ou G, et les indices 1, 2 indiquent les quantités sur Γ_1 et Γ_2 respectivement. Ainsi, le problème dynamique illustré par les équations (1), (2) et (3) est réduit en un système d'équations différentielles linéaires exprimé par l'équation (42) appartenant seulement à la frontière.

Les solutions de l'équation (42) sont obtenues en utilisant les schémas d'intégration directe.

3-3-3 Vibrations libres

L'avantage essentiel de la nouvelle approche réside dans le fait que les intégrales aux frontières étant indépendantes des

fréquences, le problème de vibration libre de la structure est réduit en un problème algébrique de valeurs et vecteurs propres.

En effet en absence de force excitatrice, le champ déplacement résultant est harmonique de la forme:

$$U(x,t) = U(x) e^{-i\omega t} \quad (45)$$

où:

$U(x)$: amplitude d'un point à la position x
 ω : fréquence angulaire

il résulte alors:

$$\{\ddot{U}_2\} = -\omega^2 \{U_2\} \quad (46)$$

l'équation devient après substitution de l'équation ()::

$$\boxed{[\hat{H}]\{U_2\} = \omega^2 [\hat{M}]\{U_2\} \quad (47)}$$

L'équation (47) traduit le problème général de valeurs propres, sa résolution peut se faire par des méthodes standards de résolution tel que la méthode de Householder QR itération.

CHAPITRE V
PRÉSENTATION DES PROGRAMMES
FEMSTAT ET BEMSTAT

1- Introduction:

Lors de ce chapitre, nous exposerons les programmes FEMSTAT et BEMSTAT élaborés pour l'étude des problèmes bidimensionnels de l'élasticité plane.

FEMSTAT est le programme éléments finis utilisant l'élément rectangulaire à quatre noeuds (deux degrés de liberté par noeud, à savoir deux translations u et v).

BEMSTAT fait allusion à deux programmes BEMSTAT 1 et BEMSTAT 2. En effet, BEMSTAT 1 est le programme utilisant l'interpolation linéaire alors que BEMSTAT 2 est celui utilisant l'interpolation constante.

2- Présentation du programme FEMSTAT

La méthode des éléments finis se ramène mathématiquement à la résolution d'un système d'équations:

$$[K] \{ \hat{U} \} = \{ \hat{F} \}$$

En utilisant la MEF sur ordinateur, il est possible d'établir et de résoudre les équations gouvernantes pour des problèmes complexes et de manière efficace.

Le programme FEMSTAT permet de modéliser les voiles en élasticité plane, il est constitué de plusieurs sous-programmes où le transfert de certains paramètres se fait par des blocs "common" ce qui facilite le passage des paramètres d'une sous-routine à une autre.

On peut distinguer deux parties essentielles:

- Le module de génération des données.
- Le module de résolution et d'exploitation des résultats.

* Subroutine donnée:

Cette sous-routine permet de lire toutes les informations nécessaires pour un bon déroulement du programme. Nous citerons, les caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux.

* Subroutine FORMNF:

Cette sous-routine se charge de numéroter les degrés de liberté actifs et d'annuler les degrés de liberté inactifs pour chaque noeud de la structure numéroté par étage de gauche à droite.

Ces informations sont stockées dans un tableau [NF].

* Subroutine DETECT:

Cette sous-routine sert à détecter les éléments discrétisés dans les vides et permet le calcul du nombre d'éléments selon les sens x et y moyennant des "pas de discrétisation" ou "pas du maillage".

* Subroutine ELEM:

Elle permet le calcul des éléments de la matrice de rigidité élémentaire. Il est à noter que le sens de numérotation des noeuds se fait selon le sens trigonométrique.

* Subroutine FORM G:

Dans cette subroutine, on définit pour chaque élément un vecteur de localisation élémentaire {G} qui permet de positionner ses degrés de libertés dans le repère global, ce qui facilitera donc le transfert des k_{ij} du repère local dans la matrice globale.

* Subroutine Assembl:

L'opération d'assemblage se fait par un simple transfert des termes k_{ij} des matrices de rigidité élémentaires en K_{IJ} de la matrice globale, grâce au vecteur de localisation {G} L'assemblage est effectuée comme suit:

$$K_{IJ} = K_{IJ} + k_{ij}$$

où $I = G(i) \quad i = 1, \text{DOF}$
 $J = G(j) \quad j = 1, \text{DOF}$

Cependant, lors du stockage des matrices élémentaires, seuls les degrés de liberté actifs sont pris en considération, ce qui fait allusion à la méthode de suppression des équations qui en effet consiste à restructurer la matrice [K] de manière à supprimer la ligne et la colonne correspondant aux degrés de liberté inactifs, imposés.

Ainsi, on réduit le nombre d'inconnues du système et par conséquent l'espace mémoire réservé au stockage des matrices.

* Subroutine force:

Cette subroutine permet de calculer le vecteur force nodal déterminé dans le chapitre [Appendice].

* Subroutine RESOLV:

Cette subroutine permet la résolution du système $[K]\{\hat{U}\} = \{\hat{F}\}$ par la méthode de CHOLESKY qui se trouve être la plus appropriée car la matrice [K] est symétrique et définie positive. La matrice [K] est factorisée comme suit:

$$[K] = [L]^T[L]$$

où [L] est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments sont donnés par les expressions suivantes:

$$L_{pp} = \sqrt{k_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} L_{kp}^2}$$

$$L_{pj} = \left[k_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} L_{kp} L_{kj} \right], \quad \begin{array}{l} j=p+1, \dots, n \\ p=2, \dots, n \end{array}$$

La résolution se fait en 2 étapes:

$$[L]^T \{Y\} = \{\hat{F}\} \quad \text{avec} \quad \{Y\} = [L] \{\hat{U}\}$$

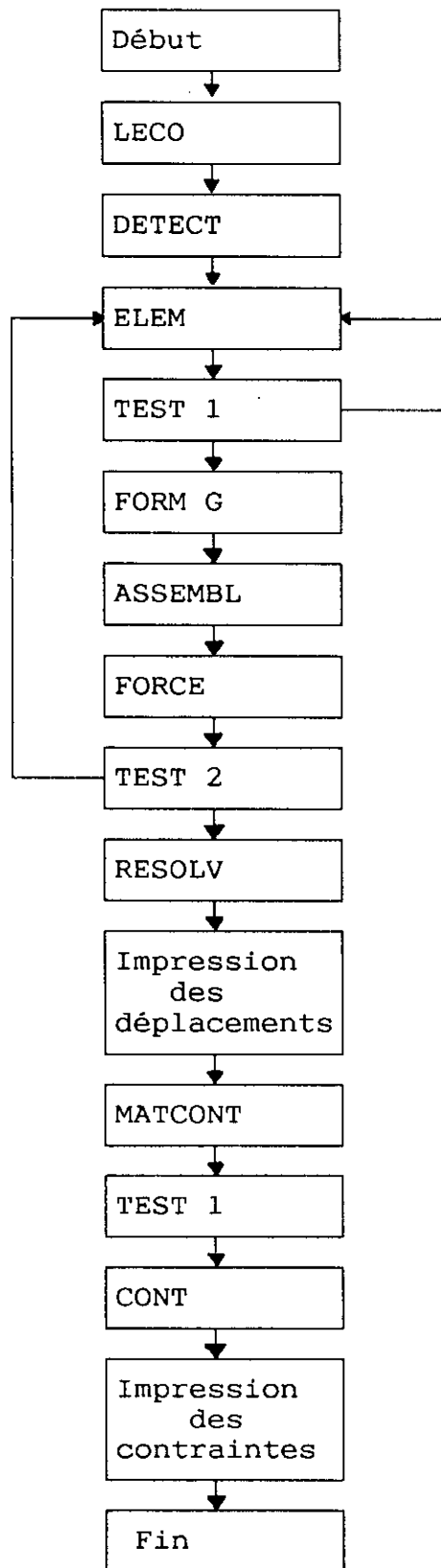
$$[L] \{\hat{U}\} = \{Y\}$$

* Subroutine Matcont:

Cette subroutine permet de calculer les termes de la matrice [H] donnée dans le chapitre [Appendice].

* Subroutine cont:

Elle permet de calculer les contraintes pour chaque élément.

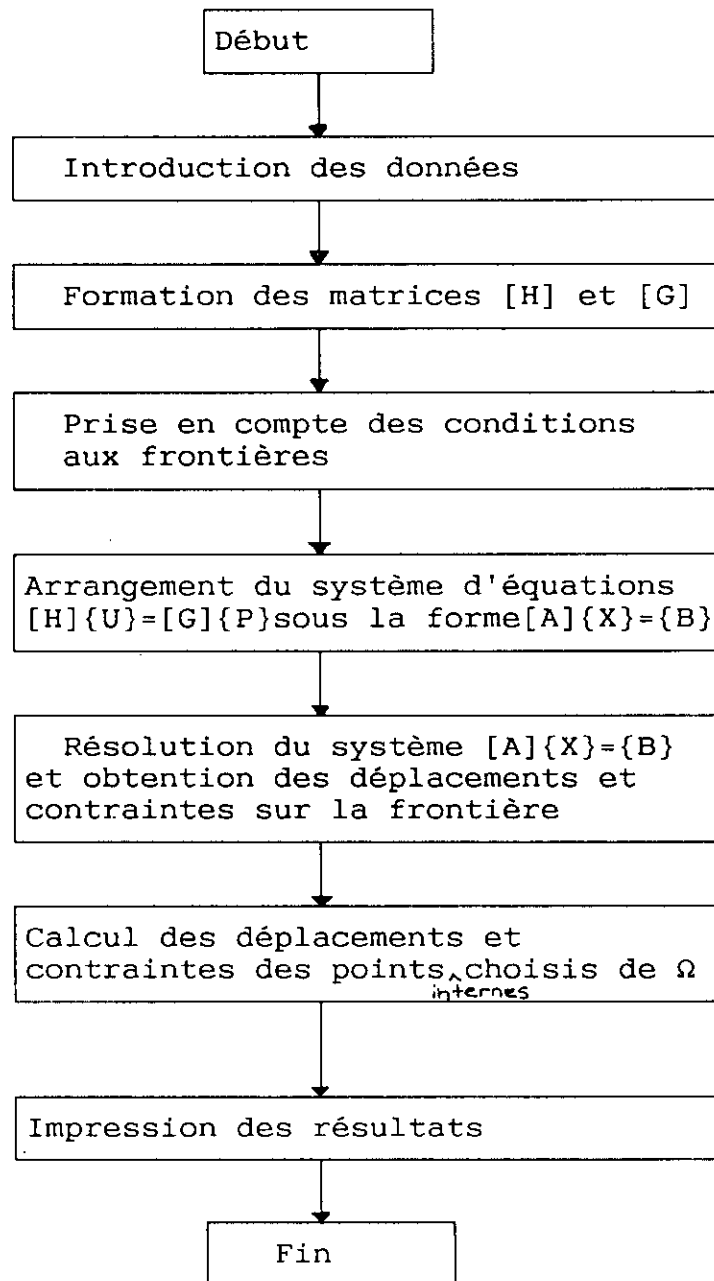


Organigramme du programme: "FEMSTAT"

3- Présentation des programmes BEMSTAT 1 (2)

Les solutions analytiques des équations intégrales sont extrêmement rares et n'existent que pour quelques problèmes simples. Le recours aux ordinateurs devient alors indispensable.

Dans ce chapitre, on présentera les programmes BEMSTAT 1(2) qui traiteront les problèmes d'élasticité bidimensionnels. Le programme est constitué de plusieurs séquences décrites ci-dessous:



Ce programme est conçu pour l'étude des problèmes bidimensionnels de l'élasticité plane.

Le transfert se fait pour certains paramètres par des blocs

"common" blancs ou étiquettes, permettant le transfert rapide de ceux-ci entre les différentes parties du programme.

* Présentation du programme BEMSTAT 1:

Il comprend le :

Sous-programme Input

Les données générales du programme sont lues à partir d'un fichier de données.

Ces données consistent en:

- Le nombre d'éléments de la frontière, le nombre de surfaces intégrantes, le nombre de points internes.
- Les propriétés du matériau.
- Les coordonnées des noeuds de la frontière lues dans le sens trigonométrique pour un problème interne, et dans le sens des aiguilles d'une montre pour un problème externe.
- Les conditions aux frontières: tractions et déplacements dans les sens X et Y tel que:
Si code = 0 -----> Le déplacement est connu.
Si code = 1 -----> La contrainte est connue.

Sous-programme FMAT:

Dans cette subroutine, on calcule les matrices [H] et [G], puis on réarrange le système [H]{U} = [G]{P} sous la forme [A]{X} = {B} après introduction des conditions aux frontières. Pour l'établissement des matrices H et G, nous avons eu recours à 2 types d'intégrations:

- Intégration numérique par quadratures de Gauss.
- Intégration analytique dans les cas des singularité.

Selon les indices l, k des solutions fondamentales, nous distinguons lors du stockage des matrices H et G, quatre blocs:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \text{BLOC}(1,1,i,j) & & \text{BLOC}(1,2,i,j) & \\ \hline & & & \\ \text{BLOC}(2,1,i,j) & & \text{BLOC}(2,2,i,j) & \end{array} \right] \begin{array}{l} i=1, N \\ j=1, N \\ 2N \times 2N \end{array}$$

Un tel arrangement correspond aux N premières composantes des vecteurs U et P dans la direction X et les N secondes dans la direction Y.

Les composantes des matrices H et G sont:

$$\begin{aligned}
 H(l,k,i,j) &= \int_{\Gamma_{j-1}} P_{1k}^* \Phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_j} P_{1k}^* \Phi_1 d\Gamma \\
 G(l,k,i,j) &= \int_{\Gamma_{j-1}} U_{1k}^* \Phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_j} U_{1k}^* \Phi_1 d\Gamma
 \end{aligned}
 \tag{47'}$$

Une formulation isoparamétrique est utilisée, les équations sont ramenées alors à :

$$\begin{aligned}
 H(l,k,i,j) &= \int_{\Gamma_{j-1}} P_{1k}^*(\xi) \Phi_2 |J| d\xi + \int_{\Gamma_j} P_{1k}^*(\xi) \Phi_1 |J| d\xi \\
 G(l,k,i,j) &= \int_{\Gamma_{j-1}} U_{1k}^*(\xi) \Phi_2 |J| d\xi + \int_{\Gamma_j} U_{1k}^*(\xi) \Phi_1 |J| d\xi
 \end{aligned}$$

Qui après application des quadratures de Gauss, donnent :

$$\begin{aligned}
 H(l,k,i,j) &= \sum_{s=1}^m P_{1k}^*(\xi_s) \Phi_2(\xi_s) |J| w_s + \sum_{s=1}^m P_{1k}^*(\xi_s) \Phi_1(\xi_s) |J| w_s \quad (*) \\
 G(l,k,i,j) &= \sum_{s=1}^m U_{1k}^*(\xi_s) \Phi_2(\xi_s) |J| w_s + \sum_{s=1}^m U_{1k}^*(\xi_s) \Phi_1(\xi_s) |J| w_s \quad (**)
 \end{aligned}$$

où

Φ_1 et Φ_2 : fonctions d'interpolations linéaires.
tel que

$$\Phi_1 = (1/2)(1 - \xi)$$

$$\Phi_2 = (1/2)(1 + \xi)$$

$|J|$: jacobien tel que

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left\{ \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right\}}$$

m = nombre de points d'intégration

w_s = facteurs de pondération

La subroutine **Fmat** à son tour fait appel à plusieurs sous-programmes:

- Subroutine **Inte**: elle sert à calculer les expressions (*) et (**).

- Subroutine **SUB1** respectivement **SUB2** : elles calculent les singularités dans H lors de l'intégration de l'élément situé à droite respectivement à gauche du point de colocation "i".

- Subroutine **Inlo** pour le calcul des intégrales analytiques de **G** donc les éléments diagonaux des 4 blocs et une partie des éléments situés de part et d'autre du point "i".

Il est à noter que les éléments diagonaux des 4 blocs de H sont calculés par le principe de déplacement de corps rigide. C'est un mouvement n'entraînant ni déformations ni contraintes au sein de la structure.

Nous avons pour un problème interne:

$$[H]\{U\} = \{0\}$$

Pour le point source "i", nous avons dans le cas de déplacement unitaire suivant X et Y.

$$H_{i1} + H_{i2} + H_{i3} + \dots + H_{ii} + \dots + H_{in} = 0$$

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^N H_{ij}$$

Pour un problème externe qui s'étend à l'infini, partons de l'équation intégrale:

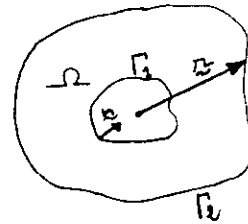
$$C_i U_i + \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma = \int_{\Gamma} U^* P d\Gamma$$

En considérant un déplacement de corps rigide, nous avons:

$$C_i U_i + \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma = 0$$

En supposant 2 surfaces Γ_1 et Γ_2 nous avons:

$$c_i U_i + \int_{\Gamma_1} p^* U d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p^* U d\Gamma = 0$$



Le calcul de l'intégrale sur Γ_2 donne pour un déplacement unitaire, sachant que quand r tend vers l'infini les vecteurs \underline{r} et \underline{n} sont collinéaires:

$$\int_{\Gamma_2} p^* d\Gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} p^* d\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Avec I = matrice identité.
ainsi nous obtenons pour un point source "i":

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} - I = 0$$

d'où:

$$H_{ii} = I - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}$$

et enfin, on procède au réarrangement du système $HU = GP$ en système $AX = B$ où X comporte toutes les inconnues du problème.

