

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT **Genie-Civil**

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Investigation Numerique Du
Comportement des Plaques Raidies
par la methode des Elements Finis
et la methode des Equations Integrales
Aux Frontieres

Proposé par :

M^r M. Demidem
M^r M. K. Herrah

Etudié par :

A. A. Benazzouz
M. Hadid

Dirigé par :

M^r M. K. Herrah
M^r M. Demidem

PROMOTION

Juin 1992

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

Genie-Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Investigation Numerique Du
Comportement des Plaque Raidies
par la methode des Elements Finis
et la methode des Equations Integrales
Aux Frontieres

Proposé par :

Mr M. Demidem
Mr M. K. Herrah

Etudié par :

A. A. Benazzouz
M. Hadid

Dirigé par :

Mr M. K. Herrah
Mr M. Demidem

PROMOTION

Juin 1992

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

« قل لو كان البحر مداداً لكلمات
ربي لنفد البحر قبلك أن تنفذ
كلمات ربي ولو جئنا بمثله مداداً »

صدق الله العظيم

سورة الكهف الآية 109

الموضوع: إستقصاء عددى لتصرف الصفائح المشدودة بطريقة العناصر المحدودة و طريقة المعادلات التكاملية على الحدود.
الملخص: المحور العام للمشروع يتمثل في إعداد برامج للكمبيوتر لتحليل الصفائح المشدودة باستعمال طريقة العناصر المحدودة و طريقة المعادلات على الحدود بعد مجانسة هذه الصفائح.
بعض الأمثلة العددية تقدّم لتبيين مدى تطبيق هاتين الطريقتين.

SUJET: Investigation numérique du comportement des plaques raidies par la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales aux frontières .

RESUME: Le présent projet consiste en l'élaboration de programmes informatiques en vue de l'analyse des plaques raidies par la méthode des éléments finis et par la méthode des équations intégrales aux frontières une fois ces plaques homogénéisées .

Quelques exemples numériques sont présentés pour illustrer l'application de ces méthodes.

SUBJECT: Numerical investigation of stiffened plates behaviour by finite element method and boundary element method .

ABSTRACT: the present project consists in the development of computer programmes for analysis of stiffened plates by finite element method and by boundary element method of these plates after homogeneisation.

A few numerical exemples are presented to demonstrate the application of these two methods .

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement nos deux promoteurs : Mr. M.K. BERRAH et Mr. M. DEMIDEM pour leur aide et leurs conseils durant toute l'année.

Nos vifs remerciements ,

A tous les enseignants qui ont contribué à notre formation , en particulier M.K. BERRAH maître assistant de mécanique de milieu continue à l'ENP.

Au personnel du centre de calcul , de la bibliothèque et du périodique de l'ENP pour leur disponibilité .

A tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin .

DEDICACES

A ma mère ,

A mon père ,

A mes frères et soeurs ,

Et à tous ceux qui se dévouent pour la science, le progrès, et le bien être de l'humanité.

Adnane .

A ma mère ,

A mon père ,

A mes grands parents ,

A mes frères et soeurs ,

A mes oncles et tantes ,

Et à tous ceux qui me sont chers .

Mohamed .

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE I

THEORIE DES POUTRES ET PLAQUES MINCES A PETITES

FLECHES EN FLEXION

- I-1 Théorie des poutres minces à petites flèches en flexion
 - I-1-1 *Définition*
 - I-1-2 *Hypothèses fondamentales*
 - I-1-3 *Equation différentielle d'une poutre en flexion*
- I-2 Théorie des plaques minces à petites flèches en flexion
 - I-2-1 *Définition*
 - I-2-2 *Hypothèses fondamentales*
 - I-2-3 *Etude de flexion pure*
 - I-2-4 *Equation différentielle de la surface fléchie des plaques chargées transversalement*
 - I-2-5 *Conditions aux limites*
- I-3 Détermination de l'équation gouvernante des plaques raidies par le calcul des variations
 - I-3-1 *Introduction*
 - I-3-2 *Hypothèses*
 - I-3-3 *Rappels de quelques principes énergétiques*
 - I-3-4 *Détermination de l'énergie potentielle totale des plaques raidies*
 - I-3-5 *Détermination de l'équation différentielle des plaques*
 - I-3-6 *Résolution de l'équation différentielle des plaques-poutres dans le cas d'une plaque rectangulaire encastrée sur tout son pourtour*

CHAPITRE II

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- II-1 *Introduction*
- II-2 *Historique*
- II-3 *Détermination de la matrice de rigidité d'un élément de structure*
- II-4 *Généralisation du domaine entier*
- II-5 *Convergence*

CHAPITRE III

ANALYSE DE LA FLEXION DES PLAQUES RAIDIES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- III-1 **Analyse des plaques raidies homogénéisée**
 - III-1-1 *Introduction*
 - III-1-2 *Matrice de rigidité élémentaire pour l'élément rectangulaire d'une plaque orthotrope*
 - III-1-3 *Traitement des charges réparties*
- III-2 **Analyse des plaques raidies assemblées**
 - III-2-1 *Introduction*
 - III-2-2 *Matrice de rigidité pour un élément de poutre*
 - III-2-3 *Matrice de rigidité élémentaire pour l'élément rectangulaire d'une plaque isotrope*
 - III-2-4 *Assemblage global des deux éléments*

CHAPITRE IV

PRESENTATION DES PROGRAMMES HOMOFLEX ET ASSEMBFLEX

- IV-1 **Présentation du programme HOMOFLEX**
 - IV-1-1 *Introduction*
 - IV-1-2 *Présentation du programme*
- IV-2 **Présentation du programme ASSEMBFLEX**
 - IV-2-1 *Introduction*
 - IV-2-2 *Présentation du programme*

IV-3 Application

IV-3-1 Exemple

IV-3-2 Interprétation des résultats

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE V

INTRODUCTION A LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

V-1 Introduction

V-2 Historique

V-3 Philosophie de la méthode

V-4 Similitudes et différences entre la M.E.F et la M.E.I.F

CHAPITRE VI

ANALYSE DES PROBLEMES BIDIMENSIONNELS PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

VI-1 Formulation

VI-1-1 Introduction

VI-1-2 Elasticité plane

VI-1-3 Formulation intégrale

VI-1-4 Détermination de la solution fondamentale

VI-1-5 Equations intégrales pour les points intérieurs

VI-1-6 Equations intégrales aux frontières

VI-2 Utilisation de la M.E.I.F pour l'analyse numérique des
problèmes de l'élasticité bidimensionnelle

VI-2-1 Introduction

VI-2-2 Présentation du programme ELQUABE

VI-3 Application

VI-3-1 Exemple

VI-3-2 Interprétation des résultats

CHAPITRE VII
ANALYSE DES PROBLEMES DE LA FLEXION DES PLAQUES
PAR LA M. E. I. F

- VII-1 *Introduction*
- VII-2 *Préliminaires*
- VII-3 *Solutions fondamentales*
- VII-4 *Equations intégrales aux frontières*

CHAPITRE VIII
PRESENTATION DES PROGRAMMES CONFLEX ET LINFLEX

- VIII-1 *Introduction*
- VIII-2 *Présentation des programmes*
- VIII-3 *Applications*
- VIII-4 *Interprétation des résultats*

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE :

- Annexe 1 : *Les termes de la matrice [R]*
- Annexe 2 : *Théorèmes de Green*
- Annexe 3 : *Application de la M.E.I.F à un cas unidimensionnel*
- Annexe 4 : *Intégrations analytiques*

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Le calcul de structures et en particulier les milieux continus, couvre une grande variété d'applications dans les secteurs industriels de construction mécanique, aéronautique, spatiale, génie civil.....etc...

Ce domaine a pour objet la modélisation théorique au stade de la conception de la structure ou du système mécanique, ce qui permet de faire la simulation du comportement et d'entraîner ainsi une procédure d'optimisation des formes et des dimensions, compte tenu des fonctions de la structure et du choix du matériaux.

Les équations de base d'une structure sont des équations aux dérivées partielles. Lorsqu'on désire les appliquer à des cas concrets, les solutions purement analytiques sont généralement impraticables.

Grâce à l'apparition des méthodes approximatives telles : la méthode des éléments finis, vers les années 60, et la méthode des équations intégrales vers les années 70, bien qu'ayant des fondements plus anciens, ont permis aux ingénieurs de résoudre un grand nombre de problèmes qui posaient des difficultés auparavant.

OBJET DU TRAVAIL :

Pour ce qui est de notre travail , il consiste en l'élaboration d'un programme pour l'analyse flexionnelle des plaques raidies par la méthode des éléments finis . Puis l'élaboration d'un autre programme pour l'analyse de ces mêmes plaques , après les avoir homogénéiser , en utilisant la même méthode .

Cela va nous permettre de faire appel à la méthode des équations intégrales ; laquelle va être utilisée en premier lieu pour l'étude des problèmes de l'élastostatique bidimensionnelle, puis en second lieu à l'élaboration de deux autres programmes pour l'analyse flexionnelle des plaques isotropes. le premier utilisera l'élément constant, le second l'élément linéaire .

Notre objectif est de faire à la fin une comparaison entre les différentes façons de modéliser ces plaques raidies par les deux méthodes citées ci-dessus .

Chapitre I :

Théorie des poutres et plaques minces à petites flèches en flexion.

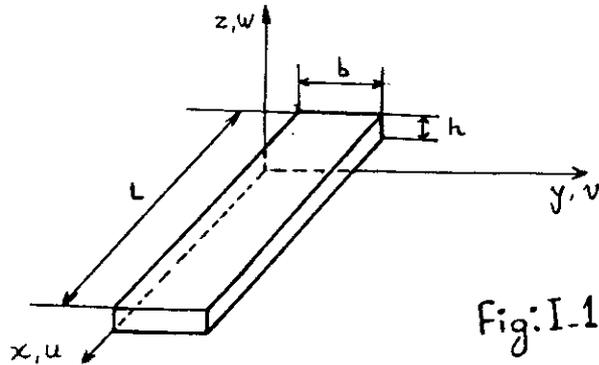
CHAP I: THEORIE DES POUTRES ET PLAQUES MINCES A PETITES FLECHES EN FLEXION

I-1 THEORIE DES POUTRES MINCES A PETITES FLECHES EN FLEXION :

I-1-1 DEFINITION :

Une poutre est un solide élastique dont l'une des dimensions est importante par rapport aux deux autres et qui comporte un axe de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons axe neutre .

On note que : $\frac{L}{15} \leq h \leq \frac{L}{10}$
et $0,3 h \leq b \leq 0,7 h$



I-1-2 HYPOTHESES FONDAMENTALES:

La théorie des poutres reposent sur deux théories les plus importantes dans l'analyse linéaire des structures :

- La théorie de Bernoulli : théorie linéaire des poutres sans cisaillement transverse.

- La théorie de Timoshenko: théorie linéaire des poutres avec cisaillement transverse.

Pour l'étude des poutres minces à petites flèches, l'effet du cisaillement peut être négligé, ce qui nous permet d'opter pour la théorie de Bernoulli; définie par les hypothèses suivantes :

- 1) La poutre est parfaitement élastique, isotrope et homogène ;
- 2) Les contraintes normales σ_y et σ_z sont négligeables par rapport à la composante normale σ_x ;
- 3) La déformation w de l'axe neutre de la poutre est d'un ordre plus faible que l'épaisseur de la poutre ce qui nous mène à négliger les contraintes dans l'axe neutre induites par les déformations transversales (flexion);
- 4) L'axe neutre ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la poutre;
- 5) Les points situés sur une normale à l'axe neutre avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse, on a dans ce cas :

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$$

I-1-3 DÉTERMINATION DE L'EQUATION DIFFÉRENTIELLE D'UNE POUTRE EN FLÉXION:

I-1-3-1 RELATIONS DÉFORMATIONS-DÉPLACEMENTS:

Selon les hypothèses faites, les relations déformations-déplacements se réduisent à:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a) \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (d)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (b) \quad \epsilon_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (e)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (c) \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (f)$$

(I-1)

En se ramène à un état de contraintes uniaxiale

En intégrant les équations (b) et (d) on obtient $w=c(x)$

En intégrant les équations (c), (e) et (f) on obtient:

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + U_0(x, y)$$

Mais selon l'hypothèse (4) $U_0 = 0$ et donc finalement

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad (I-2)$$

En substituant (I-2) dans la première équation de (I-1) on obtient:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (I-3)$$

I-1-3-2 RELATION CONTRAINTE-COURBURE

En utilisant les formules de la loi de Hooke pour un état uniaxial de contraintes :

$$\sigma_x = E_x \cdot \varepsilon_x$$

On obtient
$$\sigma_x = -E_x \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (I-4)$$

I-1-3-3 EFFORTS INTERNES:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} -E_x \cdot z^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz$$

d'où
$$M_x = -E_x \cdot I_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (I-5)$$

Avec I_x : rigidité flexionnelle qui caractérise physiquement et géométriquement la poutre.

I-1-3-4 ÉQUATION D'ÉQUILIBRE:

On faisant l'équilibre des forces extérieures avec les efforts internes, on détermine l'équation gouvernant l'équilibre de la poutre :

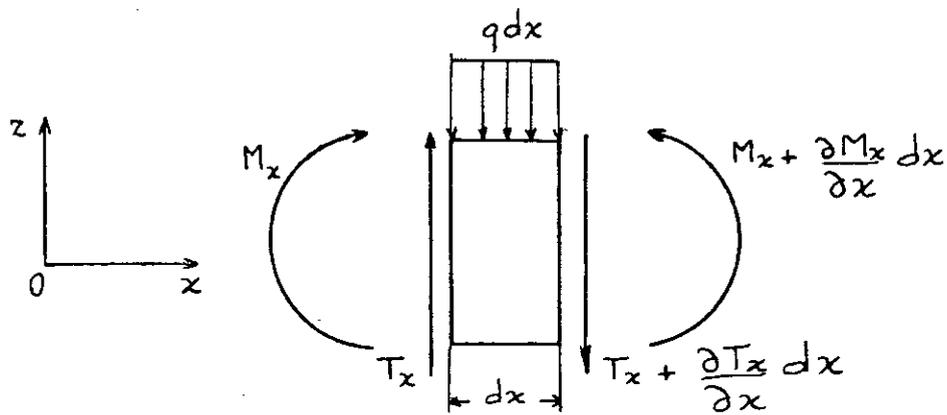


Fig: I-2

$$-T_x + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) + q \cdot dx = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = -q \quad (I-6)$$

$$M_x - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dx = 0$$

ce qui implique :

$$-\frac{\partial M_x}{\partial x} dx + T_x dx = 0$$

$$\rightarrow T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (I-7)$$

Avec

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = -q$$

par la suite on a :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -q \quad (I-8)$$

et enfin on obtient l'équation gouvernante :

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \quad (I-9)$$

I-2 THEORIE DES PLAQUES MINCES A PETITES FLÉCHES EN FLEXION :

I-2-1 DEFINITION :

Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles et un contour fermé pour lequel existe un plan moyen .

Le plan moyen représente un plan de symétrie pour la plaque .

Par convention, le plan moyen (ou surface moyenne) sera le plan xy et l'axe oz correspondra à l'axe transversal selon l'épaisseur h (voir fig I-3) .

On peut analyser les plaques , en supposant qu'il sont composées par un matériel unique homogène et isotrope. Cependant, les plaques formées par un matériau anisotrope, ont une importante application à cause de leur grande propriétés différentes dans chaque direction .

Les plus simples parmi eux sont les matériaux qui possèdent des propriétés différentes dans deux directions perpendiculaire. Un matériau ainsi décrit est un matériau orthotrope, par exemple le bois.

D'une manière générale on définit une plaque orthotrope comme une plaque dont les propriétés physique ou géométrique suivant deux directions perpendiculaires (x,x) et (y,y) sont différentes, un exemple d'une orthotropie géométrique est celui d'une orthotropie produite par des renforcements divers (plaques raidies).

Sous l'effet d'un chargement, il ya déplacement de chaque point du plan moyen .

Le déplacement selon l'axe OZ est appelé "flèche" et est noté " w " .

Selon le mode de déformation, les plaques peuvent être classées en trois grandes catégories :

* Plaques minces à petites flèches : théorie de Kirchoff

($h/L < 1/5$ et $w/h < 1/5$)

*Plaques minces à grandes flèches: ($h/L < 1/5$ et $w/h > 1/5$)

*Plaques épaisses : ($h/L > 1/5$)

I-2-1 HYPOTHESES FONDAMENTALES DES PLAQUES MINCES A PETITES FLÉCHES:

Dans l'étude des plaques minces à petites flèches, on introduit certaines hypothèses et limitations, qui ne portent pas seulement sur la plaque elle-même et le matériau dont elle est constituée mais aussi sur le comportement de la dalle chargée.

Le plus souvent, on se sert de la théorie de Kirchoff définie par les hypothèses suivantes :

- 1) Le matériau dont la plaque est faite est parfaitement élastique et suit la loi de Hooke et son comportement est toujours le même sous une charge quelconque;
- 2) La plaque est en matériau homogène;
- 3) La plaque a une épaisseur constante, elle est mince, c-à-d son épaisseur est faible par rapport à ses autres dimensions;
- 4) Les éléments de normales au plan moyen restent, même après déformation, rectilignes et perpendiculaires au feuillet moyen déformé;
- 5) La plaque est incompressible dans le sens perpendiculaire au feuillet moyen ; on néglige donc les tensions normales perpendiculaire à ce feuillet;
- 6) Les déplacements w du plan médian de la dalle sont d'un ordre plus faible que l'épaisseur de la dalle h et, par conséquent, la courbure dans un sens quelconque est donnée par la dérivée seconde de la déformée w dans ce sens ;
- 7) La tension dans le plan moyen de la dalle est nulle; par cette supposition, le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension et les déformations son limitées beaucoup plus sensiblement que par la précédente;

8) Les composantes des forces de volume sont négligées, s'il y a lieu de considérer des forces de volume uniformes, on peut les inclure dans la charge;

9) La charge agit perpendiculairement à la surface de la plaque.

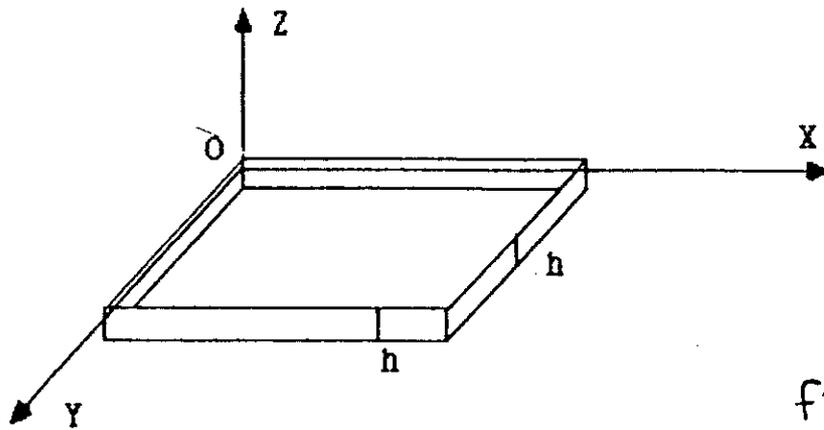
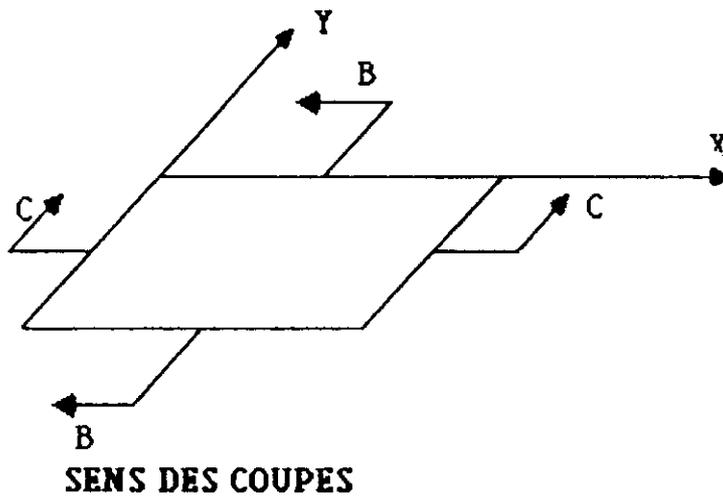


fig: I-3



SENS DES COUPES

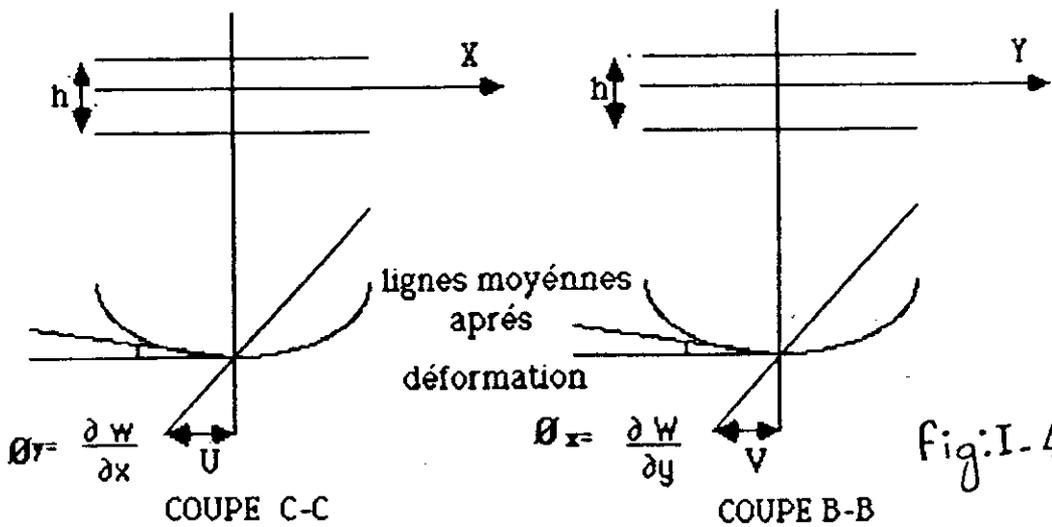


fig: I-4

I-2-3 ETUDE DE LA FLEXION PURE:

I-2-3-1 RELATION DÉFORMATIONS-DEPLACEMENTS :

Selon les hypothèses faites , les relations déformations-déplacements se réduisent à :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a) \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (d)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b) \quad \varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (e)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (c) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (f)$$

(I-10)

On se ramène donc à un état de contraintes planes

-En intégrant l'équation (d) on obtient :

$$w = w(x, y)$$

-En intégrant les équations (e) , (f) on obtient :

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + U_0(x, y) \quad (I-11)$$

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + V_0(x, y)$$

Mais selon l'hypothèse (7) $U_0 = V_0 = 0$, et donc :

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (I-12)$$

-En substituant les équations (I-12) dans les trois premières équations de (I-10) on obtient le tenseur de déformation suivant:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad , \quad \varepsilon_{xy} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (I-13)$$

$$\frac{1}{r_x} = - \frac{\partial w}{\partial x^2} \quad : \text{courbure du plan moyen dans le plan XZ}$$

$$\frac{1}{r_y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad : \text{courbure du plan moyen dans le plan YZ}$$

$$\frac{1}{r_z} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad : \text{courbure du plan moyen dans le plan XY}$$

NB: Une courbure étant considérée comme positive si elle est convexe vers le bas, et la flèche étant négative.

I-2-3-2 RELATIONS CONTRAINTES-COURBURES:

En utilisant les formules de la loi de Hooke généralisée pour un état de contrainte plane, on se ramène à des relations entre contraintes et courbures.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} (\sigma_x - \mu_x \cdot \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} (\sigma_y - \mu_y \cdot \sigma_x) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \sigma_{xy} \end{aligned} \quad \text{(I-14)}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x \cdot \varepsilon_x}{(1 - \mu_x \cdot \mu_y)} + \frac{\mu_x \cdot E_y \cdot \varepsilon_y}{(1 - \mu_x \cdot \mu_y)} \\ \sigma_y &= \frac{E_y \cdot \varepsilon_y}{(1 - \mu_x \cdot \mu_y)} + \frac{\mu_y \cdot E_x \cdot \varepsilon_x}{(1 - \mu_x \cdot \mu_y)} \\ \sigma_{xy} &= G_{xy} \cdot \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad \text{(I-15)}$$

En introduisant les courbures de la plaque on obtient:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \left[\frac{E_x}{(1 - \mu_x \cdot \mu_y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu_x \cdot E_y}{(1 - \mu_x \cdot \mu_y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot z \\ \sigma_y &= - \left[\frac{E_y}{(1 - \mu_x \cdot \mu_y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\mu_y \cdot E_x}{(1 - \mu_x \cdot \mu_y)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \cdot z \\ \sigma_{xy} &= -2 \cdot z \cdot G_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad \text{(I-16)}$$

Avec:

- E_x, E_y : Modules d'Young (dans le sens x et y)
- μ_x, μ_y : Coefficients de poisson dans les deux directions
- G_{xy} : Module d'élasticité transversal

Pour le cas d'un matériau isotrope:

$$E = E_x = E_y \quad \text{et} \quad G_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

I-2-3-2 EFFORTS INTERNES:

Les contraintes qui régissent sur l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion, de torsion et des efforts tranchants par unité de longueur, sont appelés "contraintes généralisées".

Ces contraintes généralisées seront données par les formules suivantes :

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_x \cdot dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_y \cdot dz, \quad M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_{xy} \cdot dz \quad (I-17)$$

En introduisant les équations (I-16) dans (I-17), il vient après intégration :

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_x \cdot D_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \left(D_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_y \cdot D_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= - 2 \cdot D_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (I-18)$$

Avec :

$$D_x = \frac{E_x \cdot h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}, \quad D_y = \frac{E_y \cdot h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}, \quad D_{xy} = \frac{G_{xy} \cdot h^3}{12}$$

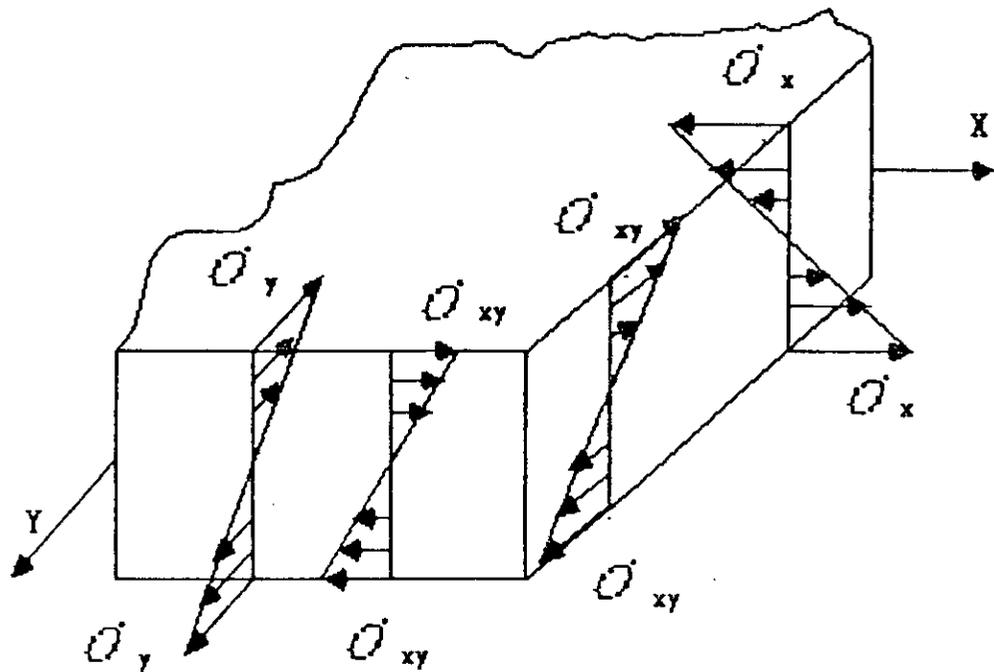


fig:I-5' Contraintes s'appliquant sur une portion de plaque plane mince

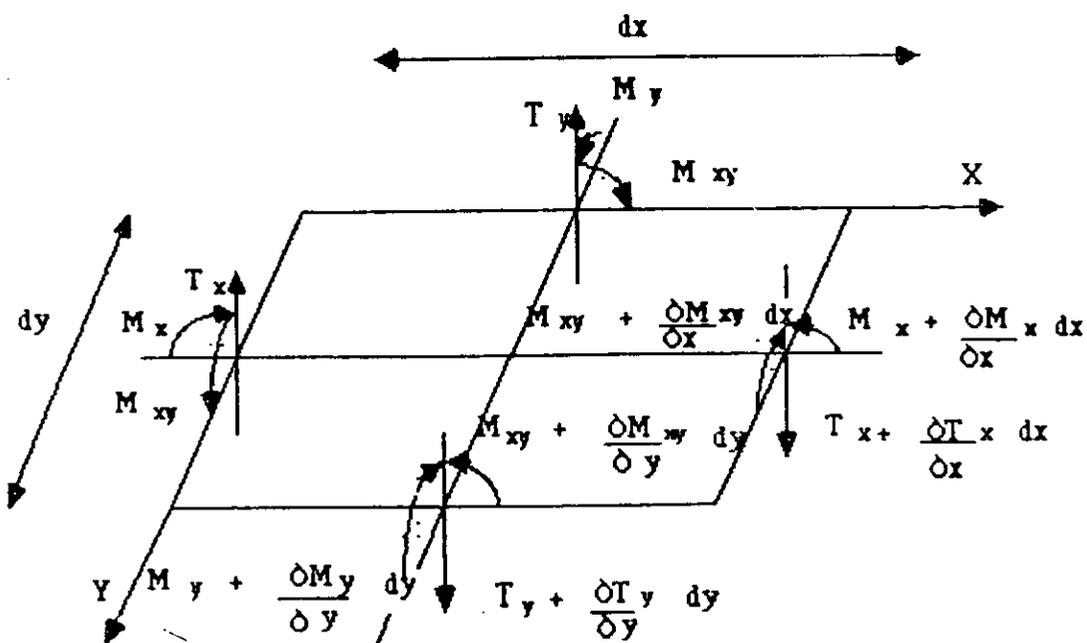


fig:I-6

Dans le cas des plaques isotropes:

$$D_x = D_y = D, \quad \mu_x = \mu_y = \mu \quad \text{et} \quad D_{xy} = D.(1 - \mu)$$

Avec,

$$D = \frac{E.h^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \text{: rigidité flexionnelle qui caractérise}$$

physiquement et géométriquement la plaque.

I-2-4 EQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA SURFACE FLÉCHIE DES PLAQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT :

En plus des moments de flexion M_x , M_y et des moments de torsion M_{xy} qui existaient dans la flexion pure, il existe des forces de cisaillement verticales agissant sur les côtés de l'élément.

Les valeurs de ces cisaillements T_x et T_y , par unité de longueur, respectivement parallèles aux axes y et x , sont:

$$T_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} dz \quad T_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yz} dz \quad \text{(I-19)}$$

Considérant un élément de la plaque ($dx \cdot dy$) sur lequel agit une charge répartie par unité de surface $q(x, y)$

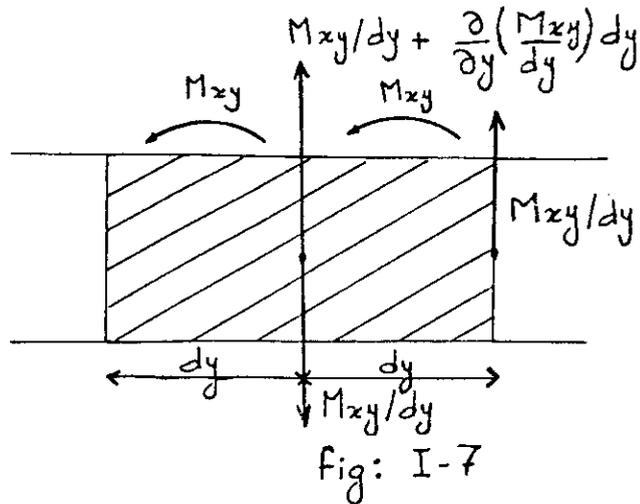
Projetant sur l'axe z toutes les forces agissant sur l'élément, on obtient l'équation d'équilibre suivante :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} dx \cdot dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \cdot dx + q \cdot dx \cdot dy = 0$$

D'où,

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0 \quad \text{(I-20)}$$

En faisant de même pour les projections des moments sur les axes x et y , nous obtenons les équations suivantes:



Par conséquent les deux conditions relatives au moment de torsion et à l'effort tranchant le long des côtés ($x=0,a$) se réduisent à:

$$V_x = T_x + T'_x = \left(T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{(x=0,a)} \quad (I-25)$$

De même pour les bords ($y=0,b$) :

$$V_y = T_y + T'_y = \left(T_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{(y=0,b)} \quad (I-26)$$

En calculant de cette façon les réactions le long des bords, il faut se rendre compte du fait que, dans les angles de la plaque, agissent les résultantes de composantes des moments de torsion y appliqués, ce qui fait naître, dans les angles, des forces soulevant ces derniers. Si l'on n'empêche pas ce soulèvement des angles, les déplacements verticaux et les moments au milieu de la plaque seront un peu supérieurs à ceux déduits de l'équation de la plaque suivant la théorie citée.

