

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

*Genie Civil*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Modelisation de structures a  
grande hauteur.*

Proposé par :

**M<sup>me</sup> S. STIHI**

Etudié par :

**OURABAH Sofiane  
SALHI Sami**

Dirigé par

**M<sup>me</sup> S. STIHI  
M<sup>r</sup> K. SILHAUI**

PROMOTION

*Juillet 1993*

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département : GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDE

**SUJET**

**MODELISATION DE STRUCTURES A  
GRANDE HAUTEUR**

Proposé par :  
Mme S.STIHI

Etudié par :  
OURABAH Sofiane  
SALHI Sami

Dirigé par :  
Mme S.STIHI  
Mr K.SILHADI

PROMOTION JUILLET 1993

E.NP 10, Avenue Hacén Badi, EL-HARRACH ALGER

## DEDICACES

المدسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

A mes parents, à mes amis

à ceux qui me sont chers

S.Salhi

A mes parents ainsi qu'à mes amis

S.Ourabah

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier vivement tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce modeste travail, et plus particulièrement M<sup>me</sup> Stihi qui n'a ménagé ni son temps ni sa peine afin de nous venir en aide et qui nous a prodigué conseils et encouragements, M<sup>r</sup> Silhadi qui nous a orienté dans notre travail, ainsi que M<sup>r</sup> Demidem et M<sup>r</sup> Boughoufala.

## RÉSUMÉ

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

La méthode d'analyse proposée dans cette thèse combine l'utilisation de la théorie des murs jumelés avec celle de l'ordinateur pour prédire la flèche latérale ainsi que la distribution des efforts dans les structures multi-étagées comme étape définitive de la conception. Cette méthode est applicable à des structures à trois dimensions avec plusieurs plans de contreventement comprenant différentes formes structurales ou combinaisons de murs jumelés, portiques rigides, voiles et portiques articulés.

Par l'utilisation de la technique des milieux continus, l'analyse complexe des structures détaillées à trois dimensions est réduite à un simple modèle à trois dimensions composé seulement de plans de contreventement symétrique de portiques rigides simples supportant la distribution complète des forces.

## ملخص

- طريقة التحليل المقترحة في هذه الأطروحة تستوجب إستعمال نظرية الجدران المتوأمة مع تلك الخاصة بالحاسوب لتنبؤ السهم الجانبي وكذلك توزيع القوى في الهياكل المتعددة الطوابق كمرحلة إبتدائية أو وسطية للتصميم . هذه الطريقة تنطبق على هياكل متعددة السطوح المقاومة للأحمال التي تحتوي على عدة أشكال هيكلية أو مزج ما بين جدران متوأمة ، أطر صلبة ، جدران خرسانية و أطر ذات مفاصل . بطريقة إستعمال تقنية الأوساط المتواصلة ، سيقتصر التحليل التفصيلي للهياكل ذات الأبعاد الثلاث على نموذج مبسط ذو ثلاثة أبعاد مكون فقط من سطوح مقاومة للأحمال متناسبة التركيب من إطار صلب بسيط يتحمل التوزيع الكامل للقوى .

## ABSTRACT



The method of analysis proposed in this thesis combines the use of coupled wall theory with the use of computer stiffness analysis to predict the lateral drift results and the complete distribution of forces in a variety of multi-storey buildings for the final stage of design. This method is applicable to multi-bent structures comprising complex combinations of structural forms where any combinations of coupled walls, rigid frames, shear walls and braced frames may be included.

By using the continuous connection technique, the complex analysis of a detailed three dimensional model using a stiffness matrix computer program, is reduced to a simpler two dimensional model composed of only symmetrical single bay rigid frames bents, enabling the complete distribution of forces to be determined rapidly.

# SOMMAIRE



CHAPITRE I : HISTORIQUE	1
CHAPITRE II : INTRODUCTION	4
CHAPITRE III : THEORIE DES MURS JUMELÉS	7
III.1 TECHNIQUE DES MILIEUX CONTINUS	8
III.2 ETUDE DES DIFFERENTS DEPLACEMENTS	8
2.1 Déplacement dû à la flexion des murs	10
2.2 Déplacement dû au cisaillement des murs	10
2.3 Déplacement dû à la flexion et au cisaillement des poutres	11
2.4 Déplacement dû à la déformation axiale des murs	11
III.3 ELABORATION DE L'EQUATION DE LA FLECHE	13
III.4 EQUATIONS DE LA FLECHE POUR DES STRUCTURES SOUMISES A D'AUTRES TYPES DE CHARGEMENTS	15
4.1 Charge concentrée au sommet	15
4.2 Charge triangulaire	16
4.3 Moment au sommet	18



III.5	EXEMPLE D'APPLICATION DE LA THEORIE DES MURS	
JUMELES		20
5.1	Calcul de $k^2$ et de $\alpha H$	20
5.2	Tableau comparatif des résultats obtenus	21
CHAPITRE IV	INTERPRETATION PHYSIQUE DE L'EQUATION DE	
	LA FLECHE	25
IV.1	INTRODUCTION	25
IV.2	INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA FLECHE	27
IV.3	INTERPRETATION DES PARAMETRES $\alpha$ ET $K^2$	32
IV.4	ABAQUES DE CALCUL	32
4.1	Abaques de la flèche maximale	33
4.2	Abaque de la pente maximale	34
4.3	Variation de la flèche en fonction de la hauteur	39
IV.5	GENERALISATION DE LA TECHNIQUE DES MILIEUX	
CONTINUS		44
5.1	Calcul de GA pour quelques types de structures	46
5.2	Courbe d'erreur	52
CHAPITRE V	DETERMINATION DES PARAMETRES " $K^2$ " ET " $\alpha H$ "	54
V.1	DETERMINATION DES DIFFERENTES EQUATIONS	54
1.1	Equations de la flèche	54

1.2	Equations des dérivées successives de la flèche	55
V.2	DIFFERENCES FINIES	57
V.3	CHOIX DES EQUATIONS	58
V.4	CHOIX DE LA METHODE DE RESOLUTION	58
V.5	ALGORITHME DE LA METHODE	59
V.6	EXEMPLE DE CALCUL	61

## CHAPITRE VI : ETUDE D'UNE STRUCTURE EN TROIS DIMENSIONS PAR

	L'INTERMEDIAIRE D'UN MODELE SIMPLIFIE	64
VI.1	INTRODUCTION ET DEFINITIONS	64
1.1	Elaboration du modèle simplifié en deux dimensions	65
1.2	Marche à suivre pour l'étude d'une structure en trois dimensions	65
1.3	Hypothèses simplificatrices	65
1.4	Structures symétriques	66
VI.2	EXEMPLE DE CALCUL N°1	66
2.1	Plan n°1 : Murs avec deux files d'ouvertures	69
2.2	Plan n°2 : Mur central avec portiques rigides	71
2.3	Obtention du modèle simplifié équivalent	74
2.4	Calcul des efforts internes	79
VI.3	EXEMPLE DE CALCUL N°2	84
3.1	Plan n°1 : Murs jumelés n°1	86
3.2	Plans n°2 et n°3 : Portiques rigides	87
3.3	Plan n°4 : Murs jumelés n°2	88
3.4	Obtention du modèle simplifié équivalent	91
3.5	Calcul des efforts internes	93

CHAPITRE VII : ETUDE D'UNE STRUCTURE MURS JUMELÉS AVEC

SECTION VARIABLE	94
VII.1 INTRODUCTION ET BUT	94
VII.2 METHODE D'ANALYSE ET HYPOTHESES DE CALCUL	95
VII.3 ANALYSE DE LA REGION 1	101
3.1 Détermination de l'équation de l'effort tranchant	101
3.2 Détermination de l'équation de la flèche	103
VII.4 ANALYSE DE LA REGION 2	111
4.1 Détermination du déplacement vertical relatif dû à la première région	111
4.2 Détermination de l'équation de l'effort tranchant	112
4.3 Détermination de l'équation de la flèche	115
4.4 Calcul de $\delta H_1$ et $\theta H_1$	120
VII.5 ANALYSE DE LA REGION 3	121
5.1 Calcul de $\delta H_2$ et $\theta H_2$	123
VII.6 DETERMINATION DES EXPRESSIONS DES FORCES D'INTERACTION	124
6.1 Détermination des forces $P_i$	124
6.2 Détermination du moment $(M_{l_i} + M_{l_i}')$	125
6.3 Détermination de l'effort tranchant	126
6.4 Détermination de l'effort tranchant au sein du milieu continu $q_i(x_i)$	126
VII.7 EXEMPLE DE CALCUL	132
CONCLUSION	135
BIBLIOGRAPHIE	136

# CHAPITRE I



## HISTORIQUE

De nos jours, les espaces à bâtir sont très restreints, surtout dans les grandes villes, qui subissent un engorgement croissant. Pour palier à ce problème les constructions modernes ont tendance à s'étendre en hauteur. Il en résulte donc, que le nombre d'immeubles à grande hauteur augmente très rapidement à travers le monde.

Un immeuble à grande hauteur est défini comme étant une structure dont l'importance de son élancement rend le chargement latéral (vent, séisme) très significatif; ce dernier pouvant engendrer des contraintes critiques qui causeraient la ruine de l'ouvrage. Pour cela, il est primordial que la rigidité latérale soit suffisante afin de permettre à la structure de résister. Il est par conséquent nécessaire d'étudier les méthodes permettant le dimensionnement des structures multi-étagées.

L'analyse exacte des structures multi-étagées de type "MURS JUMELES" est extrêmement compliquée et longue; c'est pour cela donc que dans le passé, le but de cette analyse était de prédire les déformations latérales des structures ainsi que les efforts internes dans les membres par des méthodes approximatives. Approximatives dans le sens où il est nécessaire de faire certaines considérations permettant l'idéalisation de la structure et cela pour simplifier l'étude.

Parmi les chercheurs ayant effectué des travaux dans ce domaine on peut citer: **KOKINOPOULOS** qui a fait une série d'investigations sur les structures

contreventées par murs jumelés d'un seul niveau avec ouvertures rectangulaires.

AMARATUNGA qui a utilisé des méthodes à variables complexes basées sur la théorie de l'élasticité afin de déterminer une distribution détaillée des contraintes autour des ouvertures rectangulaires dans les poutres cantilevers sujettes à un chargement au sommet. Cependant l'application de ce type de méthodes sur les structures multi-étagées est très difficile.

CANDY, qui lui a étudié ces mêmes structures en les remplaçant par un portique équivalent.

WINKLER qui a élaboré en 1867 une théorie basée sur la substitution de la résistance d'une rangée de poutres par une distribution de réactions élastiques.

ENGESSER et TIMOSHENKO ont amélioré cette théorie respectivement en 1891 et 1910.

Par la suite, BECK, ERIKSSON et ROSMAN ont utilisé la méthode des milieux continus, qui est devenue populaire par sa simplicité, pour l'étude des structures multi-étagées de type murs jumelés. Elle a pour principe de considérer les ouvertures comme étant un milieu continu et que les poutres présentent un point de contraflexion en leur milieu et sont indéformables axialement. Le comportement du système sera donc écrit sous la forme d'une équation différentielle du second ordre.

SOANE quant à lui, a poursuivi le travail d'ERIKSSON en dérivant l'équation générale et a obtenu des solutions en utilisant des méthodes informatiques.

Tandis que BURNS a utilisé la technique des milieux continus pour étudier des structures de murs jumelés de sections variables en hauteur ainsi que des structures à deux files d'ouvertures avec des axes asymétriques.

Récemment, QUADER et STAFFORD SMITH ont proposé une méthode servant à calculer la rigidité des plans de contreventements.

On peut dire que dans le passé les travaux qui ont utilisé la technique des milieux continus se sont surtout basés sur des structures avec une ou deux files d'ouvertures. Seulement quelques méthodes se sont intéressées à des structures ayant plusieurs files d'ouvertures, à section variable en hauteur, présentant des discontinuités géométriques et soumises à différents types de chargements.

## CHAPITRE II

### INTRODUCTION

Les bâtiments sont destinés à reprendre aussi bien les efforts verticaux que les efforts horizontaux. Les charges verticales étant constituées essentiellement par le poids propre de la structure, les surcharges d'exploitation, ainsi que par les surcharges climatiques dues à la neige. Tandis que les efforts horizontaux ou latéraux proviennent quant à eux de l'effet des vents ainsi que de l'accélération dynamique due aux séismes. Cependant, avec l'augmentation de la hauteur du bâtiment, l'effort latéral prend une grande ampleur et devient même prépondérant dans le dimensionnement de la structure, cela est essentiellement dû au fait que le moment qui résulte d'un chargement latéral croît d'une manière quadratique en fonction de la hauteur. C'est pour cette raison donc, que dans l'étude qui suivra nous nous intéresserons uniquement à des structures soumises à des chargements latéraux.

L'analyse exacte des structures multi-étagées par les méthodes de calcul utilisant les matrices de raideurs, est extrêmement difficile et coûteuse. En utilisant la technique des milieux continus, ROSMAN et BECK ont été les premiers à établir une équation simple gouvernant la flèche latérale d'une structure de type murs jumelés avec une file d'ouvertures, soumise à un chargement latéral uniforme. La théorie de base a été élargie plus tard pour inclure d'autres types de chargements.

La théorie a été généralisée ensuite par STAFFORD SMITH afin d'étudier d'autres types de structures. Cette généralisation a été effectuée en tenant compte des différents modes de comportement de chaque structure. On verra par la suite que chaque structure possède deux paramètres adimensionnels qui sont fonction de la rigidité structurale. Des expressions de ces paramètres ont été développées pour un large intervalle de structures multi-étagées: portique multi-travées rigide, murs-portiques, multiple murs jumelés et des voiles.

Le but de notre travail est de trouver une méthode d'analyse manuelle approximative qui soit rapide afin de nous permettre de prédimensionner une structure. Cette méthode est nécessaire car un dimensionnement ordinaire est très fastidieux et peu rentable, en effet, dans les stades préliminaires de l'étude c'est à dire avant que les dimensions et la forme finale de la structure ne soient définitivement fixées, le nombre élevé de données qui rentrent dans l'analyse rendent cette dernière très complexe. Donc, l'utilisation d'un programme d'analyse numérique n'est pas approprié car il nécessite le choix aléatoire de dimensions pour la structure puis, la vérification de celles-ci avec à la fin l'apport de corrections, c'est à dire soit une augmentation soit une diminution des côtes des éléments structuraux. Ce programme devient ainsi très couteux et très lent car il implique une utilisation répétée de l'ordinateur, c'est là qu'intervient donc le prédimensionnement en permettant en quelque sorte la préparation des données d'entrée de l'ordinateur. Il est bien entendu évident que le prédimensionnement n'est qu'une étape préliminaire, le stade final de l'étude, à savoir le dimensionnement définitif de la structure nécessitant une analyse détaillée à l'aide de logiciels de calcul.

Il est à noter que dans notre cas pour qu'une méthode manuelle soit efficace, il faut qu'elle soit capable de donner les informations suivantes:



- \* Une estimation de la flèche latérale de la structure.
- \* Une estimation des efforts internes dans les membres de la structure.

A l'aide de ces données on pourra donc faire le dimensionnement de chaque membre de la structure et évaluer le système et la disposition des plans de contreventement de celle-ci.

Nous allons donc, pour arriver à nos fins, combiner la théorie des murs jumelés qui permet une approximation manuelle rapide avec un logiciel d'éléments finis, afin de calculer la flèche latérale et de donner la distribution des forces dans la structure à trois dimensions. Pour cela, nous allons procéder comme suit:

Dans un premier temps on calcul la flèche de chaque plan de contreventement de la structure. Cette flèche permettra de calculer les paramètres adimensionnels propres à chaque plan, à partir desquels on déterminera les caractéristiques des portiques rigides équivalents, puis on rassemble ces portiques en une structure simplifiée à trois dimensions dont on calculera aisément la flèche ainsi que les efforts internes qui permettront le prédimensionnement de la structure initiale.

Nous élargirons par la suite cette théorie à une structure non uniforme présentant des changements brusques de propriétés en hauteur. Ce genre de structures étant très répandu pour l'avantage économique qu'il présente; en effet, le fait de réduire les sections des éléments de contreventement en hauteur procure un gain de matériaux considérable.

## CHAPITRE III

### THEORIE DES MURS JUMELES

Cette théorie permet d'estimer les flèches des plans de contreventements d'une structure soumise à un chargement latéral uniformément réparti, concentré au sommet ou triangulaire, et cela par l'intermédiaire d'une seule équation développée pour les structures de type "Murs jumelés" [1] et [2].

Afin d'arriver à notre équation finale, on doit tout d'abord écrire les différentes déformations que subit la structure à savoir les déformations dues à la flexion et au cisaillement des murs ainsi que celles provoquées par la flexion et le cisaillement des poutres et la déformation axiale des murs. Puis, en utilisant l'équation de compatibilité des déformations on aboutit à une équation différentielle du second ordre dont la résolution nous donnera l'équation gouvernante de la flèche.

Le cheminement décrit ci-dessus étant très fastidieux on se propose de faire certaines simplifications grâce à des suppositions qui n'entament pas le bien fondé de notre équation.

Ces suppositions sont au nombre de cinq:

1 - L'encastrement doit être parfait à la base, c'est à dire que les fondations doivent être rigides. Cela implique que la rotation et le déplacement à la base sont nuls.

2 - Les caractéristiques mécaniques de la structure (inertie  $I$ , section  $A$  module d'élasticité  $E$  et hauteur d'étage  $h$ ) restent constantes le long de la hauteur sauf l'inertie

de la poutre du sommet qui est égale à la moitié des autres poutres.

3 - La déformation axiale des poutres est nulle.

4 - Le point de contraflexion est situé au milieu des poutres.

5 - On travaille dans le domaine élastique.

Nous allons à présent définir la technique des milieux continus qui sera utilisée dans la théorie des murs jumelés.

### **III.1 TECHNIQUE DES MILIEUX CONTINUS**

Pour pouvoir dériver et intégrer le long de notre structure, on doit supposer que cette dernière ne présente pas de vides. Pour cela on substitue aux poutres et aux ouvertures un milieu continu constitué par une infinité de petites poutres ayant pour inertie  $I_b/h$  voir figure (III.1). Cette hypothèse est correcte car:

- \* La hauteur  $H$  de la structure étant importante, le rapport entre  $h$  et  $H$  est très faible.
- \* Les poutres ont une inertie constante le long de la hauteur.
- \* La poutre du sommet a une inertie égale à  $I_b/2$ .

### **III.2 ETUDE DES DIFFERENTS DEPLACEMENTS**

Le point de contraflexion étant un point particulier, c'est à dire qui ne subit pas de moment, on en fera donc l'objet de cette étude. Il est à noter qu'une coupure faite au niveau de ce point donne uniquement naissance à une force de cisaillement par unité de longueur notée  $q(x)$ . Voir figure (III.2).

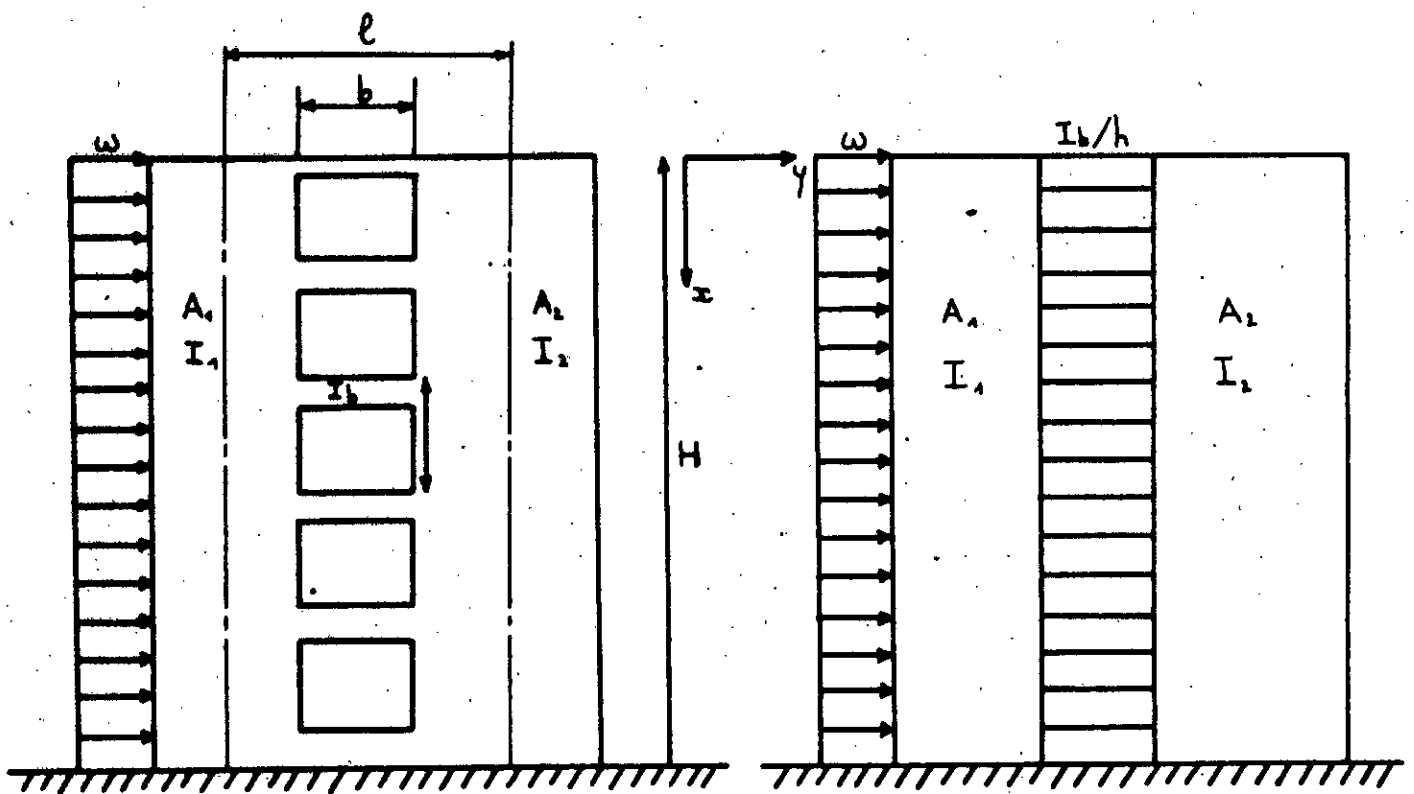
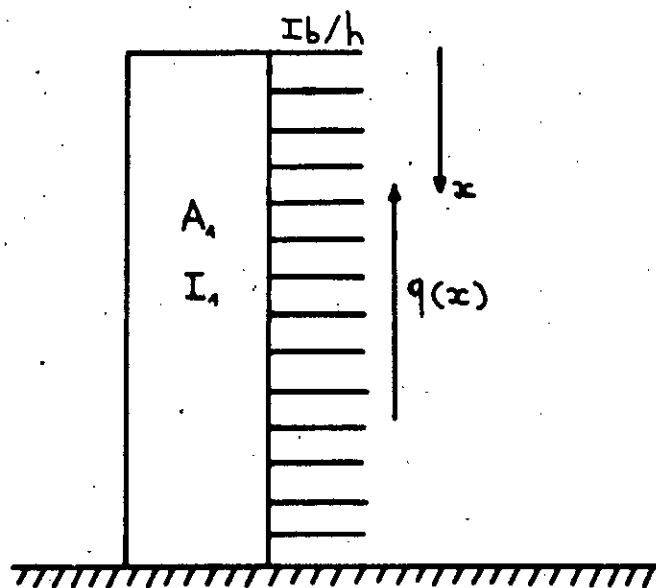


Schéma d'une structure murs jumelés  
avec une file d'ouvertures

Structure équivalente avec  
un milieu continu

Figure III.1



Coupe de la structure équivalente

Figure III.2

### 2.1 Déplacement Dû à la Flexion des Murs

Les poutres étant parfaitement rigides, elles ne subissent pas de déformation. Le déplacement est engendré par la rotation des murs seulement due à la charge extérieure  $w$ . Voir figure (III.3.a).

$$\delta_1 = l \frac{dY_1}{dx} \quad (\text{III.1})$$

$$\delta_1 = -\frac{l w}{2EI} \int_x^H x^2 dx + \delta_{10} \quad (\text{III.2})$$

$\delta_{10}$  représente le déplacement initial dû à une rotation à la base de la structure. Dans notre cas ce déplacement est nul car  $dY_1/dx$  est nul à la base. (Encastrement parfait).

### 2.2 Déplacement Dû au Cisaillement des Murs

On considère là aussi que les poutres sont rigides. On a donc un déplacement dû à une rotation des murs soumis à un effort tranchant  $T$  dans les poutres. Voir figure (III.3.b).

$$\delta_2 = l \frac{dY_2}{dx} \quad (\text{III.3})$$

$$\delta_2 = \frac{l^2}{EI} \int_x^H \int_0^x q(x) dx + \delta_{20} \quad (\text{III.4})$$

$\delta_{20}$  est nul pour les mêmes raisons que  $\delta_{10}$ .

### 2.3 Déplacement Dû à la Flexion et Cisaillement des Poutres

On considère les murs comme étant rigides, et on ne prend en compte que la déformation des poutres sous l'effet d'une force T. Voir figure (III.3.c).

$$\begin{aligned}\delta_{3(\text{flexion})} &= \frac{q(x) h b^3}{12EI_b} \\ \delta_{3(\text{cisaillement})} &= \frac{q(x) h b}{G \frac{A_b}{f}}\end{aligned}\quad (\text{III.5})$$

Donc,

$$\delta_3 = \delta_{3(\text{flexion})} + \delta_{3(\text{cisaillement})} = \frac{q(x) h b^3}{12EI_b'} \quad (\text{III.6})$$

Où  $I_b'$  représente l'inertie de la poutre  $I_b$  modifié par un facteur  $1/(1+2g)$  avec:

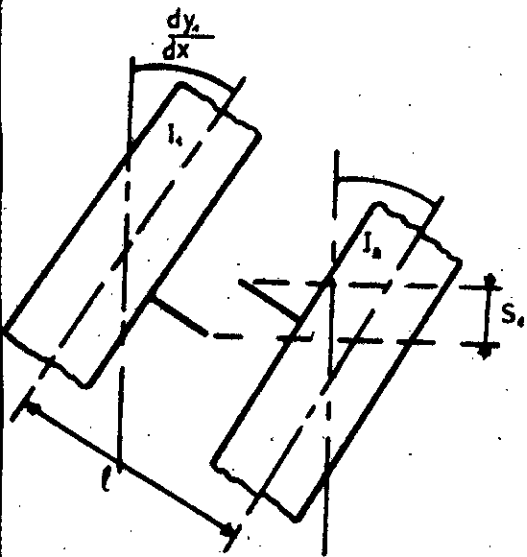
$$g = \frac{7,2EI_b}{b^2AG}$$

### 2.4 Déplacement dû à la déformation axiale des murs

Les poutres sont considérées rigides. Voir figure (III.3.d).

$$\delta_4 = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \int_x^H \int_0^x q(x) dx + \delta_{40}$$

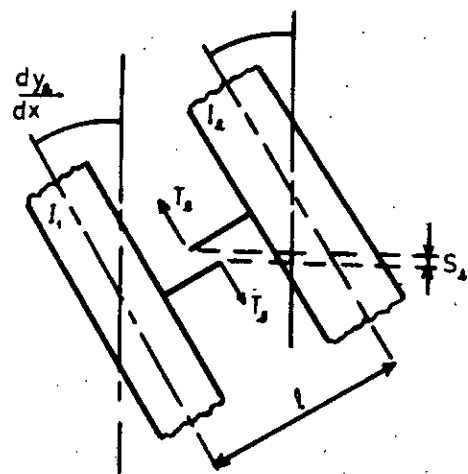
$\delta_{40}$  est nul pour les mêmes raisons que précédemment.



Déplacement dû à la flexion

des murs.

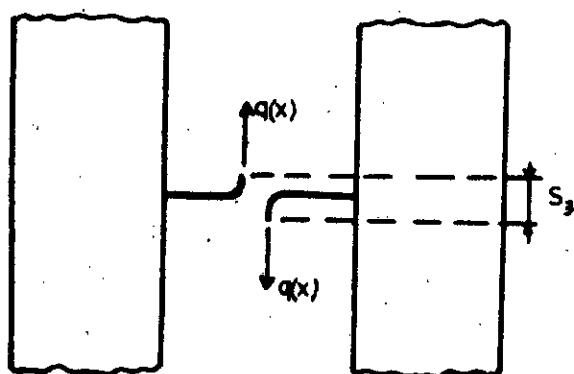
(a)



Déplacement dû au cisaillement

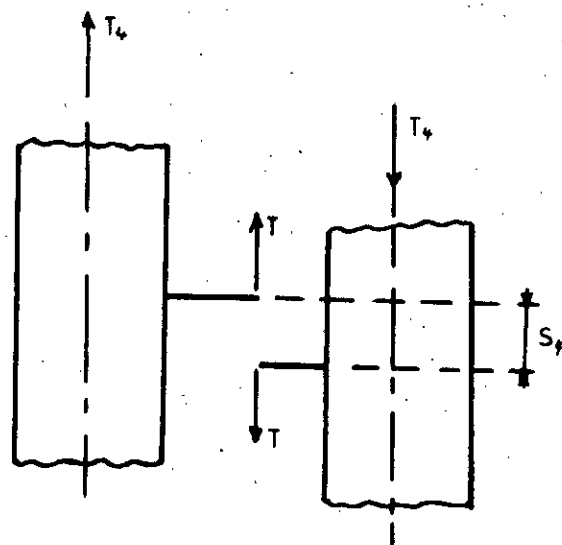
des murs.

(b)



Déplacement dû à la flexion et  
cisaillement des poutres.

(c)



Déplacement dû à la déformation  
axiale des murs.

(d)

Figure III.3

### III.3 ELABORATION DE L'EQUATION DE LA FLECHE

Sachant qu'au niveau de la coupure il n'y a aucun déplacement, on pourra donc écrire que la somme des déplacements établis ci-dessus en ce point est nulle. D'où l'équation de compatibilité suivante:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 0 \quad (\text{III.8})$$

En remplaçant les différents déplacements par leurs valeurs respectives on obtient la relation suivante:

$$\frac{6wlI_b}{hb^3I} \int_x^H x^2 dx = \frac{12I_b}{hb^3} \left( \frac{l^2}{I} + \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \int_x^H T dx + q(x) \quad (\text{III.9})$$

Avec :

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ \text{et} \\ T &= \int_0^x q(x) dx \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Posons:

$$\alpha^2 = \frac{12l^2I_b}{hb^3I} \quad (\text{III.11})$$

$$K^2 = 1 + \frac{(A_1+A_2)I}{A_1A_2l^2} \quad (\text{III.12})$$

$$\beta = \frac{wl}{2I} \frac{12I_b}{hb^3} \quad (\text{III.13})$$



La nouvelle expression de l'équation (III.9) sera:

$$Q(x) = \beta \int_x^H x^2 dx - (K\alpha)^2 \int_x^H T dx \quad (\text{III.14})$$

En dérivant cette dernière équation on obtient:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - (K\alpha)^2 T = -\beta x^2 \quad (\text{III.15})$$

L'équation (III.15) est une équation différentielle du second ordre vérifiant les conditions aux limites suivantes:

Au sommet de la structure l'effort tranchant  $T$  est nul. À la base sa première dérivée par rapport à  $x$  est nulle.

$$\text{à } x = 0 \quad T = 0$$

$$\text{à } x = H \quad dT/dx = 0$$

Après résolution de l'équation différentielle et détermination des constantes d'intégration par l'intermédiaire des conditions aux limites on aboutit à l'expression suivante de l'effort tranchant au sein de notre structure:

$$T(x) = \frac{2\beta}{(K\alpha)^4} \left[ 1 + \frac{\sinh(K\alpha H) - K\alpha H}{\cosh(K\alpha H)} \sinh(K\alpha x) - \cosh(K\alpha x) + \frac{(K\alpha x)^2}{2} \right] \quad (\text{III.16})$$

Faisons maintenant une coupe à une distance  $x$  du sommet de la structure comme indiqué sur la figure (III.4.a).

Le moment en ce point a pour valeur:

$$M(x) = EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{1}{2} wx^2 - T(x) l \quad (\text{III.17})$$

En intégrant l'équation (III.17) deux fois par rapport à  $x$  et en utilisant les conditions aux limites suivantes:

A la base de la structure la flèche et la rotation sont nulles.

$$\text{à } x = H \quad y = 0 \quad \text{et} \quad dY/dx = 0$$

On obtient l'expression suivante de la flèche.

$$y(x) = \frac{wH^4}{EI} \left[ \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \frac{x}{H} + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{H} \right)^4 \right\} \frac{K^2 - 1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{1 - \left( \frac{x}{H} \right)^2}{2 (K\alpha H)^2} \right. \right. \quad (\text{III.18}) \\ \left. \left. + \frac{\cosh(K\alpha(H-x)) - 1}{(K\alpha H)^4 \cosh(K\alpha H)} - \frac{\sinh(K\alpha H) - \sinh(K\alpha x)}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right]$$

### III.4 EQUATION DE LA FLECHE POUR DES STRUCTURES SOUMISES

#### A D'AUTRES TYPES DE CHARGEMENT

Nous avons établis précédemment l'équation de la flèche pour une structure de type murs jumelés soumise à un chargement latéral uniforme. Nous allons à présent déterminer l'expression de la flèche pour deux autres types de chargement.

##### 4.1 Charge Concentrée au Sommet

Soit la structure schématisée sur la figure (III.4.b).

Nous allons procéder de la même manière que pour la charge uniforme, c'est à dire, écrire l'équation de compatibilité après avoir déterminé les différents déplacements.

Pour ce cas de chargement, seul  $\delta_1$  varie. Il prend comme nouvelle valeur:

$$\delta_1 = -\frac{Pl}{EI} \int_x^H x dx + \delta_{10} \quad (\text{III.19})$$

$\delta_{10}$  est nul car on a un encastrement à la base.

A partir de l'équation de compatibilité on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - (K\alpha)^2 T = -\beta x \quad (\text{III.20})$$

Avec  $K^2$  et  $\alpha^2$  ayant les valeurs décrites ci-dessus

et:

$$\beta = \frac{12 P I I_b}{h b^3 I} \quad (\text{III.21})$$

L'équation (III.20) a pour solution:

$$T(x) = \frac{P}{K^3 \alpha I} \left[ K\alpha x - \frac{\sinh(K\alpha x)}{\cosh(K\alpha H)} \right] \quad (\text{III.22})$$

La flèche pour un tel chargement s'écrira alors de la manière suivante:

$$y(x) = \frac{P H^3}{EI} \left[ \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{x}{H} + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right)^3 \right\} \frac{K^2 - 1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{1 - \frac{x}{H}}{(K\alpha H)^2} + \frac{\sinh(K\alpha x) - \sinh(K\alpha H)}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (\text{III.23})$$

#### 4.2 Charge Triangulaire

Soit la structure schématisée sur la figure (III.4.c).

De même que pour la charge concentrée au sommet, seul  $\delta_1$  varie. Il a pour valeur :

$$\delta_1 = -\frac{f l}{2EI} \int_x^H \left( x^2 - \frac{x^3}{3H} \right) dx + \delta_{10} \quad (\text{III.24})$$

$\delta_{10}$  est nul du fait de l'encastrement à la base.