Sous-programme Resolv:

La résolution du système $AX = B$ se fait par la méthode d'élimination de Gauss et ceci en 2 étapes:

- Triangularisation de la matrice $[A]$ et permutation des lignes en cas de pivot nul.

Son algorithme est:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - [a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}] \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - [a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}] \cdot b_k^{(k-1)}$$

avec

$$\begin{cases} i = \overline{k+1, n} \\ j = \overline{k+1, n} \\ k = \overline{1, n+1} \end{cases}$$

- Résolution du système triangulaire supérieur par back-substitution.

L'algorithme est le suivant:

$$x_n = b_n/a_{nn}$$

$$x_i = [b_i - \sum_{j=i+1} a_{ij} \cdot x_j] / a_{ii} \quad i=n-1, \dots, 1$$

Sous-programme INTER:

Les inconnues sur la frontière étant connues, on calcule à présent les déplacements et les contraintes des points internes par les relations (45) et (45)'.

Cette subroutine fait appel à son tour à:

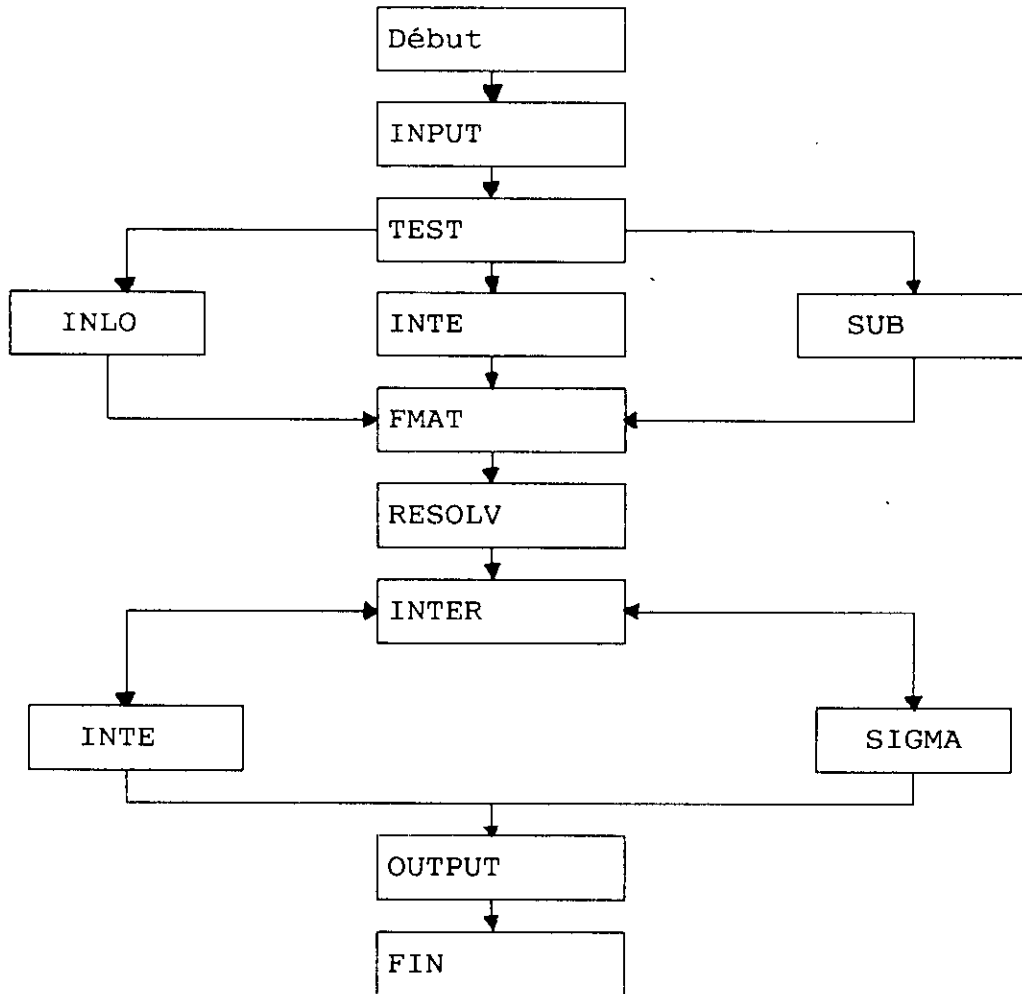
- **Subroutine Inte:** Pour le calcul des intégrales dans l'expression (47') en appliquant les quadratures de Gauss.

- **Subroutine SIGMA:** Elle calcule les coefficients "D" et "S" et évalue les expressions de l'équation (45').

Sous-programme OUTPUT:

Les résultats suivants sont recueillis dans un fichier de sortie:

- Déplacements de chaque noeud de la frontière.
- contraintes pour chaque noeud de la frontière.
- Déplacements des points internes choisis.
- Contraintes des points internes choisis.



Organigramme général des programmes
BEMSTAT1
 et
BEMSTAT2

Remarque:

Pour l'interpolation constante, les seules singularités existantes sont dans le calcul des G_{ii} et H_{ii} . De la même manière que dans le cas linéaire les G_{ii} sont évalués analytiquement, tandis que les H_{ii} sont déterminés par le déplacement de corps rigide.

Cependant l'appel des sousroutines SUB1 et SUB2 ne se fait pas vu l'inexistence des singularités de la forme $H_{i,i+1}$; $G_{i,i+1}$; $H_{i,i-1}$; $G_{i,i-1}$

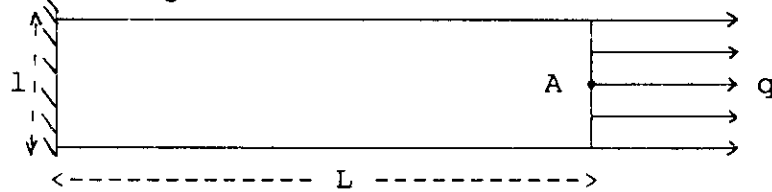
Les composantes des matrices sont de la forme:

$$H(l, k, i, j) = \sum_{s=1}^m P_{1k}^* (\xi_s) |J| W_s$$

$$G(l, k, i, j) = \sum_{s=1}^m U_{1k}^* (\xi_s) |J| W_s$$

Application:

Soit une console soumise à une traction uniforme à son extrémité d'intensité égale à l'unité.



$$q = 1 \text{ kg/cm}^2 ; l = 20 \text{ cm} ; \nu = 0.2$$

$$L = 200 \text{ cm} ; E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Remarque:

Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par la théorie de l'élasticité. (Voir tableau ci-après). Cet exemple sera traité par la méthode des éléments de frontière en utilisant des éléments linéaires. La convergence étant atteinte, on compare les résultats obtenus avec ceux trouvés par la méthode des équations intégrales. La convergence sera étudiée pour le déplacement horizontal au point A, où le déplacement donné par la théorie de l'élasticité.

$$U_x = 1.000 \text{ E-04 m}$$

Interprétation des résultats:

L'exemple traité dans ce chapitre a été modélisé par la méthode des éléments finis, et la méthode des éléments de frontière.

La frontière a été discretisée dans un premier temps par des éléments constants, et ensuite par des éléments linéaires.

Trois courbes de convergences du déplacement U_x au point A ont été élaborées. Nous avons constaté d'après les figures (1) et (2) que la convergence a été atteinte avec seulement 16 éléments linéaires alors que 42 éléments constants étaient atteints pour avoir la convergence. La figure (3) indique que la

convergence a été atteinte avec 30 éléments finis.

Nous avons ensuite utilisé cette discrétisation pour comparer les déplacements horizontaux de la fibre moyenne, avec ceux donnés par la théorie de l'élasticité. Nous avons remarqué que les résultats obtenus par la BEM (16 éléments linéaires) étaient meilleurs que ceux obtenus par la BEM (42 éléments constants), ainsi que ceux donnés par la MEF (30 éléments) [voir figure (4)].

Nous concluons alors, que l'élément linéaire est excellent pour les problèmes d'élasticité plane.

Comparaison des résultats
Variation des déplacements (en m) suivant (x):

x(mm)	Élasticité	30 éléments finis	Δ%	16 éléments de frontière (linéaire)	Δ%	42 éléments de frontière (constants)	Δ%
0.0	0.000 E+00	0.000 E+00	0.00	0.0000 E+00	0.00	0.0000 E+00	0.00
20.0	1.000 E-05	0.9755 E-05	-2.45	0.9935 E-05	-0.65	0.9733 E-05	-2.67
40.0	2.000 E-05	1.9896 E-05	-0.52	1.9947 E-05	-0.26	1.9495 E-05	-2.52
60.0	3.000 E-05	2.9858 E-05	-0.47	2.9944 E-05	-0.19	2.9359 E-05	-2.14
80.0	4.000 E-05	3.9864 E-05	-0.34	3.9943 E-05	-0.14	3.9136 E-05	-2.16
100.0	5.000 E-05	4.9864 E-05	-0.27	4.9942 E-05	-0.11	4.8960 E-05	-2.08
120.0	6.000 E-05	5.9864 E-05	-0.22	5.9941 E-05	-0.09	5.8776 E-05	-2.04
140.0	7.000 E-05	6.9864 E-05	-0.19	6.9941 E-05	-0.08	6.8517 E-05	-2.11
160.0	8.000 E-05	7.9684 E-05	-0.39	7.9939 E-05	-0.07	7.8329 E-05	-2.09
180.0	9.000 E-05	8.9864 E-05	-0.15	8.9938 E-05	-0.06	8.8004 E-05	-2.21
200.0	1.000 E-04	9.9864 E-05	-0.13	9.9936 E-05	-0.06	9.8117 E-05	-1.88

$S_{num} - S_{th}$

$\Delta\% = \text{erreur} = \frac{\text{-----}}{S_{th}}$

S_{num} = valeur numérique
 S_{th} = solution théorique

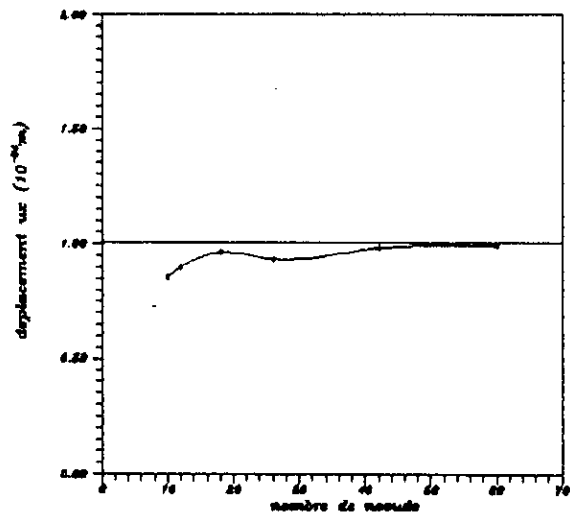


FIG 1: COURSE DE CONVERGENCE DU DEPLACEMENT HORIZONTAL
($x=200$ cm - $y=10$ cm)
PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES (element constant)

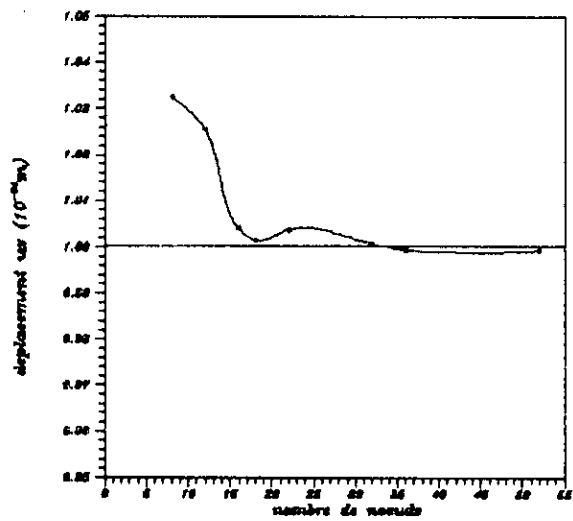


FIG 2: COURSE DE CONVERGENCE DU DEPLACEMENT HORIZONTAL
($x=200$ cm - $y=10$ cm)
PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES (element linéaire)

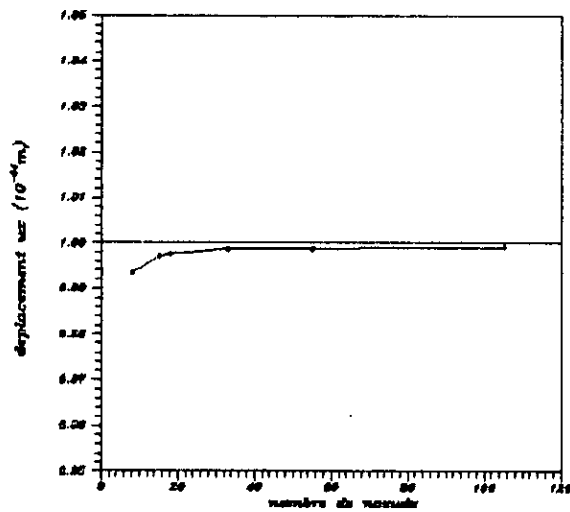


FIG 3: COURSE DE CONVERGENCE DU DEPLACEMENT HORIZONTAL
($x=200$ cm - $y=10$ cm)
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

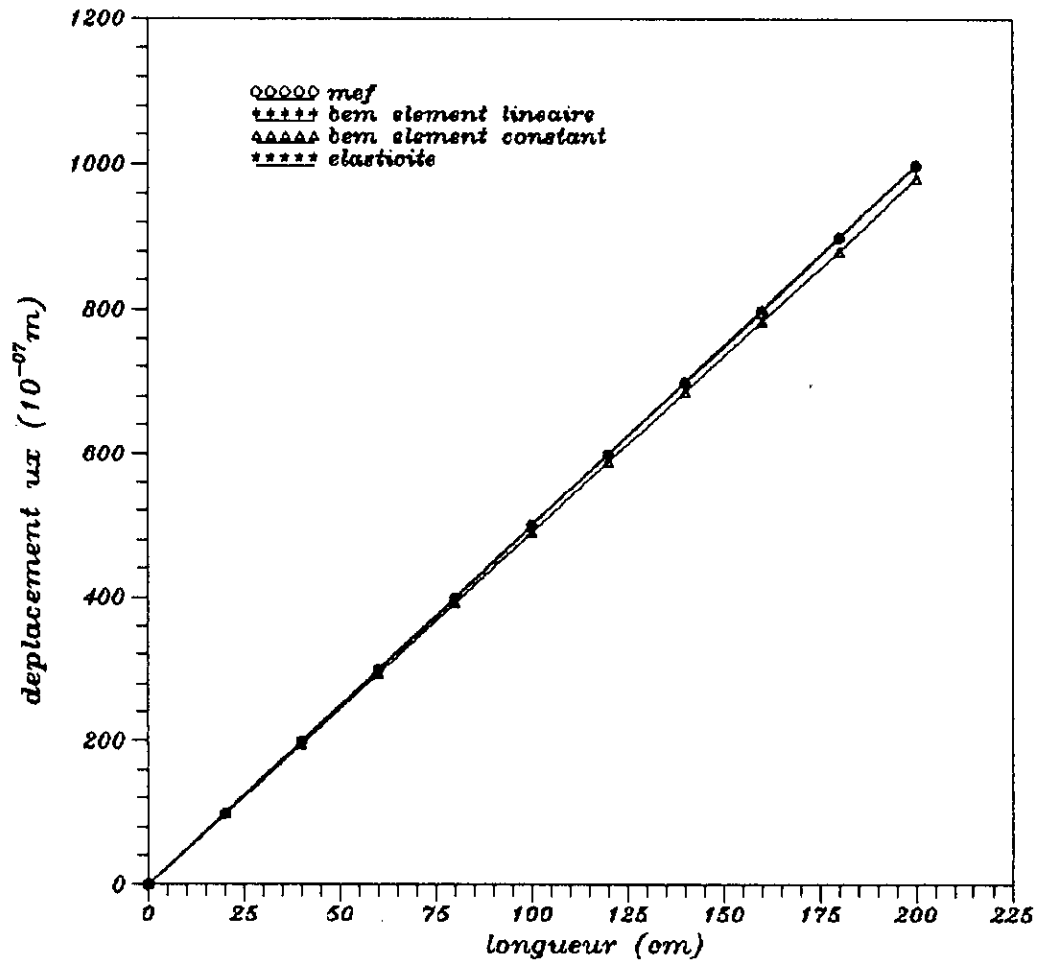


FIG 4: COURBES COMPARATIVES DES DEPLACEMENTS HORIZONTAUX DE LA FIBRE MOYENNE

CHAPITRE VI
MÉTHODES DE RÉOLUTION
DES SYSTÈMES PROPRES

1- Introduction

Résoudre un problème aux valeurs propres consiste à déterminer les couples (λ_i, ϕ_i) qui sont solution du problème aux valeurs propres régit par la relation

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) interprète mathématiquement un problème de vibration de structures tel que :

- λ_i : les carrés des pulsations propres.
- ϕ_i : les vecteurs des déplacements de la structure définissant les modes propres de celle-ci.
- K : la matrice de rigidité.
- M : la matrice masse.

2- Propriétés fondamentales des systèmes propres:

Avant d'exposer les algorithmes de résolution de l'équation (1.1) il serait intéressant d'assimiler les propriétés des matrices, des valeurs et vecteurs propres car toutes ces méthodes reposent sur ces propriétés.

