

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *G. Civil*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Analyse des problèmes de
l'élasticité plane par la méthode des
équations intégrales aux frontières.

Proposé par :

M. MESSAFER

Etudié par :

^{elle} M^{elle} BOUDAA . S
^{elle} M^{elle} DJAALALI . F

Dirigé par :

M. MESSAFER

PROMOTION

91 : 92

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail:

- à mes très chers parents,
- à la petite famille d'oncle Djamel,
- à mes frères et sœurs, et
- à tous ceux que j'aime.

Souad,

Je dédie ce travail:

- à mon père et à ma mère,
- à ma sœur Nacera, et
- à tous ceux qui me sont chers.

Fouzia,

3.2.2	Méthode de Collocation par Points	27
3.2.3	Méthode de Collocation par Sous-domaines	28
3.2.4	Méthode de Galerkin	29
CHAPITRE IV	: SOLUTION FONDAMENTALE	30
4.1	INTRODUCTION	30
4.2	ESPACE INFINI	31
4.2.1	Détermination de la Solution de Kelvin en 2D	31
CHAPITRE V	: REPRESENTATION DE LA BEM	41
5.1	INTRODUCTION	41
5.2	FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE - IDENTITE DE SOMIGLIANA	41
5.2.1	Solutions Fondamentales	45
5.3	EQUATION INTEGRALE DE FRONTIERE	47
5.4	DISCRETISATION DE L'EQUATION INTEGRALE-ELEMENTS DE FRONTIERES	52
5.4.1	Fonctions d'Interpolation	54
5.4.2	Choix de l'Interpolation Linéaire	58
5.5	DETERMINATION DES COEFFICIENTS H_{IJ} ET G_{IJ}	62
5.6	MOUVEMENT DE CORPS RIGIDE ET RESOLUTION	70
5.6.1	Problème Interne	70
5.6.2	Problème externe	71
5.7	TRAITEMENT DES SINGULARITES	75
5.7.1	Transformation des Fonctions d'Interpolation ϕ_1 et ϕ_2	76
5.7.2	Calcul des Expressions Singulières dans [H]	77
5.7.3	Calcul des Expressions Singulières dans [G]	84

5.8 POINTS INTERNES	91
5.8.1 Détermination des Déplacements au Point 'i'	92
5.8.2 Détermination du Tenseur Contrainte au Point 'i'	94
CHAPITRE VI : PROBLEME DE COIN	98
6.1 INTRODUCTION	98
6.2 DEFINITION DU PROBLEME	98
6.3 DIFFERENTES APPROCHES DE RESOLUTION DU PROBLEME DE DIRICHLET	101
6.3.1 Représentation de Noeud Unique	101
6.3.2 Concept de Noeuds Multiple Indépendant	102
6.3.3 Concept de noeuds multiples avec relations auxiliaires	102
6.3.4 Approche de Mustoe	105
6.3.5 Concept de Double Noeud Non Confondus	106
CHAPITRE VII : MODELISATION DE MATERIAU ANISOTROPE HETEROGENE	108
7.1 INTRODUCTION	108
7.2 ISOTROPIE TRANSVERSALE	109
7.2.1 Historique	109
7.2.2 Formulation de Solution Fondamentale	111
7.2.3 Conclusion	119
7.3 MATERIAU NON HOMOGENE	120
7.3.1 Généralités	120
7.3.2 Sub-regions	122

CHAPITRE VIII : PROGRAMMATION	131
8.1 PRESENTATION DU PROGRAMME DBEM	131
8.1.1 Introduction	131
8.1.2 Présentation du Programme	131
8.2 PRESENTATION DU PROGRAMME TLBEM	144
8.2.1 Introduction	144
8.2.2 Présentation du Programme	145
CHAPITRE IX : APPLICATIONS	
Exemple 1 : Console soumise à la traction simple.	148
Exemple 2 : Console soumise à un cisaillement uniforme.	154
Exemple 3 : Cavité dans un domaine infini.	156
Exemple 4 : Problème de sol.	159
Exemple 5 : Problème de sol en bicouche.	164

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE I

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

La méthode des éléments de frontière (boundary element method BEM) est un outil très puissant d'analyse des structures continues. Le développement qu'a connu cette technique durant la dernière décennie a permis son application dans divers domaines d'engineering.

Dans ce chapitre, on va commencer par donner une introduction de la méthode des éléments de frontière et une présentation du sujet, ensuite un bref historique et enfin les avantages et inconvénients de la dite méthode.

1.1 INTRODUCTION

La résolution des problèmes de l'élasticité nécessite la formulation séparée d'équations décrivant différentes catégories de réponse de matériau idéal. Chacune de ces équations est une formulation mathématique ayant pour but l'approximation d'observations physiques de la réponse d'un matériau réel dans un domaine déterminé. Ces équations aux dérivées partielles sont tellement compliquées que l'on ne saura les résoudre même au niveau actuel du développement des méthodes mathématiques.

Grâce à l'outil informatique et au développement des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finies (FEM), la méthode des différences finies (FDM), et la méthode des éléments de frontière (BEM), il devient possible de résoudre les

problèmes rencontrés en mécanique des sols, hydraulique, structure, et bien d'autres domaines.

La BEM est une des méthodes numériques que nous avons adopté dans notre étude. Les différentes étapes de transformation des équations du système physique sont décrites par la figure 1-1 ci-dessous.

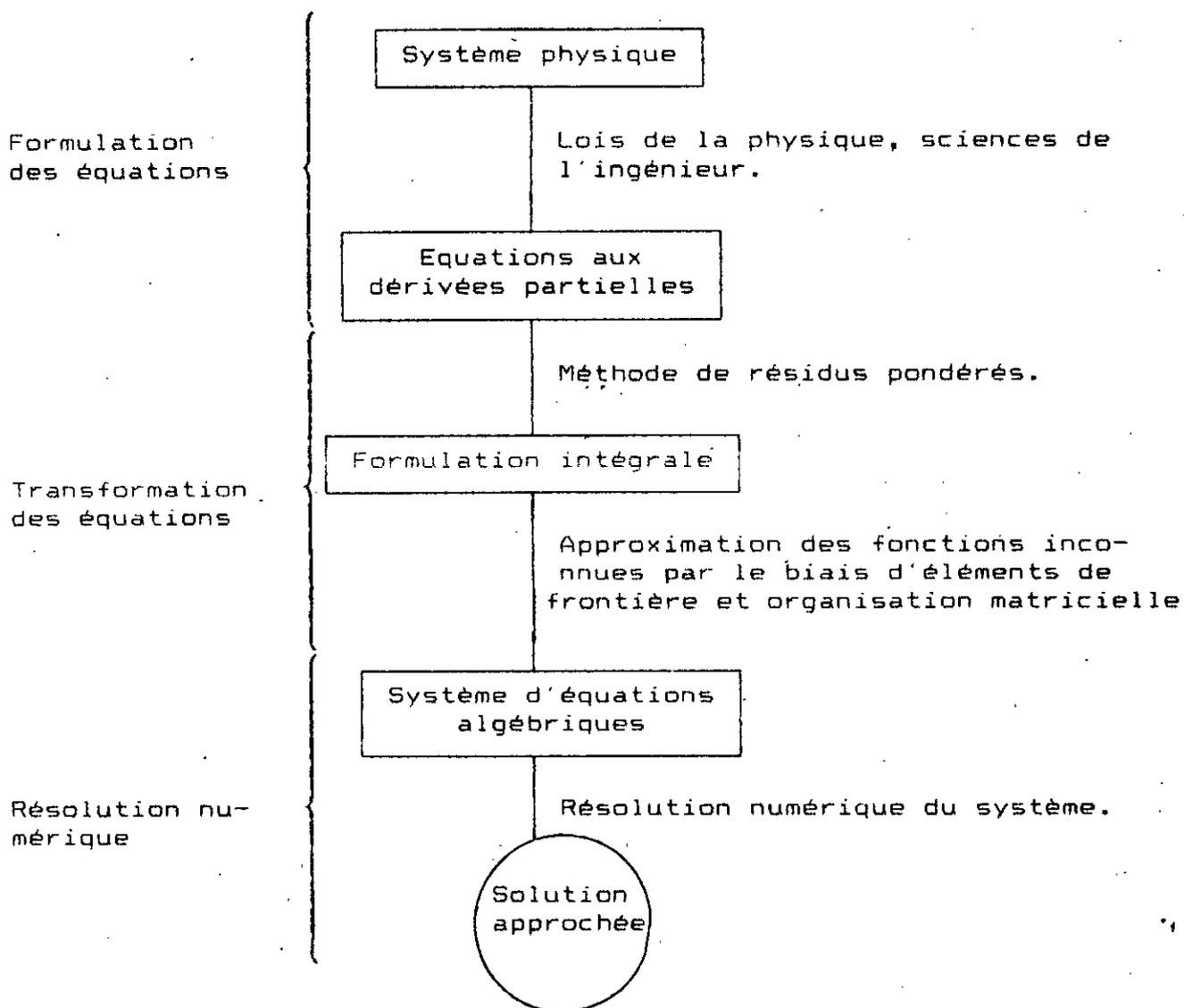


Fig. 1-1 Transformation des équations du système physique.

L'utilisation de la BEM n'est pas très répandue, ceci s'explique par la difficulté de compréhension de la méthode qui exige en effet des connaissances dans des domaines variés:

- Compréhension du problème physique étudié et connaissance intuitive de la nature de la solution.
- Compréhension et détermination des solutions fondamentales.
- Approximations des inconnues physiques.
- Technique d'organisation matricielle.
- Méthodes numériques d'intégration et de résolution de système d'équations algébriques.
- Techniques informatiques adaptées à des programmes complexes et à des volumes d'informations importants.

1.2 PRESENTATION DU SUJET

Les méthodes numériques d'analyse ont reçu une attention considérable ces dernières années et ce depuis l'apparition des ordinateurs et les capacités qu'ils offrent.

La méthode des équations intégrales aux frontières (BEM) fait partie de ces méthodes dont la caractéristique principale est l'étude du problème sur sa frontière.

Le principe de la formulation directe de la BEM consiste à:

- Etablir une formulation intégrale des équations différentielles régissant le comportement physique du problème étudié en utilisant la méthode des résidus pondérés,
- discrétiser la frontière en éléments linéaires formant ainsi le système d'équations algébriques $[H] \{U\} = [G] \{P\}$,

- imposer les conditions aux frontières de type Dirichlet, Neumann ou Robin,

_ et enfin résoudre le système d'équations arrangé sous la forme $[A] (X) = (B)$.

Une fois toutes les inconnues sur la frontière sont déterminées, il devient alors possible de connaître le vecteur déplacement et le vecteur contrainte en tout point du domaine.

Dans notre projet, nous avons étudié la méthode dite: formulation directe des équations intégrales aux frontières en deux dimensions pour des problèmes en déformation et en contrainte plane. Nous avons utilisé la solution fondamentale de Kelvin en deux dimensions.

Le matériau est supposé être élastique, homogène et isotrope obéissant à la loi de Hooke, les forces de volume ne sont pas prises en considération.

Nous avons élaboré le programme DBEM permettant la détermination des inconnues physiques (déplacements et tractions surfaciques) approximées de façon linéaire sur la frontière, ainsi que les déplacements et le tenseur contrainte pour des points intérieurs du domaine.

Ce programme nous a permis de déterminer l'état de contrainte et de déformation dans un domaine semi-infini (sol) soumis à un chargement uniforme.

L'ingénieur est parfois confronté à l'étude de certaines structures comportant des cavités et soumises à des pressions internes, de telles cavités sont considérées comme des zones de faiblesse. Il serait donc intéressant d'étudier un domaine présentant une cavité.

La deuxième partie de notre étude consiste en la modélisation par la BEM de domaine non homogène en sub-régions homogènes, élastiques et isotropes. Nous avons élaboré des sous-routines complémentaires permettant la résolution du problème ainsi formulé. Le programme TL-BEM (two layers BEM) nous a permis d'étudier un sol en bicouches.

1.3 HISTORIQUE

Les équations intégrales ont été étudiées par beaucoup de mathématiciens Fredholm (1905), Smirnov (1929), Voltera (1959), Mikhlin (1957 et 1967) et d'autres.

L'application des équations intégrales pour formuler les solutions fondamentales pour la théorie de potentiel a été faite par Fredholm (1903) qui a démontré l'existence de solutions pour de telles équations en se basant sur une procédure de discrétisation.

En 1929, Kollogg a exprimé l'équation intégrale pour un problème de champ potentiel en terme d'équations intégrales aux frontières.

Betti et Somigliana se sont basés sur l'analogie qui existe entre les théories de potentiel et d'élasticité pour analyser des problèmes d'élastostatiques par le biais d'équations intégrales aux frontières.

En 1963, Jaswon et Symm ont présenté une technique numérique pour la résolution d'équations intégrales aux frontières. Ils ont pu déterminer des solutions pour des problèmes bidimensionnels de type Neumann et Dirichlet.

Jaswon et Maiti en 1968 se sont penchés sur l'étude des

plaques en flexion. Leur travail a été développé par Stern (1979 et 1983), Ween (1982) et Kim (1982) alors que les problèmes de plaques polygonales simplement appuyées ont été résolus par Maiti et Chakrabarty (1974).

Les problèmes de sol ont été traité par un grand nombre de chercheurs: Crouch (1976) a étudié les excavations souterraines, Lachat et Watson (1977) ont traité les problèmes de mines, et Wardle (1977) a appliqué la BEM pour les multicouches.

En 1975, Wood a établi une approche par éléments de frontière pour la prédiction des tassements de structures et l'analyse de l'interaction sol-structure.

Rizzo (1967) a développé une approche par équations intégrales aux frontières qui traite des problèmes classiques d'élastostatiques.

Cruse (1969) a étendu cette approche pour la résolution des problèmes tridimensionnels, puis en 1973, il appliqua la méthode pour l'analyse de contrainte en tridimensionnel.

Plusieurs algorithmes récemment développés sur la méthode des éléments de frontière sont décrits par Cruse (1975), Lachat (1975), Rizzo (1979), Shaw (1969), Watson (1976), Brebbia (1978) et bien d'autres.

1.4 QUELQUES AVANTAGES DE LA BEM

Les méthodes numériques d'analyse ont reçue une grande attention ces dernières années et ce depuis l'apparition des ordinateurs. La BEM fait partie de ces méthodes, dont les principaux avantages sont:

1- Vaste champ d'application:

La BEM utilise le principe de superposition, elle s'applique donc à des problèmes linéaires. Jusque là, la BEM a permis de résoudre maints problèmes à savoir: élastostatiques, élastodynamiques, élastoplastiques, ... qu'on rencontre en mécanique des sols, hydraulique, mécanique de rupture, ..., etc.

2- Dimension du problème:

La dimension du problème étudié est réduite d'une unité, autrement dit, pour un problème bidimensionnel on aura une équation intégrale de frontière unidimensionnelle, et pour un problème tridimensionnel on aura une équation de frontière bidimensionnelle. Ceci vient du fait que les fonctions inconnues intervenant, se trouvent sur la frontière et non à l'intérieur du domaine.

En effet, le système d'équations obtenu avec une discrétisation de la frontière uniquement est relativement petit. Le coût de calcul augmente très peu avec la taille des problèmes.

La BEM est mieux adaptée du point de vue coût et temps d'exécution pour la résolution de problèmes à domaine infini ou semi-infini. Il est bien évident que lors de l'analyse de tels problèmes, on va considérer des frontières finies sur lesquelles les conditions aux limites admissibles à l'infini sont vérifiées.

Les problèmes à domaine infini ne peuvent pas être résolus par la méthode des éléments finis qui contrairement à la BEM, exige la discrétisation du domaine en très grand nombre d'éléments, donnant lieu à des matrices d'ordre très élevé et par conséquent, les calculs et la résolution deviennent impossibles.

3- Modélisation intérieur:

Dans la BEM, seul la frontière est discrétisée, en effet, on a tendance à croire qu'on ne peut résoudre un problème que sur ces frontières. Ce qui n'est pas vrai grâce aux fonctions inconnues déterminées sur la frontière, on obtient la solution en des points internes au domaine. Cette façon de faire est unique à la BEM parmi toutes les alternatives possibles.

4- Précision:

L'équation intégrale de frontière est en elle même un exposé de la solution exacte du problème étudié.

Les erreurs ne peuvent provenir que de la manière avec laquelle la géométrie et les paramètres physiques du problème sont approximatés sur la frontière (élément constant, linéaire, quadratique, ..., etc.) et des approximations numériques auxquelles on a recours pour le calcul des intégrales. Les erreurs sont réduites avec le choix approprié des fonctions de formes.

5- Entrée des données:

Dans la BEM, la réduction de la dimension du problème engendre une réduction des données requises pour dérouler le problème. Par contre, en éléments finis, un très grand nombre de données est nécessaire pour dérouler un programme, donnant lieu à une perte considérable de temps et d'argent dans la préparation et le contrôle des données. Ce qui rend la BEM plus compétitive que les autres méthodes de résolution.

1.5 PROBLEMES RENCONTRES AVEC L'UTILISATION DE LA BEM

Malgré l'intensité des publications et les efforts déployés pour le développement de la BEM, cette dernière n'est pas encore très populaire aux ingénieurs, en effet la majorité des programmes de la BEM ne peuvent être utilisés par des personnes non spécialisées.

Beaucoup d'études se font actuellement pour surmonter les problèmes associés à la BEM dont les principaux:

1- Singularités au niveau des intégrales:

Les expressions intégrées contiennent des termes tels que $\log r$, $1/r$, $1/r^2$, ..., etc. qui tendent vers l'infini quand r tend vers zéro, autrement dit, lorsqu'on s'approche du point source. L'intégration numérique par quadrature de Gauss ne peut s'appliquer dans de tels cas.

Récemment, quelques chercheurs (Lera et Alarcon 1982) ont expliqué comment traiter les problèmes de singularités. Cette nouvelle approche complique la programmation, cependant, elle permet d'améliorer de façon définitive les résultats.

2- Forces de volume:

La considération des forces de volume complique la BEM, en effet, on est amené à évaluer des intégrales sur le domaine. La discrétisation du domaine en un nombre suffisant de cellules est alors nécessaire. De là, on perd l'avantage principal de la BEM. Il est à noter que plusieurs essais ont été fait pour transformer l'intégration sur le domaine en intégration de frontière pour différents cas de chargement.

3- Problèmes de coins:

La traction au niveau d'un noeud est une fonction de la normale. Quand le noeud appartient à un coin (ceci s'applique pour l'approximation linéaire, quadratique, et d'ordre supérieure seulement), il va lui correspondre 2 normales et par conséquent 2 tractions peuvent être définies.

Une analyse particulière est faite pour contourner ce problème. On doit s'attendre à ce qu'une telle analyse donne de bons résultats assez loin des coins et des résultats moins bons près des coins. C'est la 1^{re} approche qui a été utilisée par Jaswon et Symm (1977).

4- Résolution du système d'équations:

L'analyse par la BEM génère des matrices entièrement peuplées et non symétriques, la résolution des systèmes d'équations correspondants est par conséquent lente comparée à la résolution par la méthode bande utilisée dans la FEM. Le temps nécessaire à la résolution des systèmes d'équations peut même dépasser le temps requis pour la formation des matrices elles mêmes.

5- Matériau non linéaire:

Pour de tels matériaux, la modélisation du domaine en cellules linéaires est équivalente à la discrétisation du domaine entier. La BEM perd ainsi sa principale caractéristique qui consiste en la discrétisation de la frontière uniquement.

CHAPITRE II

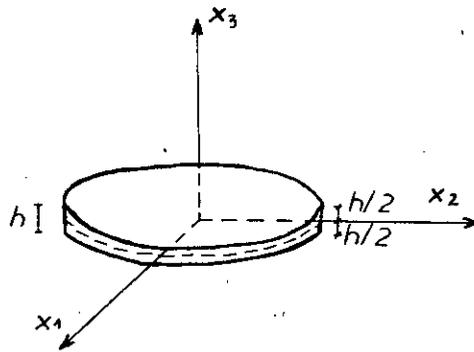


Fig. 2-4 Etat de contrainte plane .

Le cylindre est chargé latéralement et indépendamment de l'axe x_3 . Le chargement doit être parallèle au plan moyen et distribué symétriquement par rapport à celui-ci.

Le modèle de contrainte plane ainsi obtenu convient bien aux plaques minces sollicitées dans leur plan. Les hypothèses de base de ce modèle sont :

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0 \quad (2,21)$$

Pour un matériau isotrope, la loi de Hooke donne :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{22}}{E} \\ \epsilon_{22} &= -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} \\ \epsilon_{12} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (2,22)$$

D'où l'on tire les relations contraintes-déformations suivantes :

$$(2,23) \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Les contraintes σ_{11} , σ_{22} , et σ_{12} sont indépendantes de x_3 de même les déplacements seront des fonctions de x_1 et x_2 seulement:

$$U_1 = U_1(x_1, x_2)$$

$$U_2 = U_2(x_1, x_2).$$

Ces déplacements sont supposés être constants sur toute l'épaisseur du cylindre.