L'écriture de l'équation de compatibilité ainsi obtenue nous conduit à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - (K\alpha)^2 T = -\beta \left( x^2 - \frac{x^3}{3H} \right) \quad (\text{III.25})$$

Où  $K^2$  et  $\alpha^2$  restent inchangés et où  $\beta$  prend la valeur suivante:

$$\beta = \frac{6f l I_b}{hb^3 I} \quad (\text{III.26})$$

La résolution de l'équation différentielle nous donne:

$$T(x) = \frac{f}{K^4 \alpha^2 I} \left[ \left\{ \sinh(K\alpha H) - \frac{K\alpha H}{2} + \frac{1}{K\alpha H} \right\} \frac{\sinh(K\alpha x)}{\cosh(K\alpha H)} - \cosh(K\alpha x) + \frac{(K\alpha x)^2}{2} + 1 - \frac{(K\alpha)^2 x^3}{6H} + \frac{x}{H} \right] \quad (\text{III.27})$$

En procédant de façon analogue aux deux cas précédents on obtiendra l'équation de la flèche, elle s'écrira de la manière suivante:

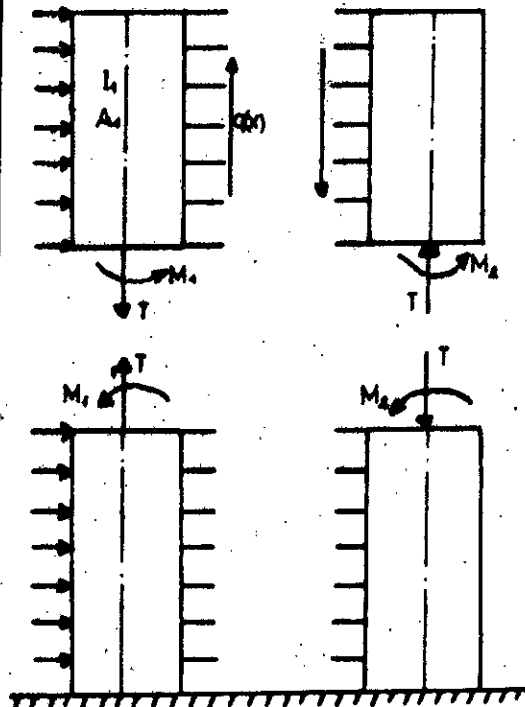
$$y(x) = \frac{fH^4}{EI} \left[ \left\{ \frac{11}{120} - \frac{1}{8} \frac{x}{H} + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{H} \right)^4 - \frac{1}{120} \left( \frac{x}{H} \right)^5 \right\} \frac{K^2 - 1}{K^2} + \frac{1}{K^2 K\alpha H} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{H} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right)^3 - \frac{1 - \frac{x}{H}}{(K\alpha H)^2} + \frac{\left( \frac{1}{K\alpha H} - \frac{K\alpha H}{2} \right) (\sinh(K\alpha H) - \sinh(K\alpha x))}{(K\alpha H)^2 \cosh(K\alpha H)} + \frac{-1 + \cosh(K\alpha(H-x))}{(K\alpha H)^2 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (\text{III.28})$$

### 4.3 Moment au sommet

Calculons la flèche pour le cas où l'on a un moment  $M$  au point  $x = 0$  (sommet de la structure), comme indiqué sur la figure (III.4.d).

Après avoir fait tous les calculs nécessaires on obtient l'expression suivante :

$$y(x) = \frac{MH^2}{EI_g} \left[ \frac{1}{2} - \frac{x}{H} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{H} \right)^2 + \frac{1}{K^2 - 1} \frac{\cosh(K\alpha(H-x)) - 1}{(K\alpha H)^2 \cosh(K\alpha H)} \right] \quad (\text{III.29})$$

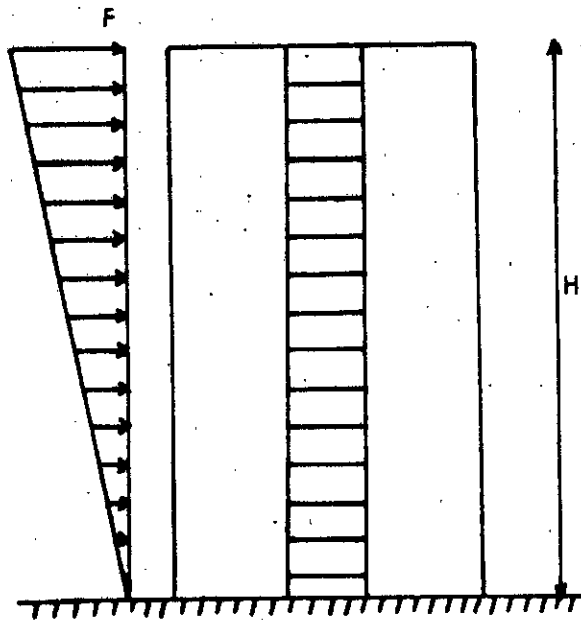
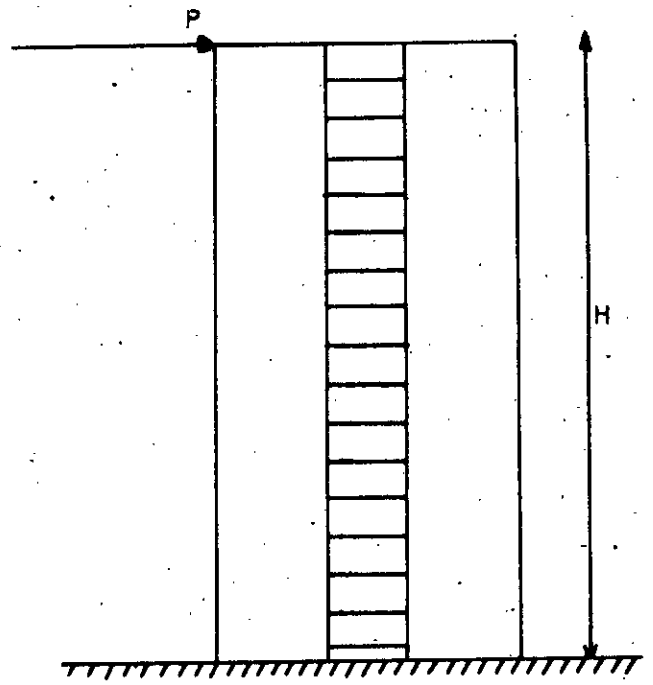


Coupe d'un mur jumelé soumis à un chargement uniforme

(a)

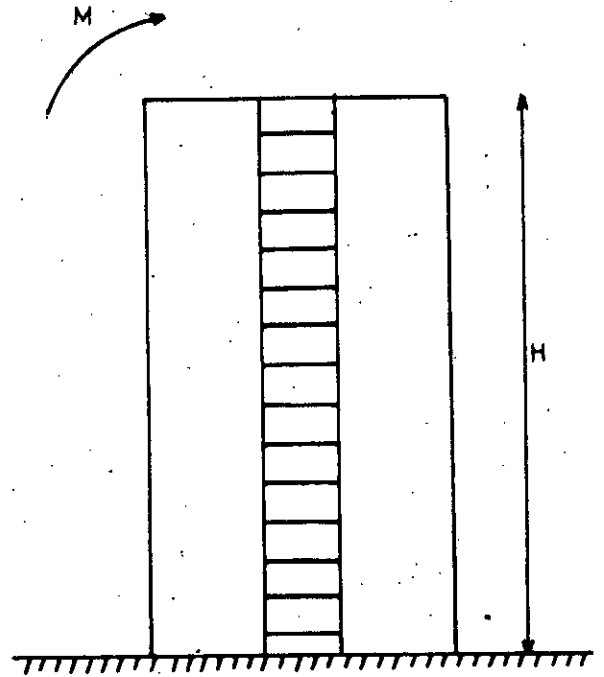
Murs jumelés soumis à une charge concentrée au sommet

(b)



Murs jumelés soumis à une charge triangulaire

(c)



Murs jumelés soumis à un moment au sommet

(d)

Figure III.4

### III.5 EXEMPLE D'APPLICATION DE LA THÉORIE

#### DES MURS JUMÉLES

Afin de prouver que cette théorie donne des résultats proches de la réalité. Nous allons étudier une structure multi-étagée soumise à un chargement latéral uniforme, puis, nous allons comparer les flèches obtenues par l'équation (III.18) à celles données par une méthode exacte.

Soit la structure schématisée sur la figure (III.5) ayant les caractéristiques suivantes:

Épaisseur des murs  $e = 0,3$  m

Section des poutres  $A_b = 0,3 \times 0,3$  m<sup>2</sup>

Hauteur d'étage  $h = 3$  m

Nombre d'étages  $n = 20$

Module d'élasticité  $E = 2,3 \cdot 10^7$  KN/m<sup>2</sup>

Et, soumise à un chargement latéral uniforme  $w = 14,5$  KN/m

#### 5.1 Calcul de $K^2$ et $\alpha H$

$$K^2 = 1 + \frac{(A_1 + A_2) I}{A_1 A_2 l^2}$$

$$\alpha^2 = \frac{12 I_b l^2}{h b^3 I}$$

Avec :

$$A_1 = 3 \times 0,3 = 0,9 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 6 \times 0,3 = 1,8 \text{ m}^2$$

$$I = I_1 + I_2 = (0,3 \times 3^3)/12 + (0,3 \times 6^3)/12 = 6,075 \text{ m}^4$$

$$l^2 = 7.5^2 = 56,25 \text{ m}^2$$

$$b = 3 \text{ m}$$

$$I_b = (0,3 \times 0,3^3)/12 = 6,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

D'où:

$$K^2 = 1,18$$

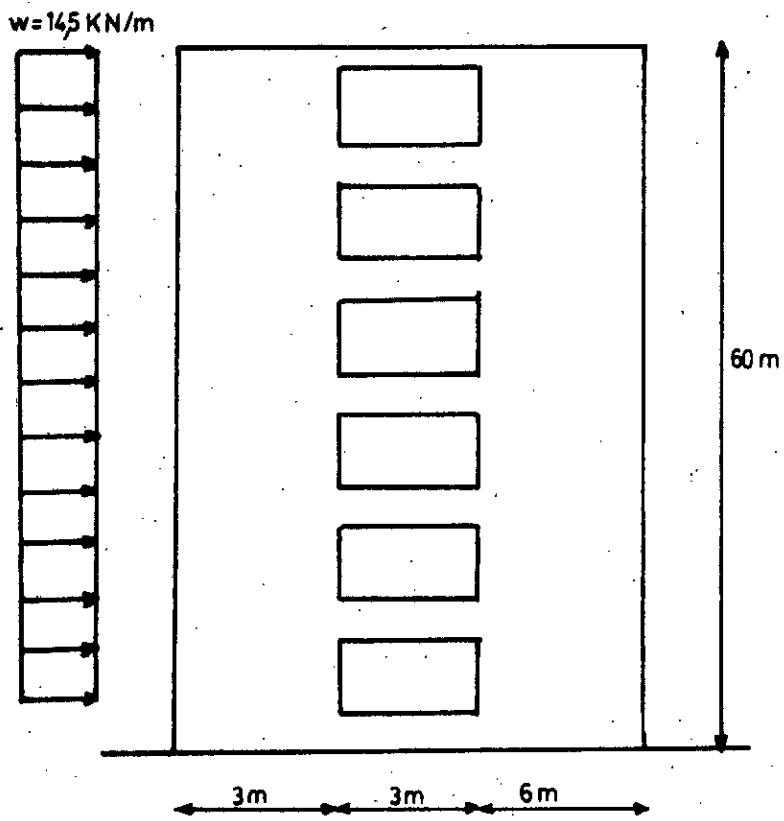
$$\alpha H = 1.825742$$

## 5.2 Tableau Comparatif des Résultats Obtenus

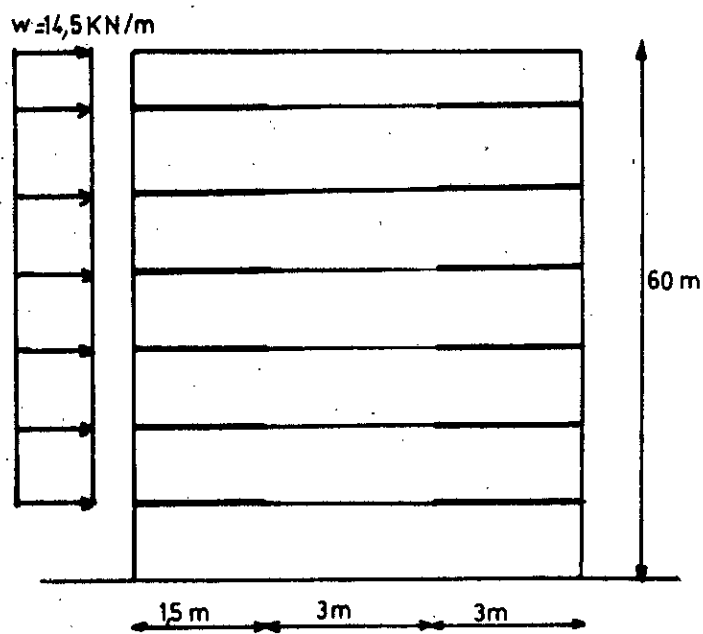
Etages	x en (m)	Solution obtenue (m)	Solution exacte (m)
0	60	$10^{-10}$	0,00
1	57	$5,28 \cdot 10^{-4}$	$5,36 \cdot 10^{-4}$
2	54	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$2,02 \cdot 10^{-3}$
3	51	$4,30 \cdot 10^{-3}$	$4,31 \cdot 10^{-3}$
4	48	$7,26 \cdot 10^{-3}$	$7,26 \cdot 10^{-3}$
5	45	$1,08 \cdot 10^{-2}$	$1,08 \cdot 10^{-2}$
6	42	$1,48 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$
7	39	$1,91 \cdot 10^{-2}$	$1,91 \cdot 10^{-2}$
8	36	$2,37 \cdot 10^{-2}$	$2,37 \cdot 10^{-2}$
9	33	$2,86 \cdot 10^{-2}$	$2,85 \cdot 10^{-2}$
10	30	$3,36 \cdot 10^{-2}$	$3,34 \cdot 10^{-2}$
11	27	$3,86 \cdot 10^{-2}$	$3,84 \cdot 10^{-2}$
12	24	$4,37 \cdot 10^{-2}$	$4,35 \cdot 10^{-2}$
13	21	$4,89 \cdot 10^{-2}$	$4,86 \cdot 10^{-2}$
14	18	$5,40 \cdot 10^{-2}$	$5,36 \cdot 10^{-2}$
15	15	$5,91 \cdot 10^{-2}$	$5,86 \cdot 10^{-2}$
16	12	$6,41 \cdot 10^{-2}$	$6,36 \cdot 10^{-2}$
17	9	$6,90 \cdot 10^{-2}$	$6,84 \cdot 10^{-2}$
18	6	$7,39 \cdot 10^{-2}$	$7,32 \cdot 10^{-2}$
19	3	$7,87 \cdot 10^{-2}$	$7,79 \cdot 10^{-2}$
20	0	$8,63 \cdot 10^{-2}$	$8,27 \cdot 10^{-2}$



Afin de mieux visualiser la comparaison entre les résultats obtenus par la méthode approchée et la méthode exacte. Nous allons représenter sur un même graphe (figure III.6), les courbes des flèches dont les variations sont données sur le tableau ci-dessus.



Structure murs jumelés



Modélisation de la structure murs jumelés

Figure III.5

## CHAPITRE IV

### INTERPRETATION PHYSIQUE DE L'EQUATION DE LA FLECHE

#### IV.1 INTRODUCTION

Nous avons déjà vu que l'équation de la flèche d'une structure du type "Murs jumelés" soumise à un chargement uniforme s'écrivait:

$$y(x) = \frac{wH^4}{EI} \left[ \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{H} \right)^4 \right\} \frac{K^2 - 1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{1 - \left( \frac{x}{H} \right)^2}{2 (K\alpha H)^2} + \frac{\cosh(K\alpha(H-x)) - 1}{(K\alpha H)^4 \cosh(K\alpha H)} - \frac{\sinh(K\alpha H) - \sinh(K\alpha x)}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (\text{IV.1})$$

Où:

w: représente le chargement extérieur.

H: représente la hauteur totale de la structure.

I: représente l'inertie totale des membres verticaux de la structure par rapport à leur propre axe.

Afin d'interpréter notre équation on se doit de calculer l'inertie totale de la

structure par rapport au centre du système.

Soit:

$$I_g = I + \sum A_i c_i^2 \quad (\text{IV.2})$$

Où:

$c_i$ : est la distance entre l'axe de chaque mur et le centre des sections des membres verticaux du système.

$A_i$ : Les sections des différents murs.

#### Détermination du centre des sections des membres verticaux du système

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad (\text{IV.3})$$

En se reportant à la figure (II/1.a), on pourra écrire l'abscisse du centre des sections des membres verticaux du système comme suit:

$$x = \frac{h_1}{2} + \frac{A_2 l}{A_1 + A_2} \quad (\text{IV.4})$$

A partir de cette dernière équation on obtient:

$$c_1 = \frac{A_2 l}{A_1 + A_2} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{A_1 l}{A_1 + A_2} \quad (\text{IV.5})$$

#### Calcul de l'inertie globale:

A partir de l'équation (IV.2) et en remplaçant  $c_1$  et  $c_2$  par leurs valeurs respectives

$$I_g = I + \frac{A_1 A_2 l^2}{A_1 + A_2} \quad (\text{IV.6})$$

on obtient une nouvelle expression de  $I_g$ . Comme:

$$K^2 = 1 + \frac{(A_1 + A_2) I}{A_1 A_2 l^2} \quad (\text{IV.7})$$

On pourra donc écrire:

$$I_g = I \times \frac{K^2}{K^2 - 1} \quad (\text{IV.8})$$

## IV.2 INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA FLÈCHE

En remplaçant "I" par sa valeur dans l'équation de la flèche on obtient une nouvelle expression de cette dernière:

$$y(x) = \frac{wH^4}{EI_g} \left[ \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{H} \right)^4 \right\} + \frac{1}{K^2 - 1} \left\{ \frac{1 - \left( \frac{x}{H} \right)^2}{2 (K\alpha H)^2} + \frac{\cosh(K\alpha(H-x)) - 1}{(K\alpha H)^4 \cosh(K\alpha H)} - \frac{\sinh(K\alpha H) - \sinh(K\alpha x)}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (\text{IV.9})$$

On remarque que cette équation est composée des trois parties suivantes:

1- Equation de la flèche d'un cantilever de rigidité  $EI_g$  sous l'effet d'une charge uniformément répartie et qui a pour valeur:

$$y_1(x) = \frac{wH^4}{EI_g} \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{H} \right)^4 \right] \quad (\text{IV.10})$$

En effet, soit un cantilever de rigidité flexionnelle " $EI_g$ " (voir figure IV.1.b), le moment fléchissant auquel il est soumis a pour expression:

$$M(x) = EI_g \frac{d^2 Y}{dx^2}$$

Avec:

$$M(x) = \frac{1}{2} wx^2$$

On aura donc:

$$EI_g \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{1}{2} wx^2$$

En intégrant deux fois par rapport à  $x$ , on obtient l'équation suivante:

$$EI_g Y = \frac{1}{24} wx^4 + Ax + B$$

A partir des conditions aux limites, on tire les valeurs de  $A$  et  $B$ .

L'équation de la flèche du cantilever aura donc pour expression:

$$y(x) = \frac{wH^4}{EI_g} \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \frac{x}{H} + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{H} \right)^4 \right]$$

2 - Equation de la flèche due au cisaillement d'un cantilever de rigidité au cisaillement

$GA.K^4$ :

$$y_2(x) = \frac{wH^4}{EI_g} \frac{1}{K^2-1} \left[ \frac{1 - \left( \frac{x}{H} \right)^2}{2 (K\alpha H)^2} \right] \quad (\text{IV.11})$$

Comme:

$$\alpha^2 = \frac{GA}{EI}$$

et

$$I_g = I \times \frac{K^2}{K^2-1} \quad (\text{IV.12})$$

On aura donc

$$y_2(x) = \frac{wH^2}{2GA K^4} \left[ 1 - \left( \frac{x}{H} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.13})$$

En effet:

Soit un cantilever de rigidité au cisaillement  $GA.K^4$  (voir figure IV.1.c). La flèche à laquelle il est soumis a pour expression:

$$y = \int \frac{T}{GAK^4} dx$$

Or:

$$T = -wX$$

Donc:

$$y = \frac{-wX^2}{2GAK^4} + A$$

En tirant "A" des conditions aux limites, on obtient l'équation de la flèche suivante:

$$y(x) = \frac{wH^2}{2GA K^4} \left[ 1 - \left( \frac{x}{H} \right)^2 \right]$$

3 - Le terme suivant:

$$y_3(x) = \frac{wH^4}{EI_g} \frac{1}{K^2-1} \left[ \frac{\cosh(K\alpha(H-x))-1}{(K\alpha H)^4 \cosh(K\alpha H)} - \frac{\sinh(K\alpha H)-\sinh(K\alpha x)}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} \right] \quad (\text{IV.14})$$

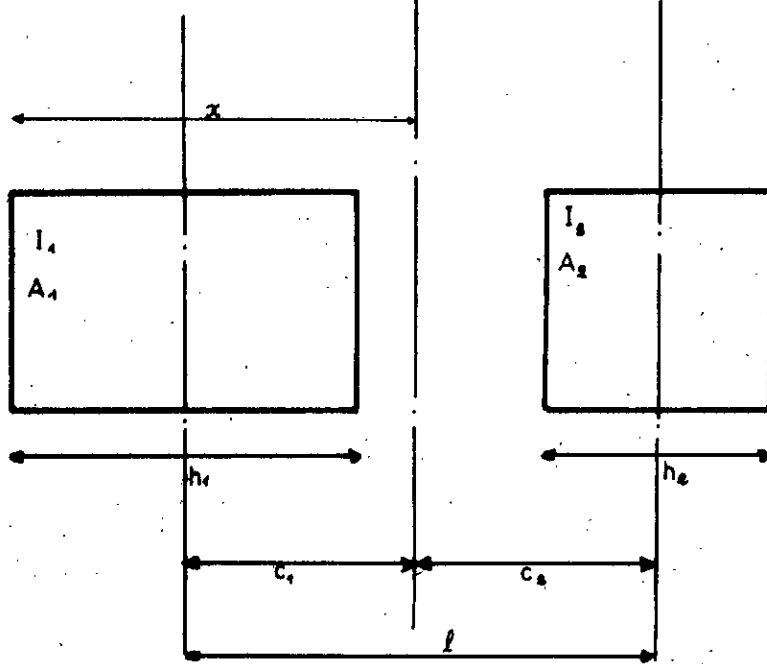
Donne toujours des valeurs négatives, il tend donc à réduire la flèche.

C'est un terme dû plutôt au cisaillement qu'à la flexion.

**Remarque:**

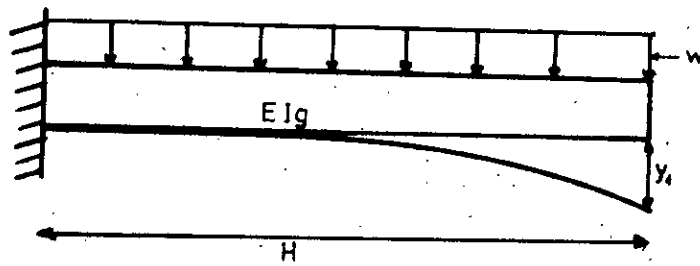
En considérant l'équation de la flèche d'une structure soumise à un moment au sommet, décrite dans le chapitre précédent, on remarque que le deuxième terme ainsi que la dernière partie du troisième terme n'existent pas, car la flèche due au cisaillement d'un cantilever de rigidité  $GA$  sous l'effet d'un moment  $M$  uniquement, est nulle. ( $T(x)$  étant nul).





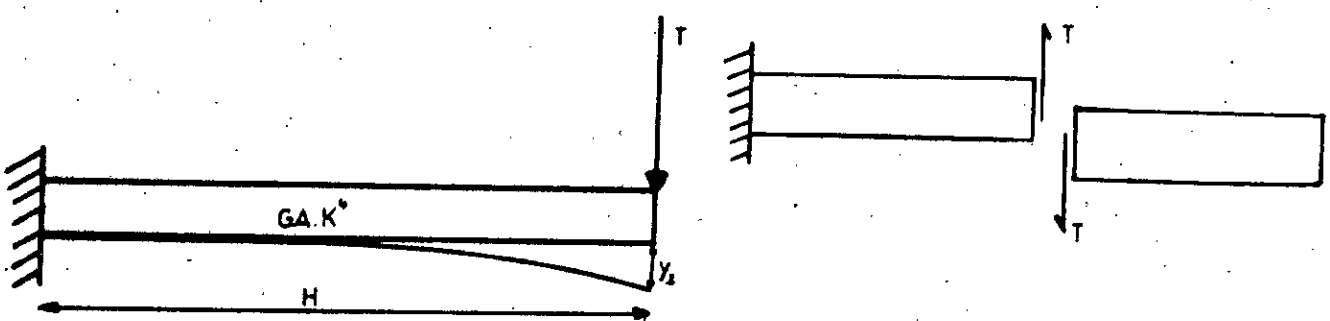
Représentation du centre du système

(a)



Cantilever de rigidité flexionnelle  $EI_g$

(b)



Cantilever de rigidité au cisaillement  $GA.K^4$

(c)

Figure IV.1

### IV.3 INTERPRETATION DES PARAMETRES $\alpha$ et K

Ce sont deux paramètres positifs et sans dimensions.

\*  $\alpha^2 = GA/EI$  c'est le rapport de la rigidité au cisaillement du système entier sur la rigidité à la flexion des murs.

\*  $K^2$  ce paramètre est toujours supérieur à 1. En effet:

$$K^2 = \frac{I_g}{\sum A_i c_i^2} = 1 + \frac{I}{\sum A_i c_i^2} \quad (\text{IV.15})$$

Avec:

$I_g$ : Inertie générale du système.

$\sum A_i c_i^2$ : Inertie due à la position des membres verticaux par rapport au centre de leurs sections.

Pour ce dernier paramètre seuls les membres verticaux ont une influence, la rigidité des poutres ne rentre pas en ligne de compte.

#### Remarque:

Si  $I$  est très inférieur à  $\sum A_i c_i^2$ ,  $K^2$  tendra vers 1.

### IV.4 ABAQUES DE CALCUL:

Par ailleurs, on se propose de réaliser des abaques permettant d'obtenir les valeurs maximales de la flèche d'une structure ainsi que celle de sa pente en fonction de  $K^2$  et  $\alpha H$  [4]. Ces abaques permettent à l'utilisateur de vérifier si les dimensions de la structure étudiée sont correctes. En effet, après avoir calculé  $K^2$  et  $\alpha H$  à partir des équations faisant intervenir les caractéristiques propres de la structure, à savoir son

inertie, sa section, sa rigidité au cisaillement ainsi que sa rigidité à la flexion, les abaques donnent directement les valeurs de la flèche maximale ainsi que la rotation maximale et cela en fonction des données précédentes. Une simple analyse de ces valeurs donnera une appréciation sur le dimensionnement de la structure qui pourra bien entendu être corrigé en conséquence.

#### 4.1 Abaques de la flèche maximale:

On s'intéressera dans cette partie au tracé des abaques donnant la flèche maximale d'une structure de type murs jumelés, soumise à trois différents types de chargements latéraux, uniforme, triangulaire et concentré au sommet.

Pour ce qui est du chargement uniforme, l'équation de la flèche donnée par l'expression (IV.9), est réécrite afin de donner la flèche maximale au sommet, et cela en remplaçant dans la précédente expression  $x$  par zéro. L'équation que l'on obtient est la suivante:

$$y_{\max} = \frac{wH^4}{EI_g} \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{K^2 - 1} \left\{ \frac{1}{2(K\alpha H)^2} + \frac{\cosh(K\alpha H) - 1 - (K\alpha H)\sinh(K\alpha H)}{(K\alpha H)^4 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (\text{IV.16})$$

Et qui à son tour peut être écrite sous la forme suivante:

$$y_{\max} = \frac{wH^4}{EI_g} \{K_1\} \quad (\text{IV.17})$$

D'après l'équation précédente, on obtient la série de courbes représentées sur la figure (IV.2).

En ce qui concerne le chargement triangulaire et concentré au sommet, on procédera de la même manière. Les équations donneront respectivement les courbes représentées sur les figures (IV.3) et (IV.4).

#### 4.2 Abaque de la pente maximale

On s'intéressera ici à la pente de l'équation de la flèche d'une structure soumise à un chargement uniforme, et qui a pour équation:

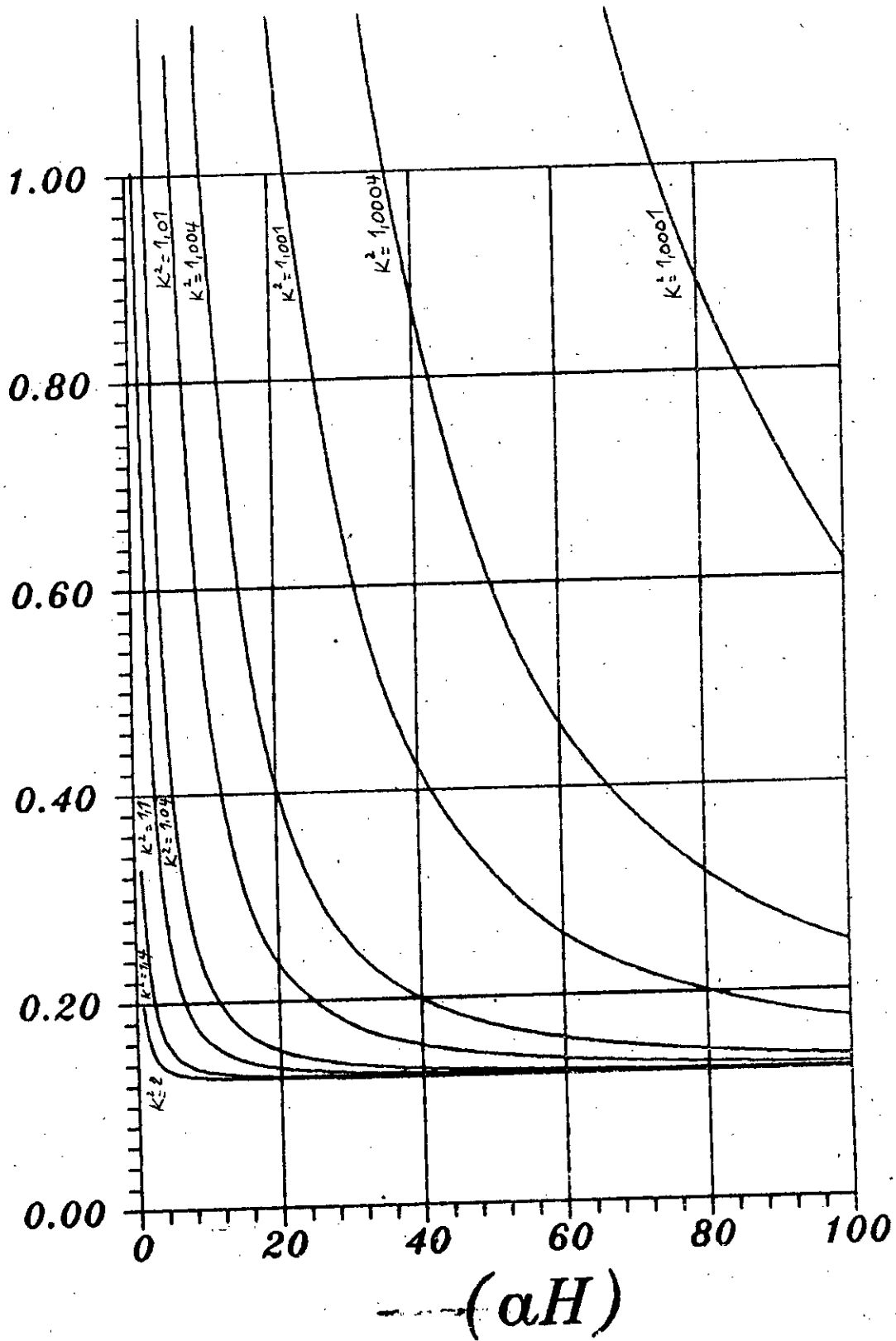
$$y' = \frac{wH^3}{EI_g} \left[ -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right)^3 + \frac{1}{K^2-1} \left\{ \frac{-x/H}{(K\alpha H)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sinh(K\alpha H)(1 - \frac{x}{H}) - (K\alpha H)\cosh(K\alpha x)}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (IV.18)$$

Comme les valeurs désirées sont celles de la pente maximale, nous sommes donc amenés à rechercher la position  $x$  annulant la dérivée seconde de l'équation (IV.9). En définitive, on pourra écrire:

$$y' = \frac{wH^3}{EI_g} \{K_s\} \quad (IV.19)$$

dont la représentation graphique suivra sur la figure (IV.5).