2-1 Valeurs propres:

L'équation (1.1) ne peut avoir de solutions non triviales que si la matrice $(K - \lambda M)$ est singulière c'est à dire :

$$\det [K - \lambda M] = P(\lambda) = 0 \quad (1.2)$$

Ainsi la recherche des valeurs propres λ_i est identique à la détermination des racines d'un polynôme d'ordre n de λ appelé polynôme caractéristique. qui s'avère impossible dès que n dépasse 4, d'où l'utilisation des méthodes itératives.

2.2- Vecteur propres:

Les vecteurs propres sont seulement définis par leur direction dans l'espace à n dimensions considéré.

Cependant, les vecteurs propres satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

- orthogonalité vis à vis de la matrice K :

$$\phi_i^T K \phi_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad (1.3)$$

- orthogonalité vis à vis de la matrice M :

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \quad (1.4)$$

où sous forme matricielle

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (1.5a)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (1.5b)$$

où

Φ : matrice nodale stockant les vecteurs propres par
colonne

Λ : matrice spectrale, diagonale dont les termes sont
les valeurs propres

2-3- Quotient de Rayleigh:

Le quotient de Rayleigh d'un vecteur est :

$$\rho(\Phi) = \frac{\Phi^T K \Phi}{\Phi^T M \Phi} \quad (1.6)$$

Si M est définie positive, alors

$$0 < \lambda_1 < \rho(\Phi) < \lambda_n < \infty$$

De plus si Φ coïncide avec un des vecteurs propres Φ_i alors
 $\rho(\Phi_i)$ coïncide avec la valeur propre correspondante λ_i .

2.4- Le décalage :

Le décalage ou shifting sert à améliorer la vitesse de
convergence en transformant la matrice K en

$$\tilde{K} = K - \rho M \quad (1.7)$$

où ρ est la valeur du décalage.
Ainsi, on obtient

$$\tilde{K} \psi = \mu M \psi \quad (1.8)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi &= \Psi \\ \lambda &= \mu + \rho \end{aligned}$$

3 Méthodes de résolution :

Ces méthodes sont de nature itératives, car résoudre un
problème aux valeurs propres revient à calculer les racines d'un
polynôme $P(\lambda)$ d'ordre n.

Selon les propriétés sur lesquelles est basé l'algorithme
nous distinguons 3 catégories de méthodes :

- Les méthodes d'itération vectorielles qui opèrent sur les
vecteurs propres, la propriété de base est :

$$K \Phi_i = \lambda_i M \Phi_i \quad (1.9)$$

- Les méthodes de transformations qui opèrent sur les vecteurs propres, la propriété de base est :

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (1.10a)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (1.10b)$$

- Les méthodes d'itération polynomiale qui opèrent sur les valeurs propres, la propriété de base est :

$$P(\lambda_1) = 0 \quad (1.11a)$$

$$P(\lambda) = \det [K - \lambda M] \quad (1.11b)$$

3-1 Méthodes d'itérations vectorielles :

3-1-1 L'itération inverse :

La méthode de l'itération inverse est une technique très utilisée pour évaluer la plus petite valeur propre λ_1 et le vecteur propre correspondant Φ_1

L'équation de base s'écrit

$$K \bar{X}_{k+1} = M X_k \quad (1.12)$$

En supposant un vecteur initial \bar{X}_1 , on évalue à chaque itération k ; $k = 1, \dots, n$ le vecteur \bar{X}_{k+1} , qui possède une direction proche de celle du vecteur de l'itération précédente X_k , mais cependant d'amplitude différente, c'est pourquoi une technique de normalisation lui est associée d'où :

$$X_{k+1} = \frac{\bar{X}_{k+1}}{(\bar{X}_{k+1}^T M \bar{X}_{k+1})^{1/2}} \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) assure la M-normalité de X_{k+1} d'où :

$$X_{k+1}^T M X_{k+1} = I \quad (1.14)$$

L'algorithme de l'itération inverse s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} K \bar{X}_{k+1} = Y_k \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} \bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1} \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\rho(\bar{X}_{k+1}) = \frac{\bar{X}_{k+1} Y_k}{\bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1}} \quad (1.17)$$

$$Y_{k+1} = \frac{\bar{Y}_{k+1}}{(\bar{X}_{k+1}^T Y_{k+1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$Y_{k+1} \longrightarrow M \Phi_1 \quad \text{et} \quad \rho(\bar{X}_{k+1}) \longrightarrow \lambda_1 \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

La convergence sera alors testée sur cette valeur propre λ_1 donnée par le quotient de Rayleigh, celle-ci est atteinte lorsque:

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} < \text{tol} \quad (1.18)$$

où $\text{tol} = 10^{-2s}$ si la valeur λ_1 est recherchée avec une précision de 2s chiffres.

3-1-2 L'itération directe :

La méthode de l'itération directe est complémentaire à la méthode de l'itération inverse, elle est très utilisée pour évaluer la plus grande valeur propre λ_n et le vecteur propre lui correspondant Φ_n .

Dans cette méthode, la matrice M supposée définie positive est triangularisée.

L'algorithme de l'itération directe est analogue à celui de l'itération inverse et s'énonce comme suit :

$$M \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (1.19)$$

$$\bar{Y}_{k+1} = K \bar{X}_{k+1} \quad (1.20)$$

$$\rho(\bar{X}_{k+1}) = \frac{\bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1}}{(\bar{X}_{k+1} Y_k)} \quad (1.21)$$

$$Y_{k+1} = \frac{\bar{Y}_{k+1}}{(\bar{X}_{k+1} Y_k)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.22)$$

où

$$Y_{k+1} \longrightarrow M \Phi_n \quad \text{et} \quad \rho(\bar{X}_{k+1}) \longrightarrow \lambda_n \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

Le vecteur initial X_1 est supposé non M-orthogonal à Φ_n et $Y_1 = KX_1$

De même la convergence est atteinte lorsque :

$$\frac{|\lambda_n^{(k+1)} - \lambda_n^{(k)}|}{\lambda_n^{(k+1)}} < \text{tol} \quad (1.23)$$

3-1-3 Le shifting dans l'itération vectorielle :

Aux deux techniques exposées précédemment, peut s'ajouter une technique de décalage pour calculer un couple (λ_p, Φ_p) intermédiaire.

Une technique d'orthogonalisation lui est suppliée afin de prévoir vers quel couple nous mènera un décalage donné.

Supposons que l'on désire déterminer le vecteur Φ_{m+1} sachant que les m premiers vecteurs propres sont connus. Pour cela, on considère un vecteur initial X_1 M-orthogonal aux vecteurs $\Phi_i, i=1\dots m$

$$\tilde{X}_1 = X_1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \Phi_i \quad (1.24)$$

où les α_i sont obtenus en utilisant les relations :

$$\Phi_i^T M \tilde{X}_1 = 0 \quad i=1,2,\dots,m \text{ et } \Phi_i^T M \Phi_j = \delta_{ij} \quad (1.25)$$

C'est à dire : $\alpha_i = \Phi_i^T M X_1 \quad i=1,2,\dots,m$

En exécutant une itération inverse en prenant comme vecteur initial \tilde{X}_1 , l'algorithme converge vers le couple $(\lambda_{m+1}, \Phi_{m+1})$.

3-1-4 Convergence :

L'équation fondamentale de l'itération inverse est :

$$K X_{k+1} = M X_k \quad (1.26)$$

Dans le but d'étudier la convergence du processus et en vue de faciliter la démonstration, faisons une projection de l'équation (1-26) dans la base formée par les vecteurs propres.

On peut écrire pour un vecteur X_k :

$$X_k = \Phi Z_k \quad (1.27)$$

où $\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_n]$ c'est la matrice nodale. En substituant (1-27) dans (1-26) on obtient :

$$K \Phi Z_{k+1} = M \Phi Z_k \quad (1.28a)$$

En prémultipliant l'équation (1-28a) par Φ^T et en utilisant les relations d'orthogonalité (1-5a) et (1-5b) on obtient :

$$\Lambda Z_{k+1} = Z_k \quad (1.28b)$$

L'équation (1-28b) traduit un problème aux valeurs propres dans lequel il est plus facile de rechercher les propriétés de convergence. Les vecteurs sont les vecteurs unitaires e_i de la base canonique i.e.

$$e_i^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0] \quad (1.29)$$

\downarrow
i^{ème} composante

et les valeurs propres sont les éléments diagonaux de la matrice Λ . Dans l'itération inverse, le vecteur initial X_1 , était non M-orthogonal à Φ_1 .

De même Z_1 ne doit pas être M-orthogonal à e_1 .

$$\text{Soit } Z_1^T = [1 \ \dots \ 1]$$

En utilisant (1-28b)

$$Z_{L+1}^T = \left[\left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^L, \left(\frac{1}{\lambda_2} \right)^L, \dots, \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^L \right] \quad (1.30)$$

En multipliant Z_{L+1}^T par $(\lambda_1)^L$, nous avons

$$\bar{Z}_{L+1}^T = \left[1, \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^L, \dots, \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^L \right] \quad (1.31)$$

Si λ_1 est la plus petite valeur propre, alors

$$\bar{Z}_{L+1} \longrightarrow e_1 \text{ quand } L \longrightarrow \infty$$

La vitesse de convergence est par définition donnée par :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\| \bar{Z}_{L+1} - e_1 \|}{\| \bar{Z}_L - e_1 \|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (1.32)$$

De, là, il est clair que la convergence se fait linéairement avec une vitesse de λ_1/λ_2 qui n'est en fait que la plus grande composante de \bar{Z}_{L+1} qui doit s'annuler.

Dans l'algorithme de l'itération inverse, une approximation de la valeur λ_1 est donnée par le quotient de **Rayleigh**

$$\rho(Z_{k+1}) = \frac{Z_{k+1}^T Z_k}{Z_{k+1}^T Z_{k+1}} \quad (1.33)$$

Pour la dernière itération du processus $k = L$

$$\rho(Z_{l+1}) = \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^n (\lambda_1 / \lambda_i)^{2l-1}}{\sum_{i=1}^n (\lambda_1 / \lambda_i)^{2l}} \quad (1.34)$$

$$\text{et } \lim_{L \rightarrow \infty} \rho(Z_{L+1}) = \lambda_1 \quad (1.35)$$

Aussi, la convergence est linéaire avec une vitesse (λ_1/λ_2) . Ceci montre que si le vecteur propre est connu avec une erreur de ϵ , alors le quotient de Rayleigh correspondant donne une approximation de la valeur propre correspondante avec une erreur de ϵ^2 .

En général la vitesse de convergence est donnée dans l'itération inverse par le rapport de λ_1 et les autres valeurs propres distinctes.

3-2 Méthode de transformation :

Les méthodes de transformation regroupent les méthodes qui utilisent la propriété de base des vecteurs propres :

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (1.30)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (1.31)$$

La matrice Φ d'ordre $n \times n$ qui diagonalise K et M selon les équations (1-30), (1-31) est unique, nous essayerons donc de la construire par itération.

L'idée principale de ces méthodes est de réduire les matrices K et M en une forme diagonale, en utilisant une succession de pré- et post- multiplication par des matrices P_k^T et P_k respectivement, où $k = 1, 2, \dots$.

Ainsi si $K_1 = K$ et $M_1 = M$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} K_2 = P_1^T K_1 P_1 \\ K_3 = P_2^T K_2 P_2 \\ \dots\dots\dots \\ K_{k+1} = P_k^T K_k P_k \end{array} \right. \quad (1.32)$$

$$\begin{cases} M_2 = P_1^T M_1 P_1 \\ M_3 = P_2^T M_2 P_2 \\ \dots\dots\dots \\ M_{k+1} = P_k^T M_k P_k \end{cases} \quad (1.32)$$

Pour ce processus, nous avons

$$K_{k+1} \longrightarrow \Lambda \quad \text{et} \quad M_{k+1} \longrightarrow I \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty$$

l étant la dernière itération, nous avons

$$\Phi = P_1 P_2 \dots P_l \quad (1.33)$$

en pratique, il n'est pas nécessaire que M_{k+1} converge vers I et K_{k+1} vers Λ , mais il est seulement suffisant que ces deux matrices s'étendent vers des formes diagonalisées tel que:

$K_{k+1} \longrightarrow \text{diag}(K_r)$ et $M_{k+1} \longrightarrow \text{diag}(M_r)$ quand $k \longrightarrow \infty$ et en désignant par l la dernière itération.

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{K_r^{(l+1)}}{M_r^{(l+1)}} \right) \quad (1.34)$$

$$\Phi = P_1 P_2 \dots P_l \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_r^{(l+1)}}} \right) \quad (1.35)$$

Il est à noter qu'une alternative est de transformer le problème $K \Phi = \lambda M \Phi$ en une forme plus économique dite forme standard ($M=I$). Dans ce cas les M 1^{ères} transformations sont utilisées pour réduire K dans (1-31) en une forme tridiagonale sans itération, les matrices P_i , $i=\overline{m+1, l}$ sont alors utilisées pour transformer K_{m+1} en une forme diagonale.

3-2-1 Méthode de Jacobi généralisée

La méthode de Jacobi a été développée pour solutionner le problème aux valeurs propres standard $K \Phi = \lambda \Phi$ ($M=I$), néanmoins peut être généralisée pour les problèmes $K \Phi = \lambda M \Phi$.

Les matrices K et M sont transformées en une forme diagonale par une succession de pre- et post-multiplication par des matrices P_k^T et P_k respectivement.

où P_k est une matrice orthogonale telle que :

$$P_k^T P_k = I \quad (1.36)$$

Dans la méthode de Jacobi, la matrice P_k est une matrice Rotation sélectionnée à chaque itération pour annuler un élément (i,j) extradiagonal non nul de K_k et M_k .

$$\chi = \frac{\bar{K}^{(k)}}{2} + \text{sign}(\bar{K}^{(k)}) \sqrt{\left\{ \frac{\bar{K}^{(k)}}{2} \right\}^2 + \bar{K}_{ii}^{(k)} \bar{K}_{jj}^{(k)}} \quad (1.44)$$

La transformation n'est appliquée que si l'élément extradiagonal est plus grand que la tolérance dynamique de la séquence.

En pratique ce n'est pas l'élément (i,j) qui est comparé à cette tolérance, mais plutôt les facteurs de couplage entre le $i^{\text{ème}}$ et le $j^{\text{ème}}$ degré de liberté définis par :

$$F_k = \left(\frac{K_{ij}^2}{k_{ii} k_{jj}} \right)^{1/2} ; \quad F_M = \left(\frac{M_{ij}^2}{m_{ii} m_{jj}} \right)^{1/2} \quad (1.45)$$

En plus de cette tolérance dynamique, il est nécessaire de mesurer la convergence en comparant les approximations successives des valeurs propres et en testant si tous les éléments extradiagonaux sont assez petits :

$$\frac{|\lambda_i^{(1+1)} - \lambda_i^{(1)}|}{\lambda_i^{(1+1)}} \leq 10^{-5} \quad (1.46)$$

où

$$\lambda_i^{(1)} = \frac{k_{ii}^{(k)}}{m_{ii}^{(k)}} , \quad \lambda_i^{(1+1)} = \frac{k_{ii}^{(k+1)}}{m_{ii}^{(k+1)}} \quad (1.47)$$

et

$$\left[\left[\frac{K_{ij}^{(1+1)}}{k_{ii}^{(1+1)} k_{jj}^{(1+1)}} \right]^{1/2} \right] \leq 10^{-5} \quad (1.48)$$

$$\left[\left[\frac{m_{ij}^{(1+1)}}{m_{ii}^{(1+1)} m_{jj}^{(1+1)}} \right]^{1/2} \right] \leq 10^{-5} \quad \forall \begin{matrix} i, j \\ i < j \end{matrix} \quad (1.49)$$

10^{-2s} tolérance requise

Algorithme de la méthode de Jacobi

Définir la précision de convergence requise

Pour chaque cycle s :

Définir la tolérance dynamique $\epsilon_s = 10^{-2s}$

Pour chaque ligne $i = 1, 2, \dots, n$

Pour chaque colonne $j = i+1, n$

Calculer les facteurs de couplage

$$F_K = \frac{|K_{ij}|}{(K_{ii}K_{jj})^{1/2}} \quad F_M = \frac{|m_{ij}|}{(m_{ii}m_{jj})^{1/2}}$$

si $F_K > \epsilon_s$ ou $F_M > \epsilon_s$

Calculer α et γ par les équations

Transformer les matrices K et M

Colonne $i =$ colonne $i + \gamma$ colonne j
Colonne $j =$ colonne $j + \alpha$ colonne i

puis

Ligne $i =$ ligne $i + \gamma$ ligne j
Ligne $j =$ ligne $j + \alpha$ ligne i

Calculer les valeurs propres

$$\lambda_i = K_{ii}/m_{ii}$$

Tester la convergence

$$\frac{|\lambda_i^{(s+1)} - \lambda_i^{(s)}|}{\lambda_i^{(s+1)}} \leq \epsilon; \quad \lambda_i^{(s)} = \frac{k_{ii}^{(s)}}{m_{ii}^{(s)}}; \quad \lambda_i^{(s+1)} = \frac{K_{ii}^{(s+1)}}{m_{ii}^{(s+1)}} \\ i = 1, \dots, n$$

$$\left[\left[\frac{K_{ij}^{(s+1)}}{k_{ii}^{(s+1)} k_{jj}^{(s+1)}} \right]^{1/2} \right] \leq \epsilon$$

$$\left[\left[\frac{m_{ij}^{(s+1)}}{m_{ii}^{(s+1)} m_{jj}^{(s+1)}} \right]^{1/2} \right] \leq \epsilon \quad \forall i, j \quad i < j$$

3-3 Méthode d'itération polynomiale :

Les solutions du problème aux valeurs propres $K \Phi = \lambda M \Phi$ ne sont en fait que les racines d'un polynôme $P(\lambda)$ du même ordre que les matrices M et K .