L'effet de Poisson donne naissance à un déplacement U_3 qui peut être calculé à partir de la relation contrainte-déformation pour ϵ_{33} :

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = - \frac{\nu \sigma_{11}}{E} - \frac{\nu \sigma_{22}}{E} = - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2,24)$$

2.3.2 Etat de Déformation Plane:

Considérons un cylindre élancé dont la dimension suivant la direction x_3 est grande par rapport aux deux autres dans le plan $x_1 x_2$ (Fig. 2-5).

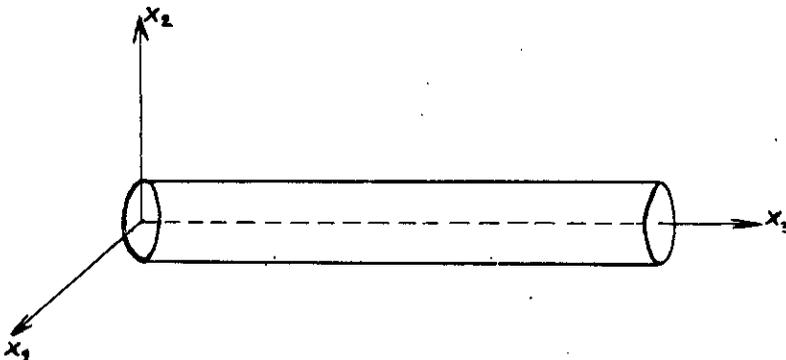


Fig. 2-5 Etat de Déformation Plane.

Ce modèle est considéré comme étant un cas de déformation plane. Les hypothèses de base se traduisent par les relations:

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0 \quad (2,25)$$

Les déplacements dans le plan (x_1, x_2) sont indépendants de x_3 , i.e:

$$U_1 = U_1(x_1, x_2)$$

$$U_2 = U_2(x_1, x_2)$$

Il faut noter que la contrainte σ_{33} est telle que: $\sigma_{33} \neq 0$, elle peut être déterminée à partir de la loi de Hooke:

$$\epsilon_{33} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \quad (2,26)$$

d'où:

$$\sigma_{33} = \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2,27)$$

De la même manière qu'on contrainte plane, on établit les relations contraintes-déformations en utilisant les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu \frac{\sigma_{33}}{E} \\ \epsilon_{22} &= -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu \frac{\sigma_{33}}{E} \\ \epsilon_{12} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (2,28)$$

On obtient donc:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2,29)$$

Remarque:

On peut passer aisément des formules relatives aux déformations planes, aux formules relatives aux contraintes planes, en remplaçant le module de Young par $\bar{E} = E(1 - \bar{\nu})$ et le coefficient de Poisson par $\bar{\nu} = \nu / (1 + \nu)$.

CHAPITRE III

CHAPITRE III

METHODES DES RESIDUS PONDERES

3.1 INTRODUCTION

Dans le cas où il devient difficile de déterminer la solution analytique d'un problème par le biais d'une résolution mathématique du système d'équations différentielles régissant le comportement du système physique, on fait recours à des techniques numériques basées sur des méthodes d'approximation.

3.2 METHODES DES RÉSIDUS PONDÉRÉS

Les méthodes des résidus pondérés permettent en utilisant des fonctions de pondération de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale.

Selon le choix de la fonction de pondération, on obtient tout un ensemble de formulations intégrales, en d'autres termes, les différentes méthodes de résidus pondérés se distinguent par des choix particuliers des fonctions de pondération.

Soit à résoudre le problème aux limites gouverné par l'équation aux dérivées partielles:

$$\mathcal{L}(U_0) = b \quad \text{dans } \Omega$$

avec les conditions aux limites associées:

$$\begin{array}{lll} - \text{essentielles} & S(U_0) = s & \text{sur } \Gamma_1 \\ - \text{naturelles} & G(U_0) = g & \text{sur } \Gamma_2 \end{array}$$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ étant la frontière du domaine Ω .

U_0 : représente la solution exacte du problème.

Soit U l'approximation de U_0 qui s'écrit comme suit:

$$U = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \quad (3,1)$$

où ϕ_k représentent des fonctions d'approximation linéairement indépendantes.

On définit une fonction erreur appelé aussi résidu par la relation suivante:

$$R = \mathcal{L}(U) - b = \mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k\right) - b \quad \text{sur } \Omega \quad (3,2)$$

Si la fonction U ne satisfait pas toutes les conditions aux frontières, deux autres fonctions d'erreur sont à envisager:

i- erreur sur les conditions essentielles (déplacements):

$$R_1 = S(U) - s \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

ii- erreur sur les conditions naturelles (tractions):

$$R_2 = G(U) - g \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Notre but est de minimiser l'erreur sur le domaine Ω et sa frontière Γ . On définit alors les fonctions de pondération ψ_1 et $\bar{\psi}_1$ appartenant à un espace linéairement indépendant. On écrit alors:

$$\int_{\Omega} R \psi_1 d\Omega + \int_{\Gamma} R' \bar{\psi}_1 d\Gamma = 0 \quad (3,3)$$

R' représente l'erreur sur la frontière Γ .

Cette dernière équation est équivalente à la satisfaction des équations différentielles et de leurs conditions aux frontières.

Des restrictions sont à imposer sur la nature des familles auxquelles les fonctions ψ_1 et $\bar{\psi}_1$ doivent appartenir. Nous

plus simplement (écriture indicielle):

$$U_j = \frac{1}{2G} [2(1-\nu)F_{j,11} - F_{1,1j}] \quad (4,8)$$

en substituant l'équation (4,8) dans (4,7) on obtient:

$$\nabla^4 F + \frac{1}{(1-\nu)} \delta_L^i = 0 \quad (4,9)$$

Ainsi la résolution de (4,7) revient à résoudre l'équation (4,9); si nous déterminons la fonction F, nous aurons déterminé l'état de contrainte, de déformation et de déplacement en tout point du domaine dG à l'application de la force unité δ_L^i au point 'i'.

3) Résolution de l'équation (4,9):

Soit $\nabla^2 F = G$

l'équation (4,9) devient:

$$\nabla^2 G = - \frac{1}{(1-\nu)} \delta_L^i \quad (4,10)$$

* Solution homogène de l'équation (4,10):

En utilisant les coordonnées polaires $\nabla^2 G = 0$ s'écrit:

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \quad (4,11)$$

ceci en considérant une distribution symétrique

d'où $G(r) = C_1 \ln r \quad (4,12)$

détermination de C_1 :

En utilisant l'équation (4,10) et en tenant compte de la figure

4-1:

$$\nabla^2 G = - \frac{1}{(1 - \nu)} \delta_L^i$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 G d\Omega = \int_{\Omega} - \frac{1}{(1 - \nu)} \delta_L^i d\Omega = - \frac{1}{(1 - \nu)}$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 G d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla G) d\Omega = 1 \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} n_2$$

Pour un cas particulier où η est parallèle à ζ :

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

d'où

$$C_1 = - \frac{1}{2\pi(1 - \nu)} \quad (4,13)$$

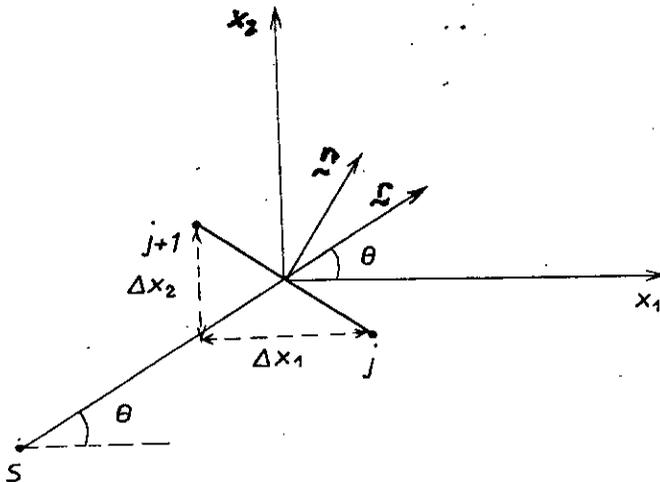


Fig. 4-1 Coordonnées polaire.

r : distance entre le point source 's' et le point considéré 'Q'.

(j+1), (j) éléments de longueur L_j .

$$r = (r_1 r_2)^{1/2}$$

$$r_i = x_i(Q) - x_i(S) \quad \text{pour } i = 1, 2$$

Ainsi:

$$G(r) = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \text{Ln } r \quad (4,14)$$

or

$$\nabla^2 F = G(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \text{Ln } r$$

d'où on tire:

$$F(r) = - \frac{r^2}{8\pi(1-\nu)} [\text{Ln } r - 1] \quad (4,15)$$

Pour une force agissant suivant la direction i , le vecteur Galerkin s'écrit comme suit:

Suivant la direction $i = 1$:

$$\underline{F} = X \underline{j} \quad (Y = 0)$$

Suivant la direction $i = 2$:

$$\underline{F} = Y \underline{j} \quad (X = 0)$$

Supposons une charge selon la direction i

La fonction de Galerkin est:

$$X = - \frac{r^2}{8\pi(1-\nu)} [\text{Ln } r - 1] \quad (4,16)$$

Ainsi les déplacements engendrés par δf sont:

$$U_{11} = \frac{1}{2G} \left[2(1 - \nu) \Delta X - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \underline{F} \right]$$

$$U_{12} = \frac{1}{2G} \left[2(1 - \nu) \Delta Y - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \underline{F} \right]$$

$$\Delta X = - \frac{4}{8\pi(1 - \nu)} \operatorname{Ln} r$$

$$\operatorname{div} \underline{F} = \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (Y = 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \underline{F} = \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r_1}{r} ;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right] = \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right]$$

en substituant les expressions ci-dessus dans U_{11} et U_{12} on aura :

$$U_{11} = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)} \left[(3 - 4\nu) \operatorname{Ln} \frac{1}{r} - \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (4, 17)$$

$$U_{12} = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right]$$

Supposons une charge selon la direction j :

En procédant comme précédemment, les déplacements sont :

$$U_{22} = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)} \left[(3 - 4\nu) \operatorname{Ln} \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (4, 18)$$

$$U_{21} = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial x_1} \right]$$

En résumé:

L'action d'une force unité au point source 's' selon la direction (l = 1,2), produira des déplacements au point 'Q' selon la direction (k = 1,2) (voir Fig. 4-2) tel que le point 'Q' est à une distance r du point source 's' on écrira:

$$U_{lk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \text{Ln} \frac{1}{r} \delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (4,19)$$

tel que $\delta_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = k \\ 0 & \text{si } l \neq k \end{cases}$

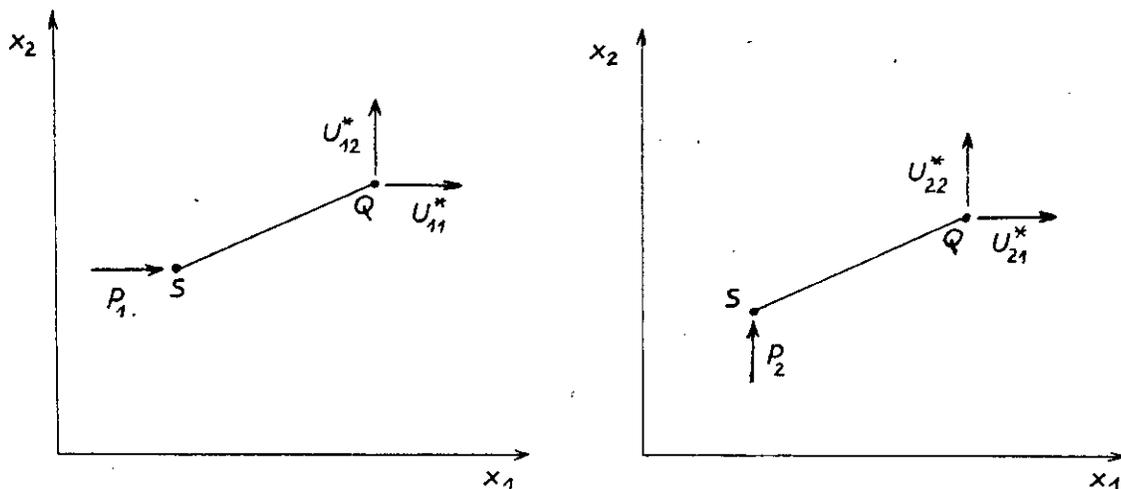


Fig. 4-2

U_{lk} : déplacement selon la direction k dG à l'application de la force unitaire P selon la direction l.

De la même manière, on détermine l'état de contrainte au point 'Q' dG à la charge au point 's' en utilisant les relations suivantes:

$$\sigma_{ij} = \lambda U_{p,p} \delta_{ij} + G (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (4,20)$$

En substituant (4,19) dans (4,20) et en utilisant la relation liant les tractions surfaciques aux contraintes:

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \quad (4,21)$$

où n_j est le cosinus directeur de la normale au plan tangent au point 'Q' (voir Fig. 4-2). Nous déterminons les tractions surfaciques au point 'Q' dues à l'application de la charge au point source 's', on aura:

$$P_{ik}^* = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{ik} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right\} - \right. \\ \left. (1-2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_i \right\} \right] \quad (4,22)$$

avec

$$n_1 = \cos(n, x_1) = \frac{\Delta X_1}{l_j}$$

$$n_2 = \cos(n, x_2) = \frac{\Delta X_2}{l_j}$$

Ainsi U_{ik}^* et P_{ik}^* sont les solutions fondamentales en deux dimensions établies par Kelvin pour des domaines infinis que nous utiliserons dans la formulation des problèmes par la méthode des éléments de frontière.

CHAPITRE V

CHAPITRE V

REPRESENTATION DE LA BEM

5.1 INTRODUCTION

La méthode des éléments de frontière est une méthode extrêmement puissante dans l'analyse des structures continues. Elle est basée sur une formulation intégrale qui va être établie dans ce chapitre. Des approximations simples des variables de la frontière ainsi qu'une discrétisation de celle-ci nous permettrons de transformer les équations intégrales de frontière en équations algébriques que l'on résout par des méthodes numériques.

5.2 FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE - IDENTITE DE SOMIGLIANA

Pour illustrer comment la méthode des éléments de frontière peut être déduite d'une technique de résidus pondérés, on considère l'équation d'équilibre:

$$\sigma_{j,k,j} + b_k = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$\Gamma_2 (P = \bar{P})$$

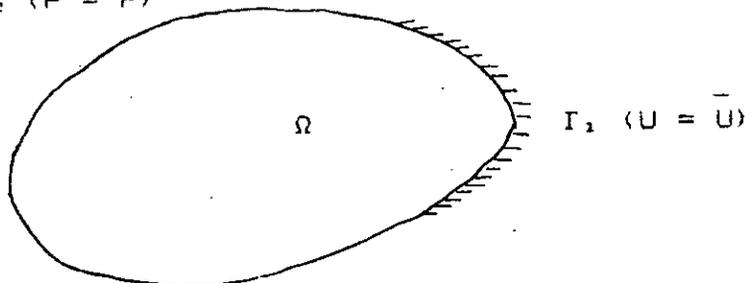


Fig. 5-1 Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières étant de deux types (Fig.

5-1):

- essentielles $U = \bar{U}$ sur Γ_1 (déplacements prescrits).
- naturelles $P = \bar{P}$ sur Γ_2 (tractions prescrites).

avec $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ frontière du domaine Ω .

l'énoncé des résidus pondérés peut être écrit:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (P_k - \bar{P}_k) U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (5,1)$$

où U_k^* et P_k^* représentent les déplacements et tractions correspondant au champ de pondération i.e:

$$P_k^* = n_j \sigma_{jk}^*$$

En intégrant par partie le terme de gauche de l'équation (5,1), celle-ci devient:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{jk} U_k^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} U_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (5,2)$$

Etant donné que:

$$P_k = \sigma_{jk} n_j$$

$$\text{et } e_{jk}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j^*}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^*}{\partial x_j} \right)$$

l'équation (5,2) se réduit à:

$$\int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{jk} e_{jk}^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (5,3)$$

cherchons de manière générale à éviter des fonctions qui conduisent à une valeur infinie de l'un des termes intervenant dans l'évaluation des intégrales. Nous limitons le choix de ψ_j et $\bar{\psi}_j$ à des fonctions à valeurs unique et finie.

Selon la distribution de l'erreur, on définit des méthodes d'approximation différentes.

3.2.1 Méthode des Moments:

La fonction ψ_j de pondération du résidu est telle que:

$$\psi_j = x^j \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}(U) - b) \psi_j d\Omega = \int_{\Omega} (\mathcal{L}(U) - b) x^j d\Omega = 0 \quad (3,4)$$

On suppose que U satisfait toutes les conditions aux frontières

$$R_1 = S(U) - s = 0$$

$$R_2 = G(U) - g = 0$$

3.2.2 Méthode de Collocation par Points:

Dans cette méthode, on essaye de satisfaire les équations gouvernantes en une série de points du domaine Ω appelés points de collocation.

Considérons la fonction d'approximation suivante:

$$U = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k$$

Le nombre de points de collocation est égale au nombre de paramètres a_k .

Les fonctions de pondération ψ_j dans ce cas sont des

fonctions delta Dirak dont les propriétés sont les suivantes:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} \Delta(x_i) dx = 1 \quad (3,5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Delta(x_i) dx = f(x_i) = f_i$$

f_i étant la valeur de la fonction au point i .

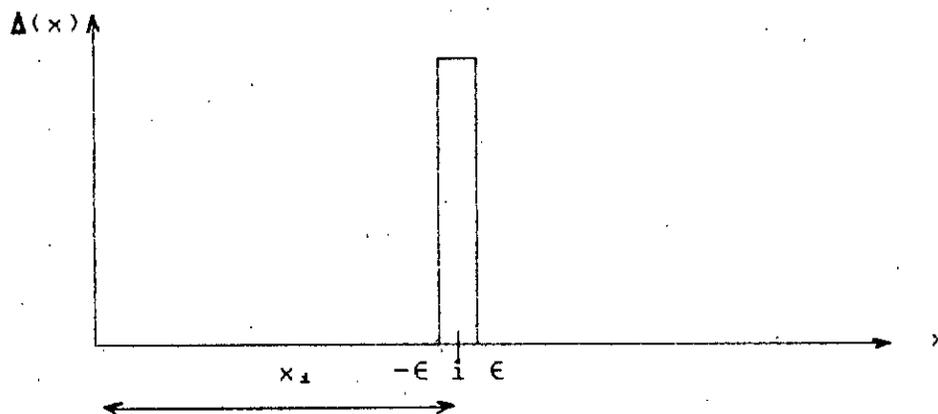


Fig. 3-1

La distribution de l'erreur s'écrit alors dans le cas où les conditions aux frontières sont satisfaites:

$$\int_b (g(u) - b) \Delta_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Δ_i représente la fonction delta Dirak au point de collocation i .

Ce qui revient à poser:

$$R = g(u) - b = 0 \quad \text{en } n \text{ points du domaine.}$$

On détermine ainsi les différentes valeurs des paramètres α_k .

3.2.3 Méthode de Collocation par Sous-domaines:

Cette méthode est similaire à la méthode de collocation par points décrite précédemment. La fonction de pondération du résidu

est telle que:

$$\Psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_i \end{cases}$$

Ω_i : étant des sous domaines de Ω .

On aura donc n équations de la forme:

$$\int_{\Omega_i} (\mathcal{L}(U) - b) d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3,6)$$

L'intégrale de la fonction erreur est nulle sur les différentes régions Ω_i du domaine Ω .

3.2.4 Méthode de Galerkin:

Contrairement aux autres méthodes de résidus pondérés, dans cette méthode les fonctions de pondération du résidus sont les mêmes que celles d'approximation de la fonction U . Autrement dit:

$$\Psi_i = \phi_i$$

On écrira donc:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}(U) - b) \Psi_i d\Omega = \int_{\Omega} (\mathcal{L}(U) - b) \phi_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3,7)$$

Etant donné que:

$$U = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$$

On peut définir une série de coefficients arbitraires δa_i telle que:

$$\delta U = \delta a_1 \phi_1 + \delta a_2 \phi_2 + \dots + \delta a_n \phi_n \quad (3,8)$$

On écrit alors:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}(U) - b) \delta U d\Omega = 0 \quad (3,9)$$

CHAPITRE IV

CHAPITRE IV

SOLUTION FONDAMENTALE

4.1 INTRODUCTION

La résolution des problèmes de l'élasticité se ramène à celle de certains problèmes types impliquant des systèmes d'équations aux dérivées partielles, or ces systèmes d'équations sont tellement compliqués, que l'on ne saura les résoudre même au niveau actuel du développement des méthodes mathématiques et la technique de calcul que pour des conditions aux limites très particulières.

C'est à Kelvin (1848) que revient le mérite de la résolution des équations d'un problème tridimensionnel de l'élasticité; pour un solide homogène, isotrope pour un cas de chargement particulier: Force concentrée appliquée en un point quelconque du domaine infini; où apparaît un point singulier: point d'application de la charge.

La solution est dite " Solution Fondamentale" du problème, et représente un des résultats fondamentaux de la théorie de l'élasticité.

À partir de la solution de Kelvin (solution pour un domaine infini); les distributions de contraintes, et de déformations pour des problèmes d'importance capitale peuvent être déterminées en se basant sur les principes de synthèse et de superposition.