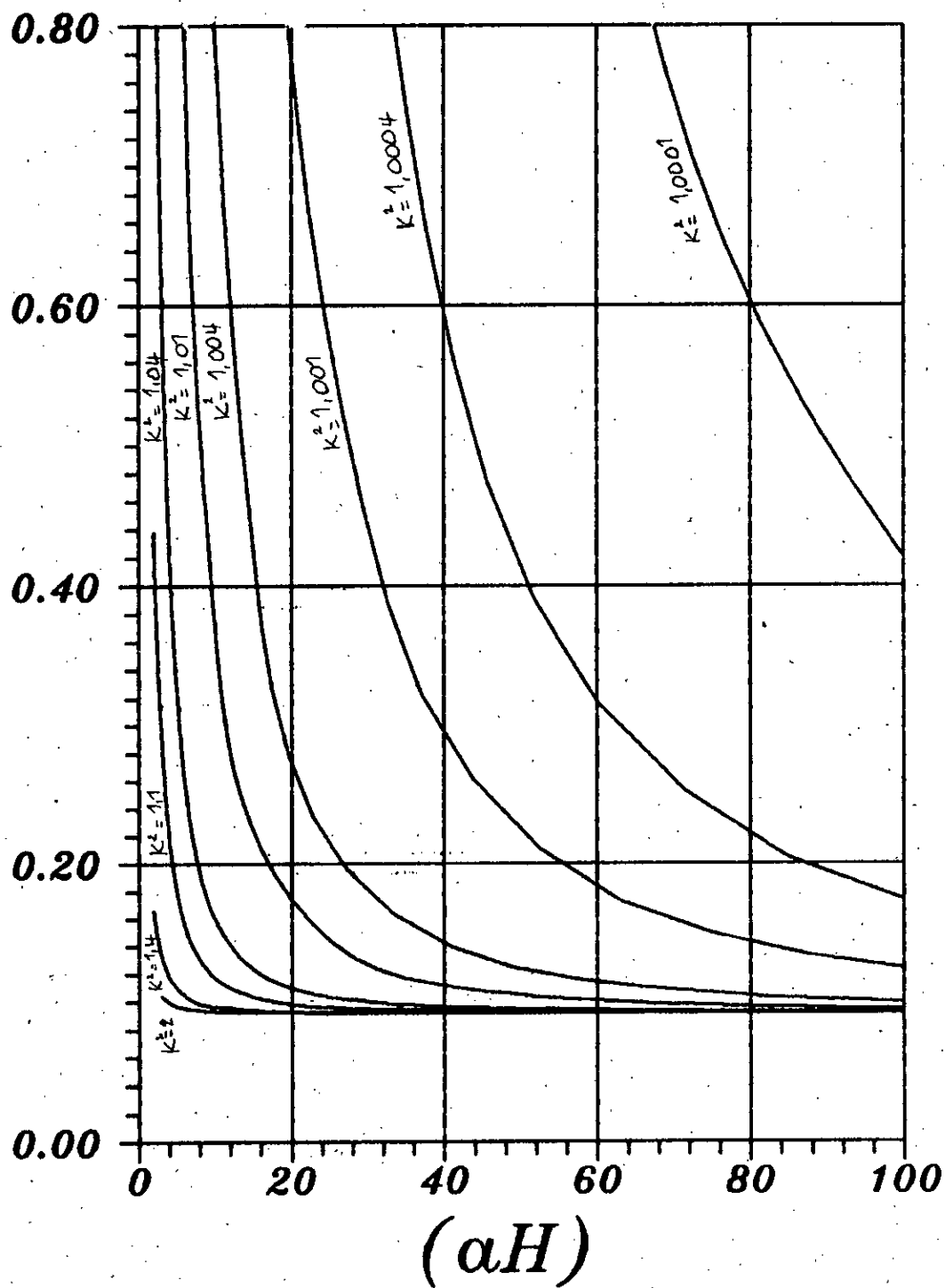
FLECHE MAX  $Kt$



Flèche maximale due à une charge uniforme

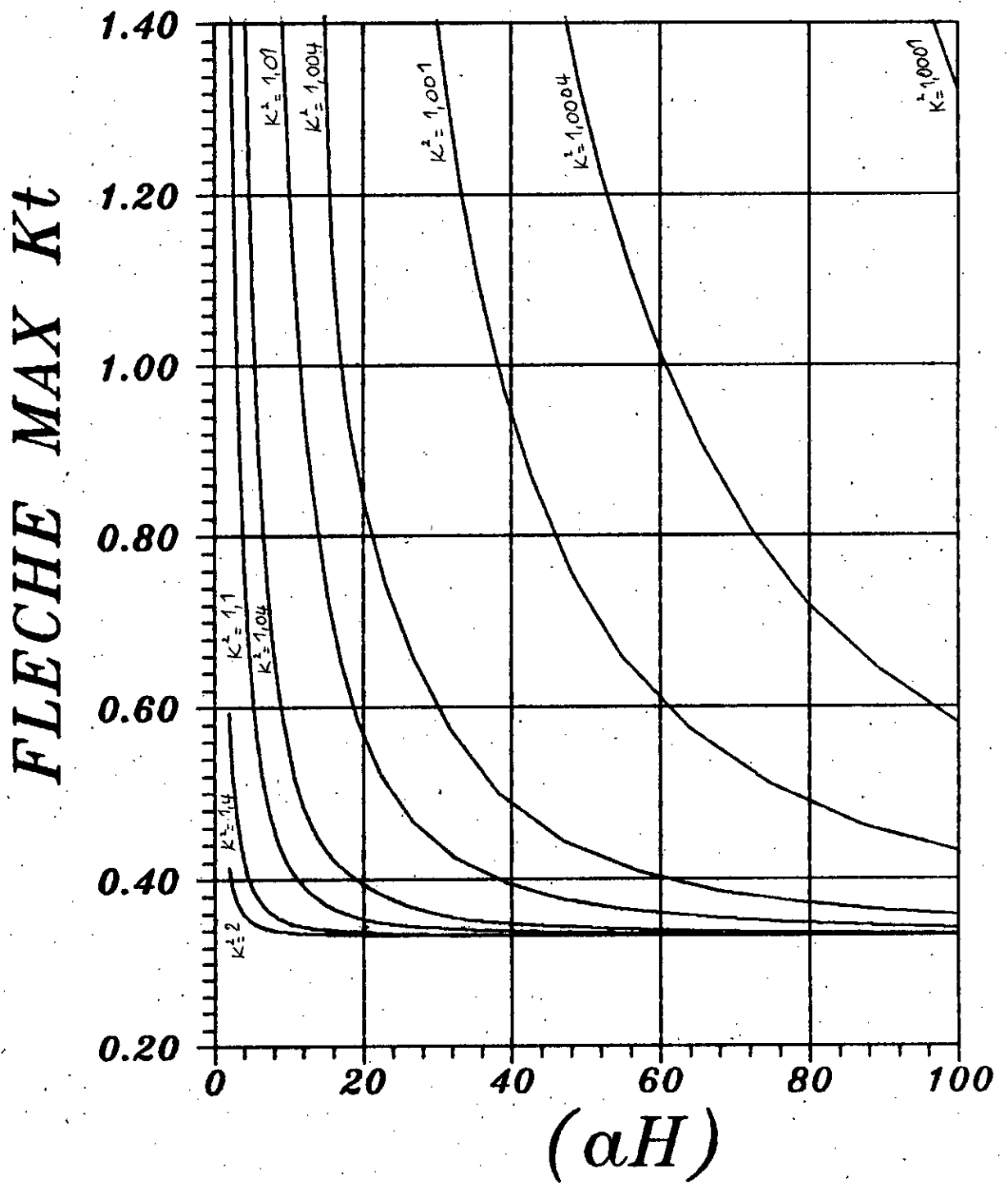
Figure IV.2

# FLECHE MAX $Kt$



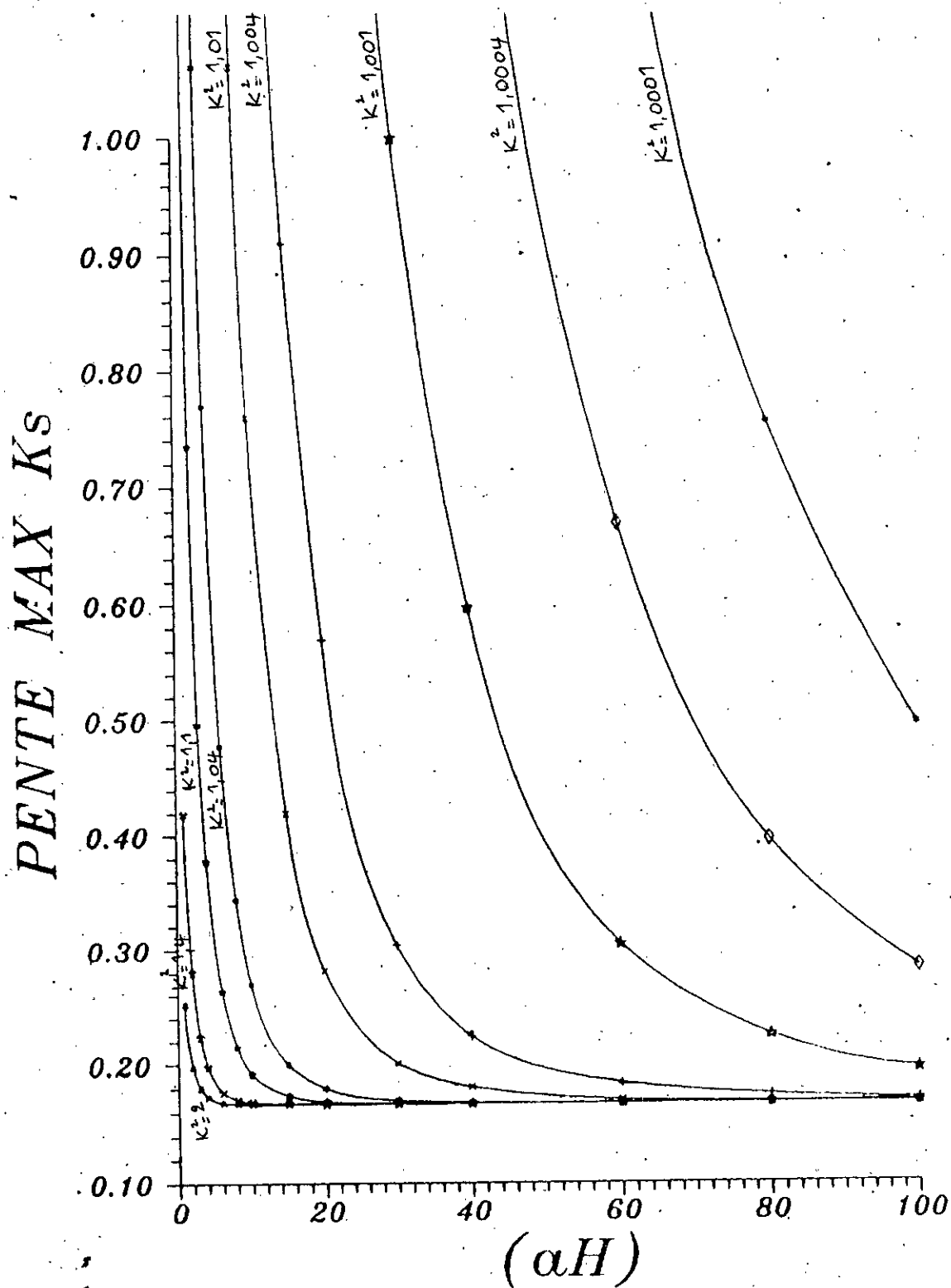
Flèche maximale due à une charge triangulaire

Figure IV.3



Flèche maximale due à une charge concentrée

Figure IV.4



Pente maximale due à une charge uniforme

Figure IV.5



### **4.3 Variation de la flèche en fonction de la hauteur**

Après avoir tracé les abaques des flèches et pente maximales, nous nous sommes intéressés à la variation de la flèche en fonction de la hauteur d'une structure (soumise à un chargement latéral uniforme) et bien entendu des paramètres  $K^2$  et  $\alpha H$ . Afin de visualiser cette variation, nous avons tracé quelques abaques en fixant à chaque fois  $K^2$  et faisant varier  $\alpha H$  et la hauteur  $x/H$ . Figure (IV.6, IV.7, IV.8 et IV.9).

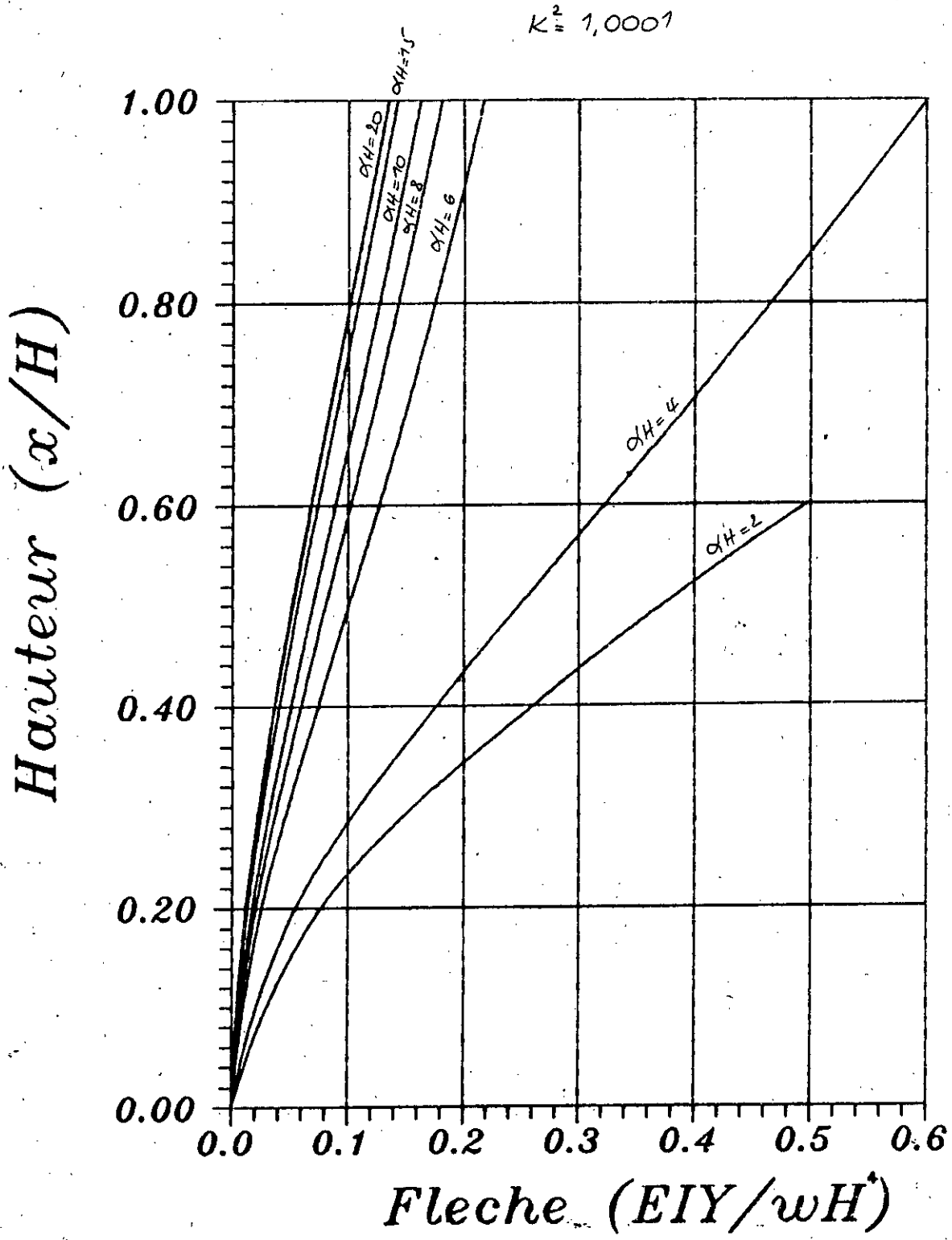


Figure IV.6

$$K^2 = 1,001$$

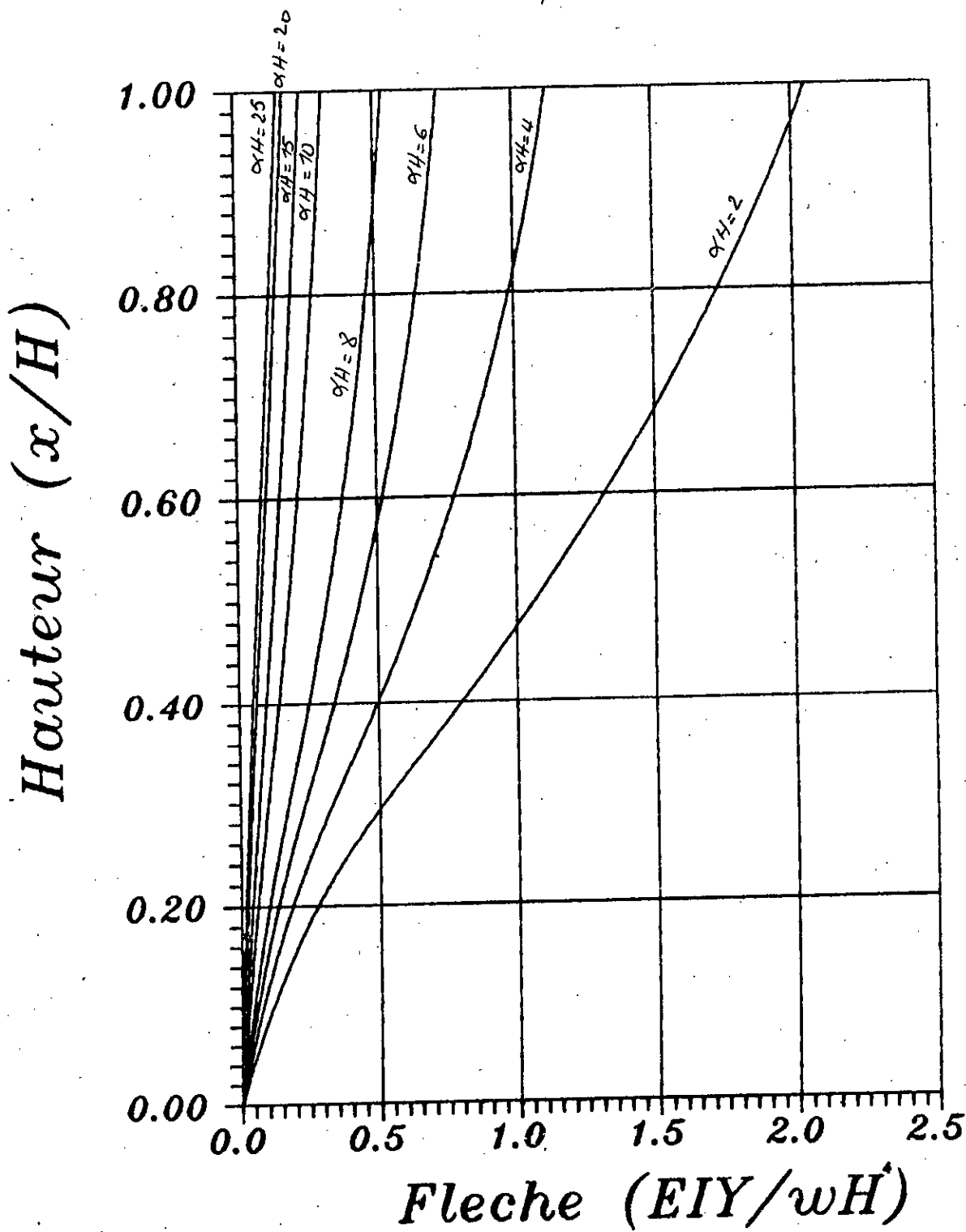


Figure IV.7

$$K^2 = 1,01$$

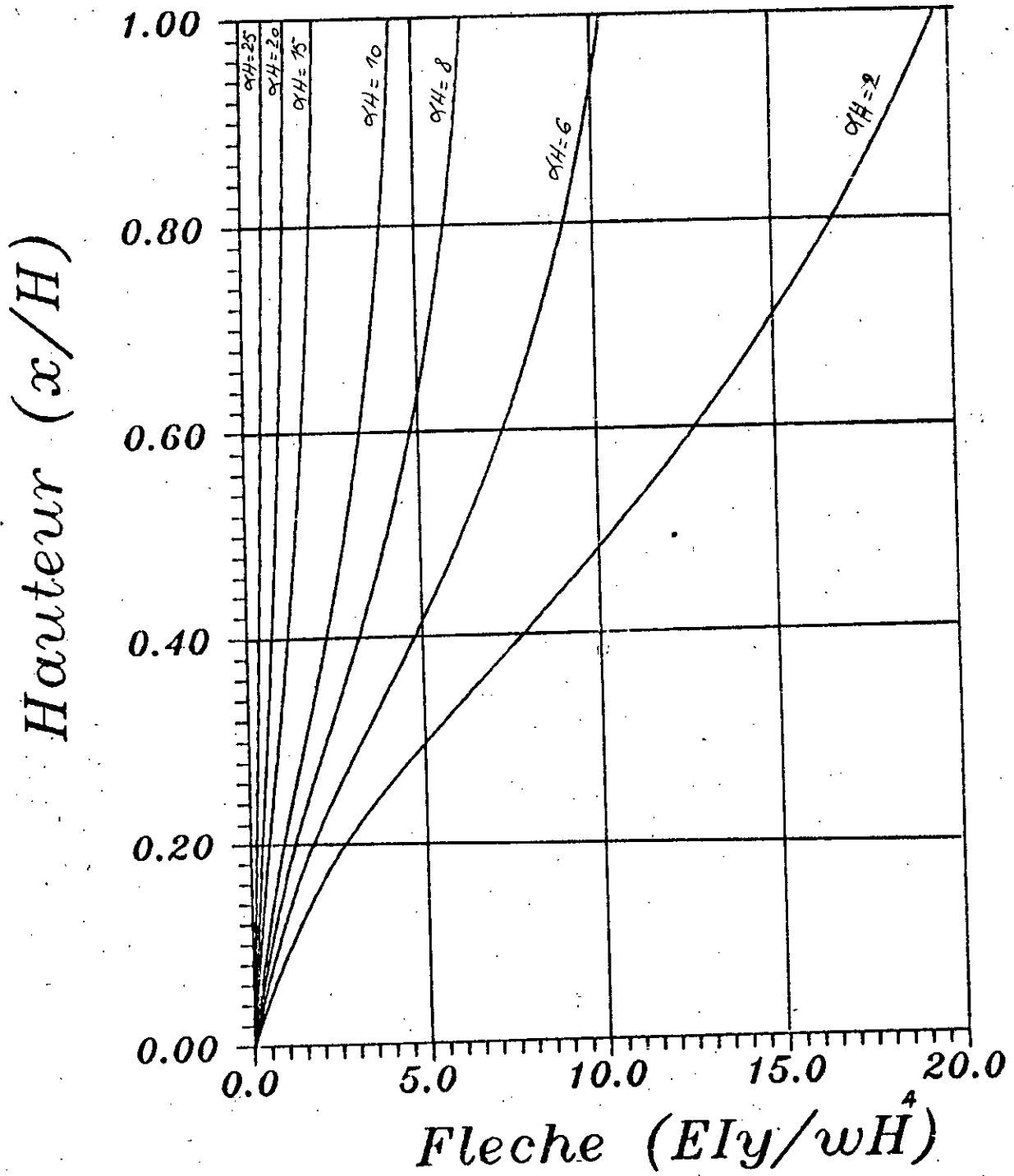


Figure IV.8

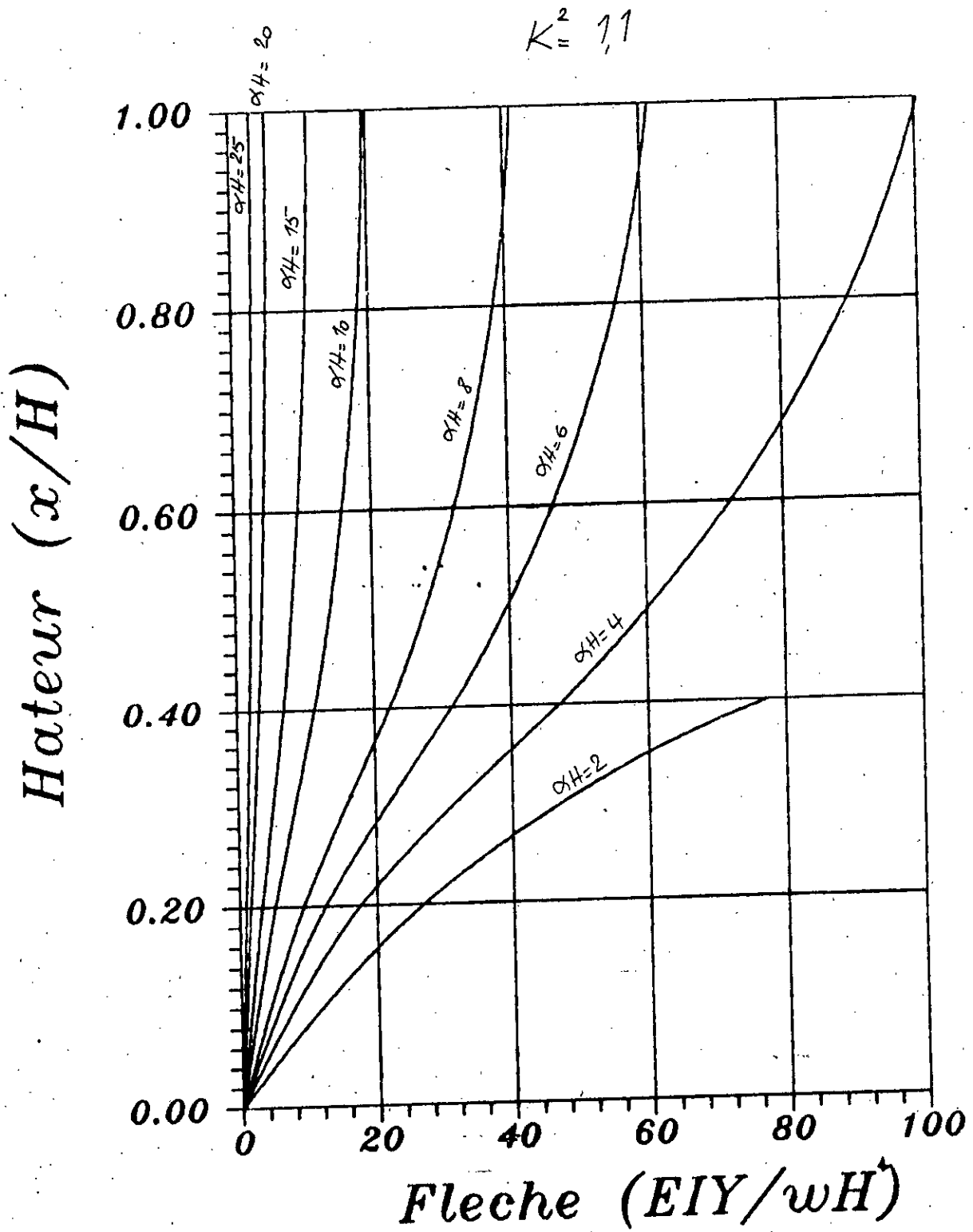


Figure IV.9

#### IV.5 GENERALISATION DE LA TECHNIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Le comportement d'une structure soumise à un effort dépend de trois paramètres qui sont "EI", "EA<sub>c</sub><sup>2</sup>" et "GA" et qui représentent les rigidités de celle-ci. Il a été vu dans le chapitre (III) que l'équation de la flèche latérale était exprimée en fonction de deux paramètres sans dimension et qui ont pour expression:

$$\alpha H = H \sqrt{\frac{GA}{EI}} \quad (IV.20)$$

$$K^2 = 1 + \frac{EI}{EA_c^2} \quad (IV.21)$$

où:

\* EI: Est la rigidité à la flexion pure des membres verticaux (murs et poteaux).

$$EI = E \sum I_i \quad (IV.22)$$

Ce terme représente la contribution de la rigidité à la flexion pure de chaque membre vertical à la résistance totale de la structure. Il est à noter que pour une structure en charpente métallique avec barres articulées aux extrémités, le moment est nul et par conséquent le terme EI l'est aussi. Ce qui nous conduira donc à un "αH" tendant vers l'infini et un "K<sup>2</sup>" égal à 1. Ces valeurs étant inutilisables dans notre équation, il serait donc judicieux de prendre une valeur non nulle pour I mais restant cependant extrêmement faible afin de donner une erreur négligeable.

La valeur recommandée est:

$$I = 0,001 A_p \frac{l^2}{2} \quad (V.4)$$

où:

$A_p$ : désigne la section des poteaux

$l$ : désigne la distance entre poteaux.

\*  $EAc^2$ : Est la rigidité à la flexion des membres verticaux par rapport au centre de leurs sections.

Ce terme représente la participation de la rigidité axiale des membres verticaux agissant simultanément.

$$EAc^2 = E \sum_{i=1}^n A_i c_i^2 \quad (IV.23)$$

\*  $GA$ : Est la rigidité au cisaillement de la structure développée par les membres horizontaux ou diagonaux.

La théorie de base élaborée initialement pour les murs jumelés [1] a été par la suite étendue [2] et [3] afin de pouvoir traiter d'autres types de structures, et cela en définissant les paramètres " $EI$ ", " $EAc^2$ " et " $GA$ " pour chacune d'elles. La généralisation des deux premiers termes ne cause aucun problème du moment que l'inertie ainsi que la section des membres verticaux sont connues. Cependant, en ce qui concerne " $GA$ ", il faut le définir pour chaque type de structure et cela en considérant un cantilever hypothétique de module de cisaillement " $G$ " et de section " $A$ " dont la rigidité au cisaillement est équivalente à celle de la structure considérée.

Cette généralisation a été limitée à certaines structures dont on peut citer à titre d'exemple les murs avec plusieurs files d'ouvertures, les portiques rigides, les portiques articulés ou encore les murs reliés à des poteaux. Le choix de ces structures assez simples s'explique par le fait que pour des combinaisons plus complexes le calcul de la rigidité au cisaillement devient extrêmement difficile.

## 5.1 Calcul de GA pour quelques types de structures

\* Murs jumelés: Figure (IV.10.a)

$$GA = \frac{12E}{h} \frac{l^2}{\sum \frac{I_b}{b}} \quad (\text{IV.24})$$

\* Portique rigide: Figure (IV.10.b)

$$GA = \frac{12E}{\frac{h}{\sum \frac{I_{ci}}{h}} + \frac{h}{\sum \frac{I_{bi}}{l_i}}} \quad (\text{IV.25})$$

\* Murs poteaux: Figure (IV.10.c)

$$GA = \frac{6EI_b}{lh} [(1+r)(1+2r+s)] \quad (\text{IV.26})$$

Avec:

$$r = \frac{b}{l}, \quad s = \frac{\beta - 3r - 1}{\beta + r} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{6EI_p l}{EI_b h}$$

\* Portique articulé :

a/ Portique articulé avec une seule diagonale. Figure (IV.11.a):

$$GA = \frac{hl^2 E}{\left[ \frac{2h^3}{A_c} + \frac{\sqrt{(l^2 + h^2)^3}}{A_d} \right]} \quad (\text{IV.27})$$



Avec:

$$d^2 = l^2 + h^2$$

b/ Portique articulé à double diagonale. Figure (IV.11.b):

$$GA = \frac{2hl^2E}{\left[ \frac{h^3}{A_c} + \frac{d^3}{A_d} \right]} \quad (\text{IV.28})$$

Avec:

$$d^2 = l^2 + h^2$$

c/ Portique articulé en K. Figure (IV.11.c):

$$GA = \frac{hl^2E}{2 \left[ \frac{h^3}{A_c} + \frac{d^3}{A_d} \right]} \quad (\text{IV.29})$$

Avec:

$$d^2 = \frac{l^2}{4} + h^2$$

d/ Portique articulé complexe. Figure (IV.11.d):

$$GA = \frac{2hE}{\left[ \frac{h^2l}{6I_b} + \frac{h^3}{\mu^2 A_c} + \frac{d^3}{\mu^2 A_d} \right]} \quad (\text{IV.30})$$

Avec:

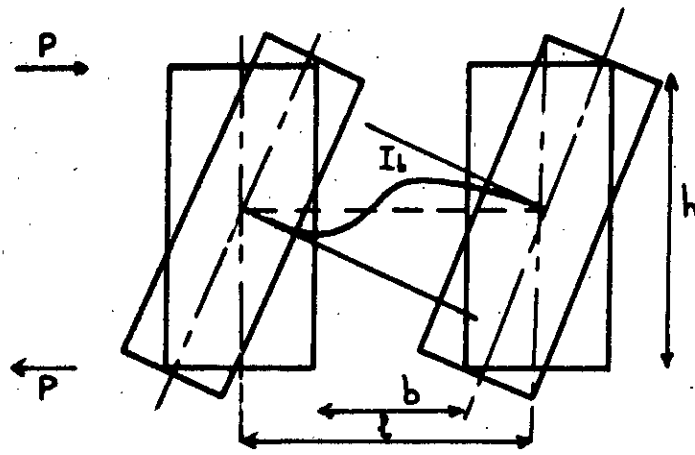
$$d^2 = \mu^2 + h^2$$

\* Portique mur: Figure (IV.12)

$$GA = \frac{12E}{h \left[ \frac{1}{\sum \frac{I_i}{S} \rho^2} + \frac{1}{\sum \frac{I_{bi}}{b_i} \lambda_i^2} \right]} \quad (\text{IV.31})$$

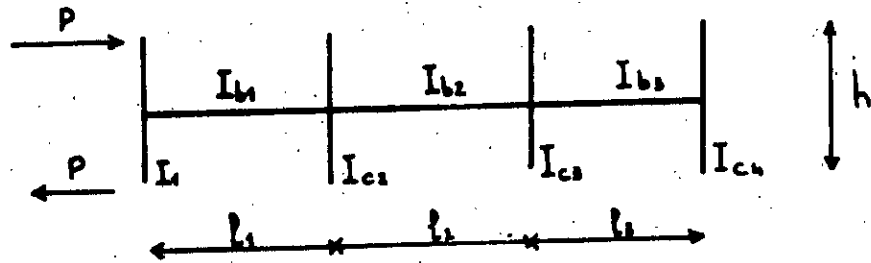
Avec:

$$\rho^2 = \frac{h}{S} \quad \text{et} \quad \lambda_i = \frac{l_i}{b_i}$$



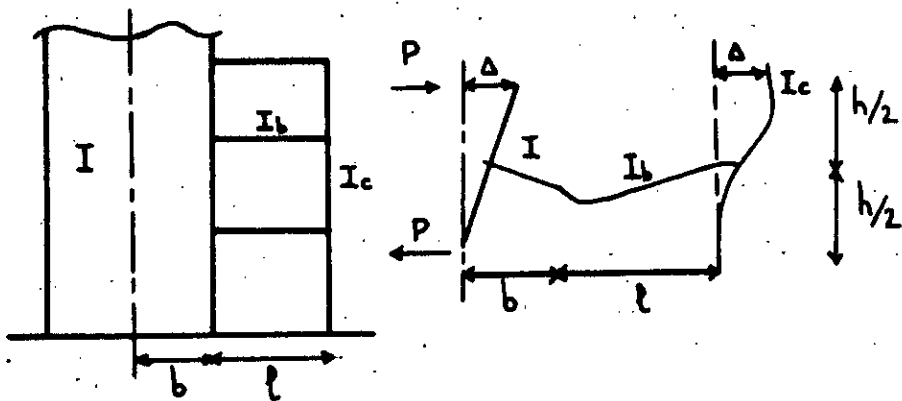
(a)

Murs jumelés



(b)

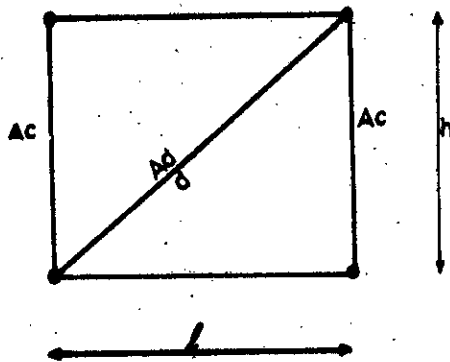
Portique rigide



(c)

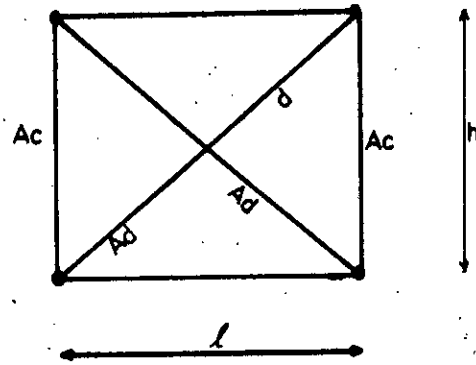
Murs poteaux

Figure IV.10.