Il importe de faire l'analyse des conditions aux limites pour les différents types de constructions.

- bord encasté : $w = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$
 - bord appuyé : $w = 0$ et $M_n = 0$
 - bord libre : $M_n = 0$ et $V_n = 0$
- (I-27)

La résolution simultanée de (I-23) et (I-27) permet d'obtenir la flèche en tout point de la plaque.

I-2-5. CONDITIONS AUX LIMITES :

La solution de l'équation fondamentale de la plaque dépend surtout de son mode d'appui, c-à-d de la forme des conditions aux limites. Il résulte du caractère de la construction que, pour chaque bord, il faut toujours déterminer trois conditions aux limites, selon le mode d'appui; les conditions aux limites expriment, en general, l'allure des moments fléchissants et de torsion, des efforts tranchants ou déplacement verticaux.

Les conditions de déformation sont employées directement, les autres s'expriment d'abord, en déformées w . Cela signifie qu'en déterminant toutes les conditions aux limites, on obtient 12 fonctions aux limites exprimées à l'aide de la déformée w et auxquelles doit satisfaire l'équation fondamentale de la plaque.

L'équation fondamentale aux dérivées partielles de la plaque étant, en raison d'hypothèses simplificatrices que nous avons introduites, une équation différentielle du quatrième ordre de deux variables x et y seulement, ne possède donc que $2 \cdot 4 = 8$ fonctions d'intégration d'une variable. La solution de cette équation ne peut satisfaire qu'à 8 conditions aux limites, c-à-d à deux conditions aux limites sur chaque extrémité et non à trois.

On peut faire disparaître cette contradiction, selon Kirchoff en ne remplaçant les deux conditions de Poisson relatives au moment de torsion et à l'effort tranchant par une seule condition.

Les forces horizontales produisant le couple de torsion M_{xy} , agissant sur un élément dy du côté $x = a$ par exemple, sont remplacées par deux forces verticales de grandeur M_{xy}/dy à une distance dy l'une de l'autre.

Si nous considérons deux éléments adjacents de ce côté, nous voyons que la répartition des moments de torsion M_{xy} est statiquement équivalente à une répartition d'effort tranchant d'intensité:

$$T'_x = \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{(x=a)} \quad (I-24)$$

$$\sum M/x = - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + T_y = 0 \quad (a)$$

$$\sum M/y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x = 0 \quad (b)$$

(I-21)

D'où en tirant T_x et T_y respectivement des équations (a) et (b) et en les remplaçant dans (I-20), on obtient:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

(I-22)

Pour exprimer cette équation en fonction des flèches w de la plaque, nous supposons que les expressions données en (I-18) pour M_x , M_y et M_{xy} relatives à la flexion pure, peuvent s'appliquer aux plaques chargées latéralement.

Cette hypothèse revient à négliger l'effet de l'effort tranchant T_{xz} et T_{yz} ainsi que la contrainte σ_z produite par la charge q .

En substituant les expressions (I-18) dans (I-22) on obtient l'équation gouvernante pour la déformée des plaques minces à faibles flèches:

$$D_x \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot (D_1 + 2 \cdot D_{xy}) \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q$$

(I-23)

Avec $D_1 = \frac{1}{2} (\mu_x D_y + \mu_y D_x)$

Pour le cas des plaques isotropes, cette équation devient :

$$\nabla^4 w = q / D$$

(I-24)

où ∇^2 , désigne le Laplacien

Cette équation est aussi appelée équation de LAGRANGE car elle fût dérivée en premier lieu par lui en 1811.

Cette résolution ne peut être établie que dans les cas simples, où la distribution des charges, les caractéristiques de la section et les conditions aux limites, peuvent être représentés facilement par des expressions mathématiques.

Si les conditions deviennent complexes, la résolution exacte peut parfois devenir impossible, et les méthodes numériques sont alors les seuls moyens susceptibles d'être utilisés;

La M.E.F et la M.E.I.F constitue un outil puissant pour résoudre ces équations.

I-3 DETERMINATION DE L'EQUATION GOUVERNANTE DES PLAQUE RAIDIES PAR LE CALCUL DES VARIATIONS :

I-3-1 INTRODUCTION :

La détermination de l'équation aux dérivées partielles des plaques raidies; en réduisant au maximum les simplifications et approximations sur la géométrie de la structure, sur l'interdépendance des divers éléments constitutifs (plaque, raidisseurs ...), sur la sollicitation; est une tâche pénible, qui nécessite des connaissances considérables en mathématique.

Plusieurs auteurs doués d'un esprit rigoureux, tel que BARES, N. DEHOUSSE, PFLUGER, TRENKS et d'autres ont pu établir l'équation différentielle gouvernant le comportement de telle structure en considérant toutes les influences réelles, et par là, ils sont arrivés au projet le plus économique possible.

Nous, par nos connaissances modestes, un tel travail est loin d'être fait, pour cela on a essayé de déterminer une équation différentielle régissant le comportement de la structure que d'une manière approchée en utilisant une hypothèse simplificatrice (hypothèse Numéro 2) qu'on considère comme fondamentale dans la détermination de cette équation et par le biais du calcul des variations.

I-3-2 HYPOTHESES:

1) On garde les même hypothèses sur les plaques minces à faibles flèches (plaque de Kirchoff) et les même hypothèses des poutres (poutre de Bernouilli).

2) On suppose que les dimensions transversales des raidisseurs sont petites devant les dimensions de la plaque et ils sont espacés de tel façon que la variation de plan neutre de la plaque, une fois l'assemblage fait, soit négligeable.

3) La plaque et les raidisseurs constituent un élément monolithique (pas de glissement relative entre la plaque et les raidisseurs).

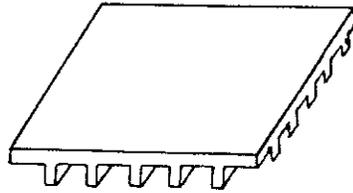


Fig: I-8

I-3-3 RAPPELS DE QUELQUES PRINCIPES ENERGETIQUES

La méthode variationnelle appliquée aux problèmes de la mécanique des structures se base sur le principe des travaux virtuels, lequel constitue le fondement des principes variationnels tel que le principe de la stationnarité de l'énergie potentielle totale. Vu la liaison qui existe entre la méthode variationnelle et les principes énergétiques, nous jugeons nécessaire de présenter quelques principes énergétiques fondamentaux.

I-3-3-1 PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL:

On appelle grandeur virtuelle, une grandeur très petite, mais absolument arbitraire, elle est représentée par le symbole δ précédant le symbole définissant. On peut considérer les grandeurs virtuelles comme des variations arbitraires des grandeurs vraies correspondantes. Si on impose à un corps déformable un champ de déplacement virtuel δu , les forces extérieures vraies effectuent un travail virtuel extérieur δw tandis que les forces intérieures (σ_{ij}) effectuent un travail virtuel de déformation δu .

THEOREME DU TRAVAIL VIRTUEL:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps déformable soit en équilibre est que le travail des forces extérieures soit égale au travail de déformation, pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement admissibles .

$$\rightarrow \delta W = \delta U$$

I-3-3-2 PRINCIPE DE LA STATIONNARITE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE :

D'après le principe du travail virtuel on a :

$$\delta U = \delta W \quad \rightarrow \quad \delta U - \delta W = 0 \quad \rightarrow \quad \delta(U - W)$$

Avec $\Pi = U - W$: l'énergie potentielle totale.

THEOREME :

De tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles, celui qui satisfait aux conditions d'équilibre donne à l'énergie potentielle totale Π une valeur stationnaire . Si le système est stable, l'énergie potentielle totale est par définition minimum dans la configuration réelle du système .

I-3-4 DETERMINATION DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE DES PLAQUES RAIDIES :

Sous l'action des forces externes, un corps élastique est soumis à une déformation, pendant laquelle les forces effectuent un certain travail. Ce travail est transformé en énergie de déformation. L'énergie potentielle totale des plaques raidies est définie par :

$$\Pi = U_{\text{plaque}} + U_{\text{poutres}} - W$$

$$U_{\text{plaque}} = \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dz dx dy$$

$$U_{\text{plaque}} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{\mathbf{R}} \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\varepsilon_{xx}^2 + 2\mu \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}^2 + 2(1-\mu) \varepsilon_x^2 \right] dz dx dy$$

$$U_{\text{plaque}} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{\mathbf{R}} \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\left(z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \left(z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \left(z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dz dx dy$$

$$U_{\text{plaque}} = \frac{D}{2} \iint_{\mathbf{R}} \left[(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\mu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy$$

De même l'énergie de déformation d'un raidisseur en négligeant l'énergie due à sa torsion sera déterminée comme suit :

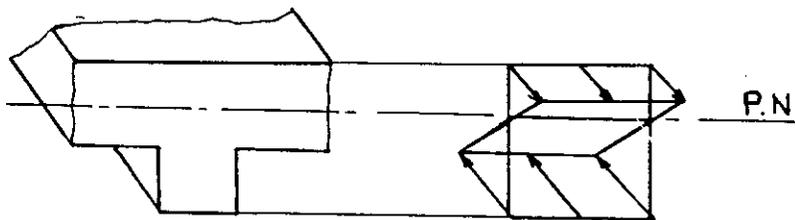


Fig: I.9

L'énergie de déformation de la poutre excentrée est :

$$U = U_{\text{flexion}} + U_{\text{tortion}}$$

Avec :

$$U_{\text{flexion}} = \int_0^L \frac{E I_x}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$$U_{\text{traction}} = \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Or : $u = e \theta$ et $\theta = - \frac{dw}{dx} \Rightarrow u = - e \frac{dw}{dx}$

$$\Rightarrow U_{\text{traction}} = \int_0^L \frac{EA}{2} e^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

d'où $U_{\text{poutre}} = \int_0^L \left[\frac{EA e^2}{2} + \frac{EI_x}{2} \right] \left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right)^2 dx$

On peut donc utiliser la théorie des poutres et la en assimilant une poutre excentrée dissymétriquement à une poutre simple avec une inertie équivalente :

$$EI_{\bullet} = EI + EA e^2$$

Le travail de la force répartie est donné par l'expression suivante :

$$W = \iint_{\mathbf{R}} q w dx dy$$

On peut généraliser l'expression de l'énergie potentielle de la plaque raidies par n poutres parallèles à l'axe des y , et m poutres parallèles à l'axe des x comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{D}{2} \iint_{\mathbf{R}} \left[(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\mu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^L \left[\frac{EI_x}{2} + \frac{EA_x e_x^2}{2} \right] \left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right)^2 dx \right\}_{y=y_i} \\ & + \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^L \left[\frac{EI_y}{2} + \frac{EA_y e_y^2}{2} \right] \left(\frac{\partial w^2}{\partial y^2} \right) dy \right\}_{x=x_j} - \iint_{\mathbf{R}} q w dx dy \end{aligned}$$

I-3-5 DETERMINATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DES PLAQUES RAIDIES:

L'énergie potentielle totale des plaques raidies démontrée dans le chapitre précédent est une fonctionnelle à double intégrale en fonction de la flèche w et de ces dérivées partielles, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I = \iint_{\mathbf{R}} F \left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy$$

En utilisant la notation suivante :

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{etc ...}$$

On peut mettre la fonctionnelle sous la forme :

$$I = \iint_{\mathbf{R}} F \left(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yx}, w_{yy} \right) dx dy$$

Nous avons entre les mains une fonctionnelle à deux variables indépendantes x, y et à une fonction argument $w(x, y)$.

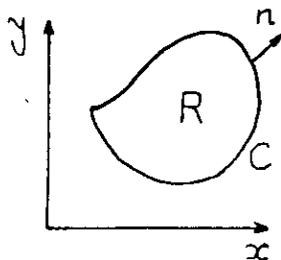


Fig: I-10

R étant un domaine fermé dans le plan (x, y) et limité par la surface C .

Soit la solution admissible de ce problème d'extrémum satisfaisant la condition aux limites suivante :

$$w(x, y) = \bar{w}(x, y) \text{ fonction prescrite sur } C$$

Considérant un voisinage de l'extremum défini par :

$$\tilde{w}(x, y) = w(x, y) + \delta w(x, y) = w(x, y) + \epsilon V(x, y)$$

Avec $\epsilon \ll 1$ et $V(x, y)$ fonction admissible et satisfaisant les conditions homogènes aux limites :

$$V(x,y) = 0 \text{ pour } (x,y) \in C$$

$$I(\tilde{w}) = I(w) + \delta I + O(\varepsilon^2)$$

La condition de stationnarité de I peut donc s'écrire :

$$\delta I = \iint_R \left[\frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w_x} \delta w_x + \frac{\partial F}{\partial w_y} \delta w_y + \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} + \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \delta w_{xy} + \frac{\partial F}{\partial w_{yx}} \delta w_{yx} + \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \delta w_{yy} \right] dx dy = 0$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \delta I = \iint_R \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \right) \right] \delta w dx dy \\ + \int_C \left[\frac{\partial F}{\partial w_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial w_y} n_y + \dots \right] \delta w dx dy = 0 \end{aligned}$$

n_x, n_y étant les composantes de la normale extérieure unité .

Par ailleurs, l'intégrale curviligne est identiquement nulle car $\delta w = 0$ sur C .

D'où la condition de stationnarité de I (équation d'EULERO) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \right) = 0 \end{aligned}$$

En remplaçant F par Π l'énergie potentielle totale déterminée précédemment et après tout calculs fait on obtient l'équation différentielle des plaques raidies définissant le comportement approché de la structure :

$$D \nabla^4 w + \sum_{i=1}^n \left[(E A_y e^2 + E I_y) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right]_{x=x_i} + \sum_{j=1}^m \left[(E A_x e^2 + E I_x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]_{x=x_j} - q = 0$$

Les quantités entre crochets ne sont définies que sur des positions connues où les nervures sont localisées. Cela nous permet

d'étudier la distribution de DIRAC pour une représentation meilleure de l'équation différentielle.

Soient les fonctions $f(x)$ et $f(y)$ de Dirac parfaitement compatibles avec la géométrie du système à étudier, ces fonctions sont égales à l'unité mais s'annulent en dehors des zones (dx et dy) où les nervures agissent.

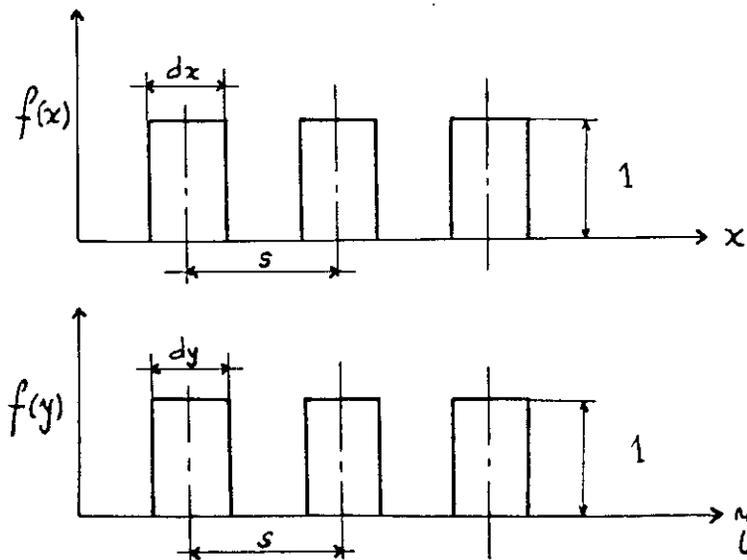


Fig: I-11

L'équation différentielle devient donc :

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left[(E A_y e^2 + E I_y) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] f(x) + \left[(E A_x e^2 + E I_x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] f(y) - q = 0$$

La résolution de cette équation différentielle est complétée par des conditions aux limites portant sur la flèche w et sur ses dérivées :

- bord encasturé : $w = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$
- bord appuyé : $w = 0$ et $M_n = 0$
- bord libre : $M_n = 0$ et $V_n = 0$

I-3-6 RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DES PLAQUES-POUTRES
DANS LE CAS D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE ENCASTREE SUR TOUT SON
POURTOUR:

Plusieurs méthodes approchées de résolution peuvent s'appliquer pour résoudre cette équation aux dérivées partielles. nous adoptons la méthode des résidus pondérés type Galerkin.

Soit la plaque rectangulaire encastree sur tout son contour de dimensions $2a.2b$ présentée ci dessous:

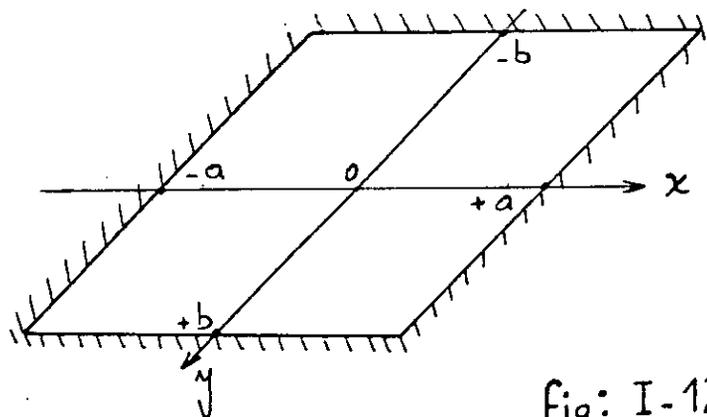


Fig: I-12

On choisie à priori une fonction $w(x,y)$ qui vérifie les conditions aux limites essentielles et de même ordre que l'équation différentielle gouvernante :

$$w = c(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2 \quad (c : \text{constante})$$

D'où la fonction d'interpolation $N = (a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2$

De la forme intégrale type Galerkin écrite sous forme compactée :

$$\int_V N_i R(x,u) dv = 0$$

on peut écrire l'expression suivante :

$$\iint_R \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q \right\} N dx dy$$

$$+ \int_0^L \left[(EA_y e_y^2 + EI_y) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] f(x) N dy + \int_0^L \left[(EA_x e_x^2 + EI_x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] f(y) N dx$$

Par dérivation de $w(x,y)$ on obtient :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 24 c (b^2 - y^2)^2 \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 24 c (a^2 - x^2)^2$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 16 c (a^2 - 3x^2) (b^2 - 3y^2)$$

En remplaçant ces expressions dans la forme intégrale et en intégrant l'expression obtenue, on trouve :

$$a^5 b^5 c (20,81 b^5 + 11,89 b^2 a^2 + 20,81 a^4) + \sum_{i=1}^n c \left\{ 25,6 (EA_y e_y^2 + EI_y) (a^2 - x_i^2)^4 b^5 \right\}$$

$$\sum_{j=1}^m c \left\{ 25,6 (EA_x e_x^2 + EI_x) (b^2 - y_j^2)^4 a^5 \right\} - 1,14 a^5 b^5 = 0$$

De cette équation on tire la constante c :

$$c = \frac{1,14 a^5 b^5}{A + B + C}$$

Avec :

$$A = a^5 b^5 (20,81 b^5 + 11,89 b^2 a^2 + 20,81 a^4)$$

$$B = \sum_{i=1}^n \left\{ 25,6 (EA_y e_y^2 + EI_y) (a^2 - x_i^2)^4 b^5 \right\}$$

$$C = \sum_{j=1}^m \left\{ 25,6 (EA_x e_x^2 + EI_x) (b^2 - y_j^2)^4 a^5 \right\}$$

La solution peut être présentée par :

$$w = \frac{1,14 a^5 b^5}{A + B + C} (a^2 - x^2)^2 (b^2 - y^2)^2$$

Chapitre II :

Présentation de la méthode des éléments finis .

CHAP II :PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II-1 INTRODUCTION :

Le calcul de structures et en particulier les milieux continus, couvre une grande variété d'applications dans les secteurs industriels de la construction génie civil, mécanique, aéronautique... etc. Ce domaine a pour objet la modélisation théorique au stade de la conception d'une structure ou d'un système mécanique; ce qui permet de faire la simulation du comportement et d'entraîner ainsi une procédure d'optimisation des forces et des dimensions, compte tenu des fonctions de la structure et du choix du matériau .

Parmi les étapes de la conception d'une structure, on a deux étapes très importantes à savoir :

- La modélisation de la structure (modèle mathématique)
- La simulation du modèle de calcul (numérique)

Pour la modélisation, il existe plusieurs méthodes qui permettent de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Parmi ces méthodes on a : la METHODE DES ELEMENTS FINIS. C'est une méthode très générale, qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique; problèmes stationnaires, non stationnaires, linéaires, non linéaires, à une ou deux ou trois dimensions et même les milieux hétérogènes.

II-2 HISTORIQUE:

L'époque du début du 19^{ème} siècle, grâce aux travaux de NAVIER (1819) sur les structures hyperstatiques ; MAXWELL (1864), CASTIGLIANO (1878), MOHR sur les méthodes énergétiques, constitue le point de départ logique de l'histoire de l'analyse des structures. C'est à cette période que les notions d'analyse des structures composées d'assemblages de barres ont été mises au point et présentant la méthodologie précédant l'analyse matricielle des structures.

Au cours du 20^{ème} siècle, vers 1920, MANEY aux Etats-unis et OSTENFELD au Danemark dégagèrent les idées de base d'une approche nouvelle de l'analyse des poutres en treillis et des ossatures, fondée sur le choix d'inconnues de déplacement.

Cependant des limitations sévères sur la taille de certains problèmes peuvent apparaître à cause de système d'équations à résoudre, prévalurent, jusqu'à 1932, date à laquelle HARDY CROSS introduisit la méthode de la distribution des moments, cette méthode a rendu envisageable la résolution de problèmes considérablement plus complexes.

Avec le développement de l'ordinateur, la résolution des systèmes d'équations ne posait plus de problème, cela a provoqué un retour aux méthodes classiques d'analyse. De là naît "la méthode matricielle", utilisée surtout pour les structures treillis:

- Méthode des forces : ARGYRIS, DENKE (1955);
- Méthode des déplacement : ARGYRIS, TURNER (1956).

Enfin, les deux publications importantes de ARGYRIS, KELSEY et de TURNER, CLOUGH, MARTIN, TOPP qui marient les notions d'analyse des structures en treillis et d'analyse des milieux continus et présentèrent les procédures qui en résultent sous forme matricielle, eurent une influence considérable sur le progrès de la méthode des éléments finis dans les années qui suivirent.

Les travaux de COURANT (1940) ont présenté aussi un

intérêt particulier en raison de leur orientation vers des phénomènes régis par les équations applicables dans d'autres domaines que celui de la mécanique des structures.

Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique et la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation : RITZ (1908), GALERKINE (1915).

Dès 1960 la méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions:

-Reformulation à partir de considération énergétiques et variationnelles sous la forme des résidus pondérés.

-Création d'éléments de haute précisions (élément à côtés curvilignes et isoparamétriques).

-Utilisation de la M.E.F dans la résolution de problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures, aussi que dans d'autres domaines telles que la mécanique des fluides, thermique etc...

-Construction d'une base mathématique de la M.E.F à partir de l'analyse variationnelle.

II-3 DETERMINATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT DE STRUCTURE :

II-3-1 CHOIX DE LA FONCTION DE DEPLACEMENT :

Comme la formulation choisie est une formulation en déplacements, on doit donc imposer un champ de déplacements qui remplit les conditions suivantes :

1) Les fonctions choisies doivent être continues au sein de l'élément, ainsi qu'au passage des frontières entre les éléments lorsque les éléments adjacents sont de même type ou possédant les mêmes fonctions de déformée sur les frontières en contact; de cette condition découle deux propriétés :

- Le polynôme doit être complet jusqu'à l'ordre de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'intégrale de l'énergie de

déformation .

- Les dérivées d'ordre $(n - 1)$ du polynôme de déplacement doivent être continues à travers les frontières de l'élément, ce qui revient à dire que les éléments se déforment sans qu'il ait d'ouvertures entre eux, on note que cette propriété ne peut être réalisée que si les déplacements le long d'une frontière d'un élément ne dépendent que des déplacements des noeuds qui se trouvent sur cette frontière.

2) Les équations forces-déplacements découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement d'ensemble rigide.

3) Les fonctions supposées doivent permettre la représentation des valeurs uniformes pour toutes les contraintes ou déformations.

4) Le nombre de termes indépendants dans le polynôme doit être égale au nombre de composantes des déplacements qui sont à calculer.

II-3-2 EVALUATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

La détermination de la matrice de rigidité peut s'effectuer à l'aide du théorème du minimum d'énergie potentielle totale.

$$\delta\pi = \delta(U - W) = 0 \rightarrow \delta U = \delta W \quad (\text{II-1})$$

où l'énergie de déformation virtuelle est :

$$\delta U = \int_v \left\{ \sigma \right\}^T \left\{ \delta \varepsilon \right\} dv \quad (\text{II-2})$$

et l'énergie accomplie par les forces extérieures pour un déplacement virtuel est :

$$\delta W = \left\{ F \right\}^T \left\{ \delta \hat{u} \right\} \quad (\text{II-3})$$

Avec :

- $\{ \sigma \}$: Vecteur contrainte
- $\{ \delta \epsilon \}$: Vecteur des déformations virtuelles
- $\{ F \}$: Vecteur des forces nodales
- $\{ \delta \hat{u} \}$: Vecteur des déplacements nodaux virtuels

En raison de l'élasticité du corps et en absence de tout champ thermique on a :

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \} \quad \text{et} \quad \{ \epsilon \} = [L] \{ u \} \quad (\text{II-4})$$

Avec :

- $[D]$: Matrice d'élasticité
- $[L]$: Matrice opérateur différentiel (particulière à chaque type de structure)
- $\{ u \}$: Vecteur champ déplacements

$$\text{Or} \quad \{ u \} = [N] \{ \hat{u} \} \quad \rightarrow \quad \{ \epsilon \} = [L] [N] \{ \hat{u} \} \quad (\text{II-5})$$

$$\text{On pose : } [B] = [L] [N] \quad \rightarrow \quad \{ \epsilon \} = [B] \{ \hat{u} \} \quad (\text{II-6})$$

$$\text{D'où} \quad \{ \sigma \} = [D] [B] \{ \hat{u} \} \quad (\text{II-7})$$

Avec :

- $\{ \hat{u} \}$: Vecteur déplacements nodaux.
- $[N]$: Matrice fonctions d'interpolation.

de l'équation (II-1) , (II-2) et (II-3) on a :

$$\{ F \}^T \{ \delta \hat{u} \} = \int_V \{ \sigma \}^T \{ \delta \epsilon \} dv \quad (\text{II-8})$$

en remplaçant (II-6) , (II-7) dans (II-8) on obtient :

$$\{ F \}^T \{ \delta \hat{u} \} = \int_V \{ \hat{u} \}^T [B]^T [D] [B] dv \{ \delta \hat{u} \}$$

or les équations d'équilibres sont définie par :

$$\{ F \} = [K] \{ \hat{u} \}$$

$$\rightarrow \{ F \}^T = \{ \hat{u} \}^T [K] = \{ \hat{u} \}^T \int_V [B]^T [D] [B] dv$$

D'où

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (\text{II-9})$$

II-3-3 PROPRIETE DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

La matrice de rigidité est :

- 1) Symétrique en vertu du théorème de Maxwell-Betti ;
- 2) Singulière avant l'introduction des conditions aux limites ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément.
- 3) Définie et positive ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle.

II-3-4 ETAPES DE BASE POUR LA DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DE RIGIDITE D'UN ELEMENT:

Etape 1: $\left\{ \begin{array}{l} - \text{Identifier le type de problème} \\ - \text{Choisir un système de coordonnées convenables} \\ - \text{Numéroter les noeuds} \end{array} \right.$

Etape 2 : Choisir une fonction d'interpolation, c-à-d déterminer l'ordre du polynôme

Etape 3 : Obtenir l'état des déplacements en chaque point en fonction des déplacements nodaux

Etape 4 : Relier les déformations en chaque point avec les déplacements

Etape 5 : Relier les contraintes avec les déformations, puis avec les déplacements

Etape 6 : Ecrire l'égalité du travail virtuel avec l'énergie de déformation virtuelle et tirer par identification la matrice de rigidité de l'élément .

II-4 GENERALISATION AU DOMAINE ENTIER - REGLE D'ASSEMBLAGE:

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices $[K]$ et $\{F\}$ de la structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments $[K^e], \{F^e\}$ préalablement calculées. En utilisant l'approche énergétique, on peut définir la méthode d'assemblage.

Soit Π l'énergie potentielle totale de l'élément e :

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \left\{ \hat{u}^e \right\}^T [K^e] \left\{ \hat{u}^e \right\} - \left\{ \hat{u}^e \right\}^T \left\{ \hat{F}^e \right\} \quad (\text{II-10})$$

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires, soit :

$$\Pi = \sum_{\text{éléments}} \Pi^e = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \hat{u}^e \right\}^T [K^e] \left\{ \hat{u}^e \right\} - \left\{ \hat{u}^e \right\}^T \left\{ \hat{F}^e \right\} \right\} \quad (\text{II-11})$$

La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle du type:

$$\left\{ \hat{u}^e \right\} = [\beta^e] \left\{ \hat{u} \right\} \quad (\text{II-12})$$

Avec : $[\beta^e]$ matrice de localisation ou de connectivité géométrique dont les éléments sont des 0 ou des 1.

Chaque relation (II-12) permet de repérer ou de localiser les d.d.l de chaque élément dans l'ensemble des d.d.l de la structure.

En utilisant les relations (II-10) et (II-12), on peut écrire :

$$\Pi = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \left\{ \hat{u} \right\}^T [\beta^{\circ}]^T [K^{\circ}] [\beta^{\circ}] \left\{ \hat{u} \right\} - \left\{ \hat{u} \right\}^T [\beta^{\circ}] \left\{ \hat{F}^{\circ} \right\}$$

D'où
$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \hat{u} \right\}^T [K] \left\{ \hat{u} \right\} - \left\{ \hat{u} \right\}^T \left\{ \hat{F} \right\}$$

Avec :
$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [\beta^{\circ}]^T [K^{\circ}] [\beta^{\circ}]$$
 matrice de rigidité de la structure complète (II-13)

$$\left\{ \hat{F} \right\} = \sum_{\text{éléments}} [\beta^{\circ}] \left\{ \hat{F}^{\circ} \right\}$$
 vecteur des forces équivalentes

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous-matrices de rigidité nodale de chaque élément.

II-5 CONVERGENCE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS:

La convergence de la méthode des éléments finis vers la solution théorique s'effectue au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente, elle peut se faire soit de manière monotone soit de manière non monotone.

II-5-1 CONDITIONS DE CONVERGENCE MONOTONE :

Les éléments doivent être complets et compatibles .

ELEMENT COMPLET :

Les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter:

- Déplacements de corps rigide
- Etat de déformations constante

ELEMENT COMPATIBLE :

Les déplacements au sein des éléments et à travers les limites séparant les éléments doivent être continus.

Physiquement, la compatibilité assure qu'il n'y aura pas apparition de vides ou de recouvrements entre les éléments une fois l'assemblage est fait.

La compatibilité est difficile à satisfaire lorsque les d.d.l des noeuds sont dépendants (flexion des poutres, plaques, coques). Il est avantageux d'avoir des d.d.l indépendants.

TAUX DE CONVERGENCE :

Le taux de convergence est liée aux notions de polynômes complets et d'éléments isotropes dans l'espace.

			1		
		x		y.....	1
	x ²		xy	y ²	2
x ³		x ² y		xy ²	y ³
					3

un élément fini de dimension h avec fonctions de déplacements complètes jusqu'à l'ordre c, entraîne une erreur, lorsque le maillage est uniforme, de l'ordre h^{c+1} (O(h^{c+1})).