Comme exemple on peut citer:

- Le problème de Lamé: forces uniformes centrées appliquées à

l'intérieur et (ou) à l'extérieur d'une cavité sphérique;

- Le problème résolu par Southwell (1926) qui traite une cavité sphérique à l'intérieur d'un solide de frontière infini soumis à une traction uniforme;

- Le problème de Cerruti (1882): problème de force appliquée tangentiellement à la frontière d'un solide semi-infini.

Toutes ces solutions s'obtiennent par combinaison de solutions de problème pour des cas de chargement simple: force unique, double force, centre de compression etc..., et sont regroupées sous le terme de "noyau de déformation ou "nuclei of strain" de Kelvin.

La solution pour des domaines semi-infinis n'est qu'une extension de celles de Kelvin en leur apportant certaines transformations afin d'adapter les résultats aux conditions de frontière.

Raymond D. Mindlin [12] (1936) étudia le problème en trois dimensions; le problème en deux dimensions a été étudié par Melan [15] (1932).

Selon le problème étudié, on doit adopter la solution fondamentale adéquate pour la formulation du problème par des équations intégrales (BEM).

Dans ce chapitre nous donnons les solutions fondamentales dans le cas de matériau homogène, élastique, isotrope pour des domaines infinis permettant une formulation par la méthode des éléments de frontière.

4.2 ESPACE INFINI

4.2.1 Détermination de la Solution de Kelvin en 2D:

1) Equations Gouvernantes:

Considérons un solide élastique, homogène, isotrope, occupant une région Ω d'un domaine infini, et ayant comme frontière de domaine la surface Γ .

Les équations nécessaires à la résolution d'un problème d'élasticité sont dans le cas général (3D):

- Les équations d'équilibre pour un problème élastostatique:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (4,1)$$

où $i, j = 1, \dots, 3$

- Les équations contraintes-déformations:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (4,2)$$

où $i, j, k, \text{ et } l = 1, \dots, 3$

Pour un solide homogène, élastique, isotrope cette équation devient:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (4,3)$$

où $i, j = 1, \dots, 3$

- Les équations déformations-déplacements:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (4,4)$$

avec:

C_{ijkl} : Le tenseur du 4^{ème} ordre et qui représente les fonctions de réponse du matériau.

b_i : Force de volume.

δ_{ij} : Symbole Kronecker.

λ, G : Coefficients de Lamé définient comme suit:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

et E : le module de Young.

ν : le coefficient de Poisson.

G : le coefficient de Cisaillement.

Les inconnues du problème étant:

- Le champs de contrainte σ_{ij} à l'intérieur du domaine et en tout point de la frontière.
- Le champs de déformation ϵ_{ij} et donc le champs de déplacement U_j en tout point du domaine et sur la frontière.

De toute évidence, la résolution d'un problème faisant intervenir 15 équations à 15 inconnues n'est pas facile, le recours à une formulation du même problème en fonction d'un nombre inférieur d'inconnues est nécessaire.

Considérons une approche basée sur les déplacements:

On a :
$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

Si on ne considère pas les forces de volume b_i , l'équation d'équilibre devient:

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

Le cas de chargement : force unique en un point du domaine peut être écrit comme une fonction de Dirac δ_L^i (fonction de distribution) et qui représente la force appliquée au point 'i' selon la direction L et tel que:

$$\int_{\Omega} \delta_L^i d\Omega = 1$$

cette force produira un état de contrainte σ_{ij} , de déformation ϵ_{ij} et de déplacement U_j . L'équilibre impose:

$$\sigma_{ij,j} + \delta_i^j = 0 \quad (4,5)$$

L'équation (4,3) pour cet état de contrainte sera:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij}$$

et

$$\sigma_{ij,j} = \lambda \epsilon_{pp,i} + 2 \mu \epsilon_{ij,j} \quad (4,6)$$

en utilisant les équations (4,4) et (4,5) et en remplaçant dans (4,6) on obtiendra:

$$\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \underline{U}^*) + \nabla^2 \underline{U}^* + \frac{1}{\mu} \delta_i^j = 0 \quad (4,7)$$

qui est l'équation de Navier avec:

\underline{U}^* : Vecteur déplacement dû à l'application de δ_i^j .

2) Vecteur Galerkin:

Les déplacements et les contraintes d'un vecteur F biharmonique dit vecteur de Galerkin définit comme suit:

$$\underline{E} = X \underline{i} + Y \underline{j} + Z \underline{k}$$

où X, Y, Z sont les fonctions de Galerkin.

i, j, k constituent un repère orthogonal.

Les expressions des déplacements sont alors:

$$U = \frac{1}{2G} \left[2(1-\nu) \Delta X - \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \underline{F} \right]$$

$$V = \frac{1}{2G} \left[2(1-\nu) \Delta Y - \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \underline{F} \right]$$

Grâce au principe de réciprocité dû à la symétrie du tenseur d'élasticité C_{ijkl} , on a :

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon_{jk} \sigma_{jk}^* d\Omega$$

En appliquant ce principe dans l'équation (5,3), celle-ci devient :

$$\int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega - \int_{\Omega} \epsilon_{jk} \sigma_{jk}^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} P_{k\sigma_k}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_{k\sigma_k}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (5,4)$$

Une seconde intégration par partie du terme à gauche de l'équation (5,4) donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* U_k d\Omega &= - \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k P_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5,5)$$

Les solutions fondamentales satisfont les équations d'équilibre ; on a donc :

$$\sigma_{jk,j}^* + \Delta_i^* = 0 \quad (5,6)$$

Δ_i^* représente la fonction delta dirak qui est en fait une impulsion unitaire appliquée au point source 'i' suivant la direction 1. Cette impulsion produit l'état de contrainte σ_{jk}^* qui vérifie les équations d'équilibre (5,6). Les propriétés de la fonction delta dirak sont les suivantes :

$$\Delta_i^*(x) = 0 \quad \text{si } x_i \neq x$$

$$\Delta_i^*(x) = \infty \quad \text{si } x_i = x$$

$$\int_{\Omega} f(x) \Delta_L^i d\Omega = f(x_i)$$

Moyennant l'équation (5,6), l'équation (5,5) devient:

$$\int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega - \int_{\Omega} \Delta_L^i U_k d\Omega = - \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} U_k P_k^* d\Gamma \quad (5,7)$$

La troisième propriété de la fonction delta dirak (donnée ci-dessus) nous permet d'écrire l'équation (5,7) sous la forme suivante:

$$U_i^i + \int_{\Gamma_1} U_k P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega \quad (5,8)$$

où U_i^i représente le déplacement au point source 'i' suivant la direction l.

L'équation (5,8) peut être écrite de manière plus explicite comme suit:

$$U_i^i + \int_{\Gamma} U_k P_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k U_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k U_{ik}^* d\Omega \quad (5,9)$$

dans laquelle U_{ik}^* et P_{ik}^* représentent les déplacements et tractions suivant la direction k qui sont dus à une source unitaire agissant suivant la direction l.

L'équation (5,9) est appelée Identité de Somigliana. Cette équation est valable pour un noeud particulier 'i' où l'impulsion unitaire est appliquée.

5.2.1 Solutions Fondamentales:

Les solutions fondamentales établie par Kelvin pour un domaine infini dans le cas isotrope sont données dans le cas tridimensionnel par les expressions suivantes:

$$U_{ik}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\Delta_{ik} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (5,10)$$

$$P_{ik}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\Delta_{ik} + 3\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1-2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_i \right\} \right] \quad (5,11)$$

dans lesquelles:

n représente la normale à frontière au point considéré.

Δ_{ik} est le delta Kronecker avec $\Delta_{ik} = 1$ lorsque $i = k$

$\Delta_{ik} = 0$ lorsque $i \neq k$.

r étant la distance entre le point d'application de la source et le point considéré.

n_j est le cosinus directeur dans la direction x_j (voir Fig. 5-2)

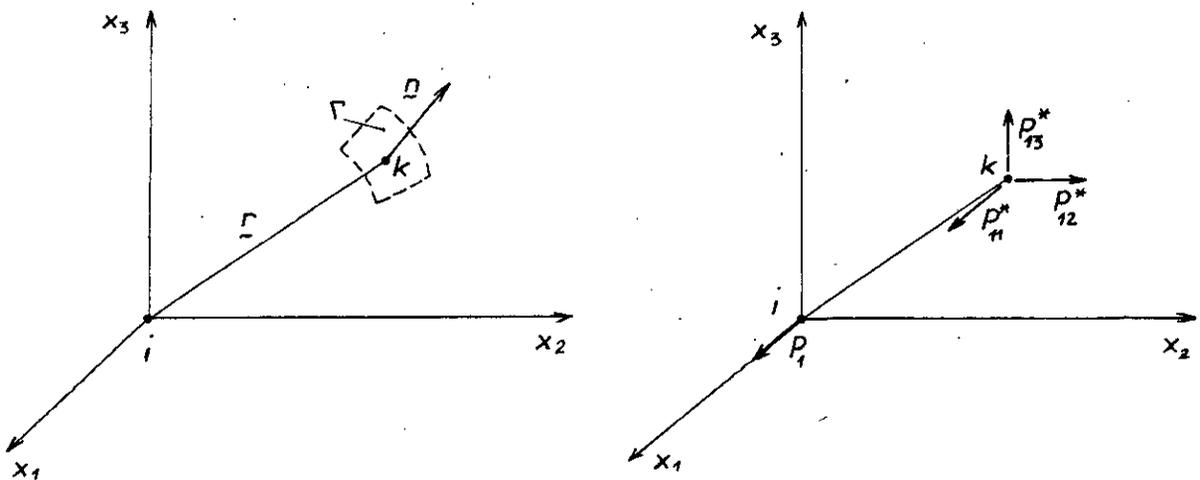


Fig. 5-2 Cas 3D Forces surfaciques en K de G_0 à une charge unitaire dans la direction x_1 .

Pour le cas bidimensionnel en déformation plane, les solutions fondamentales sont les suivantes:

$$U_{ik}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \operatorname{Ln} \left(\frac{1}{r} \right) \Delta_{ik} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (5,12)$$

$$P_{ik}^* = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \Delta_{ik} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1-2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_i \right\} \right] \quad (5,13)$$

où:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r} = \cos(r, x_i)$$

$$r_i = x_i(Q) - x_i(i)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(r, n) = n_1 \cos\theta + n_2 \sin\theta$$

$$n_1 = \cos(n, x_1)$$

$$n_2 = \cos(n, x_2)$$

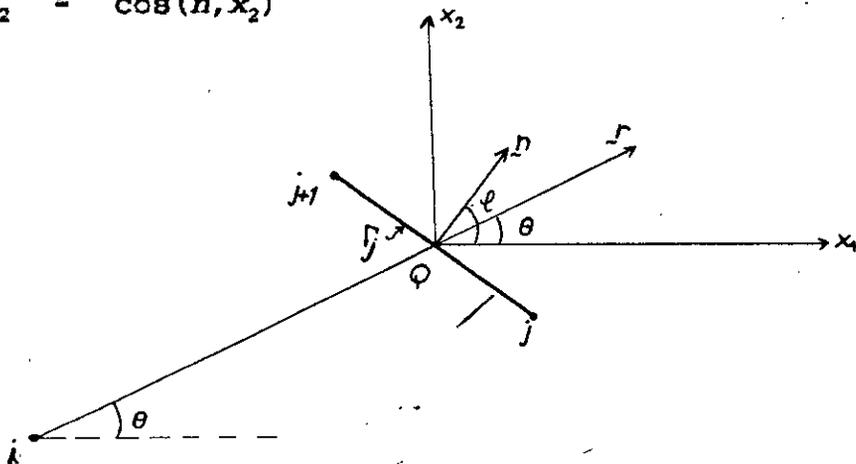


Fig. S-3 Cas bidimensionnel.

Remarque:

les solutions fondamentales exprimées par les équations (5,12) et (5,13) ont été établies pour un état de déformation plane. Ces mêmes expressions sont valides pour un état de contrainte plane, en remplaçant tout simplement le coefficient de Poisson ν par son équivalent $\bar{\nu}$ tel que $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$.

5.3 EQUATION INTEGRALE DE FRONTIERE

L'identité de Somigliana (équation (5.9) établie dans le paragraphe précédent n'est valide que si le point source 'i' se trouve à l'intérieur du domaine Ω (Fig. 5-4).

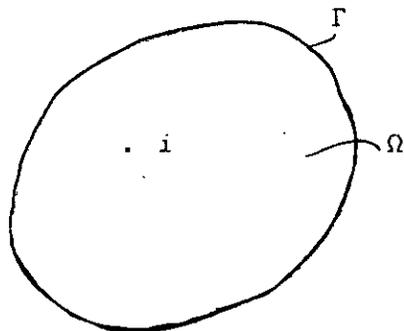


Fig. 5-4 Point source à l'intérieur du domaine.

L'équation (5.9) ne peut donner la solution que si les déplacements et tractions sur la frontière sont tous connus, par conséquent, il est intéressant d'examiner la forme limite de cette équation où le point source 'i' se trouve sur la frontière Γ du domaine Ω . Pour ce faire, on suppose d'abord que le corps peut être représenté comme le montre la Fig. 5-5.

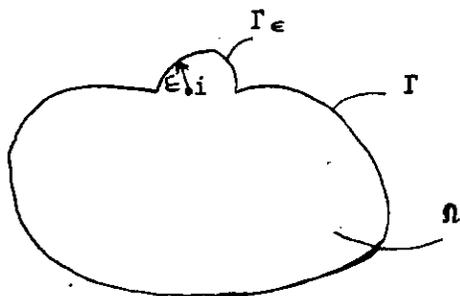


Fig. 5-5 Point singulier 'i' sur la frontière, contourné par une hémisphère de rayon ϵ .

Le point 'i' peut ainsi être considéré comme un point du domaine Ω , entouré d'une hémisphère de rayon ϵ tendant vers zéro.

Supposons que le point i appartienne à la frontière Γ_2 (où $P = \bar{P}$) qu'on considère parfaitement lisse et plane. La première intégrale sur Γ_2 de l'équation (5,9) est décomposée comme suit:

$$\int_{\Gamma_2} U_k P_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2 - \Gamma_\epsilon} U_k P_{ik}^* d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} U_k P_{ik}^* d\Gamma \quad (5,14)$$

Il est à noter que le fait de considérer le point source 'i' sur la frontière Γ_2 et non Γ_1 , est arbitraire, en effet de la même démonstration peut être menée en considérant le point 'i' sur la frontière Γ_1 (où $U = \bar{U}$).

Le problème qui se pose maintenant est la détermination de l'intégrale sur la frontière Γ_ϵ dans l'équation (5,14).

Soit :

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} U_k P_{ik}^* d\Gamma \quad (5,15)$$

En remplaçant l'expression de P_{ik}^* donnée par l'équation (5,10) dans l'équation (5,15), on obtient:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{U_k}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \Delta_{1k} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1-2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_1} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_1 \right\} \right] d\Gamma \quad (5,16)$$

où r dans ce cas se confond avec ϵ , soit $\epsilon \equiv r$.

Considérant la Fig. 5-6:

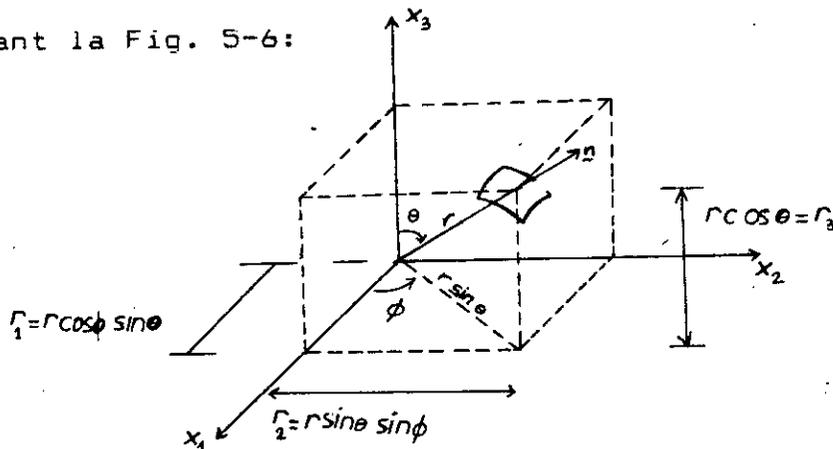


Fig. 5-6 Représentation d'une portion de la frontière Γ_ϵ .

Dans ce cas particulier où \vec{r} et \vec{n} sont colinéaires, le deuxième terme de l'équation (5,16) disparaît, en effet:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_1 = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} - \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_1} \equiv 0$$

L'équation (5,16) devient:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{U_k}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \Delta_{1k} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} \frac{d\Gamma}{8\pi(1-\nu)} \right\} \quad (5,17)$$

notons que:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 1$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{\partial n}{\partial x_1} = e_1$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial n}{\partial x_k} = e_k$$

En tenant compte des relations géométriques, et en considérant le cas où la charge unitaire au point i suit la direction x_1 , on peut écrire l'équ. (5,17) comme suit:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_i} [U_1^i (1 - 2\nu) + 3U_1^i e_1 e_1 + 3U_2^i e_1 e_2 + 3U_3^i e_1 e_3] \right. \\ \left. \times \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{8\pi(1-\nu)} \right\} \quad (5,18)$$

Les e_i sont les vecteurs dans les directions x_i définis par:

$$e_i = n_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r}$$

Remarquons que l'intégrale (5,18) est indépendante de r ; et peut être exprimée en terme de ϕ et θ seulement:

$$I = - \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} [U_1^i (1 - 2\nu) + 3U_1^i \sin^2\theta \cos^2\phi + 3U_2^i \sin^2\theta \\ \times \cos\phi \sin\phi + 3U_3^i \sin\theta \cos\theta \cos\phi] \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{8\pi(1-\nu)}$$

Après intégration, on trouve:

$$I = - \frac{1}{2} U_1^i$$

Un résultat identique est trouvé en appliquant la charge unitaire en i suivant la direction x_2 ou la direction x_3 . En général, on peut donc écrire:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_i} U_k P_{ik}^* d\Gamma \right\} = - \frac{U_i^i}{2}$$

La seconde intégrale sur Γ_2 de l'équation (5,9) étant:

$$\int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_{1k}^* d\Gamma$$

De la même façon, cette intégrale est décomposé comme suit:

$$\int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_{1k}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2 - \Gamma_i} \bar{P}_k U_{1k}^* d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_i} \bar{P}_k U_{1k}^* d\Gamma$$

On peut montrer en utilisant l'équation (5,10) que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_i} \bar{P}_k U_{1k}^* d\Gamma = 0$$

et, par conséquent, cette intégrale n'introduit pas de nouveaux termes à l'équation (5,9).

Les mêmes résultats sont obtenus, si on avait considéré le point source i sur la frontière Γ_1 , au lieu de la frontière Γ_2 . De là, pour un point situé sur la frontière, on peut écrire:

$$\frac{\delta_{ij}}{2} U_i^i + \int_{\Gamma} U_k P_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k U_{1k}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k U_{1k}^* d\Omega \quad (5,19)$$

Il est à noter que cette équation n'est valable que si la frontière considérée est parfaitement lisse et plane.

Dans le cas général, on écrit l'équation (5,19) comme suit:

$$C^i U^i + \int_{\Gamma} P_{ik}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{1k}^* P_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{1k}^* b_k d\Omega \quad (5,20)$$

où C^i est un coefficient qui dépend de la forme et de l'état de surface de la frontière au point i . Ce coefficient est défini par la relation suivante:

$$C^i = \left\{ \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_i} P_{ik}^* d\Gamma \right\}$$

avec $C^i = \delta_{ij}/2$, lorsque i se trouve sur une frontière lisse et parfaitement plane.

$C^i = \delta_{ij}$, lorsque i est un point interne.

L'évaluation de l'intégrale sur la frontière Γ_e est souvent difficile à mener et par conséquent, le calcul explicite du coefficient C^i est à éviter.

En pratique, C^i est déterminée en utilisant des mouvements de corps rigide.

5.4 DISCRETISATION DE L'EQUATION INTEGRALE ELEMENTS DE FRONTIERES

La résolution analytique de l'équation (5,20) est difficile à mener; il a été montré qu'une telle résolution ne peut être adoptée que si les problèmes étudiés présentent une géométrie et des conditions aux frontières très simples, cependant, les problèmes rencontrés en pratique sont plutôt complexes. C'est pour cette raison, la méthode des éléments de frontière utilise une approche numérique pour la résolution de l'équation (5,20); cette approche consiste à diviser la frontière Γ en une série d'éléments sur lesquels les déplacements et tractions sont supposés varier selon un choix approprié des fonctions d'interpolations. Soit:

$\{ U^i \} = \begin{Bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \end{Bmatrix}$, vecteur déplacement au point i avec ses composantes dans les directions x_1 et x_2 .

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

, vecteur déplacement en un point de la frontière.

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

, traction en un point de la frontière.

$$[P^*] = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}$$

, matrice dont les composantes P_{ik}^* représentent des forces suivant la direction k dues à une force unitaire agissant au point i suivant la direction l .

$$[U^*] = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix}$$

, matrice dont les composantes U_{ik}^* représente des déplacements suivant la direction k dus à une force unitaire agissant au point i suivant la direction l .