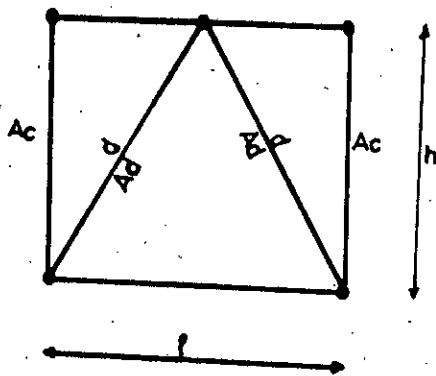
(a)

Portique articulé à une seule diagonale



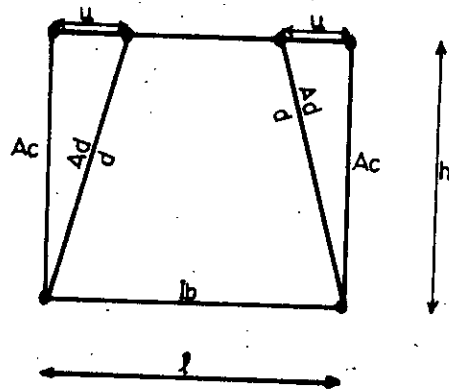
(b)

Portique articulé à double diagonale



(c)

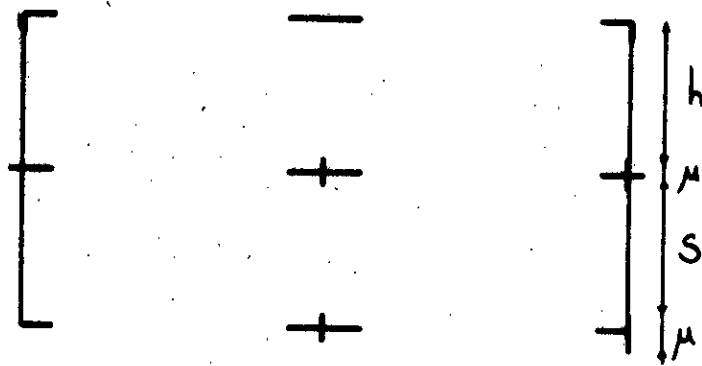
Portique articulé en K



(d)

Portique articulé complexe

Figure IV.11



Vue en plan

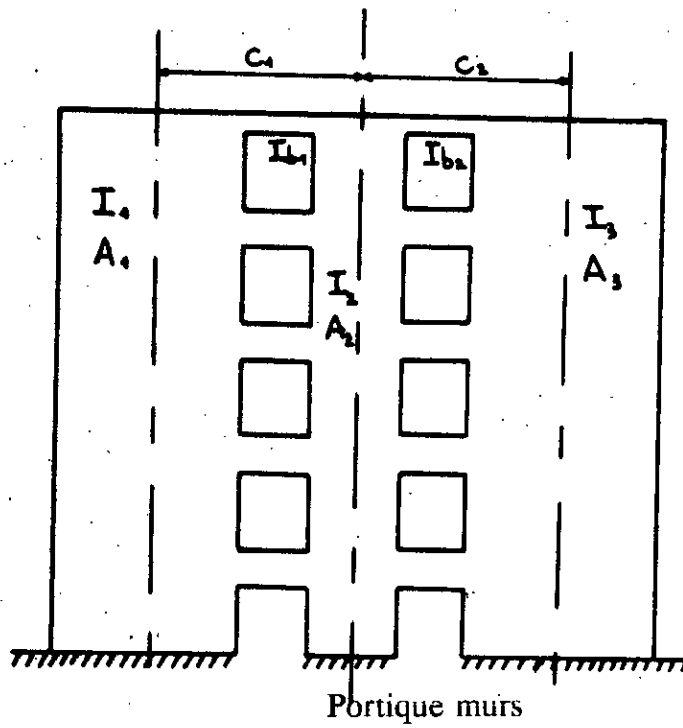


Figure IV.12

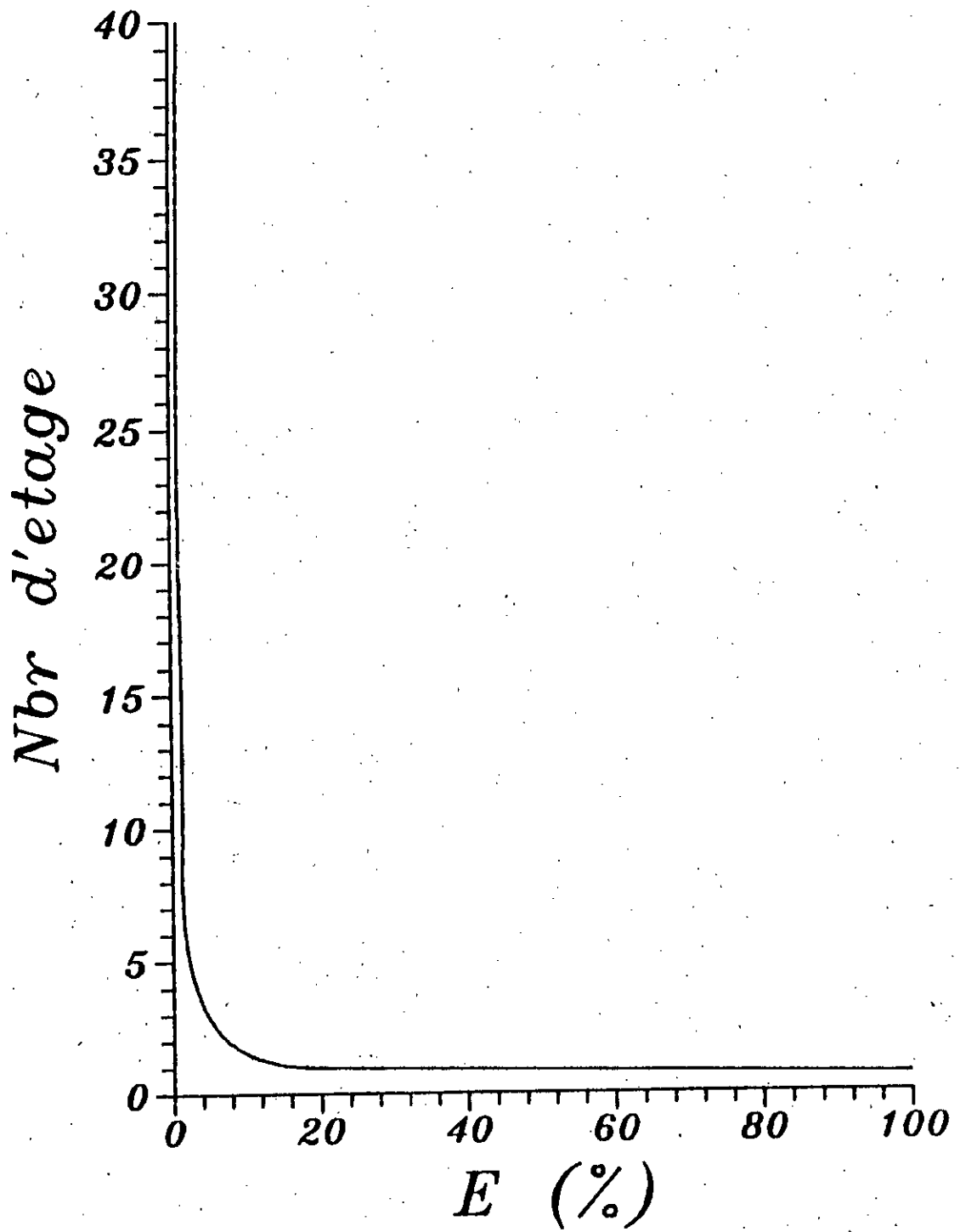
## **5.2 Courbe d'Erreur:**

Après avoir étudié cette même structure, de type murs jumelés pour différentes hauteurs (5 étages, 10 étages, 15 étages, 20 étages et 25 étages), et après avoir comparé les résultats obtenus avec les résultats exacts, nous avons pu établir la courbe de la variation de l'erreur en fonction de la hauteur. Cette courbe étant représentée sur la figure (IV.13).

On remarque que la précision de la méthode augmente avec la hauteur et, qu'à partir d'une structure à cinq étages, l'erreur commise est acceptable. Cela n'est vrai que pour une structure de type murs jumelés, la méthode ayant été élaborée pour ce genre de structure.

En réalité, le taux d'erreur que l'on commet en utilisant cette méthode dépend de la complexité de la structure, c'est à dire que plus la structure est complexe plus l'erreur est importante. Comme il a été vu précédemment que l'erreur était inversement proportionnelle à la hauteur, il suffit donc de se borner à étudier des structures ayant une assez grande hauteur.

Il a été jugé qu'à partir de trente étages n'importe qu'elle structure pouvait être analysée.



Courbe d'erreur

Figure IV.13

## CHAPITRE V

### DETERMINATION DES PARAMETRES $K^2$ ET $\alpha H$

Nous allons dans ce chapitre donner une autre méthode pour le calcul des paramètres adimensionnels " $K^2$ " et " $\alpha H$ " et cela en inversant le problème, c'est à dire qu'à partir de la valeur de la flèche latérale de n'importe qu'elle structure soumise à un chargement horizontal nous aboutirons au calcul de ces deux termes [3].

Cette méthode sera basée sur le principe de la résolution de deux équations à deux inconnues. Il s'agit donc maintenant de trouver les équations nous permettant de faire cette résolution.

#### V.1. DETERMINATION DES DIFFERENTES EQUATIONS

##### 1.1 Equations de la flèche

\* Equation de la flèche d'une structure soumise à un chargement uniforme:

$$y(x) = \frac{wH^4}{EI} \left[ \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{H} \right)^4 \right\} \frac{K^2 - 1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{1 - \left( \frac{x}{H} \right)^2}{2(K\alpha H)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\cosh(K\alpha(H-x)) - 1}{(K\alpha H)^4 \cosh(K\alpha H)} - \frac{\sinh(K\alpha H) - \sinh(K\alpha x)}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (V.1)$$



\* Equation de la flèche d'une structure soumise à un effort concentré au sommet:

$$y(x) = \frac{pH^3}{EI} \left[ \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{x}{H} + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right)^3 \right\} \frac{K^2-1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{1-\frac{x}{H}}{(K\alpha H)^2} + \frac{\sinh(K\alpha x) - \sinh(K\alpha H)}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (V.2)$$

\* Equation de la flèche d'une structure soumise à un chargement triangulaire:

$$y(x) = \frac{fH^4}{EI} \left[ \left\{ \frac{11}{120} - \frac{1}{8} \frac{x}{H} + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{H} \right)^4 - \frac{1}{120} \left( \frac{x}{H} \right)^5 \right\} \frac{K^2-1}{K^2} + \frac{1}{K^2 K\alpha H} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{H} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right)^3 - \frac{1-\frac{x}{H}}{(K\alpha H)^2} \right\} + \frac{\left( \frac{1}{K\alpha H} - \frac{K\alpha H}{2} \right) (\sinh(K\alpha H) - \sinh(K\alpha x)) - 1 + \cosh(K\alpha(H-x))}{(K\alpha H)^2 \cosh(K\alpha H)} \right] \quad (V.3)$$

## 1.2 Equations des dérivées successives de la flèche

Pour chaque type de chargement les équations des dérivées de la flèche peuvent être déterminées. Nous nous intéresserons dans ce paragraphe à celles d'une structure soumise à un chargement uniforme. A partir de l'équation (V.1) on obtient donc:

\* L'équation de la rotation de la structure ou première dérivée:

$$y'(x) = \frac{wH^3}{EI} \left[ \left\{ -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{H} \right)^3 \right\} \frac{K^2-1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ -\frac{x/H}{(K\alpha H)^2} - \frac{\sinh(K\alpha(H-x))}{(K\alpha H)^3 \cosh(K\alpha H)} + \frac{\cosh(K\alpha x)}{(K\alpha H)^2 \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (V.4)$$

\* L'équation de la dérivée seconde de la flèche qui est proportionnelle au moment de flexion agissant sur la structure et qui a pour expression:

$$y''(x) = \frac{wH^2}{EI} \left[ \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{H} \right)^2 \right\} \frac{K^2-1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ - \frac{1}{(K\alpha H)^2} + \frac{\cosh(K\alpha(H-x))}{(K\alpha H)^2 \cosh(K\alpha H)} + \frac{\sinh(K\alpha x)}{(K\alpha H) \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (V.5)$$

\* L'expression de la troisième dérivée qui est quant à elle proportionnelle à l'effort tranchant dans les membres verticaux, et qui s'écrit comme suit:

$$y'''(x) = \frac{wH}{EI} \left[ \left\{ \frac{x}{H} \right\} \frac{K^2-1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{-\sinh(K\alpha(H-x)) + (K\alpha H) \cosh(K\alpha x)}{(K\alpha H) \cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (V.6)$$

\* Et enfin l'expression de la quatrième dérivée qui s'écrit en fonction du chargement extérieur de la manière suivante:

$$y''''(x) = \frac{w}{EI} \left[ \frac{K^2-1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{\cosh(K\alpha(H-x)) + (K\alpha H) \sinh(K\alpha x)}{\cosh(K\alpha H)} \right\} \right] \quad (V.7)$$

Nous nous limiterons à l'expression de la quatrième dérivée car à partir de cette dernière les autres dérivées n'ont aucune signification physique.

Après avoir établi toutes ces équations il nous faut à présent déterminer les valeurs de celles-ci. Pour cela, nous utiliserons un logiciel calculant la flèche latérale et une méthode nous permettant de calculer les valeurs des dérivées. La méthode que nous utilisons est celle des différences finies [3].

## V.2 DIFFERENCES FINIES

La méthode des différences finies consiste à utiliser les séries de TAYLOR pour définir ce qu'on appelle une "molécule mathématique" qui donne les valeurs des différentes dérivées en fonction des valeurs des flèches des niveaux supérieurs et inférieurs du point considéré [3].

Il existe trois types de molécules mathématiques. La molécule centrale, la molécule supérieure et la molécule inférieure. Nous utiliserons dans notre cas la molécule centrale car elle donne de meilleurs résultats et moins d'erreur que les autres molécules. Les quatre premières dérivées auront donc les expressions suivantes:

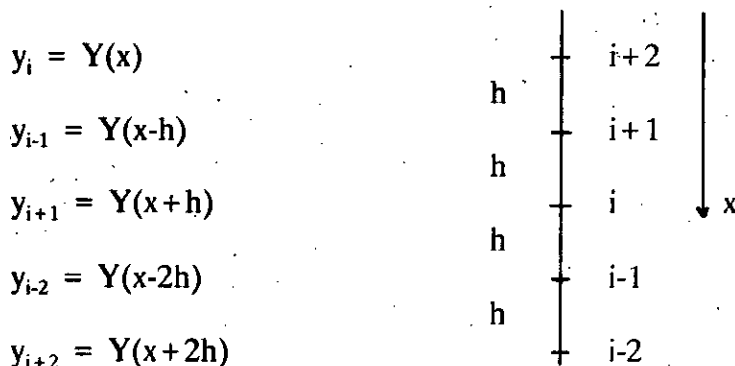
$$y' = \frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2h} \quad (\text{V.8})$$

$$y'' = \frac{y_{i-1} + y_{i+1} - 2y_i}{h^2} \quad (\text{V.9})$$

$$y''' = \frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + 2y_{i+1} - y_{i+2}}{2h^3} \quad (\text{V.10})$$

$$y^{(4)} = \frac{6y_i - 4y_{i-1} - 4y_{i+1} + y_{i-2} + y_{i+2}}{h^4} \quad (\text{V.11})$$

et cela connaissant les valeurs suivantes:



qui représentent la valeur de la flèche à chaque niveau.

### V.3 CHOIX DES EQUATIONS

Les études comparatives entre les valeurs calculées par les équations (V.8), (V.9), (V.10), (V.11) et celles données par les différences finies [3]. Nous a permis de conclure qu'à partir de la seconde dérivée la différence entre les résultats exacts et les résultats approchés n'est plus acceptable. Il en résulte donc, que nous n'utiliserons pas pour nos calculs les dérivées seconde troisième et quatrième.

Il ne nous reste donc plus qu'à choisir deux équations parmi les trois de la flèche et les trois dérivées premières de celles-ci pour les trois types de chargement.

Après avoir fait une étude comparative entre ces six équations il nous est paru plus commode d'utiliser l'équation de la flèche d'une structure soumise à un chargement uniforme ainsi que celle de sa première dérivée.

### V.4 CHOIX DE LA METHODE DE RESOLUTION

Comme nous avons affaire à un système de deux équations non linéaires à deux inconnues, il nous faut donc faire une recherche parmi les méthodes permettant la résolution d'un tel système [5] et [6].

Parmi les méthodes auxquelles nous nous sommes intéressés, nous pouvons citer celle de "Newton-Raphson" et celle du "Gradient" qui sont des méthodes d'ordre deux. C'est à dire qu'elles nécessitent le calcul des dérivées par rapport au deux variables  $K^2$  et  $\alpha H$ , ce qui est très fastidieux et augmente le risque d'erreur, nos équations étant difficiles à manipuler. De plus dans notre cas ces deux méthodes n'ont pas convergé du tout pour certaines valeurs initiales et n'ont convergé que très lentement pour des valeurs initiales se rapprochant de la solution.

Après avoir essayé ces deux méthodes, nous sommes passés à l'étude d'une méthode directe appelée "Direct Research Analysis". Cette étude nous a permis d'établir que la méthode convergait assez rapidement et avec une bonne précision, donc qu'elle s'adaptait le mieux à notre système, ce qui nous a conduit à l'utiliser pour notre résolution.

## V.5 ALGORITHME DE LA METHODE

Le principe de la méthode est de faire des itérations sur l'une des inconnues en gardant la deuxième fixe afin de minimiser une des équations. Une fois la précision souhaitée atteinte on procède de même avec la deuxième inconnue et la deuxième équation.

Les étapes que suit notre programme sont les suivantes:

- 1 - Insérer les données nécessaires se rapportant aux caractéristiques et au chargement de la structure, ainsi que les valeurs initiales " $K_0$ " et " $\alpha H_0$ " et leurs incréments respectifs.
- 2 - Faire des itérations sur  $K$  dans la première équation jusqu'à l'obtention de la précision souhaitée.
- 3 - Prendre la nouvelle valeur de  $K$  et faire des itérations sur  $\alpha H$  dans la deuxième équation jusqu'à l'obtention de la précision souhaitée.
- 4 - Vérifier si la précision de la première équation est conservée. Si oui, arrêter le processus.

5 - Si non, reprendre les étapes deux et trois avec les nouvelles valeurs de K et  $\alpha H$  jusqu'à ce que l'étape quatre soit vérifiée.

En vue d'accélérer le processus de convergence, nous avons installé un système permettant de faire varier les valeurs des incréments.

Remarque: Caractéristiques du programme:

Le programme nécessite:

- Un micro ordinateur IBM PC XT, AT, 386, 486 ou un compatible 100%
- Un dos version 2.00 ou version supérieure
- Un minimum de 512 K de mémoire vive
- Une unité de disquette ou un disque dur de 10 MB est suffisant
- Un écran monochrome est suffisant. On peut aussi utilisé des écrans couleur graphiques EGA, VGA, CGA ou autre. (Pas de graphisme dans le programme).
- Une sortie parallèle est nécessaire
- Une imprimante 100 % compatible IBM 9 pin, 24 pin ou laser
- Le programme ne nécessite aucun accessoire (souris, table traçante, stylo,..etc)

Le programme est donné sous la forme d'un seul fichier de 0,1 MB de taille et peut rentrer dans une seule disquette formatée à 640 K ou 1,2 MB d'espace total.

- Le programme est interactif et ne nécessite pas un éditeur ou un fichier de données (DATA file) pour introduire les données.

L'organigramme de ce programme est explicité en page 63.

## V.6 EXEMPLE DE CALCUL

Soit la structure de type mur central avec portiques rigides schématisée sur la figure (V.1), soumise à un chargement uniforme d'intensité  $w = 15 \text{ KN/m}$  et ayant les caractéristiques suivantes:

\* Module d'élasticité:  $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$

\* Inertie des poteaux:  $I_p = 3.125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

\* Section des poteaux:  $A_p = 0,15 \text{ m}^2$

\* Inertie du mur:  $I_M = 0,2 \text{ m}^4$

\* Section du mur:  $A_M = 0,6 \text{ m}^2$

\* Inertie des poutres:  $I_b = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

Toutes les poutres sont supposées infiniment rigides axialement.

Le programme de calcul des paramètres élaboré ci-dessus nous donne les résultats suivants:

$$K = 1,0136$$

$$\alpha H = 22,33$$

Afin de vérifier ces résultats, comparons les avec ceux obtenus à partir des équations (IV.20) et (IV.21) qui nous donnent les valeurs suivantes:

$$K = 1,0137$$

$$\alpha H = 23,5388$$

Ce qui représente une erreur de 5,5 %, qui est jugée acceptable.

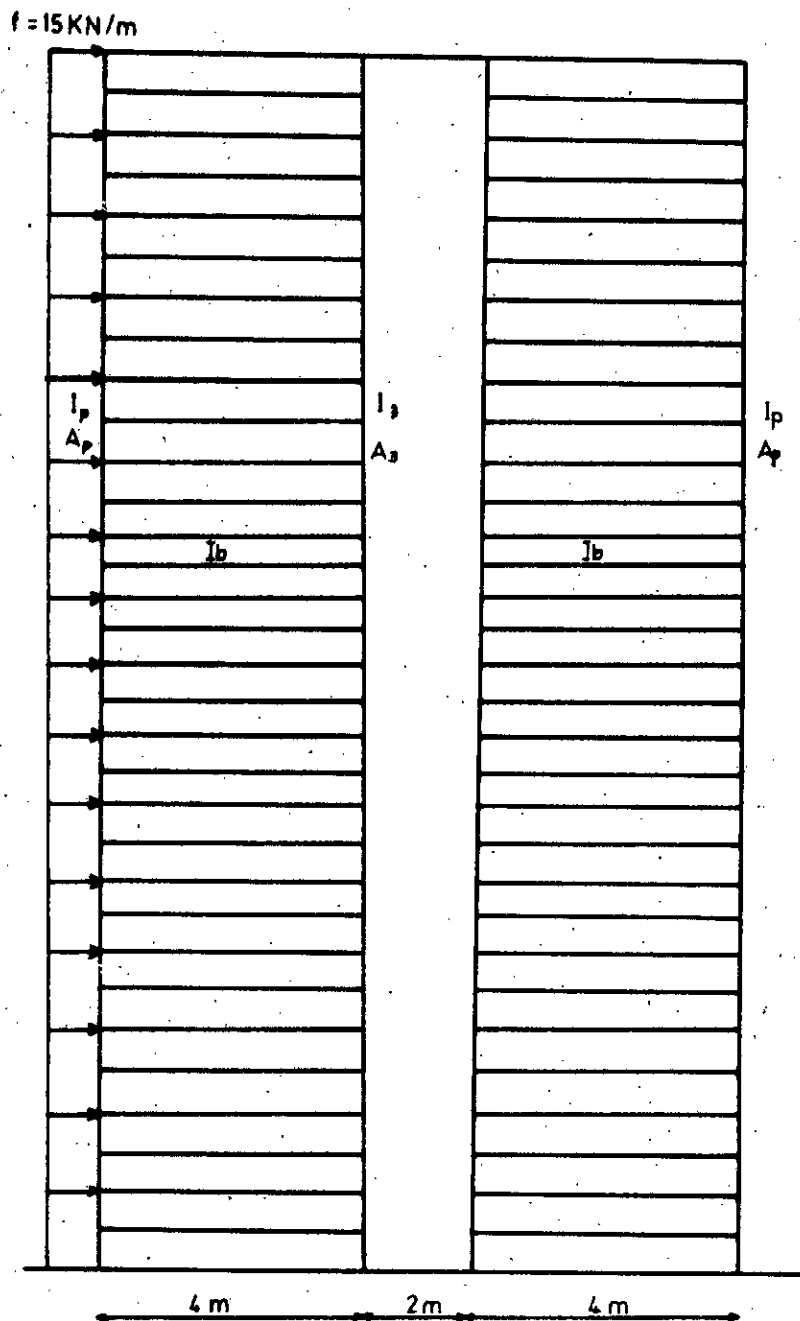
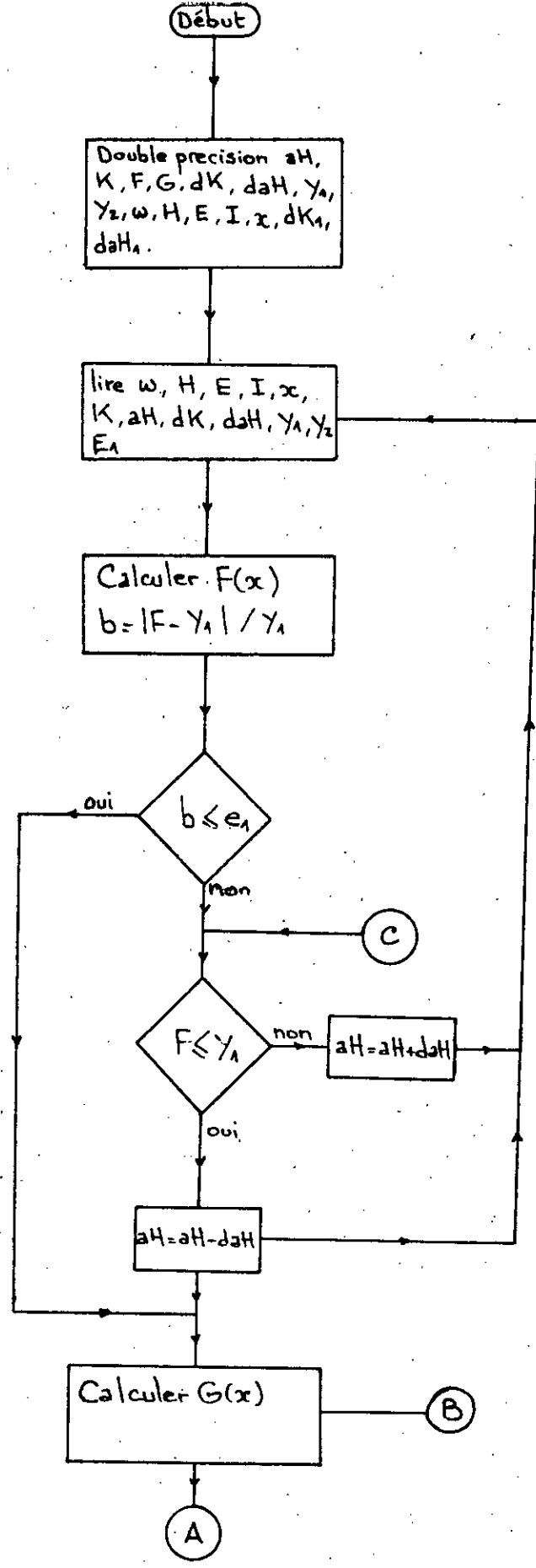


Figure V.1





Double precision  $aH,$   
 $K, F, G, dK, daH, Y_1,$   
 $Y_2, w, H, E, I, x, dK_1,$   
 $daH_1.$

lire  $w, H, E, I, x,$   
 $K, aH, dK, daH, Y_1, Y_2$   
 $E_1$

Calculer  $F(x)$   
 $b = |F - Y_1| / Y_1$

$b \leq e_1$

(C)

$F \leq Y_1$

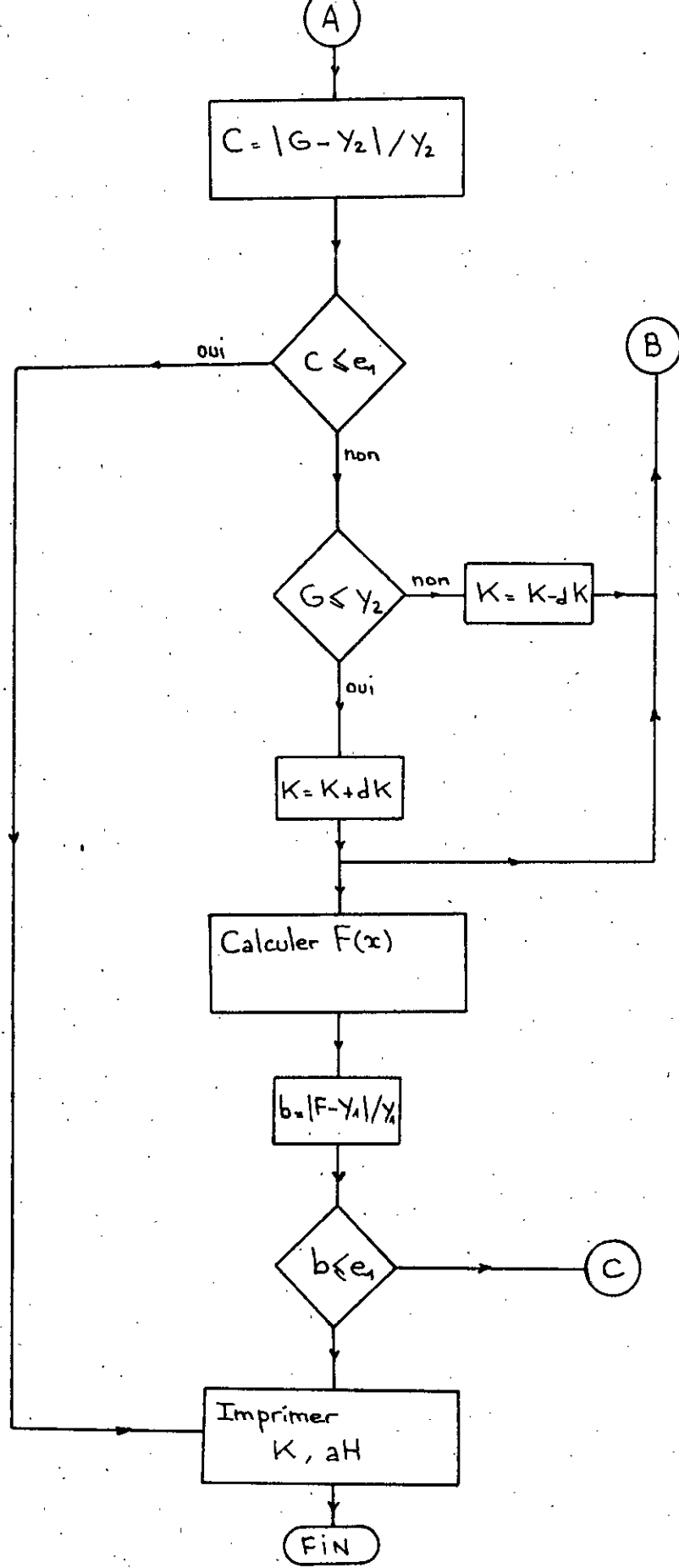
$aH = aH + daH$

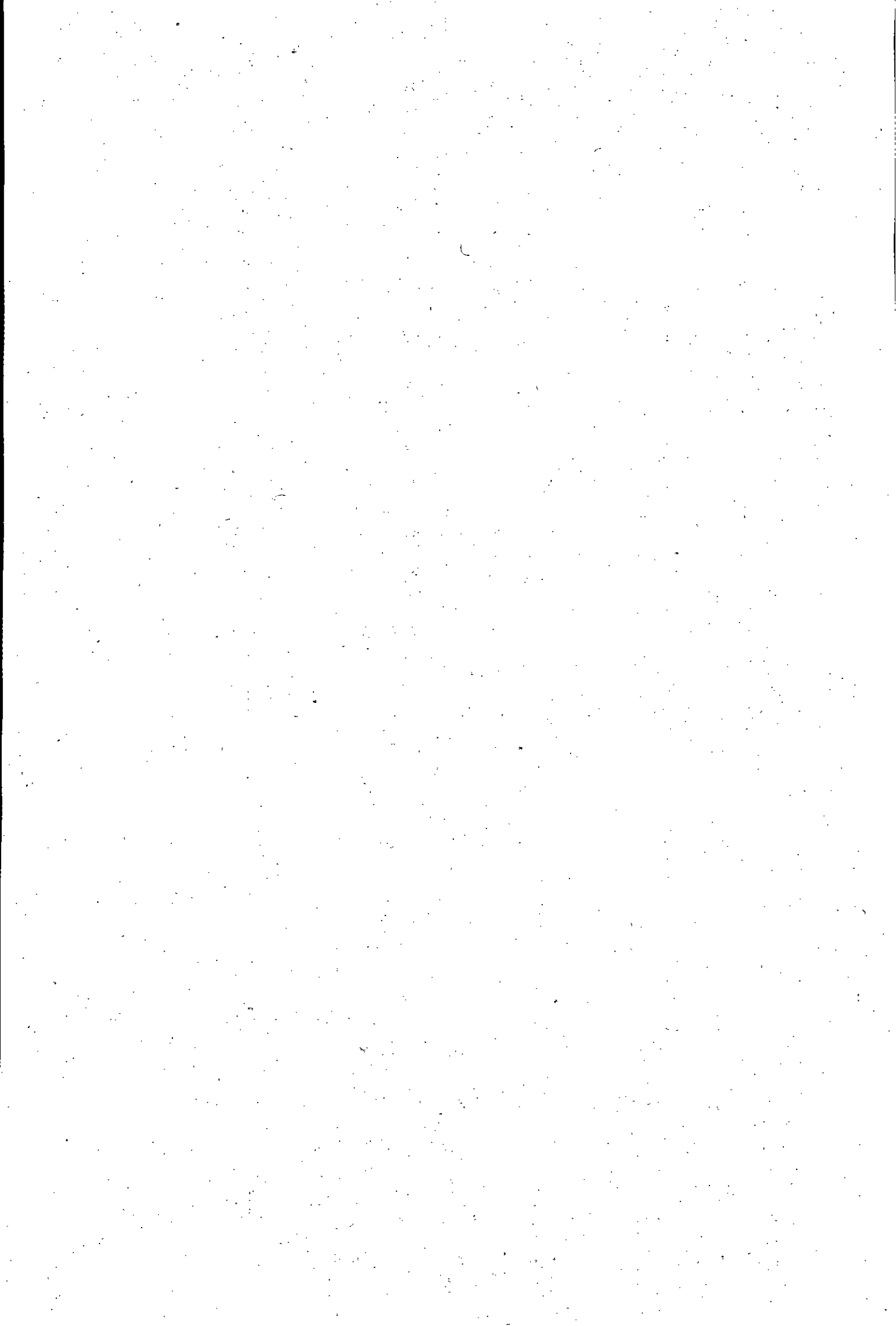
$aH = aH - daH$

Calculer  $G(x)$

(B)

(A)





# CHAPITRE VI

## ETUDE D'UNE STRUCTURE EN 3D PAR L'INTERMEDIAIRE D'UN MODELE SIMPLIFIE

### VI.1 INTRODUCTION ET DEFINITIONS

Une structure en trois dimensions est considérée comme étant la combinaison de plusieurs plans de contreventement parallèles entre-eux et reliés à chaque niveau par l'intermédiaire de dalles considérées comme infiniment rigides. L'analyse de ce genre de structure nécessite l'utilisation de logiciels de simulation de leur comportement.

L'élaboration et l'analyse d'un modèle complet et détaillé de la structure nécessite la représentation de tous les éléments de base constituant celle-ci, à savoir les murs, les poteaux et les poutres, ainsi qu'une bonne évaluation des efforts extérieurs appliqués. Généralement, une analyse détaillée en trois dimensions des constructions à grande hauteur est très longue, il serait donc souhaitable et parfois même nécessaire de remplacer le modèle détaillé par un modèle simple ayant le même comportement. Pour cela nous allons tout d'abord déterminer un modèle simplifié pour chaque plan de contreventement.

### **1.1 Elaboration du modèle simplifié en 2D**

Le but de ce paragraphe est de trouver un portique rigide uniforme symétrique à une seule travée qui jouera le rôle de modèle. Il sera donc composé de deux poteaux reliés à chaque niveau par une poutre infiniment rigide axialement et donnera la même flèche latérale que la structure d'origine soumise au même chargement latéral. Les paramètres  $\alpha H$  et  $K^2$  calculés pour la structure initiale comme il a déjà été vu en chapitre (V), sont utilisés pour déterminer les propriétés du modèle équivalent.

### **1.2 Marche à suivre pour l'étude d'une structure en 3D**

La méthode que nous allons utiliser comporte trois étapes:

- \* Détermination des modèles simplifiés pour chaque plan de contreventement.
- \* Assemblage de tous les modèles simplifiés afin d'obtenir une structure simplifiée en trois dimensions. Calcul de la flèche latérale subit par cette structure ainsi que des charges revenant à chaque plan.
- \* Etude de chaque plan d'origine soumis au chargement qui lui est correspondant. C'est à dire détermination des efforts internes.

Afin de simplifier notre travail nous allons émettre certaines hypothèses.

### **1.3 Hypothèses simplificatrices**

- \* Les matériaux constituant la structure se comportent de manière élastique linéaire.
- \* La contribution des éléments non structuraux (maçonnerie, escaliers...) est négligée.
- \* Les dalles sont supposées rigides afin de permettre une distribution horizontale des charges entre les éléments verticaux selon leurs inerties.
- \* La rigidité à la torsion des poutres et des poteaux est négligée. Dans le programme

d'éléments finis utilisé dans les calculs, cette rigidité est prise très petite.

\* La déformation due au cisaillement est négligée dans les éléments horizontaux et verticaux. On néglige également la déformation axiale dans les éléments horizontaux. Pour cela, il sera nécessaire de donner des valeurs très grandes des différentes sections dans le programme d'éléments finis.

#### **1.4 Structures symétriques**

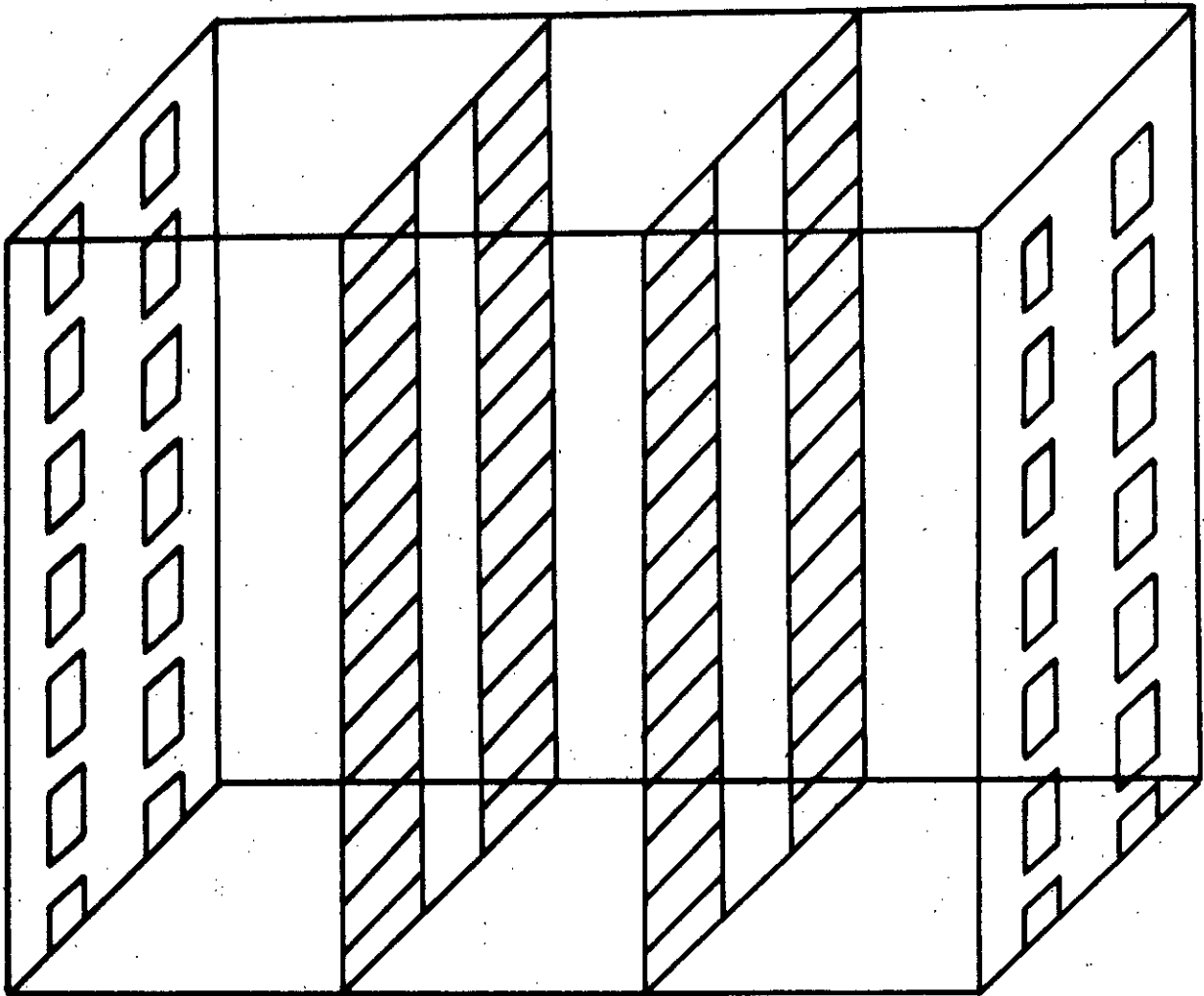
Une structure symétrique peut être simplifiée en étudiant seulement la moitié de celle-ci, soumise à un chargement réduit de moitié. De plus, si le chargement est symétrique la structure ne subira pas de torsion et pourra donc être étudiée en deux dimensions. Ce modèle rassemble les éléments de contreventement dans un même plan, reliés par l'intermédiaire de poutres infiniment rigides articulées aux deux extrémités, qui représentent l'effet de la dalle rigide.