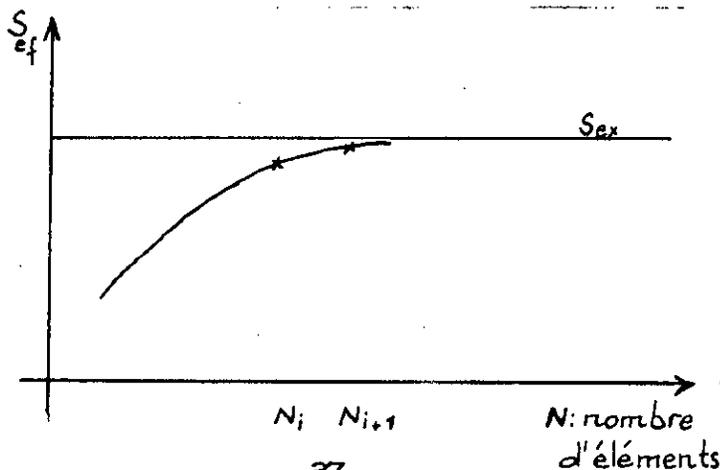


fig: II-1

La convergence se fait par des valeurs inférieures, car la matrice de rigidité EF est plus rigide que la matrice de rigidité exacte du fait de la présence de rigidité artificielle créée par la discrétisation.

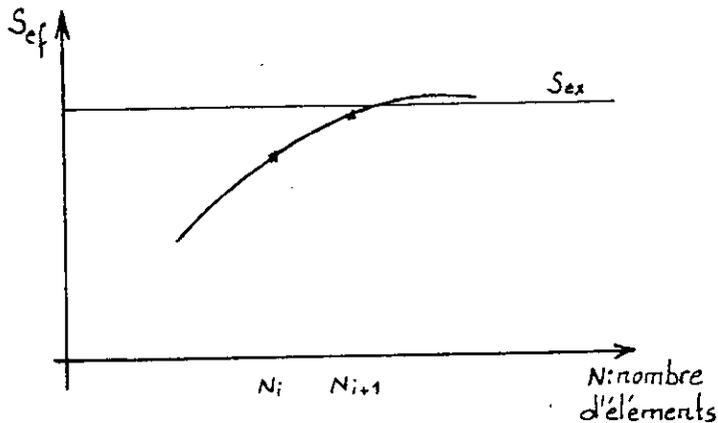


fig: II.2

Remarque

: Un tel scénario de convergence peut se présenter si les hypothèses de la solution EF et celles de la solution théorique sont différents

Exemple:

solution E.F Poutre de Timoshenko
 solution Exacte ...: Poutre de Bernoulli

II-5-2 CONDITIONS DE CONVERGENCE NON MONOTONE :

L'utilisation d'éléments incompatibles porte atteinte à l'aspect monotone de la convergence (non conformes). Pour avoir une convergence non monotone il faut assurer les deux conditions suivantes :

- Eléments complets ;
- Satisfaction du patch test : complétude collective.

Le patch test permet de dire si l'assemblage d'éléments est complet. En effet les incompatibilités entre éléments peuvent empêcher l'assemblage d'être en mesure de représenter des états de déformations constantes.

Dans ce test, on considère un groupe d'éléments avec au moins un noeud interne. De tels noeuds internes peuvent être définis de telle sorte que les éléments sont de forme arbitraire.

On impose aux noeuds externes des déplacements ou des forces en accord avec un état de déformation constante. Le test est satisfait si les déplacements internes, déformations et contraintes sont en accord avec cet état de déformation constante.

La satisfaction du patch test dépend de la géométrie des éléments utilisés. Les éléments en forme de carré, rectangle ou parallélogramme sont recommandés.

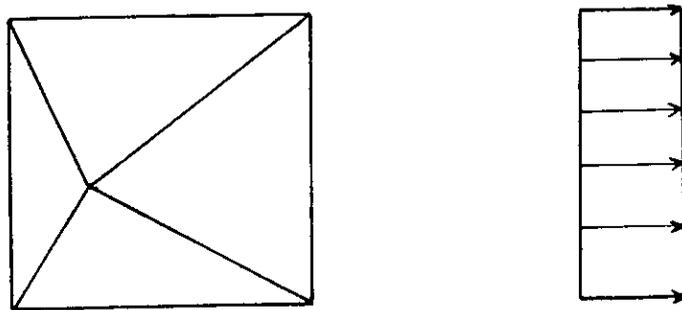


fig: II-3

Test de rapièçage
(PATCH TEST)

Chapitre III :

**Analyse de la flexion des plaques raidies par la méthode
des éléments finis .**

CHAP III : ANALYSE DE LA FLEXION DES PLAQUES-RAIDIES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

III-1 ANALYSE DES PLAQUES RAIDIES HOMOGENEISEE :

III-1-1 INTRODUCTION :

La modélisation du comportement d'une structure consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des matériaux, c'est à cette étape que s'opère l'option fondamentale du choix de la théorie d'une part et des équations constitutives décrivant le matériau d'autre part, l'ingénieur prend ici ses responsabilités vis à vis de la validité des hypothèses qu'il adopte pour calculer son ouvrage.

Ainsi Timoshenko a étudié le problème complexe des plaques raidies par assimilation à des plaques orthotropes en établissant les rigidités fictives de torsion et de flexion de cette plaque approximativement équivalentes à celles de la plaque raidie réelle.

On note que dans la détermination de ces constantes de rigidités, on vise la satisfaction de l'équation de Huber toute en gardant dans l'esprit la sécurité de la construction, cela explique le fait que les rigidités de flexion et de torsion prises en compte sont des valeurs minima. En générale, dans la dalle à nervures asymétriques, les rigidités réelles varient de point en point et sont toujours supérieures aux valeurs minima. La plaque orthotrope déterminée est donc moins rigide que la plaque nervurée réelle.

La méthode d'homogénéisation qu'on a opter dans cette étude est une méthode qui consiste à remplacer une plaque réelle (qui peut

être complexe vis à vis de sa forme) par une plaque de géométrie homogène avec une orthotropie fictive présentant les même rigidités moyennes de flexion et de torsion.

La méthode d'homogénéisation étale continûment les rigidités des nervures sur une largeur égale à leur entre axe et ignore ainsi les effets concentrés de ces nervures.

Exemple des plaques raidies :

* Plaque renforcée en croix par deux séries équidistantes de renforts symétrique par rapport à son plan moyen :

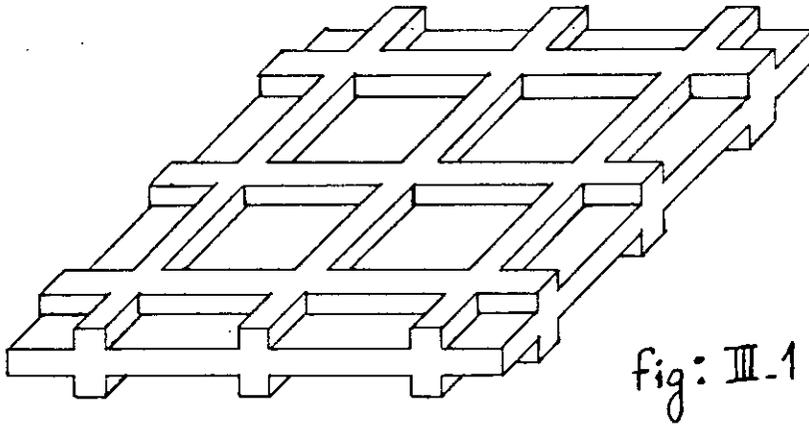


fig: III-1

Les coefficients des rigidités équivalentes sont définies comme suit :

$$D_x = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} + \frac{E I_x}{s} \quad , \quad D_y = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} + \frac{E I_y}{s}$$

$$D_1 = \frac{\mu E h^3}{12(1 - \mu^2)} \quad , \quad D_{xy} = \frac{E h^3}{24(1 + \mu)}$$

I_x ou I_y : Moment d'inertie d'une pièce de renfort

s : L'espacement des renforts

* Plaque renforcée par une série de nervures équidistantes:

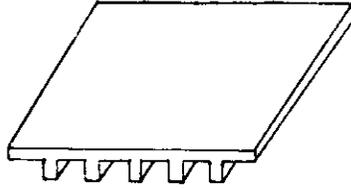


fig: III-2

Les coefficients des rigidités équivalentes sont définies comme suit :

$$D_x = \frac{E s h^3}{12 (s - t + (C/H)^3 t)} \quad , \quad D_y = \frac{E I}{s}$$

$$D_z = 0 \quad , \quad D_{xy} = D'_{xy} + \frac{C}{2s}$$

D'_{xy} : Rigidité à la torsion de la dalle sans nervures

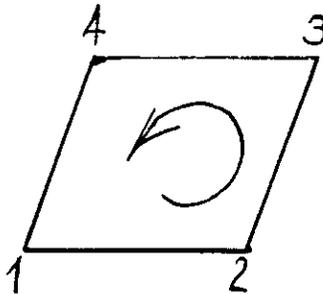
C : Rigidité à la torsion d'une nervure

NB:

Une solution rigoureuse d'un problème pratique des plaques raidies s'obtient en posant selon la forme réelle de la construction, des équations différentielles en fonction des déplacements u , v , w dans les sens de trois axes de coordonnées. En éliminant les déplacements u et v , on peut transformer ce système en une équation aux dérivées partielles du huitième ordre pour w , l'équation d'Huber dont nous parlions jusqu'ici est du quatrième d'ordre, il s'ensuit qu'il n'existe aucune dalle orthotrope exactement équivalente à une dalle à nervures assymétriques. Cependant il est possible de trouver une dalle de Huber équivalente approximativement à une dalle à nervures assymétriques ; si on remplace les rigidités de flexion et de torsion résultant de la théorie de l'élasticité par certaines rigidités fictives.

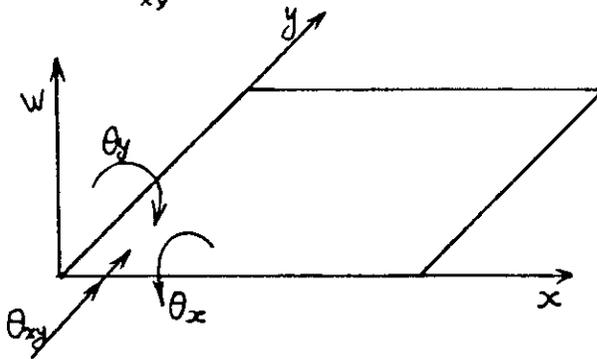
III-1-2 MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE POUR L'ELEMENT RECTANGULAIRE D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE :

La numérotation des noeuds se fera dans le sens trigonométrique .



On a quatre degrés de libertés pour chaque noeud, qui sont :

- w : Déplacement latéral
- θ_x : Rotation autour de x
- θ_y : Rotation autour de y
- θ_{xy} : Gauchissement



Les directions positives adoptés seront définies :

- Vers le haut, pour la déflexion ;
- Selon le sens trigonométrique, pour les rotations.

Le vecteur déplacements pour chaque noeud est donc :

$$\left\{ \hat{u}_i \right\} = \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{xy_i} \end{array} \right\}$$

Le vecteur forces correspondant en chaque noeud :

$$\left\{ \hat{F}_i \right\} = \begin{Bmatrix} T_{iz} \\ M_{iy} \\ M_{ix} \\ M_{ixy} \end{Bmatrix}$$

donc pour un élément, on a 16 degrés de libertés, et par conséquent, la matrice de rigidité élémentaire est carrée, et d'ordre 16 .

Pour trouver des fonctions qui satisfassent aux limitations citées dans le chapitre précédent, il est possible d'utiliser un simple produit de fonctions de déformée uni-dimensionnelle, chacune portant sur l'une des directions x et y

Dans ce cas, les fonctions d'interpolation pour l'élément rectangulaire des plaques en flexion, sont obtenues en effectuant les produits de fonctions d'interpolation de la poutre suivant x et y.

$$w(x,y) = (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)(b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow w(x,y) = & (a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y \\ & + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}x^2y^2 + a_{13}xy^3 \\ & + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^2y^3 + a_{16}x^3y^3) \end{aligned} \quad \text{(III-1)}$$

On obtient ainsi un élément de plaque conforme à 16 d.d.l qui a de très bonnes propriétés de convergence.

A partir de cette fonction on obtient les expressions suivantes pour les rotations ainsi que le gauchissement.

$$\begin{aligned} \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = & a_3 + a_5x + 2a_6y + a_8x^2 + 2a_9xy + 3a_{10}y^2 + a_{11}x^3 + 2a_{12}x^2y \\ & + 3a_{13}xy^2 + 2a_{14}x^3y + 3a_{15}x^2y^2 + 3a_{16}x^3y^2 \end{aligned}$$

$$\theta_y = - \frac{\partial w}{\partial x} = - (\alpha_2 + 2 \alpha_4 x + \alpha_5 y + 3 \alpha_7 x^2 + 2 \alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3 \alpha_{11} x^2 y + 2 \alpha_{12} xy^2 + \alpha_{13} y^3 + 3 \alpha_{14} x^2 y^2 + 2 \alpha_{15} xy^3 + 3 \alpha_{16} x^2 y^3) \quad (\text{III-2})$$

$$\theta_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \alpha_5 + 2 \alpha_8 x + 2 \alpha_9 y + 3 \alpha_{11} x^2 + 4 \alpha_{12} xy + 3 \alpha_{13} y^2 + 6 \alpha_{14} x^2 y + 6 \alpha_{15} xy^2 + 9 \alpha_{16} x^2 y^2$$

VERIFICATION DES PROPRIETES DE LA FONCTION DE DEPLACEMENT :

En examinant la fonction de déplacement pour l'élément rectangulaire en flexion, il est évident que le polynôme est continu sur l'élément et que le nombre de termes indépendants est égal au nombre de coordonnées nodales indépendantes, de même le critère de déplacement de corps rigide et le critère de l'état de déformation constantes sont assurés par l'utilisation d'un polynôme complet jusqu'à l'ordre 2 en x et y .

Vérifions maintenant que la condition de compatibilité à travers les frontières de l'élément à été satisfaite :

On considère le bord (1-4):

- Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord sont donnés par :

$$\begin{aligned} w(0,y) &= \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{10} y^3 \\ \theta_x(0,y) &= \alpha_3 + 2 \alpha_9 y + 3 \alpha_{10} y^2 \\ \theta_y(0,y) &= - (\alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{13} y^3) \\ \theta_{xy}(0,y) &= \alpha_5 + 2 \alpha_6 y + 3 \alpha_{13} y^2 \end{aligned}$$

- Aux extrémités de bord :

Nœud 1 (y = 0):

$$w_1 = \alpha_1 \quad , \quad \theta_{x1} = \alpha_3 \quad , \quad \theta_{y1} = - \alpha_2 \quad , \quad \theta_{xy} = \alpha_5$$

noeud 2 (y = b)

$$w(0, b) = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3$$

$$\theta_x(0, b) = \alpha_3 + 2 \alpha_6 b + 3 \alpha_{10} b^2$$

$$\theta_y(0, b) = -(\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{13} b^3)$$

$$\theta_{xy}(0, b) = \alpha_5 + 2 \alpha_9 b + 3 \alpha_{13} b^2$$

On dispose de 8 équations pour obtenir les 8 coefficients inconnus ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{13}$). Le nombre d'équations étant égal au nombre d'inconnues, d'où les déplacements sur la frontière considérée seront définis de façon unique.

On dira alors que la fonction w est une "fonction conforme".

Ecrire les équations (III-1) et (III-2) sous forme matricielle peut être résumé par l'équation générale:

$$\{u(x, y)\} = [f(x, y)] \cdot \{a\} \quad \text{(III-3)}$$

$[f(x, y)]$: Fonctions reliant le déplacement d'un noeud de coordonnées (x, y) aux 16 coefficients a .

$\{a\}$: Vecteur colonne des coefficients inconnus.

On aura :

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & xy^2 & y^3 & xy^3 & x^2 y^2 & xy^3 & x^3 y^2 & x^2 y^3 & x^3 y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2xy^2 & 3xy^2 & 2x^3 y & 3x^2 y^2 & 3x^3 y^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3xy^2 & 2xy^2 & y^3 & 3x^2 y^2 & 2xy^3 & 3x^2 y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6xy^2 & 6xy^2 & 9x^2 y^2 \end{bmatrix}$$

A partir de la matrice $[f(x, y)]$, on construit une matrice $[A]$ qui lie les déplacements nodaux aux coefficients généralisés inconnus, en remplaçant chaque noeud par ses coordonnées et en plaçant les blocs selon la numérotation adaptée.

On obtient

$$\{\hat{U}\} = [A] \{a\}$$

MATRICE [A]:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	a	0	a ²	0	0	a ³	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	a	0	0	a ²	0	0	a ³	0	0	0	0	0
0	-1	0	-2a	0	0	-3a ²	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	2a	0	0	3a ³	0	0	0	0	0
1	a	b	a ²	ab	b ²	a ³	a ² b	ab ²	b ²	a ³ b	a ² b ²	ab ³	a ² b	a ² b ³	a ³ b ³
0	0	1	0	a	2b	0	a ²	2ab	3b ²	a ³	a ² b	ab ²	2a ³ b	3a ² b ²	3a ³ b ²
0	-1	0	-2a ²	b	0	-3a ²	-2ab	-b ²	0	-3a ² b	-ab ²	-b ³	-3a ² b ²	-2ab ³	-3a ² b ³
0	0	0	0	1	0	0	2a	2b	0	3a ²	ab	3b ²	6a ² b	6ab ²	9a ² b ²
1	0	b	a ²	0	b ²	a ³	0	0	b ³	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2b	0	0	0	3b ²	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	b	0	0	0	-b ²	0	0	0	-b ³	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	2b	0	0	0	3b ²	0	0	0

De ce système d'équations, on peut exprimer le vecteur colonne des coefficients inconnus en fonction des déplacements nœuds:

$$\{ \alpha \} = [A]^{-1} \{ \hat{U} \}$$

D'où on peut exprimer le déplacement en n'importe quel point, en fonction des déplacements nœuds :

$$\{ U \} = [f(x,y)] [A]^{-1} \{ \hat{U} \} \quad \text{(III-4)}$$

L'inversion de [A] peut être faite numériquement, mais pour pouvoir obtenir une expression pseudo explicite de la matrice de rigidité élémentaire, pour plus d'efficacité numérique (allégement du programme et gain de calcul), on peut effectuer cette inversion algébriquement, comme suit : Après avoir posé a = 1 et b = 1 , on inverse [A] numériquement, et par la suite on introduit les variables 1/a, 1/b, 1/ab... dans [A]⁻¹ de façon à ce que :

$$[A] [A]^{-1} = [I] = \text{Matrice identité}$$

En reliant les déformations en chaque point aux déplacements nodaux, l'état de déformation en chaque point peut être représenté par 3 composantes :

- La courbure de la plaque dans le plan xz : $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$
- La courbure de la plaque dans le plan yz : $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$
- La torsion : $-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

NB:

Les moments internes M_x et M_y agissent chacun sur deux côtés de l'élément, il en est de même pour les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} , mais puisque M_{xy} est égal à M_{yx} , on peut considérer que l'un des deux, par exemple M_{xy} agit sur les quatre côtés, cela en doublant le terme de torsion dans le vecteur des déformations.

L'état de déformation dans l'élément est donc représenté par :

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

En remplaçant w par son expression polynomiale, on obtient une équation qui peut être écrite sous la forme :

$$\{\epsilon(x,y)\} = [Q] \{\alpha\}$$

Avec :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & -2y^2 & 0 & -6xy^2 & -2y^3 & -6xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -2x^2 & -6xy & -2x^3 & -6xy^2 & -6xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 - 8xy & -6y & -12xy^2 & -12xy^2 & -18xy^2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant $\{\alpha\}$ par $[A]^{-1}\{\hat{u}\}$, on obtient la relation suivante déformations-déplacements nodaux:

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [Q] [A]^{-1} \{\hat{U}\} = [B] \{\hat{U}\} \quad \text{(III-5)}$$

Avec $[B] = [Q] [A]^{-1}$

Les relations entre contraintes et déformations, c-à-d entre moments et courbures, comme il a été déjà vu dans la théorie de la flexion des plaques, sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_x \cdot D_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_y &= - \left(D_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_y \cdot D_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= - 2 \cdot D_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad \text{(III-6)}$$

Ces trois équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & \mu_x D_y & 0 \\ \mu_y D_x & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{(III-7)}$$

Ce qui définit la matrice $[D]$ comme suit :

$$\{\text{Efforts internes}\} = [D] \{\varepsilon(x,y)\}$$

On note que $[D]$ est symétrique, car $\mu_x D_y = \mu_y D_x$

On reliant les efforts internes aux déplacements nodaux, on obtient :

$$\{\text{Efforts internes}\} = [D] [B] \{\hat{U}\} = [H] \{\hat{U}\} \quad \text{(III-8)}$$

Avec : $[H] = [D] [B]$

La matrice de rigidité peut donc être déterminée à l'aide de la formule suivante :

$$[K] = \int_v [B]^T [D] [B] dV \quad \text{(III-9)}$$

Cette formule est démontrée dans le chapitre II

La détermination de la matrice de rigidité élémentaire d'une plaque orthotrope peut s'effectuer suivant deux méthodes :

1) La première méthode consiste à déterminer la matrice de rigidité élémentaire numériquement par le biais d'une intégration numérique, cette méthode est simple mais augmente sensiblement le calcul effectué par le programme d'où une augmentation dans le temps d'exécution.

2) La deuxième méthode consiste à déterminer la matrice de rigidité analytiquement ce qui allège le programme et diminue dans le coût de revient; mais cette méthode nécessite un travail laborieux pour définir tous les expressions de la matrice.

L'utilisation d'une méthode qui évite d'une part l'intégration numérique, d'où un gain important de calcul et d'autre part la détermination laborieuse des expressions de la matrice de rigidité élémentaire, est une méthode qu'on peut la localiser entre les deux méthodes citées précédemment et qu'on peut lui donner le nom de Semi-analytique.

Cette méthode est définie comme suit :

$$\text{or} \quad [K] = \int_v [B]^T [D] [B] dV$$

$$\text{et} \quad [B]^T = [A^{-1}]^T [Q]^T$$

$$\text{d'où} \quad [K] = \int_v [A^{-1}]^T [Q]^T [D] [Q] [A^{-1}] dV$$

Les matrices $[A^{-1}]^T$ et $[A^{-1}]$ ne contenant que des constantes, on peut les sortir de l'intégrale, on obtient donc :

$$[K] = [A^{-1}]^T \int_v [Q]^T [D] [Q] dv [A^{-1}]$$

En posant :

$$[R] = \int_v [Q]^T [D] [Q] dv \quad \text{(III-10)}$$

[K] devient comme un produit de trois matrices

$$[K] = [A^{-1}]^T [R] [A^{-1}] \quad \text{(III-11)}$$

L'expression (VI-9), sous le signe "intégrale", peut être calculée et intégrée explicitement sans trop de difficultés en la comparant à l'expression (VI-10).

Nous avons en premier lieu calculé le produit [Q] [D] [Q] et nous l'avons intégré en deuxième lieu. Les termes de la matrice [R] seront cités dans l'annexe .

Remarque :

Pour s'assurer de l'exactitude des termes de [R], il a fallu calculer [R] numériquement, en utilisant pour le calcul de la double intégrale, la méthode de Simpson puis on la compare à celle déterminée analytiquement.

Le plus grand écart entre deux termes étant de l'ordre de 10^{-11} , d'où les termes explicites de [R] sont correctes.

La détermination de la matrice de rigidité [K] devienne une tâche facile en effectuant le produit numérique des trois matrices :

$$[K] = [A^{-1}]^T [R] [A^{-1}] \quad \text{(III-12)}$$

TRAITEMENT DES CHARGES REPARTIES:

Pour pouvoir utiliser la méthode des éléments finis pour les plaques soumises à des charges réparties. On doit remplacer ces charges réparties par des charges concentrées équivalentes

appliquées aux noeuds. Pour cela il faut que les travaux virtuels des charges réparties et les charges concentrées soient égaux.

Le travail virtuel de la charge répartie est :

$$\delta W_{\text{charge répartie}} = \int \left\{ \delta u \right\}^T \left\{ q(x,y) \right\} dx dy \quad (\text{III-13})$$

or

$$\left\{ \delta u \right\} = [N]^T \left\{ \delta \hat{u} \right\}$$

D'où

$$\delta W_{\text{charge répartie}} = \left\{ \delta \hat{u} \right\}^T \int_R [N]^T \left\{ q(x,y) \right\} dx dy \quad (\text{III-14})$$

Le travail virtuel des forces nodales est :

$$W_{\text{forces équivalentes}} = \left\{ \delta \hat{u} \right\} \left\{ \hat{F} \right\} \quad (\text{III-15})$$

L'égalisation des deux travaux nous donnera donc:

$$\left\{ \hat{F} \right\}^e = \int_R [N]^T \left\{ q(x,y) \right\} dx dy \quad (\text{III-16})$$

Avec

$$\left\{ q(x,y) \right\} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après intégration, on obtient le vecteur de forces nodales suivant :

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{F} \\ F \end{matrix} \right\} = \frac{q \cdot a \cdot b}{4} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ b/6 \\ -a/6 \\ ab/36 \\ 1 \\ b/6 \\ a/6 \\ -ab/36 \\ 1 \\ -b/6 \\ a/6 \\ ab/36 \\ 1 \\ -b/6 \\ -a/6 \\ -ab/36 \end{matrix} \right\} \quad \text{(III-17)}$$

III-2 ANALYSE DES PLAQUES RAIDIES ASSEMBLEES :

III-2-1 INTRODUCTION :

L'esprit humain a des limites telles qu'il ne peut englober en une seule opération le comportement des systèmes complexes qui l'entourent.

C'est pourquoi l'ingénieur, adopte la démarche naturelle de subdiviser tous les systèmes en leurs composants élémentaires, dont le comportement peut être facilement compris.

On peut alors étudier le système original en le reconstruisant à partir de ses constituants.

Ainsi l'analyse des plaques raidies par la M.E.F peut être approcher par l'assemblage de deux comportements respectives des plaques et des poutres en introduisant l'influence mutuelle entre les deux éléments .

On se basant sur les hypothèses adoptées dans le paragraphe I-3 , on peut définir cette influence comme suit :

* Négligence de l'effet membranaire des plaques dû à la disposition éventuellement assymétrique des poutres par rapport au plan médian de la plaque ;

* La plaque influe sur les poutres par un excentrement de leurs axes neutres, d'où une résistance membranaire des poutres .

III-2-2 MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE EN FLEXION :

Pour un élément de poutre sollicité par un moment concentré ou une force concentré , l'équation régissant son comportement est :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0$$

Où w la flèche de la poutre, la fonction d'interpolation est estimée par un polynôme du troisième degré.

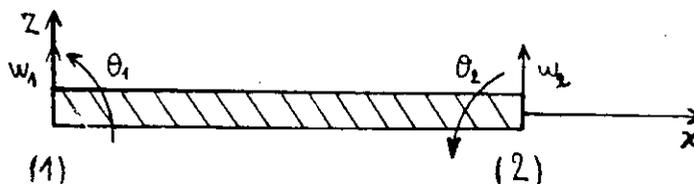


fig: III-3

$$w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad \text{(III-18)}$$

A partir de cette fonction on obtient l'expression de la rotation :

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 \quad \text{(III-19)}$$

Ecrire les équations (III-18) et (III-19) sous forme matricielle peut être resumer par l'équation générale :

$$\{u(x)\} = [f(x)] \cdot \{a\} \quad \text{(III-20)}$$

$[f(x)]$: Fonctions reliant le déplacement d'un noeud de coordonnées (x) aux 4 coefficients a .

$\{a\}$: Vecteur colonne des coefficients inconnus.

On aura :

$$[f(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}$$

A partir de la matrice $[f(x)]$, on construit une matrice $[A]$ qui lie les déplacements nodaux aux coefficients inconnus, en remplaçant chaque noeud par ses coordonnées et en plaçant les blocs selon la numérotation adaptée.

On obtient :

$$\{\hat{U}\} = [A] \{a\} \quad \text{(III-21)}$$

MATRICE [A]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

De ce système d'équations, on peut exprimer le vecteur colonne des coefficients inconnus en fonction des déplacements nodaux:

$$\{a\} = [A]^{-1} \{\hat{U}\} \quad \text{(III-22)}$$

D'où on peut exprimer le déplacement en n'importe quel point, en fonction des déplacements nodaux :

$$\{U\} = [f(x)] [A]^{-1} \{\hat{U}\} \quad \text{(III-23)}$$

MATRICE [A]⁻¹:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & 2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

La relation entre déplacements et déformations se définit par la théorie de la flexion des poutres par :

$$\varepsilon(x) = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{III-24})$$

En remplaçant w par son expression polynomiale, on obtient une équation qui peut être écrite sous la forme :

$$\{\varepsilon(x)\} = [Q] \{a\}$$

Avec :

$$[Q] = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x]$$

En remplaçant $\{a\}$ par $[A]^{-1}(\hat{U})$, on obtient la relation suivante déformations-déplacements nodaux:

$$\{\varepsilon(x)\} = [Q][A]^{-1}\{\hat{U}\} = [B]\{\hat{U}\} \quad (\text{III-25})$$

Avec $[B] = [Q][A]^{-1}$

La relation entre contrainte et déformation, c-à-d entre moment et courbure, comme il a été déjà vu dans la théorie de la flexion des poutres est comme suit :

$$M_x = -E.I \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{III-26})$$

On reliant les efforts internes aux déplacements nodaux, on obtient :

$$\{M_x\} = [D][B]\{\hat{U}\} = [H]\{\hat{U}\} \quad (\text{III-27})$$

Avec : $[H] = [D][B]$

En reliant les forces nodales aux déplacements nodaux par le biais du théorème du minimum d'énergie potentielle totale, on obtient la matrice de rigidité de l'élément [K].

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

Après tout calcul fait on a :

$$[K] = \frac{EI}{L^3} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

III-2-3 MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE POUR L'ELEMENT RECTANGULAIRE D'UNE PLAQUE ISOTROPE :

La matrice de rigidité élémentaire pour l'élément rectangulaire d'une plaque isotrope peut être déduite directement de la matrice de rigidité élémentaire orthotrope établie dans le paragraphe III-1 en remplaçant simplement les coefficients de la matrices d'élasticité orthotrope par les coefficients de la matrice d'élasticité isotrope.

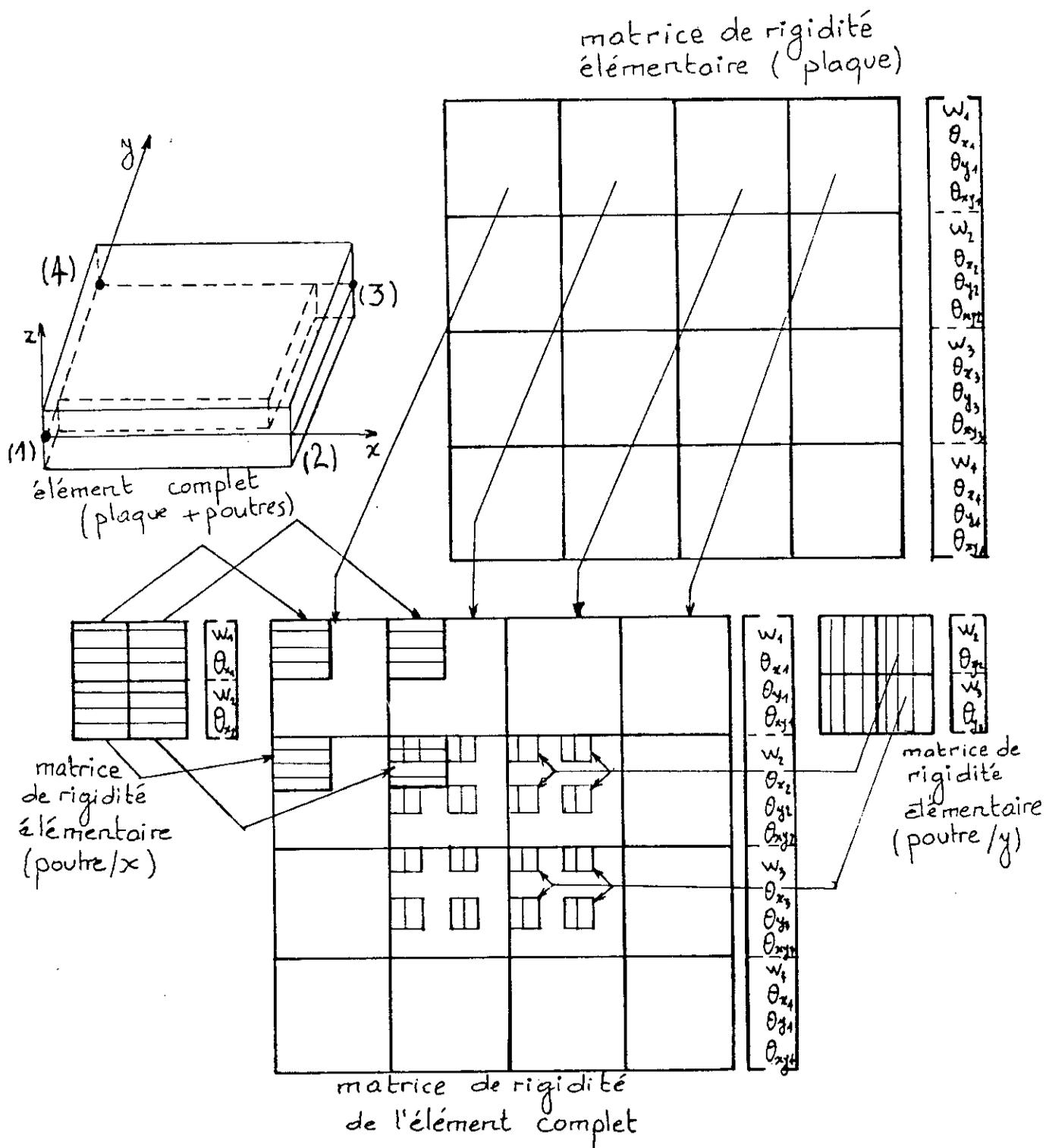
$$D'ou \quad D_x = D_y = D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}$$

$$D_1 = \mu D \quad D_{xy} = \frac{1}{2} D (1 - \mu)$$

III-2-4 ASSEMBLAGE GLOBALE DES DEUX ELEMENTS :

L'assemblage global consiste à construire la matrice de rigidité globale qui tient en compte des rigidités équivalentes de la flexion des poutres en additionnant ces rigidités aux d.d.l. communs avec ceux de la plaque.