L'équation (5,20) est maintenant exprimée matriciellement comme suit:

$$[C^T] \{U^T\} + \int_{\Gamma} [P^*] \{U\} d\Gamma = \int_{\Gamma} [U^*] \{P\} d\Gamma \quad (5,21)$$

(Dans tout ce qui va suivre, on ne va pas tenir compte des forces de volume)

On suppose que la frontière est divisée en éléments et que les fonctions U et P peuvent être approximées sur chaque élément

par les fonctions d'interpolation suivantes:

5.4.1 Fonctions d'Interpolation:

a) Eléments constants:

Les noeuds se trouvent au milieu de chaque élément (Fig.

5-7)

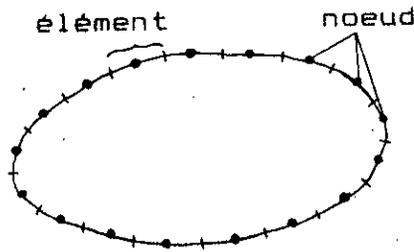


Fig. 5-7 Elément constant.

Sur un élément, on suppose une variation constante du déplacement et de la traction (Fig. 5-8)

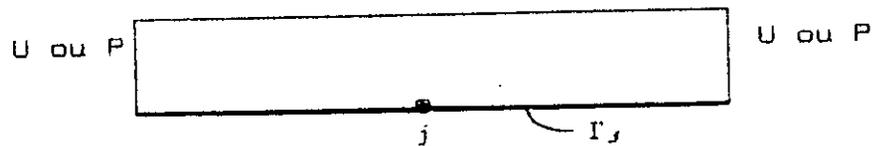


Fig. 5-8 Variation constante.

La fonction de forme correspondante est telle que:

$$\phi = 1 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} U = U_j \\ P = P_j \end{cases}$$

en tout point de l'élément de frontière I_j .

b) Eléments linéaires (1er ordre):

Les noeuds se trouvent à l'intersection de deux éléments adjacents (Fig. 5-9)

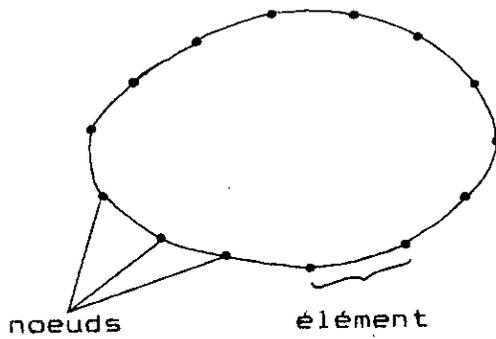


Fig. 5-9 Elément linéaire.

La variation des fonctions U et P sur un élément est linéaire (Fig. 5-10). les valeurs de U et P en un point quelconque de l'élément sont définies en fonction des valeurs nodales et des fonctions d'interpolation ϕ_1 et ϕ_2 telles que:

$$U = \phi_1 U_1 + \phi_2 U_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \phi^T U^n$$

$$P = \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \phi^T P^n$$

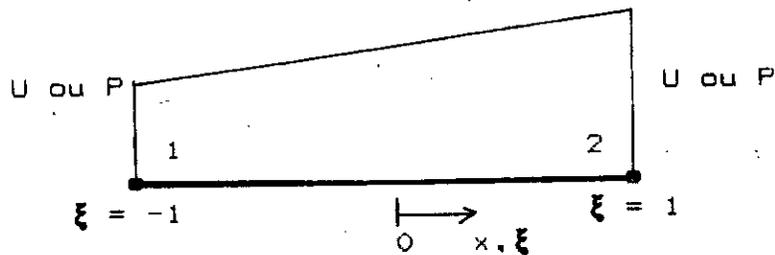


Fig. 5-10 Variation linéaire.

La coordonnée adimensionnelle ξ est définie par: $\xi = x/(l/2)$ et ϕ_1 et ϕ_2 sont données par: $\phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$, $\phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$ (voir Fig. 5-11).



a) variation de ϕ_1 b) variation de ϕ_2

Fig. 5-11 Variation des fonctions de forme ϕ_1 et ϕ_2 .

c) Eléments quadratiques (2ème ordre):

Chaque élément possède 3 noeuds: à l'origine, au milieu et à l'extrémité (Fig. 5-12).

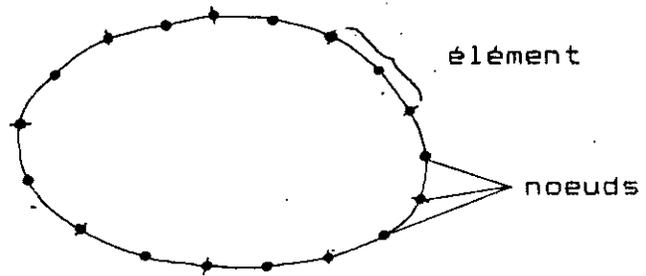


Fig. 5-12 Elément quadratique.

La variation de U et P sur un élément est parabolique. Les fonctions U et P sont exprimées moyennant des fonctions de forme comme suit (Fig. 5-13):

$$U = \phi_1 U_1 + \phi_2 U_2 + \phi_3 U_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \phi^T U^n$$

$$P = \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \phi_3 P_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \phi^T P^n$$

où:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)$$

$$\phi_3 = (1 - \xi) (1 + \xi)$$

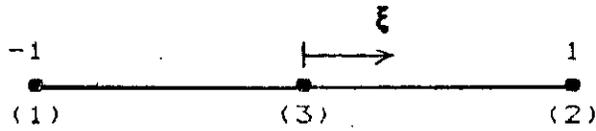


Fig. 5-13 Elément quadratique.

La Fig. 5-14 montre la variation des fonctions ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 en fonction de ξ .

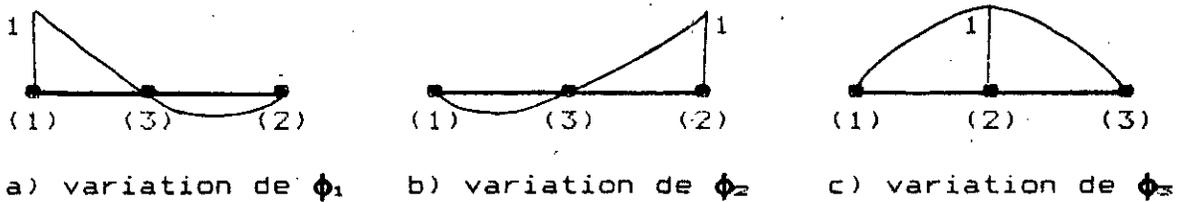


Fig. 5-14 Variation des fonctions de forme ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 .

d) Eléments cubiques (3ème ordre):

Chaque élément possède 4 noeuds (Fig. 5-15):

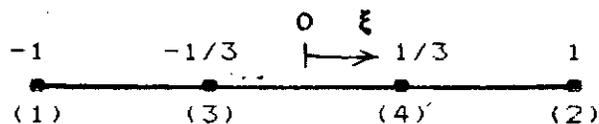


Fig. 5-15 Elément cubique

Les fonctions U et P sont interpolées comme suit:

$$U = \phi_1 U_1 + \phi_2 U_2 + \phi_3 U_3 + \phi_4 U_4 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \phi^T$$

$$P = \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \phi_3 P_3 + \phi_4 P_4 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \phi^T$$

où:

$$\phi_1 = \frac{1}{16} (1 - \xi) (1 + 3\xi) (3\xi - 1)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{16} (1 + \xi) (1 + 3\xi) (3\xi - 1)$$

$$\phi_3 = \frac{9}{16} (1 + \xi) (1 - \xi) (1 - 3\xi)$$

$$\phi_4 = \frac{9}{16} (1 + \xi) (1 - \xi) (1 + 3\xi)$$

Le tableau suivant donne les différentes valeurs des fonctions ϕ_i au niveau des noeuds (1), (2), (3) et (4):

noeuds	ξ	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
1	-1	1	0	0	0
3	-1/3	0	1	0	0
4	1/3	0	0	1	0
2	1	0	0	0	1

5.4.2 Choix de l'Interpolation Linéaire:

$$\{U\} = [\phi^T] \{U_j\} = \begin{bmatrix} \phi^T & 0 \\ 0 & \phi^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = [\phi^T] \{P_j\} = \begin{bmatrix} \phi^T & 0 \\ 0 & \phi^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^j \\ P_2^j \end{Bmatrix}$$

où $\{U_j\}$ et $\{P_j\}$ sont respectivement les vecteurs déplacements et tractions au noeuds j .

Il faut noter qu'on a supposé les mêmes fonctions d'interpolations pour U et P . En général, elles peuvent différer l'une de l'autre, en effet, il serait plus consistant de considérer pour la traction P des fonctions d'ordre inférieur à celles du déplacement U . Ceci vient du fait que P n'est qu'une dérivée première de U par rapport à la normale à la frontière au point considéré ($P = \partial U / \partial n$).

Ces fonctions de forme définissent la façon avec laquelle le déplacement et la traction varient tout au long d'un élément.

En substituant ces fonctions dans l'équation (5,21), on obtient:

$$[C^i] \{U^i\} + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} [P^*] [\phi^T] d\Gamma \right) \{U_j\} = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} [U^*] [\phi^T] d\Gamma \right) \quad (5,22)$$

où N représente le nombre d'élément sur la frontière Γ .

L'évaluation des intégrales de l'équation (5,22) se fait par un calcul numérique. Les fonctions ϕ^T sont exprimées en fonction de la coordonnée ξ (voir Fig. 5-16)

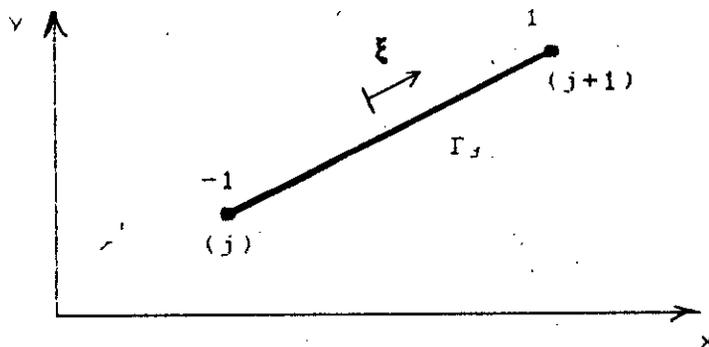


Fig. 5-16 La coordonnée ξ .

$$d\Gamma = |J| d\xi$$

avec $|J|$ le jacobien de la transformation du système de coordonnées:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

Remarquons que pour un élément à géométrie linéaire le jacobien est tel que: $|J| = l/2$ où l représente la longueur de l'élément considéré.

On peut maintenant appliquer la quadrature de Gauss (voir Index) à l'équation (5,22), on obtient:

$$[C^i] \{U^i\} + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{p=1}^m |J| w_p [P^*]_p [\Phi^T]_p \right) U_j = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{p=1}^m |J| w_p [U^*]_p [\Phi^T]_p \right) P_j \quad (5.23)$$

où m = nombre de points d'intégration,

w_p = coefficients de pondération correspondant.

$[P^*]_p$, $[\Phi^T]_p$ et $[U^*]_p$ sont les valeurs des fonctions aux points d'intégration.

L'équation (5,23) est écrite comme suit:

$$[C^i] \{U^i\} + \sum_{j=1}^N [H_{ij}] \{U_j\} = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \{P_j\} \quad (5,24)$$

où $[\hat{H}_{i,j}]$ et $[G_{i,j}]$ sont des matrices 2×2 .

Pour chaque noeud 'i', l'équation (5,24), donne $2 \times N$ équations. Posons:

$$[H_{i,j}] = [\hat{H}_{i,j}] \quad , \quad \text{pour } i \neq j$$

$$[H_{i,j}] = [\hat{H}_{i,j}] + [C^i] \quad , \quad \text{pour } i = j$$

où $[C^i]$ est une matrice 2×2 qui dépend de la géométrie de la frontière.

De la, l'équation (5,24) peut être écrite comme suit:

$$\sum_{j=1}^N [H_{ij}] \{U_j\} = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \{P_j\} \quad (5,25)$$

En appliquant l'équation (5,25) pour chacun des N noeuds de la frontière, on obtient un système d'équations algébriques d'ordre $2N \times 2N$ qui peut être exprimé sous la forme:

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} \quad (5,26)$$

On introduit maintenant les conditions aux frontières dans le système d'équations (5,26):

$$U = \bar{U} \quad , \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (n_1 \text{ valeurs de déplacements prescrits})$$

$$P = \bar{P} \quad , \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (n_2 \text{ valeurs de tractions prescrites})$$

avec $2n = n_1 + n_2$.

Dans le cas où des déplacements sont connus, on peut déterminer des tractions et vice versa. Ceci montre que le système d'équations (5,26) peut être arrangé tel que les inconnues soient écrites dans le membre de gauche, on obtient:

$$[A] \{X\} = \{B\}$$

5.5 DETERMINATION DES COEFFICIENTS HIJ ET GIJ

Les déplacements nodaux, les tractions surfaciques pour le segment j de la frontière discretisée linéairement sont:

$$\text{noeud } j \quad U^j = \begin{Bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \end{Bmatrix} \quad ; \quad P^j = \begin{Bmatrix} P_1^j \\ P_2^j \end{Bmatrix}$$

$$\text{noeud } j+1 \quad U^{j+1} = \begin{Bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \end{Bmatrix} \quad ; \quad P^{j+1} = \begin{Bmatrix} P_1^{j+1} \\ P_2^{j+1} \end{Bmatrix}$$

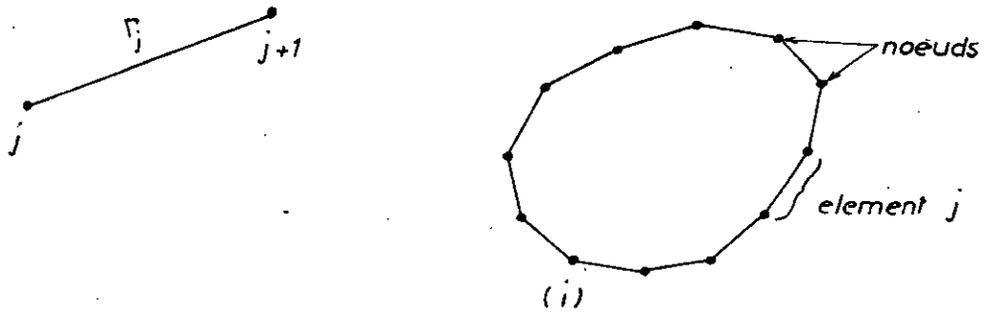


Fig. 5-17 Elément j

Le déplacement (traction) le long de l'élément j varie linéairement, on écrira:

$$P = \{P_1 \quad P_2\}^T = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^j \\ P_2^j \\ P_1^{j+1} \\ P_2^{j+1} \end{Bmatrix}$$

l'équation (5,22) s'écrit:

$$C^i U^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} P^* [\phi_1 \quad \phi_2] d\Gamma \begin{Bmatrix} U^j \\ U^{j+1} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} U^* [\phi_1 \quad \phi_2] d\Gamma \begin{Bmatrix} P^j \\ P^{j+1} \end{Bmatrix}$$

équation valable pour le point i de la frontière Γ . Pour deux segments successifs K et $K+1$ i.e $j=k$ et $j=k+1$, nous remarquons la contribution des deux segments adjacents pour un même noeud:

$$\begin{aligned}
 C^i U^i + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Gamma_j} P^* [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} U^j \\ U^{j+1} \end{matrix} \right\} + \int_{\Gamma_k} P^* [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} U^k \\ U^{k+1} \end{matrix} \right\} + \int_{\Gamma_{k+1}} P^* \\
 \times [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} U^{k+1} \\ U^{k+2} \end{matrix} \right\} + \sum_{j=k+2}^N \int_{\Gamma_j} P^* [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} U^j \\ U^{j+1} \end{matrix} \right\} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Gamma_j} U^* \\
 \times [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} P^j \\ P^{j+1} \end{matrix} \right\} + \int_{\Gamma_k} U^* [\phi_1 \ h i_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} P^k \\ P^{k+1} \end{matrix} \right\} + \int_{\Gamma_{k+1}} U^* [\phi_1 \ \phi_2] \\
 \times d\Gamma \left\{ \begin{matrix} P^{k+1} \\ P^{k+2} \end{matrix} \right\} + \sum_{j=k+2}^N \int_{\Gamma_j} U^* [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} P^j \\ P^{j+1} \end{matrix} \right\}
 \end{aligned}$$

ou, encore:

$$\begin{aligned}
 C^i U^i + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Gamma_j} P^* [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} U^j \\ U^{j+1} \end{matrix} \right\} + \int_{\Gamma_k} P^* \phi_1 d\Gamma U^k + \int_{\Gamma_k} P^* \phi_2 d\Gamma U^{k+1} \\
 + \int_{\Gamma_{k+1}} P^* \phi_1 d\Gamma U^{k+1} + \int_{\Gamma_{k+1}} P^* \phi_2 d\Gamma U^{k+2} + \sum_{j=k+2}^N \int_{\Gamma_j} P^* [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} U^j \\ U^{j+1} \end{matrix} \right\} = \\
 \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Gamma_j} U^* [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} P^j \\ P^{j+1} \end{matrix} \right\} + \int_{\Gamma_k} U^* \phi_1 d\Gamma P^k + \int_{\Gamma_k} U^* \phi_2 d\Gamma P^{k+1} \\
 + \int_{\Gamma_{k+1}} U^* \phi_1 d\Gamma P^{k+1} + \int_{\Gamma_{k+1}} U^* \phi_2 d\Gamma P^{k+2} + \sum_{j=k+2}^N \int_{\Gamma_j} U^* [\phi_1 \ \phi_2] d\Gamma \left\{ \begin{matrix} P^j \\ P^{j+1} \end{matrix} \right\}
 \end{aligned} \tag{5, 27}$$

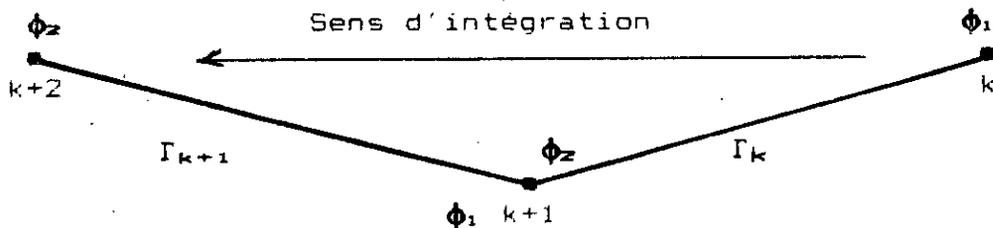


Fig. 5-27 Deux segments successifs.

Nous obtenons ainsi les coefficients nodaux pour le noeuds (k+1):

$$H_{1k+1} = \int_{\Gamma_k} P^* \phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{k+1}} P^* \phi_1 d\Gamma$$

$$G_{1k+1} = \int_{\Gamma_k} U^* \phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{k+1}} U^* \phi_1 d\Gamma$$

Ainsi nous pouvons écrire en général, les éléments des matrices H et G tels que:

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_{j-1}} P^* \phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_j} P^* \phi_1 d\Gamma \quad \text{avec } i \neq j$$

$$H_{ii} = C_i + \int_{\Gamma_{j-1}} P^* \phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_j} P^* \phi_1 d\Gamma$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_{j-1}} U^* \phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_j} U^* \phi_1 d\Gamma$$

Dans le cas bidimensionnel, les fonctions fondamentales U^* et P^* constituent des matrices 2×2 éléments, soit:

$$P_{ik}^* = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} ; \quad U_{ik}^* = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix}$$

Les coefficients H_{ij} et G_{ij} s'écrivent alors:

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j} P_{11}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} P_{11}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma_j} P_{12}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} P_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma_j} P_{21}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} P_{21}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma_j} P_{22}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} P_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix} \quad i \neq j$$

$$H_{ii} = \begin{bmatrix} C_{11} + \int_{\Gamma_j} P_{11}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} P_{11}^* \phi_2 d\Gamma & C_{12} + \int_{\Gamma_j} P_{12}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} P_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ C_{21} + \int_{\Gamma_j} P_{21}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} P_{21}^* \phi_2 d\Gamma & C_{22} + \int_{\Gamma_j} P_{22}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} P_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix}$$

Les coefficients:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

sont à déterminer en fonction de la nature des discontinuités et du matériau constituant la structure:

- Dans le cas de matériau lissé, de surface plane, sur la frontière on aura:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Dans le cas où le point source i se trouve à l'intersection de deux éléments de frontière formant entre eux un angle de $\pi/2$; C_{ij} s'écrit:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- Pour un point à l'intérieur du domaine:

$$C_{ij} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que nous pouvons déterminer les termes H_{ij} sans avoir à déterminer la valeur explicite de C_{ij} . Ceci en considérant un déplacement de corps rigide.