Les méthodes de cette catégorie opèrent sur les valeurs propres leur propriété de base $P(\lambda) = \det [K - \lambda M] = 0$

Plusieurs procédures ont été proposées mais nous ne mentionnerons que 2 stratégies fondamentales; Les méthodes explicites et implicites d'itération polynomiales. Une itération inverse avec décalage est alors indispensable pour évaluer les vecteurs propres c'est-à-dire que chaque vecteur propre est obtenu avec itération inverse avec un décalage égal à la valeur propre correspondante .

3.3.1 L'itération polynomiale explicite :

Le polynôme caractéristique est mis sous forme :

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$$

Dans cette méthode, les coefficients a_0, a_1, \dots, a_n sont déterminés par un développement de déterminant, ensuite, on calcule les racines du polynôme ainsi obtenu.

En général, les coefficients sont difficiles à déterminer quand "n" devient important, c'est pourquoi cette méthode a complètement été abandonnée.

3.3.2 L'itération polynomiale implicite :

Dans cette méthode, il n'est pas nécessaire de déterminer les coefficients $a_i, i=1 \dots n$.

Les valeurs de $P(\lambda)$ sont évaluées en décomposant la matrice $[K - \lambda M]$ en une matrice triangulaire inférieure "L" avec l'unité sur la diagonale et une matrice triangulaire supérieure S tel que

$$[K - \lambda M] = LS$$

$$\text{et nous avons alors: } \det [K - \lambda M] = \prod_{i=1}^n S_{ii} \quad (1.50)$$

Un nombre d'itérations est alors indispensable pour approcher au mieux les racines du polynôme, des techniques simples sont alors utilisées, par exemple l'interpolation linéaire, supposons que $\mu_{k-1} < \mu_k$ alors l'itération se fait comme suit:

$$\mu_{k+1} = \mu_k \frac{P(\mu_k)}{P(\mu_k) - P(\mu_{k-1})} (\mu_k - \mu_{k-1}) \quad (1.51)$$

μ_k est la $k^{\text{ème}}$ itération

$$\mu_{k+1} = \mu_k \frac{P(\mu_k)}{P'(\mu_k)}$$

où

$$P'(\mu_k) = \frac{P(\mu_k) - P(\mu_{k-1})}{(\mu_k - \mu_{k-1})}$$

4- Résolution des problèmes de grande dimension :

Dans le cadre d'une analyse de type éléments finis on s'intéresse aux premiers modes propres correspondant à la partie basse fréquence du spectre.

Une des méthodes les plus performantes et la plus largement utilisée est la méthode du Sous-Espace. Celle-ci résulte d'une combinaison de l'analyse de Rayleigh-Ritz et l'itération inverse.

4-1 Analyse de Rayleigh-Ritz:

Dans l'analyse de Rayleigh-Ritz, on considère un ensemble de vecteurs ϕ qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs Ritz Ψ_i , $i=1..q$

$$\text{tel que } \phi = \sum_{i=1}^q x_i \Psi_i \quad (1.51)'$$

où x_i : coordonnées de Ritz

Pour ce propos, on évoque le principe de minimisation du quotient de Rayleigh-Ritz.

$$\lambda_1 = \min(\rho(\phi)) \quad (1.52)$$

Le but de l'analyse de Rayleigh-Ritz est de déterminer les vecteurs spécifiques qui, en plus de leurs appartenance au sous-espace engendré par les vecteurs de Ritz, approchent de la meilleure manière les vecteurs recherchés.

Le quotient de Rayleigh dans ce cas est

$$\rho(\bar{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{K}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{M}_{ij}} = \frac{\tilde{K}}{\tilde{M}} \quad (1.53)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{ij} &= \Psi_i^T K \Psi_j \\ \tilde{M}_{ij} &= \Psi_i^T M \Psi_j\end{aligned}\tag{1.54}$$

où sous forme matricielle

$$\tilde{K} X = \rho \tilde{M} X\tag{1.55}$$

La solution de l'équation (1-55) donne q valeurs propres ρ_i qui sont des approximations de $\lambda_1 \dots \lambda_n$ et q vecteurs propres $X_i^T = [X_1^i \ X_2^i \ \dots \ X_q^i]$.

ces vecteurs propres sont utilisés pour calculer les vecteurs $\bar{\Phi}_1 \dots \bar{\Phi}_q$ qui approchent les vecteurs propres $\Phi_1 \dots \Phi_q$: tels que:

$$\Phi_i^T = \sum_{j=1}^q x_j \Psi_j\tag{1.56}$$

Les valeurs propres calculées constituent des approximations supérieures aux valeurs propres recherchées. c'est-à-dire :

$$\lambda_1 \leq \rho_1 \dots \lambda_n \leq \rho_n \quad \lambda_1 \leq \rho_1 < \lambda_n$$

Pour évaluer les autres valeurs propres, on opère de même:

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \min \rho(\Phi) \quad \text{avec en plus la condition} \\ \text{d'orthogonalité :} & \quad \Phi^T M \Phi_1 = 0\end{aligned}$$

Pour calculer ρ_i , on recherche $\rho_i = \min \rho(\bar{\Phi})$ avec

$$\Phi^T M \Phi_j \quad j=1, \dots, i-1$$

Les vecteurs de Ritz sont calculés à partir de la solution du problème statique $K\Psi' = R$ où

Ψ est une matrice (n x q) stockant les vecteurs de Ritz.

L'analyse se poursuit par une projection des matrices M et K sur le sous-espace de Ritz tel que :

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \Psi^T K \Psi \\ \tilde{M} &= \Psi^T M \Psi\end{aligned}\tag{1.57}$$

On résoud le problème

$$\tilde{K} X = \tilde{M} X \rho$$

ρ : matrice diagonale

X : matrice stockant les M-orthogonaux vecteurs propres. l'approximation des vecteurs propres du problème

$$K \bar{\phi} = \lambda M \bar{\phi} \quad \text{où} \quad \bar{\phi} = \Psi X \tag{1.58}$$

4-2 Méthode du sous-espace

Dans le cadre d'une analyse de type éléments finis, on s'intéresse aux premiers modes propres correspondants à la partie basse fréquence du spectre.

Une des méthodes les plus performantes et la plus largement utilisée est la méthode du sous-espace. Celle-ci résulte d'une combinaison de l'analyse de Rayleigh-Ritz et l'itération inverse

Description de la méthode :

Soient q vecteurs initiaux rangés dans la matrice X_1
 - on exécute une itération inverse pour calculer les (q) vecteurs de Ritz

$$K \bar{X}_2 = M X_1$$

- 2 opérations doivent être effectuées

- Une normalisation
- Une orthogonalisation

La 1^{ère} opération maintient les normes des vecteurs raisonnables tandis que la 2^{ème} les orthogonalise de façon à les faire tendre vers des modes différents, plutôt que vers le mode fondamental pour cela:

1°) projeter K et M sur le sous-espace engendré par X_2

$$K_2 = \bar{X}_2^T K X_2$$

$$M_2 = \bar{X}_2^T M X_2$$

2°) résoudre le problème

$$K_2 Q_2 = M_2 Q_2 \Lambda_2$$

et enfin, on calcule les nouveaux vecteurs normalisés et orthogonalisés:

$$X_2 = \bar{X}_2 Q_2$$

Algorithme de la méthode du sous-espace :

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k$$

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Y_k$$

$$\bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1}$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1}$$

$$K_{k+1} \varphi_{k+1} = M_{k+1} \varphi_{k+1} \Lambda_{k+1}$$

$$Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} \varphi_{k+1}$$

tel que $\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda$; $\bar{X}_{k+1} \varphi_{k+1} \rightarrow \Phi$ quand $k \rightarrow \infty$

Vecteurs initiaux

Le choix des vecteurs initiaux repose sur 2 cas triviaux.

- Cas où M est diagonale avec P éléments différents de zéro, la procédure converge au bout d'une itération si on choisit comme vecteurs initiaux les vecteurs de la base canonique e_i .

- Si K et M sont diagonales, la procédure converge au bout de 2 itération si les vecteurs initiaux sont des vecteurs de la base canonique e_i , i correspondant aux plus petits rapports. Les 2 cas précédents montrent que les vecteurs initiaux doivent être construits de façon à exciter les degrés de liberté auxquels correspondent les plus grandes masses et les plus petites rigidités.

En général, la 1^{ère} colonne de y, est constituée de la diagonale de la matrice masse, ceci nous assure que tous les degrés de liberté sont excités, les autres colonnes sont les vecteurs e_i de la base canonique où "i" est l'indice correspondant aux plus petits rapports K_{ii}/m_{ii}

* calculer p valeurs propres ---> opérer sur un sous-espace de q tel que $q = \min(p+8, 2p)$

Convergence

La convergence n'est testée que sur les p premiers modes

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} < \text{tol} \quad i = 1, \dots, p$$

CHAPITRE VII
PRÉSENTATION DES PROGRAMMES
FEMDYN ET BEMDYN

1- Introduction

Le but des programmes FEMDYN et BEMDYN est l'investigation des modes propres d'une structure.

Le programme FEMDYN est le programme établi pour résoudre le problème aux valeurs propres régies par l'équation:

$$K \Phi = \lambda M \Phi$$

obtenue en considérant des vibrations libres. Les matrices K et M sont les matrices éléments finis obtenues en utilisant l'élément rectangulaire à 4 noeuds à 2 degrés de liberté par noeud.

Le programme BEMDYN consiste à résoudre le problème aux valeurs propres régies par l'équation:

$$\hat{H} \Phi = \lambda \hat{M} \Phi$$

où les matrices \hat{H} et \hat{M} sont obtenues en discrétisant l'équation intégrale aux frontières obtenue en considérant des vibrations libres et en utilisant l'élément linéaire en premier lieu puis l'élément constant en second.

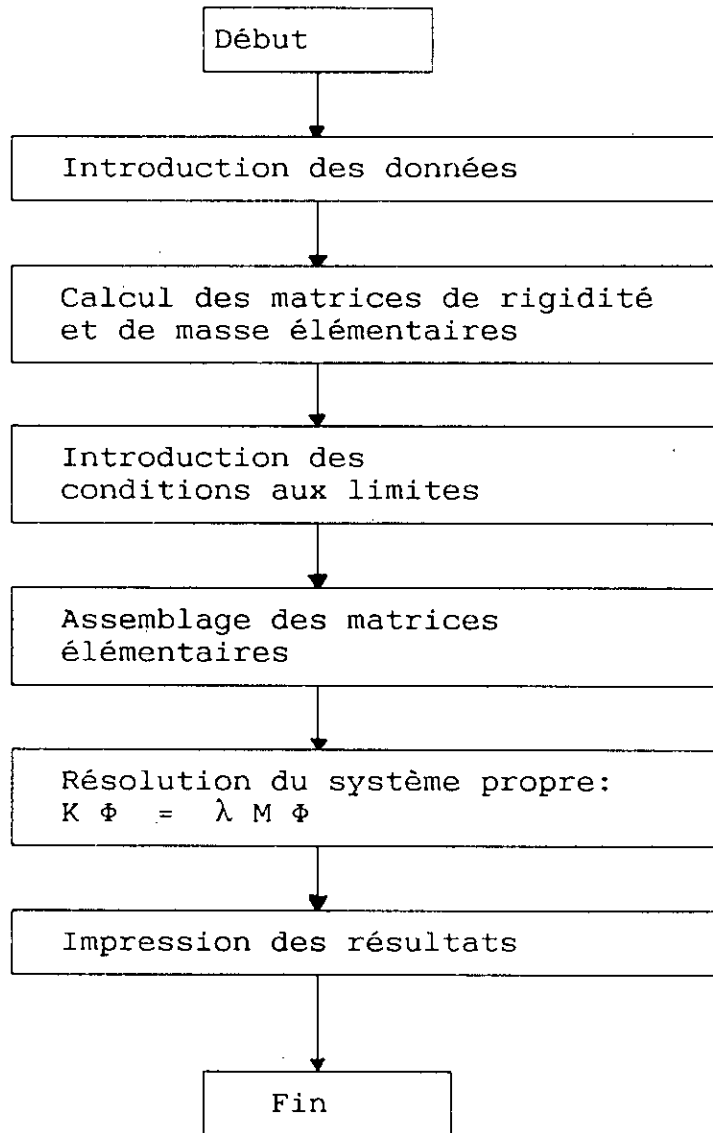
2- Présentation du programme FEMDYN:

Dans le cadre d'une analyse de type éléments finis, l'analyste est appelé à manipuler des matrices de grand ordre ainsi que différentes techniques numériques.

L'efficacité d'un programme informatique dépend de deux facteurs:

- Le coût de calcul.
- Les techniques numériques utilisées.

Le programme que nous avons élaboré pour l'investigation des modes propres d'une structure est comme suit:



" Organigramme du programme FEMDYN "

a- Méthode de stockage des matrices globales:

Parmi les méthodes de stockage des matrices symétriques, on a opté pour le stockage en ligne de ciel ou " skyline " et ceci pour l'intérêt qu'elle présente (augmenter l'espace mémoire).

Cette technique consiste à stocker les termes $K(i,j)$ de la matrice globale $[K]$ compris entre la diagonale et les lignes de ciel de la matrice, dans un vecteur $\{A\}$, en ne considérant que les termes non nuls de la matrice.

Cette méthode nécessite, en plus du vecteur $\{A\}$, un autre vecteur $MAXA$, dont les éléments indiquent les adresses des termes diagonaux de $[K]$ dans le vecteur $\{A\}$.

Ainsi, un élément $K(i,j)$ de $[K]$ correspond à l'élément $A(ij)$ dans $\{A\}$ comme suit:

$$K(i,j) = A(MAXA(j) + j - i) \quad (9.1)$$

Les éléments de $MAXA$ sont reliés aux lignes de ciel par

$$MAXA(j+1) = MAXA(j) + j - m_j + 1 \quad (9.2)$$

m_j : Lignes de ciel, définies comme étant les premiers termes non nuls de chaque colonne de $[K]$.

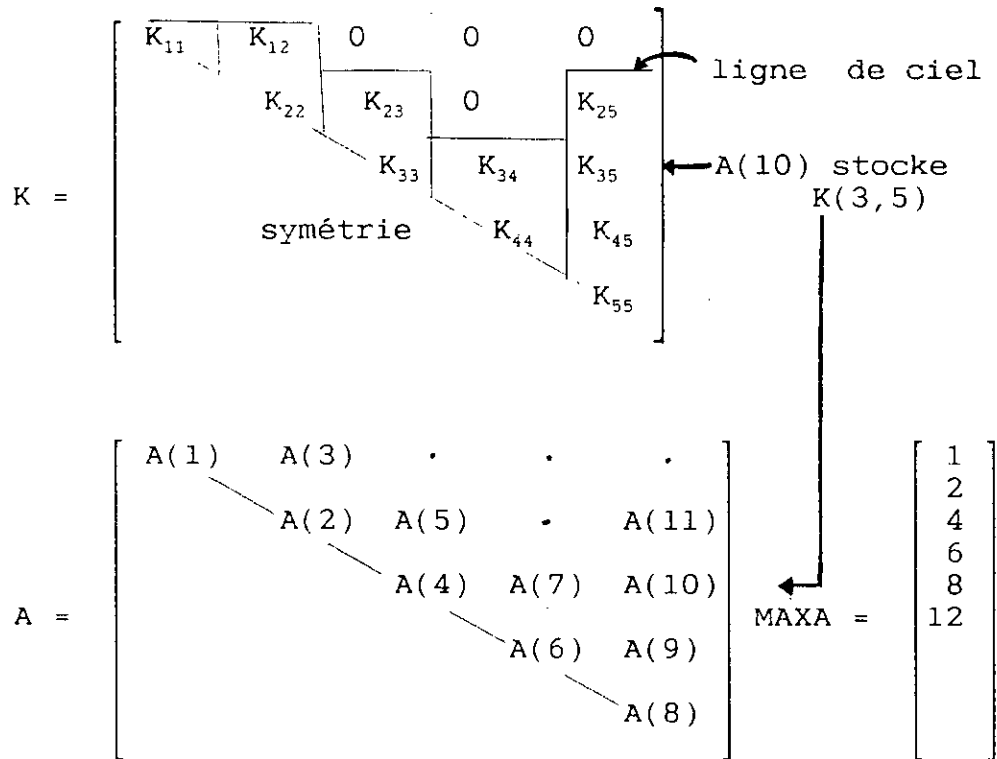


Figure 7-1: " Technique de stockage en ligne de ciel "

b- Méthode de résolution:

Parmi les méthodes de résolution des systèmes propres exposées dans le chapitre [VI], nous avons opté pour la méthode du sous-espace car les systèmes obtenus sont de grande dimension et nous ne nous intéressons qu'à la détermination des plus petites valeurs propres et vecteurs propres correspondants au problème aux valeurs propres généralisé:

$$K \Phi = \lambda M \Phi \quad (9.3)$$

nous rappelons l'algorithme de l'itération du sous espace:

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (9.4)$$

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Y_k \quad (9.5)$$

$$Y_{k+1} = M \bar{X}_{k+1} \quad (9.6)$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1} \quad (9.7)$$

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (9.8)$$

$$Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} Q_{k+1} \quad (9.9)$$

Cet algorithme est mis en application dans une sous-routine "SSpace" en vue de calculer les couples (λ_i, Φ_i) du système propre (9.3). Elle est constituée de plusieurs sous-routines:

* Subroutine Decomp: cette sous-routine permet de factoriser la matrice K sous la forme:

$$K = L D L^T \quad (9-10)$$

où L: est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

D: est une matrice diagonale.