L'assemblage est illustré ci-dessous :



Chapitre IV :

**Présentation des programmes HOMOFLEX et
ASSEMFLEX.**

CHAP IV : PRESENTATION DU PROGRAMME HOMOFLEX ET ASSEMBFLEX

IV-1 PRESENTATION DU PROGRAMME HOMOFLEX :

IV-1-1 INTRODUCTION:

Mathématiquement, la M.E.F revient à poser le problème en terme de résolution d'un système d'équations simultanées, écrit sous la forme :

$$[K] \left\{ \hat{U} \right\} = \left\{ \hat{F} \right\}$$

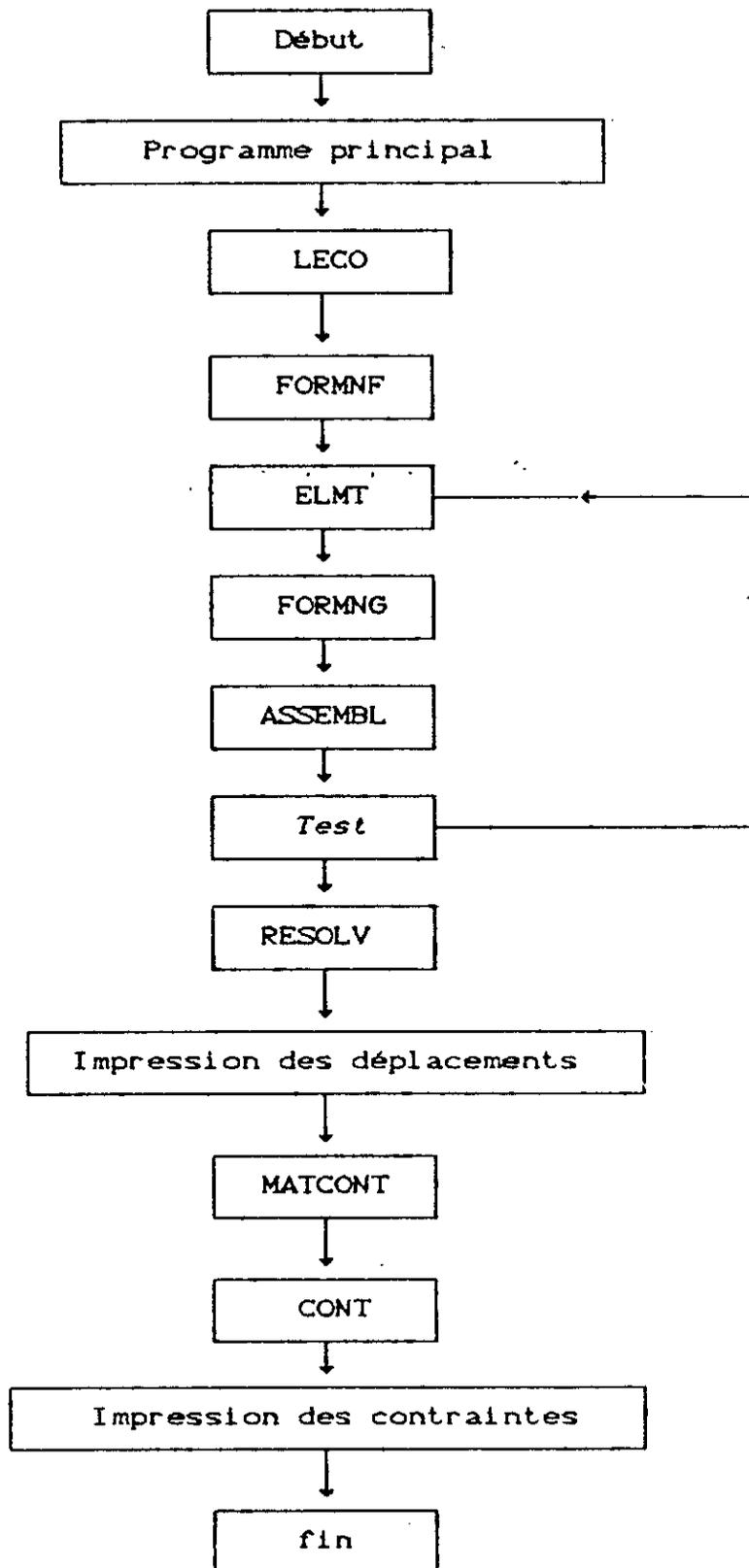
V-1-2 PROGRAMMATION :

Pour le bien de l'évolution scientifique , l'ingénieur doit apprendre et maîtriser les travaux faites avant lui pour les compléter et les adapter pour d'autres étude scientifiques. Ainsi nous avons adapter le programme ,fait par F.Aissaoui et M.Benallegue destiné à l'analyse fléxionnelle des plaques multicouches, par éléments finis conformes qui été proposé et dirigé par Pr.M.Tiliouine et M.Demidem en vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état, à un programme destiné à l'analyse fléxionnelle des plaques raidies homogénéisée par éléments finis conformes .

On peut distinguer deux parties essentielles :

- * Module de génération des données .
- * module de résolution et d'exploitation des résultats

Les données sont construites principalement d'informations sur les noeuds (nombre de noeuds total, conditions d'appuis, conditions de chargement...), et sur les éléments (nombre d'éléments suivant la direction X et la direction Y, la taille de l'élément, les caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux.



Organigramme du programme HOMOFLEX

IV-1-2-1 ENTREE DES DONNEES:

Pour qu'on puisse résoudre le problème, le module d'entrée des données doit transmettre toutes les informations nécessaires aux autres parties du programme, de façon à permettre la construction de tous les tableaux qui sont utilisés par la suite. Dans notre cas, la subroutine LECO qui permet l'introduction des caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux, ainsi que le calcul de la matrice d'élasticité [D].

IV-1-2-2 ASSEMBLAGE DES MATRICES $[K^e]$ ET VECTEURS (F^e) :

La règle d'assemblage que nous exposons est une règle simple, dans laquelle le risque d'erreur par introduction des données est minimisé, la seule contrainte étant le sens de parcours, car il est très important de choisir un sens de parcours pour la numérotation des noeuds et des éléments.

On optera une numérotation par étage, de gauche à droite.

* Subroutine FORMNF :

Cette subroutine se charge de numérotter les degrés de liberté actifs, et d'annuler les degrés de liberté inactifs, et ce pour chaque noeud (dans l'ordre de leurs numérotation).

Ces informations sont stockées dans un tableau appelé [NF]

* Subroutine FORMG :

Dans cette subroutine, pour chaque élément, un vecteur de localisation élémentaire est défini.

Ce vecteur $\langle G \rangle$ permet de positionner chaque degré de liberté des noeuds de l'élément dans le repère globale.

Elle permet donc un transfert de chaque terme k_{ij} de la matrice de rigidité élémentaire en K_{ij} de la matrice de rigidité globale, et également le transfert de chaque terme f_i de vecteur force élémentaire en F_i de vecteur force globale.

Lors de notre détermination de [K] on a choisi un sens bien déterminé. il est donc important de spécifier pour chaque élément, son premier noeud, le deuxième, troisième et quatrième (dans le sens trigonométrique) qui seront déduits automatiquement.

*** Subroutine ASSEMBL :**

Comme l'opération de localisation exige l'introduction des conditions aux frontières et qu'elle affecte la valeur zéro au degrés de liberté inactifs, seuls les degrés de liberté actifs sont numérotés, et n'est donc plus nécessaire de passer par l'opération d'expansion des matrices de rigidités élémentaires pour effectuer l'assemblage.

L'opération d'assemblage se fera donc par un simple transfert de chaque terme k_{ij} des matrices de rigidités élémentaires en K_{ij} de la matrice globale, ainsi que les termes f_i en F_i , grace au vecteur localisation élémentaire {G} dont les composante nulles sont automatiquement éliminées.

L'assemblage s'effectue comme suit :

Pour tout $G(i) \neq 0$ et pour tout $G(j) \neq 0$ faire :

$$K_{IJ} = K_{IJ} + k_{ij}$$

où $I = G(i)$ $i = 1, DOF$
 $J = G(j)$ $j = 1, DOF$

et $F_I = F_I + f_i$
 $I = G(i)$ $i = 1, DOF$

*** Prise en compte des conditions aux limites :**

Comme la technique d'assemblage choisit exige l'introduction de conditions aux limites avant même d'assembler la matrice de rigidité globale, et que seuls les degrés de liberté actifs sont pris en considération, cela favorise implicitement l'utilisation de la méthode de suppression des équations :

Cette méthode consiste à restructurer la matrice [K] de manière à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés U .

Elle a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système, et par conséquent elle réduit l'espace mémoire réservé au stockage de la matrice .

La technique de restructuration de $[K]$, $\{U\}$ et $\{F\}$ correspondant à $U_i = \bar{U}_i$, consiste en la suspension de la ligne (i) et la colonne (i) .

IV-1-2-3 RESOLUTION DU SYSTEME $[k]\{U\} = \{F\}$:

* Subroutine RESOLV :

Permet la résolution du système $\{F\} = [K]\{U\}$, $\{F\}$ et $[K]$ étant obtenus après l'assemblage et l'application des conditions aux limites .

Pour notre cas, on a utilisé l'algorithme de résolution de CHOLESKY, car il est recommandé pour la résolution des systèmes à matrices symétriques définies positives, enfin de diminuer le nombre d'opération à exécuter, et donc le temps de calcul.

IV-1-2-3-1 ALGORITHME DE CHOLESKY :

La résolution du système des équations d'équilibre par la méthode de Cholesky peut s'organiser en trois phases de calcul :

1- Factorisation de $[K]$

Le principe de la méthode est basé sur le théorème suivant :

THEOREME : Si $[K]$ est symétrique et définie positive, il est possible de la factoriser sous la forme $[K] = [S]^T[S]$ où $[S]$ est une matrice triangulaire supérieure. L'algorithme de factorisation de cholesky est rappelé ci-après . on a :

$$\left. \begin{aligned}
 S_{pp} &= \sqrt{k_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} S_{kp}^2} \\
 S_{pj} &= \left[k_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} S_{kp} S_{kj} \right] , \text{ pour } j = p+1, \dots, n
 \end{aligned} \right\} \text{ pour } p = 2, \dots, n$$

2- Résolution du système triangulaire :

$$[S]^T \{Y\} = \{F\}$$

avec : $\{Y\} = [S] \{U\}$

3- Résolution du système triangulaire :

$$[S] \{U\} = \{Y\}$$

IV-1-2-4 CALCUL DES CONTRAINTE :

* Subroutine MATCONT :

Ce sous programme est utilisé pour le calcul de la matrice de contraintes élémentaire [H] donnée explicitement en fonction des caractéristiques géométriques de la plaque.

* Subroutine CONT :

Une fois que les déplacements sont déterminés et la matrice [H] calculée, ce sous programme permet de trouver les contraintes, pour chaque élément.

IV-2 PRESENTATION DU PROGRAMME ASSEMBFLEX :

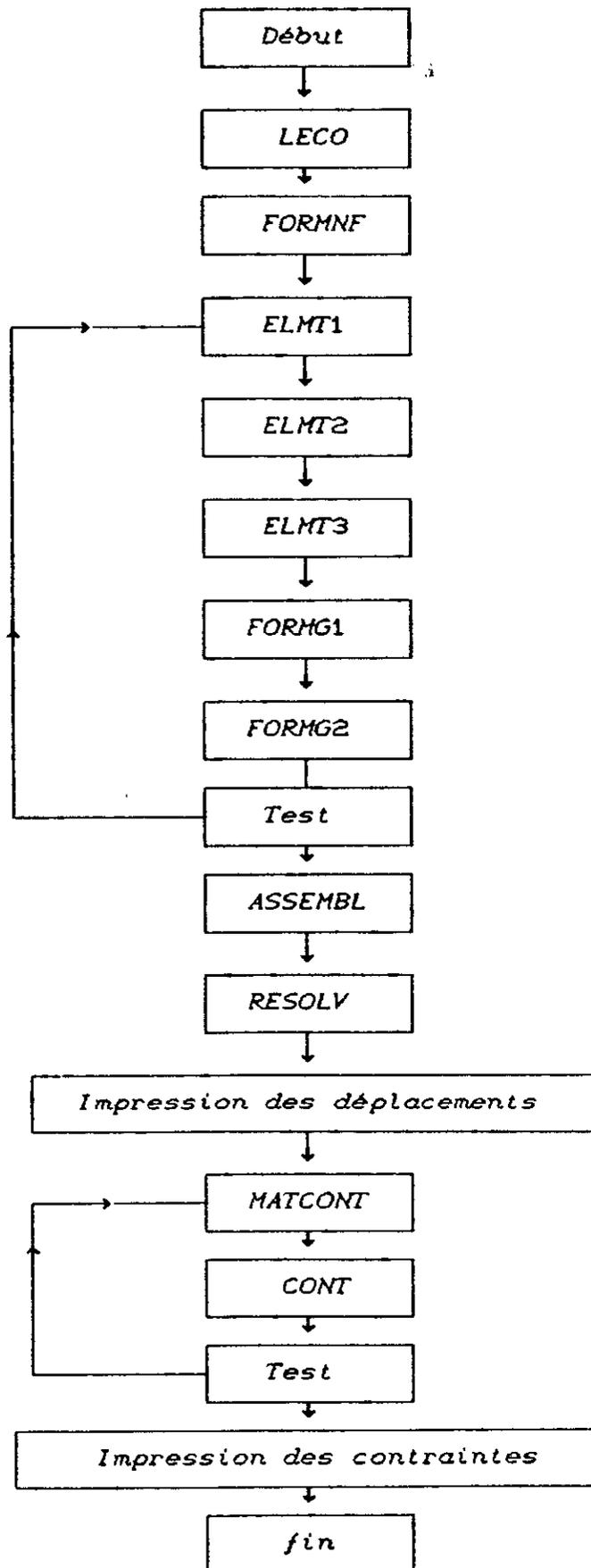
IV-2-1 INTRODUCTION:

Une analyse par éléments finis, ne peut se faire que par l'aide de l'informatique, vu la manipulation de matrices et vecteurs de grandes tailles et de résolution des systèmes d'équations importants, ce qui rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de ces méthodes.

V-2-2 PROGRAMMATION :

Après avoir donné un aperçu général sur l'organisation de programme Homoflex, on aborde maintenant le programme Assembflex qui permet la modélisation des plaques minces raidies en flexion par le biais d concept d'assemblage .

Ce programme a une structure identique au premier, il est donc constitué des même sous-routines utilisées dans le programme Homoflex, plus D'autres qui sont propre à lui et qui vont être commentées ci-dessous :



Organigramme du programme Assembleflex

Le programme est constitué par les sous-routines suivantes :

* LECO : elle permet l'introduction des caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux de la plaque et des poutres, ainsi que le calcul de la matrice d'élasticité $[D]$ de la plaque isotrope et l'inertie équivalente de la poutre .

* FORMNF : elle est identique à celle de programme Homoflex .

* ELMT1 : elle est identique à celle de ELMT vue dans le programme précédent

* ELMT2 : cette sous-routine forme la matrice de rigidité élémentaire d'une poutre $[K]^P$ dans le sens de l'axe des x .

* ELMT3 : elle forme la matrice de rigidité élémentaire d'une poutre $[K]^P$ dans le sens de l'axe des y .

* FORMG1 : cette sous-routine est identique à celle de FORMG vue dans le programme précédent .

* FORMG2 : Dans cette sous-routine, pour chaque élément de poutre, un vecteur de localisation élémentaire est défini.

Les vecteurs $\langle GG \rangle$ et $\langle GGG \rangle$ permettent respectivement de positionner chaque degré de liberté des noeuds de l'élément poutre positionné suivant l'axe des y et l'axe des x dans le repère globale.

Elle permet donc un transfert de chaque terme k_{ij}^P de la matrice de rigidité élémentaire des poutres en K_{ij} de la matrice de rigidité globale .

* Subroutine ASSEMBL :

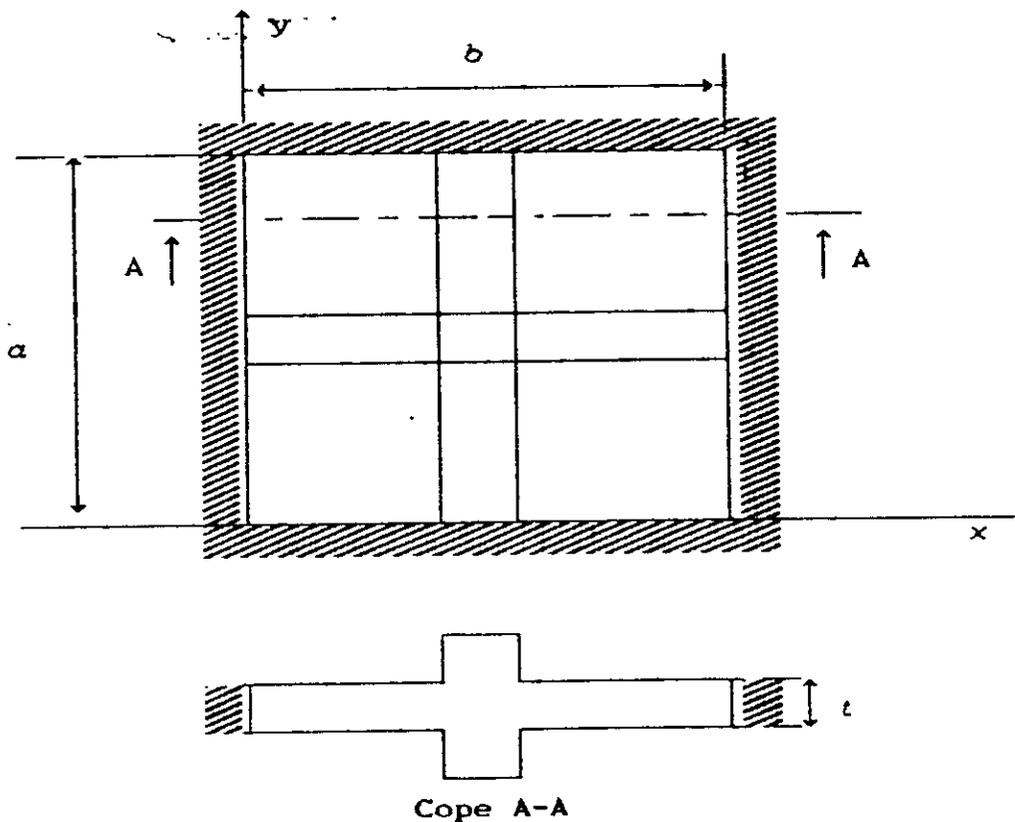
L'opération d'assemblage se fera donc par un simple transfert de chaque terme k_{ij} des matrices de rigidités élémentaires de la plaque et k_{ij}^P des poutres en K_{ij} de la matrice globale, ainsi que les termes f_i en F_i , grâce aux vecteurs de localisation élémentaire $\langle G \rangle$, $\langle GG \rangle$ et $\langle GGG \rangle$ dont les composantes nulles sont automatiquement éliminées.

* Subroutines MATCONT et CONT sont identiques à celles vues dans le programme précédent .

VI-3 APPLICATION :

VI-3-1 EXEMPLE :

Dans cette application, on étudie une plaque carrée encastrée sur tout son contour, renforcée par deux raidisseurs, un dans chaque direction. Cette plaque est chargée transversalement par une charge uniforme $q = 0.5 \text{ kg/cm}^2$, et a pour dimensions $a = b = 20,18 \text{ cm}$, l'épaisseur $t = 0,2817 \text{ cm}$. La poutre a une inertie $I = 5,96 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^4$ et une excentricité nulle. Les caractéristiques mécaniques sont : $E = 2,116 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\mu = 0,3$.



L'étude de flexion de cette plaque, sera effectuée par trois méthodes : méthode d'homogénéisation (MEF), méthode d'assemblage (MEF) et la méthode des résidus pondérés. Cet exemple est traité dans un article par la méthode B-spline functions (voir référence), qu'on l'utilise pour comparer nos résultats

TABLEAUX DES RESULTATS

w (mm) , $y = b/2$

x	MEF <i>homogénéisation</i>	MEF <i>assemblage</i>	<i>méthode des</i> <i>résidus pondérés</i>	<i>Bspline</i> <i>function</i>
0	0	0	0	0
1/8 a	0,042888	0,0406843	0,038169	0,040695
1/4 a	0,118035	0,112956	0,112171	0,112957
3/8 a	0,176915	0,16900	0,175267	0,16899
1/2 a	0,198440	0,189024	0,199415	0,18901

M (Kg. cm /cm) $y = b/2$

x	MEF <i>homogénéisation</i>	MEF <i>assemblage</i>	<i>méthode des</i> <i>résidus pondérés</i>	<i>Bspline</i> <i>function</i>
0	-7,952	-7,314	-6,788	-7,452
1/8 a	-1,539	-1,730	-2,134	-1,669
1/4 a	1,899	1,714	1,421	1,781
3/8 a	3,499	3,229	3,652	3,299
1/2 a	3,966	3,623	4,412	3,609

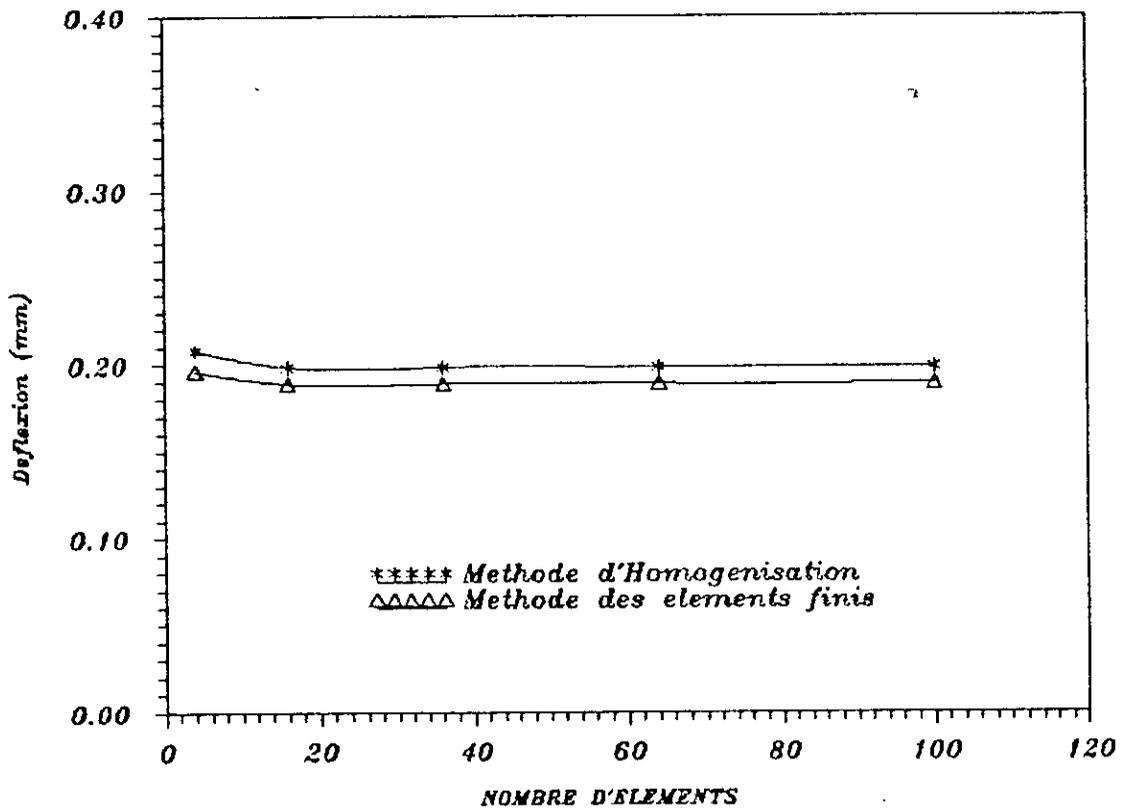


Figure 1 : Convergence de la deflexion
($x=a/2, y=b/2$)

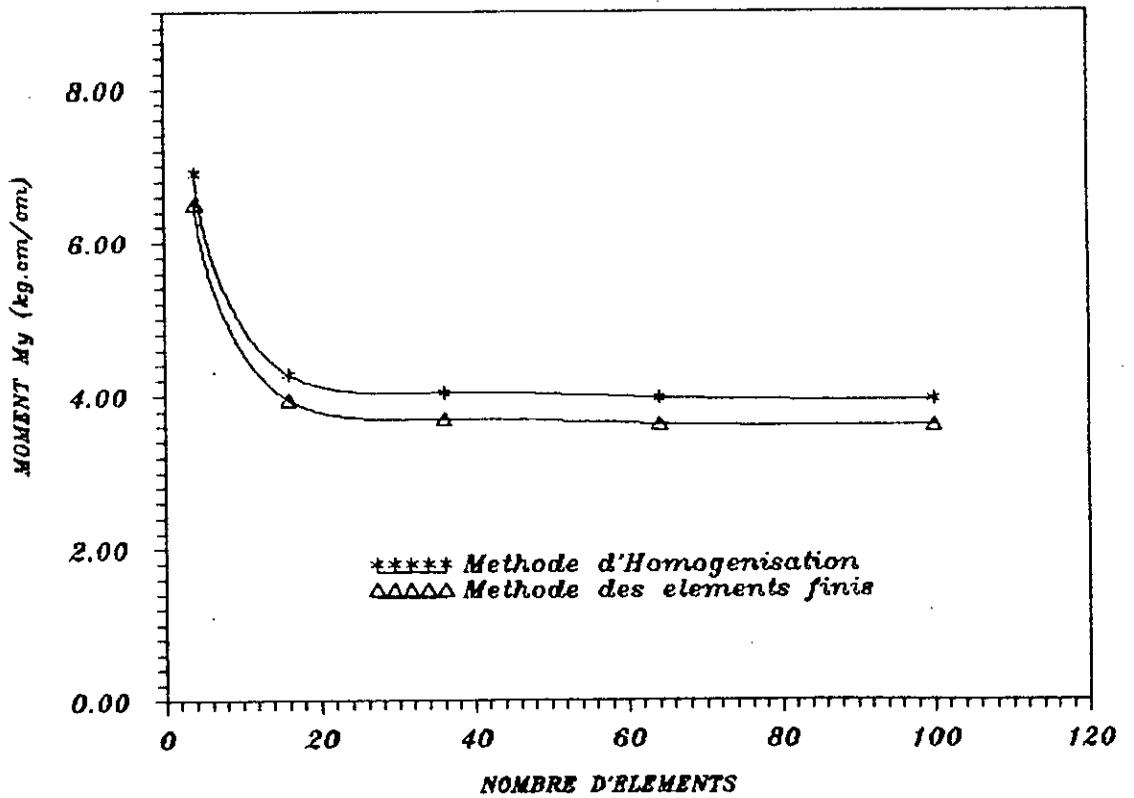


Figure2 : Convergence du moment My (plaque)
($x=a/2, y=b/2$)

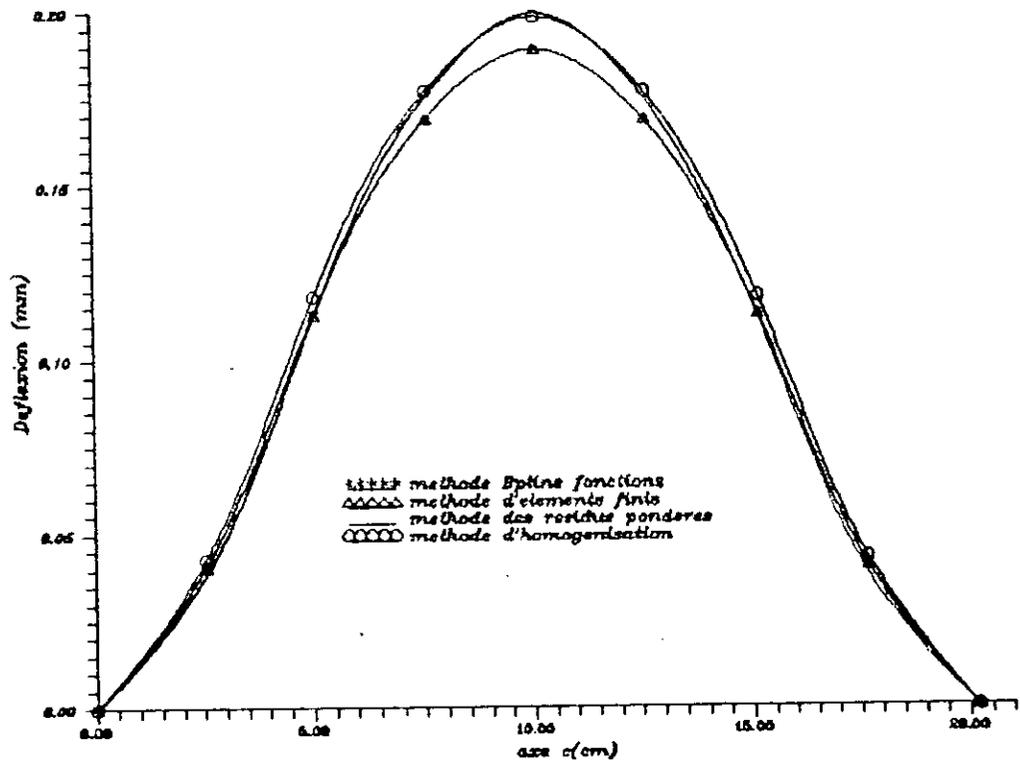


Figure 3 : Variation de la deflexion suivant l'axe x ($y=b/2$)

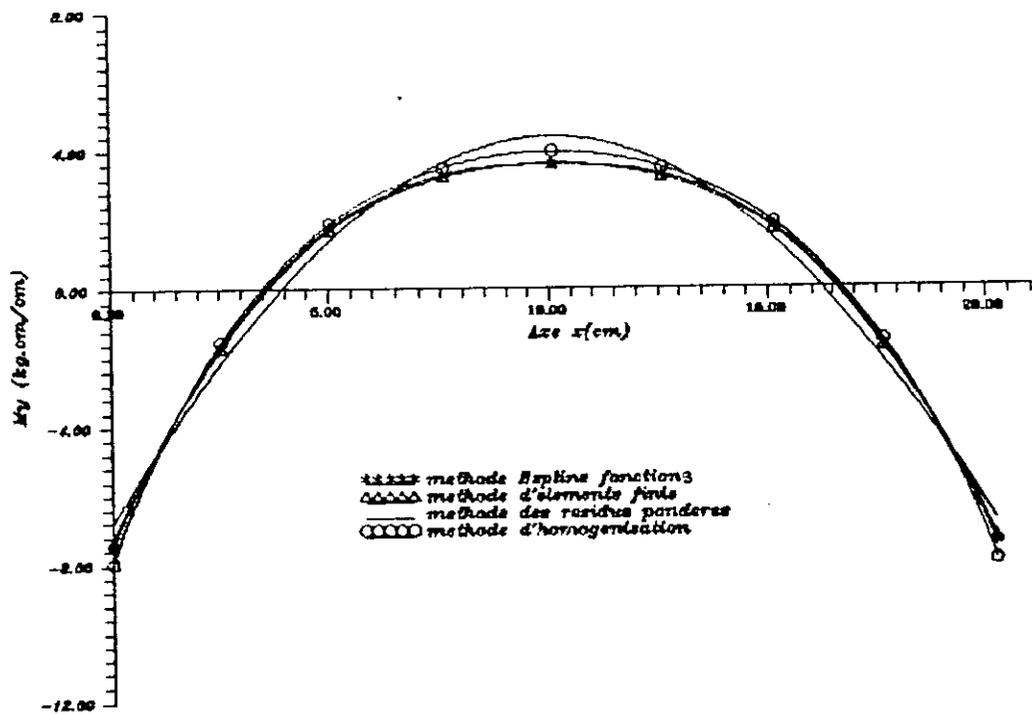


Figure 4 : Variation du Moment M_y suivant l'axe x ($y=b/2$)

IV-3-2 INTERPRETATION DES RESULTATS :

En étudiant la convergence, aussi bien celle de la déflexion maximale ($x = a/2$ et $y = b/2$) que celle du moment fléchissant en ce même point. on remarque que la méthode des éléments finis dans le cas d'assemblage des éléments constitutants, est plus précise que la méthode d'homogénéisation, bien que la convergence se fait de la même manière, en effet l'erreur donnée par la deuxième méthode, est plus grande que celle donnée par la première ; c'est ce qu'on peut voir sur les figures 1 et 2 .