De même pour G_{ij} :

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j} U_{11}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} U_{11}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma_j} U_{12}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} U_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma_j} U_{21}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} U_{21}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma_j} U_{22}^* \phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} U_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix}$$

L'équation (5,22) s'écrit pour un point (i) de la frontière comme suit:

$$H_{i1} U^1 + H_{i2} U^2 + \dots + H_{iN} U^N = G_{i1} P^1 + G_{i2} P^2 + \dots + G_{iN} P^N$$

où i varie de 1 à N. Nous obtenons ainsi N équations. Or chaque terme H_{ij} est une matrice de (2x2) éléments, le nombre d'équations est donc de 2N équations à 4N inconnues de la frontière (U_i^j et P_i^j pour $i = 1, N$ et $j = 1, 2$).

Des conditions aux frontières sont alors imposées pour pouvoir résoudre les équations aux frontières. Elles sont aux nombres de 2N conditions. Au point (j), on ne peut imposer U^j et P^j dans la même direction.

Les matrices H et G sont de l'ordre de 2Nx2N sous la forme suivante:

- La matrice [H] est une matrice peuplée non symétrique.

$$H = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}_{11} & H_{12} & \dots & \dots & H_{11} & \dots & H_{1N} \\ & H_{21} & & & & & H_{2N} \\ & \vdots & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & H_{11} & & & H_{11} & & H_{1N} \\ & \vdots & & & & & \\ & H_{N1} & & & & & H_{NN} \end{bmatrix}_{2N \times 2N}$$

$$G = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}_{11} & G_{12} & \dots & \dots & G_{11} & \dots & G_{1N} \\ & G_{21} & & & & & G_{2N} \\ & \vdots & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & G_{11} & & & G_{11} & & G_{1N} \\ & \vdots & & & & & \\ & G_{N1} & & & & & G_{NN} \end{bmatrix}_{2N \times 2N}$$

- La matrice [G] est une matrice peuplée symétrique par bloc.
- Les matrices [H] et [G] sont réarrangées en quatre blocs en éclatant chaque terme de chacune des matrices en ces quatre éléments.

Nous écrivons les blocs comme suit:

5.6 MOUVEMENT DE CORPS RIGIDE ET RESOLUTION

5.6.1 Problème Interne:

Les éléments de la diagonale de [H] sont très difficile à calculer. Un moyen de contourner le problème consiste à considérer un déplacement unitaire de corps rigide de notre structure. C'est un mouvement relatif n'entraînant ni déformation, ni contrainte au sein de la structure.

Nous écrivons: $H U = 0$

Pour des déplacements unitaire on aura:

$$H I = 0$$

$$H I = \left[\sum_{j=1}^{i-1} H_{1j} + H_{1i} + \sum_{j=i+1}^N H_{1j} \right] I = 0$$

d'où:

$$H_{1i} = - \sum_{j=1}^N H_{1j}$$

où:

$$H_{1i} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}_{1i} \quad \text{et} \quad H_{1j} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}_{1j} \quad (i \neq j)$$

Chaque bloc de la matrice [H] du système (1), permet de calculer les éléments singuliers diagonaux. En effet on écrira:

$$H(1,1,i,i) = - \sum_{j=1}^N H(1,1,i,j) \quad \text{avec } (j \neq i)$$

$$H(1,2,i,i) = - \sum_{j=1}^N H(1,2,i,j) \quad \text{avec } (j \neq i)$$

$$H(2,1,i,i) = - \sum_{j=1}^N H(2,1,i,j) \quad \text{avec } (j \neq i)$$

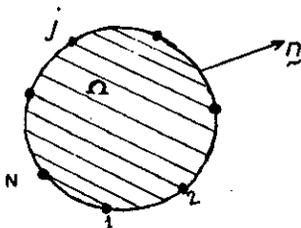
$$H(2,2,i,i) = - \sum_{j=1}^N H(2,2,i,j) \quad \text{avec } (j \neq i)$$

Ces éléments ne peuvent être calculés, qu'une fois tous les éléments extra-diagonaux de la matrice H sont évalués.

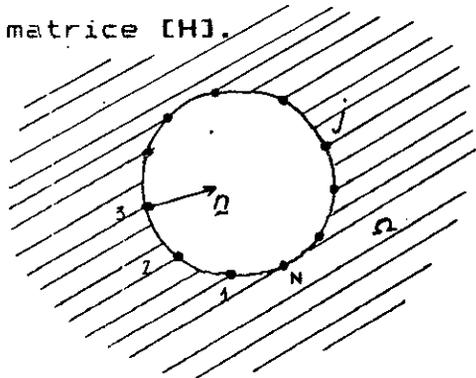
Une fois toutes les composantes de H et G sont déterminées; le système $H U = G P$ peut être résolu après réarrangement sous la forme $A X = B$; où X contient toutes les inconnues du problème.

5.6.2 Problème externe:

Le problème d'une cavité dans un domaine Ω est considéré comme un problème externe. Pour ce problème, la normale est dirigée vers l'intérieur (voir Fig. 5-19-b). Le sens d'intégration est l'inverse du problème interne (Fig. 5-19-a). La normale extérieur est orientée vers l'extérieur. La différence entre les deux problèmes réside aussi dans la détermination des éléments singuliers diagonaux de la matrice [H].



a) Problème interne



b) Problème externe

Fig. 5-19 Problèmes interne et externe.

Dans le cas du problème interne, le déplacement de corps rigide permet de déterminer les éléments de la diagonale de [H], en effet:

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^N H_{ij} \quad \text{avec} (i \neq j)$$

Dans le cas du problème externe la détermination des éléments de la diagonale de [H] se fait aussi en considérant un mouvement de corps rigide:

a) Mouvement de corps rigide pour le problème externe:

Partant de l'équation déjà établie:

$$C^i U^i + \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma = \int_{\Gamma} U^* P d\Gamma \quad (5,27)$$

En considérant le déplacement de corps rigide, on a:

$$C^i U^i + \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma = 0 \quad (5,28)$$

Considérant la fig. 5-20, on écrira:

$$C^i U^i + \int_{\Gamma_1} P^* U^{(1)} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} P^* U^{(2)} d\Gamma = 0 \quad (5,29)$$

Dans le cas de domaine infini l'équation (5,29) s'écrit:

$$C^i U^i + \int_{\Gamma_1} P^* U d\Gamma + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} P^* U d\Gamma = 0 \quad (5,30)$$

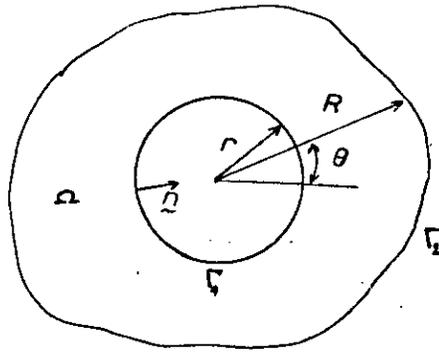


Fig. 5-20 Domaine fini.

L'équation (5,30) s'écrit:

$$\sum_{j=1}^N H_{1j} U_j + \lim_{R \rightarrow \Gamma_2} \int_{\Gamma_2} P^* U d\Gamma = 0 \quad (5,31)$$

En considérant un déplacement unitaire, on aura:

$$\sum_{j=1}^N H_{1j} + \lim_{R \rightarrow \Gamma_2} \int_{\Gamma_2} P^* d\Gamma = 0 \quad (5,32)$$

b) Evaluation du 2ème terme de l'équation (5,32):

En considérant les coordonnées polaires (r, θ)

$$\frac{\partial x}{\partial n} = 1 \quad , \quad d\Gamma = r \cdot d\theta$$

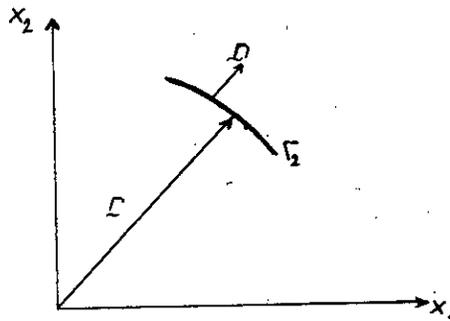


Fig. 5-21 Coordonnées polaire.

$$\lim_{R \rightarrow \Gamma_2} \int_{\Gamma_2} P^* d\Gamma = \lim_{R \rightarrow \Gamma_2} \int_{\Gamma_2} \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} d\Gamma$$

4 intégrales sont à évaluer:

$$\begin{aligned}
 a) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} P_{11}^* d\Gamma &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] d\Gamma \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu) + 2\cos^2\theta] r d\theta \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[- \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left((1-2\nu)\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta \right) \right]_0^{2\pi} = -1
 \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} P_{11}^* d\Gamma = -1$$

$$b) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} P_{22}^* d\Gamma = -1$$

$$c) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} P_{12}^* d\Gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [2\sin\theta \cos\theta] = 0$$

$$d) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} P_{21}^* d\Gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [2\sin\theta \cos\theta] = 0$$

Ainsi:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} P^* d\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

avec I: matrice identité.

L'équation (5.32) s'écrit:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} - I = 0 \quad (5.33)$$

d'où l'équation (5.33) s'écrit:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij} + H_{ii} - I = 0$$

D'où on a :

$$H_{ii} = I - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}$$

En résumé :

1- Pour un problème interne, le déplacement de corps rigide conduit à :

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}$$

2- Pour un problème externe, le déplacement de corps rigide conduit à :

$$H_{ii} = I - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}$$

5.7 TRAITEMENT DES SINGULARITES

Si nous considérons le point de champs (j) qui coïncide avec le point source 'i', nous remarquons une singularité dans les expressions de U^* et P^* . Deux cas peuvent se présenter :

1°)- Le point source 'i' et le point champs considéré (j) ne coïncident pas mais appartiennent au même élément tel que :

$$\begin{cases} j = i - 1 \\ \text{ou} \\ j = i + 1 \end{cases}$$

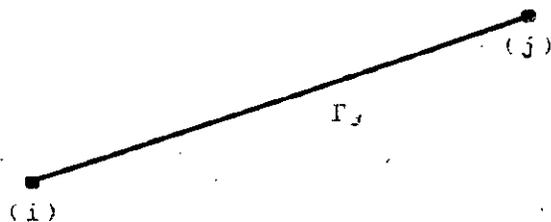


Fig. 5-22 Élément (j).

2°)- Le point source 'i' et le point considéré (j) coïncident i.e i = j.

La détermination des singularités dans la matrice [H] ou [G] s'obtient en considérant les limites des intégrales suivantes:

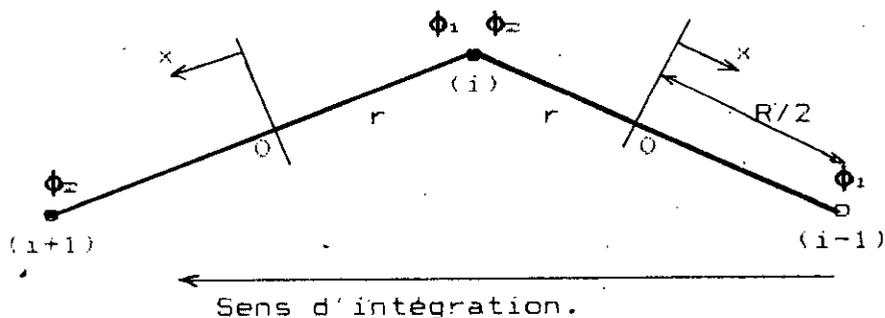
$$\int_{\Gamma} P^* U d\Gamma \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma \quad \text{pour } r = 0.$$

Les termes $H_{i,i}$ de la diagonale de la matrice [H] s'obtiennent par déplacement de corps rigide (voir paragraphe 5.6).

5.7.1 Transformation des Fonctions d'Interpolation ♦1 et

♦2:

En considérant la fig. 5-23, où 'i' est le point source, on écrira:



R: Longueur du segment

Fig. 5-23 Deux éléments adjacents.

Segment [(i-1),(i)]:

$$r = \frac{R}{2} - x \rightarrow x = \frac{R}{2} - r \quad (1)$$

$$\xi = \frac{2x}{R} \quad \phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

en considérant la transformation (1) on aura:

$$\phi_1 = \left(\frac{r}{R} \right) ; \quad \phi_2 = \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

Segment [(i), (i+1)]:

$$x = r - \frac{R}{2} \quad (2)$$

$$\xi = \frac{2x}{R} \quad \phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

en considérant la transformation (2) on aura:

$$\phi_1 = \left(1 - \frac{r}{R} \right) ; \quad \phi_2 = \left(\frac{r}{R} \right)$$

5.7.2 Calcul des Expressions Singulières dans [H]:

Cas où J = M avec M = I + 1: [h_{iM}]

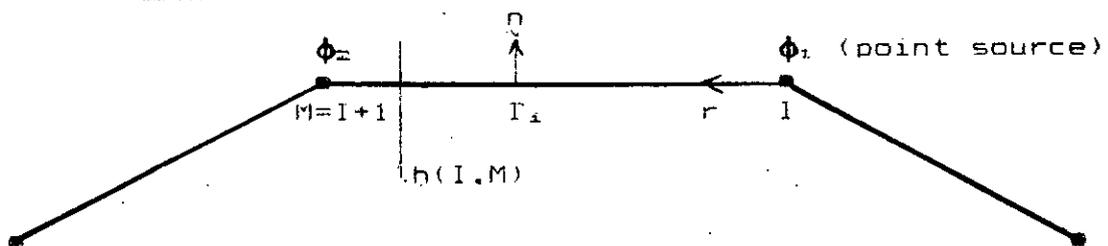


Fig. 5-23 Cas où J=M.

Une singularité apparaît dans le calcul d'une partie du coefficient au noeud (I+1) (voir Fig. 5-23):

$$h(I, M) = \int_{\Gamma_I} P^* \phi_2 d\Gamma = \int_0^R P^* \phi_2 d\Gamma$$

$$h(I, M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R P^* \phi_2 d\Gamma$$

quatre intégrales sont à calculer:

$$1) - h(1, 1, I, M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R P_{11}^* \phi_2 d\Gamma$$

$$d\Gamma = dr$$

$$h(1, 1, I, M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu) + 2\cos^2\theta \} \right] \frac{I}{R} dr = 0$$

$$\text{car } \frac{\partial r}{\partial n} = 0$$

θ : étant l'angle formé par l'élément considéré et la direction 1.

$$2) - h(2, 2, I, M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R P_{22}^* \phi_2 d\Gamma$$

$$\text{car } \frac{\partial r}{\partial n} = 0$$

$$3) - h(1,2,I,M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R P_{12}^* \frac{I}{R} dr$$

$$h(1,2,I,M) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} [\cos\theta n_2 - \sin\theta n_1]$$

$$4) - h(2,1,I,M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R P_{21}^* \frac{I}{R} dr$$

$$h(2,1,I,M) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} [\sin\theta n_1 - \cos\theta n_2]$$

Cas où $J = L$ avec $L = I - 1$: $[h_{1,L}]$

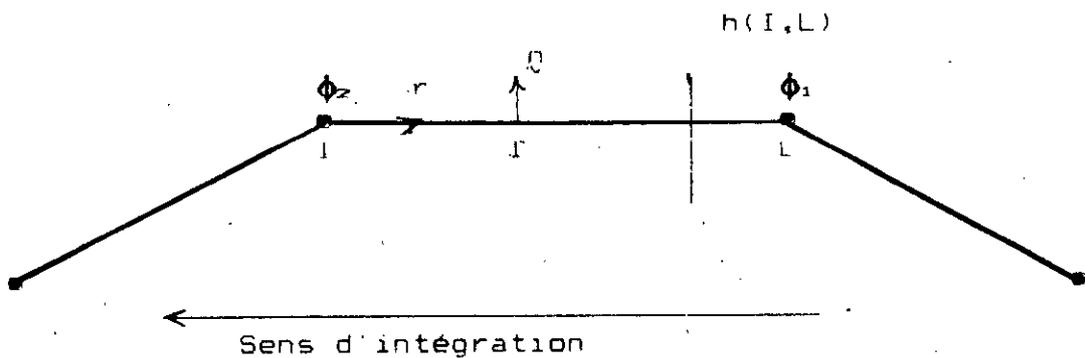


Fig. 5-24 Cas où $J=L$.

$$\phi_1 = \frac{I}{R} \quad ; \quad \phi_2 = (1 - \frac{I}{R})$$

$$d\Gamma = -dr$$

$$h(I,L) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R^{\epsilon} P^* \phi_1 d\Gamma = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R^{\epsilon} P^* \phi_1 dr$$

de la même manière que précédemment nous obtenons:

$$h(1,1,I,L) = 0 \quad \text{car} \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0$$

$$h(2,2,I,L) = 0 \quad \text{car} \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0$$

$$h(1,2,I,L) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} (\cos\theta n_2 - \sin\theta n_1)$$

$$h(2,1,I,L) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} (\sin\theta n_1 - \cos\theta n_2)$$

Cas où $I = J$: $[h_{11}]$.

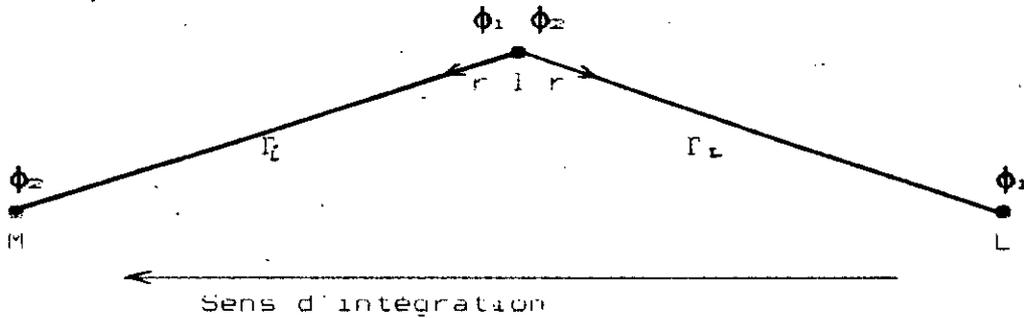


Fig. 5-25 Cas où $I=J$.

$$H_{11} = C_{1k} + \underbrace{\int_{\Gamma_L} P^* \phi_2 d\Gamma}_I + \underbrace{\int_{\Gamma_I} P^* \phi_1 d\Gamma}_{II} \quad \begin{matrix} k = 1,2 \\ i = 1,2 \end{matrix}$$

$$I = \int_{\Gamma_L} P^* \phi_2 d\Gamma = \int_{\Gamma_L} P^* \left(1 - \frac{r}{R}\right) d\Gamma$$

$$II = \int_{\Gamma_I} P^* \phi_1 d\Gamma = \int_{\Gamma_I} P^* \left(1 - \frac{r}{R}\right) d\Gamma$$

$$\begin{aligned} \text{sur } \Gamma_I \quad d\Gamma &= dr & \phi_1 &= 1 - \frac{r}{R} \\ \text{sur } \Gamma_L \quad d\Gamma &= -dr & \phi_2 &= 1 - \frac{r}{R} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que le calcul des $H(i,i)$ présente une singularité, même en considérant la limite de l'intégrale:

$$H(1,1,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_L} P_{11}^* \phi_2 d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_I} P_{11}^* \phi_1 d\Gamma + C_{11}$$

$$H(1,1,I,I) = 0 + C_{11} \quad \text{car} \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0$$

$$H(2,2,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_I} P_{22}^* \phi_2 d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_L} P_{22}^* \phi_1 d\Gamma + C_{22}$$

$$H(2,2,I,I) = 0 + C_{22} \quad \text{car} \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0$$

En résumé:

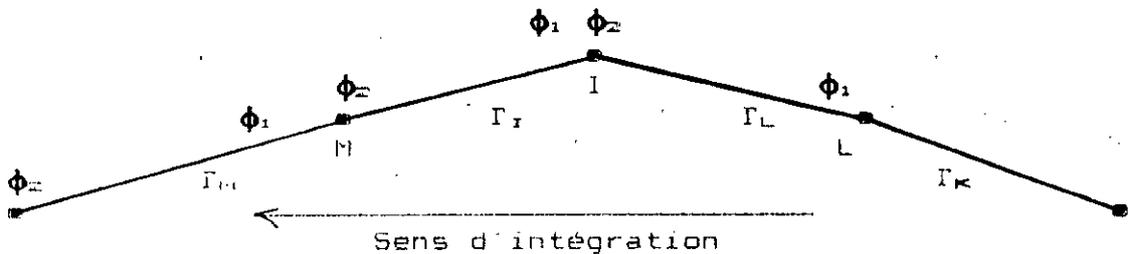


Fig. 5-26 Cas générale.