* Subroutine REDBACK: elle permet la résolution simultanée de q systèmes linéaires:

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (9.11)$$

en deux étapes qui sont:

$$L V = Y_k \quad (9.12)$$

$$D L^T \bar{X}_{k+1} = V \quad (9.13)$$

* Subroutine Jacobi: elle permet la résolution du système propre d'ordre q:

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (9.14)$$

où $q = \min (2 * NVALP, NVALP + 8)$

NVALP: Nombre de valeurs propres requises: dans notre cas (six)

Les autres équations de l'algorithme nécessitent de simples produits matriciels.

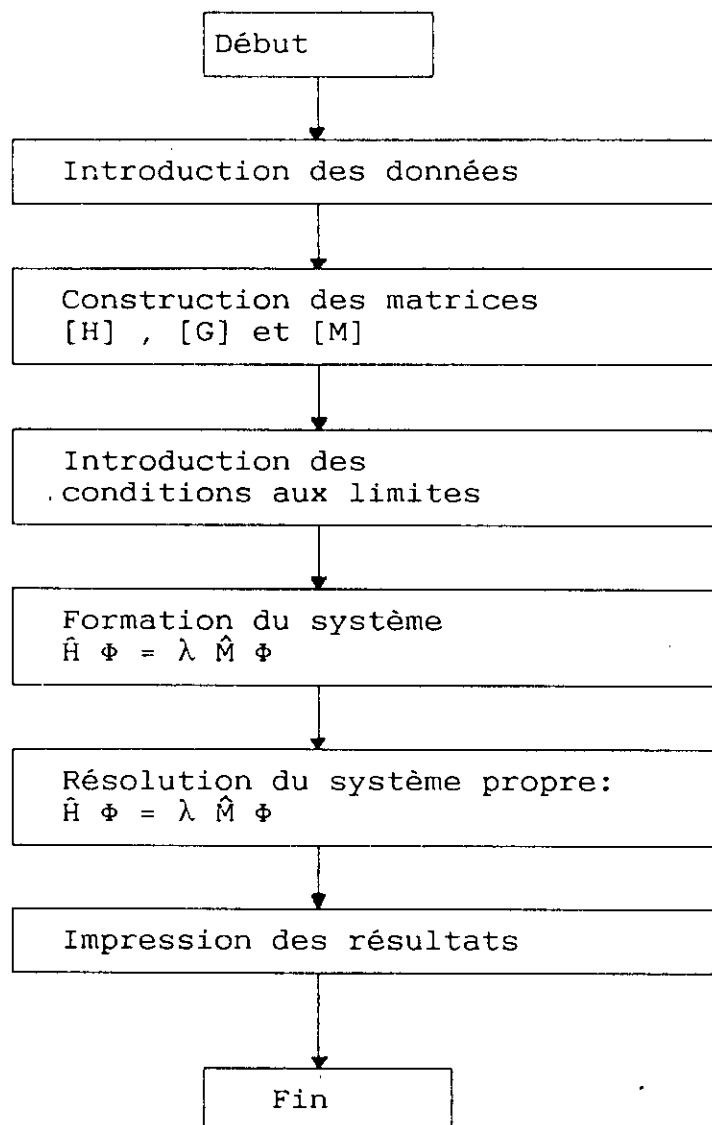
3- Présentation du programme BEMDYN:

Le programme BEMDYN est le programme élément de frontière élaboré pour résoudre le problème aux valeurs propres:

$$\hat{H} \Phi = \lambda \hat{M} \Phi$$

obtenu en étudiant les vibrations libres des structures.

Le programme BEMDYN a la structure suivante:



" Organigramme du programme BEMDYN "

* Formation des matrices H, G et M:

Les solutions fondamentales étant celles établies par Kelvin pour le cas statique, les matrices H et G sont par conséquent, celles calculées dans les programmes BEMSTAT. La détermination de la matrice masse constitue une étape importante lors de l'élaboration du programme et nécessite la manipulation de cinq matrices [H], [G], [Ψ], [η] et [F].

Le programme BEMDYN a été élaboré de manière à n'utiliser que l'espace mémoire de trois matrices seulement.

* Formation du système algébrique:

Elle nécessite dans un premier temps: Un réarrangement des matrices H et M de manière à différencier entre les deux surfaces Γ_1 et Γ_2 c'est à dire:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & | & H_{12} \\ \hline H_{21} & | & H_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & | & M_{12} \\ \hline M_{21} & | & M_{22} \end{bmatrix}$$

Et enfin, par de simples produits matriciels les matrices \hat{H} et \hat{M} sont obtenues conformément aux équations (43)

* Méthode de résolution:

Parmi les méthodes de résolution des systèmes propres nous avons opté pour la méthode des sous-espaces.

Les matrices $[\hat{H}]$ et $[\hat{M}]$ sont pleines et non symétriques et ne nécessitent pas l'utilisation d'une méthode de stockage.

Afin d'utiliser la même subroutine sous-espace élaborée dans le programme FEMDYN conçue pour traiter des matrices symétriques définies positives, nous avons effectué une symétrisation des deux matrices $[\hat{H}]$ et $[\hat{M}]$ comme suit:

$$\hat{H}_{ij} = \frac{\hat{H}_{ij} + \hat{H}_{ji}}{2}$$
$$\hat{M}_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji}}{2}$$

CHAPITRE VIII
APPLICATIONS

1- Introduction

Il existe divers éléments de structure sollicités en contrainte ou en déformation plane.

Notre application consiste à analyser le comportement statique et dynamique des:

- Voiles pleins
- Voiles avec une file d'ouvertures
- Voiles avec plusieurs files d'ouvertures

* Résumé:

Utilisation d'un élément de frontière constant puis linéaire et l'élément rectangulaire pour l'analyse statique des voiles encastrés à leurs bases soumis à un chargement triangulaire, puis l'utilisation des mêmes éléments pour l'investigation des modes propres.

* Courbes comparatives:

- Déplacement horizontal U_x
- Contrainte σ_{xx}
- Contrainte τ_{xy}
- Contrainte σ_{yy}

* Tableaux comparatifs

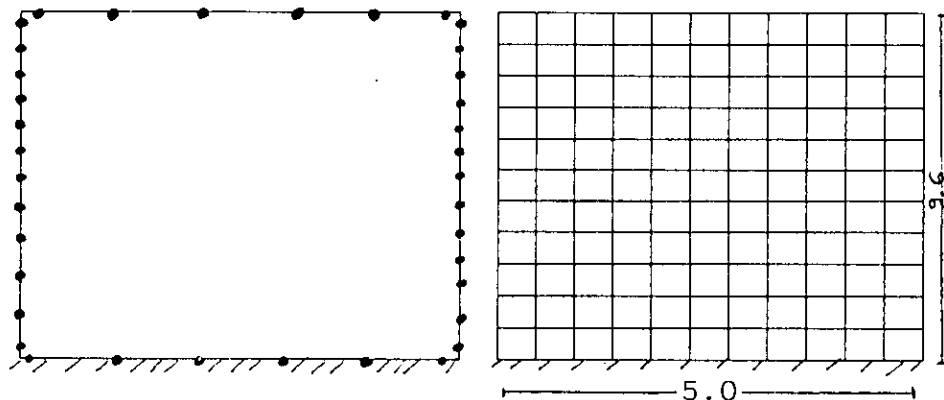
- Périodes de vibration

APPLICATION 1: Voile plein

a- Cas statique:

Données:

H = 9.6m	V = 32t (séisme à la base)
h = 3.2m	E = 3.78.10 ⁶ t/m ²
EV = 1m	v = 0.3



BE model	FE model
46 noeuds (élément constant)	143 noeuds
38 noeuds (élément linéaire)	

Fig 1: " Voile plein "

b- Cas dynamique:

Données:

$$E/\rho = 10^4$$

$$\nu = 0.2$$

Modèle de masse: Matrice masse cohérente.

Mode	1	2	3	4	5	6
BEM T(s)	1.303	0.361	0.339	0.169	0.126	0.124
MEF T(s)	1.321	0.382	0.344	0.162	0.129	0.128