Dans les figures 3 et 4 on a voulu, comparer les courbes de déflexion suivant l'axe x pour $y = b/2$, et de moment fléchissant dans la même direction, par les deux premières méthodes ainsi que par la méthode des résidus pondérés . Ce que l'on a remarqué pour la convergence, se confirme en étudiant ces courbes. En effet les courbes données par la méthode des éléments finis dans le cas d'assemblage épousent parfaitement celles données par les fonctions B .splines, alors que les autres méthodes sont moins précises . On peut dire alors que la méthode d'assemblage est plus précise que la méthode d'homogénéisation qui peut rester toujours applicable avec une précision appréciable pour des problèmes industriels.

Chapitre V :

Introduction à la méthode des équations intégrales aux frontières.

CHAP V : INTRODUCTION A LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERE

V-1 INTRODUCTION :

En physique, on s'intéresse forcément à ce qui se passe dans un domaine D , limité par une surface S s'appuyant sur un contour C .

Si le problème est bidimensionnel, le domaine est une surface S limitée par un contour C .

En appliquant au problème considéré les principes généraux de la physique, on établit des équations, au mieux différentielles, souvent aux dérivées partielles. Leur intégration comporte toujours des conditions aux limites.

Par exemple si on prend le cas simple de la poutre homogène de section constante, il sera nécessaire de préciser les déplacements aux extrémités et les pentes (dérivées premières) en certains points, encastrement par exemple.

L'équation ainsi établie sera dite équation gouvernante. elle concerne essentiellement le domaine. Sa solution est dite solution fondamentale.

Cette équation tenant compte des conditions aux limites, donnera les lois de comportement des fonctions à l'intérieur du domaine et sur ses limites.

Les solutions analytiques sont très délicates à obtenir. Ainsi les ingénieurs ont-ils cherché des méthodes purement numériques : différences finies puis éléments finis. Leur inconvénient est de devoir traiter, dans de nombreux cas, des problèmes à trois dimensions, ce qui exige souvent de grandes capacités de mémoire des ordinateurs. La méthode des équations intégrales aux frontières permet de réduire ces problèmes à deux dimensions.

V-2 HISTORIQUE :

Du point de vue historique les fondements de la méthode des équations intégrales aux frontières se trouvent dans les travaux de FREDHOLM (1903) et dans ce de l'école russe : MUSKHELISHVILI (1953), MIKHLIN (1957), KUPRADZE (1964).

Les premières publications sur le traitement numérique de l'équation de Laplace sont celles de : SYM (1963) , JAWSON et POINTER (1963).

C'est à RIZZO (1967) que revient les premières approches numériques de l'élasticité par la méthode directe. CRUSE (1969) étant le procédé aux domaines tridimensionnels. RICARDELLA (1972) introduit une variation linéaire des déplacements et des tensions entre les extrémités de chaque segment, ce qui améliore la solution et diminue le nombre de segments nécessaires. CRUSE (1974) adapte alors la variation linéaire au tridimensionnel. Enfin LACHAT et WATSON (1975), en utilisant la représentation isoparamétrique courante en élément finis ont développé la résolution de l'élasticité bi et tridimensionnelle.

Dans le cas de la formulation indirecte , on remarque les noms de WATSON (1972) de BUTTERFIELD, BANERJEE (1976) en mécanique des roches .CROUCH (1976) développe la méthode des discontinuités des déplacements. CRAWFORD et CORRAU (1983) l'utilise en viscoélasticité.

V-3 PHILOSOPHIE DE LA METHODE :

Le principe de la méthode des équations intégrales aux frontières consiste à transformer les équations d'évolution des phénomènes considérés (équations aux dérivées partielles dans le domaine et des conditions aux limites sur la frontière) en équations intégrales liants des fonctions connues et inconnues sur la frontières du domaine exclusivement .On a ainsi une diminution

de la dimension de l'espace où l'on résoud les équations, puisqu'on remplace un problème tridimensionnel; par exemple; par un problème posé uniquement sur la surface, la résolution ou le traitement numérique en sont grandement simplifiés .

V-4 SIMILITUDE ET DIFFERENCES ENTRE LA M.E.F ET LA M.E.I.F:

* La M.E.F et la M.E.I.F sont toutes deux des méthodes approchées pour la résolution des problèmes physiques régits par des équations aux dérivées partielles. Avec le développement des techniques informatiques, ces deux méthodes ont trouvées le chemin pour bien se développer et devenir efficace .

* Ces méthodes ont pour point commun l'utilisation d'une discrétisation de la géométrie du problème posé: maillage du domaine représentative, choix des fonctions de formes.

* En M.E.I.F ce processus de discrétisation ne concerne que les frontières du domaine, ceci grâce à une intégration par partie, ce qui réduit le nombre des inconnues par rapport à celui de la M.E.F, ce qui constitue un avantage économique, exemple: maillage d'un barrage.

* La résolution des problèmes en milieu infini ou semi-infini est particulièrement efficace par la M.E.I.F, exemple: problème de rayonnement.

* Pour la M.E.F la solution approchée vérifie les conditions aux limites mais pas nécessairement l'équation gouvernante . Alors que la M.E.I.F, sa solution approchée vérifie l'équation gouvernante mais pas les conditions aux limites.

* Dans la M.E.I.F la dimension du problème à traiter diminue d'une unité , en contre partie la résolution conduit à une matrice pleine et non symétrique ; ce qui ne permet pas l'utilisation des méthodes de stockage et de résolution sophistiquées comme en élément finis .

Chapitre VI :

**Analyse des problèmes bidimensionnels par la méthode
des équations intégrales aux frontières .**

CHAP VI : ANALYSE DES PROBLEMES BIDIMENSIONNELS PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

VI-1 FORMULATION :

VI-1-1 INTRODUCTION :

L'étude des problèmes de l'élasticité bidimensionnelle, qui sont souvent traités numériquement par la méthode des éléments finis et la méthode des différences finis, peuvent aussi être traités par la méthode des équations intégrales aux frontières et offre alors aux ingénieurs une nouvelle manière, de modéliser et de résoudre ces problèmes qui peut s'avérer prometteuse.

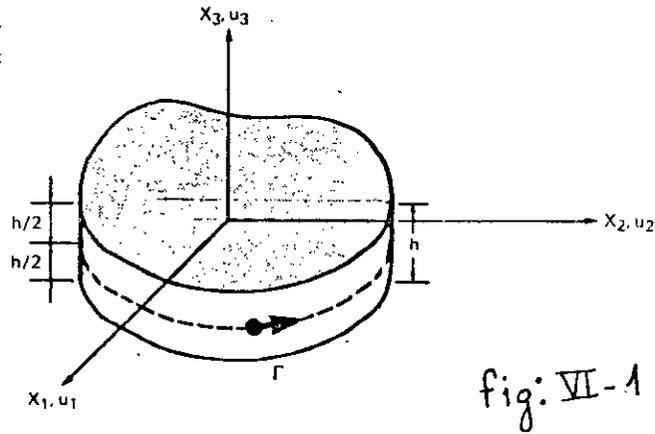
Ainsi dans ce chapitre, on va présenter cette méthode appliquée à ce type de problèmes, en se basant sur la méthode des résidus pondérés pour formuler les équations intégrales.

VI-1-2 ELASTICITE PLANE :

VI-1-2-1 DEFINITION :

Avant d'exposer le cas de l'élasticité plane, il convient de préciser ce que l'on entend par cette expression.

Considérons le solide prismatique homogène de la figure 1. Les surfaces inférieure et supérieure sont définies par $x_3 = \mp h/2$ et la surface cylindrique par $x_1 = x_1(\Gamma)$ et $x_2 = x_2(\Gamma)$. Γ étant la longueur de l'arc sur le contour limite.



L'élasticité plane est définie de deux façons :

a) Contrainte plane :

- L'épaisseur du corps est très petite comparée aux dimensions caractéristiques suivant x_1 et x_2 ;
- Aucune force de surface n'agit sur les faces limitant le solide à $x_3 = \pm h/2$;
- Les efforts de volume sont plans et indépendants de x_3 et fonction seulement de x_1 et x_2 ;
- Les forces agissant sur la surface limite cylindrique sont planes et indépendantes de x_3 ;

donc $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ dans tout le volume et $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ sont indépendantes de x_3 .

b) Déformation plane :

On admet que $u_3 = 0$; cela implique que :

- L'épaisseur est grande comparée aux dimensions suivant x_1 et x_2 ;
- Les forces de volume et les forces de surface agissant sur la surface limite cylindrique sont dans le plan (pas de composante suivant x_3) et ne sont pas en fonction de x_3 .

On peut donc admettre que les déplacements plans u_1 et u_2 ne dépendent pas de x_3 et que $u_3 = 0$.

$$\text{Donc : } u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0$$

$$\text{soit : } \epsilon_{33} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0 \quad \text{mais } \sigma_{33} \neq 0$$

VI-1-2-2 EQUATION DE L'ELASTICITE PLANE :

Considérons un milieu continu élastique, homogène, plan, occupant un domaine Ω limité par un contour Γ de normale n .

- Les équations d'équilibre :

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{VI-1})$$

- Les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \text{Essentielles} : u_k &= \bar{u}_k \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \text{Naturelles} : p_k &= \bar{p}_k \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (\text{VI-2})$$

où : $u_j = \cos(n, e_j)$ et $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$

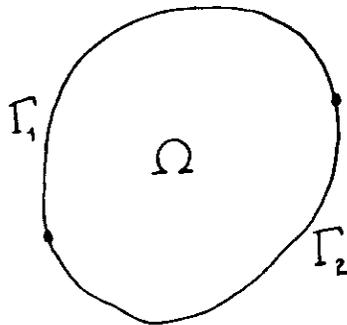


fig: VI-2

- Les relations de compatibilité :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{VI-3})$$

- Les équations de compatibilité :

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0 \quad (\text{VI-4})$$

- La relation de Hooke pour l'élasticité :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{VI-5})$$

Avec δ_{ij} symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

et λ, μ : constantes de Lamé.

En utilisant les équations (VI-3) et (VI-5), nous pouvons obtenir une expression des contraintes en fonction des déplacements et en reportant dans l'équation (VI-1) nous sommes conduits à l'équation de Navier de l'élasticité :

$$(\lambda + \mu) u_{j,j} + \mu u_{i,jj} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{(VI-6)}$$

Avec les conditions aux limites (VI-2)

Remarque :

L'état de déformation plan est obtenu à partir de l'état de contrainte plan, en remplaçant dans la matrice d'élasticité de cet état ν par $\nu/(1-\nu)$.

VI-1-2-3 Théorème d'unicité :

Le théorème d'unicité de la théorie de l'élasticité, s'énonce rigoureusement de la manière suivante : si en chaque point de la frontière, soit les forces superficielles, soit les déplacements sont spécifiés, alors pour des forces de volumes données il ne peut exister qu'une distribution des contraintes et des déformations dans le corps considéré.

La solution qui satisfait à toutes les conditions d'équilibre et de compatibilité, au sein du corps et sur ses frontières, constitue cette solution unique.

Pour que le théorème d'unicité puisse s'appliquer, il faut que le matériau soit linéairement élastique, et que l'analyse se limite aux petits déplacements.

VI-1-3 FORMULATION INTEGRALE :

Pour résoudre l'équation d'équilibre, nous devons interpoler le champ de déplacement, ceci nous conduit à un résidu, qu'on va minimiser en utilisant la méthode des résidus pondérés, qui va distribuer cette erreur dans tout le domaine, après avoir pondéré cette équation d'équilibre par une fonction de pondération notée u_R^* , on aura alors :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0 \quad (\text{VI-7})$$

En appliquant la formule de Green à l'équation (VI-7), on obtient :

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj} u_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} \sigma_{kj} u_k^* n_j d\Gamma \quad (\text{VI-8})$$

or : $\sigma_{kj} u_{k,j}^* = \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^*$ (VI-9) et $\sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* = \sigma_{kj}^* \varepsilon_{kj}$ (VI-10)

En remplaçant (VI-9) et (VI-10) dans l'équation (VI-7) et sachant que $\sigma_{kj} n_j = p_k$ on obtient :

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj}^* \varepsilon_{kj} d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (\text{VI-11})$$

qui après intégration par partie s'écrit :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* u_k^* d\Gamma \quad (\text{VI-12})$$

La solution u_k^* n'est qu'une fonction de pondération parmi une infinité. On va choisir cette fonction de telle sorte qu'elle soit solution de l'équation d'équilibre définie dans un domaine infini, sollicitée par une force unitaire concentrée ; elle sera appelée solution fondamentale.

VI-1-4 DETERMINATION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE :

Imaginons un corps bidimensionnel de dimensions infinies sollicitée par une force concentrée et unitaire appliquée au point (i) à l'intérieur du corps dans la direction du vecteur unitaire e_l . les forces volumiques seront négligées ; ce corps sera régie par l'équation d'équilibre suivante :

$$\sigma_{lj,j}^* + \Delta^l \cdot e_l = 0 \quad (\text{VI-13})$$

Avec Δ^l : fonction de Dirac

Cette imagination n'est qu'un artifice de calcul qui nous permettra d'écrire, en utilisant une des propriétés de la fonction Dirac :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega = -u_k^i e_k = -u_l^i e_l \quad (\text{VI-14})$$

Pour la détermination de la solution fondamentale u_k^* , considérons l'équation de Navier (VI-6), et écrivant les déplacements en fonction d'une représentation de Galerkin [ref:8].

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (\text{VI-15})$$

En dérivant l'expression (VI-15) autant de fois, pour la substituer dans l'équation de Navier et en manipulant avec adresse les indices, on obtient après simplifications :

$$G_{l,mmjj} + \frac{\Delta^i}{\mu} e_l = 0 \quad (\text{VI-16})$$

Pour résoudre l'équation (VI-16), faisant le changement de variable suivant :

$$F_l = \nabla^2 G_l \quad (\text{VI-17})$$

On aura alors :

$$\nabla^2 F_l + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0 \quad (\text{VI-18})$$

En premier lieu on résoudra l'équation homogène, puis on déterminera la constante d'intégration en intégrant l'équation (VI-18) dans un domaine Ω de dimension infinie.

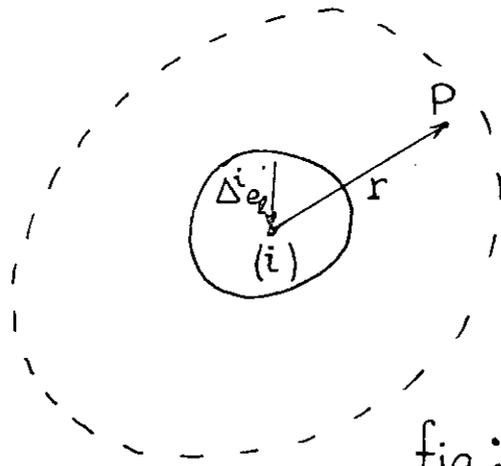


fig : VI - 3

r : distance entre le point considéré et le point d'application de la force concentrée (i)

En écrivant le laplacien $\nabla^2 F_l$ en coordonnées polaires l'équation homogène aura pour solution :

$$F_l = C_1 \ln(r) + C_2 \quad (\text{VI-19})$$

La détermination des constantes d'intégrales C_1 et C_2 revient à intégrer l'équation (VI-18), on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 F_l d\Omega = \int_{\Omega} -\frac{1}{\mu} \Delta^i e_l d\Omega = -\frac{1}{\mu} e_l \quad (\text{VI-20})$$

Cette intégrale présente une singularité, puisque :

$$\begin{cases} \nabla^2 F_l = 0 & \text{pour } r \neq 0 \\ \nabla^2 F_l = -\frac{1}{\mu} \Delta^i e_l & \text{pour } r = 0 \end{cases} \quad (\text{VI-21})$$

Pour surmonter cette singularité, écrivant l'équation (VI-20) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 F_l d\Omega &= \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \nabla^2 F_l d\Omega + \int_{\Omega_\epsilon} \nabla^2 F_l d\Omega \\ &= -\frac{1}{\mu} e_l \end{aligned} \quad (\text{VI-22})$$

Où Ω_ε est un disque, de rayon r_0 qui tend vers zéro voir fig VI-4 donc :

$$\int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \nabla^2 F_l d\Omega = 0$$

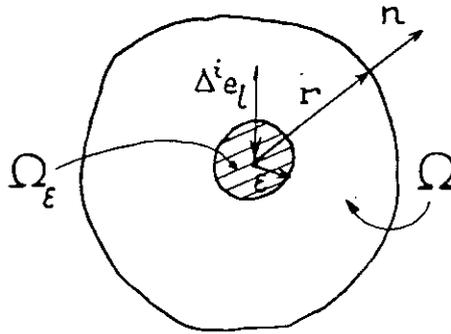


fig: VI-4

Et en appliquant la deuxième formule de Green pour l'équation (VI-20) on a :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 F_l d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F_l}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{\mu} e_l \quad (\text{VI-23})$$

Ceci nous conduit à écrire, sachant que les vecteurs r et n sont collinéaires :

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial F_l}{\partial n} d\Gamma = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial F_l}{\partial r} d\Gamma = -\frac{1}{\mu} e_l \quad (\text{VI-24})$$

(Dans ce cas $d\Gamma$ est le contour du disque)

La résolution de l'équation (VI-24) nous donne la solution suivante :

$$F_l = \frac{1}{2\pi\mu} \ln(1/r) e_l + C_2 \quad (\text{VI-25})$$

l'équation (VI-17) s'écrira alors :

$$\nabla^2 G_l = \frac{1}{2\pi\mu} \ln(1/r) e_l + C_2 \quad (\text{VI-26})$$

dont la solution est :

$$G_l = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(1/r) e_l + \frac{r^2}{8\pi\mu} e_l + \frac{C_2}{4} r^2 + C_3 \ln(1/r) + C_4 \quad (\text{VI-27})$$

On prendra pour simplifier les calculs :

$$C_2 = -\frac{1}{2\pi\mu} e_l \quad \text{et} \quad C_3 = C_4 = 0$$

$$\text{On aura alors :} \quad G_l = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(1/r) e_l \quad (\text{VI-28})$$

$$\text{Sachant que : } G_k = G_{lk} e_l \quad \rightarrow \quad G_{lk} = G \delta_{lk}$$

$$\text{avec : } G = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(1/r) \quad (\text{VI-29})$$

telque G_{lk} est la composante k du vecteur de Galerkin en tout point quant une force unitaire concentrée est appliquée au point (i) dans la direction l . Le déplacement en un point du domaine du infini causée par cette force unitaire s'écrit :

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l$$

avec u_{lk}^* représente le déplacement du point P dans la direction k . On aura alors, en utilisant l'équation (VI-15), l'expression suivante:

$$u_{lk}^* = G_{lm,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{lm,km} \quad (\text{VI-30})$$

En dérivant l'équation (24) et en utilisant les propriétés (VI-19), l'équation (26) s'écrira :

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln(1/r) \delta_{kl} + r_{,l} r_{,k} \right\} \quad (\text{VI-31})$$

En revenant à l'équation (VI-12), on remarque qu'on a besoin, non seulement de u_{lk}^* , mais aussi de ρ_{lk}^* , cette dernière peut être

déterminer, en utilisant la relation déformation-déplacement (VI-3) et la relation contrainte-déformation (VI-5), et en faisant appel à la notation indicielle, on aura :

$$\sigma_{kj}^* = S_{lkj}^* e_l \quad (\text{VI-32})$$

avec :
$$S_{lkj}^* = \left[\frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)} \delta_{kj} u_{lm,m}^* + \mu(u_{lk,j}^* + u_{lj,k}^*) \right] \quad (\text{VI-33})$$

En dérivant l'équation (VI-27), en la remplaçant dans l'équation (VI-33), et sachant que : $\rho_{lk}^* = S_{lkj}^* n_j$, on obtient :

$$\rho_{lk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right\} \quad (\text{VI-34})$$

VI-1-5 EQUATION INTEGRALE POUR LES POINTS INTERIEURS :

Pour les points intérieurs au domaine Ω , on va reprendre l'équation (VI-12), puis on utilise la propriété (VI-14), on aura l'équation (VI-12) qui sera écrite avec représentation des deux composantes du déplacement et des deux directions du chargement unitaire au point (i) :

$$u_l^i + \int_{\Gamma} \rho_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* \rho_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (\text{VI-35})$$

Cette équation donne les déplacements en tout point intérieur au domaine.

où :

u_l^i : représente le déplacement dans la direction l au point d'application de la charge unitaire (i).

u_{lk}^* et ρ_{lk}^* : sont les k déplacements et les k contraintes du à la charge unitaire dans la direction l .

u_k et ρ_k : représentent les déplacements et les contraintes sur la frontières

Cette équation est dite identité de Somigliana pour les

Les contraintes pour un point intérieur (i) sont obtenues après différentiation de l'équation (VI-34) (Ref:8) , soit :

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (\text{VI-36})$$

où les composantes des tenseurs D_{kij} et S_{kij} sont :

$$D_{kij} = \frac{1}{r} \left\{ (1-2\nu) \left[\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \right] + 2 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \cdot \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (\text{VI-37})$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2 n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) \cdot n_k \delta_{ij} \right\} \cdot \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (\text{VI-38})$$

VI-1-6 EQUATION INTEGRALE AU FRONTIERE :

L'identité de Somigliana (VI-35) permet de donner les déplacements en n'importe quel point intérieur, une fois u_k et p_k sont connus en n'importe quel point de la frontière ; par conséquent les valeurs aux points intérieurs ne seront connues que si celles de la frontière le sont. Cependant, l'équation (VI-34) peut être prise sur la frontière pour obtenir une équation intégrale au frontière.

Par ailleurs, quand (i) est pris sur la frontière, l'intégrale aura une singularité; pour y remédier, on supprime un secteur de disque, dont le rayon ϵ est petit, au niveau du point (i) situé sur une frontière régulière (lisse). Si on fait tendre ϵ vers zéro, et après un calcul aux limites (voir Brebbia) on obtient l'équation intégrale au frontière :

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (\text{VI-39})$$

où les intégrales sont au sens des valeurs principales de Cauchy, et $c_{lk}^i = 1/2 \delta_{lk}$ quand (i) est sur une frontière régulière Γ ; cette quantité représente le rapport entre le secteur de disque qui revient au point (i) et le disque complet.

VI-2 UTILISATION DE LA M.E.I.F POUR L'ANALYSE NUMERIQUE DES PROBLEMES DE L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLE :

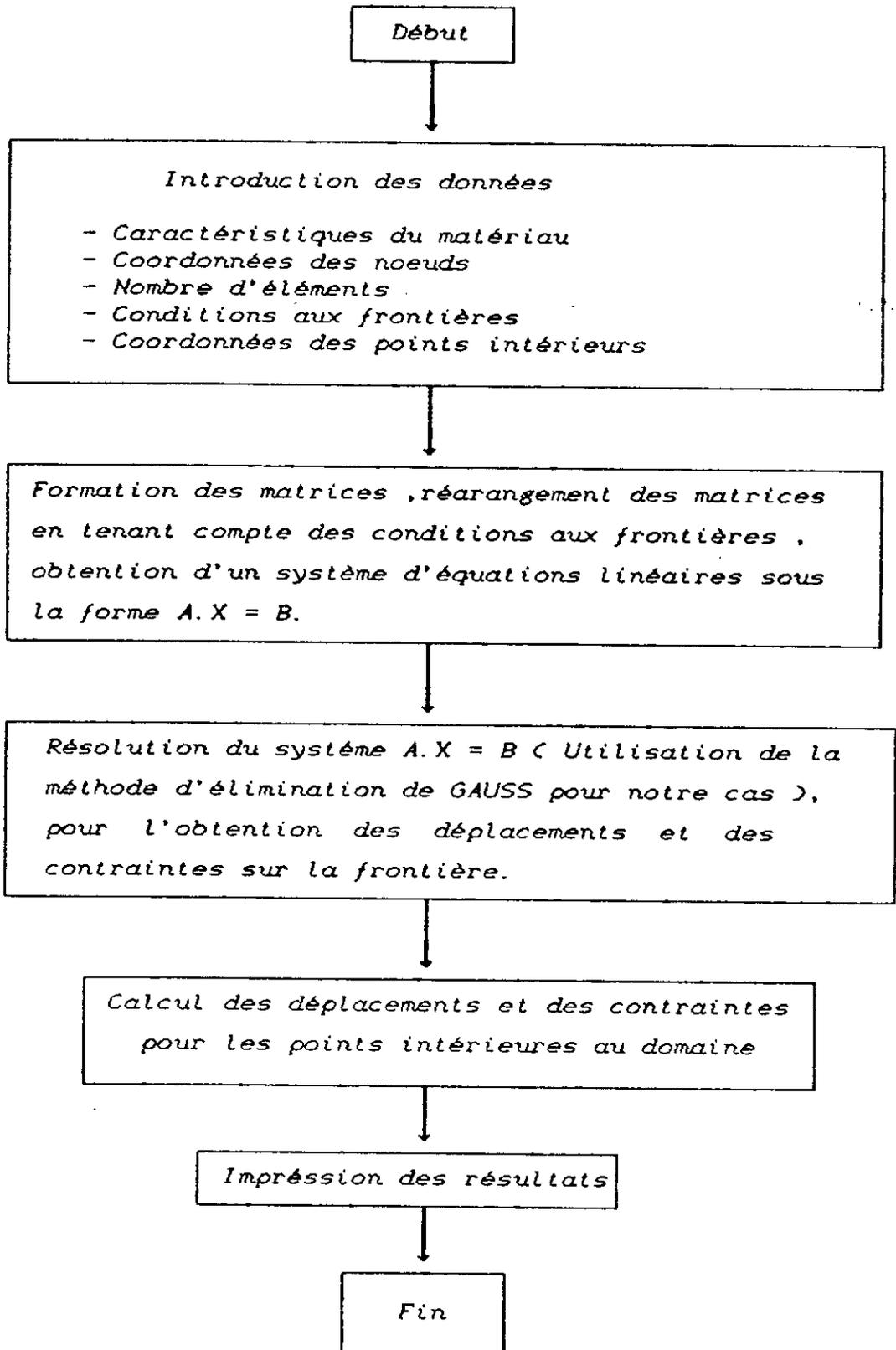
VI-2-1 INTRODUCTION :

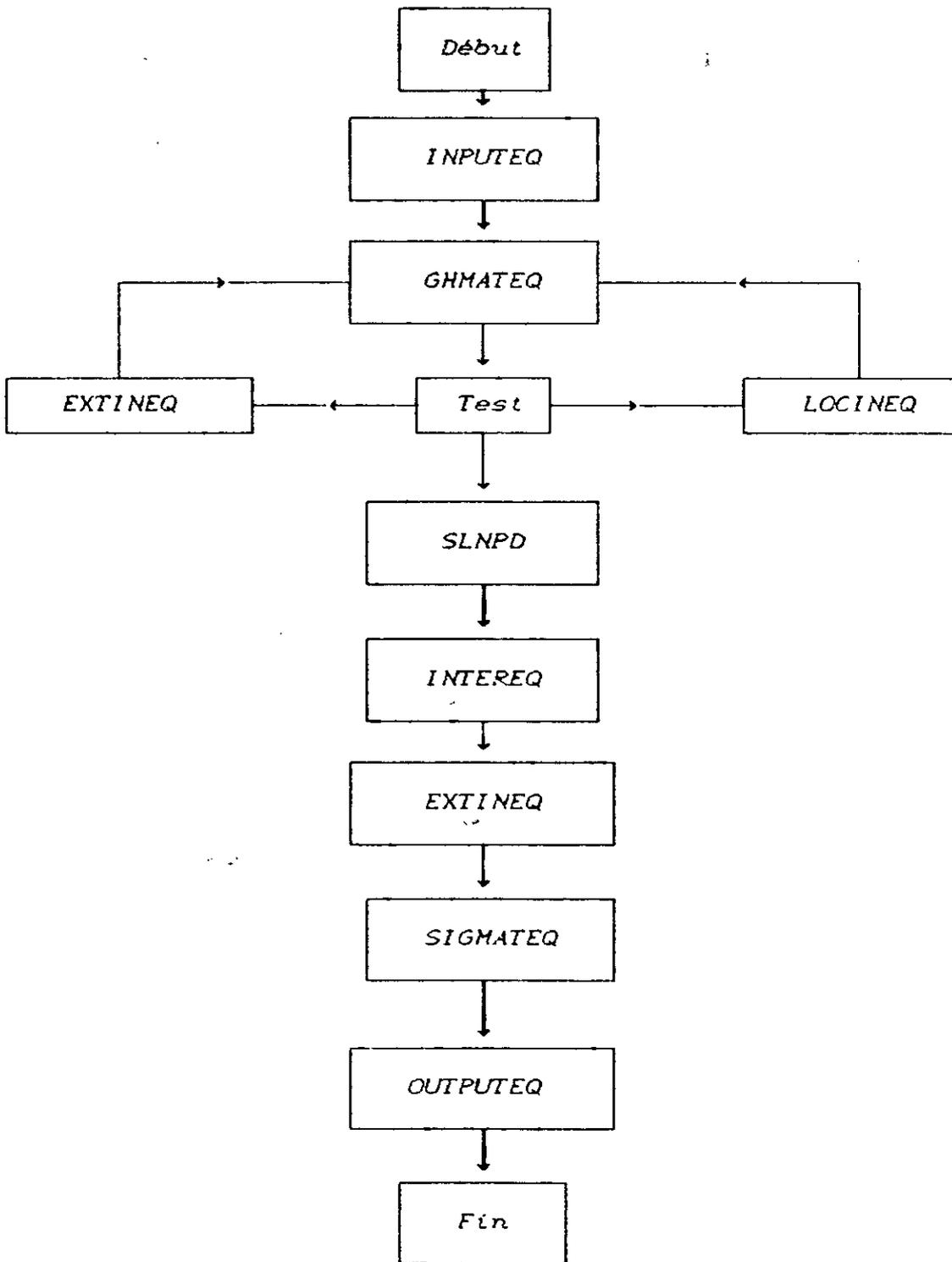
Les solutions analytiques des équations intégrales relatives aux problèmes de potentiel (Equation de LAPLACE) et à celles de l'élasticité (Equations de NAVIER) sont extrêmement rares et n'existent que pour quelques géométries et conditions aux limites excèsivement simples. Pour être en mesure de traiter des cas un peu plus complexes et correspondants à ceux rencontrés dans la pratique, il a fallu attendre l'essor des techniques numériques et le développement des ordinateurs.

Dans ce chapitre, on présentera un programme type de la méthode des équations intégrales aux frontières "ELQUABE" [ref:8] qui traite les problèmes d'élasticité bidimensionnelle, il utilise l'élément quadratique pour représenter proprement les géométries courbées.

Ce programme est une étape préliminaire; son initiation va nous permettre d'établir deux autres programmes pour la résolution de la flexion des plaques minces.