SUBMATRICE H(1,1,1,J):

$$H(1,1,I,I) = 0 + 0 + C_{11} = C_{11}$$

$$H(1,1,I,I-1) = h(1,1,I,I-1) + \int_{\Gamma_x} P_{11}^* \phi_2 d\Gamma = 0 + \int_{\Gamma_x} P_{11}^* \phi_2 d\Gamma^{(*)}$$

$$H(1,1,I,I+1) = h(1,1,I,I+1) + \int_{\Gamma_x} P_{11}^* \phi_1 d\Gamma = 0 + \int_{\Gamma_x} P_{11}^* \phi_1 d\Gamma^{(*)}$$

SUBMATRICE H(1,2,1,J):

$$H(1,2,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R P_{12}^* \phi_1 dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} P_{12}^* \phi_2 dx + C_{12}$$

$$= \text{singularite}(1) + \text{singularite}(2) + C_{12}$$

$$H(1,2,I,I-1) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} (\cos \theta n_2 - \sin \theta n_1) + \int_{\Gamma_x} P_{12}^* \phi_2 d\Gamma^{(*)}$$

$$H(1,2,I,I+1) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} (\cos \theta n_2 - \sin \theta n_1) + \int_{\Gamma_x} P_{12}^* \phi_1 d\Gamma^{(*)}$$

SUBMATRICE H(2,1,1,J):

$$H(2,1,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R P_{21}^* \phi_1 dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} P_{21}^* \phi_2 dx + C_{21}$$

$$= \text{singularite}(1) + \text{singularite}(2) + C_{21}$$

$$H(2,1,I,I-1) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} (\sin \theta n_1 - \cos \theta n_2) + \int_{\Gamma_x} P_{21}^* \phi_2 d\Gamma^{(*)}$$

$$H(2,1,I,I+1) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} (\sin \theta n_1 - \cos \theta n_2) + \int_{\Gamma_x} P_{21}^* \phi_1 d\Gamma^{(*)}$$

SUBMATRICE H(2,2,1,J):

$$H(2,2,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R P_{22}^* \Phi_1 dr + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} P_{22}^* \Phi_2 dr + C_{22}$$
$$= \text{singularite}(1) + \text{singularite}(2) + C_{22}$$

$$H(2,2,I,I-1) = h(2,2,I,I-1) + \int_{\Gamma_r} P_{22}^* \Phi_2 d\Gamma = 0 + \int_{\Gamma_r} P_{22}^* \Phi_2 d\Gamma^{(*)}$$

$$H(2,2,I,I+1) = h(2,2,I,I+1) + \int_{\Gamma_M} P_{22}^* \Phi_1 d\Gamma = 0 + \int_{\Gamma_M} P_{22}^* \Phi_1 d\Gamma^{(*)}$$

(*) évaluer numériquement (termes ne présentant pas de singularité).

Les éléments:

$$H(1,k,1,1) \text{ pour } 1 \neq 1,2$$

$$k = 1,2$$

sont calculés en considérant un déplacement de corps rigide (voir paragraphe 5.6).

5.7.3 Calcul des Expressions Singulières dans [G]:

Ici tous les éléments présentant une singularité sont calculés en considérant la limite de l'intégrale.

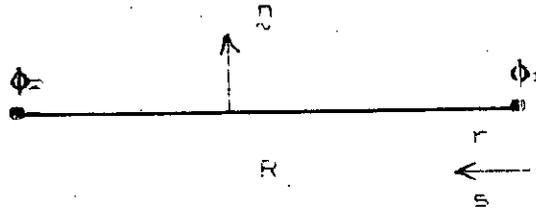


Fig. 5-27 Segment (I, I+1).

Cas I=J en considérant le segment (I, I+1)

SUBMATRICE $g(1,1,I,J)$; $L=I+1$:

$$\begin{aligned}
 g(1,1,I,I) &= \int_{\Gamma_j} U_{11}^*(r) \phi_1(r) d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{11}^*(r) \phi_1(r) dr \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \operatorname{Ln} \left(\frac{1}{r} \right) + \cos^2 \theta \right] \left(1 - \frac{r}{R} \right) dr \\
 &= \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{3}{2} - \operatorname{Ln} R \right\} + \cos^2 \theta \right]
 \end{aligned}$$

$$g(1,1,I,L) = \int_{\Gamma_j} U_{11}^*(r) \phi_2(r) d\Gamma = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{1}{2} - \operatorname{Ln} R \right\} + \cos^2 \theta \right]$$

SUBMATRICE $g(1,2,I,J)$:

$$g(1,2,I,I) = \int_{\Gamma_j} U_{12}^*(r) \phi_1(r) d\Gamma = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \cos \theta \sin \theta$$

$$g(1,2,I,L) = \int_{\Gamma_j} U_{12}^* \phi_2 d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{12}^*(r) \frac{r}{R} dr = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \cos \theta \sin \theta$$

SUBMATRICE $q(2,1,I,J)$:

$$g(2,1,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{21}^* \phi_1 dr = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin \theta \cos \theta$$

$$g(2,1,I,L) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{21}^* \phi_2 dr = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin \theta \cos \theta$$

SUBMATRICE $q(2,2,I,J)$:

$$g(2,2,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{22}^* \phi_1 dr = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{3}{2} - \text{Ln } R \right\} + \sin^2 \theta \right]$$

$$g(2,2,I,L) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{22}^* \phi_2 dr = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{1}{2} - \text{Ln } R \right\} + \sin^2 \theta \right]$$

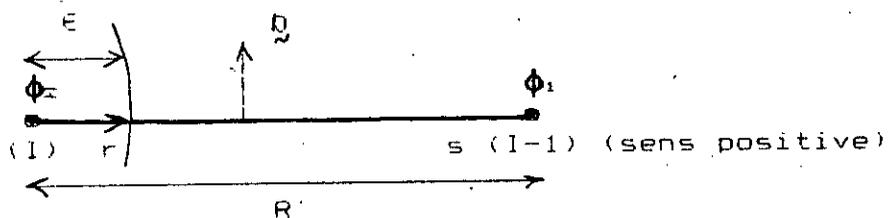


Fig. 5-28 Segment (I-1, I).

Cas I=J en considérant le segment (I-1, I)

SUBMATRICE $q(1,1,I,J)$; $M=1-1$:

$$\begin{aligned}
g(1,1,I,M) &= \int_{I_j} U_{11}^* \phi_1 d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{11}^*(s) \phi_1(s) ds \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R^\epsilon U_{11}^*(r) \phi_1(r) (-dr) \\
&= \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{1}{2} - \text{Ln } R \right\} + \cos^2 \theta \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(1,1,I,I) &= \int_{I_j} U_{11}^* \phi_2(r) d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{11}^*(s) \phi_2(s) ds \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R^\epsilon U_{11}^*(r) \phi_2(r) (-dr) \\
&= \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{3}{2} - \text{Ln } R \right\} + \cos^2 \theta \right]
\end{aligned}$$

SUBMATRICE $g(1,2,I,J)$:

$$g(1,2,I,M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{12}^*(s) \phi_1(s) ds = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \cos \theta \sin \theta$$

$$g(1,2,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{12}^*(s) \phi_2(s) ds = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \cos \theta \sin \theta$$

SUBMATRICE $g(2,1,I,J)$:

$$g(2,1,I,M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{21}^*(s) \phi_1(s) ds = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin \theta \cos \theta$$

$$g(2,1,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{21}^*(s) \phi_2(s) ds = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin \theta \cos \theta$$

SUBMATRICE $g(2,2,I,J)$:

$$g(2,2,I,M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{22}^* \phi_1(s) ds = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{1}{2} - \text{Ln } R \right\} + \sin^2 \theta \right]$$

$$g(2,2,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{22}^* \phi_2(s) ds = \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{3}{2} - \text{Ln } R \right\} + \sin^2 \theta \right]$$

De même que pour la matrice [H], les éléments de la diagonale ainsi que les éléments immédiatement adjacents sont pour chaque bloc comme suit:

SUBMATRICE $G(1,1,I,J)$:

$$G(1,1,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{11}^*(s) \phi_1(s) ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{11}^*(s) \phi_2(s) ds$$

$$= \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{3}{2} - \text{Ln } R \right\} + \cos^2 \theta \right]$$

$$+ \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{3}{2} - \text{Ln } R \right\} + \cos^2 \theta \right]$$

$$G(1,1,I,I-1) = g(1,1,I,I-1) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{11}^*(s) \phi_1(s) ds$$

$$= g(1,1,I,I-1) + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{1}{2} - \text{Ln } R \right\} + \cos^2 \theta \right]$$

$$G(1,1,I,I+1) = g(1,1,I,I+1) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^R U_{11}^*(s) \phi_2(s) ds$$

$$= g(1,1,I,I+1) + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{1}{2} - \text{Ln } R \right\} + \cos^2 \theta \right]$$

SUBMATRICE G(1,2,I,J):

$$G(1,2,I,I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{12}^*(s) \phi_1(s) ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{12}^*(s) \phi_2(s) ds$$

$$= \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin \theta \cos \theta + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \cos \theta \sin \theta$$

$$G(1,2,I,I-1) = g(1,2,I,I-1) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{12}^*(s) \phi_1(s) ds$$

$$= g(1,2,I,I-1) + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin \theta \cos \theta$$

$$G(1,2,I,I+1) = g(1,2,I,I+1) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^R U_{12}^*(s) \phi_2(s) ds$$

$$= g(1,2,I,I+1) + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin \theta \cos \theta$$

SUBMATRICE G(1,2,I,J):

$$\begin{aligned}
 G(2,1,I,I) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R U_{21}^*(s) \phi_1(s) ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{21}^*(s) \phi_2(s) ds \\
 &= \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin\theta \cos\theta + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \cos\theta \sin\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(2,1,I,I-1) &= g(2,1,I,I-1) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{R-\epsilon} U_{21}^*(s) \phi_1(s) ds \\
 &= g(2,1,I,I-1) + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin\theta \cos\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(2,1,I,I+1) &= g(2,1,I,I+1) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^R U_{21}^*(s) \phi_2(s) ds \\
 &= g(2,1,I,I+1) + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \sin\theta \cos\theta
 \end{aligned}$$

SUBMATRICE G(2,2,I,J):

$$\begin{aligned}
 G(2,2,I,I) &= \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3 - 4\nu) \left\{ \frac{3}{2} - \text{Ln } R \right\} + \sin^2 \theta \right] \\
 &+ \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3 - 4\nu) \left\{ \frac{3}{2} - \text{Ln } R \right\} + \sin^2 \theta \right]
 \end{aligned}$$

$$G(2,2,I,I-1) = g(2,2,I,I-1) + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{1}{2} - \text{Ln } R \right\} + \sin^2\theta \right]$$

$$G(2,2,I,I+1) = g(2,2,I,I+1) + \frac{\frac{R}{2}}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \left\{ \frac{1}{2} - \text{Ln } R \right\} + \sin^2\theta \right]$$

Calcul des Cosinus Directeurs:

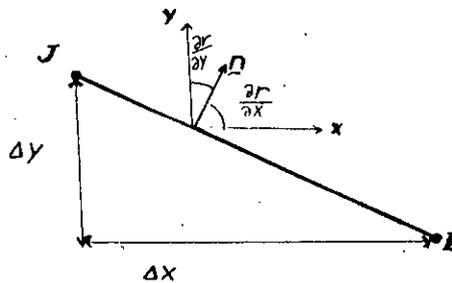


Fig. 5-29 Élément (I, J).

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(r, x)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \cos(r, y)$$

Pour (1, I+1):

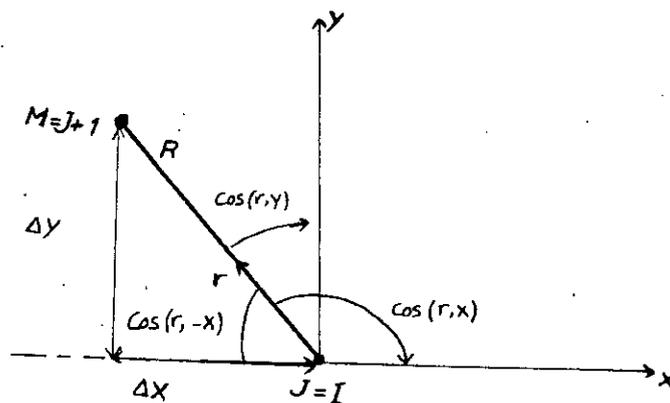


Fig. 5-30 Élément (1, I+1).

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(r, x) = -\cos(r, -x) = -\frac{X(J) - X(M)}{R} = -\frac{\Delta X}{R}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \cos(r, y) = \sin(r, x) = \sin(r, -x) = \frac{Y(M) - Y(J)}{R} = \frac{\Delta Y}{R}$$

Pour (I, I-1):

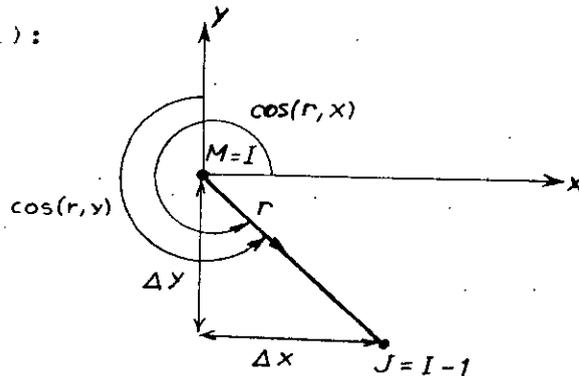


Fig. 5-31 élément (I, I-1).

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(r, x) = \frac{X(M) - X(J)}{R} = -\frac{\Delta X}{R}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \cos(r, y) = \sin(r, x) = -\sin(r, -y) = -\frac{Y(M) - Y(J)}{R} = -\frac{\Delta Y}{R}$$

5.8 POINTS INTERNES

La détermination des inconnues physiques (déplacements et état de contrainte) en des points que l'on choisit à l'intérieur du domaine constitue un des avantages de la BEM comparé aux autres méthodes numériques comme la MEF et la méthode des Différences finies (FDM).

Une fois les inconnues sur la frontière du domaine sont déterminées, les inconnues dans le domaine sont déterminées à partir de l'équation intégrale établie au paragraphe 5.2.

5.8.1 Détermination des Déplacements au Point 'i':

l'équation:

$$U^i = \int_{\Gamma} U^* P \, d\Gamma - \int_{\Gamma} P^* U \, d\Gamma \quad (5,34)$$

démontré au paragraphe 5.2 conduit à la détermination du vecteur déplacement U_L^i ($L = 1,2$). L'équation (5,34) peut s'écrire plus explicitement comme suit:

$$U_L^i = \int_{\Gamma} U_{Lk}^* P_k \, d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{Lk}^* U_k \, d\Gamma \quad (5,35)$$

où P_k et U_k sont respectivement les tractions et les déplacements connus sur la frontière.

En considérant la forme discrétisée, l'équation (5,35) s'écrit:

$$U_L^i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} U_{Lk}^* P_k \, d\Gamma - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} P_{Lk}^* U_k \, d\Gamma \quad (5,36)$$

Pour le cas que nous étudions: cas linéaire, les tractions et les déplacements s'écrivent en utilisant les fonctions d'interpolation ϕ_1 et ϕ_2 comme suit:

$$U = \begin{cases} U_1 = \phi_1 U_1^j + \phi_2 U_1^{j+1} \\ U_2 = \phi_1 U_2^j + \phi_2 U_2^{j+1} \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} P_1 = \phi_1 P_1^j + \phi_2 P_1^{j+1} \\ P_2 = \phi_1 P_2^j + \phi_2 P_2^{j+1} \end{cases}$$

$$D_{kij} = \frac{1}{r^{\alpha}} \{ (1-2\nu) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) \\ + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)}$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu}{r^{\beta}} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) \right. \\ \left. - \gamma r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \beta \nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \\ + (1-2\nu) (\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ \left. - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)}$$

Ces formules sont applicables pour des problèmes à 2 dimensions et à 3 dimensions avec:

en 2D: $\alpha = 1$, $\gamma = 4$, $\beta = 2$

en 3D: $\alpha = 2$, $\gamma = 5$, $\beta = 3$

Les termes U_k et P_k dans l'équation (5,42) sont écrits de la même façon que pour le calcul des déplacements aux points internes. Les intégrales numériques sur toute la frontière sont décomposées en somme d'intégrales sur des segments. L'évaluation numérique de ces intégrales est obtenue par la quadrature de Gauss (voir index).

Remarque:

Une fois les inconnues aux frontières sont déterminées, on calcule facilement les déplacements en des points internes. Malheureusement, lorsque ces points sont suffisamment proches de la frontière, les valeurs des déplacements correspondants deviennent inexactes. ce qui est une conséquence directe des

singularités qui apparaissent dans les solutions fondamentales.

Une technique numérique simple est utilisée pour surmonter ce problème: on suppose que le point interne est situé à une distance l du segment ou élément de longueur L telle que $l < L$. Le segment est ensuite divisé en un certain nombre de subsegments, chacun ayant une longueur inférieure à l . Les déplacements et tractions aux extrémités des subsegments sont interpolés au moyen des fonctions de forme et des valeurs nodales des segments parents. L'intégration est alors menée sur chaque subsegment. La distance minimale du point interne au segment de la frontière est une fonction du nombre de subsegments utilisés.

CHAPITRE VI

CHAPITRE VI

PROBLEME DE COIN

6.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous avons délibérément omis de traiter toute discontinuité dans la géométrie et dans les conditions aux frontières, quoique la plupart des problèmes rencontrés présentent cette caractéristique surtout au niveau des coins. Bien qu'il ne soit pas toujours nécessaire d'obtenir des informations détaillées au niveau des discontinuités, il existe une classe de problèmes où les résultats près et au niveau des discontinuités sont d'une importance capitale.

Dans ce chapitre nous allons citer et essayer de donner certains détails sur les différentes procédures qui ont été développées pour résoudre le problème de discontinuité en utilisant la formulation directe de la BEM.

6.2 DEFINITION DU PROBLEME

Pour les problèmes de l'élasticité, le déplacement U a une valeur unique en un point quelconque du solide, alors que la force surfacique P qui est une dérivée par rapport à la normale du point considérée du solide peut avoir plusieurs valeurs aux coins.

L'équation intégrale pour un problème d'élasticité est:

$$C^T U^T + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} P^T U \, d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} U^T P \, d\Gamma \quad (6,1)$$

Pour N noeuds de la frontière discrétisée, et en considérant l'existence de un coin nodal, l'équation (6,1) s'écrit aussi sous forme:

$$H U = G P \quad (6,2)$$

où [H] est une matrice à $2N \times 2N$ ou $3N \times 3N$ respectivement pour un problème en 2D ou en 3D,

et [G] est une matrice à $2N \times (2N+2)$ ou $3N \times (3N+4)$ respectivement pour un problème en 2D ou en 3D.

La colonne supplémentaire qui apparait dans la matrice G est due à l'existence d'un coin et donc à la multivaleur de la force surfacique en ce point. En effet, considérons une forme explicite de l'équation (6,1) en se basant sur la figure 6-1 où (k) est le coin nodal:

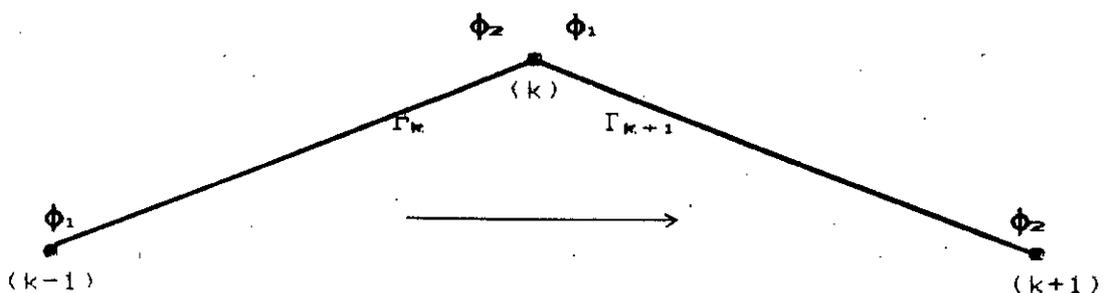


Fig. 6-1 Le coin nodal (k).

$$\begin{aligned}
C^i U^i + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Gamma_j} P^* U \, d\Gamma + \int_{\Gamma_k} P^* \phi_1 \, d\Gamma U^{k-1} + \int_{\Gamma_k} P^* \phi_2 \, d\Gamma U_{(g)}^k \\
+ \int_{\Gamma_{k+1}} P^* \phi_1 \, d\Gamma U_{(d)}^k + \int_{\Gamma_{k+1}} P^* \phi_2 \, d\Gamma U^{k+1} + \sum_{j=k+2}^N \int_{\Gamma_j} P^* U \, d\Gamma \\
= \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Gamma_j} U^* P \, d\Gamma + \int_{\Gamma_k} U^* \phi_1 \, d\Gamma P^{k-1} + \int_{\Gamma_k} U^* \phi_2 \, d\Gamma P_{(g)}^k \\
+ \int_{\Gamma_{k+1}} U^* \phi_1 \, d\Gamma P_{(d)}^k + \int_{\Gamma_{k+1}} U^* \phi_2 \, d\Gamma P^{k+1} + \sum_{j=k+2}^N \int_{\Gamma_j} U^* P \, d\Gamma
\end{aligned}$$

où $U_{(d)}^k$, $P_{(d)}^k$: respectivement le déplacement et la traction surfacique à droite du noeud (k).

$U_{(g)}^k$, $P_{(g)}^k$: respectivement le déplacement et la traction surfacique à gauche du noeud (k).

avec :

$U_{(d)}^k = U_{(g)}^k$: déplacement indépendant de la normale.

$P_{(d)}^k \neq P_{(g)}^k$: traction surfacique fonction de la normale au point considéré.