Pour les structures non symétriques une étude complète en trois dimensions est nécessaire du fait de la présence de la torsion causée par un chargement latéral.

### **VI.2 EXEMPLE DE CALCUL N°1**

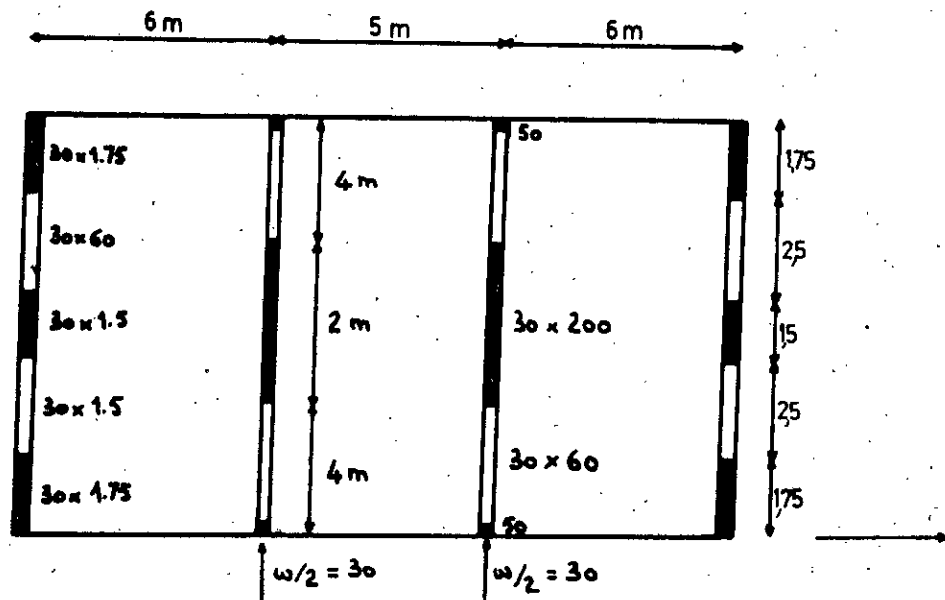
Soit la structure symétrique, schématisée sur la figure (VI.1), soumise à un chargement  $w = 60 \text{ KN/m}$ , composée de quatre plans de contreventement de trente étages chacun et ayant pour hauteur totale  $H = 90 \text{ m}$ . Le premier plan est un mur avec deux files d'ouvertures, le second est un mur central avec portiques rigides. Comme la structure est symétrique, nous pourrons donc l'étudier en deux dimensions comme indiqué sur la figure (VI.3).

Cherchons maintenant le modèle simplifié de chaque plan.



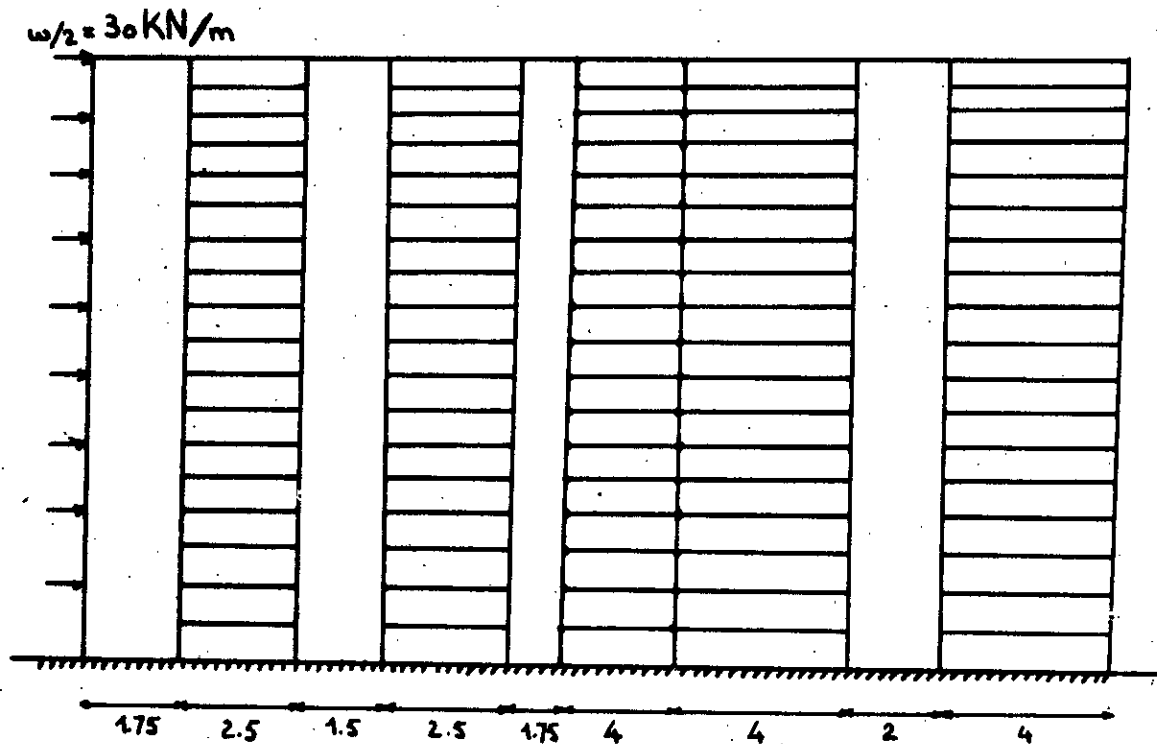
Structure détaillée en 3D

Figure VI.1



Vue en plan de la structure détaillée

Figure VI.2



Structure détaillée en 2D

Figure VI.3



## 2.1 Plan n° 1: Mur avec deux files d'ouvertures

Ce plan (figure VI.4) est constitué de:

\* Deux murs de 1,75 m de long et 0,3 m d'épaisseur, ayant donc pour section  $A_1 = 0,525$  m<sup>2</sup> et pour inertie  $I_1 = 0,134$  m<sup>4</sup>.

\* Un mur de 1,5 m de long et 0,3 m d'épaisseur, ayant donc pour section  $A_2 = 0,45$  m<sup>2</sup> et pour inertie  $I_2 = 0,0844$  m<sup>4</sup>.

\* Deux files de poutres de jonction de 0,3 m d'épaisseur et 0,6m de hauteur, ayant pour inertie  $I_b = 5,4 \cdot 10^{-3}$  m<sup>4</sup>. Leur section est infinie, car les poutres sont prises rigides axialement.

Le matériau utilisé ayant pour module d'élasticité :

$$E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$$

On applique une charge fictive  $f = 15$  KN/m à ce plan afin de calculer les paramètres adimensionnels  $K^2$  et  $\alpha H$ .

On obtient comme résultats :

$$K^2 = 1,0198$$

$$\alpha H = 30,558$$

Le modèle simplifié ayant le même comportement il aura donc par conséquent les mêmes paramètres adimensionnels. A partir de ces derniers, nous déterminerons les caractéristiques  $I_c$ ,  $A_c$  et  $I_b$  du portique rigide équivalent, de longueur  $l = 10$  m. Pour cela, nous établirons un système de deux équations à deux inconnues  $A_c$  et  $I_b$ .  $I_c$  étant fixé à  $1/2$

fixé à  $1/2 \sum I_i = 0,1762 \text{ m}^4$ , pour que la structure garde les mêmes rigidités "EI", "EA<sub>c</sub>" et "GA".

$$\alpha H = H \sqrt{\frac{GA}{EI}} \quad (\text{VI.1})$$

$$K^2 = 1 + \frac{EI}{EA_c^2} \quad (\text{VI.2})$$

Sachant que la structure simplifiée est un portique rigide la rigidité au cisaillement aura pour valeur:

$$GA = \frac{12E}{\frac{h}{\sum \frac{I_{ci}}{h}} + \frac{h}{\sum \frac{I_{bi}}{l_i}}} \quad (\text{VI.3})$$

Après simplifications on obtient le système suivant:

$$\frac{10800}{1 + \frac{20}{3} \frac{I_c}{I_b}} = (\alpha H)^2 \quad (\text{VI.4})$$

$$1 + \frac{I_c}{25A_c} = K^2$$

La résolution de ce système nous donne:

$$A_c = 0,356 \text{ m}^2$$

$$I_b = 0,111 \text{ m}^4$$

## 2.2 Plan n°2 : Mur central avec portiques rigides

Ce plan (figure VI.5) est constitué de:

- \* Deux poteaux de 0,3 m x 0,5 m, ayant donc pour section  $A_p = 0,15 \text{ m}^2$  et pour inertie  $I_p = 3,125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ .
- \* Un mur de 2 m de long et 0,3 m d'épaisseur, ayant donc pour section  $A_3 = 0,6 \text{ m}^2$  et pour inertie  $I_3 = 0,2 \text{ m}^4$ .
- \* Deux files de poutres de jonction de 0,3 m d'épaisseur et 0,6m de hauteur, ayant pour inertie  $I_b = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ . Leur section est infinie, car les poutres sont prises rigides axialement.

Le matériau utilisé ayant pour module d'élasticité:

$$E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$$

On applique une charge fictive  $f = 15 \text{ KN/m}$  à ce plan afin de calculer les paramètres adimensionnels  $K^2$  et  $\alpha H$ .

On obtient comme résultats:

$$K^2 = 1,0274$$

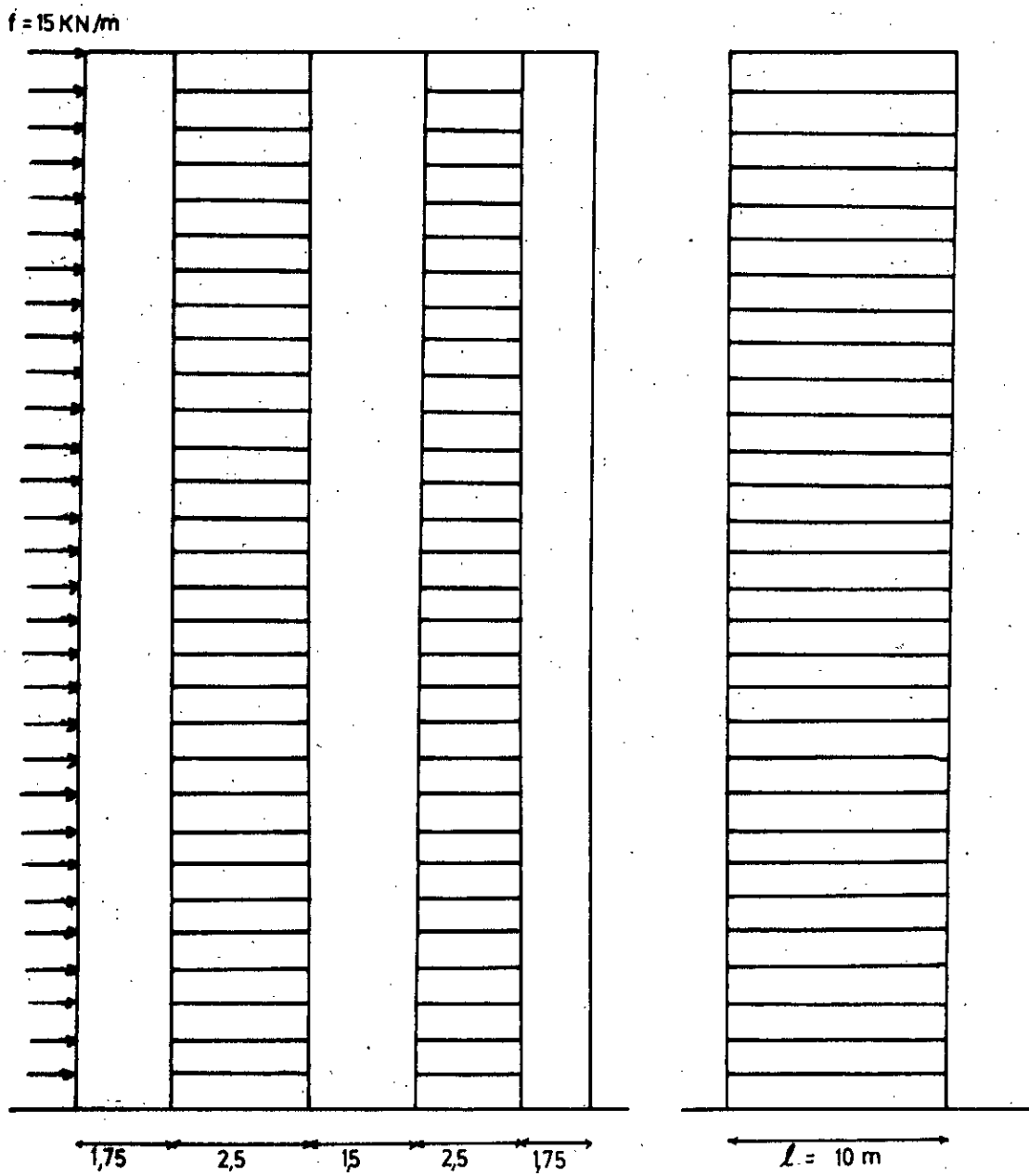
$$\alpha H = 22,33$$

En prenant  $I_c = 1/2 \sum I_i = 0,1031 \text{ m}^4$  et en résolvant le système (VI.4) on obtient les nouvelles caractéristiques du modèle et qui sont:

$$I_c = 0,1031 \text{ m}^4$$

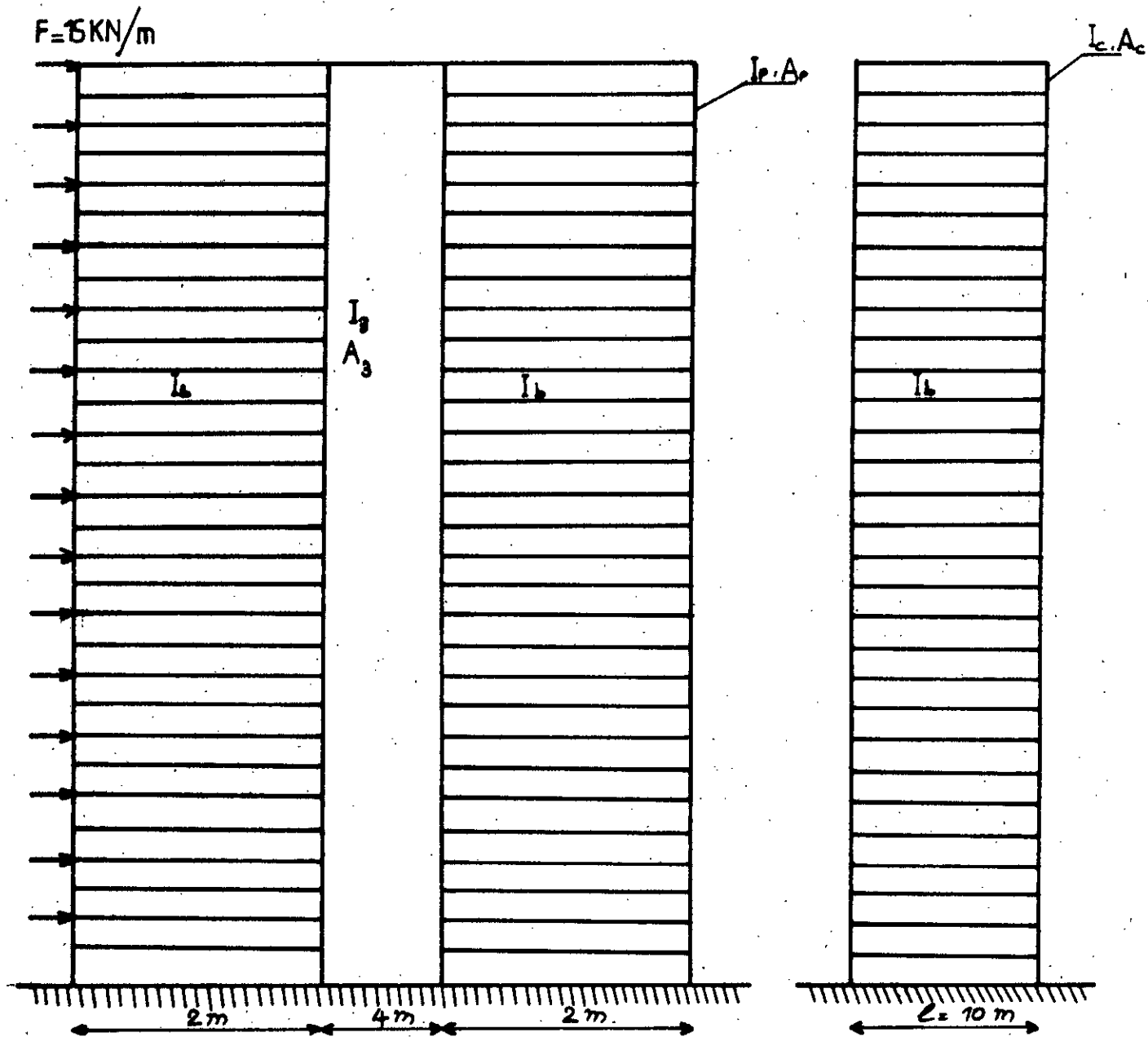
$$A_c = 0,151 \text{ m}^2$$

$$I_b = 0,0333 \text{ m}^4$$



Mur avec deux files d'ouvertures et son modèle  
simplifié équivalent

Figure VI.4



Mur centrale avec portique rigide et son modèle  
simplifié équivalent

Figure VI.5

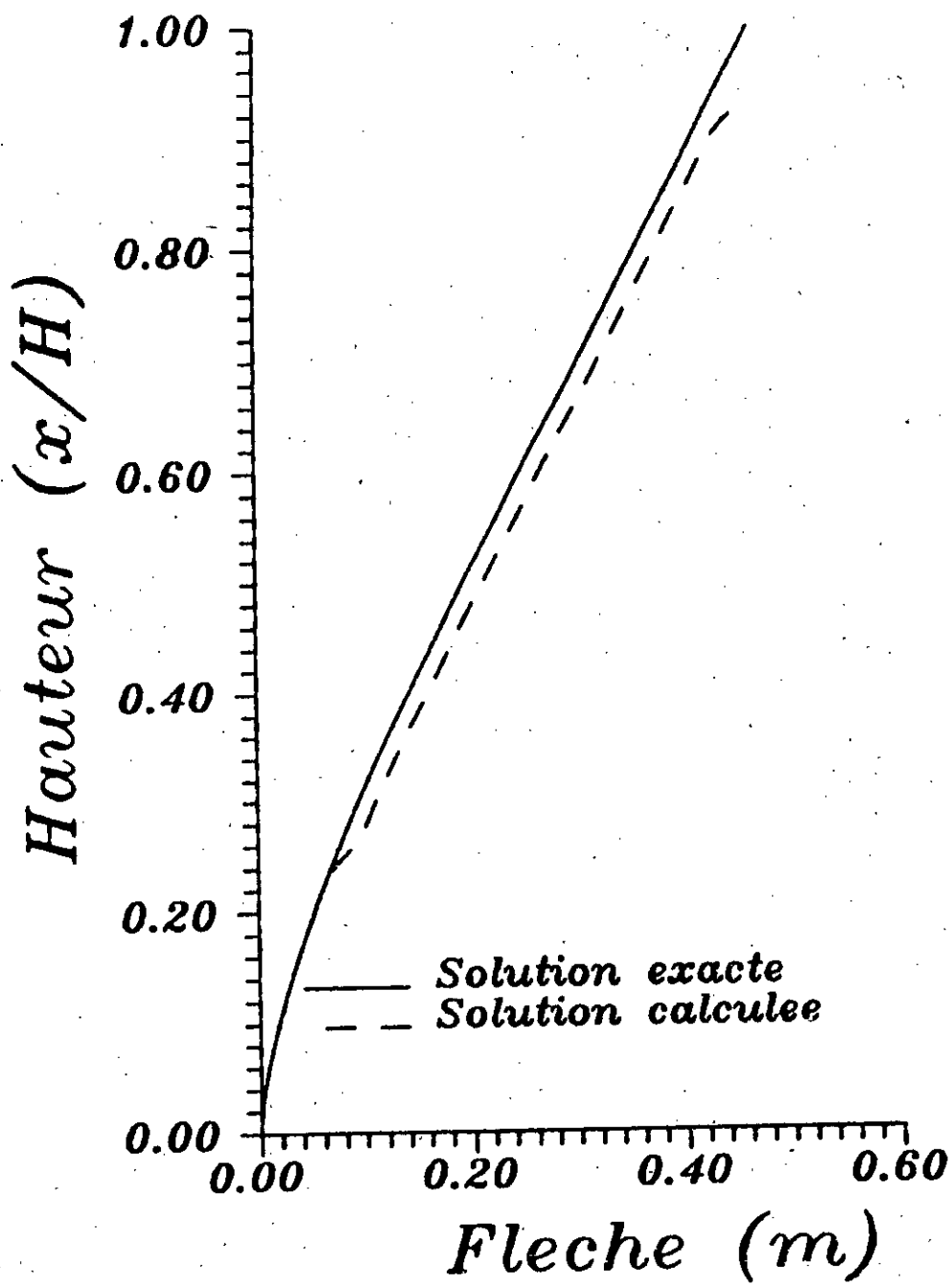
### **2.3 Obtention du modèle simplifié équivalent**

Après avoir déterminé les modèles simplifiés de chaque plan, nous les assemblerons en une structure en trois dimensions (figure VI.7). Comme la structure est symétrique, elle sera remplacée comme il a été vu dans le paragraphe (VI.1.4) par un modèle simplifié en deux dimensions (figure VI.8) que l'on utilisera pour l'étude de la structure détaillée.

Une étude comparative entre les flèches obtenues à partir du modèle simplifié et du modèle détaillé est explicitée dans le tableau 1. On pourra également représenter cette comparaison sur un graphe (figure VI.6) contenant les deux courbes de la flèche du modèle simplifié et du modèle détaillé en fonction de la hauteur. A partir des résultats obtenus, un calcul de l'erreur nous permettra d'estimer celle-ci à 1% .

**Tableau n°1:**

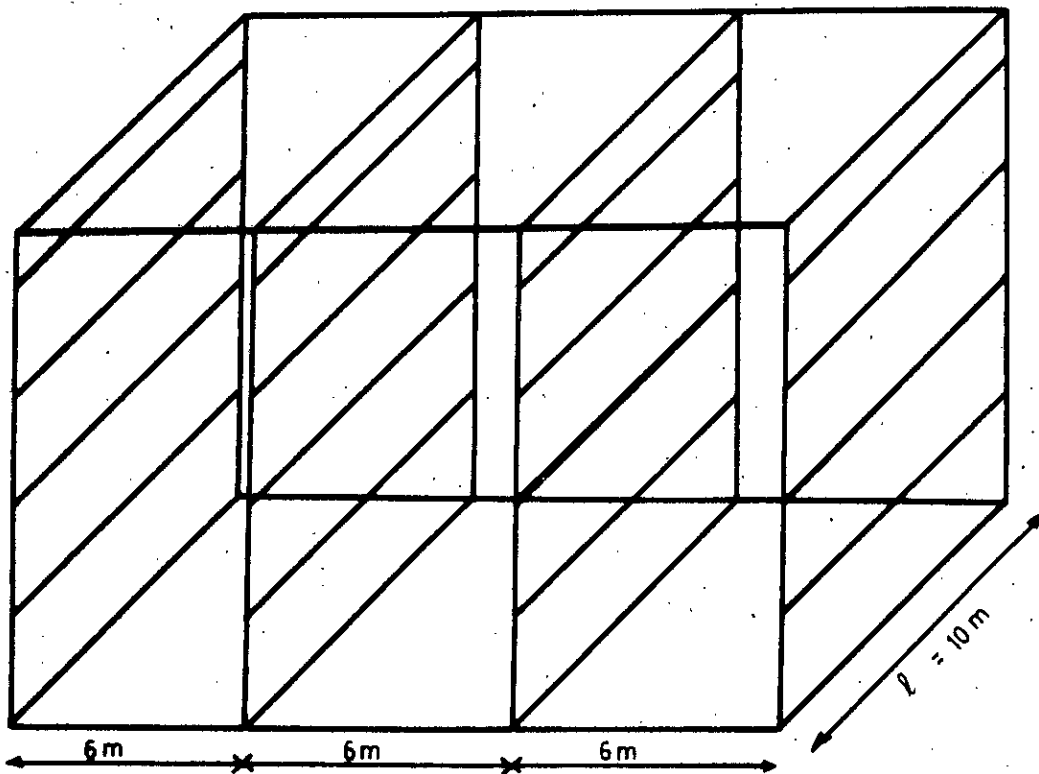
x (m)	Flèche de la structure (m)	Flèche du modèle (m)	x (m)	Flèche de la structure (m)	Flèche du modèle (m)
90	0,000	0,000	42	0,211	0,212
87	0,279 10 <sup>-2</sup>	0,280 10 <sup>-2</sup>	39	0,229	0,230
84	0,922 10 <sup>-2</sup>	0,927 10 <sup>-2</sup>	36	0,247	0,248
81	0,178 10 <sup>-1</sup>	0,179 10 <sup>-1</sup>	33	0,265	2,266
78	0,279 10 <sup>-1</sup>	0,281 10 <sup>-1</sup>	30	0,284	2,284
75	0,392 10 <sup>-1</sup>	0,395 10 <sup>-1</sup>	27	0,302	0,303
72	0,516 10 <sup>-1</sup>	0,519 10 <sup>-1</sup>	24	0,320	0,321
69	0,649 10 <sup>-1</sup>	0,652 10 <sup>-1</sup>	21	0,338	0,339
66	0,789 10 <sup>-1</sup>	0,794 10 <sup>-1</sup>	18	0,356	0,357
63	0,937 10 <sup>-1</sup>	0,942 10 <sup>-1</sup>	15	0,374	0,375
60	0,109	0,110	12	0,392	0,392
57	0,125	0,126	9	0,409	0,410
54	0,142	0,142	6	0,426	0,427
51	0,159	0,160	3	0,444	0,444
48	0,176	0,177	0	0,461	0,461
45	0,193	0,194			



Courbe comparative de la flèche latérale

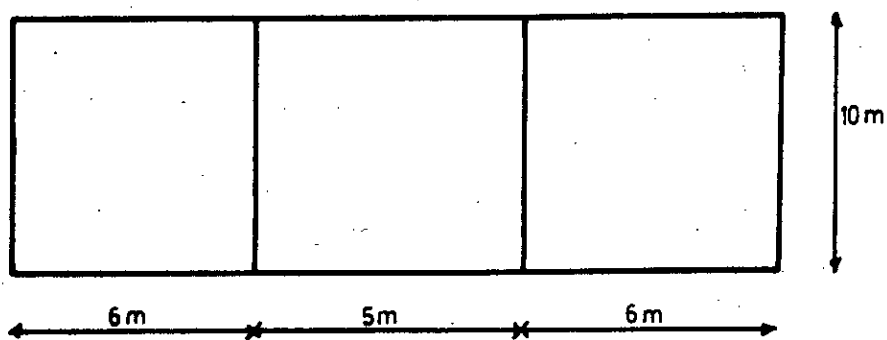
Figure VI.6





modèle simplifié en 3D

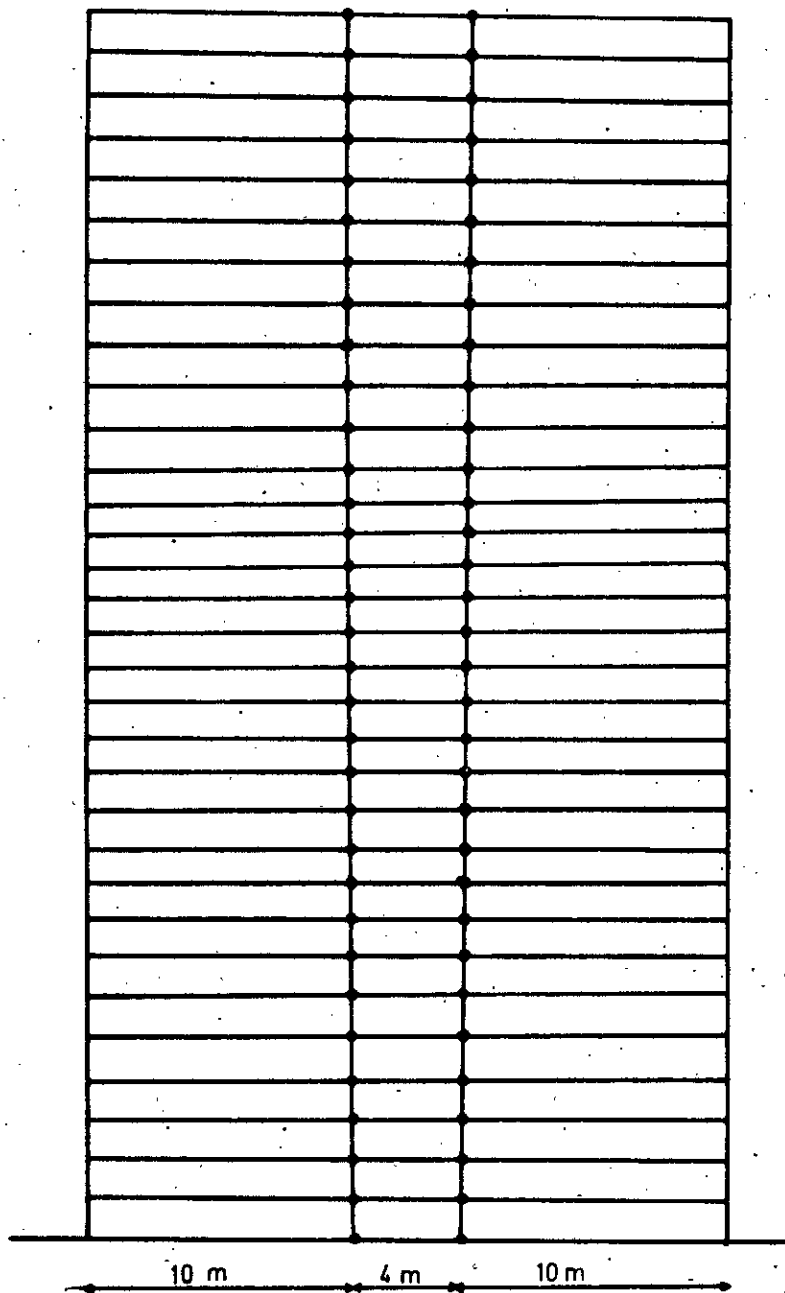
(a)



Vue en plan du modèle simplifié en 3D

(b)

Figure VI.7



Modèle simplifié en 2D

Figure VI.8

## 2.4 Calcul des efforts internes

Après l'élaboration du modèle simplifié, on lui applique un chargement égal à celui auquel est soumise la structure détaillée, on obtient ainsi la charge que reçoit chaque plan de contreventement dans le modèle. Ensuite chaque charge est appliquée au plan de contreventement détaillé qui lui est correspondant, afin de déterminer la valeur des efforts internes.

Dans un souci de vérification, nous ferons une comparaison entre l'effort repris par chaque plan de contreventement simplifié et chaque plan de contreventement détaillé. Les résultats de cette vérification sont consignés dans le tableau n°2.

Les résultats obtenus pour les efforts internes sont également vérifiés. Pour cela, on compare les valeurs des efforts internes (effort axial, effort tranchant et moment fléchissant) d'un certain élément dans chaque plan de contreventement, avec les valeurs calculées pour ce même élément dans la structure détaillée.

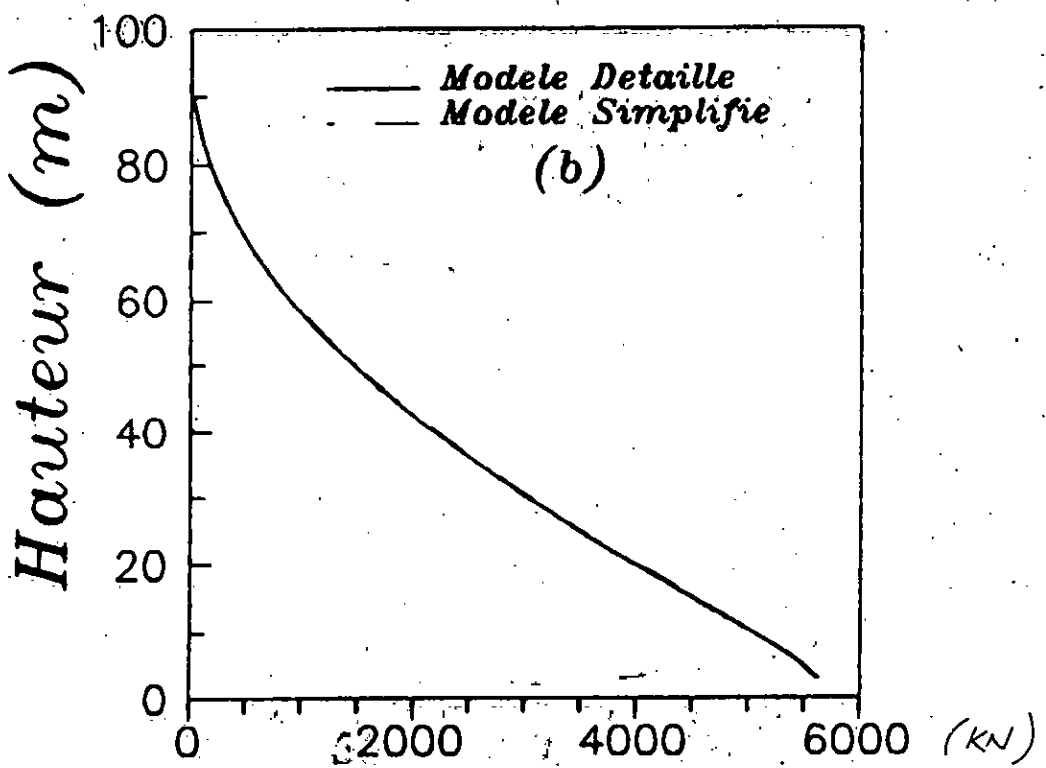
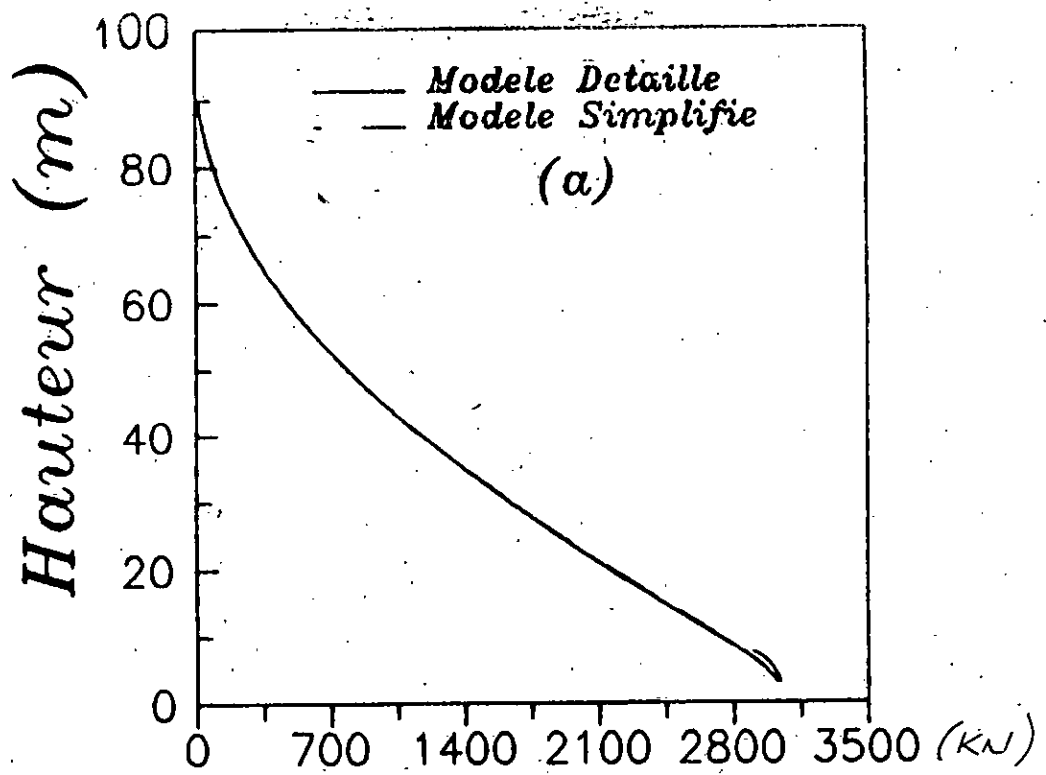
Les détails de cette comparaison sont illustrés sur les figures (VI.9), (VI.10) et (VI.11).