Les grandes étapes pour la résolution d'un problème par la M.E.I.F :





Organigramme général du programme "ELQUABE"

VI-2-2 PRESENTATION DU PROGRAMME:

Ce programme est conçu pour l'étude des problèmes en contraintes planes ou en déformations planes, il est constitué par huit sous-programmes, qui ont en commun des blocs "COMMON" blancs et étiquetés, permettant le passage des paramètres entre eux avec une bonne rapidité lors de l'exécution.

Les sous-programmes utilisés sont les suivants :

Sous-programme INPUTEQ :

Cette subroutine permettra de lire toutes les informations nécessaires au déroulement du programme :

- Titre du programme.
- Nombre d'éléments, nombre de points intérieures et les caractéristiques du matériau.
- Coordonnées des noeuds de frontières qui seront lues dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Conditions aux frontières : six valeurs du code et six valeurs des paramètres connus seront lues pour chaque éléments (quadratique), c'est une façon pour permettre aux contraintes d'avoir des valeurs différentes aux noeuds qui relie deux éléments successifs, les déplacements sont uniques pour chaque noeud :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si code} = 0 \implies \text{le déplacement est connu} \\ \text{si code} = 1 \implies \text{la contrainte est connu} \end{array} \right.$$

- Coordonnées des points intérieures, où on veut avoir les informations.

Sous-programme GHMATEQ :

L'équation intégrale aux frontières discrétisée s'écrit comme suit :

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{j=NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \rho^* \cdot \phi \cdot d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^{j=NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \cdot \phi \cdot d\Gamma \right\} \rho^j$$

sous forme matricielle :

$$[H] \cdot \{u\} = [G] \cdot \{\rho\}$$

Dans cette subroutine, on va calculer les matrices G et H, ceci en faisant appel aux deux subroutines EXTINEQ et LOCINEQ.

Sous - programme EXTINEQ :

Dans cette subroutine, on calcul les matrices élémentaires Hw et Gw qui vont rattacher le point de collocation avec l'élément où il ya intégration. Une formulation isoparamétrique est utilisée.

$$\left\{ \begin{array}{l} Hw = \int_{\Gamma_j} \rho^* \cdot \phi \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \rho^* \cdot \phi \cdot |G| \cdot d\xi \\ Gw = \int_{\Gamma_j} u^* \cdot \phi \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_j} u^* \cdot \phi \cdot |G| \cdot d\xi \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Hw = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \cdot |G| \cdot d\xi \\ Gw = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \cdot |G| \cdot d\xi \end{array} \right.$$

où ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 : sont des fonctions d'interpolation quadratiques

tel que : $\phi_1 = 1/2 \cdot \xi \cdot (\xi - 1)$, $\phi_2 = 1 - \xi^2$, $\phi_3 = 1/2 \cdot \xi \cdot (1 + \xi)$

et $|G|$: le jacobien tel que :

$$|G| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ (dx/d\xi)^2 + (dy/d\xi)^2 \right\}$$

Sous - programme LOCINEQ :

Dans cette subroutine , il va y avoir le calcul de la matrice élémentaire Gw , quand le point où il ya singularité appartient à l'élément où l'intégration est effectuée.

Méthode d'intégration :

L'intégration est une étape très importante dans la méthode des équations intégrales , car il est nécessaire d'évaluer ses quantités avec précisions ; celles ci seront calculées en utilisant une forme de Gauss , on a alors deux cas :

1) Le noeud où l'on écrit l'équation intégrale n'appartient pas à l'élément où l'on effectue l'intégration .

2) Le noeud où l'on écrit l'équation intégrale appartient à l'élément où l'on effectue l'intégration , plus particulièrement lorsque le point courant de l'intégration est un point singulier.

Dans le premier cas , on utilise l'intégration par quadrature de Gauss , ainsi pour le cas unidimensionnel :

$$\int_{-1}^{+1} f(x) . dx = \sum_{i=1}^{i=k} w_i . f(\xi_i)$$

où :

$$\begin{cases} \xi_i : \text{point de Gauss.} \\ w_i : \text{facteur de pondération de Gauss.} \end{cases}$$

Dans le deuxième cas , la procédure précédente n'est pas utilisée surtout quand l'intégration atteint le point singulier . Pour cela , une formule spéciale pour cette intégration est introduite :

$$\int_{-1}^{+1} f(\alpha) \text{Log}(1/\alpha) . d\alpha = \sum_{i=1}^{i=k} z_i . f(\alpha_i)$$

où :

$$\begin{cases} \alpha_i : \text{coordonnée du point d'intégration.} \\ z_i : \text{facteur de pondération.} \end{cases}$$

Pour cela il faut faire une transformation linéaire sur les coordonnées intrinsèques.

Ceci pour le calcul de la matrice élémentaire G_w , pour l'autre matrice élémentaire H_w , plus particulièrement les termes $H_w(i, i)$, on n'a pas de formule spéciale pour les calculer

On a la matrice globale H dont les termes sont :

$$H(i, j) = \begin{cases} H_w(i, j) + c_i & \text{si } i = j \\ H_w(i, j) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ces termes $H(i, i)$ seront calculés en considérant un déplacement de corps rigide.

Ainsi pour un problème intérieur limité dans l'espace, si on provoque un déplacement de corps rigide à la structure à étudier, celle-ci ne donne pas de contraintes d'où : $\{p\} = \{0\}$

Tous les noeuds de la structure se déplaceront de la quantité A suivant la direction x et de la quantité B suivant la direction y .

On a :

$$[H] \cdot \{u\} = \{0\}$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \\ \cdot \\ \cdot \\ A \\ B \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Pour l'équation intégrale écrite au noeud k , on a deux équations (k et k'), pour l'équation k :

$$(H_{k,1} + H_{k,3} + \dots + H_{k,n-1}) \cdot A + (H_{k,2} + H_{k,4} + \dots + H_{k,n}) \cdot B = 0$$

où :

$$\begin{cases} n = 4 \cdot NE \\ \text{et} \\ NE : \text{nombre d'éléments.} \end{cases}$$

Mathématiquement, puisque A et B peuvent prendre une infinité de valeur, cette expression est nulle, ssi, les quantités suivantes sont nulles

$$\begin{cases} H_{k,1} + H_{k,3} + \dots + H_{k,n-1} = 0 \\ H_{k,2} + H_{k,4} + \dots + H_{k,n} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} H_{k,k} = - \sum_{\substack{i=1 \\ 2i-1 \neq k}}^{2NE} H_{k,2i-1} \\ H_{k,k+1} = - \sum_{\substack{i=1 \\ 2i \neq k+1}}^{2NE} H_{k,2i} \end{cases}$$

Pour un problème extérieur qui s'étend à l'infinie, mais pouvant présenter des régions creuses; on a:

$$c_i \cdot u_i + \int_{\Gamma_1} \rho^* \cdot u \cdot d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \rho^* \cdot u \cdot d\Gamma_2 = \int_{\Gamma} u^* \cdot \rho \cdot d\Gamma$$

Comme un déplacement de corps rigide engendre des contraintes nulles \Rightarrow

$$\int_{\Gamma} u^* \cdot \rho \cdot d\Gamma = 0$$

d'où :

$$c_i \cdot u_i + \int_{\Gamma_1} \rho^* \cdot u \cdot d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \rho^* \cdot u \cdot d\Gamma_2 = 0$$

Pour l'intégrale sur la frontière Γ_2 ; connaissant l'expression de ρ^* , et sachant que , quand r tend vers l'infinie les vecteurs r et n seront colinéaires ; après intégration , on trouve :

$$\int_{\Gamma_2} \rho^* \cdot d\Gamma_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Le reste de l'intégrale sera calculé comme pour un problème intérieur , on aura alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{k,k} = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ 2i-1 \neq k}}^{2NE} H_{k,2i-1} \\ H_{k,k+1} = - \sum_{\substack{i=1 \\ 2i \neq k}}^{2NE} H_{k,2i} \end{array} \right.$$

Les matrices élémentaires H_w et G_w seront assemblées dans les matrices globales H et G au fur et à mesure .

Une fois les matrices H et G formées , on procédera à un réarrangement du système d'équations obtenu et on l'écrira sous forme $A \cdot X = B$.

Où : X : est le vecteur des inconnues (4NE)

A : est la matrice dont les colonnes sont une combinaison de celles des matrices H et G .

F : est un vecteur connu, calculé en multipliant les conditions aux frontières connues avec les termes du rang correspondant des matrices H et G .

Sous - programme SLNPD :

Dans , cette subroutine , on utilise la méthode d'élimination de Gauss pour la résolution du système $A.X = B$. Cette méthode est appliquée en deux étapes , à savoir la triangularisation du système puis la résolution du système triangularisé obtenu .

Si la matrice A contient un zéro sur sa diagonale , les lignes sont interchangées , le système est singulier si l'interchangement des lignes ne peut donner un coefficient non nul sur la diagonale.

Triangularisation :

Elle s'effectue selon l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - \left[a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right] \cdot a_{kj}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - \left[a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right] \cdot b_k^{(k-1)} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} i = k+1, n \\ j = k+1, n \\ k = 1, n+1 \end{cases}$$

Résolution du système triangulaire supérieur : Cette étape est relativement facile et son algorithme est le suivant :

$$\begin{cases} x_n = b_n / a_{nn} \\ x_i = \left[b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j \right] / a_{ii} \end{cases} \quad \text{avec : } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Une fois les inconnues déterminées , elles seront utilisées pour le calcul des informations (déplacements, contraintes) pour les points intérieurs.

Sous - programme INTEREQ :

une fois l'équation intégrale de frontière résolue en ce qui concerne les déplacements et les contraintes sur la frontière, cette subroutine va réarranger ces dernières. Les déplacements dans un vecteur et les contraintes dans un autre vecteur. Elle réutilisera après l'équation intégrale discretisée () pour calculer les déplacements pour les points intérieurs (en prenant $C_i = 1$). Les contraintes seront données en calculant l'équation intégrale () .

Sous - programme SIGMAEQ :

Cette subroutine calcul l'intégrale des coefficients S et D multipliés par les fonctions de forme , en utilisant la méthode de quadrature de Gauss. La procédure est similaire à celle de la subroutine EXTINEQ , la seule différence , c'est qu'au lieu de calculé u^* et p^* , on calcule D et S .

Sous - programme OUTPUTEQ :

Cette subroutine va imprimer les resultats suivants :

- *) Déplacements pour chaque noeud de la frontière.
- *) Contraintes pour chaque noeud de la frontière.
- *) Déplacements pour les points intérieurs choisis.
- *) Contraintes pour les points intérieurs choisis.

VI-3 APPLICATION :

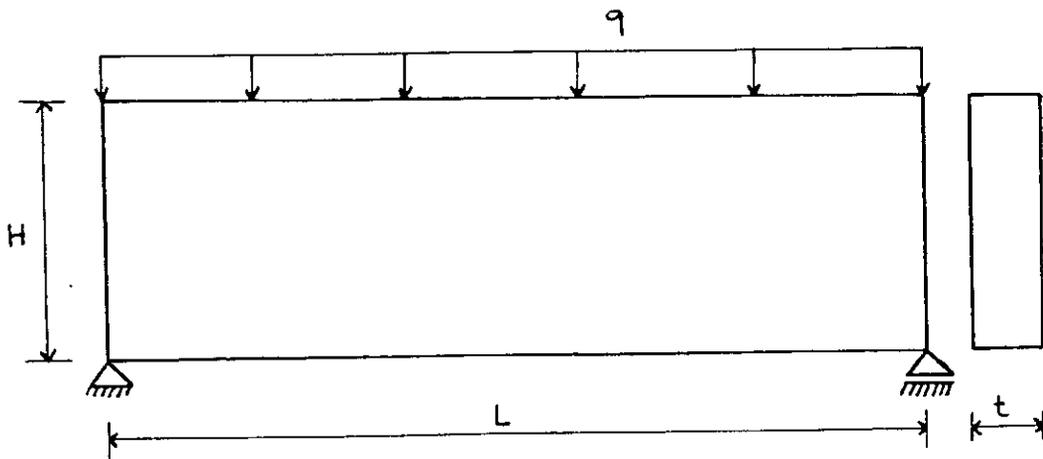
VI-3-1 Exemple :

Soit une poutre cloison chargée uniformément, reposant sur deux appuis simples à ses extrémités.

Cet exemple sera traité par la méthode des éléments aux frontières, utilisant des éléments quadratiques.

Une fois la convergence atteinte, on comparera les résultats trouvés avec celles données par la méthode des éléments finis, et par la théorie de l'élasticité.

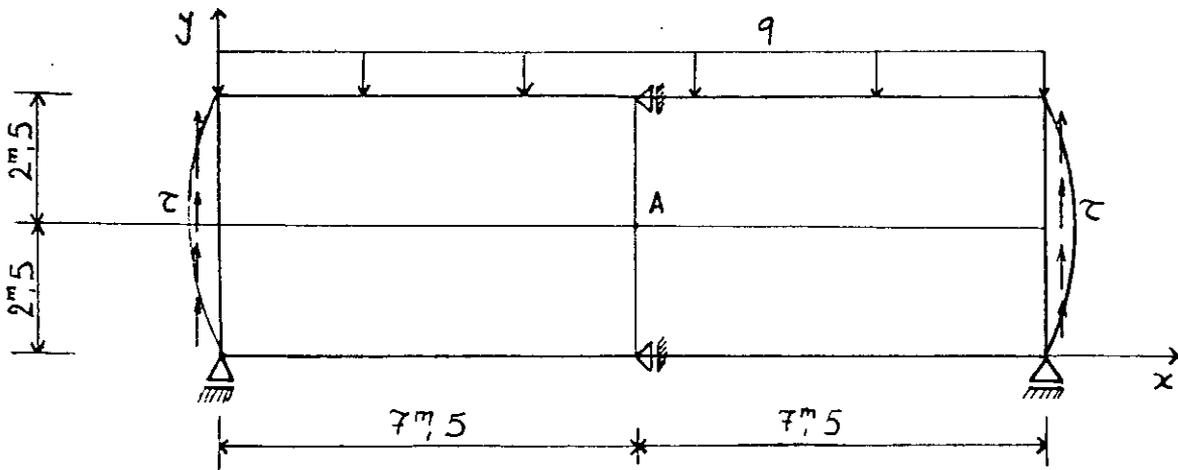
REMARQUE : La solution dite exacte pour cet exemple, donnée par la théorie de l'élasticité, sera obtenue, en se proposant une fonction de contrainte : "Fonction d'Airy", cette fonction doit vérifier l'équation biharmonique, puis satisfaire les conditions aux limites (unicité de la solution).



Données :

$q = 0.8 \text{ MPa}$,	$t = 1 \text{ m}$,	$\nu = 0.3$
$L = 15 \text{ m}$,	$H = 5 \text{ m}$,	$E = 1340 \text{ MPa}$

COVERGENCE :



Notre étude va se concentrée sur le point A où le déplacement verticale donnée par la théorie de l'élasticité est :

$$w_{yA} \text{ exacte} = (-4.7351 \text{ E-03})\text{m}$$

On fait varier le nombre d'éléments de frontières, en les augmentant à chaque fois, et ceci jusqu'à atteindre la convergence

Déflexion au point A

Nombre d'éléments	V_{yA} (m)
4	-2.273348 E-03
6	-3.086018 E-03
8	-4.572902 E-03

Nombre d'éléments	V_{yA} (m)
10	-4.74452 E-03
14	-4.80415 E-03
16	-4.74792 E-03

COMPARAISON DES RESULTATS :

Les déplacements verticaux V_y

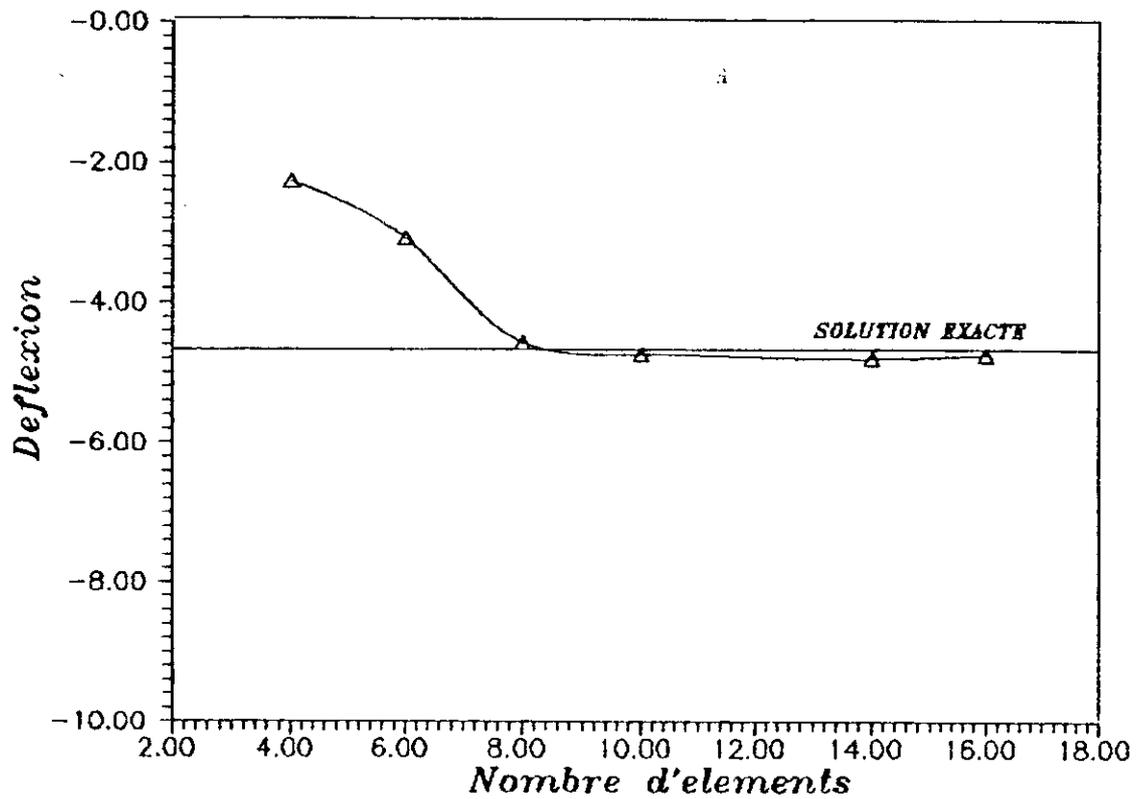
x(m)	Elasticité	60 éléments finis	$\Delta \%$	14 éléments de frontières	$\Delta \%$
1	-1.0373 E-03	-0.990 E-03	4.5	-1.0516 E-03	1.4
2	-2.0008 E-03	-1.929 E-03	3.8	-2.0143 E-03	0.7
3	-2.8564 E-03	-2.755 E-03	3.5	-2.8695 E-03	0.5
4	-3.5752 E-03	-3.454 E-03	3.4	-3.5882 E-03	0.4
5	-4.1343 E-03	-3.997 E-03	3.3	-4.1473 E-03	0.3
6	-4.5167 E-03	-4.369 E-03	3.3	-4.5295 E-03	0.3
7	-4.7107 E-03	-4.557 E-03	3.3	-4.7235 E-03	0.3
7.5	-4.7351 E-03	-4.593 E-03	3	-4.7479 E-03	0.3

N. B :

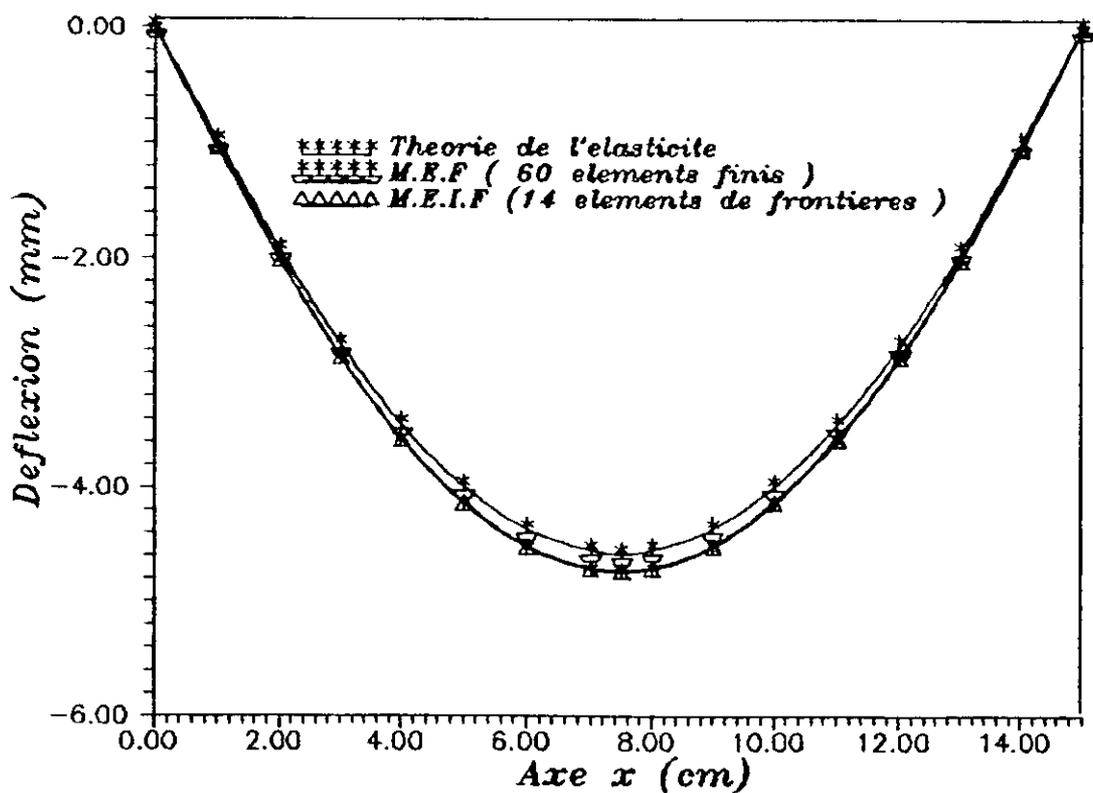
$$\Delta\% = \text{Erreur} = \frac{Str - San}{San}$$

avec :

{ Str : solution trouvée
San : solution analytique



Convergence de la deflexion
($x=7.5m, y=2.5$)



Courbe comparative de la deflexion
suivant l'axe x ($y=2.5m$).

VI-2 INTERPRETATION DES RESULTATS:

Pour étudier cet exemple, on a vu qu'il a fallu bien modéliser la poutre cloison en introduisant certaines conditions aux limites supplémentaires connues, ceci nous a permis de converger vers la solution exacte, en utilisant moins d'éléments de frontières.

La frontière a été discrétisée par des éléments quadratiques de même longueur, et on remarque sur le premier graphe, qu'on a atteint la convergence avec un maillage de 16 éléments. Ce qui nous a permis d'utiliser ce maillage pour comparer les déplacements, (pour $y = 2,5$ m et x varie suivant la position du point), avec ceux donnés par la théorie de l'élasticité et par la méthode des éléments finis. On remarque deux choses : La première est que les résultats donnés par la M.E.I.F (14 éléments) sont meilleurs que ceux donnés par la M.E.I.F (60 éléments); la seconde, bien que incluse dans la première, et que près des frontières la M.E.I.F (14 éléments) est plus précise.

On peut conclure que l'élément quadratique est excellent pour les problèmes d'élasticité plane et notamment pour ceux qui travaillent en flexion (exemple : poutre cloison).

Chapitre VII :

**Analyse des problèmes de la flexion des plaques par la
MEIF**

CHAP VII : ANALYSE DES PROBLEMES DE FLEXION DES PLAQUES PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

VII-1 INTRODUCTION :

Bien que l'analyse des plaques élastiques par la méthode des équations intégrales de frontières a été établie il ya longtemps , ce n'est que récemment où les ingénieurs ont tourné leur attention vers elle. Cela est du à deux raisons : la première est que la méthode intégrale est formulée sous forme mathématique, plutôt que d'une méthode accécible aux ingénieurs ; la seconde est que le développement des ordinateurs correspondait au développement d'une nouvelle méthode ,celle des élément finis

De nos jours , les problèmes de flexion des plaques qui souvent sont analysés par la méthode des différences finis (M.D.F) et la M.E.F peuvent être résolus en utilisant des éléments de frontières.

La première application des équations intégrales aux frontières à la flexion de plaques est due à JASWON et MAITI qui ont transféré le problème en un cas biharmonique de frontières. D'autres ont utilisé différentes formulations pour des problèmes particuliers de flexion des plaques .

Réc t, en utilisant la méthode indirecte, ALTIERO et SIKARSKI, ont présenté une technique qui consiste à remplacer la plaque réelle par une autre plaque fictive dont la fonction de Green est connue; le problème se réduit donc à la détermination des inconnues du problème réelle. D'autres ont étudié le cas des plaques encastées seulement à cause des difficultés qui se posent avec d'autres conditions de frontières.

Toujours avec cette technique, il faut souligner le travail de WU et ALTIERO qui ont introduit des conditions de frontières arbitraires, mais en considérant que les densités de la force et du moment, agissant à des distances "non spécifiées" autour de la frontière réelle.

Une formulation directe pour la flexion des plaques a été introduite simultanément par BEZINE et STERN. Le premier a présenté une formulation intégrale pour l'élément constant et il a donné des résultats numériques pour certains problèmes de plaques en flexion sous divers conditions aux limites sollicitées par une force concentrée. Sa formulation est basée sur l'identité de Green. Le second a suggéré une formulation intégrale générale en terme de deux équations intégrales, qui donnent : le déplacement, la rotation normale, le moment fléchissant normale et l'effort tranchant équivalent sur la frontière

VII-2 PRELIMINAIRE :

Comme c'est montrée sur la figure VII-1, on a une plaque modélisée par une région plane Ω et délimitée par une frontière $\partial\Omega$; avec un certain nombre de coins λ_k , $k = 1, 2, \dots, K$; chaque point d'un coin a un angle intérieur non nul.

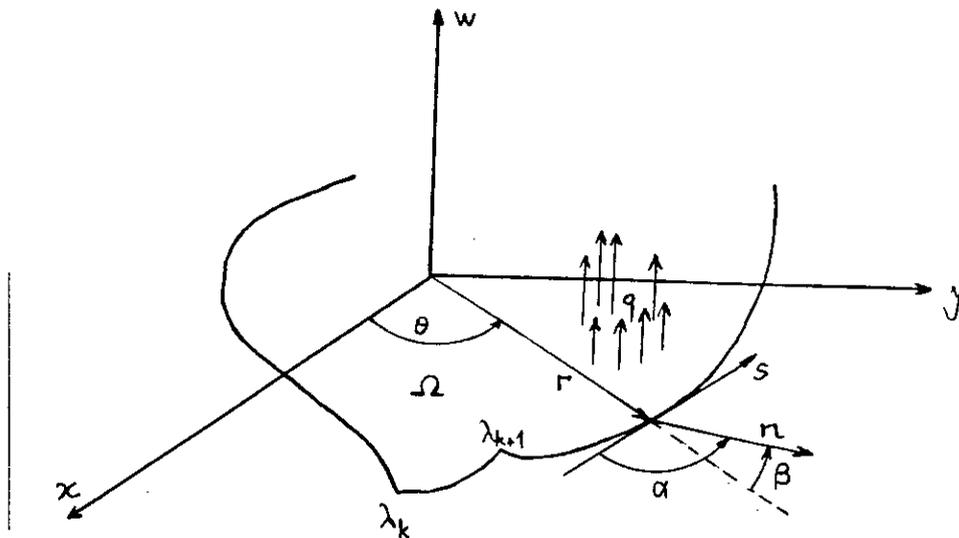


fig: VII-1

On suppose que la plaque est chargée transversalement par une charge d'intensité q sur Ω . On note que pour une plaque élastique, linéaire et isotrope, la déflexion w est gouvernée par l'équation différentielle suivante :

$$\nabla^4 w = q/D \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{VII-1})$$

Avec des conditions aux frontières appropriées, imposées sur la frontière $\partial\Omega$.

La rigidité de la plaque est $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, où E est le module d'élasticité, h est l'épaisseur de la plaque, ν est le module de Poisson et ∇^4 est l'opérateur Laplacien.

Soit u la déflexion de la plaque, et en considérant la forme bilinéaire symétrique:

$$\mathcal{U}(w, u) = D \int_{\Omega} \left\{ \nabla^2 w \nabla^2 u - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \right\} da \quad (\text{VII-2})$$

On note que $\mathcal{U}(w, w)$ est l'énergie de déformation de la plaque dont le déplacement est $w = w(x, y)$. Si on intègre l'équation (VII-2), deux fois par partie, on obtient la formule :

$$\mathcal{U}(w, u) = D \int_{\Omega} u \nabla^4 w da + \int_{\partial\Omega} \left\{ \mathcal{V}_n(w) u - \mathcal{M}_n(w) \frac{du}{dn} \right\} ds + \sum_{k=1}^K [(\mathcal{M}_l(w) | u)]_{\lambda_k} \quad (\text{VII-3})$$

où, pour les points réguliers de la frontière on a :

$$\mathcal{M}_n(w) = D \left\{ -\nabla^2 w + (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha \right] \right\}$$

$$= D/2 \left\{ -(1+\nu)\nabla^2 w + (1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t(w) &= -D(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right\} \\ &= -\frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right\} \end{aligned}$$

$$\gamma_n(w) = -D \frac{d}{dn} \nabla^2 w + \frac{d}{ds} \mathcal{M}_t(w)$$

(VII-4)

Avec :

- *) α : l'angle formé entre l'axe x et la normale extérieure
- *) $[]$: saut discontinu dans la direction d'évolution de l'arc sur la frontière
- *) d/dn et d/ds : dérivées normale et tangentielle sur $\partial\Omega$.

En utilisant la symétrie de $\mathcal{U}(\dots)$, on obtient la forme de l'identité intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left\{ \gamma_n(w) w - \mathcal{M}_n(w) \frac{dw}{dn} + \frac{du}{dn} \mathcal{M}_n(w) - u \gamma_n(w) \right\} ds &= D \int_{\Omega} (u \nabla^4 w - w \nabla^4 u) da \\ &+ \sum_{k=1}^K \left[[\mathcal{M}_t(w)] u - [\mathcal{M}_t(w)] w \right]_{\lambda_k} \end{aligned}$$

(VII-5)

Les opérateurs de frontière : $\mathcal{M}_n(\dots)$, $\mathcal{M}_t(\dots)$, $\gamma_n(\dots)$ produisent, respectivement, un moment fléchissant, un moment de torsion et un effort tranchant équivalent.

Pour les équations (VII-4), si on note β l'angle entre la direction radiale et la normale extérieure, tel que : $\beta = \alpha - \theta$, et si on considère la fonction w écrite en coordonnées polaires (r, θ) alors on aura :

$$M_n(w) = D/2 \left\{ -(1+\nu) \nabla^2 w + (1-\nu) \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \cos 2\beta \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \sin 2\beta \right] \right\}$$

$$M_t(w) = -\frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \sin 2\beta + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cos 2\beta \right] \right\}$$

(VII-6)

En supposant que le rayon de courbure R tend vers l'infinie (frontière rectiligne), on aura les dérivées tangentielles :

$$\frac{da}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\cos \beta}{r} \quad \text{(VII-7)}$$

par conséquent, en considérant que $M_t(w)$ est fonction de (r, θ, β) , on trouve l'expression de $V_n(w)$:

$$V_n(w) = \left[-D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} M_t(w) - \frac{\partial}{\partial \beta} M_t(w) \right) \right] \cos \beta \\ - \left[\frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial r} M_t(w) \right] \sin \beta$$

(VII-8)

Une discontinuité du moment de torsion M_t , interprétée par une force concentrée appelée "force de KIRCHOFF", peut apparaître au niveau des coins λ_k , cela est dû à la discontinuité de la normale à la frontière (notons que si un coin peut se déplacer librement, cette force est nulle et le moment de torsion est nulle).

VII-3 SOLUTIONS FONDAMENTALES :

La solution fondamentale pour la déflexion d'une plaque est une fonction singulière au niveau de l'origine (point d'application de la charge), mais biharmonique en n'importe quel point du voisinage, autre que le point d'origine.

Pour notre problème, on a concerné par deux solutions fondamentales, la première correspond à une force concentrée unitaire appliquée au niveau de l'origine, la seconde correspond à un moment concentré unitaire appliqué en ce même origine.