Ainsi la forme explicite de l'équation (6,2) est :

$$H_{11}U^1 + H_{12}U^2 + H_{1k}U^k + \dots + H_{1N}U^N = G_{11}P^1 + \dots + g_{1k}P_{(d)}^k + g_{1k}P_{(g)}^k + G_{1N}P^N$$

$$[H]_{2N \times 2N} \{U\}_{2N} = [G]_{2N \times (2N+2)} \{P\}_{2N+2}$$

(6,3)

système de 2N équations à (2N+2) inconnues. La matrice G est ainsi augmentée de deux colonnes par coin. On aura à introduire chaque coin une information sur le déplacement et deux informations sur les tractions.

Pour un problème d'élasticité où les conditions aux frontières au niveau des coins sont de type Neumann (Fig. 6-2(a))

ou de type Robin (mixte) (Fig. 6-2(b)), la résolution de l'équation (6,3) ne présente aucune difficulté. Par contre dans le cas de conditions aux frontières de type Dirichlet (Fig. 6-2(c)), i.e uniquement les déplacements qui sont prescrits aux coins, il est impossible de résoudre l'équation (6-3) et une approche alternative pour résoudre le problème doit être trouvée.

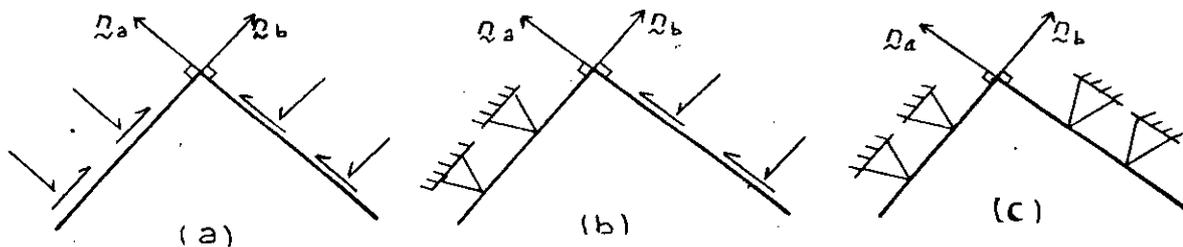


Fig. 6-2 Types de coin sur la frontière.

6.3 DIFFERENTES APPROCHES DE RESOLUTION DU PROBLEME DE DIRICHLET

✓ 6.3.1 Représentation de Noeud Unique:

Une procédure de traiter le problème lorsque uniquement les déplacements (pour un problème d'élasticité) sont prescrits aux coins, consiste à supposer que les multivaleurs de la dérivée par rapport à la normale des déplacements (inconnues) au niveau du coin considéré sont égales. Pour le problème d'élasticité, P^a et P^b sont les tractions surfaciques inconnues au niveau du coin considéré (Fig. 6-2(c)), on écrira:

$$P^a = P^b \quad \text{ou encore}$$

$$P_i^a = \sigma_{ij} n_j^a = P_i^b = \sigma_{ij} n_j^b$$

où n^a et n^b sont les vecteurs normaux extérieurs des surfaces réunies au coin et σ_{ij} le tenseur contrainte en ce point. Lachat et Watson utiliseront cette méthode simple et remarqueront que les erreurs impliquées sont surtout limitées aux coins.

6.3.2 Concept de Noeuds Multiple Indépendant: (Fig. 6-3)

Afin d'éliminer toute ambiguïté que pose les coins; Reccardella introduit le concept de noeud-double (pour les problèmes en 2D). Ce qui engendre l'écriture d'équations supplémentaires (équation (6-1)) pour les noeuds ajoutés aux coins. Cette procédure affecte les matrices H et G tout en demeurant carrées et d'ordre $(2N+2) \times (2N+2)$ (pour un noeud ajouté). Dans le cas de n coins les matrices sont d'ordre $2(N+n) \times 2(N+n)$.

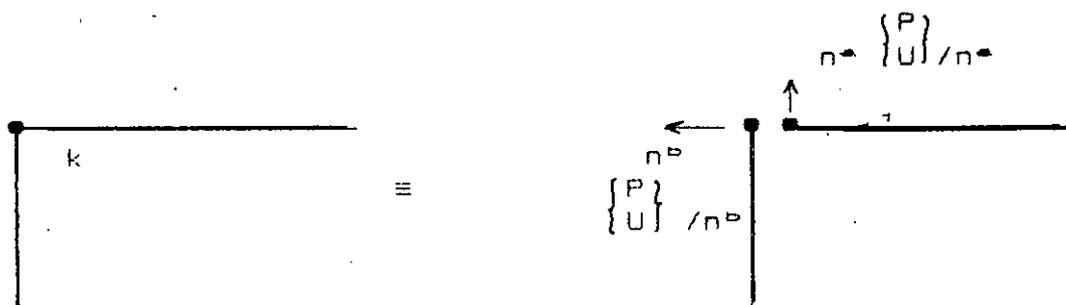


Fig. 6-3 Noeud double.

On aura à traiter le problème comme si que la structure ne renferme pas de coins, l'introduction des conditions aux frontières quelque soit leurs natures peut se faire sans problème en considérant chaque noeud indépendant de son voisin (au niveau du coin).

6.3.3 Concept de noeuds multiples avec relations auxiliaires:

Quelques différents concepts de noeuds multiples ont été proposés par Chaudonneret et Alarcon pour résoudre les problèmes d'élasticité; Martin et Paris pour les problèmes de potentiel. Il dérive un ensemble d'équations écrites pour un coin nodal qui sont additionnées à l'équation (6-1).

Pour les problèmes elastostatiques, Chaudonneret a établi deux relations auxiliaires entre les points voisins au coin en considérant l'invariance et la symétrie du tenseur contrainte ainsi que l'invariance de la trace du tenseur déformation.

Les tractions surfaciques P_1 et P_2 correspondant à la valeur unique du champ de contrainte σ_{ij} au point voisin du coin sont données par:

$$P_1 = \sigma_{ij} n_j$$

$$P_2 = \sigma_{ij} n_j$$

en considérant la symétrie du tenseur contrainte ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), on peut écrire:

$$n_1 P_1 - n_1 P_1 = n_2 P_2 - n_2 P_2$$

1^{re} relation auxiliaire

La deuxième relation auxiliaire s'obtient en considérant l'invariance de la trace du tenseur déformation.

Considérons les figures 6-4 (a) et (b) où l'origine du repère est confondu avec le coin O; OA et OB sont les segments formant le coin; α et β étant l'inclinaison par rapport à la direction (1) des segments formant le coin O.

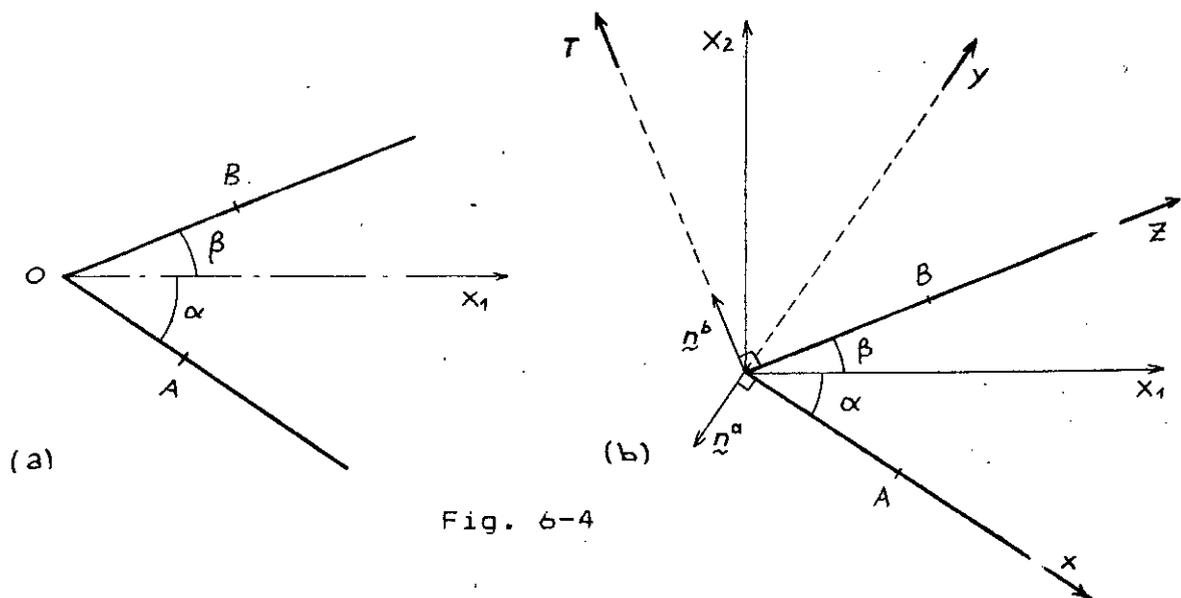


Fig. 6-4

L'invariance de la trace du tenseur de déformation s'écrit:

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} + \epsilon_{tt}$$

Les déplacements U_1 et U_2 par rapport aux axes (x_1, x_2) sont supposés varier de façon linéaire le long de OA et OB. on peut alors écrire:

$$U_1 = U_1(0) + \frac{U_1(A) - U_1(0)}{h_A} (x - x_0)$$

La composante de U_1 le long de Ox est:

$$U_x = U_1 \cos \alpha + U_2 \cos \alpha$$

de plus

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{U_1(A) - U_1(0)}{h_A} \cos \alpha + \frac{U_2(A) - U_2(0)}{h_A} \sin \alpha$$

de même

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{U_1(B) - U_1(0)}{h_B} \cos \beta + \frac{U_2(B) - U_2(0)}{h_B} \sin \beta$$

avec

$$\sigma_{yy} = P_1 \sin \alpha - P_2 \cos \alpha$$

$$\sigma_{tt} = P_2 \cos \beta - P_1 \sin \beta$$

En utilisant la loi de Hooke et l'invariance de la trace des tenseurs déformation, nous aboutissons à la deuxième relation

auxiliaire qui est:

$$\begin{aligned}
 & P_1^a \sin\alpha + P_1^b \sin\beta - P_2^a \cos\alpha - P_2^b \cos\beta = \\
 & - \frac{2\mu}{h_A} \cos\alpha U_1(A) + 2\mu \left(\frac{\cos\alpha}{h_A} - \frac{\cos\beta}{h_B} \right) U_1(0) + \frac{2\mu}{h_B} \cos\beta U_1(B) \\
 & - \frac{2\mu}{h_A} \sin\alpha U_2(A) + 2\mu \left(\frac{\sin\alpha}{h_A} - \frac{\sin\beta}{h_B} \right) U_2(0) + \frac{2\mu}{h_B} \sin\beta U_2(B)
 \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant les deux relations auxiliaires, nous pouvons augmenter le nombre d'équations de façon à ce que le système (6.3) puisse être résolu.

6.3.4 Approche de Mustoe:

Une approche plus simple a été développée récemment par Mustoe qui considère une interpolation polynomiale du champ de déplacement à l'intérieur d'une région triangulaire (en 2D) contenant les deux éléments de frontière formant le coin. Pour un point à l'intérieur du triangle le déplacement s'écrit:

$$U = M U^n$$

où M : fonctions de forme,

U^n : déplacements nodaux sur la frontière.

Les déformations en un point à l'intérieur de la région triangulaire sont:

$$\epsilon = L U = L M U^n \quad \text{avec}$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} ; \quad \text{opérateur différentiel}$$

En utilisant la loi de Hooke, on a :

$$\sigma = C \epsilon = C L M U^n$$

Les tractions surfaciques en un point en fonction des déplacements nodaux U^n sont :

$$P = T \sigma$$

$$P = T C L M U^n \quad (6,4)$$

où

$$T = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}$$

L'équation (6,4) peut être utilisée au niveau de chaque coin de la structure fournissant deux relations additionnelles. Le vecteur normale \vec{n} peut être choisi comme n^a ou n^b .

6.3.5 Concept de Double Noeud Non Confondus :

Dans notre étude nous avons adopté une autre procédure pour contourner le problème posé par les coins. Procédure développée par Brebbia (1984) utilisée par Messafer [thèse de Ph.D]. Elle consiste non seulement à dédoubler le noeud (coin) mais à considérer un segment de longueur l , reliant les deux noeuds (voir figure 6-5) (après dédoublement). Ceci permet de traiter le problème comme si que le problème de coin n'existe plus. Toutefois, il est important de noter l'inconvénient de cette méthode: les longueurs des segments ajoutés doivent appartenir à la fourchette suivante:

$$d/1000 < l_s < d/100$$

avec d : longueur de l'élément de frontière adjacent.

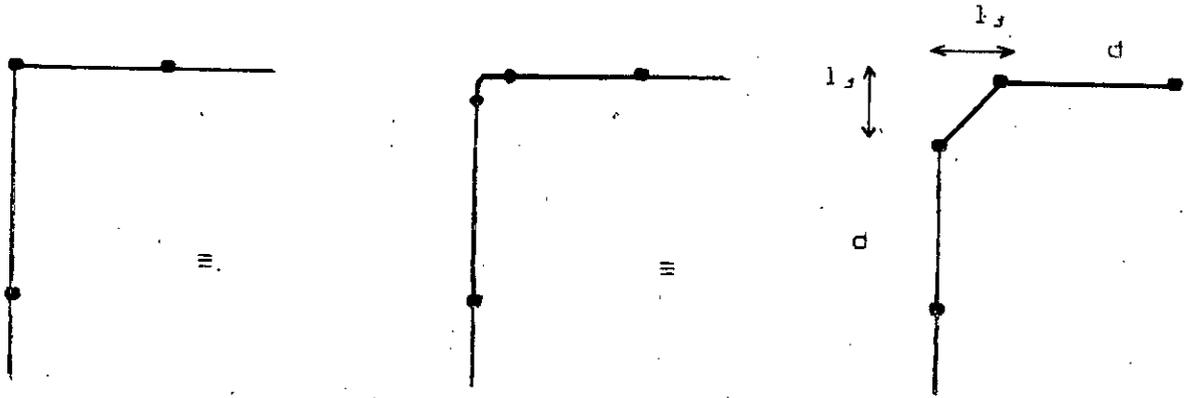


Fig. 6-5 Dédoublément plus segment supplémentaire.

Notons que les matrices H et G sont modifiées, tout en restant carrées et de dimension: $2N' \times 2N'$ avec $N' = N + n_c$ où n_c : est le nombre de coins.

CHAPITRE VII

CHAPITRE VII

MODELISATION DE MATERIAU ANISOTROPE HETEROGENE

7.1 INTRODUCTION

La plupart des matériaux rencontrés tels que: le béton, le sol et bien d'autres, présentent une hétérogénéité des propriétés. L'idéalisation à un matériau homogène, élastique et isotrope permet d'étudier le problème avec une complexité moindre que si on considère le matériau sous sa vraie nature, à savoir, des propriétés variables fonction de l'orientation des axes considérés. Toutefois, il a été prouvé que les résultats donnés par le matériau idéalisé ne sont pas très erronés pour de faibles déformations. Pour une justesse des résultats, il serait plus intéressant de formuler le problème en tenant compte de toutes ses propriétés physiques à savoir les constantes élastiques C_{ijkl} .

Le sol présente deux propriétés très importantes: l'hétérogénéité et l'anisotropie, en effet, les caractéristiques des sols différent d'un point à un autre et selon la direction considérée.

Il serait très intéressant de tenir compte d'une certaine part de cette réalité lors de la formulation du problème.

Dans Cette partie, nous avons essayé d'approcher le problème de deux manières:

- La première est de considérer un cas particulier

d'anisotropie: l'isotropie transversale, en effet le sol peut être modélisé par des strates présentant ainsi une isotropie par plan de stratification.

L'inconvénient majeur rencontré dans ce cas est la difficulté que présente la détermination de la fonction de Green, ainsi que la complexité de ces expressions permettant une formulation par des équations intégrales.

- La deuxième façon consiste en une modélisation du matériau non homogène en multi-zones homogènes, isotropes et élastiques, i.e en sub-régions où interviennent des interfaces assurant la continuité entre couches.

Le problème que pose cette approche est la difficulté de la modélisation des conditions aux limites au niveau des interfaces afin d'approcher le plus possible les liaisons réelles entre régions. En effet, les déplacements et contraintes normales et surtout de cisaillement peuvent engendrer une rupture entre couches sous l'effet de chargements.

7.2 ISOTROPIE TRANSVERSALE

7.2.1 Historique:

Devenant un des problèmes de l'élasticité, la formulation de la fonction de Green fut l'objectif de nombreuses recherches.

La fonction de Green fut établie en 1848 quand Kelvin résolu le problème de force unique appliquée à l'intérieur d'un domaine isotrope et infini.

La solution pour d'autres problèmes élastiques peut être obtenue à partir de fonction de Green en utilisant les principes

de synthèse et de superposition.

Des efforts considérables ont été développés afin de trouver une solution fondamentale pour des milieux anisotropes. En 1900, Fredholm fut le premier à établir une expression implicite de fonction de Green pour un milieu anisotrope.

Cependant, une solution explicite de fonction de Green pour un matériau anisotrope n'est possible que si l'équation algébrique du 6^{ème} ordre (équation reliant les constantes élastiques, assurant la stabilité du solide) peut être résolue analytiquement.

Suivant Fredholm, Kröner (1953) détermina une fonction de Green pour un matériau transversalement isotrope où les constantes élastiques vérifient $(C_{11}C_{33})^2 - C_{12} - 2C_{44} \neq 0$.

Lifshitz et Rozentsveig (1947), Willis (1965), Lejeck (1969) ont étudié ce problème en se basant sur la méthode des transformées de Fourier.

Utilisant une approche différente, Elliott (1948), Sveklo (1969), Woo et Shield (1962) ont étudié le problème de force ponctuelle agissant perpendiculairement au plan d'isotropie.

L'évaluation numérique de la fonction de Green et de ces dérivées a été établie par Barnett en 1972.

Nous donnons, la solution fondamentale pour un matériau présentant une isotropie par plan en milieu infini, solution établie par Pen et Chou [14], ils ont donné aussi la solution pour un domaine semi-infini [16].

7.2.2 Formulation de Solution Fondamentale:

1)- Introduction:

Un cas particulier d'anisotropie, qui présente un intérêt particulier dans la pratique est celui du matériau 'stratifié', ou à isotropie transversale, dont les propriétés présentent une symétrie de révolution dans le plan de stratification i.e le plan d'isotropie. Un tel matériau ne possède que cinq constantes élastiques indépendantes qui sont C_{11} , C_{33} , C_{13} , C_{12} et C_{44} . Les relations liants les contraintes aux déformations ont été données au chapitre II.

Dans cette partie nous allons nous limiter à donner les fonctions fondamentales pour un matériau transversalement isotrope, fonction établie par Pen et Chou [14], permettant ainsi une formulation par des équations intégrales.

Le sol sera notre modèle d'étude, vue qu'il peut être considéré comme un matériau stratifié, i.e qu'on peut modéliser le sol en strates isotropes. Autrement dit, nous supposons que les propriétés élastiques sont constantes selon toutes les directions du plan de stratification; alors que suivant la direction perpendiculaire au plan d'isotropie, ces propriétés varient, (voir Figure 7-1).

avec $x-y$: plan de stratification où E_1 et ν_1 sont constantes, G_1 est fonction de E_1 et ν_1 .
sur la direction perpendiculaire à $x-y$ i.e selon z : E_2 , ν_2 et G_2 .

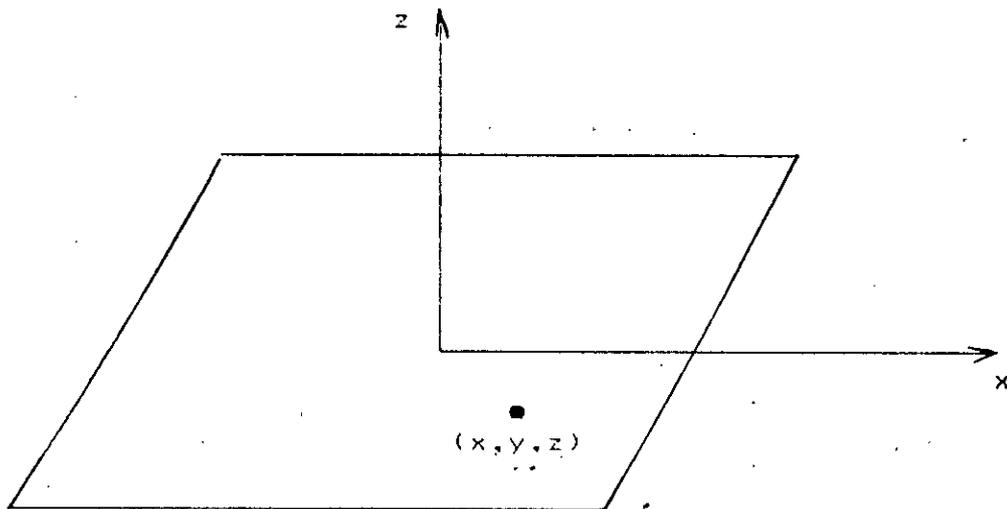


Fig. 7-1 Plan de stratification.