Tableau 1- Périodes de vibrations libres
voile plein

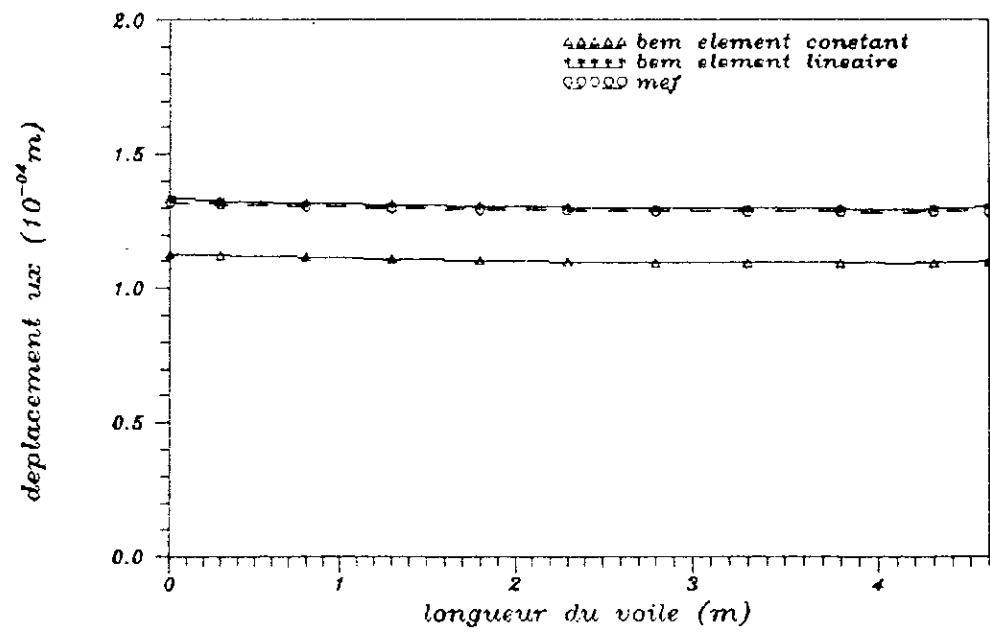


FIG 1.1: COURBES COMPARATIVES DES DEPLACEMENTS HORIZONTAUX

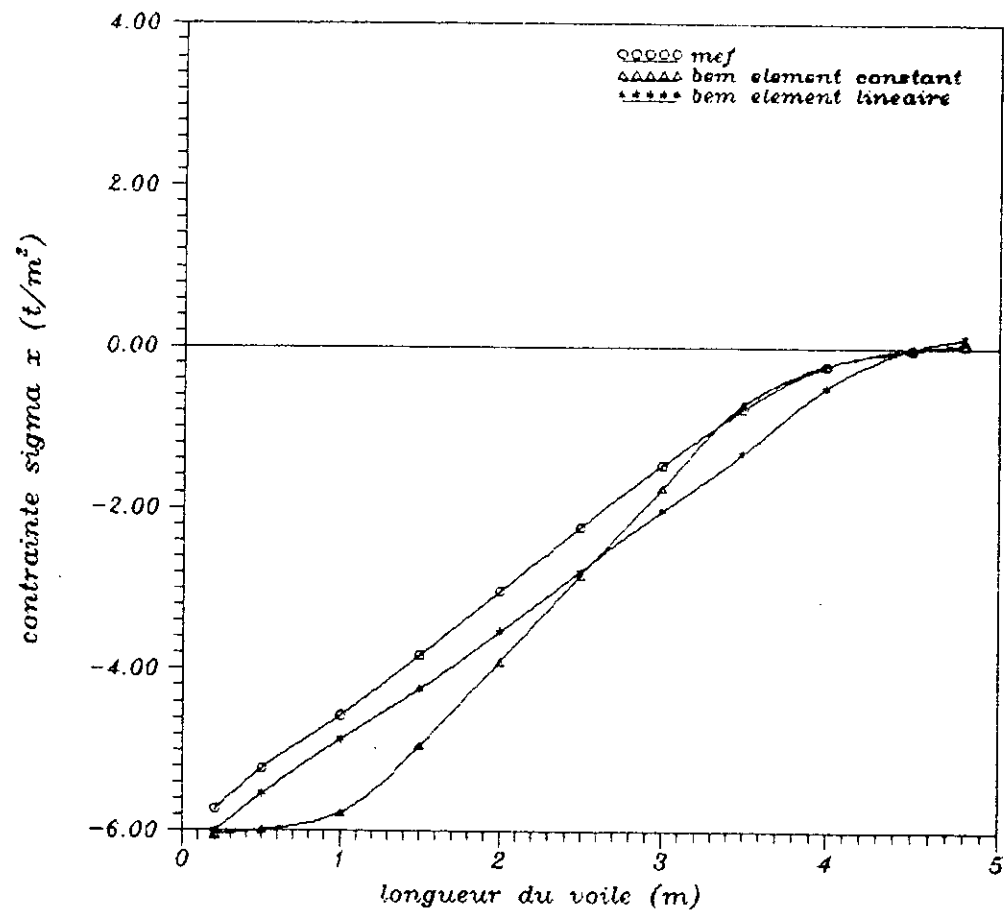


FIG 1.2: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES SIGMA X

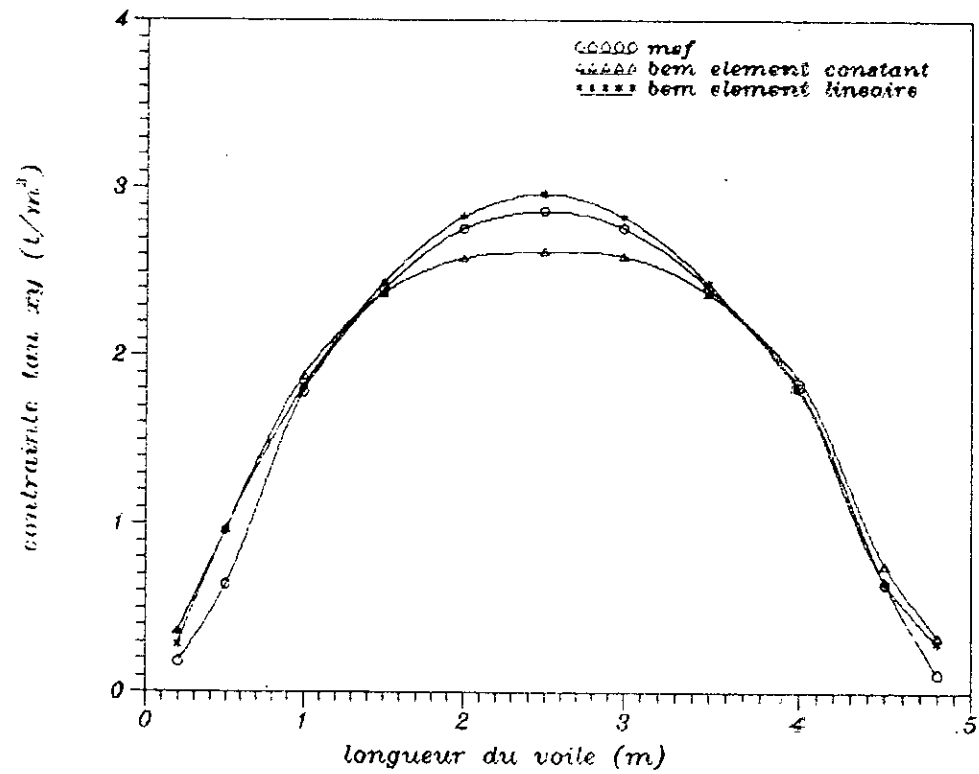


FIG 1.3: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES TAU XY

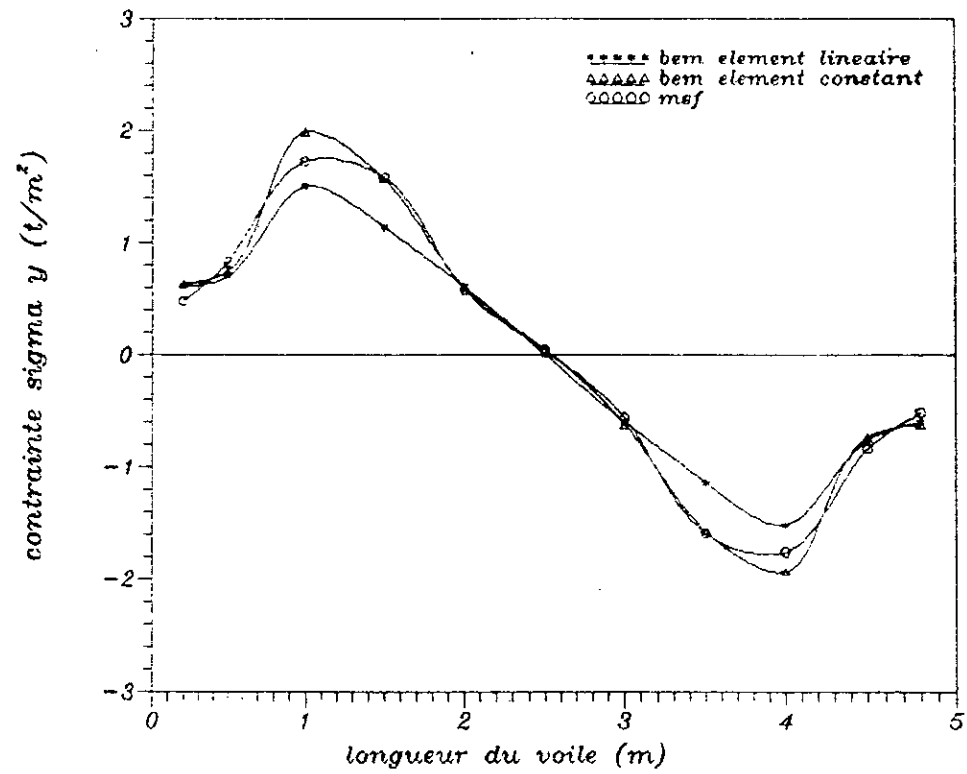


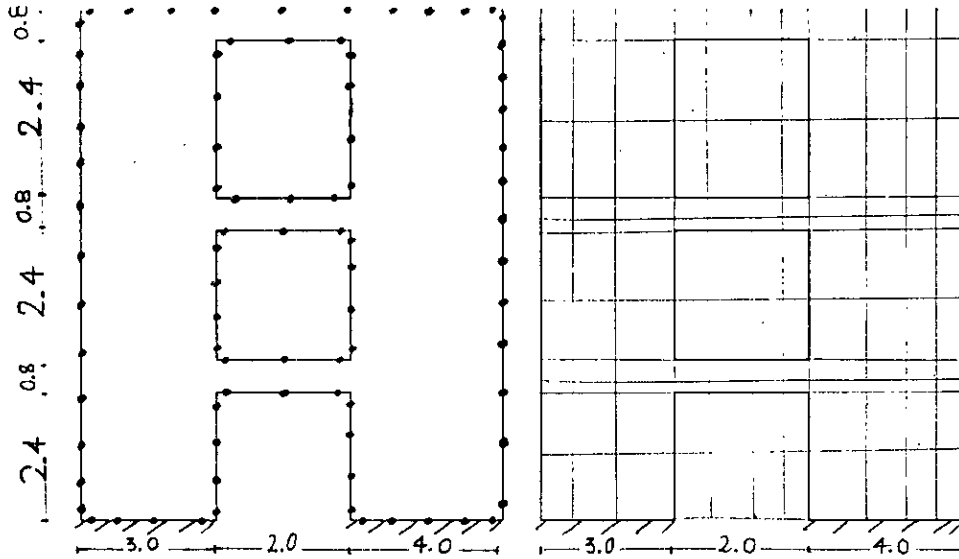
FIG 1.4: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES SIGMA Y

APPLICATION 2:

a- Cas statique: Voile avec une file d'ouverture

Données:

H = 9.6m E = 3.78.10⁶ t/m²
 h = 3.2m v = 0.3
 EV = 1m V = 32t
 hl = 0.8m



BE model
 68 noeuds (élément constant)
 84 noeuds (élément linéaire)

FE model
 156 noeuds

Fig 2: " Voile avec une file d'ouverture "

b- Cas dynamique:

Données:

$E/\rho = 10^4$
 v = 0.2

Modèle de masse: Matrice masse cohérente.

Mode	1	2	3	4	5	6
BEM T(s)	0.756	0.242	0.238	0.221	0.188	0.154
MEF T(s)	0.772	0.266	0.253	0.213	0.193	0.169

Tableau 2- Périodes de vibrations libres voile avec une file d'ouvertures.

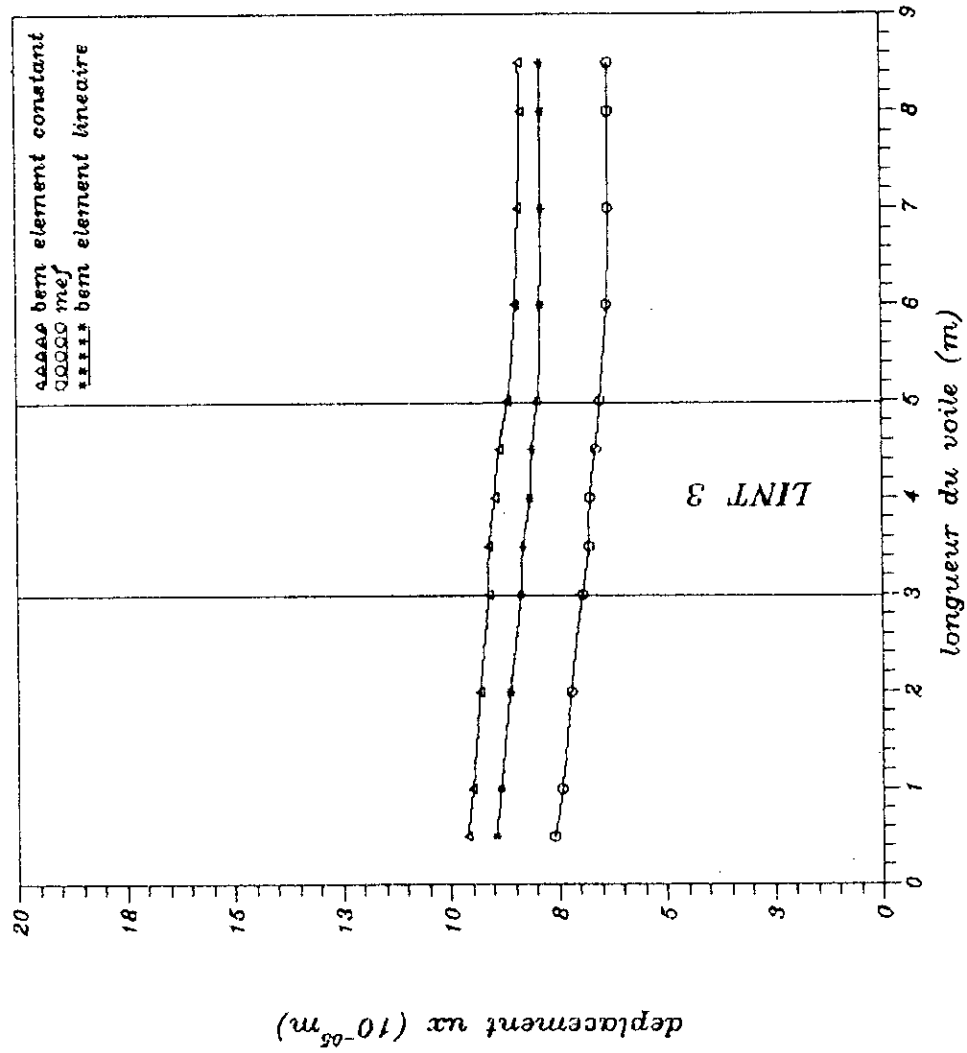


FIG 2.1 : COURBES COMPARATIVES DES DEPLACEMENTS HORIZONTAUX

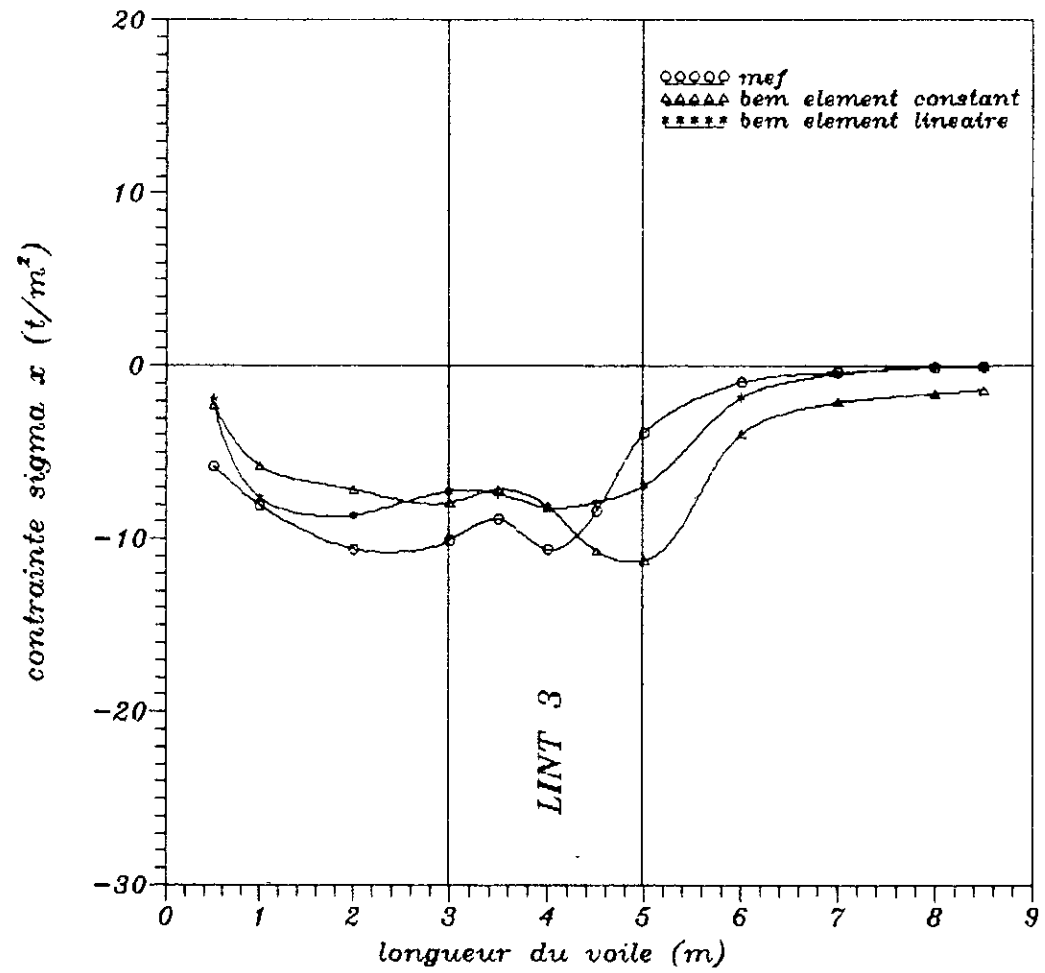


FIG 2.2: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES SIGMA X (fibre moyenne)

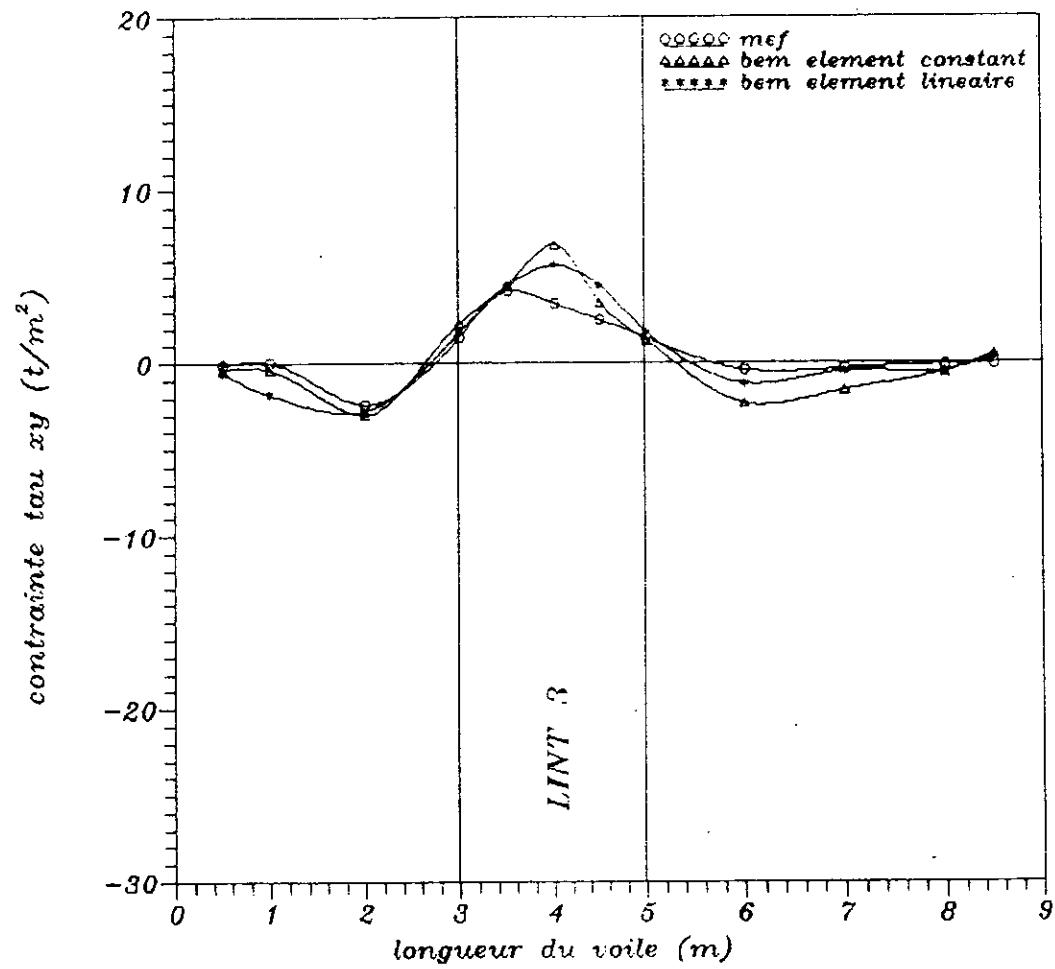


FIG 2.3: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES TAU XY
(fibre moyenne)

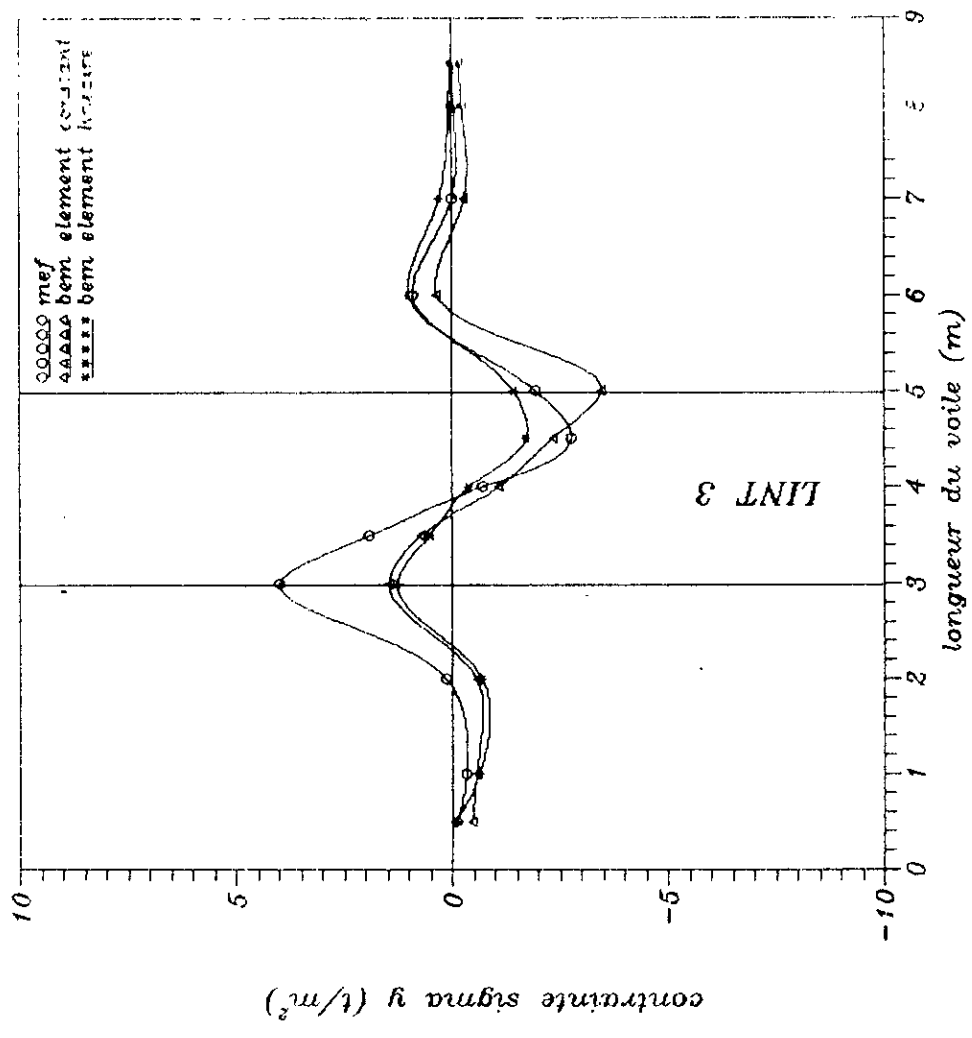


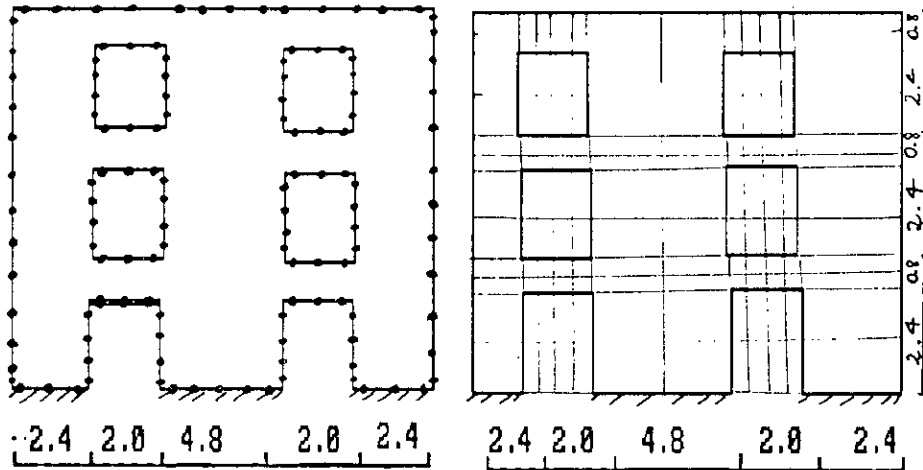
FIG 2.4: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES SIGMA Y (fibre moyenne)

APPLICATION 3: Voile avec deux files d'ouvertures.

a- Cas statique:

Données:

$H = 9.6\text{m}$ $E = 3.78 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$
 $h = 3.2\text{m}$ $\nu = 0.3$
 $EV = 1\text{m}$ $V = 32\text{t}$
 $h1 = 0.8\text{m}$



BE model
 100 noeuds (élément constant)
 128 noeuds (élément linéaire)

FE model
 169 noeuds

Fig 3: " Voile avec deux files d'ouvertures "

b- Cas dynamique:

Données:

$E/\rho = 10^4$
 $\nu = 0.2$

Modèle de masse: Matrice masse cohérente:

Mode	1	2	3	4	5	6
BEM T(s)	0.384	0.240	0.210	0.203	0.179	0.148
MEF T(s)	0.399	0.255	0.213	0.199	0.181	0.153

Tableau 3- Périodes de vibrations libres
Voile avec deux files d'ouvertures.