L'erreur obtenue pour chacun de ces efforts est la suivante:

- \* Effort axial:  $E = 3,4 \%$
- \* Effort tranchant:  $E = 6,5 \%$
- \* Moment fléchissant:  $E = 3,3 \%$

Tableau n°2:

Etage	Charge (ext)	Plan M D	n°1 M S	Plan M D	n°2 M S	Etage	Charge (ext)	Plan M D	n°1 M S	Plan M D	n°2 M S
1	2655	1788	1782	866,8	872	16	1305	932	932	370,4	372
2	2565	1860	1850	705,6	714	17	1215	867	866	348,2	350
3	2475	1823	1818	651,8	658	18	1125	801	800	325	326
4	2385	1766	1762	620	624	19	1035	733	734	301,6	302
5	2295	1697	1694	597	602	20	945	668	668	277,2	278
6	2205	1626	1622	579	582	21	855	602	602	253,8	254
7	2115	1553	1550	561,4	564	22	765	535	536	229,4	230
8	2025	1482	1478	542,4	546	23	675	469	470	206	206
9	1935	1412	1410	523,8	526	24	585	404	404	182,6	182
10	1845	1341	1340	503,8	506	25	495	335,4	336	158,2	158,2
11	1755	1272	1270	482,6	484	26	405	270,4	270	134,9	134,4
12	1665	1203	1202	462,2	464	27	315	203,5	204	111,5	110,6
13	1575	1135	1134	439,4	442	28	225	136,6	137	88,5	88
14	1485	1068	1066	416,6	418	29	135	72,1	74,8	63	60,2
15	1395	1000	1000	394,6	396	30	45	-2,32	-5,16	47,3	50,2



(a) Effort axial dans les poteaux de rive du plan 2

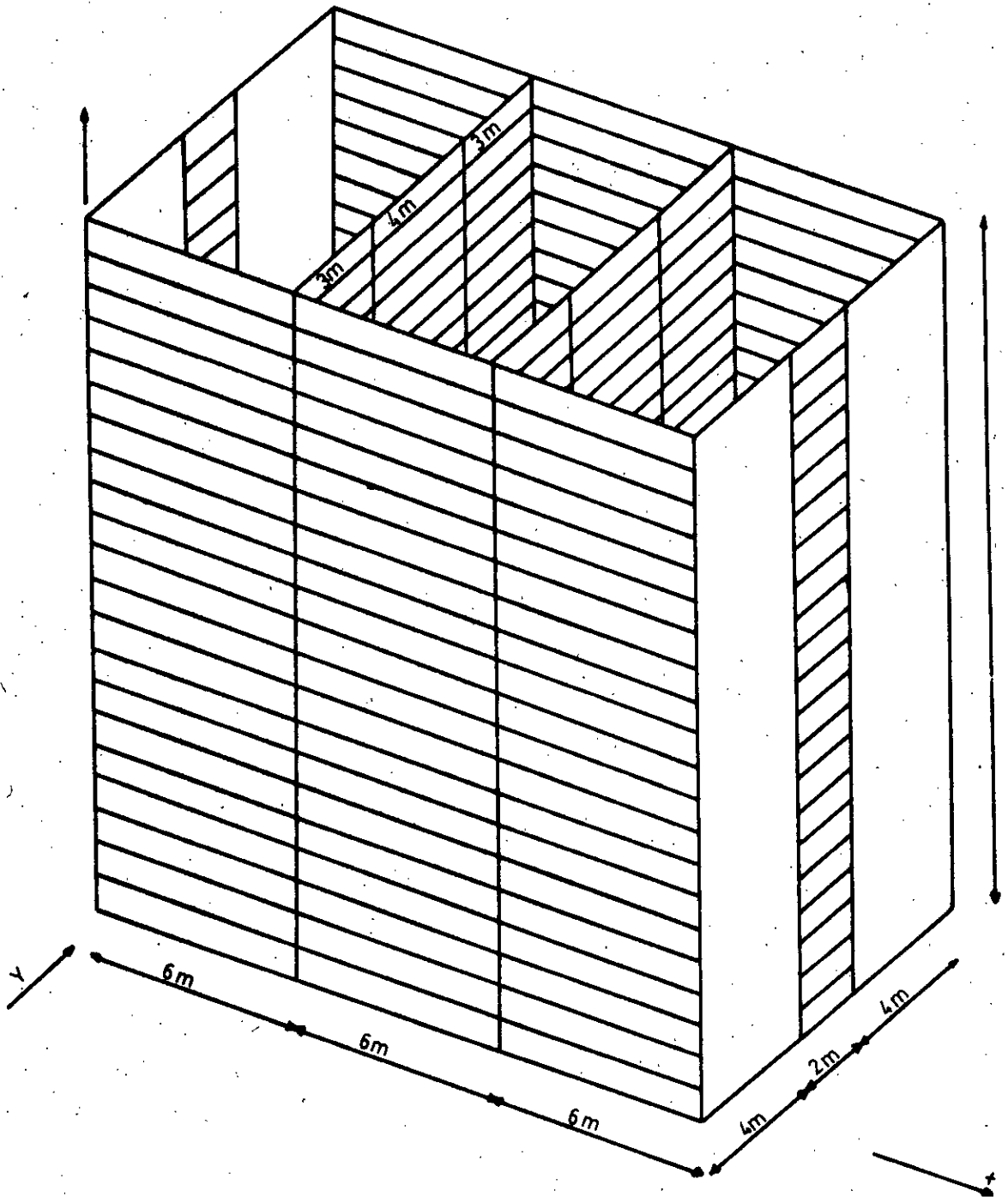
(b) Effort axial dans le mur central du plan 1

Figure VI.9

### **VI.3 EXEMPLE DE CALCUL N°2**

Soit la structure non symétrique, schématisée sur la figure (VI.12), soumise à un chargement  $w = 45 \text{ KN/m}$ , composée de quatre plans de contreventement de vingt-cinq étages chacun et ayant pour hauteur totale  $H = 75 \text{ m}$ . Le premier plan est un mur jumelé, le second et le troisième sont des portiques rigides identiques le quatrième plan est un mur jumelé identique au premier plan, avec cependant le double de la section et de l'inertie. La structure sera étudiée en trois dimensions.

Cherchons maintenant le modèle simplifié de chaque plan.



Structure détaillée en 3D

Figure VI.12

### 3.1 Plan n°1 : Murs jumelés n° 1

Ce plan (figure VI.13) est constitué de:

\* deux murs de 4 m de long et 0,6 m d'épaisseur, ayant donc pour section  $A_1 = 2,4 \text{ m}^2$  et pour inertie  $I_1 = 3,2 \text{ m}^4$ .

\* une file de poutres de jonction de 0,6 m d'épaisseur et 0,5 m de hauteur, ayant pour inertie  $I_b = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ . Leur section est infinie, car les poutres sont prises rigides axialement.

Le matériau utilisé ayant pour module d'élasticité:

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$$

On applique une charge fictive  $f = 15 \text{ KN/m}$  à ce plan afin de calculer les paramètres adimensionnels  $K^2$  et  $\alpha H$ .

On obtient comme résultats:

$$K^2 = 1,148$$

$$\alpha H = 9,94$$

En prenant  $I_c = 1/2 \sum I_i = 3,2 \text{ m}^4$  et en résolvant le système (VI.4) on obtient les nouvelles caractéristiques du modèle et qui sont:

$$I_c = 3,2 \text{ m}^4$$

$$A_c = 0,869 \text{ m}^2$$

$$I_b = 0,27 \text{ m}^4.$$



### 3.2 Plan n°2 et n°3: Portiques rigides

Ce plan (figure VI.14) est constitué de:

- \* Deux poteaux de rive de 0,6 m x 0,5 m, ayant donc pour section  $A_2 = 0,3 \text{ m}^2$  et pour inertie  $I_2 = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ .
- \* Deux poteaux centraux de 0,6m x 0,6 m, ayant donc pour section  $A_3 = 0,36 \text{ m}^2$  et pour inertie  $I_3 = 10,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ .
- \* Trois files de poutres de jonction de 0,6 m d'épaisseur et 0,5m de hauteur, ayant pour inertie  $I_b = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ . Leur section est infinie car les poutres sont prises rigides axialement.

Le matériau utilisé ayant pour module d'élasticité:

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$$

On applique une charge fictive  $f = 15 \text{ KN/m}$  à ce plan afin de calculer les paramètres adimensionnels  $K^2$  et  $\alpha H$ .

On obtient comme résultats:

$$K^2 = 1.0019$$

$$\alpha H = 60.16$$

Le modèle simplifié ayant le même comportement il aura donc par conséquent les mêmes paramètres adimensionnels. A partir de ces derniers, nous déterminerons les caractéristiques  $I_c$ ,  $A_c$  et  $I_b$  du portique rigide équivalent, de longueur  $l = 10 \text{ m}$ .

En procédant de la même manière que pour les exemples précédents, on obtient les résultats suivants:

$$A_c = 0,1788 \text{ m}^2$$

$$I_b = 28,645 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_c = 8,525 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

### 3.3 Plan n°4: Murs jumelés n°2

Ce plan (figure VI.13) est constitué de:

\* deux murs de 4 m de long et 1,2 m d'épaisseur, ayant donc pour section  $A_1 = 4,8 \text{ m}^2$  et pour inertie  $I_1 = 6,4 \text{ m}^4$ .

\* une file de poutres de jonction de 0,6 m d'épaisseur et 0,5 m de hauteur, ayant pour inertie  $I_b = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ . Leur section est infinie car les poutres sont prises rigides axialement.

Le matériau utilisé ayant pour module d'élasticité:

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$$

On applique une charge fictive  $f = 15 \text{ KN/m}$  à ce plan afin de calculer les paramètres adimensionnels  $K^2$  et  $\alpha H$ .

On obtient comme résultats:

$$K^2 = 1,148$$

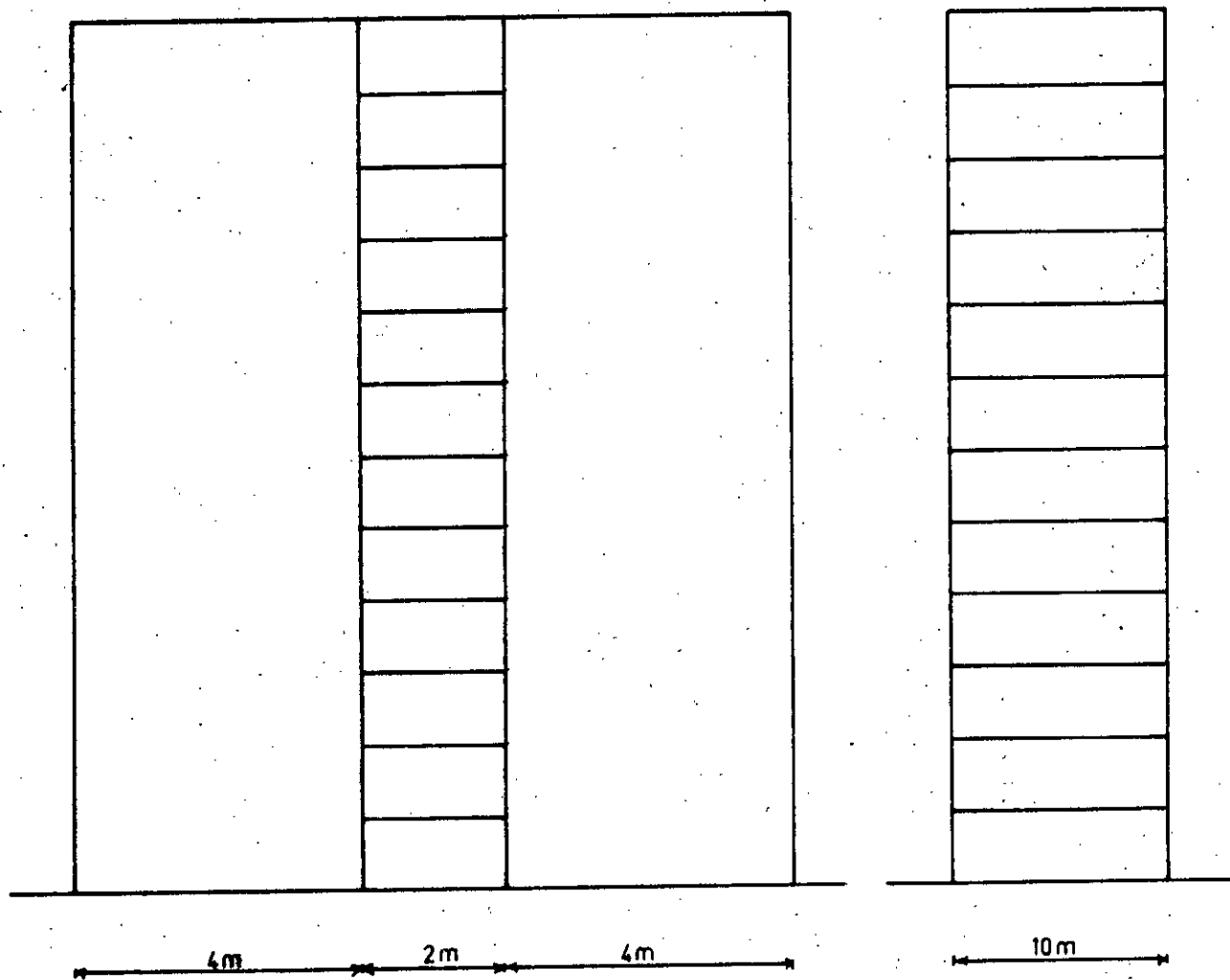
$$\alpha H = 7,03$$

En prenant  $I_c = 1/2 \sum I_i = 6,4 \text{ m}^4$  et en résolvant le système (VI.4) on obtient les nouvelles caractéristiques du modèle et qui sont:

$$I_c = 6,4 \text{ m}^4$$

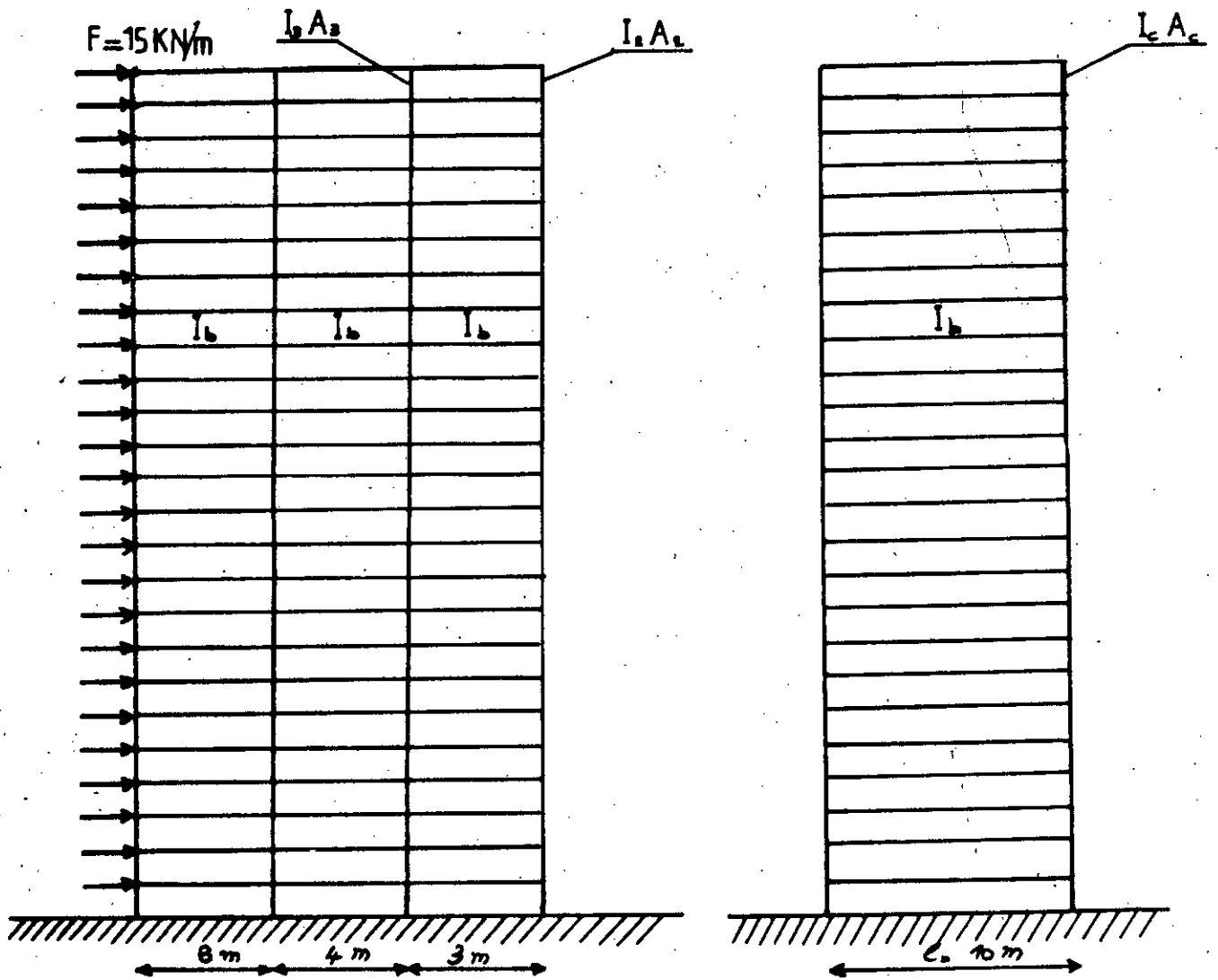
$$A_c = 1,72 \text{ m}^2$$

$$I_b = 0,283 \text{ m}^4.$$



Mur jumelé et son modèle  
simplifié équivalent

Figure VI.13



Portique rigide et son modèle  
simplifié équivalent

Figure VI.14

### **3.4 Obtention du modèle simplifié équivalent**

Après avoir déterminé les modèles simplifiés de chaque plan, nous les assemblons en une structure en trois dimensions (figure VI.7.a).

Une étude comparative entre les flèches obtenues à partir du modèle simplifié et du modèle détaillé est explicitée dans le tableau n°3. A partir des résultats obtenus, un calcul de l'erreur nous permettra d'estimer celle-ci à 1% .

Tableau n°3:

Mur jumelé  
n°2

Etage N°	Struct (mm)	Modèle (mm)
1	0,2399	0,2382
2	0,8848	0,8783
3	1,844	1,829
4	3,047	3,022
5	4,440	4,402
6	5,982	5,930
7	7,640	7,572
8	9,385	9,30
9	11,20	11,09
10	13,06	12,94
11	14,95	14,81
12	16,86	16,71
13	18,79	18,61
14	20,71	20,52
15	22,62	22,41
16	24,52	24,29
17	26,39	26,16
18	28,24	27,99
19	30,06	29,80
20	31,85	31,57
21	33,61	33,32
22	35,33	35,03
23	37,02	36,71
24	38,69	38,37
25	40,35	40,01

Portiques rigides

Struct (mm)	Modèle (mm)	Struct (mm)	Modèle (mm)
0,2922	0,2912	0,3445	0,3441
1,072	1,068	1,260	1,258
2,227	2,217	2,610	2,606
3,672	3,655	4,298	4,289
5,346	5,319	6,258	6,236
7,201	7,162	8,419	8,393
9,199	9,145	10,76	10,72
11,31	11,24	13,23	13,18
13,51	13,42	15,82	15,75
15,78	15,67	18,58	18,41
18,09	17,97	21,24	21,13
20,45	20,30	24,03	23,89
22,82	22,65	26,86	26,70
25,21	25,02	29,70	29,52
27,59	27,39	32,56	32,35
29,97	29,74	35,42	35,18
32,33	32,07	38,26	37,99
34,67	34,39	41,06	40,79
36,38	36,68	43,89	43,56
39,26	38,94	46,66	46,30
41,50	41,16	49,40	49,01
43,72	43,36	52,11	51,68
45,90	45,52	54,78	54,32
48,06	47,65	57,42	56,93
50,20	49,77	60,04	59,52

Mur jumelé  
n°1

Struct (mm)	Modèle (mm)
0,3967	0,397
1,447	1,448
2,993	2,994
4,923	4,922
7,158	7,152
9,638	9,625
12,32	12,29
15,16	15,12
18,13	18,08
21,21	21,14
24,38	24,28
27,61	27,49
30,89	30,74
34,20	34,02
37,53	37,32
40,87	40,62
44,20	43,91
47,51	47,19
50,81	50,44
54,07	53,67
57,30	56,86
60,49	60,01
63,65	63,13
66,78	66,22
69,89	69,44

### **3.5 Calcul des efforts internes**

Les résultats obtenus pour les efforts internes sont également vérifiés. Pour cela, on compare les valeurs des efforts internes (effort axial, effort tranchant et moment fléchissant) d'un certain élément dans chaque plan de contreventement avec les valeurs calculées pour ce même élément dans la structure détaillée.

L'erreur obtenue pour chacun de ces efforts est la suivante:

- \* Effort axial:  $E = 2,1 \%$
- \* Effort tranchant:  $E = 1 \%$
- \* Moment fléchissant:  $E = 1\%$

## **CHAPITRE VII**

# **ETUDE D'UNE STRUCTURE DE TYPE MURS JUMELÉS AVEC SECTION VARIABLE**

### **VII.1 INTRODUCTION ET BUT**

Pour de très grands bâtiments de type "Murs jumelés", il peut être avantageux du point de vue économique, de réduire l'épaisseur des murs et cela proportionnellement à la hauteur de la structure.

A partir de l'analyse que nous allons faire pour des structures de type murs jumelés, il sera possible de la même manière qu'en chapitre (IV) d'effectuer une généralisation à d'autres types de structures à savoir portiques rigides, portiques articulés ou encore structures mixtes.

Le but de ce chapitre est donc de présenter une méthode d'analyse du comportement d'une structure soumise à un chargement latéral et présentant des changements brusques de section au niveau des murs ou des poutres de connexion (joignant deux murs). Cette méthode sera bien entendu basée sur la technique des milieux continus. Il est à noter qu'à l'origine, cette méthode a été créée pour traiter les problèmes où l'on avait une seule variation de section à un certain niveau. Nous



élargirons ici cette méthode afin de permettre l'incorporation de l'effet de plusieurs variations [3], [9] et [10].

Pour commencer, nous étudierons un mur jumelé présentant deux changements brusques de section délimitant ainsi trois régions différentes les unes des autres. Où, la première région représente la zone de base ayant une extrémité fixe (encastrement aux fondations), la seconde est considérée comme étant une zone intermédiaire et enfin la troisième étant la zone supérieure avec extrémité libre. Il est à noter qu'une structure présentant plus de deux changements de section possédera plusieurs zones intermédiaires.

Après avoir fait l'étude de cette structure de base à savoir l'établissement des équations régissant la flèche, il sera aisé de faire une expansion aux structures qui présentent plus de deux changements de section.

## VII.2. METHODE D'ANALYSE ET HYPOTHESES DE CALCUL

considérons un mur jumelé comportant une seule file d'ouvertures et présentant deux changements brusques de section qui entraîneront comme il a été vu ci-dessus l'existence de trois régions du mur ayant pour hauteurs respectives  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  (voir figure VII.1). Les sections des murs et des poutres d'une même région sont constantes le long de cette dernière et pour avoir un cas plus général nous supposerons que les trois régions sont soumises à des chargements différents, ayant pour intensités  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$ .

Le but de notre travail est de déterminer l'équation de la flèche latérale d'un mur jumelé. Pour cela, nous émettrons certaines hypothèses de base qui ont d'ailleurs déjà été émises pour l'élaboration de l'équation de la flèche d'un mur jumelé uniforme. Les hypothèses fondamentales faites dans la technique des milieux continus pour un mur

jumelé à section variable, sont résumées comme suit:

\* Les murs et les poutres gardent les mêmes propriétés le long d'une même région (i):

- Sections:  $\Lambda_{i1}$ ,  $\Lambda_{i2}$  et  $\Lambda_{bi}$ . Sauf les poutres au niveau du changement de région et la dernière poutre de la région d'extrémité supérieure.

- Moments d'inertie:  $I_{i1}$ ,  $I_{i2}$  et  $I_{bi}$ . Sauf pour les poutres citées ci-dessus.

- Hauteur d'étage :  $h_i$ .

- Matériaux :  $E_i$ .

\* Les fondations sont rigides, nous avons donc un encastrement parfait qui nous permet d'écrire que:

$dY_1/dx_1 = 0$  et  $Y_1 = 0$  où  $Y_1$  représente l'équation de la flèche à laquelle est soumise la première région.

\* Les sections des murs qui sont initialement planes doivent le rester après application des efforts. C'est à dire qu'on travaille dans le domaine élastique.

\* Les poutres sont infiniment rigides axialement de telle manière que les deux murs aient la même flèche latérale.

\* Les poutres présentent en leur milieu un point de contraflexion.

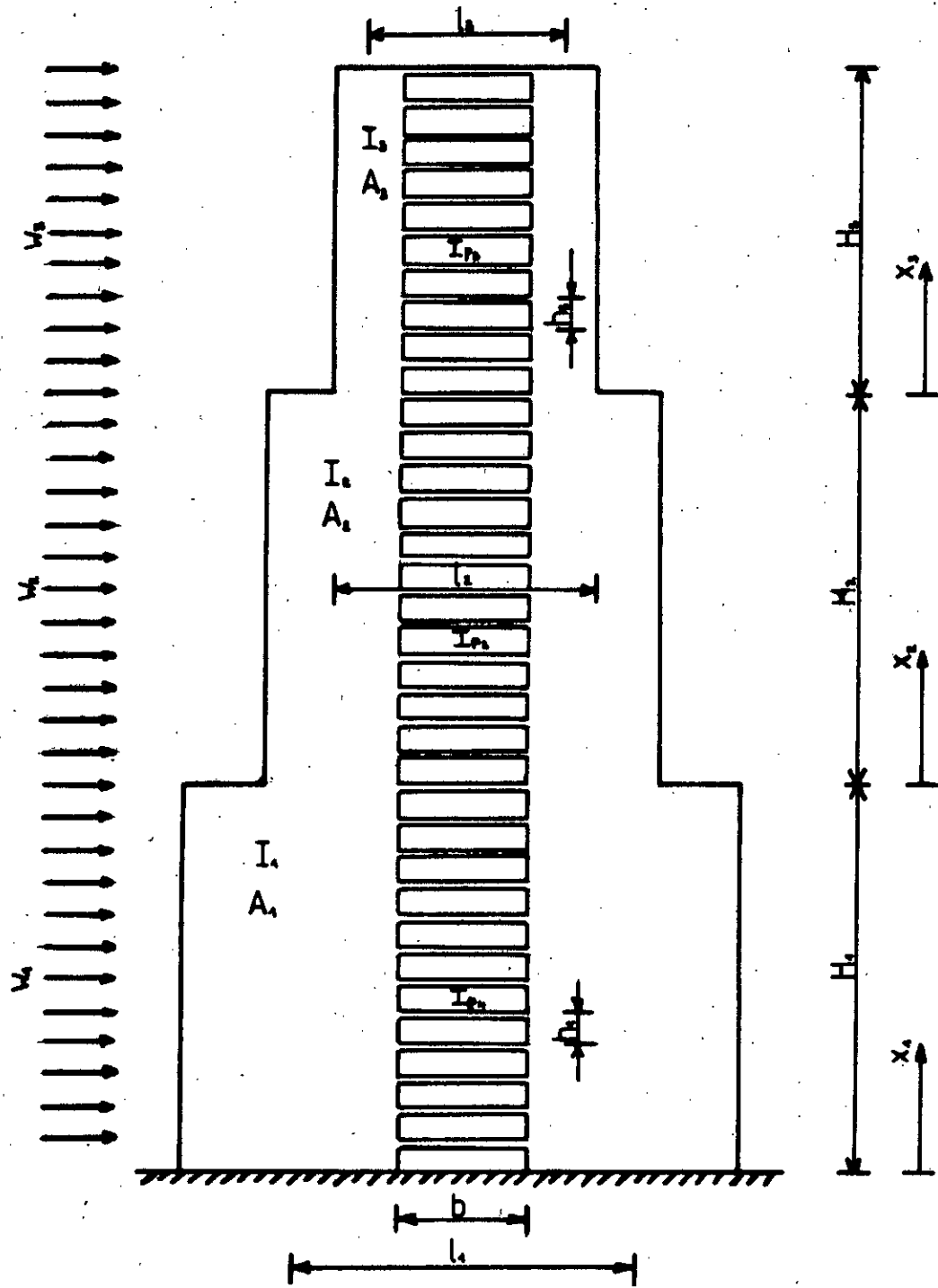
\* Au niveau d'une même région, on remplace les poutres d'inertie  $I_{bi}$  par un milieu continu et uniforme d'inertie  $I_{bi}/h_i$  où  $h_i$  représente la hauteur d'étage.

Pour cela, il nous faut supposer que la poutre d'extrémité de la dernière région, a une inertie égale à la moitié de l'inertie des poutres de cette même région et que les poutres se trouvant au niveau de la frontière entre deux régions, ont une inertie égale à la moyenne des inerties des régions se situant au dessous et au dessus. Cette dernière hypothèse est justifiée au vu du grand nombre de poutres présentes dans un bâtiment

à grande hauteur, elle ne compromet donc pas l'exactitude des résultats que nous obtiendrons. Du fait de cette dernière hypothèse, on remplacera, la distribution discrète des efforts tranchants au niveau des poutres, par une distribution continue d'intensité  $q_i(x_i)$ .

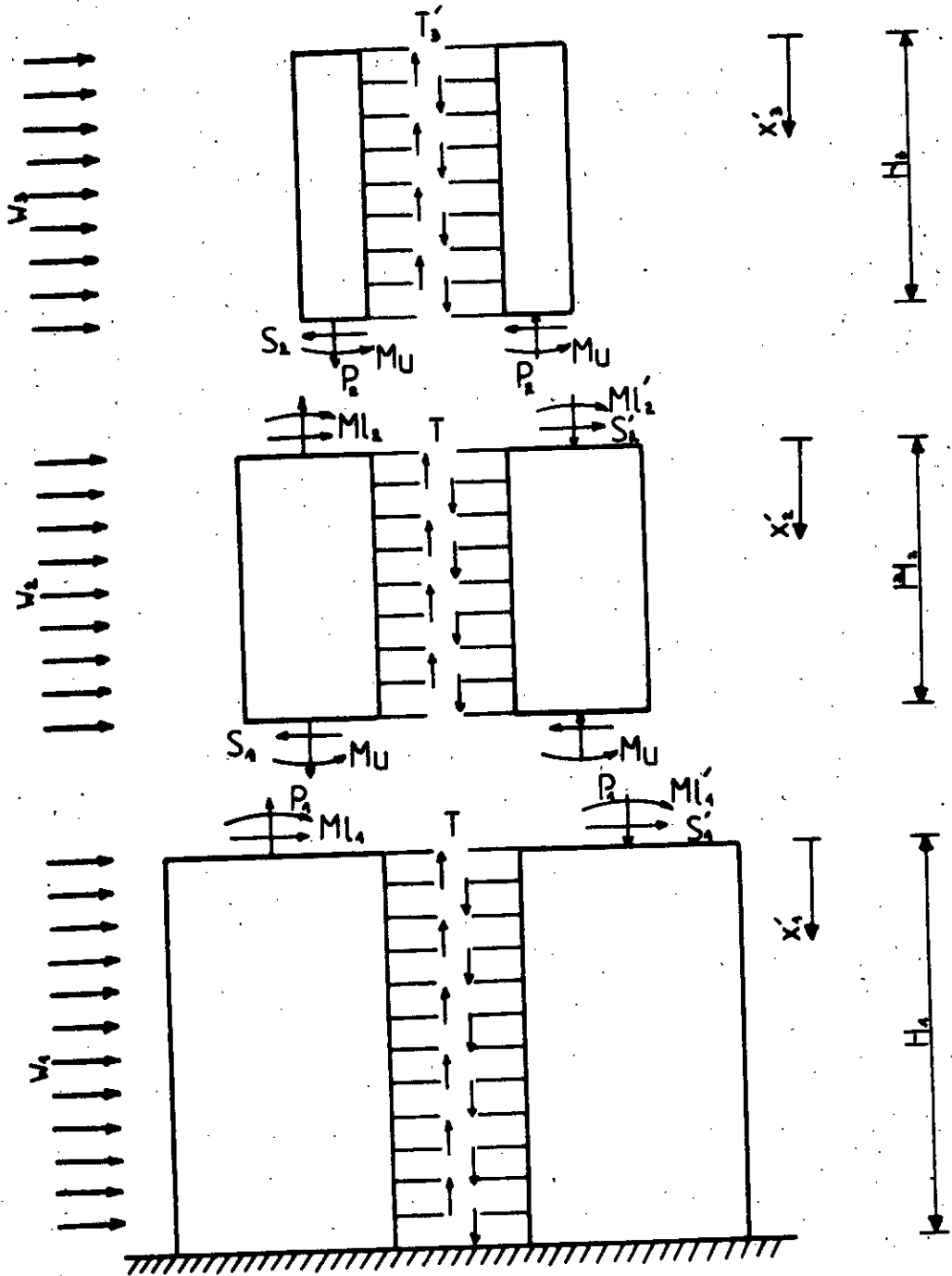
En considérant que chaque région est indépendante et en faisant une coupure au niveau de chacune d'elle on obtiendra les efforts internes comme représentés sur la figure (VII.2). Où:

- \*  $S_1, S'_1$  et  $S_2, S'_2$  sont les efforts tranchants.
- \*  $M_1, M'_1$  et  $M_2, M'_2$  sont les moments fléchissants.
- \*  $P_1$  et  $P_2$  sont les efforts normaux.