2)- Equations gouvernantes:

Partant de l'équation d'équilibre pour un matériau donné et en ne tenant pas compte des forces de volume, on a:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (7,1)$$

l'équation liant les contraintes aux déformation est donnée dans le cas général par:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (7,2)$$

où C_{ijkl} étant le tenseur contenant les constantes élastiques. Dans le cas qui nous intéresse: cas élastique, la relation déplacement-déformation est:

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} (U_{k,l} + U_{l,k}) \quad (7,3)$$

ainsi (7,3) dans (7,2) donne:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} \\ &= C_{ijkl} U_{k,lj} \end{aligned} \quad (7,4)$$

l'équilibre impose: $\sigma_{ij,j} = 0$ donc:

$$C_{ijkl} U_{k,lj} = 0 \quad (7,5)$$

i.e

$$\boxed{C_{iklm} U_{l,km} = 0} \quad (I) \quad (i,k,l,m = 1,3)$$

qui est une équation liant les déplacements aux propriétés du matériau.

Pour un matériau anisotrope élastique à 3 dimensions, C_{iklm} contient 36 constantes indépendantes. Pour un matériau transversalement isotrope i.e présentant une isotropie par plan parallèle au plan (x-y), les constantes élastiques sont données par la relation suivante:

$$C_{iklm} = a \delta_{ik} \delta_{lm} + b (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) + \gamma \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{l3} \delta_{m3} + k (\delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{lm} + \delta_{ik} \delta_{l3} \delta_{m3}) + \beta (\delta_{im} \delta_{k3} \delta_{l3} + \delta_{i3} \delta_{m3} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{k3} \delta_{m3} + \delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{km}) \quad (7,6)$$

où δ_{ij} : symbole Kronecker

$$a = C_{11} - 2C_{66} \quad \text{avec} \quad C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12})$$

$$b = C_{66}$$

$$k = C_{13} - C_{11} + 2C_{66}$$

$$\beta = C_{44} - C_{66}$$

$$\gamma = C_{11} + C_{33} - 2C_{13} - 4C_{44}$$

Pour un matériau transversalement isotrope, les déplacements dérivent de fonction potentielles ψ , Ψ et ϕ :

$$U_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$U_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (II)$$

$$U_3 = - \frac{C_{11}}{C_{13} + C_{44}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi - \frac{C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \phi$$

où les fonctions Φ , Ψ et ϕ satisfont les équations suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \Phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \Psi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0$$

(III)

où $z_1 = v_1 z$,

$z_2 = v_2 z$,

$z_3 = v_3 z$

avec

$$v_1 = \left[\frac{(\bar{C}_{13} - C_{13})(\bar{C}_{13} + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33} C_{44}} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(\bar{C}_{13} + C_{13})(\bar{C}_{13} - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33} C_{44}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7,7)$$

$$v_2 = \left[\frac{(\bar{C}_{13} - C_{13})(\bar{C}_{13} + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33} C_{44}} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{(\bar{C}_{13} + C_{13})(\bar{C}_{13} - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33} C_{44}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v_3 = \sqrt{\left(\frac{C_{66}}{C_{44}} \right)}$$

De même on peut déduire l'expression des contraintes en utilisant la relation: $\sigma_{ij} = C_{ijkl} U_{k,l}$ et en remplaçant $U_{k,l}$ par les expressions (II):

$$\sigma_{11} = \left[\frac{C_{11} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{C_{13} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2C_{66} \times \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] + C_{13} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\sigma_{22} = \left[\frac{C_{11} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{C_{13} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2C_{66} \times \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] + C_{13} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\sigma_{33} = \left[\left(C_{13} - \frac{C_{11} C_{33}}{C_{13} + C_{44}} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{C_{33} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial z} + C_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (VI)$$

$$\sigma_{31} = \left[- \frac{C_{11} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{C_{13} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x} + C_{44} \times \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_{32} = \left[- \frac{C_{11} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{C_{13} C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial y} - C_{44} \times \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$$

$$\sigma_{12} = 2C_{66} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y \partial z} + C_{66} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)$$

Notons qu'on peut retrouver les expressions établies par Love (1927) et Timoshenko pour un matériau isotrope en posant $\Psi = \phi = 0$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad C_{11} &= C_{33} = \lambda + 2\mu \\ C_{44} &= C_{66} = \mu && (\mu \text{ et } \lambda: \text{coefficients} \\ C_{13} &= C_{12} = \lambda && \text{de Lamé}) \end{aligned}$$

3) - Solution Fondamentale:

La détermination de la solution pour une force appliquée à l'intérieur d'un domaine transversalement isotrope en 3D se fait en deux parties: en considérant une force normale au plan d'isotropie et une force parallèle au plan d'isotropie.

i) Force normale au plan d'isotropie:

Pour une force appliquée à l'origine, la solution a été obtenue en posant:

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{i=1}^2 [A_i Z_i \text{Ln}(R_i + Z_i) + B_i R_i] \\ \Psi = \phi = 0 \end{cases} \quad (v)$$

où $R_i^2 = \zeta^2 + Z_i^2$ avec $\zeta^2 = x^2 + y^2$.

Les constantes A_i et B_i obéissant aux conditions:

$$A_1 = -B_1 \quad \text{si} \quad (C_{11} C_{33})^* - C_{13} - 2C_{44} \neq 0$$

$$A_1 = A_2, B_1 = B_2 \quad \text{si} \quad (C_{11} C_{33})^* - C_{13} - 2C_{44} = 0$$

et son données par les relations:

$$\text{si} \quad (C_{11} C_{33})^* - C_{13} - 2C_{44} \neq 0$$

$$v_1 A_1 = -v_2 A_2 = \frac{P(C_{13} + C_{44})}{4\pi C_{33} C_{44} (v_2^2 - v_1^2)} \quad (7,8)$$

$$B_1 = A_1$$

$$\text{si } (C_{11} C_{33})^* - C_{13} - 2C_{44} = 0 \quad (v_1 = v_2)$$

$$A_1 = A_2 = 0$$

(7,9)

$$B_1 = B_2 = - \frac{P(C_{13} + C_{44})}{16\pi C_{11} C_{44}}$$

Les déplacements sont alors:

$$U_1 = \sum_{i=1}^2 \left[v_i A_i \frac{x}{R_i R_i^*} - v_i (A_i + B_i) \frac{x Z_i}{R_i^3} \right]$$

$$U_2 = \sum_{i=1}^2 \left[v_i A_i \frac{y}{R_i R_i^*} - v_i (A_i + B_i) \frac{y Z_i}{R_i^3} \right]$$

(7,10)

$$U_3 = \sum_{i=1}^2 \left[- \left(\frac{C_{11} B_i + C_{44} v_i^2 A_i}{C_{13} + C_{44}} \right) \frac{1}{R_i} - v_i^2 \frac{(A_i + B_i)}{C_{13} + C_{44}} \left(\frac{C_{44} \zeta^2 + C_{11} Z_i}{R_i^3} \right) \right]$$

$$R_i^* = R_i + Z_i \quad (i=1,2,3)$$

Les contraintes pour une force ponctuelle sont déterminées à partir des expressions (IV) et (V):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[(C_{11} - C_{13} v_i^2 k_i) (2A_i + B_i) + 2 \left(C_{66} + \frac{C_{13} C_{44} v_i^2}{C_{13} + C_{44}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. x(A_i + B_i) \right] \frac{v_i Z_i}{R_i^3} - (C_{11} - C_{13} v_i^2 k_i) (A_i + B_i) \frac{3v_i Z_i^3}{R_i^5} \right. \\ \left. - 2C_{66} (A_i + B_i) \left(\frac{3v_i Z_i y^2}{R_i^3} \right) - 2C_{66} v_i A_i \left[\frac{1}{R_i R_i^*} - \frac{y^2}{R_i^2 R_i^*} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[(C_{11} - C_{13}v_i^2k_i)(2A_i + B_i) + 2 \left(C_{66} + \frac{C_{13}C_{44}v_i^2}{C_{13} + C_{44}} \right) (A_i + B_i) \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{v_i Z_i}{R_i^3} - (C_{11} - C_{13}v_i^2k_i)(A_i + B_i) \frac{3v_i Z_i^3}{R_i^5} - 2C_{66} (A_i + B_i) \left(\frac{3v_i Z_i x^2}{R_i^5} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2C_{66}v_i A_i \left[\frac{1}{R_i R_i^*} - \frac{x^2}{R_i^3 R_i^*} - \frac{x^2}{R_i^2 R_i^{*2}} \right] \right] \right\}$$

$$\sigma_{33} = \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[(C_{13} - C_{33}v_i^2k_i)(2A_i + B_i) + \frac{2C_{33}C_{44}v_i^2}{C_{13} + C_{44}} (A_i + B_i) \right] \right. \\ \left. \times \frac{v_i Z_i}{R_i^3} - 3(C_{13} - C_{33}v_i^2k_i)(A_i + B_i) \frac{v_i Z_i^3}{R_i^5} \right\}$$

$$\sigma_{12} = 2C_{66} \sum_{i=1}^2 \left\{ -A_i \left(\frac{v_i xy}{R_i^3 R_i^*} + \frac{v_i xy}{R_i^2 R_i^{*2}} \right) + (A_i + B_i) \frac{3v_i xy Z_i}{R_i^5} \right\} \quad (7.11)$$

$$\sigma_{31} = C_{44} \sum \left\{ \left[-\frac{C_{11} + C_{13}v_i^2}{C_{13} + C_{44}} A_i + \frac{C_{11} - C_{13}v_i^2}{C_{13} + C_{44}} (A_i + B_i) \right] \frac{x}{R_i^3} \right. \\ \left. + \frac{C_{11} + C_{13}v_i^2}{C_{13} + C_{44}} (A_i + B_i) \frac{3x Z_i^2}{R_i^5} \right\}$$

$$\sigma_{32} = C_{44} \sum \left\{ \left[-\frac{C_{11} + C_{13}v_i^2}{C_{13} + C_{44}} A_i + \frac{C_{11} - C_{13}v_i^2}{C_{13} + C_{44}} (A_i + B_i) \right] \frac{y}{R_i^3} \right. \\ \left. + \frac{C_{11} + C_{13}v_i^2}{C_{13} + C_{44}} (A_i + B_i) \frac{3y Z_i^2}{R_i^5} \right\}$$

ii)- Force parallèle au plan d'isotropie:

Les expressions de déplacements, de contraintes pour une

force appliquée parallèlement au plan d'isotropie peuvent être déterminées comme dans le cas précédent mais en considérant les fonctions potentielles suivantes:

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{i=1}^2 \left[A'_i x \operatorname{Ln}(R_i + Z_i) + B'_i \frac{xZ_i}{(R_i + Z_i)} \right] \\ \Psi = D \frac{y}{(R_3 + Z_3)} \end{cases} \quad (7,12)$$

$$\text{avec } D = \frac{P}{4\pi C_{44} v_3}$$

$$\text{si } (C_{11} C_{33})^* - C_{13} - 2C_{44} \neq 0$$

$$A_1 = B_1 = - \frac{P(C_{44} - C_{33}v_1^2)}{8\pi C_{33}C_{44}(v_1^2 - v_2^2)v_1^2} \quad (7,13)$$

$$A_2 = B_2 = \frac{P(C_{44} - C_{33}v_2^2)}{8\pi C_{33}C_{44}(v_1^2 - v_2^2)v_2^2}$$

$$\text{si } (C_{11} C_{33})^* - C_{13} - 2C_{44} = 0 \quad (v_1 = v_2)$$

$$A_1 = A_2 = \frac{P}{16\pi C_{11}} \quad (7,14)$$

$$B_1 = B_2 = \frac{P}{16\pi C_{44}v_1^2}$$

Les expressions (U et σ) déterminées par Pen et Chou peuvent être trouvées à la référence [14].

7.2.3 Conclusion:

Nous remarquons la complexité des solutions fondamentales dans ce cas en comparaison à celles données par Kelvin pour un matériau isotrope dans un domaine infini.

Vue la complexité et le manque de temps, nous abordons le problème de sol d'une manière moins compliquée mais tout aussi efficace que l'isotropie transversale, puisque on subdivise le sol en domaines ayant les mêmes propriétés (ν et E) i.e qu'on considère une isotropie par couche: les sub-régions.

Bien que le sol soit un domaine semi-infini, l'utilisation de solution établie pour des milieux infinis est possible mais moins efficace. Les solutions fondamentales pour les domaines semi-infinis ont été établis par Yen Cheng Pan et Tsu Wei Chou, publiées en 1971 [16] et d'autres en utilisant le principe de synthèse et de superposition à partir de la solution pour des domaines infinis en apportant certaines modifications afin d'adapter les solutions aux conditions de frontière.

Les expressions sont encore plus complexes et très lourdes à manipuler, toutefois, elles peuvent faire l'étude de projets future permettant une approche réelle du sol (semi-infini) [16].

7.3 MATERIAU NON HOMOGENE

7.3.1 Généralités:

La résolution des problèmes de sol par des méthodes analytiques diffère selon les hypothèses adoptées et les jugements préconisés; l'erreur commise sur la solution exacte est fonction de l'approche considérée.

En élasticité, le milieu pesant est caractérisé par son poids spécifique γ , son module de Young E et son coefficient de Poisson ν .

La théorie de l'élasticité permet de déterminer les déformations et contraintes en chaque point du massif. Les

problèmes relativement simples sont résolus au moyen de théories faisant appel à des résolutions mathématiques telle que la théorie de Boussinesque. Cependant pour des problèmes assez complexes, on adopte des méthodes numériques telles que la MEF ou la BEM.

Le sol hétérogène est simulé par un matériau dont le module de Young est supposé varier linéairement avec la profondeur z , alors que ν demeure constant Fig 7-2. Le problème étudié par Gibson (1967) qui a considéré un espace élastique, semi-infini en considérant la relation:

$$E(z) = E(0) + \lambda z \quad (7,15)$$

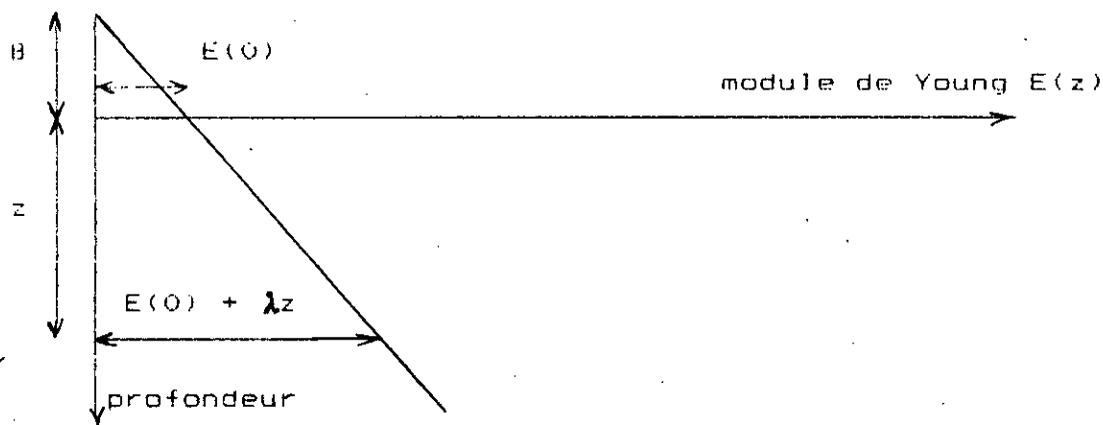


Fig. 7-2 Variation linéaire du module de Young.

Deux cas limites peuvent être rencontrés pour $\nu = 0,5$:

(i) $\lambda = 0$ ($B = \infty$) i.e module de Young constant

$E = E(0)$, cas classique de matériau homogène.

(ii) $E(0) = 0$ ($B = 0$), E varie linéairement en profondeur avec une valeur nulle en surface.

Les études faites moyennant cette approche ont montré que pour un matériau incompressible ($\nu = 0,5$) (cas de l'argile non

altérée), la différence entre les distributions de contraintes pour les deux cas limites (i) et (ii) n'est pas très appréciable et par conséquent la non homogénéité du matériau incompressible n'a pas d'influence sur la distribution de contrainte.

Une conclusion importante de l'étude du cas limite (ii) est que: le matériau pour lequel le module de Young varie linéairement en profondeur avec une valeur nulle en surface est que le matériau se comporte comme un "modèle de Winkler" i.e le déplacement vertical en surface au point d'application de la charge est proportionnel à son intensité.

7.3.2 Sub-regions:

7.3.2.1- Modélisation: (Fig. 7-3)

Une modélisation du cas limite (ii) consiste à subdiviser le domaine en sous domaines ayant des modules de Young constants où chaque couche de sol est supposée être, élastique, homogène et isotrope.

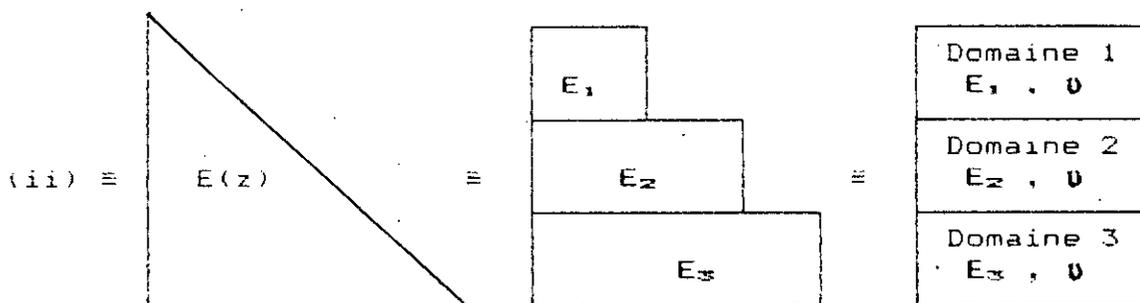


Fig. 7-3 Modélisation.

7.3.2.2- Formulation par les équations intégrales:

Si nous sommes en présence de solide non homogène, i.e ne présentant pas des propriétés identiques en tout point du domaine Ω , une des façon de modéliser un tel matériau est de le subdiviser en une série de régions chacune présentant des propriétés identiques (E, ν).

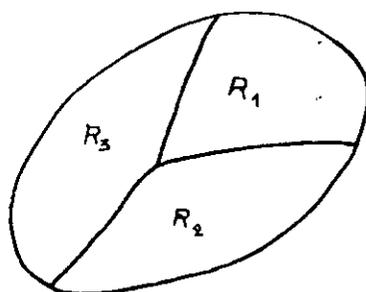


Fig. 7-4 Les sub-regions d'un domaine.

Ces régions sont assemblées en respectant les conditions de continuité et d'équilibre. Dans notre cas, nous avons supposé que deux points sur l'interface subissent le même déplacement et contraintes.

1)- Hypothèses adoptées:

1- Chaque couche (i) de sol est supposée homogène, élastique, isotrope et de module de Young E_i et coefficient de Poisson ν_i constant.

2- La solution fondamentale pour chaque couche est:

$$U_i^* = U_i^*(E_i, \nu_i) \quad (7,16)$$

$$P_i^* = P_i^*(E_i, \nu_i)$$

3- Les conditions d'interface sont telles que:

deux points sur Γ ^{l'interface} subissent le même déplacement et traction

$$\begin{aligned}
 U_1(k) &= U_1(T) & l=1,2 \\
 P_1(k) &= -P_1(T) & (7,17)
 \end{aligned}$$

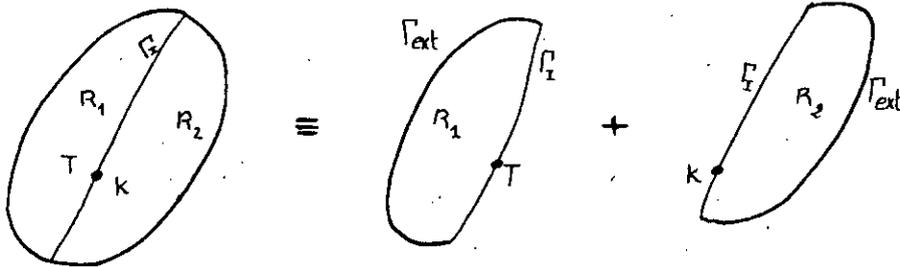


Fig. 7-5 Les conditions d'interface.

- Γ_1 : frontière du domaine R_1 .
- Γ_{ext} : frontière extérieur du domaine R_1 .
- Γ_I : interface entre R_1 et R_2 .
- T, K : points de l'interface.

2)- Equations intégrales pour deux régions:

Par simplicité, considérons un solide subdivisé en deux régions. L'interface étant Γ_I , les solutions fondamentales sont:

région 1	$P_1^i = P_1^i(E_1, \theta_1)$
	$U_1^i = U_1^i(E_1, \theta_1)$
région 2	$P_2^i = P_2^i(E_2, \theta_2)$
	$U_2^i = U_2^i(E_2, \theta_2)$

Pour chacune des régions on définit les conditions aux limites suivantes:

- P^1, P^2 : Traction surfacique respectivement sur la frontière extérieur Γ_{ext} de la région 1 et de la région 2.
- P_1^i, P_2^i : Traction surfacique sur Γ_I des deux régions.
- U^1, U^2 : Déplacement respectivement sur la frontière extérieur Γ_{ext} de la région 1 et de la région 2.