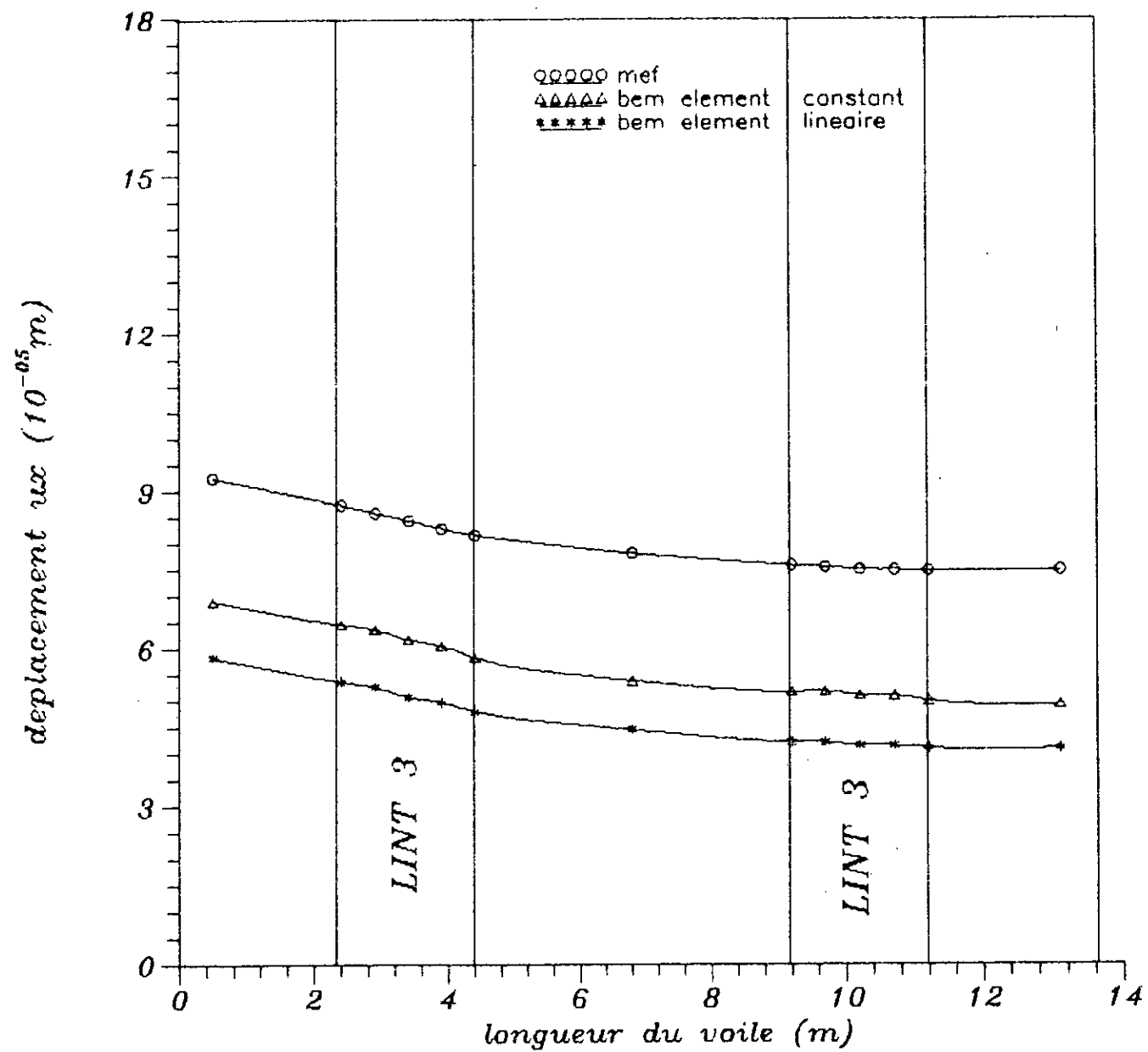


FIG 3.1: COURBES COMPARATIVES DES DEPLACEMENTS HORIZONTAUX

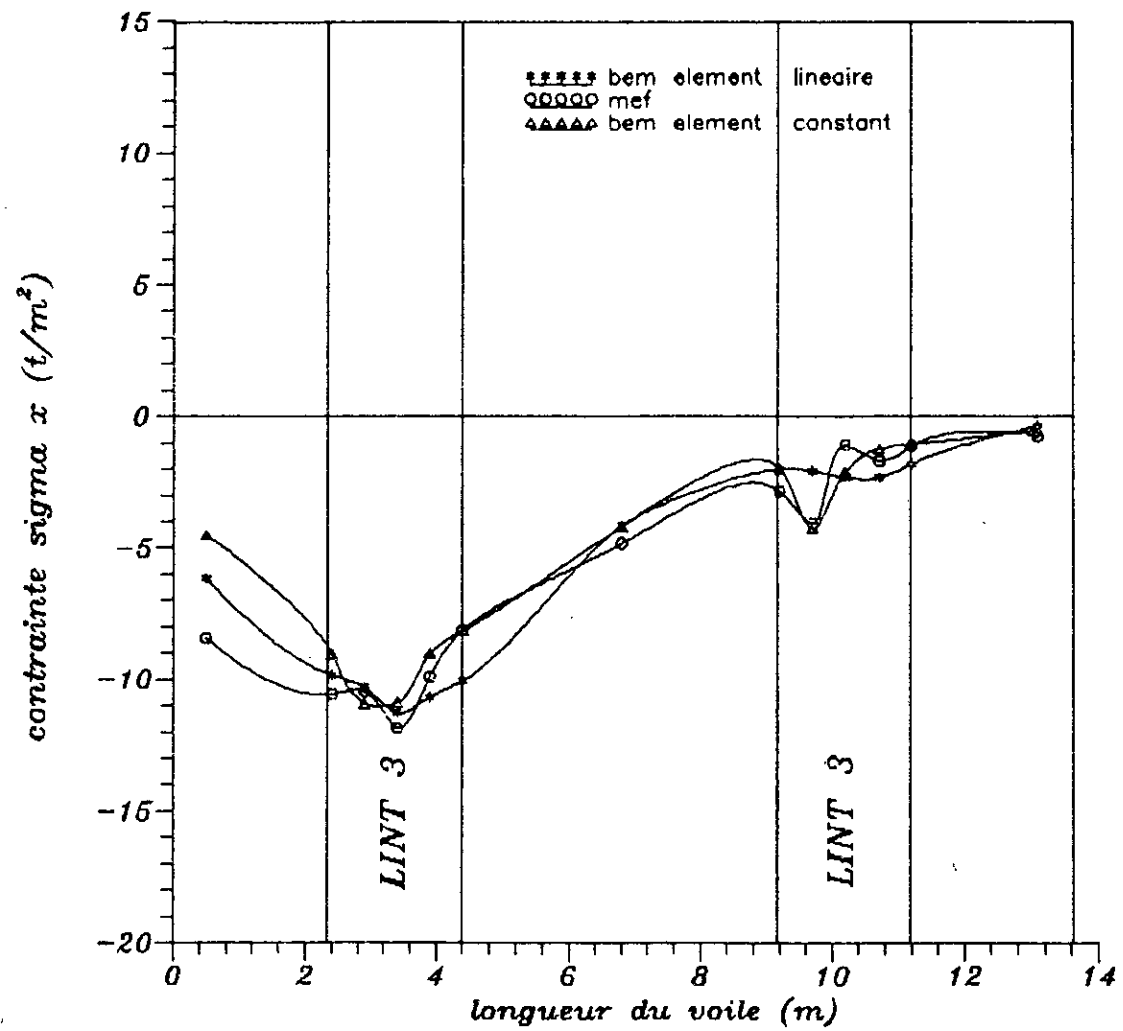


FIG 3.2: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES SIGMA X (fibre moyenne)

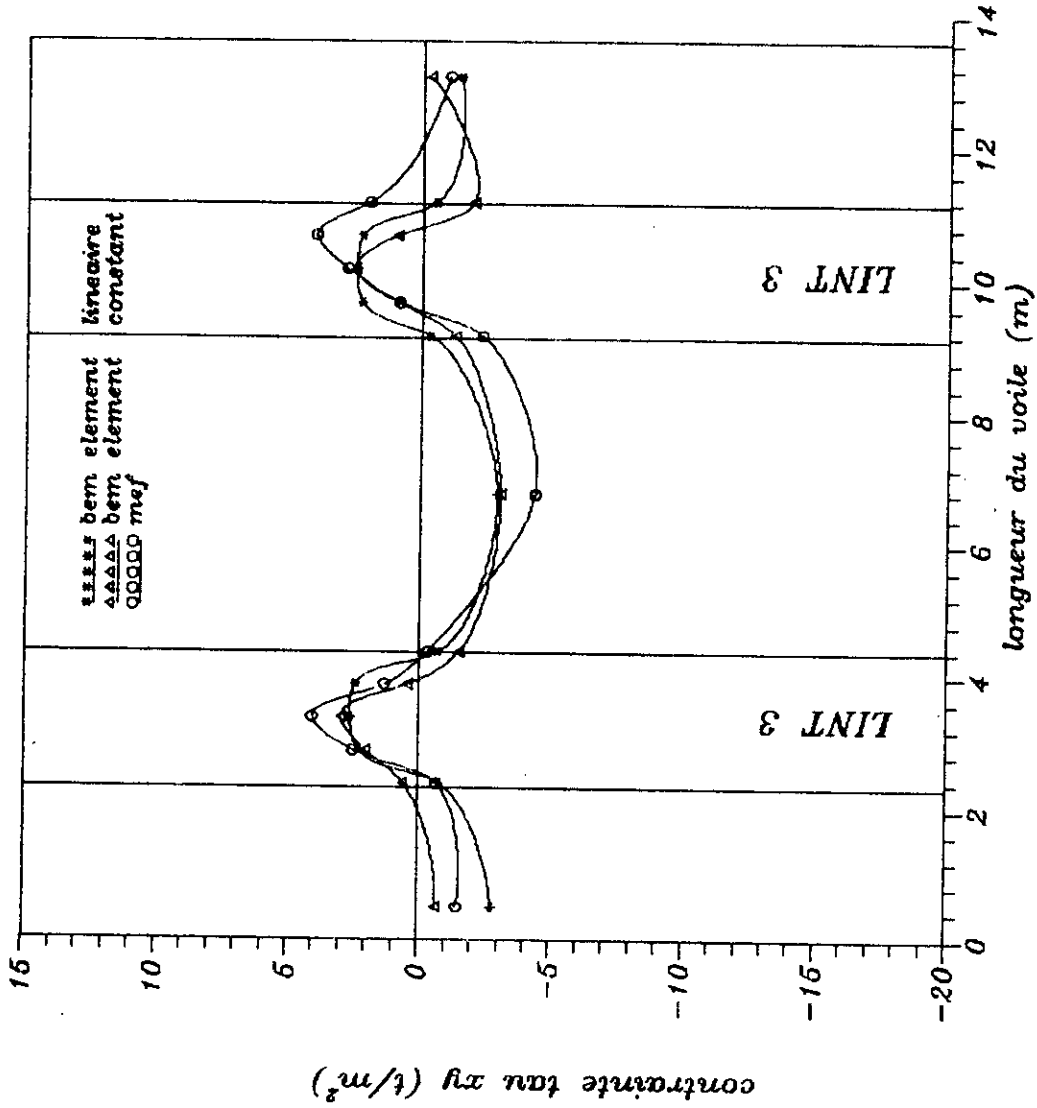


FIG 3.3: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES TAU XY
(fibre moyenne)

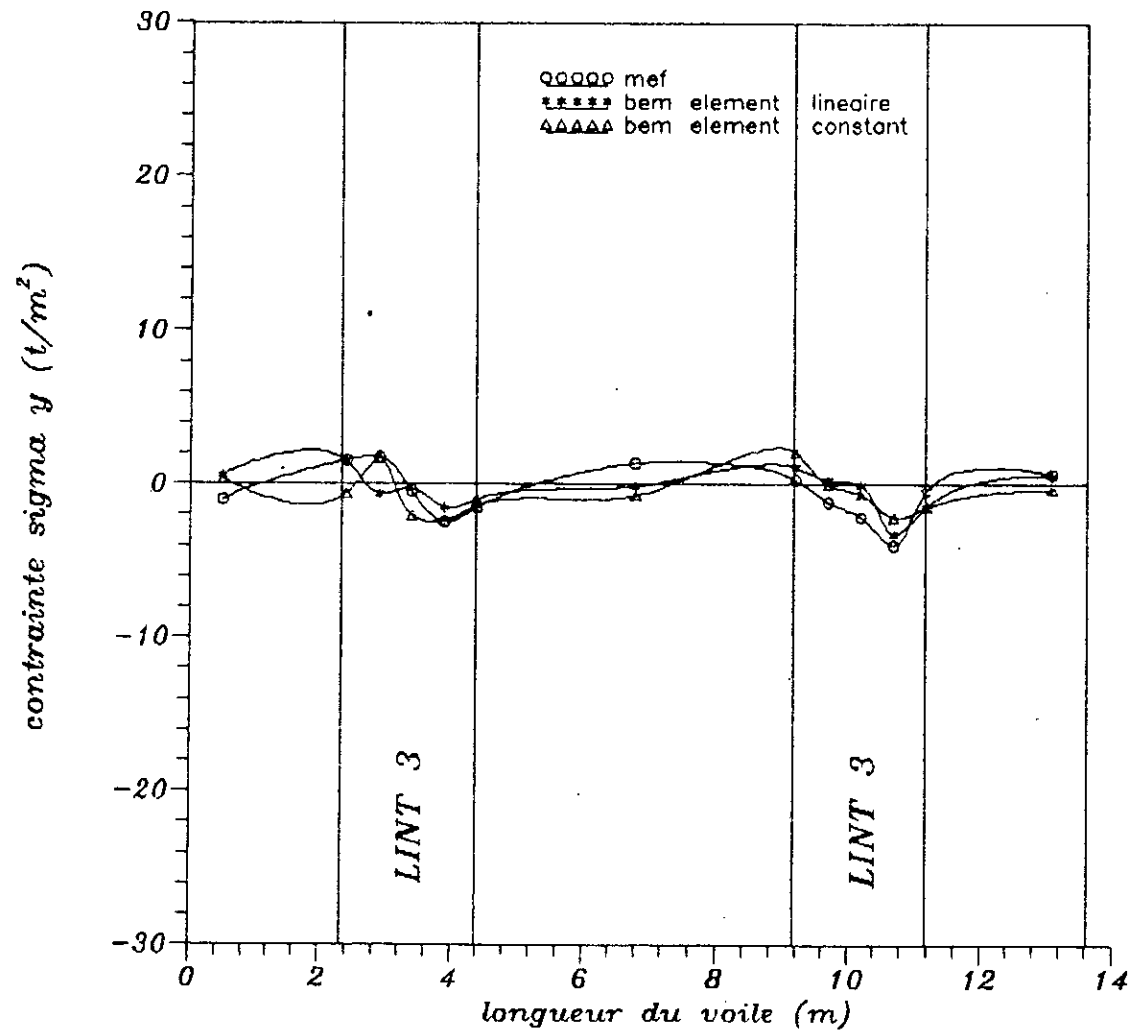


FIG 3.4: COURBES COMPARATIVES DES CONTRAINTES SIGMA Y
(fibre moyenne)

** Interprétation des résultats:

Les applications prises en compte dans le cadre de notre étude, vont nous permettre de voir d'une part les comportements statique et dynamique des voiles et d'autre part le degré de puissance ainsi que la souplesse de la méthode des équations intégrales aux frontières.

Pour cela, en statique nous avons établi certaines courbes qui sont:

- Les courbes des déplacements horizontaux U_x
- Les courbes des contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy}

Nous remarquons ainsi, par le biais de ces graphes, que les déplacements horizontaux U_x obtenus par les deux méthodes ont même ordre de grandeur et donnent des courbes ayant la même allure.