Mur jumelé avec section variable

Figure VII.1



Systeme equivalent

Figure VII.2

Afin de satisfaire l'équilibre entre le chargement extérieur et les efforts internes:

Ecrivons les équations suivantes:

Pour ce qui est des efforts tranchants:

$$w_3 H_3 = S_2 + S_2' \quad (\text{VII.1})$$

$$w_3 H_3 + w_2 H_2 = S_1 + S_1' \quad (\text{VII.2})$$

Pour ce qui est des efforts normaux:

$$P_2 = \int_0^{H_3} q(x_3) dx_3 \quad (\text{VII.3})$$

$$P_1 = P_2 + \int_0^{H_3} q_2(x_2) dx_2 \quad (\text{VII.4})$$

Pour ce qui est des moments fléchissants:

$$\frac{1}{2} w_3 H_3^2 = M_{u_2} + M_{u_2}' + P_2 l_3 = M l_2 + M l_2' + P_2 l_2 \quad (\text{VII.5})$$

$$\frac{1}{2} w_3 H_3^2 + \frac{1}{2} w_2 H_2^2 + S_2' H_2 + S_2 H_2 = M_{u_1} + M_{u_1}' + P_1 l_2 = M l_1 + M l_1' + P_1 l_1 \quad (\text{VII.6})$$

Chaque segment de mur se déplace indépendamment des autres sous l'effet du chargement qui lui est appliqué et cause ainsi des déformations relatives au niveau des murs et des poutres, déformations qui seront éliminées en établissant l'équation de compatibilité. Nous serons donc amenés à formuler trois équations de compatibilité, pour les différentes régions du mur jumelé et par l'intermédiaire de l'équation différentielle du tranchant  $q_i(x_i)$  et des conditions aux limites, nous établirons l'équation régissant la flèche latérale de chaque région.

## VII.3 ANALYSE DE LA REGION 1

### 3.1 Détermination de l'équation de l'effort tranchant

En faisant une coupure au niveau du point de contraflexion, les déformations relatives de notre système sont:

- \* Déformation de flexion et de cisaillement des murs (figure VII.3.a):

$$\delta_1(x_1) = l_1 \frac{dY_1}{dx_1} \quad (\text{VII.7})$$

- \* Déformation de flexion et de cisaillement des poutres (figure VII.3.b):

$$\delta_2(x_1) = \frac{-h_1 b_1^3}{12EI_{b_1}} q_1(x_1) \quad (\text{VII.8})$$

- \* Déformation axiale des murs (figure VII.3.c):

$$\delta_3(x_1) = -\frac{1}{E} \left( \frac{1}{A_{11}} + \frac{1}{A_{12}} \right) \int_0^{x_1} \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1^2 - \frac{2P_1}{EA_1} x_1 \quad (\text{VII.9})$$

avec:

$$A_1 = A_{11} + A_{12}$$

L'équation de compatibilité nous donne:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \quad (\text{VII.10})$$

D'où:

$$l_1 \frac{dY_1}{dx_1} - \frac{h_1 b_1^3}{12EI_b} q_1(x_1) - \frac{1}{E} \frac{A_1}{A_{11}A_{12}} \int_0^{x_1} \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1^2 - \frac{2P_1}{EA_1} x_1 = 0 \quad (\text{VII.11})$$

Dérivons l'équation (VII.11):

$$l_1 \frac{d^2 Y_1}{dx_1^2} - \frac{h_1 b_1^3}{12EI_b} \frac{dq_1}{dx_1} - \frac{1}{E} \frac{A_1}{A_{11}A_{12}} \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1 - 2 \frac{P}{EA_1} = 0 \quad (\text{VII.12})$$

Le moment a pour valeur:

$$EI \frac{d^2 Y_1}{dx_1^2} = M(x_1) = \frac{1}{2} w_1 (H_1 - x_1)^2 + (Ml_1 + Ml_1') + (S_1 + S_1') (H_1 - x_1) - l_1 \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1 \quad (\text{VII.13})$$

Remplaçons cette dernière expression dans l'équation (VII.12), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l_1 w_1 (H_1 - x_1)^2 + (Ml_1 + Ml_1') l_1 + (S_1 + S_1') l_1 (H_1 - x_1) - l_1^2 \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1 \\ = \frac{h_1 b_1^3 I_1}{12I_b} \frac{dq_1}{dx_1} + \frac{I_1 A_1}{A_{11} A_{12}} \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1 + \frac{2P_1 I_1}{A_1} \end{aligned} \quad (\text{VII.14})$$

Après avoir dérivé une nouvelle fois on obtient:

$$\frac{d^2 q_1(x_1)}{dx_1^2} - q_1 (K_1 \alpha_1)^2 = -\frac{\alpha_1^2}{l_1} [w_1 (H_1 - x_1) + (S_1 + S_1')] \quad (\text{VII.15})$$

avec:

$$\alpha_1^2 = \frac{12I_b l_1^2}{h_1 b_1^3 I_1} \quad \text{et} \quad K_1^2 = 1 + \frac{I_1}{l_1^2} \frac{A_1}{A_{11} A_{12}} \quad (\text{VII.16})$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme:



$$q_1(x_1) = A \sinh(K_1 \alpha_1 x_1) + B \cosh(K_1 \alpha_1 x_1) + \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{w_1}{I_1} (H_1 - x_1) + \frac{(S_1 + S_1')}{I_1} \right\} \quad (\text{VII.17})$$

A et B sont à déterminer par les conditions aux limites:

$$\text{à } x_1 = 0 \quad dY_1/dx_1 = 0$$

et

$$\text{à } x_1 = H_1 \quad d^2Y_1/dx_1^2 = (Ml_1 + Ml_1')/EI_1$$

d'où:

$$B = -\frac{1}{K^2} \left\{ \frac{w_1}{l_1} H_1 + \frac{(S_1 + S_1')}{l_1} \right\} \quad (\text{VII.18})$$

$$A = \left[ (Ml_1 + Ml_1') - \frac{2P_1 I_1}{A_1 l_1} \right] \frac{\alpha_1^2}{l_1 K_1 \alpha_1 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} + \frac{\alpha_1^2}{l_1 (K_1 \alpha_1)^3 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \left[ w_1 + (w_1 H_1 + S_1 + S_1') K_1 \alpha_1 \sinh(K_1 \alpha_1 H_1) \right] \quad (\text{VII.19})$$

### 3.2 Détermination de l'équation de la flèche

Après avoir déterminé les constantes A et B, on peut maintenant tirer l'expression de la flèche et cela à partir de l'équation (VII.11):

$$\begin{aligned}
\frac{dY_1}{dx_1} &= \frac{l_1}{EI_1\alpha_1^2} \left[ A\sinh(K_1\alpha_1x_1) + B\cosh(K_1\alpha_1x_1) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{w_1}{l_1}(H_1-x_1) + \frac{(S_1+S'_1)}{l_1} \right\} \right] + \frac{l_1(K_1^2-1)}{EI_1} \left[ c_1x_1 \right. \\
&- \frac{A\sinh(K_1\alpha_1x_1)}{(K_1\alpha_1)^2} - \frac{B\cosh(K_1\alpha_1x_1)}{(K_1\alpha_1)^2} \\
&- \left. \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{w_1}{l_1} \left( \frac{H_1x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6} \right) + \frac{(S_1+S'_1)x_1^2}{l_1 \cdot 2} \right\} + \frac{B}{(K_1\alpha_1)^2} + \frac{2P_1x_1}{EA_1l_1} \right]
\end{aligned} \tag{VII.20}$$

Avec:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left( MI_1 + MI'_1 - \frac{2P_1I_1}{A_1l_1} \right) \frac{1}{l_1K_1^2} + \frac{w_1}{l_1K_1^2(K_1\alpha_1)^2} \\
&+ \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{w_1H_1^2}{2l_1} + \frac{(S_1+S'_1)H_1}{l_1} \right\}
\end{aligned} \tag{VII.21}$$

Intégrons maintenant l'équation (VII.11) pour obtenir  $Y_1(x_1)$ :

$$\begin{aligned}
Y_1(x_1) = & \frac{l_1}{EI_1 \alpha_1^2} \left[ \frac{A}{K_1 \alpha_1} \cosh(K_1 \alpha_1 x_1) + \frac{B}{K_1 \alpha_1} \sinh(K_1 \alpha_1 x_1) \right. \\
& + \frac{1}{K_1^2} \left\{ \frac{w_1}{l_1} \left( H_1 x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) + \frac{(S_1 + S_1')}{l_1} x_1 \right\} \\
& + \frac{l_1 (K_1^2 - 1)}{EI_1} \left[ C_1 \frac{x_1^2}{2} - \frac{A \cosh(K_1 \alpha_1 x_1)}{(K_1 \alpha_1)^3} \right. \\
& - \frac{B \sinh(K_1 \alpha_1 x_1)}{(K_1 \alpha_1)^3} - \frac{1}{K_1^2} \left\{ \frac{w_1}{l_1} \left( \frac{H_1 x_1^3}{6} - \frac{x_1^4}{24} \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{(S_1 + S_1')}{6 l_1} x_1^3 \right\} + \frac{B x_1}{(K_1 \alpha_1)^2} + \frac{P_1 x_1^2}{EA_1 l_1} + \theta \right]
\end{aligned} \tag{VII.22}$$

Avec:

$$\theta = \frac{-A l_1}{EI_1 (K_1 \alpha_1)^3} \tag{VII.23}$$

Remplaçons A et B par leur valeurs respectives:

$$\begin{aligned}
Y_1(x_1) = & \frac{w_1 H_1^4}{EI_1} \left\{ \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{x_1}{H_1} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{x_1}{H_1} \right)^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{x_1}{H_1} \right)^4 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right. \\
& + \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{\frac{x_1}{H_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{H_1} \right)^2}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2} + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 x_1) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^4 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 x_1) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \operatorname{Tanh}(K_1 \alpha_1 H_1) - \frac{\sinh(K_1 \alpha_1 x_1)}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \right] \right\} \\
& + \frac{(S_1 + S'_1) H_1^3}{EI_1} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{H_1} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{x_1}{H_1} \right)^3 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right. \\
& + \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{\frac{x_1}{H_1}}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2} + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 x_1) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \operatorname{Tanh}(K_1 \alpha_1 H_1) \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sinh(K_1 \alpha_1 x_1)}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \right] \right\} + \frac{(Ml_1 + Ml'_1) H_1^2}{EI_1} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{H_1} \right)^2 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right. \\
& + \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 x_1) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right] \left. \right\} \\
& + \frac{2P_1 H_1^2}{EA_1 l_1} \left\{ \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{H_1} \right)^2 - \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 x_1) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

(VII.24)

Pour pouvoir comparer cette équation avec les résultats obtenus pour des structures sans changement de sections, on se doit d'écrire l'équation de la flèche dans le même repère, il faut donc faire un changement de variable soit:

$$x_1 = H_1 - x_1'$$

(VII.25)

Nous aboutissons à l'équation suivante:

$$Y_1(x_1) = \frac{w_1 H_1^4}{EI_1} \left\{ \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{H_1 - x_1'}{H_1} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{H_1 - x_1'}{H_1} \right)^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{H_1 - x_1'}{H_1} \right)^4 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right.$$

$$+ \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{\frac{H_1 - x_1'}{H_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{H_1 - x_1'}{H_1} \right)^2}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2} + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1')) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^4 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right.$$

$$\left. + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1')) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \operatorname{Tanh}(K_1 \alpha_1 H_1) - \frac{\sinh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1'))}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \right\}$$

$$+ \frac{(S_1 + S_1') H_1^3}{EI_1} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{H_1 - X_1}{H_1} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{H_1 - x_1'}{H_1} \right)^3 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right.$$

(VII.26)

$$+ \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{\frac{H_1 - x_1'}{H_1}}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2} + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1')) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \operatorname{Tanh}(K_1 \alpha_1 H_1) \right.$$

$$\left. - \frac{\sinh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1'))}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \right] \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{H_1 - x_1'}{H_1} \right)^2 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right.$$

$$+ \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1')) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right] \left\{ \right.$$

$$\left. + \frac{2P_1 H_1^2}{EA_1 I_1} \left\{ \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{H_1 - x_1'}{H_1} \right)^2 - \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1')) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right] \right\} \right\}$$

Après simplifications on obtient l'expression suivante:

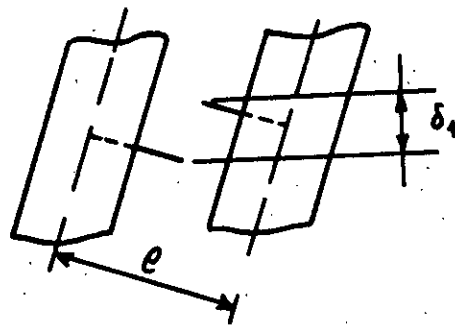
$$\begin{aligned}
 Y_1(x_1') = & \frac{w_1 H_1^4}{EI_1} \left\{ \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left( \frac{x_1'}{H_1} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{x_1'}{H_1} \right)^4 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right. \\
 & + \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{1 - \left( \frac{x_1'}{H_1} \right)^2}{2(K_1 \alpha_1 H_1)^2} + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1')) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^4 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\sinh(K_1 \alpha_1 H_1) - \sinh(K_1 \alpha_1 x_1')}{\cosh(K_1 \alpha_1 H_1) (K_1 \alpha_1 H_1)^3} \right] \right\} \\
 & + \frac{(S_1 + S_1') H_1^3}{EI_1} \left\{ \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_1'}{H_1} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{x_1'}{H_1} \right)^3 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{1 - \frac{x_1'}{H_1}}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2} + \frac{\sinh(K_1 \alpha_1 x_1') - \sinh(K_1 \alpha_1 H_1)}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right] \right\} \\
 & + \frac{(Ml_1 + Ml_1') H_1^2}{EI_1} \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{x_1'}{H_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x_1'}{H_1} \right)^2 \right] \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1')) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right] \right\} \\
 & + \frac{2P_1 H_1^2}{EA_1 l_1} \left\{ \frac{1}{K_1^2} \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{x_1'}{H_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x_1'}{H_1} \right)^2 + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 (H_1 - x_1')) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2 \cosh(K_1 \alpha_1 H_1)} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{VII.27}$$

Cette dernière expression représente la flèche latérale de la première région du mur jumelé soumise à un chargement uniformément réparti d'intensité  $w_1$ . Elle est fonction des deux paramètres adimensionnels " $\alpha_1 H_1$ " et " $K_1^2$ " qui caractérisent la structure ainsi que des efforts internes  $S_1, S_1', M_{l_1}, M_{l_1}'$  et  $P_1$  qui représentent l'effet de la partie supérieure.

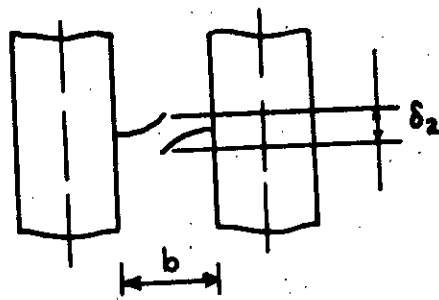
Nous pouvons également partager cette équation en quatre parties distinctes: la première est due à la charge extérieure, la seconde à l'effort tranchant ( $S_1 + S_1'$ ), la troisième au moment ( $M_{l_1} + M_{l_1}'$ ) et enfin la dernière à l'effort axial  $P_1$ .

Remarque:

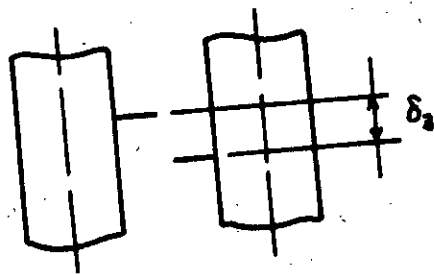
Nous retrouvons dans les trois premières parties décrites ci-dessus les expressions de la flèche latérale que subit un mur jumelé à section uniforme soumis respectivement à une charge uniformément répartie, à une charge ponctuelle appliquée au sommet et à un moment au sommet, expressions déjà explicitées dans le chapitre (III).



(a)



(b)



(c)

Différentes déformations relatives

Figure VII.3



## VII.4 ANALYSE DE LA REGION 2

### 4.1 Détermination du déplacement vertical relatif

#### dû à la première région

Pour pouvoir faire l'étude de cette région il nous faut tout d'abord déterminer le déplacement vertical relatif  $\Delta_1$  provenant de la partie se trouvant au dessous. Pour cela, considérons l'allure de la déformée du mur à la hauteur  $H_1$  qui représente le point où se produit le changement de section et qui est illustrée sur la figure (VII.4).

Où:

$\delta H_1$ : Représente le déplacement vertical relatif dû aux efforts axiaux s'appliquant sur la première région et qui a pour expression:

$$\delta H_1 = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{A_{11}} + \frac{1}{A_{12}} \right) \int_0^{H_1} \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1^2 + \frac{2P_1 H_1}{EA_1} \quad (\text{VII.28})$$

$\theta H_1$ : Représente la rotation de la région 1 à la hauteur  $H_1$ . Elle est donnée par l'expression de  $dY_1/dx_1$  au point  $x_1 = H_1$

$$\theta H_1 = \frac{h_1 b_1^3}{12EI_{b1} l_1} q_1(H_1) + \frac{1}{l_1 E} \frac{A_1}{A_{11} A_{12}} \int_0^{H_1} \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1^2 + \frac{2P_1 H_1}{EA_1 l_1} \quad (\text{VII.29})$$

D'où:

$$\theta H_1 = \frac{l_1}{EI_1 \alpha_1^2} q_1(H_1) + \frac{\delta H_1}{l_1} \quad (\text{VII.30})$$

La déformation verticale imposée par la première région sera donc:

$$\Delta_1 = \delta H_1 - l_1 \theta H_1 \quad (\text{VII.31})$$

#### 4.2 Détermination de l'équation de l'effort tranchant

Soient les expressions des déformations suivantes:

- \* Déformation de flexion et de cisaillement des murs (figure VII.3.a):

$$\delta_1(x_2) = l_2 \frac{dY_2}{dx_2} \quad (\text{VII.32})$$

- \* Déformation de flexion et de cisaillement des poutres (figure VII.3.b):

$$\delta_2(x_2) = \frac{-h_2 b_2^3}{12EI'_{b_2}} q_2(x_2) \quad (\text{VII.33})$$

- \* Déformation axiale des murs (figure VII.3.c):

$$\delta_3(x_2) = -\frac{1}{E} \left( \frac{1}{A_{21}} + \frac{1}{A_{22}} \right) \int_0^{x_1} \int_{x_1}^{H_1} q_2(x_2) dx_2^2 - \frac{2P_2 x_2}{EA_2} - \Delta_1 \quad (\text{VII.34})$$

avec:

$$A_2 = A_{21} + A_{22}$$

L'équation de compatibilité nous donne:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \quad (\text{VII.35})$$

D'où:

$$l_2 \frac{dY_2}{dx_2} - \frac{h_2 b_2^3}{12EI_{b_2}} q_2(x_2) \quad (\text{VII.36})$$

$$- \frac{1}{E} \frac{A_2}{A_{21}A_{22}} \int_0^{x_2} \int_{x_1}^{H_2} q_2(x_2) dx_2^2 - \frac{2P_2}{EA_2} x_2 - \delta H_1 + l_1 \theta H_1 = 0$$

Après avoir dérivé par rapport à  $x_2$  on obtient:

$$l_2 \frac{d^2 Y_2}{dx_2^2} - \frac{h_2 b_2^3}{12EI_{b_2}} \frac{dq_2}{dx_2} - \frac{1}{E} \frac{A_2}{A_{21}A_{22}} \int_{x_2}^{H_2} q_2(x_2) dx_2 - \frac{2P_2}{EA_2} = 0 \quad (\text{VII.37})$$

Le moment a pour valeur:

$$EI_2 \frac{d^2 Y_2}{dx_2^2} = M(x_2) = \frac{1}{2} w_2 (H_2 - x_2)^2 + (Ml_2 + Ml_2') \quad (\text{VII.38})$$

$$+ (S_2 + S_2')(H_2 - x_2) - l_2 \int_{x_2}^{H_2} q_2(x_2) dx_2$$

Remplaçons dans l'équation (VII.37), on obtient:

$$\frac{1}{2} l_2 w_2 (H_2 - x_2)^2 + (Ml_2 + Ml_2') l_2 + \quad (\text{VII.39})$$

$$(S_2 + S_2') l_2 (H_2 - x_2) - l_2^2 \int_{x_2}^{H_2} q_2(x_2) dx_2 =$$

$$\frac{h_2 b_2^3 l_2}{12I_b} \frac{dq_2(x_2)}{dx_2} + \frac{l_2 A_2}{A_{21}A_{22}} \int_{x_2}^{H_2} q_2(x_2) dx_2 + \frac{2P_2 l_2}{A_2}$$

Après avoir dérivé une nouvelle fois nous aboutissons à l'équation suivante:

$$\frac{d^2 q_2(x_2)}{dx_2^2} - (K_2 \alpha_2)^2 q_2(x_2) = -\frac{\alpha_2^2}{l_2} [w_2(H_2 - x_2) + (S_2 + S_2')] \quad (\text{VII.40})$$

avec:

$$\alpha_2^2 = \frac{12I_b l_2^2}{h_2 b_2^3 I_2} \quad \text{et} \quad K_2^2 = 1 + \frac{I_2 A_2}{l_2^2 A_{21} A_{22}} \quad (\text{VII.41})$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit de la façon suivante:

$$q_2(x_2) = F \sinh(K_2 \alpha_2 x_2) + G \cosh(K_2 \alpha_2 x_2) + \frac{1}{K_2^2} \left\{ \frac{w_2}{l_2} (H_2 - x_2) + \frac{(S_2 + S_2')}{l_2} \right\} \quad (\text{VII.42})$$

où F et G sont à déterminer par les conditions aux limites:

$$\text{à } x_2 = 0 \quad dY_2/dx_2 = \theta H_1$$

et

$$\text{à } x_2 = H_2 \quad d^2 Y_2/dx_2^2 = (M_{l_2} + M_{l_2}')/EI_2$$

d'où:

$$G = \frac{EI_2 \alpha_2^2}{l_2^2} [l' \theta H_1 - \delta H_1] - \frac{1}{K_2^2} \left\{ \frac{w_2}{l_2} H_2 + \frac{(S_2 + S_2')}{l_2} \right\} \quad (\text{VII.43})$$

Avec:

$$l' = l_1 + l_2$$

Et:

$$\begin{aligned}
F = & \left[ (Ml_2 + Ml_2') - \frac{2P_2 l_2}{A_2 l_2} \right] \frac{\alpha_2^2}{l_2 K_2 \alpha_2 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \\
& + \frac{\alpha_2^2}{l_2 (K_2 \alpha_2)^3 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \left[ w_2 + [w_2 H_2 + (S_2 + S_2')] K_2 \alpha_2 \sinh(K_2 \alpha_2 H_2) \right] \\
& - \frac{\alpha_2^2}{l_2^2} E l_2 [l_1 \theta H_1 - \delta H_1] \operatorname{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2)
\end{aligned} \tag{VII.44}$$

### 4.3 Détermination de l'équation de la flèche

Après avoir déterminé les constantes F et G, on peut maintenant tirer l'expression de la flèche et cela à partir de l'équation (VII.36):

$$\begin{aligned}
\frac{dY_2}{dx_2} = & \frac{l_2}{E l_2 \alpha_2^2} [F \sinh(K_2 \alpha_2 x_2) + G \cosh(K_2 \alpha_2 x_2) \\
& + \frac{1}{K_2^2} \left\{ \frac{w_2}{l_2} (H_2 - x_2) + \frac{(S_2 + S_2')}{l_2} \right\}] + \frac{l_2 (K_2^2 - 1)}{E l_2} [c_2 x_2 \\
& - \frac{F \sinh(K_2 \alpha_2 x_2)}{(K_2 \alpha_2)^2} - \frac{G \cosh(K_2 \alpha_2 x_2)}{(K_2 \alpha_2)^2} - \frac{1}{K_2^2} \left\{ \frac{w_2}{l_2} \right. \\
& \left. \times \left( \frac{H_2 x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6} \right) + \frac{(S_2 + S_2')}{l_2} \frac{x_2^2}{2} \right\} + \frac{G}{(K_2 \alpha_2)^2}] + \frac{2P_2 x_2}{EA_2 l_2} + \frac{\delta H_1}{l_2} - \frac{l_1 \theta H_1}{l_2}
\end{aligned} \tag{VII.45}$$

Avec :

$$c_2 = \left( (Ml_2 + Ml_2) - \frac{2P_2 I_2}{A_2 l_2} \right) \frac{1}{l_2 K_2^2} + \frac{w_2}{l_2 K_2^2 (K_2 \alpha_2)^2} \quad (\text{VII.46})$$

$$+ \frac{1}{K_2^2} \left\{ \frac{w_2 H_2^2}{2l_2} + \frac{(S_2 + S'_2) H_2}{l_2} \right\}$$

Intégrons maintenant l'équation (VII.45) pour obtenir  $Y_2(x_2)$ :

$$Y_2(x_2) = \frac{l_2}{EI_2 \alpha_2^2} \left[ \frac{F}{K_2 \alpha_2} \cosh(K_2 \alpha_2 x_2) + \frac{G}{K_2 \alpha_2} \sinh(K_2 \alpha_2 x_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{K_2^2} \left\{ \frac{w_2}{l_2} \left( H_2 x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) + \frac{(S_2 + S'_2)}{l_2} x_2 \right\} \right] \\ + \frac{l_2 (K_2^2 - 1)}{EI_2} \left[ c_2 \frac{x_2^2}{2} - \frac{F \cosh(K_2 \alpha_2 x_2)}{(K_2 \alpha_2)^3} \right. \\ \left. - \frac{G \sinh(K_2 \alpha_2 x_2)}{(K_2 \alpha_2)^3} - \frac{1}{K_2^2} \left\{ \frac{w_2}{l_2} \left( \frac{H_2 x_2^3}{6} - \frac{x_2^4}{24} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(S_2 + S'_2) x_2^3}{6l_2} \right\} + \frac{G x_2}{(K_2 \alpha_2)^2} + \frac{P_2 x_2^2}{EA_2 l_2} + \left[ \frac{\delta H_1}{l_2} - \frac{l_1 \theta H_1}{l_2} \right] + \rho \right] \quad (\text{VII.47})$$

Avec:

$$\rho = \frac{-Fl_2}{EI_2 (K_2 \alpha_2)^3} \quad (\text{VII.48})$$

En remplaçant F et G par leur valeur, on a:

$$\begin{aligned}
Y_2(x_2) = & \frac{w_2 H_2^4}{E I_2} \left\{ \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^4 \right] \frac{K_2^2 - 1}{K_2^2} \right. \\
& + \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{\frac{x_2}{H_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^2}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2} + \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 x_2) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^4 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 x_2) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^3} \operatorname{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2) - \frac{\sinh(K_2 \alpha_2 x_2)}{(K_2 \alpha_2 H_2)^3} \right] \right\} \\
& + \frac{(S_2 + S_2') H_2^3}{E I_2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^3 \right] \frac{K_2^2 - 1}{K_2^2} \right. \\
& + \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{\frac{x_2}{H_2}}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2} + \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 x_2) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^3} \operatorname{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2) \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sinh(K_2 \alpha_2 x_2)}{(K_2 \alpha_2 H_2)^3} \right] \right\} + \frac{(M l_2 + M l_2') H_2^2}{E I_2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^2 \right] \frac{K_2^2 - 1}{K_2^2} \right. \\
& + \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 x_2) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \right] + \frac{2 P_2 H_2^2}{E A_2 l_2} \left\{ \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 x_2) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \right] \right\} + \frac{(\delta H_1 - l' \theta H_1)}{l_2} H_2 \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{x_2}{H_2} \right. \\
& \left. + \left\{ -\frac{\sinh(K_2 \alpha_2 x_2)}{K_2 \alpha_2 H_2} + \frac{[\cosh(K_2 \alpha_2 H_2) - 1]}{K_2 \alpha_2 H_2} \operatorname{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2) \right\} \right] \\
& + Y_1(H_1) + \theta H_1 x_2
\end{aligned} \tag{VII.49}$$

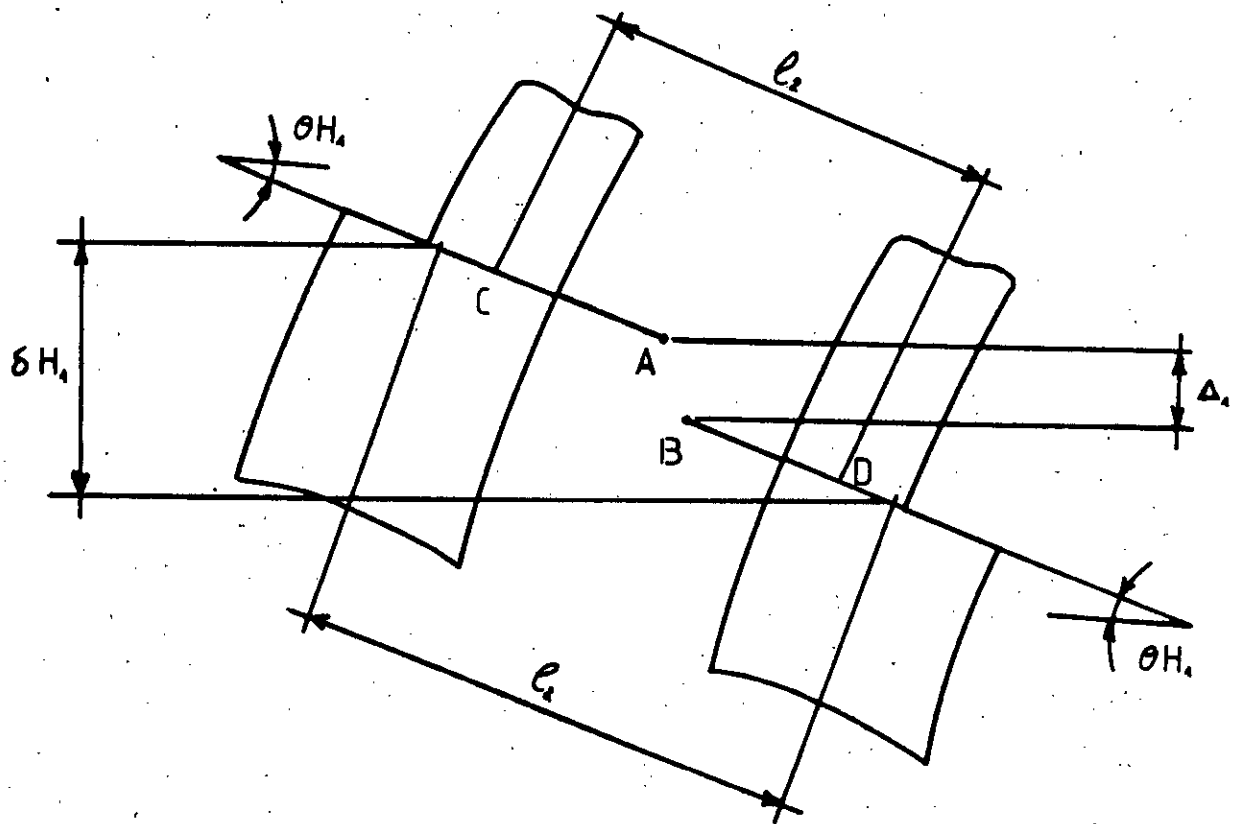
De même que pour la région 1, posons:

$$x_2 = H_2 - x_2' \tag{VII.50}$$

$$\begin{aligned}
Y_2(x_2) = & \frac{w_2 H_2^4}{EI_2} \left\{ \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left( \frac{x_2}{H_2} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^4 \right] \frac{K_2^2 - 1}{K_2^2} \right. \\
& + \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{1 - \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^2}{2(K_2 \alpha_2 H_2)^2} + \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 (H_2 - x_2)) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^4 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sinh(K_2 \alpha_2 H_2) - \sinh(K_2 \alpha_2 x_2)}{(K_2 \alpha_2 H_2)^3} \cosh(K_2 \alpha_2 H_2) \right] \right\} \\
& + \frac{(S_2 + S_2') H_2^3}{EI_2} \left\{ \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{H_2} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^3 \right] \frac{K_2^2 - 1}{K_2^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{1 - \frac{x_2}{H_2}}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2} + \frac{\sinh(K_2 \alpha_2 x_2) - \sinh(K_2 \alpha_2 H_2)}{(K_2 \alpha_2 H_2)^3 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \right] \right\} \\
& + \frac{(Ml_2 + Ml_2') H_2^2}{EI_2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{x_2}{H_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^2 \right] \frac{K_2^2 - 1}{K_2^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 (H_2 - x_2)) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \right] \right\} \\
& + \frac{2P_2 H_2^2}{EA_2 l_2} \left\{ \frac{1}{K_2^2} \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{x_2}{H_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{H_2} \right)^2 + \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 (H_2 - x_2)) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2 \cosh(K_2 \alpha_2 H_2)} \right] \right\} \\
& \left. \frac{(\delta H_1 - l' \theta H_1) H_2}{l_2} \left\{ 1 - \frac{x_2}{H_2} - \frac{\sinh \left[ K_2 \alpha_2 H_2 \left( 1 - \frac{x_2}{H_2} \right) \right]}{K_2 \alpha_2 H_2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\cosh \left[ K_2 \alpha_2 H_2 \left( 1 - \frac{x_2}{H_2} \right) \right] - 1}{K_2 \alpha_2 H_2} \operatorname{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2) \right\} \frac{1}{K_2^2} \right. \\
& \left. + Y_1(H_1) + \theta H_1 (H_2 - x_2) \right.
\end{aligned}$$

(VII.51)





Allure de la déformée du mur jumelé au niveau du point de jonction  
entre deux régions .

Figure VII.4

#### 4.4 Calcul de $\delta H_1$ et $\theta H_1$

$$\delta H_1 = \frac{1}{E} \frac{A_1}{A_{11}A_{12}} \int_0^{H_1} \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1^2 + \frac{2P_1 H_1}{EA_1} \quad (\text{VII.52})$$

D'où:

$$\begin{aligned} \delta H_1 = & \frac{K_1^2 - 1}{K_1^2} \frac{l_1^2}{EI_1} \left\{ \left[ (Ml_1 + Ml_1') - \frac{2P_1 l_1}{A_1 l_1} \right] \frac{H_1}{l_1} \left[ 1 - \frac{\text{Tanh}(K_1 \alpha_1 H_1)}{K_1 \alpha_1 K_1} \right] + \frac{w_1 H_1^3}{l_1} \left[ \frac{1}{6} + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 H_1)}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1 + K_1 \alpha_1 H_1 \sinh(K_1 \alpha_1 H_1)) \text{Tanh}(K_1 \alpha_1 H_1)}{(K_1 \alpha_1 H_1)^3} \right] \right. \\ & \left. + \frac{(S_1 + S_1') H_1^2}{l_1} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\cosh(K_1 \alpha_1 H_1) - 1}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2} - \frac{\sinh(K_1 \alpha_1 H_1) \text{Tanh}(K_1 \alpha_1 H_1)}{(K_1 \alpha_1 H_1)^2} \right] \right\} + \frac{2P_1 H_1}{EA_1} \quad (\text{VII.53}) \end{aligned}$$

Et:

$$\begin{aligned} \theta H_1 = & \frac{h_1 b_1^3}{12EI_b l_1} q_1(H_1) + \frac{1}{l_1 E} \frac{A_1}{A_{11}A_{12}} \int_0^{H_1} \int_{x_1}^{H_1} q_1(x_1) dx_1^2 \\ & + \frac{2P_1 H_1}{EA_1 l_1} \quad (\text{VII.54}) \end{aligned}$$

D'où:

$$\theta H_1 = \frac{l_1}{EI_1 \alpha_1^2} q_1(H_1) + \frac{\delta H_1}{l_1} \quad (\text{VII.55})$$

### VII.5 ANALYSE DE LA REGION 3

Pour l'analyse de cette région on procédera de manière analogue à la zone précédente (deuxième région). L'équation de la flèche régissant cette région sera donc similaire à l'équation précédente. Il faudra cependant calculer la déformation résultant de la deuxième région ( $\Delta_2$ ) et prendre ( $Ml_3 + Ml_3'$ ), ( $S_3 + S_3'$ ) et  $P_3$  égaux à zéro, l'extrémité de cette partie de notre structure étant libre.