La solution fondamentale correspondante à la force concentrée unitaire prend la forme suivante :

$$u_f^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (\text{VII-9})$$

En utilisant les formules (VII-6) et (VII-8) on obtient :

$$N_f^* = \frac{du_f^*}{dn} = \frac{1}{8\pi D} (1 + 2 \ln r)$$

$$M_{nf}^* = M_n(u_f^*) = -\frac{1+\nu}{4\pi} (1 + \ln r) - \frac{1-\nu}{8\pi} \cos 2\beta$$

$$M_{tf}^* = M_t(u_f^*) = \frac{1-\nu}{8\pi} \sin 2\beta \quad (\text{VII-10})$$

$$V_{nf}^* = V_n(u_f^*) = -\frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[2 + (1 - \nu) \cos 2\beta \right]$$

La deuxième solution fondamentale prend la forme :

$$u_m^* = \frac{1}{2\pi D} r \ln r \cos \varphi \quad (\text{VII-11})$$

De la manière on obtient :

$$N_m^* = \frac{du_m^*}{dn} = \frac{1}{2\pi D} \left\{ \cos \varphi \cos \beta + \ln r \cos(\varphi + \beta) \right\}$$

$$M_{nm}^* = M_n(u_m^*) = -\frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r} + \frac{1-\nu}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r} \sin 2\beta$$

$$M_{tm}^* = M_t(u_m^*) = \frac{1-\nu}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r} \cos 2\beta \quad (\text{VII-12})$$

$$V_{nm}^* = V_n(u_m^*) = \frac{1}{2\pi r^2} \left\{ \cos(\beta - \varphi) \left[2 + (1 - \nu) \cos 2\beta \right] + 2(1 - \nu) \sin \varphi \cos \beta \sin 2\beta \right\}$$

VII-4 EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERES :

En utilisant l'équation (VII-5), la fonction u est identifiée avec chacune des deux solutions fondamentales, qui produisent des singularités au niveau de leur point d'application, ceci pour donner deux équations intégrales aux frontières nécessaires à la résolution d'un problème de flexion des plaques par la M.E.I.F.

D'une façon générale, on suppose que l'origine P est localisé en un coin de la frontière de la plaque avec un angle intérieur $c\pi$, et notons que si P était un point régulier de la frontière : la frontière est donc lisse et la tangente est continue. A cause de la singularité des deux solutions fondamentales en P , on doit éliminer de la région Ω un petit voisinage de l'origine P , qui se traduit par un secteur de cercle de rayon ρ . Cela produit une nouvelle région Ω^* avec une nouvelle frontière $\partial\Omega^*$ qui diffère de $\partial\Omega$, par la présence d'un arc de cercle $\partial\Omega_\rho$ et de deux coins λ^+ et λ^- , alors que les arcs $\partial\Omega_\rho^-$ et $\partial\Omega_\rho^+$ et le point "coin" sont éliminés. On notera aussi que les frontières $\partial\Omega$ et $\partial\Omega^*$ ont la frontière $\partial\Omega_\rho^*$ en commun; voir fig

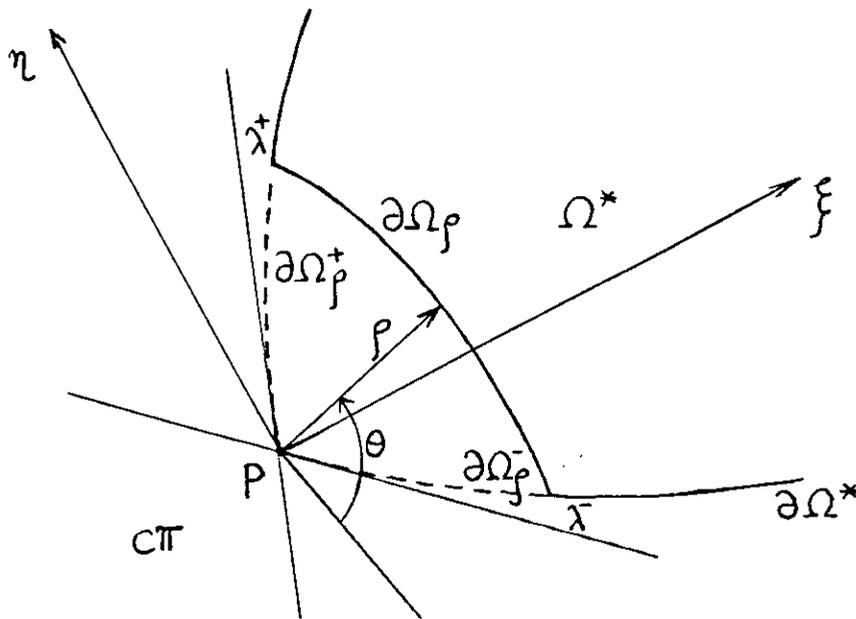


fig:

En appliquant la première solution singulière u_f^* à l'expression (VII-5), on trouve une équation intégrale de frontière qu'on peut écrire de la façon suivante, sachant que $\partial\Omega^* = \partial\Omega_\rho^* + \partial\Omega_\rho$:

$$\int_{\partial\Omega_\rho^* + \partial\Omega_\rho} \left\{ V_{nf}^* w - M_{nf}^* \frac{dw}{dn} + N_f^* M_n(w) - u_f^* V_n(w) \right\} ds$$

$$+ \sum_{\lambda^+, \lambda^-} \left\{ [M_{lf}^*]w - [M_l(w)]u_f^* \right\} + \sum_{k=1}^K \left\{ [M_{lf}^*]w - [M_l(w)]u_f^* \right\}_{\lambda^k}$$

$$= \int_{\Omega^*} u_f^* q da . \quad \text{(VII-13)}$$

Où \sum^* indique qu'on a éliminé la contribution de P.

Maintenant quand ρ tend vers zéro, le seul intégrale au-delà de la frontière $\partial\Omega_\rho$ qui reste est celui du premier terme, et la contribution des coins λ^+ et λ^- tendent aussi vers zéro. Le résultat final est donc l'équation suivante :

$$cw|_P + \int_{\partial\Omega_\rho^*} \left\{ V_{nf}^* w - M_{nf}^* \frac{dw}{dn} + N_f^* M_n(w) - u_f^* V_n(w) \right\} ds$$

$$\sum_{k=1}^K \left\{ [M_{lf}^*]w - [M_l(w)]u_f^* \right\}_{\lambda^k} = \int_{\Omega} u_f^* q da . \quad \text{(VII-14)}$$

avec : $c = 1/2$ quand $\rho \in \partial\Omega^*$

On a : $\int_{\partial\Omega^*} (.) ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\rho^*} (.) ds$ est une valeur

principale de Cauchy qui converge si les intégrales sur $\partial\Omega_\rho^-$ et $\partial\Omega_\rho^+$ tendent vers zéro quand ρ tend vers zéro.

Le calcul en ce qui concerne la deuxième solution singulière u_m^* et donc la deuxième équation intégrale de frontière est un peu plus délicat. En remplaçant u_m^* dans l'équation (VII-5), une nouvelle équation intégrale de frontière est obtenue, sachant toujours que $\partial\Omega^* = \partial\Omega_\rho^* + \partial\Omega_\rho$, on peut l'écrire comme suit :

$$\int_{\partial\Omega_\rho^* + \partial\Omega_\rho} \left\{ V_{nm}^* w - M_{nm}^* \frac{dw}{dn} + N_m^* M_n(w) - u_m^* V_n(w) \right\} ds$$

$$+ \sum_{\lambda^+, \lambda^-} \left\{ [M_{tm}^*] w - [M_t(w)] u_m^* \right\} + \sum_{k=1}^K \left\{ [M_{tm}^*] w - [M_t(w)] u_m^* \right\}_{\lambda^k}$$

$$= \int_{\Omega} u_m^* q \, da . \quad \text{(VII-15)}$$

La première chose à noter est qu'en général si $w|_P \neq 0$, l'intégrale au delà de la frontière $\partial\Omega_\rho$ diverge. On y remédie, en remplaçant la fonction w par $\hat{w} = w - w|_P$ (on élimine la déflexion au niveau du point P), et en évaluant \hat{w} sur $\partial\Omega_\rho$ en terme de ses dérivées par rapport aux directions ξ et η ; ainsi toutes les dérivées de w et de \hat{w} coïncident; les autres termes de l'équation (VII-15) ne seront pas affectés. D'après STERN, la seule contribution de l'intégrale sur la frontière $\partial\Omega_\rho$, pour un point régulier et quand ρ tend vers zéro, serait $-dw/dn|_P$; on aura alors la seconde équation intégrale :

$$-\frac{dw}{dn}|_P + \int_{\partial\Omega_\rho^*} \left\{ V_{nm}^* \hat{w} - M_{nm}^* \frac{d\hat{w}}{dn} + N_m^* M_n(\hat{w}) - u_m^* V_n(\hat{w}) \right\} ds$$

$$\sum_{k=1}^K \left\{ [M_{tm}^*] \hat{w} - [M_t(\hat{w})] u_m^* \right\}_{\lambda^k} = \int_{\Omega} u_m^* q \, da . \quad \text{(VII-16)}$$

Les deux équations intégrales de frontières (VII-14) et (VII-16), après introduction des conditions aux limites, vont être utilisées comme base, pour la détermination des variables inconnues. Pour la déflexion en un point intérieur au domaine Ω , on peut utiliser l'équation (VII.14) une autre fois avec $c = 1$, où $\partial\Omega_{\rho}^*$ est remplacée par $\partial\Omega$, et l'origine P sera à l'intérieur du domaine Ω .

Les équations (VII-14) et (VII-16) définissent des intégrales évaluées sur la frontière, à l'exception des intégrales de distributions de charge et qui sont :

$$L_1 = \int_{\Omega} u_f^* q da .$$

et

$$L_2 = \int_{\Omega} u_m^* q da .$$

Ces deux intégrales peuvent être ramener à la frontière, ceci pour garder le caractère de réduction d'une dimension de la méthode des équations intégrales de frontières. Ils seront écrits alors :

$$L_1 = \int_{\partial\Omega} q \frac{r^3}{32\pi D} \left[\ln r - \frac{1}{4} \right] \cos\beta ds$$

et

$$L_2 = \int_{\partial\Omega} q r^2 \left\{ \left[12 \ln r - 5 \right] \cos\beta \cos\varphi - \left[4 \ln r - 3 \right] \cos\beta \cos\varphi \right\} / (64\pi D) ds$$

Chapitre VIII :

Présentation des programmes CONFLEX et LINFLEX

VIII : PRESENTATION DES PROGRAMMES CONFLEX ET LINFLEX

VIII PRESENTATION DES PROGRAMMES CONFLEX ET LINFLEX :

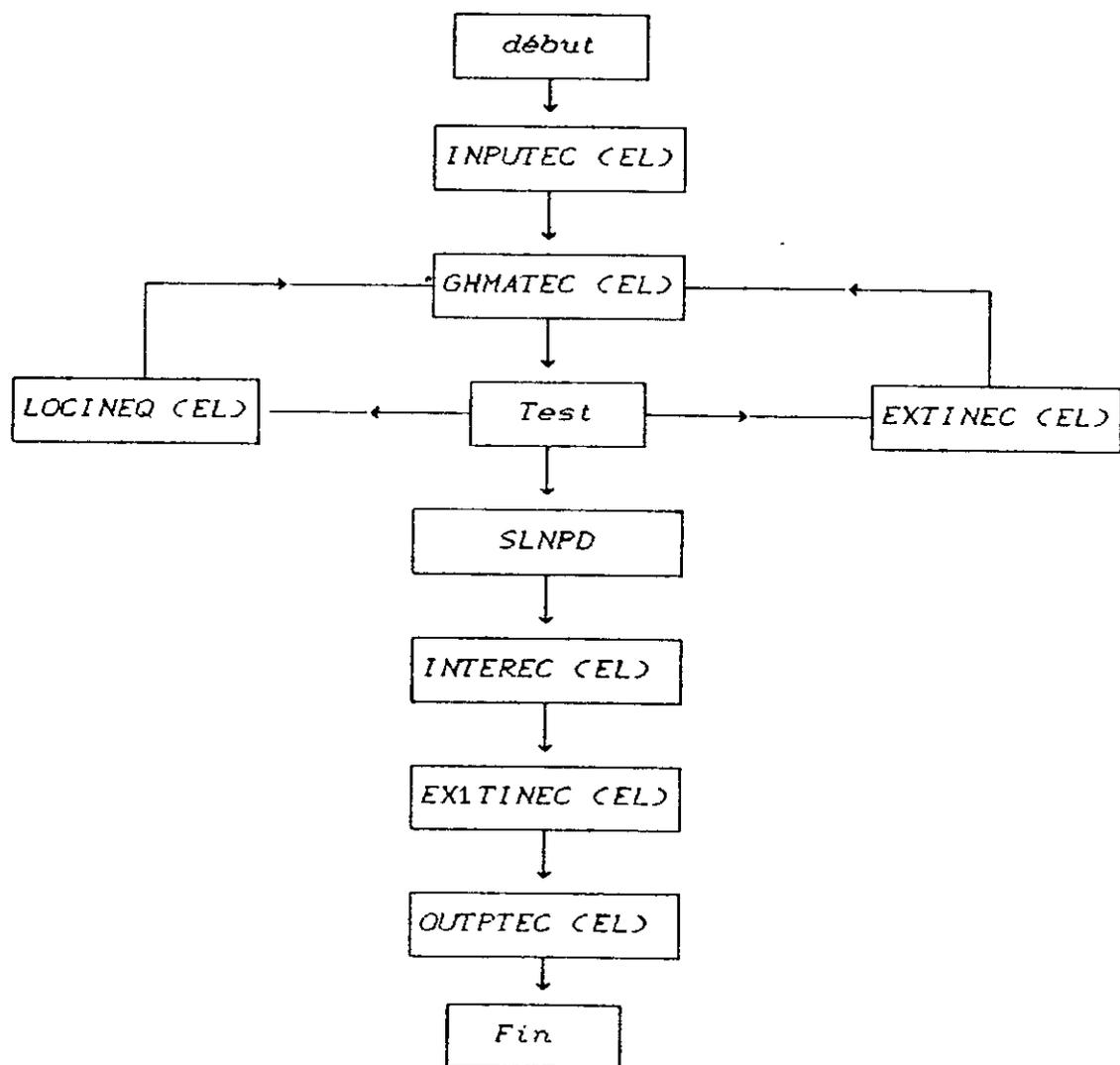
VIII-1-1 INTRODUCTION :

Le but de ces deux programmes CONFLEX et LINFLEX est de résoudre les problèmes de flexion des plaques par la méthode des équations intégrales aux frontières en discrétisant dans le premier la frontière par des segments de droite dont les inconnues sont situées au milieu, ce qui élimine les problèmes sur la diagonale dus aux singularités géométriques ; la solution est supposée constante sur chaque segment de droite, ce qui permet de calculer les intégrales de la diagonale analytiquement. Dans le deuxième programme, les variables sur la frontière sont interpolées linéairement, cela engendre des singularités sur la diagonale, qu'on peut les surmonter par l'utilisation de la notion de déplacement des corps rigides .

VIII-1-2 PRESENTATION DES PROGRAMMES :

Ces programmes CONFLEX et LINFLEX sont constitués chacun par huit sous-programmes .

Les sous-programmes utilisées sont les suivantes :



ORGANIGRAMME DES PROGRAMMES CONFLEX ET LINFLEX

On note que les noms des sousroutines qui se terminent par EC sont propres au programme CONFLEX alors que ceux qui se terminent par EL sont propres à LINFLEX

$$c \omega_i + \sum_{j=1}^n \int_{s_j} \left\{ V_{nf}^* \sum_{i=1}^q F^i \omega_i - M_{nf}^* \sum_{i=1}^q F^i \frac{d\omega_i}{dn} + N_{nf}^* \sum_{i=1}^q F^i M_{ni}(\omega) - u_f^* \sum_{i=1}^q F^i V_{ni}(\omega) \right\} ds$$

$$+ \sum_{k=1}^k \left\{ [M_{tf}^*] \omega - [M_t(\omega)] u_f^* \right\}_{\lambda^k} = \sum_{j=1}^n L_{1j} \quad \text{(VIII-1)}$$

$$- \frac{d\omega}{dn} \Big|_i + \sum_{j=1}^n \int_{s_j} \left\{ V_{nm}^* \sum_{i=1}^q F^i \omega_i - M_{nm}^* \sum_{i=1}^q F^i \frac{d\omega_i}{dn} + N_{nm}^* \sum_{i=1}^q F^i M_{ni}(\omega) - u_m^* \sum_{i=1}^q F^i V_{ni}(\omega) \right\} ds$$

$$\sum_{k=1}^k \left\{ [M_{tm}^*] \omega - [M_t(\omega)] u_m^* \right\}_{\lambda^k} = \sum_{j=1}^n L_{2j} \quad \text{(VIII-2)}$$

q = 1 : élément constant

q = 2 : élément linéaire

Avec :

F^i : fonction d'interpolation

* Pour l'élément constant $F^1 = 1$

* Pour l'élément linéaire $F^1 = 1/2 (1 - \mu)$

$F^2 = 1/2 (1 + \mu)$

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} H1 \\ (2n, n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ (n) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H2 \\ (2n, n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ (n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G1 \\ (2n, n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ (n) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G2 \\ (2n, n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_n \\ (n) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B \\ (2n) \end{Bmatrix}$$

Avec : n : Nombre d'élément

Dans ces deux subroutine, on va calculer les matrices H1, H2, G1, G2 et B, ceci en faisant appel aux deux subroutine EXTINEC et LOCINEC de CONFLEX ou EXTINEL et LOCINEL de LINFLEX

Une fois ces dernières sont calculées, cette subroutine forme les matrices A et F, après réarrangement, de tel manière qu'on obtient:

$$[A] \{u\} = \{F\}$$

où $\{u\}$: Vecteur des Variables inconnues

* Sous-programmes EXTINEC et EXTINEL :

Dans ces sous-routines, on calcule les coefficients d'influences des matrices H1, H2, G1, G2 et B. Cela est fait que lorsque le point de collocation n'appartient pas au segment sur lequel porte l'intégration, dans ce cas, l'intégrande varie lentement le long du segment et l'on peut utiliser une méthode de Gauss classique avec une fonction de poids égal à 1.

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^{i=k} w_i \cdot f(\xi_i)$$

où :

$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i : \text{point de Gauss.} \\ w_i : \text{facteur de pondération de Gauss tabulés.} \end{array} \right.$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $2k - 1$.

Dans notre cas, on a utilisé 7 points de Gauss.

Lorsque le point de collocation est un nœud de l'élément sur lequel on intègre, la procédure précédente se mettra en défaut, car soit la fonction à intégrer varie rapidement soit elle est singulière pour quelques coefficients de la matrice H1 dans LINFLEX. Ces coefficients peuvent être obtenus analytiquement ou en faisant appel à la notion de déplacement des corps rigides.

* Subroutines LOCINEQ et LOCINEL:

Dans ces deux subroutines, on calcul les coefficients diagonales des matrices H1, H2, G1, G2 et B analytiquement lorsque le point de collocation appartient à l'élément où l'on intègre sauf pour le programme LINFLEX, les coefficients de H1 seront obtenues par déplacement du corps rigide .

* Subroutine SLNPD :

Même subroutine que celle vue dans le programme ELQUABE .

* Subroutines INTEREC et INTEREL :

Une fois les inconnues sur les frontières sont obtenues, on peut déterminer les inconnues à l'intérieur du domaine en utilisant l'équation discrétisée (VIII-1) et on prend une valeur de c égale à 1. Les coefficients de ces équations seront calculés par la subroutine EXITINEC ou EXITINEL .

On note que les intégrations s'effectuent numériquement avec la procédure de Gauss classique car ces intégrations s'opèrent plus facilement que pour la constitution de l'équation intégrale de frontière ; il n'y a pas de singularité, y étant toujours distinct de point source.

* Subroutines OUTPUTEC et OUTPUTEL :

Ces deux subroutines vont imprimer les résultats suivants:

- *) Déplacements généralisés pour chaque noeud de la frontière;
- *) Efforts internes pour chaque noeud de la frontière;
- *) Déflexion pour les points intérieurs choisis;
- *) Force de Kirchoff par OUTPUTEL exclusivement .

VIII-2 APPLICATIONS :

VIII-2-1 EXEMPLES :

APPLICATION : 1

PROGRAMME : CONFLEX

METHODE : METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES
(B. E. M)

RESUME : UTILISATION D'UN ELEMENT DE FRONTIERE CONSTANT
POUR L'ETUDE D'UNE PLAQUE CARREE ENCASTREE SUR
TOUT SON CONTOUR , SOUMISE A UN CHARGEMENT
TRANSVERSAL ET UNIFORME.

I- CONVERGENCE :

- *) DEFLEXION MAXIMALE
- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) MOMENT NORMAL

II-COURBES COMPARATIVES :

- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) MOMENT NORMAL

DONNEES :

$a = b = 10\text{m}$

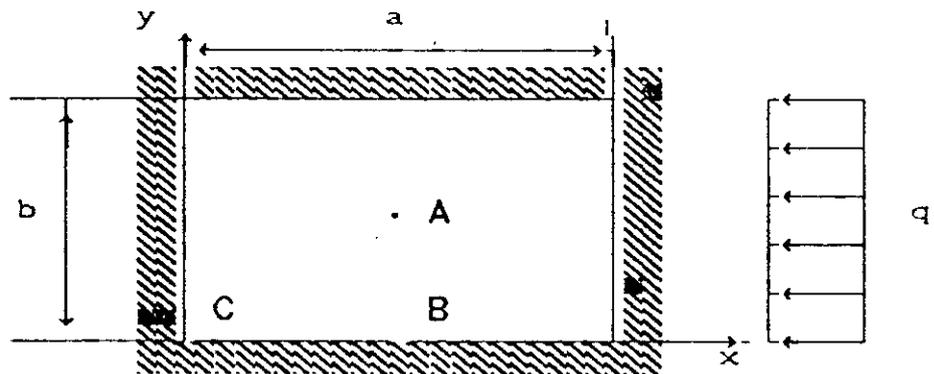
$q = 1 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

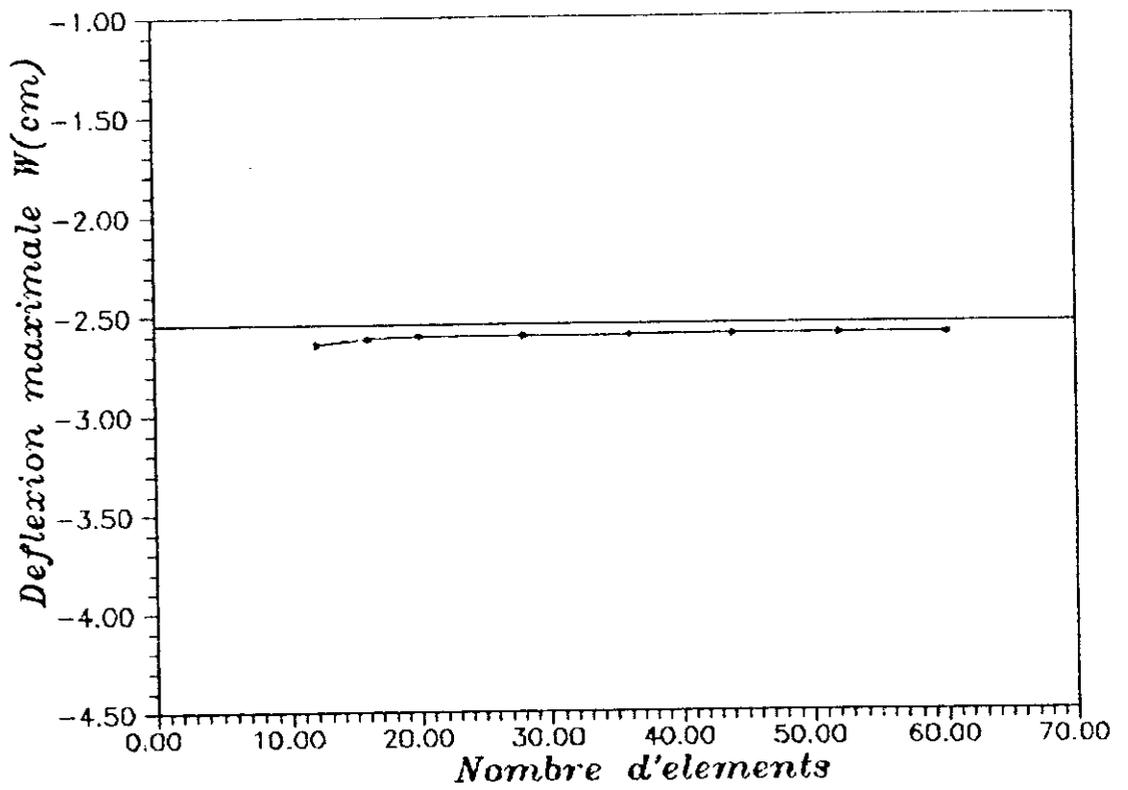
$h = 0.3\text{m}$

$D = 495.4 \text{ MN.m}$

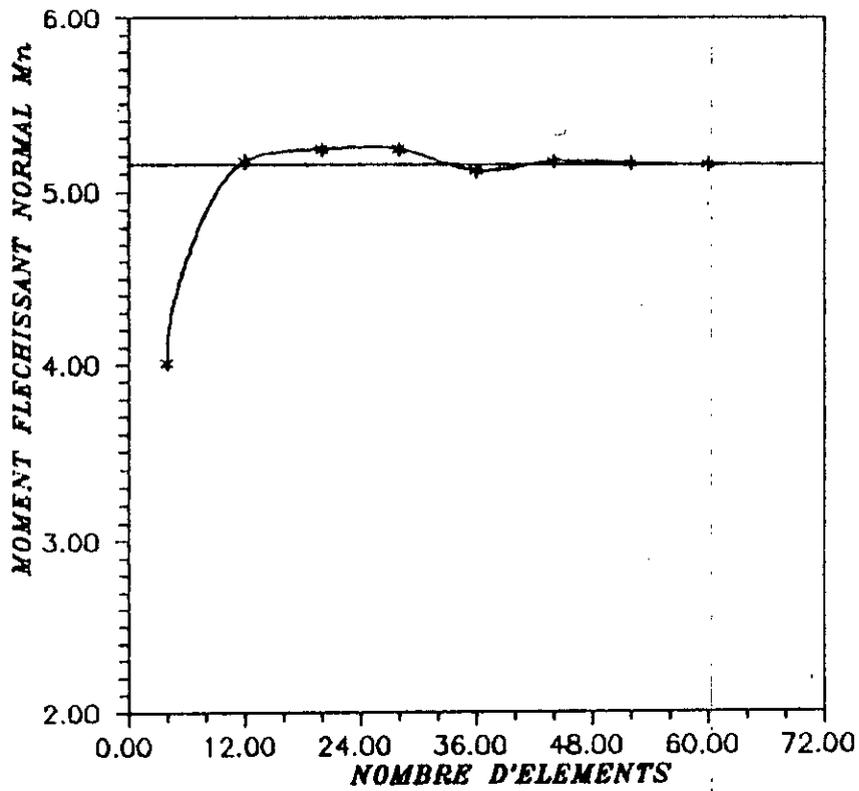
$E = 2.E+5 \text{ MPa}$



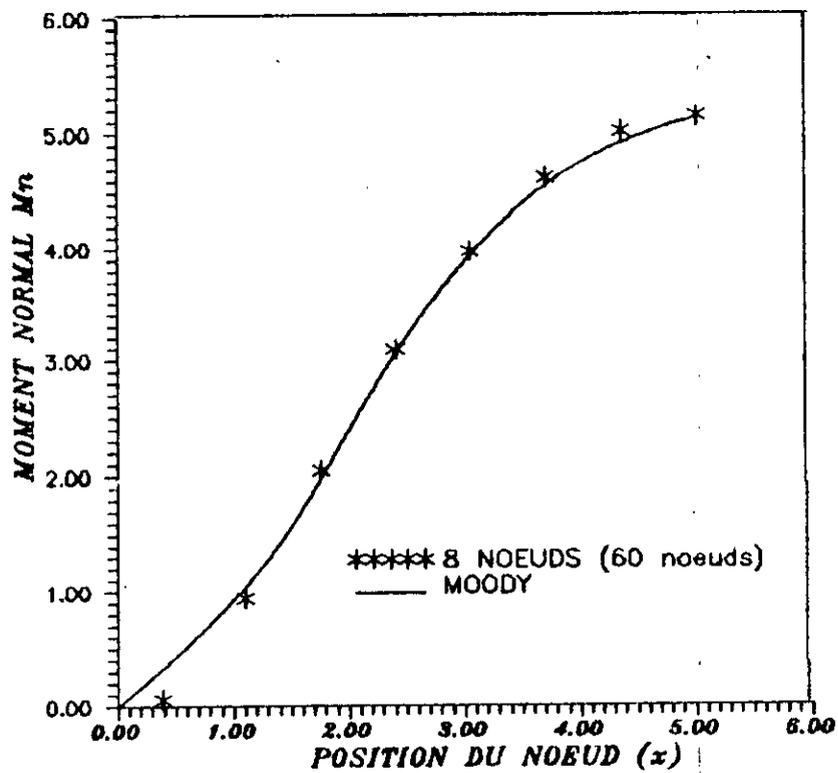
Nombre d'élément	$w_{\max}(A)$	$\Delta\%$	$M_n(B)$	$\Delta\%$	$V_n(B)$	$\Delta\%$
4	-2.9504		4.0111	21.8	2.4817	43.6
12	-2.6455	3.83	5.1764	0.9	4.7338	7.6
20	-2.6055	2.26	5.2356	2.06	4.4333	0.76
28	-2.6039	2.19	5.2384	2.11	4.5440	3.27
36	-2.6021	2.12	5.1151	0.29	4.3642	0.81
44	-2.6016	2.05	5.1700	0.78	4.4292	0.66
52	-2.6003	2.05	5.1583	0.55	4.4207	0.47
60	-2.6003	2.05	5.1543	0.47	4.4183	0.42
Solutions Moody	-2.548		5.13		4.4	



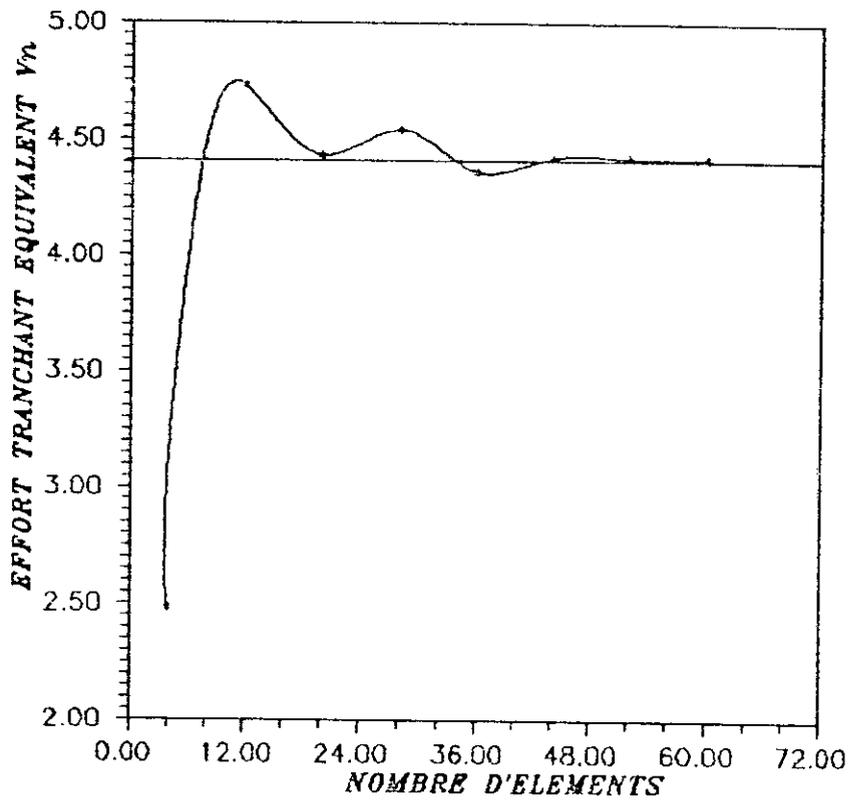
Courbe de convergence de la deflexion maximale d'une plaque carree uniformement chargee et encastree sur tout son pourtour.(Point A),(BEM : element constant).