Pour ce qui est:

* Des contraintes sigma x:

Les valeurs sont négatives tout au long du voile.

Cependant, leurs intensités se trouvent être importantes au droit du bord chargé et vont en diminuant jusqu'à s'annuler au niveau du bord non chargé.

Pour les voile(s) avec file(s) d'ouvertures, on observe un effet de concentration de contraintes au niveau des linteaux, car ces derniers représentent en fait des zones de faiblesse.

* Des contraintes sigma y:

Dans le cas du voile plein, une partie de ce dernier travaille en traction alors que l'autre partie travaille en compression. Pour les voile(s) avec file(s) d'ouvertures, le même phénomène est observé avec importance de ces contraintes au niveau des encastremets des linteaux.

* Des contraintes Tau xy:

Aux deux extrémités des voiles, les contraintes sont faibles et tendent vers des valeurs infiniment petites. On constate une intensification de celles-ci tout au long du voile plein et particulièrement au niveau des linteaux des voiles avec ouvertures.

En dynamique, nous constatons que les valeurs des périodes obtenues par la MEF et par la BEM sont très proches.

Cependant, pour les trois cas (voile: plein, avec une file d'ouverture, avec deux files d'ouvertures), on voit bien que la période du premier mode est plus importante que celles qui suivent, ceci s'explique aisément par le fait qu'il représente le mode fondamental des vibrations libres d'une structure qu'on recherche le plus souvent afin d'effectuer des études.

Remarques:

1- Nous tenons à préciser qu'en statique ainsi qu'en dynamique, toutes les valeurs trouvées ont été obtenues pour des discrétisations (MEF ou BEM) atteignant la capacité mémoire

maximale de l'ordinateur.

2- Il n'y a pas lieu d'effectuer une comparaison entre les trois exemples exposés ci-avant (voile: plein, avec une file d'ouvertures, avec deux files d'ouvertures) en ce qui concerne la rigidité de la structure, car en fait il y a différence du point de vue dimensions.

3- En dynamique; nous remarquons que les valeurs des périodes obtenues en BEM sont inférieures à celles de la MEF, mais cependant la BEM donne de bons résultats.

4- Lors de nos exécutions, nous avons jugé inutile d'aller au delà de 6 modes (en dynamique) car plus le mode augmente plus la période s'affaiblit et tend vers des valeurs très proches de zéro.

CONCLUSION

conclusion

Les voiles sont des éléments assurant la stabilité sous l'action des sollicitations horizontales, ils présentent alors une classe importante de problèmes dont la simulation du comportement pour une optimisation des formes et des dimensions est indispensable.

On a ainsi présenté deux méthodes pour la conception de ces éléments: La méthode des éléments finis qui sur la base d'une formulation variationnelle et une discrétisation du domaine, transforme les équations aux dérivées partielles en un système algébrique de taille importante nécessitant une capacité mémoire considérable; et la méthode des équations intégrales qui grâce à une intégration par partie, réduit la dimension du problème tel que, le processus de discrétisation ne concerne que la frontière du domaine.

Dans le cadre d'une analyse dynamique, la MEF constitue une procédure de résolution de l'équation différentielle régissant le comportement de la structure.

En BEM, une nouvelle approche consiste à traiter le problème dynamique de la même manière qu'en éléments finis ou en différences finies, où les équations intégrales sont transformées en un système d'équations différentielles exprimé matriciellement (une matrice masse a été formulée en fonction des noeuds de la frontière exclusivement).

Par conséquent, le problème de vibrations libres, a été réduit, avec utilisation des solutions de Kelvin, en un système algébrique de valeurs et de vecteurs propres.

Enfin, on peut conclure d'après l'application effectuée dans le cadre de cette thèse, que les deux méthodes se prêtent aussi bien l'une que l'autre pour l'analyse des problèmes bidimensionnels; cependant, la BEM s'avère être la plus performante et la plus souple pour les problèmes de grandes dimensions, néanmoins unique pour les problèmes à domaines infinis, toutefois la MEF l'est pour ceux à domaines finis.

APPENDICE

" Intégration numérique "

Introduction

En MEF et en BEM, des intégrales sont souvent évaluées. Cependant, le calcul explicite de ces intégrales n'est possible que dans le cas d'éléments simples et le recours à l'intégration numérique est indispensable dans le cas d'éléments plus compliqués. Selon la dimension du problème nous distinguons:

$\int_{-1}^{+1} F(r) dr$	$;$	$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r,s) dr ds$	$;$	$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r,s,t) dr ds dt$
.1 D.		.2 D.		.3 D.

Plusieurs méthodes sont utilisées, et le choix de l'une par rapport à l'autre dépend de la précision d'intégration nécessaire donc du nombre de points d'intégration nécessaire.

Quadrature de Gauss

C'est une méthode d'intégration numérique très puissante, elle permet d'intégrer exactement un polynôme d'ordre inférieur ou égal à $(2n-1)$ avec n points de Gauss. La quadrature de Gauss unidimensionnelle est donnée par:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i)$$

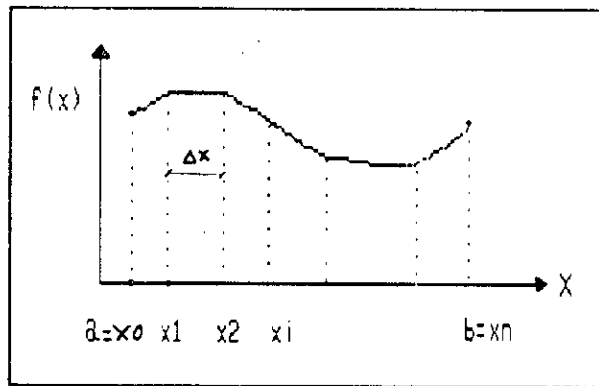
où:

W_i et ξ_i sont les points de Gauss avec:

W_i : Coefficient de pondération

ξ_i : $i^{\text{ème}}$ racine du polynôme de Legendre d'ordre $(n+1)$

* Procédure:



Calculer

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

revient à:

- 1/ Subdiviser $[a,b]$ en n sous-intervalles $[(n+1)$ noeuds].
- 2/ Approcher l'intégrale sur chaque sous-intervalle en utilisant de simples approximations.

" Présentation de l'élément rectangulaire pour l'étude de l'élasticité plane "

Introduction:

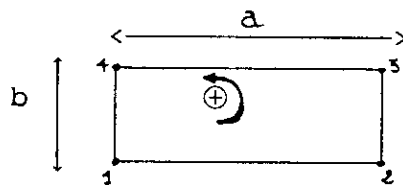
Les voiles sont généralement soumis à des forces dans leur plan, ils sont donc étudiés en élasticité plane. Pour cela, lors de notre étude, nous avons usité l'élément rectangulaire à quatre noeuds, à deux degrés de liberté par noeud.

Calcul de la matrice rigidité de l'élément rectangulaire en élasticité plane:

Les étapes sont les suivantes:

1ère étape:

Elle consiste en le choix d'un système de coordonnées convenables, ainsi que la numérotation des noeuds de l'élément de référence dans le sens trigonométrique.



On note par: $\{U(X,Y)\} = \begin{Bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \end{Bmatrix}$ le déplacement en un point donné de coordonnées X et Y

2ème étape:

On choisit la fonction de déplacement $[f(X,Y)]$ définissant $\{U(X,Y)\}$.

Pour les problèmes d'élasticité plane on aura:

$$\begin{cases} u(X,Y) = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 XY \\ v(X,Y) = \beta_1 + \beta_2 X + \beta_3 Y + \beta_4 XY \end{cases}$$

Ainsi: $\{U(X,Y)\} = [f(x,y)]\{a\}$

3^{ème} étape:

On exprime $\{U(x,y)\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{U^e\}$, par conséquent on aura:

$$\{U^e\} = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \\ f(x_4, y_4) \end{bmatrix} \left\{ \alpha \right\} = [A] \{ \alpha \}$$

D'où: $\{ \alpha \} = [A]^{-1} \{U^e\}$

posons: $[f(x,y)][A]^{-1} = [H(x,y)]$

On en déduit que: $\{U(x,y)\} = [H(x,y)]\{U^e\}$

Si l'on adopte la numérotation précédente on a:

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{(1-x)(1-y)}{a} & 0 & \frac{x(1-y)}{a} & 0 & \frac{xy}{ab} & \frac{y(1-x)}{b} & 0 \\ 0 & \frac{(1-x)(1-y)}{b} & 0 & \frac{x(1-y)}{a} & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y(1-x)}{b} \end{bmatrix}$$

4^{ème} étape:

On exprime les déformations en fonction des déplacements nodaux:

$$\{\epsilon(X,Y)\} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \end{Bmatrix} = [L]\{U(X,Y)\}$$

D'où: $\{\epsilon(X,Y)\} = [B] \{U^e\}$

avec $[B] = [L] [H]$: matrice des déformations

5^{ème} étape:

On relie les contraintes internes aux déformations et aux déplacements nodaux:

La loi de HOOKE généralisée donne:

$$\{\sigma(X,Y)\} = [C] \{\epsilon(X,Y)\}$$

Avec: $[C]$: matrice d'élasticité.

D'où: $\{\sigma(X,Y)\} = [N(X,Y)]\{U^e\}$

où: $[N] = [C] \cdot [B]$: matrice contraintes.

6^{ème} étape:

En remplaçant les contraintes par des forces nodales statiquement équivalentes, en reliant ces dernières aux déplacements nodaux, et enfin en appliquant le théorème des travaux virtuels, on obtient la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ tel que:

$$[K^e] = h \int_0^a \int_0^b [B]^T [C] [B] dx dy$$

7^{ème} étape:

Lors de la cinquième étape nous avons obtenu des contraintes contenant des termes en X et en Y que l'ordinateur ne peut prendre en considération, c'est pour cela qu'il serait plus rigoureux de déterminer $\{\sigma^e\}$ tel que:

$$\{\sigma^e\} = [N^e] \{U^e\}$$

où:

$$[N^e] = \begin{bmatrix} N(x_1, y_1) \\ N(x_2, y_2) \\ N(x_3, y_3) \\ N(x_4, y_4) \end{bmatrix}$$

Détermination du vecteur charge élémentaire des forces nodales

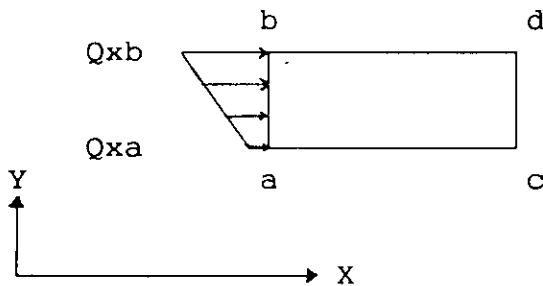
Pour pouvoir utiliser la MEF pour les structures chargées par un système de charges cohérentes, on doit remplacer celles-ci par des charges concentrées équivalentes appliquées aux noeuds et s'assurer que les travaux virtuels des charges réparties et concentrées sont égaux. On aura alors:

$$\{F^e\} = \int_V [H]^T \{Q\} dV$$

Considérons les 3 cas suivants:

1er cas: Chargement selon x

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x(y) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{xa} + (Q_{xb} - Q_{xa})y/b \\ 0 \end{Bmatrix}$$



D'où:

$$\{F^e\} = \int_{-b/2}^{b/2} [H]^T \{Q\} dy$$

2^{ème} cas: Chargement selon y

Nous avons:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_y(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_{by} - (Q_{dy} - Q_{by})(x/a) \end{Bmatrix}$$

3^{ème} cas: Effet du poids propre agissant dans le plan de la structure:

Dans ce cas on aura:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \cdot X \cdot Y \cdot E_v \end{Bmatrix}$$

où Q_v est un chargement en densité volumique et E_v est l'épaisseur de la structure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **A.AREZKI, M.ABADA**, " Analyse des structures complexes par l'élément fini isoparamétrique ", Projet de fin d'études proposé et dirigé par Pr B.TILIOUINE et M.DEMIDEM, E.N.P, (1990).
- [2] **AUBOIN**, " Calcul des structures et informatique ", Editions EYROLLES, (1983).
- [3] **K.J BATHE**, " Finite element procedures in engineering analysis ", Prentice-Hall, (1982).
- [4] **A.A BENAZOUZ, M. HADID**, " Méthode des éléments finis ", Mini-projet proposé par M.K BERRAH, E.N.P, (1991).
- [5] **A.A BENAZOUZ, M. HADID**, " Investigation numérique du comportement des plaques raidies par la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales aux frontières ", projet de fin d'études proposé et dirigé par M.K BERRAH et M. DEMIDEM, E.N.P,(1992).
- [6] **G.V. BERG**, " Elements of structural dynamics ", Prentice-Hall, New-Jersey, (1989).
- [7] **M.K. BERRAH**, Notes de cours de mécanique des milieux continus, E.N.P.
- [8] **N.S BOUCHEFFA, M. BOUBERBACHENE**, " Analyse dynamique des plaques minces et épaisses par la méthode des éléments finis", projet de fin d'études proposé et dirigé par M. DEMIDEM et M.K. BERRAH, E.N.P, (1992).
- [9] **S. BOUDAA, F.DJALLALI**, " Analyse des problèmes de l'élasticité plane par la méthode des équations intégrales aux frontières ", projet de fin d'études proposé et dirigé par M. MESSAFER, E.N.P, (1992).
- [10] **C.A. BREBBIA**, " The Boundary element method of engineers ", Pentech Press, (1978).
- [11] **C.A. BREBBIA, J.DOMINGUEZ**, "Boundary elements an introductory course ", MC Graw-Hill Book company, (1989).
- [12] **C.A. BREBBIA, D. NARDINI**, "Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure ", Int.J. of soil dynamics and earthquake engineering, vol.3., (1983).
- [13] **C.A. BREBBIA, D. NARDINI**, "Transient dynamic analysis by the boundary element method " (ED.C.A. BREBBIA et .AL), Springer- Verlag, Berlin and New York, (1983).
- [14] **C.A. BREBBIA, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel**, "Boundary element techniques theory and applications in engineering ", Springer-Verlag, (1984).

3^{ème} étape:

On exprime $\{U(x,y)\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{U^e\}$, par conséquent on aura:

$$\{U^e\} = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \\ f(x_4, y_4) \end{bmatrix} \left\{ \alpha \right\} = [A] \{\alpha\}$$

D'où: $\{\alpha\} = [A]^{-1} \{U^e\}$

posons: $[f(x,y)][A]^{-1} = [H(x,y)]$

On en déduit que: $\{U(x,y)\} = [H(x,y)]\{U^e\}$

Si l'on adopte la numérotation précédente on a:

$$[H] = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{xy}{ab} & \frac{y}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) & \frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) \end{bmatrix}$$

4^{ème} étape:

On exprime les déformations en fonction des déplacements nodaux:

$$\{\epsilon(X,Y)\} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \end{Bmatrix} = [L]\{U(X,Y)\}$$

D'où: $\{\epsilon(X,Y)\} = [B] \{U^e\}$

avec $[B] = [L] [H]$: matrice des déformations

5^{ème} étape:

On relie les contraintes internes aux déformations et aux déplacements nodaux:

La loi de HOOKE généralisée donne:

$$\{\sigma(X,Y)\} = [C] \{\epsilon(X,Y)\}$$

Avec: $[C]$: matrice d'élasticité.

D'où: $\{\sigma(X,Y)\} = [N(X,Y)]\{U^e\}$

où: $[N] = [C] \cdot [B]$: matrice contraintes.

- [15] **A. CAPRA, V. DAVIDOVICI**, " Calcul dynamique des structures en zone sismique ", collection U.T.I, EYROLLES
- [16] **R.W. CLOUGH, J.PENZIEN**, " Dynamics of structures ", Mc Graw Hill, New York, (1975).
- [17] **M. DEMIDEM**, Notes de cours de calcul des structures, E.N.P.
- [18] **G. DHATT, G.TOUZOT**, " Une présentation de la méthode des éléments finis ", Maloine.S.A. Editeur, PARIS, (1971).
- [19] **R.H. GALLAGHER**, " Introduction aux éléments finis ", EYROLLES, PARIS, (1979).
- [20] **J.F.IMBERT**, " Analyse des structures par éléments finis ", CEPAD, (1984).
- [21] **F.MERAGHNI**, " Analyse des plaques minces pliées par la méthode des éléments finis ", projet de fin d'études proposé et dirigé par Pr B. TILIOUINE et M. DEMIDEM, E.N.P, (1989).
- [22] **Y.NIWA, S.KOBAYASHI and M.KITAHARA**, Departement of civil engineering, KYOTO University, " Détermination of eigenvalues by boundary element method ", Japan, (1982).
- [23] **C.P. PROVIDAKIS, D.E. BESKOS**, "Dynamic analysis of beams by the boundary element method ", computers and structures, Vol.22., N6, pp 957-964, (1986).
- [24] **O. RAHMANI, S. KEBDANI**, " Introduction à la méthode des éléments finis ", O.P.U
- [25] **K.C. ROCKEY, H.R. EVANS, D.W. GRIFFITHS, D.A. NETHERCOT**, " Introduction à la méthode des éléments finis ", EYROLLES, PARIS, (1979).
- [26] **F. YENNOUNE, N. LEBIB**, "Etude comparative de la modélisation du voile par la M.E.F et la méthode des portiques", projet de fin d'études proposé et dirigé par Mr.CHARIF, (1991).
- [27] **O.C.ZIEKIEWICZ**, " the finite element method in engineering science ", Mc Graw-Hill, LONDON, (1971).