On obtient alors l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
Y_3(x_3) = & \frac{w_3 H_3^4}{EI_3} \left\{ \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left( \frac{x_3'}{H_3} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{x_3'}{H_3} \right)^3 \right] \frac{K_3^2 - 1}{K_3^2} \right. \\
& + \frac{1}{K_3^2} \left[ \frac{1 - \left( \frac{x_3'}{H_3} \right)^2}{2(K_3 \alpha_3 H_3)^2} + \frac{\cosh(K_3 \alpha_3 (H_3 - x_3')) - 1}{(K_3 \alpha_3 H_3)^4 \cosh(K_3 \alpha_3 H_3)} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sinh(K_3 \alpha_3 H_3) - \sinh(K_3 \alpha_3 x_3')}{(K_3 \alpha_3 H_3)^3 \cosh(K_3 \alpha_3 H_3)} \right] \right\} \quad \text{(VII.56)} \\
& + \frac{(\delta H_2 - l'' \theta H_2) H_3}{l_3} \left\{ 1 - \frac{x_3'}{H_3} - \left[ \frac{\sinh \left( K_3 \alpha_3 H_3 \left( 1 - \frac{x_3'}{H_3} \right) \right)}{K_3 \alpha_3 H_3} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\cosh \left( K_3 \alpha_3 H_3 \left( 1 - \frac{x_3'}{H_3} \right) \right) - 1}{K_3 \alpha_3 H_3} \operatorname{Tanh}(K_3 \alpha_3 H_3) \right] \right\} \frac{1}{K_3^2} \\
& + Y_2(H_2) + \theta H_2 (H_3 - x_3')
\end{aligned}$$

Avec:

$$\alpha_3^2 = \frac{12 I_{b3} l_3^2}{h_3 b_3^3 I_3} \quad \text{et} \quad K_3^2 = 1 + \frac{I_3 A_3}{l_3^2 A_{31} A_{32}} \quad \text{et} \quad l'' = l_2 + l_3$$

### 5.1 Calcul de $\delta H_2$ et $\theta H_2$

$$\delta H_2 = \frac{1}{E} \frac{A_2}{A_{21}A_{22}} \int_0^{H_2} \int_{x_2}^{H_2} q_2(x_2) dx_2^2 + \frac{2P_2 H_2}{EA_2} + \Delta_1 \quad (\text{VII.57})$$

D'où:

$$\begin{aligned} \delta H_2 = & \frac{K_2^2 - 1}{K_2^2} \frac{l_2^2}{EI_2} \left\{ \left[ (Ml_2 + Ml_2') - \frac{2P_2 I_2}{A_2 I_2} \right] \frac{H_2}{I_2} \left[ 1 - \frac{\text{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2)}{K_2 \alpha_2 K_2} \right] + \frac{w_2 H_2^3}{I_2} \left[ \frac{1}{6} + \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 H_2)}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1 + K_2 \alpha_2 H_2 \sinh(K_2 \alpha_2 H_2)) \text{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2)}{(K_2 \alpha_2 H_2)^3} \right] \right. \\ & \left. + \frac{(S_2 + S_2') H_2^2}{I_2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\cosh(K_2 \alpha_2 H_2) - 1}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2} - \frac{\sinh(K_2 \alpha_2 H_2) \text{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2)}{(K_2 \alpha_2 H_2)^2} \right] \right\} + \frac{2P_2 H_2}{EA_2} \\ & + (\delta H_1 - l_1 \theta H_1) + \frac{K_2^2 - 1}{K_2^2} (\delta H_1 - l_1 \theta H_1) [ \cosh(K_2 \alpha_2 H_2) - 1 - \text{Tanh}(K_2 \alpha_2 H_2) \sinh(K_2 \alpha_2 H_2) ] \end{aligned} \quad (\text{VII.58})$$

Et:

$$\begin{aligned} \theta H_2 = & \frac{h_2 b_2^3}{12EI_{b2} l_2} q_2(H_2) + \frac{1}{l_2 E} \frac{A_2}{A_{21}A_{22}} \int_0^{H_2} \int_{x_2}^{H_2} q_2(x_2) dx_2^2 \\ & + \frac{2P_2 H_2}{EA_2 l_2} + \delta H_1 - l_1 \theta H_1 \end{aligned} \quad (\text{VII.59})$$

D'où:

$$\theta_{H_2} = \frac{I_2}{EI_2 \alpha_2^2} q_2(H_2) + \frac{\delta H_2}{I_2} \quad (\text{VII.60})$$

L'expression de la flèche latérale dans les trois régions est fonction des chargements extérieurs mais aussi des efforts internes  $P_i$ ,  $S_i$  et  $M_i$  où  $i$  représente l'indice de la région. Il est donc nécessaire afin de déterminer la flèche latérale de calculer ces forces.

## VII.6 DETERMINATION DES EXPRESSIONS DES FORCES D'INTERACTION

### 6.1 Détermination des forces $P_i$

Commençons tout d'abord par considérer les équations d'équilibre régissant la structure étudiée ci-avant c'est à dire avec trois régions puis à partir de là nous ferons une généralisation pour "n" régions.

D'après l'équilibre vertical de la région 3, on a:

$$P_2 = \int_0^{H_3} q_3(x_3) dx_3 \quad (\text{VII.61})$$

D'après l'équilibre vertical de la région 2, on a:

$$P_1 = P_2 + \int_0^{H_2} q_2(x_2) dx_2 \quad (\text{VII.62})$$

On peut écrire par identification:

$$P_{n-1} = \int_0^{H_n} q_n(x_n) dx_n \quad (\text{VII.63})$$

$$P_{n-2} = P_{n-1} + \int_0^{H_{n-1}} q_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \quad (\text{VII.64})$$

$$P_1 = \sum_2^{n-1} P_k + \int_0^{H_2} q_2(x_2) dx_2 \quad (\text{VII.65})$$

Donc pour la région "i":

$$P_i = \sum_{i+1}^{n-1} P_k + \int_0^{H_{i+1}} q_{i+1}(x_{i+1}) dx_{i+1} \quad (\text{VII.66})$$

## 6.2 Détermination des moments ( $Ml_i + Ml'_i$ )

De même que pour les forces  $P_i$ , déterminons ces moments pour le cas étudié puis faisons une généralisation.

$$Ml_2 + Ml'_2 = \frac{1}{2} w_3 H_3^2 - P_2 l_2 \quad (\text{VII.67})$$

$$Ml_1 + Ml'_1 = \frac{1}{2} w_3 H_3^2 + \frac{1}{2} w_2 H_2^2 + (S_2 + S'_2) H_2 - P_1 l_1 \quad (\text{VII.68})$$

La généralisation à "n" régions nous donne:

$$Ml_{n-1} + Ml'_{n-1} = \frac{1}{2} w_n H_n^2 - P_{n-1} l_{n-1} \quad (\text{VII.69})$$

$$\begin{aligned}
 Ml_1 + Ml_1' &= \frac{1}{2} w_n H_n^2 + \frac{1}{2} w_{n-1} H_{n-1}^2 + \dots + \frac{1}{2} w_2 H_2^2 \\
 &+ (S_{n-1} + S_{n-1}') H_{n-1} + \dots + (S_2 + S_2') H_2 - P_1 l_1
 \end{aligned}
 \tag{VII.70}$$

Pour une région quelconque "i":

$$Ml_i + Ml_i' = \frac{1}{2} \sum_{k=i+1}^n w_k H_k^2 + \sum_{k=i+1}^{n-1} (S_k + S_k') H_k - P_i l_i
 \tag{VII.71}$$

### 6.3 Détermination des efforts tranchants

Pour la structure étudiée, c'est à dire à trois régions. Nous avons les équations suivantes:

$$S_2 + S_2' = w_3 H_3
 \tag{VII.72}$$

$$S_1 + S_1' = w_3 H_3 + w_2 H_2
 \tag{VII.73}$$

Par analogie, pour "n" région on obtient:

$$S_{n-1} + S_{n-1}' = w_n H_n
 \tag{VII.74}$$

$$S_1 + S_1' = w_n H_n + \dots + w_2 H_2
 \tag{VII.75}$$

Pour une région "i" on obtient:

$$S_i + S_i' = \sum_{k=i+1}^n w_k H_k
 \tag{VII.76}$$

### 6.4 Détermination de l'effort tranchant au sein du

milieu continu  $q_i(x_i)$



Pour pouvoir calculer les forces d'interaction au niveau d'une région "i" quelconque, nous avons besoin de l'expression de  $q_i(x_i)$  en cette même région et plus particulièrement de la valeur:

$$\int_0^{H_i} q_i(x_i) dx_i \quad (\text{VII.77})$$

$q_i(x_i)$  peut s'écrire de la manière suivante:

$$q_i(x_i) = A_i \sinh(K_i \alpha_i x_i) + B_i \cosh(K_i \alpha_i x_i) + \frac{1}{K_i^2} \left\{ \frac{w_i}{l_i} (H_i - x_i) + \frac{(S_i + S_i')}{l_i} \right\} \quad (\text{VII.78})$$

Avec:

$$A_i = \left[ (Ml_i + Ml_i') - \frac{2Pl_i}{A_i l_i} \right] \frac{\alpha_i^2}{l_i K_i \alpha_i \cosh(K_i \alpha_i H_i)} + \frac{\alpha_i^2}{l_i (K_i \alpha_i)^3 \cosh(K_i \alpha_i H_i)} \left[ w_i + (w_i H_i + S_i + S_i') K_i \alpha_i \sinh(K_i \alpha_i H_i) \right] - \frac{\alpha_i^2}{l_i^2} EI_i [l_i \theta_{H_{i-1}} - \delta H_{i-1}] \text{Tanh}(K_i \alpha_i H_i) \quad (\text{VII.79})$$

où:

$$\alpha_i^2 = \frac{12I_{bi} l_i^2}{h_i b_i^3 I_i}, \quad K_i^2 = 1 + \frac{I_i A_i}{l_i^2 A_{i1} A_{i2}} \quad (\text{VII.80})$$

$$\text{et } l_i' = l_i + l_{i-1}$$

et avec:

$$B_i = \frac{EI_i \alpha_i^2}{l_i} \{l_i \theta_{H_{i-1}} - \delta H_{i-1}\} - \frac{1}{K_i^2 l_i} \{w_i H_i + (S_i + S'_i)\} \quad (\text{VII.81})$$

Par ailleurs on a:

$$\int_0^{H_i} q_i(x_i) dx_i = C_i - \frac{A_i}{(K_i \alpha_i)} \quad (\text{VII.82})$$

Où:

$$C_i = \left( M l_i + M l'_i - \frac{2P_i l_i}{A_i l_i} \right) \frac{1}{l_i K_i^2} + \frac{w_i}{l_i K_i^4 \alpha_i^2} + \frac{1}{K_i^2} \left\{ \frac{w_i H_i^2}{2l_i} + \frac{(S_i + S'_i) H_i}{l_i} \right\} \quad (\text{VII.83})$$

Il ne nous reste plus à présent qu'à obtenir l'expression de  $\Delta_i$ . Pour cela nous allons déterminer les valeurs respectives de  $\delta H_i$  ainsi que  $\theta H_i$ .

$$\delta H_i = \frac{1}{E} \frac{A_i}{A_{i1} A_{i2}} \int_0^{H_i} \int_{x_i}^{H_i} q_i(x_i) dx_i^2 + \frac{2P_i H_i}{EA_i} + \Delta_{i-1} \quad (\text{VII.84})$$

En remplaçant chaque terme de cette dernière équation, nous obtenons l'expression suivante de  $\delta H_i$ :

$$\begin{aligned}
\delta H_i = & \frac{K_i^2 - 1}{K_i^2} \frac{l_i}{EI_i} \left\{ \left[ (Ml_i + Ml_i) - \frac{2P_i l_i}{A_i l_i} \right] H_i \left[ 1 - \frac{\text{Tanh}(K_i \alpha_i H_i)}{K_i \alpha_i K_i} \right] + w_i H_i^3 \left[ \frac{1}{6} + \frac{\cosh(K_i \alpha_i H_i)}{(K_i \alpha_i H_i)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(1 + K_i \alpha_i H_i \sinh(K_i \alpha_i H_i)) \text{Tanh}(K_i \alpha_i H_i)}{(K_i \alpha_i H_i)^3} \right] \right. \\
& + (S_i + S_i') H_i^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{\cosh(K_i \alpha_i H_i) - 1}{(K_i \alpha_i H_i)^2} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sinh(K_i \alpha_i H_i) \text{Tanh}(K_i \alpha_i H_i)}{(K_i \alpha_i H_i)^2} \right] \right\} + \frac{2P_i H_i}{EA_i} \\
& + (\delta H_{i-1} - l_{i-1} \theta_{H_{i-1}}) + \frac{(K_i^2 - 1)}{K_i^2} (\delta H_{i-1} - l_i' \theta_{H_{i-1}}) \\
& \times [\cosh(K_i \alpha_i H_i) - 1 - \text{Tanh}(K_i \alpha_i H_i) \sinh(K_i \alpha_i H_i)]
\end{aligned} \tag{VII.85}$$

Et:

$$\theta H_i = \frac{l_i}{EI_i \alpha_i^2} q_i(H_i) + \frac{\delta H_i}{l_i} \tag{VII.86}$$

Après avoir déterminé les expressions des différentes forces d'interaction pour un cas général, c'est à dire à "n" régions. On doit maintenant trouver une méthode afin de les calculer. Pour cela, on a établi un programme qui sera illustré par l'algorithme suivant:

1 - Prendre des valeurs de  $P_i^0 = 0$ , où i varie de 1 à n et l'indice 0 indique le nombre d'itérations

2 - Calculer:

$$\int_0^{H_i} q_i(x_i) dx_i = C_i - \frac{A_i}{K_i \alpha_i}$$

3 - Calculer les nouvelles valeurs de  $P_i$ :

$$P_i^1 = \sum_{k=1}^{n-1} P_k + \int_0^{H_{i+1}} q_{i+1}(x_{i+1}) dx_{i+1}$$

4 - Vérifier la convergence en comparant  $P_i^0$  à  $P_i^1$ .

5 - Si la convergence est vérifiée, les efforts internes sont déterminés, on peut passer au calcul de la flèche.

6 - Si la convergence n'est pas vérifiée, reprendre le procédé itératif avec les nouvelles valeurs  $P_i^1$ , jusqu'à ce que,  $|P_i^n - P_i^{n-1}| < \epsilon$  où  $\epsilon$  représente l'erreur que l'on s'est fixée.

**Remarque:**

Les caractéristiques de ce programme sont identiques à ceux du programme établis précédemment.

L'organigramme détaillé de ce programme est donné ci-dessous:

double precision  $p, q, w$   
 $H, S, M, L, K, AL, I, JH, TH$   
 $AC, c, I_b, L1, b, A, A_0$   
 $KAL, H_1, M1, M2, I_a, E, Y, Y1$

Lire le nombre  
de regions  $n$

$n_1 = n + 1$   
 $n = n - 1$

$j = 1$   
 $P(j, 1) = 0$

$j \leq n_1$

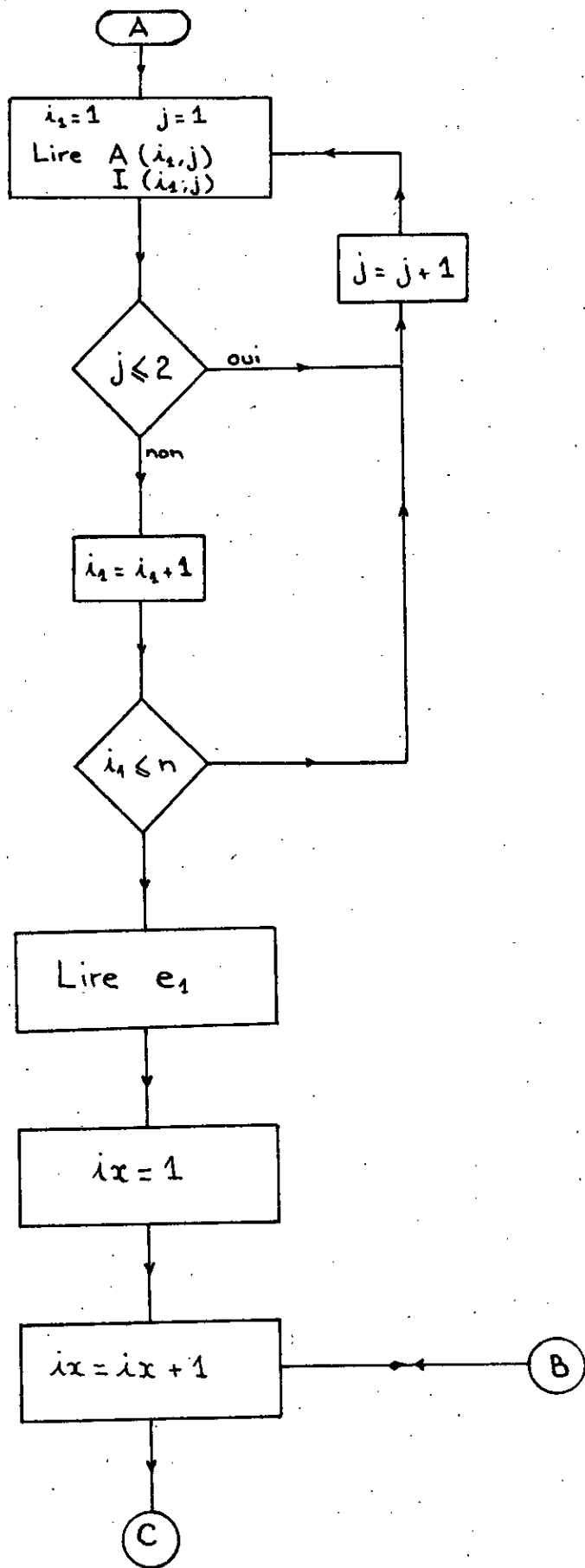
$j = j + 1$

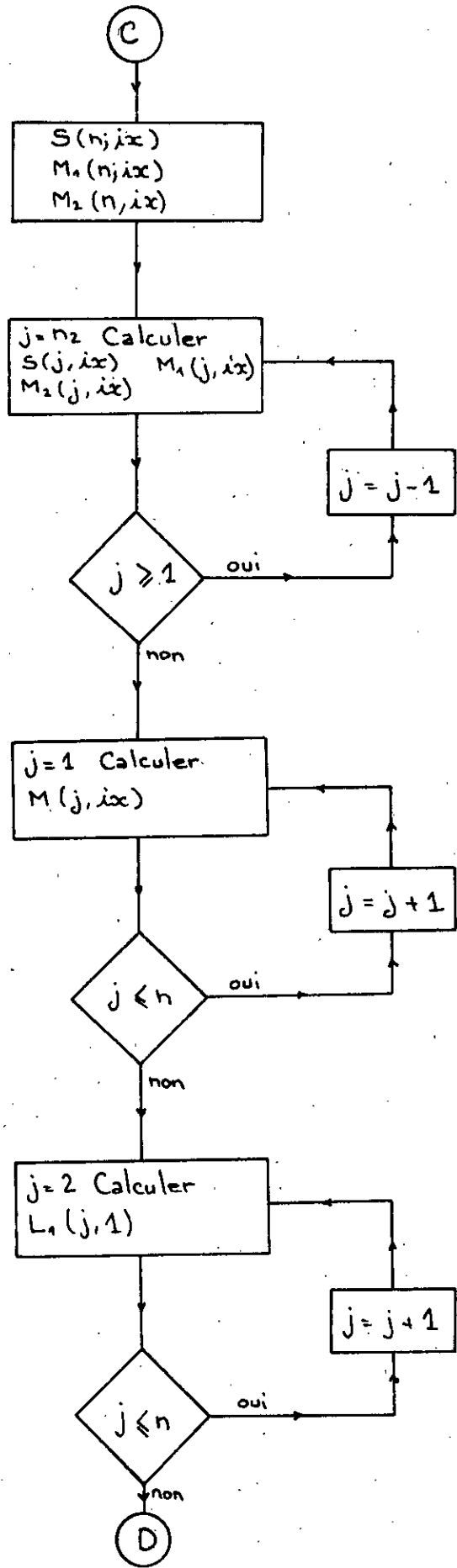
$j = 1$ . Lire  $w(j, 1)$ ,  
 $H(j, 1)$ ;  $H_1(j, 1)$ ;  $I_b(j, 1)$   
 $E(j)$ ;  $L(j, 1)$ ;  $b(j, 1)$

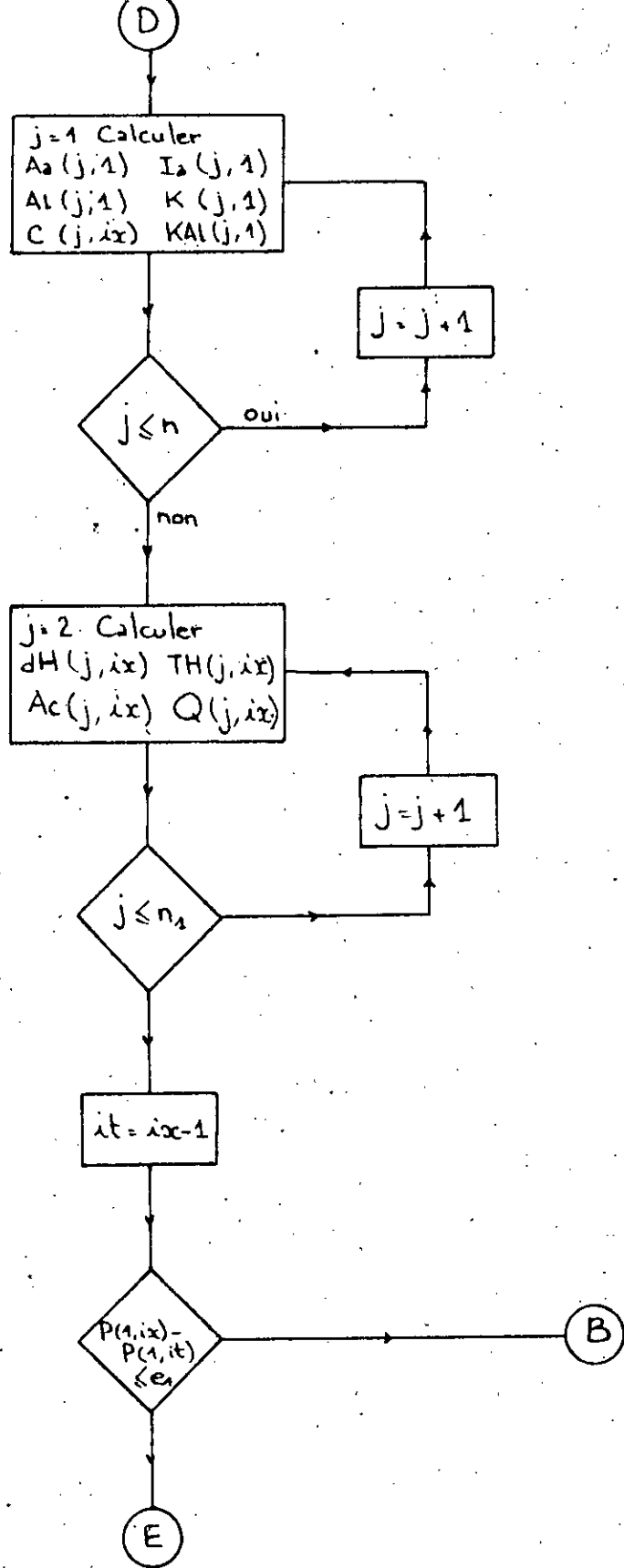
$j \leq n$

$j = j + 1$

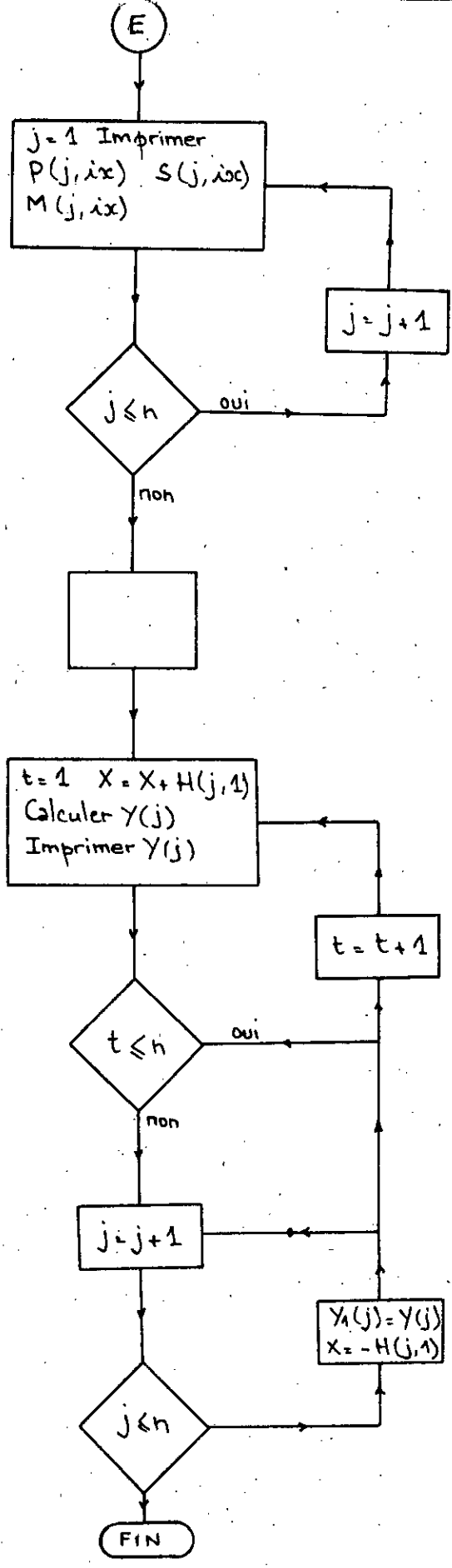
A











## VII.7 EXEMPLE DE CALCUL

Soit une structure de type " Murs Jumelés " de vingt étages (voir figure VII.5) comportant deux changements brusques de section respectivement au sixième et douzième étage, soumise à un chargement uniforme latéral de 15 KN/m constant le long des trois régions. Les caractéristiques de cette structure sont données dans le tableau suivant:

Caractéristiques	Région 1	Région 2	Région 3
Hauteur totale (H)	22,5 m	22,5 m	30 m
Longueur des ouvertures (b)	4,5 m	6,5 m	8,5 m
Longueur des murs (d)	6,75 m	4,75 m	2,75 m
Longueur de l'entre-axe des murs (L)	11,25 m	11,25 m	11,25 m
Epaisseur des murs (e)	0,45 m	0,45 m	0,45 m
Inertie des murs (I)	23,066 m <sup>4</sup>	8,038 m <sup>4</sup>	1,56 m <sup>4</sup>
Inertie des poutres de jonction (I <sub>p</sub> )	0,11165 10 <sup>-3</sup> m <sup>4</sup>	0,11165 10 <sup>-3</sup> m <sup>4</sup>	0,11165 10 <sup>-3</sup> m <sup>4</sup>
Section des murs (A)	6,075 m <sup>2</sup>	4,275 m <sup>2</sup>	2,475 m <sup>2</sup>
Matériau (E)	2,8 10 <sup>7</sup> KN/m <sup>2</sup>	2,8 10 <sup>7</sup> KN/m <sup>2</sup>	2,8 10 <sup>7</sup> KN/m <sup>2</sup>

En utilisant les équations établies dans ce chapitre, nous commençons tout d'abord, grâce au programme de calcul élaboré (voir organigramme 2) par calculer les efforts internes résultant de l'influence mutuelle entre les différentes régions.

Les résultats obtenus sont les suivants:

Efforts	Région 1	Région 2	Région 3
P (KN)	62,84	36,79	0,00
S (KN)	785,50	450,00	0,00
M (KN.m)	19964,86	6336,13	0,00

Après avoir obtenu ces efforts nous passons à la deuxième étape du calcul qui consiste en la détermination de la flèche proprement dite et cela par l'intermédiaire des

équations donnant la valeur de celle-ci pour chaque Région. Afin de vérifier les résultats obtenus, nous les comparons avec les valeurs données par une méthode exacte, en l'occurrence un programme d'éléments finis (M.E.M, [8]).

Ces valeurs sont consignées dans le tableau suivant:

Abcisse x(m)	Valeurs de la flèche Y(m)	Valeurs exactes (m)
0,00	0,000	0,000
3,75	0,044 $10^{-2}$	0,044 $10^{-2}$
7,50	0,168 $10^{-2}$	0,169 $10^{-2}$
11,25	0,366 $10^{-2}$	0,368 $10^{-2}$
15,00	0,628 $10^{-2}$	0,632 $10^{-2}$
18,75	0,947 $10^{-2}$	0,954 $10^{-2}$
22,50	1,317 $10^{-2}$	1,326 $10^{-2}$
26,25	1,187 $10^{-2}$	1,780 $10^{-2}$
30,00	2,396 $10^{-2}$	2,344 $10^{-2}$
33,75	3,073 $10^{-2}$	3,000 $10^{-2}$
37,50	3,833 $10^{-2}$	3,733 $10^{-2}$
41,25	4,662 $10^{-2}$	4,531 $10^{-2}$
45,00	5,548 $10^{-2}$	5,383 $10^{-2}$
48,75	6,643 $10^{-2}$	6,343 $10^{-2}$
52,50	7,832 $10^{-2}$	7,467 $10^{-2}$
56,25	9,137 $10^{-2}$	8,705 $10^{-2}$
60,00	10,554 $10^{-2}$	10,025 $10^{-2}$
63,75	12,017 $10^{-2}$	11,396 $10^{-2}$
67,50	13,518 $10^{-2}$	12,795 $10^{-2}$
71,25	15,038 $10^{-2}$	14,210 $10^{-2}$
75,00	16,579 $10^{-2}$	15,622 $10^{-2}$

#### Conclusion:

La méthode basée sur la technique des milieux continus élaborée afin de traiter les problèmes présentant une non uniformité du point de vue structurale au chargement extérieur, peut être élargie afin d'englober des structures soumises à d'autres type de chargements, à savoir, charge concentrée ou charge triangulaire. Un modèle pourra également être conçu comme il a été vu dans le chapitre (VI).

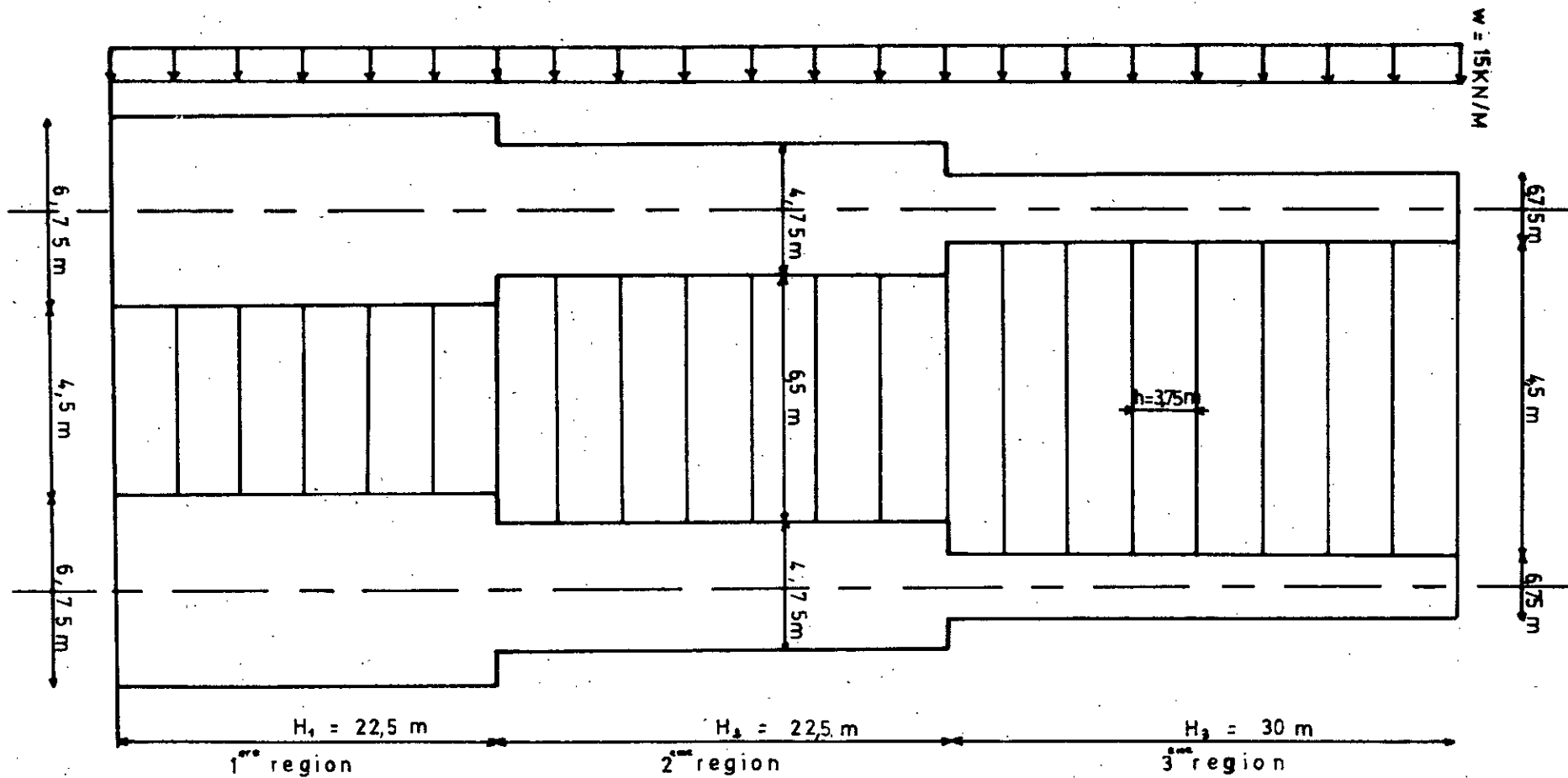


Figure VIII.5

## CONCLUSION

Nous avons présenté dans notre travail, une méthode simple basée sur la technique des milieux continus permettant l'analyse latérale d'une structure à trois dimensions avec plusieurs plans de contreventement, soumise à n'importe quel chargement latéral.

En utilisant l'hypothèse qu'un plan de contreventement complexe peut être remplacé par un portique rigide à une seule travée ayant le même comportement, l'analyse détaillée d'une structure complexe à trois dimensions est réduite à l'analyse d'un modèle relativement simple permettant une détermination rapide de la distribution des forces ainsi que de la flèche latérale.

Plusieurs exemples ont été traités de manière détaillée par cette méthode et la comparaison avec l'analyse exacte a montré que les résultats obtenus en utilisant les modèles simplifiés s'approchaient de la réalité. Il est à noter cependant que l'exactitude des résultats augmente avec le nombre d'étages, car l'erreur que l'on commet en remplaçant la distribution discrète des poutres et ouvertures par un milieu continu diminue considérablement pour un grand nombre de poutres.

Comme la tendance à construire de plus en plus haut dans les bâtiments modernes ne cesse de croître et que pour des raisons d'économie de telles structures sont conçues en diminuant les sections des éléments de contreventement en hauteur. Nous nous sommes donc intéressés à la détermination de la flèche latérale d'une structure à section variable en hauteur. Cette dernière pourra être utilisée dans de futurs travaux afin de déterminer un modèle simplifié pour ce genre de structures.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] H.Beck "Contribution to the Analysis of Coupled Shear Walls" Article du "American Concrete Institute (ACI)", Août. 1962, P.P. 1055-1070.
- [ 2 ] B.Stafford Smith, M.Kuster et J.C.D. Hoenderkamp "A Generalized Approach to the Deflection Analysis of Braced Frame, Rigid Frame, and Coupled Wall Structures" Article du "Canadian Journal of Civil Engineering", n°.8, 1981, P.P.230-240.
- [ 3 ] S.Salhi "Structural Modelling of Tall Buildings Using Generalized Parameters" Master, Département de Génie Civil, Université de McGill, Montreal, Canada.
- [ 4 ] J.C.D.Hoederkamp "A Parameter Study of Tall Building Structures". Thèse présentée pour des études doctorales et de recherches pour une demande de niveau de magister, Université de McGill.
- [ 5 ] A.A.Smith, E.Hinton, R.J.Lewis "Civil engineering Systems Analysis and Design" Chapitre 5 Programation non linéaire page 179-234
- [ 6 ] G.Dhatt, G.Touzot "Une Présentation des Eléments Finis" Chapitre 5.3 Résolution de systèmes non linéaires.
- [ 7 ] M.Albiges, J.Goulet "Contreventement des bâtiments" Annale de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, n°149, Mai 1960.
- [ 8 ] C.Mélancon "A New Finite Element for Shear Wall Structures" Project Report, Département de Génie Civil, McGill University, Montreal, Canada.
- [ 9 ] R.D.Puri "Analysis of Coupled shear walls of Variable Thickness" M SC, Département de Génie Civil, Université de Southampton.
- [ 10 ] E.E.Traum "Simplified Analysis of Coupled Shear Walls of Variable Cross Section" Professeur de construction, Université de Harvard, Build sci vol 5, pp 11-20.