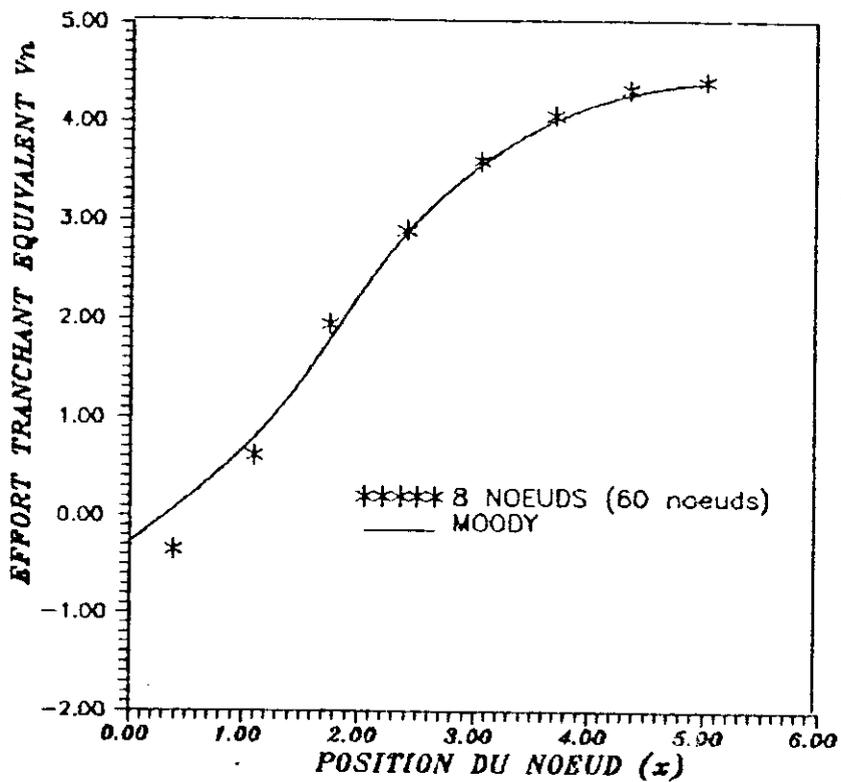
Courbe de convergence du moments flechissant M_n d'une plaque carree uniformement chargee encastree sur tout son contour. (BEM : element constant) ,(Point B).



MOMENT DE FLEXION SUR LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET ENCASTREE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element constant)



Courbe de convergence de l'effort tranchant d'une plaque carrée uniformément chargée encastree sur tout son contour. (BEM: element constant), (Point B).



EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT SUR LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET ENCASTREE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element constant).

APPLICATION : 2

PROGRAMME : CONFLEX

METHODE : METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

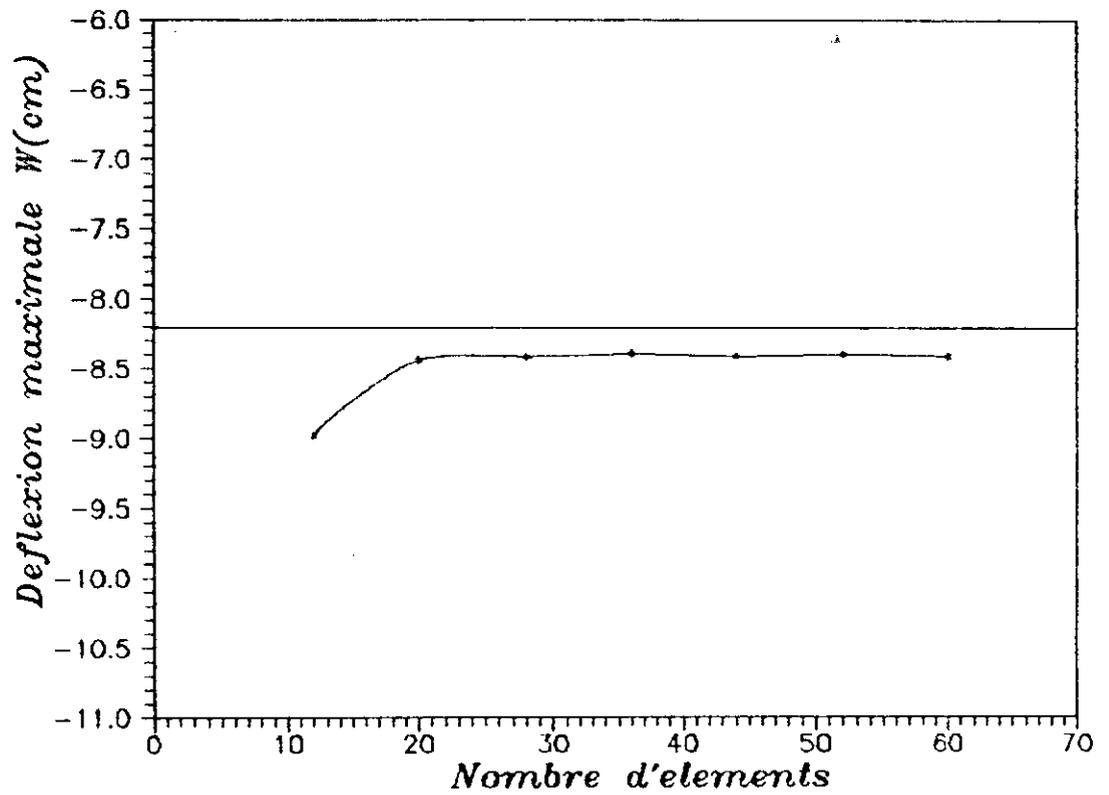
RESUME : UTILISATION D'UN ELEMENT DE FRONTIERE CONSTANT
POUR L'ETUDE D'UNE PLAQUE CARREE SIMPLEMENT
APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR , SOUMISE
A UN CHARGEMENT TRANSVERSAL ET UNIFORME.

I- CONVERGENCE :

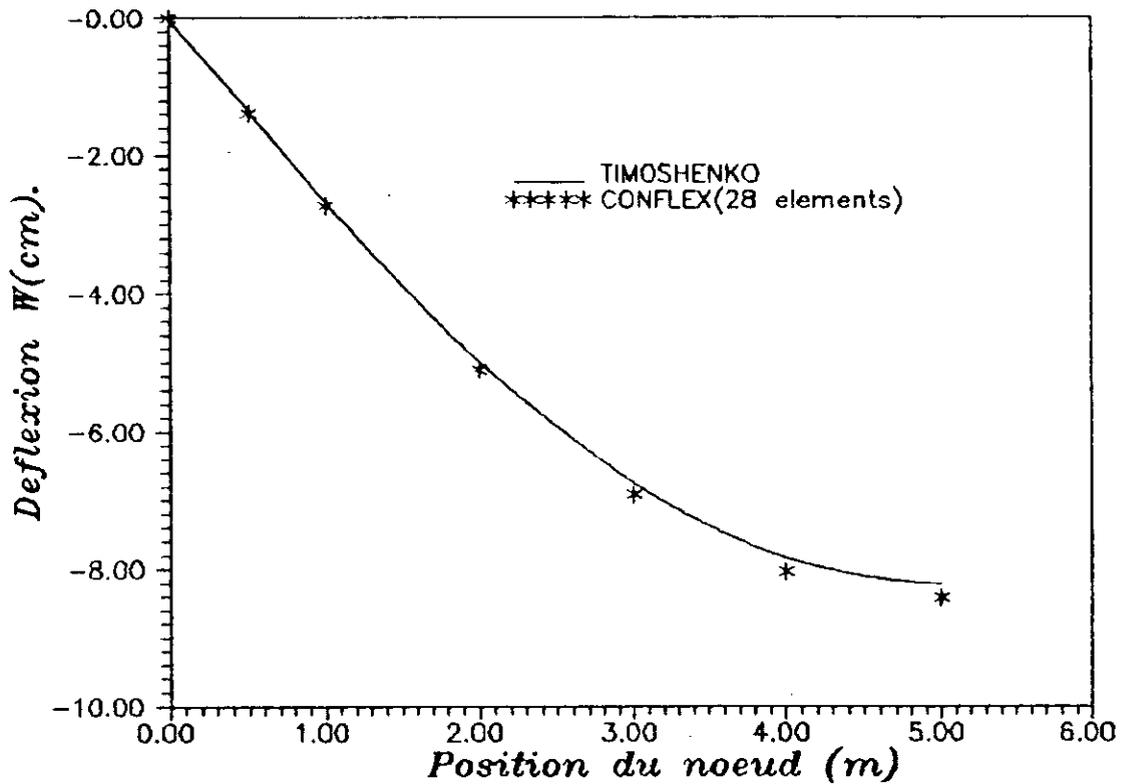
- *) DEFLEXION MAXIMALE
- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) ROTATION NORMALE

II-COURBES COMPARATIVES :

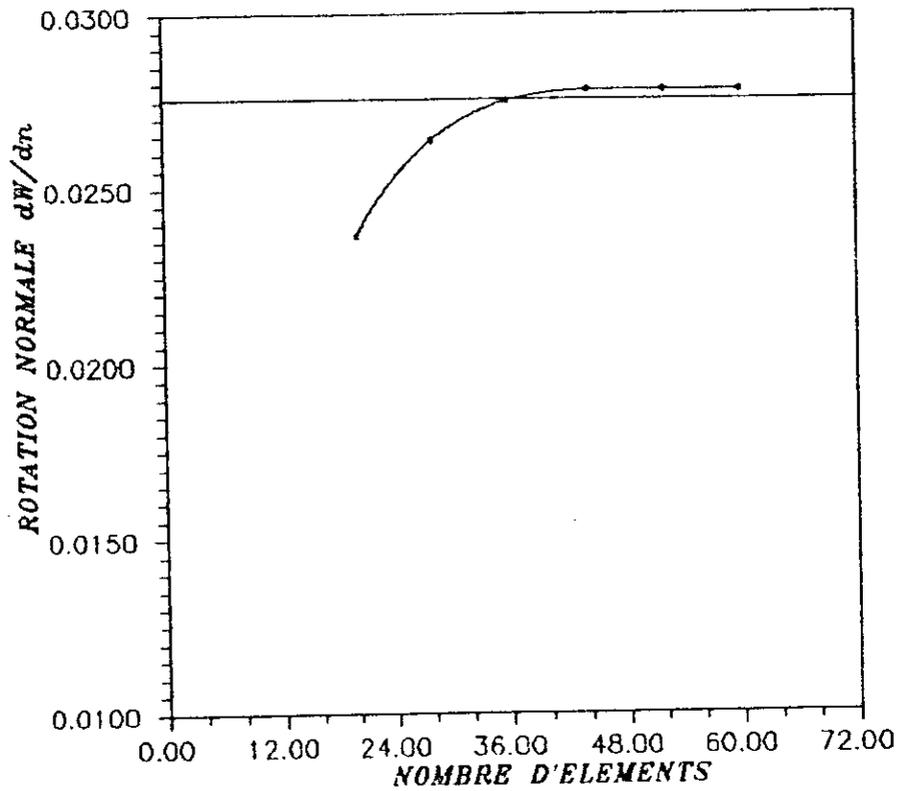
- *) DEFLEXION MAXIMALE
- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) ROTATION NORMALE



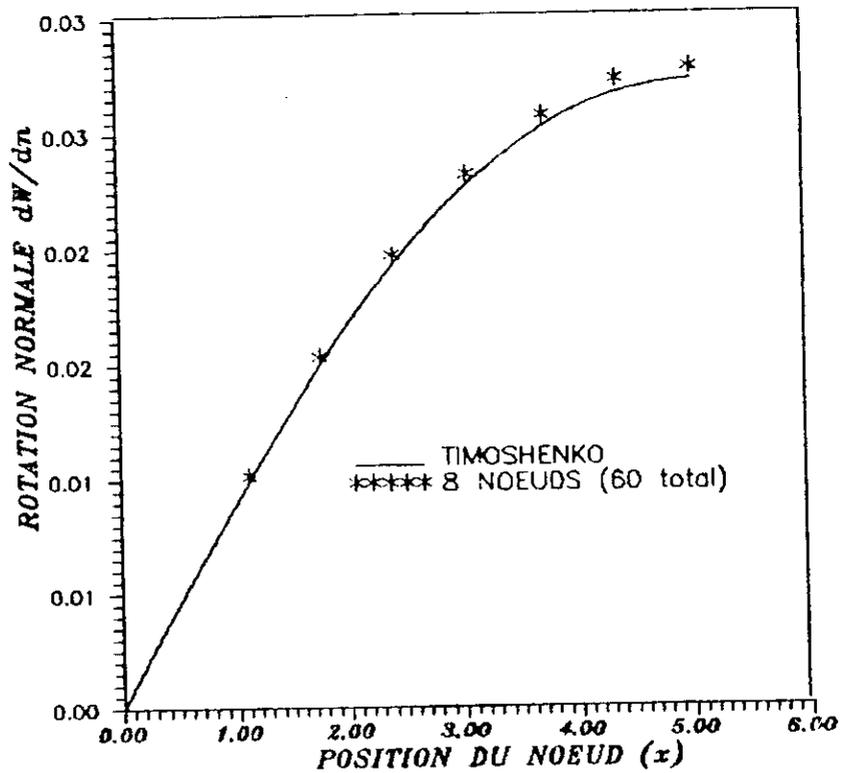
Courbe de convergence de la deflexion maximale d'une plaque carree uniformement chargee et simplement appuyee sur tout son pourtour. (BEM: element constant), (Point A).



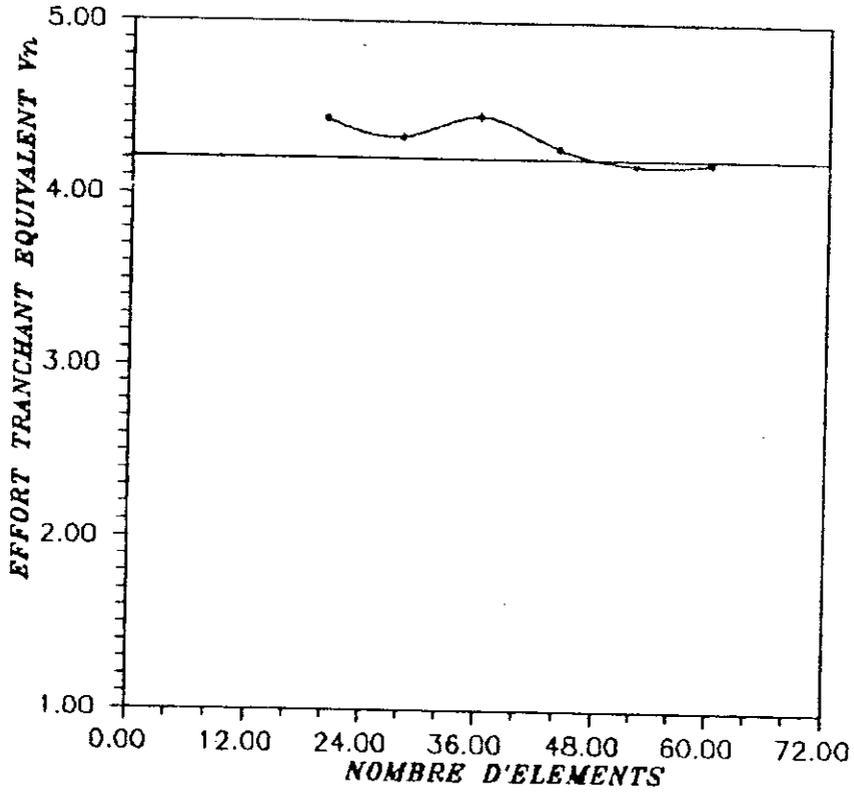
Courbe de deflexion des points interieurs d'une plaque carree uniformement chargee et simplement appuyee sur tout son pourtour, (BEM: element constant).



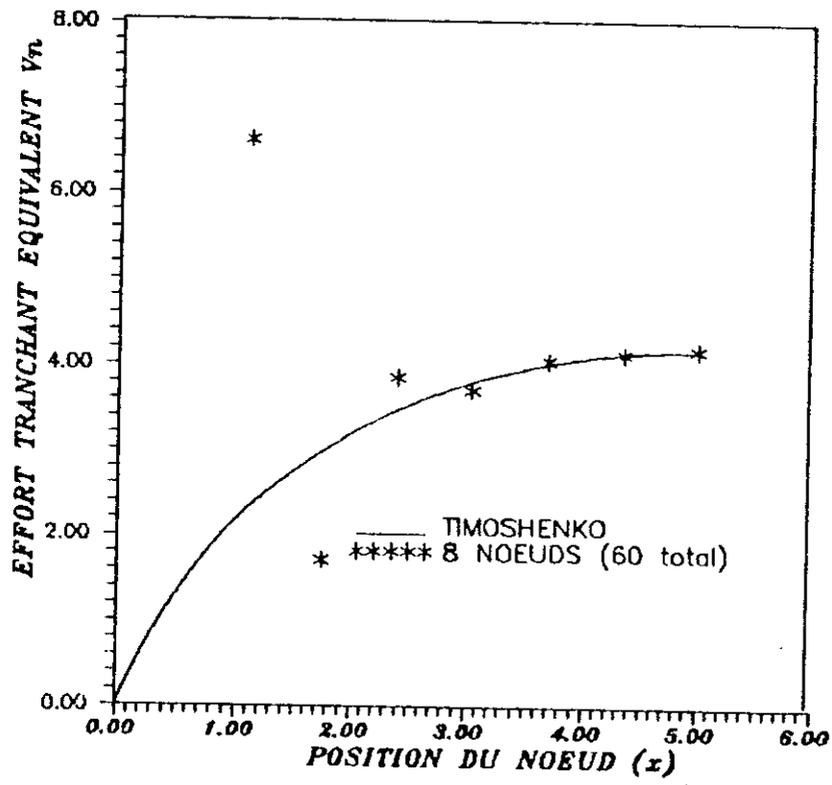
Courbe de convergence de la rotation normale d'une plaque carrée uniformément chargée et simplement appuyée sur tout son contour. (BEM : élément constant), (Point B).



ROTATION NORMALE SUR LA MOITIE D'UN CÔTÉ D'UNE PLAQUE CARRÉE UNIFORMÉMENT CHARGÉE ET SIMPLEMENT APPUYÉE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: élément constant).



Courbe de convergence de l'effort tranchant equivalent d'une plaque carree uniformement chargee et simplement appuyee sur tout son contour. (BEM : element constant) .(Point B)



EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT SUR LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: element constant).

APPLICATION : 3

PROGRAMME : LINFLEX

METHODE : METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

RESUME : UTILISATION D'UN ELEMENT DE FRONTIERE LINEAIRE
POUR L'ETUDE D'UNE PLAQUE CARREE ENCASTREE SUR
TOUT SON CONTOUR , SOUMISE A UN CHARGEMENT
TRANSVERSAL ET UNIFORME.

I- CONVERGENCE :

- *) DEFLEXION MAXIMALE
- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) MOMENT NORMAL

II-COURBES COMPARATIVES :

- *)EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *)MOMENT NORMAL

DONNEES :

$a = b = 10\text{m}$

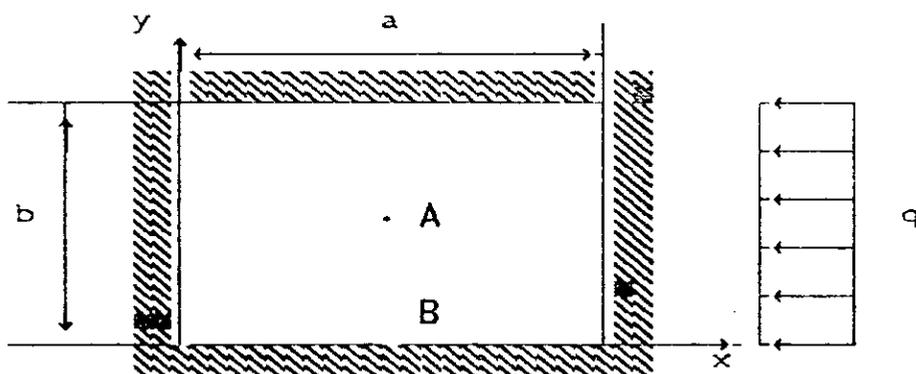
$q = 1 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

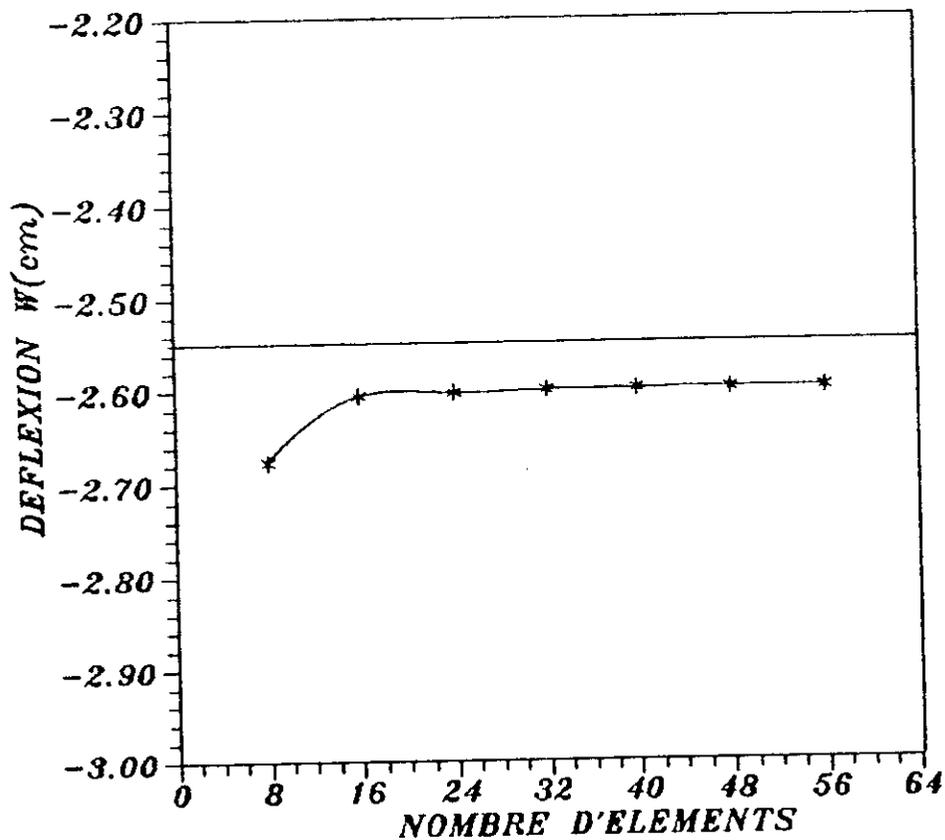
$h = 0.3\text{m}$

$D = 495.4 \text{ MN.m}$

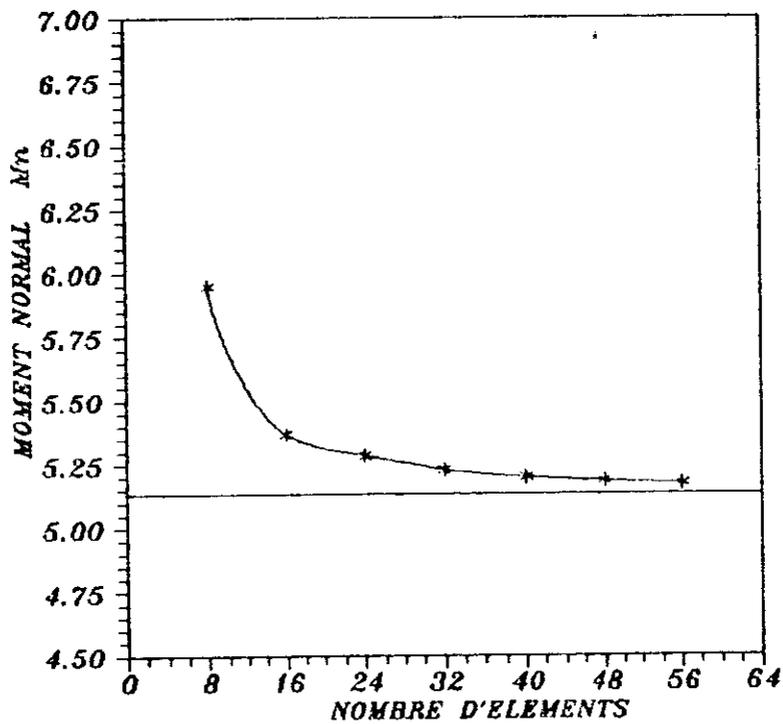
$E = 2. \text{E}+5 \text{ MPa}$



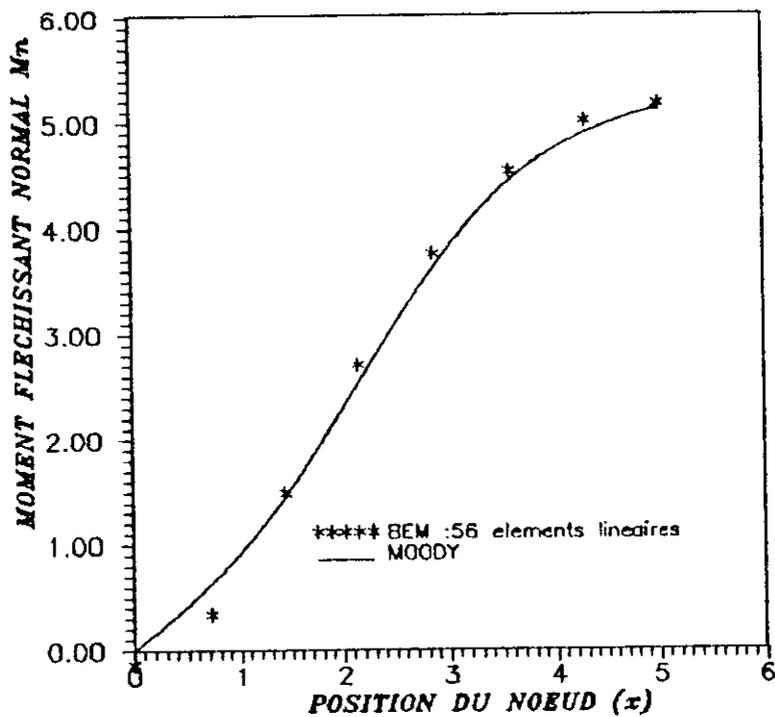
Nombre d'élément	w_{\max} (A)	$\Delta\%$	M_n (B)	$\Delta\%$	V_n (B)	$\Delta\%$
8	-2.6765	5.04	5.9502	16	5.5371	25.8
16	-2.6055	2.26	5.3689	4.66	4.5622	3.69
24	-2.6028	2.15	5.2849	3.02	4.4446	2.38
32	-2.6002	2.05	5.2284	1.9	4.4847	1.9
40	-2.5994	2.02	5.2002	1.37	4.4377	0.86
48	-2.5992	2.01	5.1844	1.06	4.4369	0.64
56	-2.5992	2.01	5.1746	0.87	4.4276	0.63
Solutions Moody	-2.548		5.13		4.4	



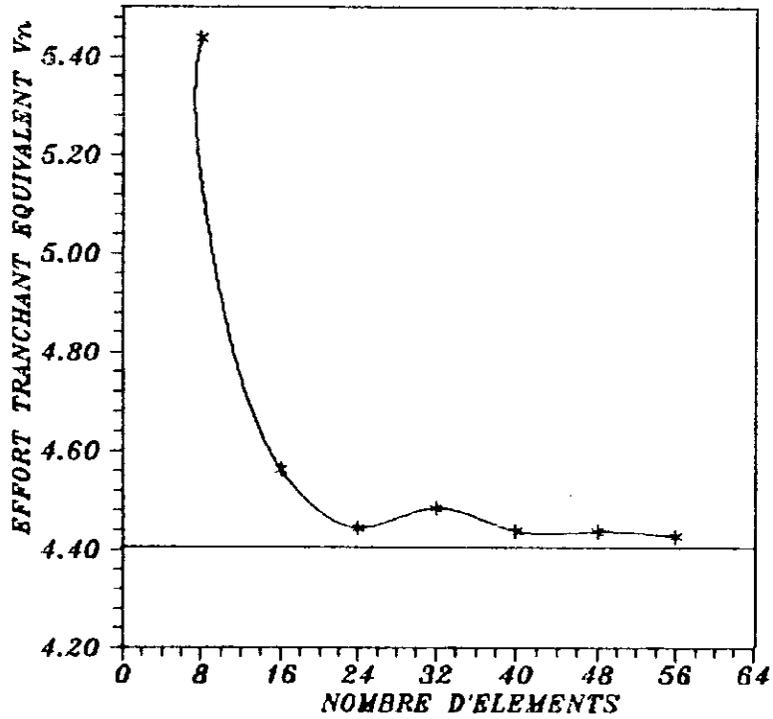
COURBE DE CONVERGENCE DE LA DEFLEXION MAXIMALE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET ENCASTREE SUR TOUT SON CONTOUR (BEM: element lineaire) , (Point A)



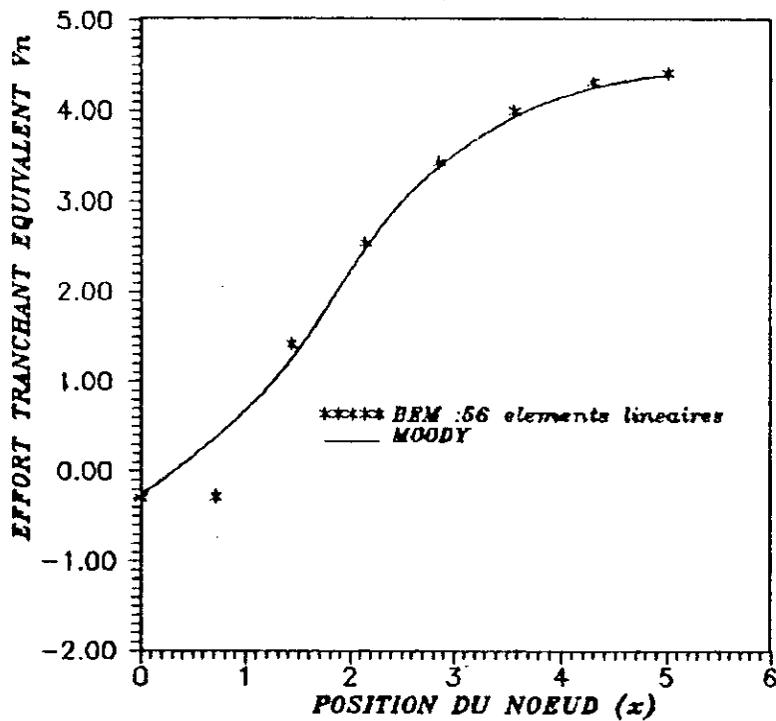
COURBE DE CONVERGENCE DU MOMENT NORMAL D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET ENCASTREE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: element lineaire) , (Point B).



MOMENT FLECHISSANT NORMAL SUR LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET ENCASTREE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element lineaire)



COURBE DE CONVERGENCE DE L'EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET ENCASTRES SUR SON CONTOUR. (BEM: element lineaire) , (Point B).



EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT SUR LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET ENCASTREE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element lineaire)

APPLICATION : 4

PROGRAMME : LINFLEX

METHODE : METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

RESUME : UTILISATION D'UN ELEMENT DE FRONTIERE LINEAIRE
POUR L'ETUDE D'UNE PLAQUE CARREE SIMPLEMENT
APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR, SOUMISE A
UN CHARGEMENT TRANSVERSAL ET UNIFORME, SANS
CONSIDERER LES FORCES DE KIRCHOFF.

I- CONVERGENCE :

- *) DEFLEXION MAXIMALE
- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) ROTATION NORMALE

II-COURBES COMPARATIVES :

- *) DEFLEXION MAXIMALE
- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) ROTATION NORMALE

DONNEES :

$a = b = 10\text{m}$

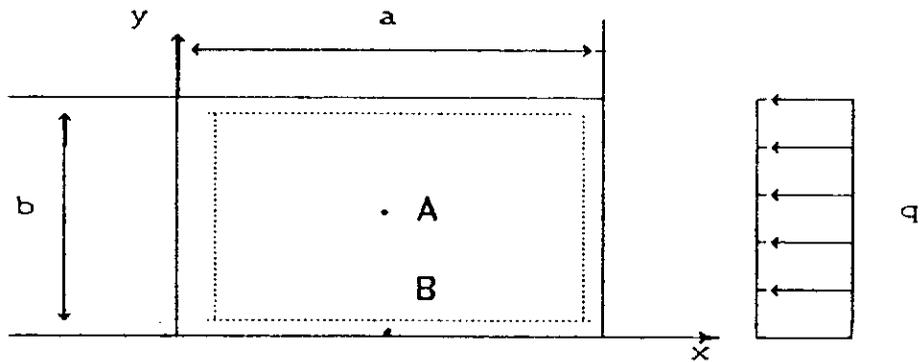
$q = 1 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

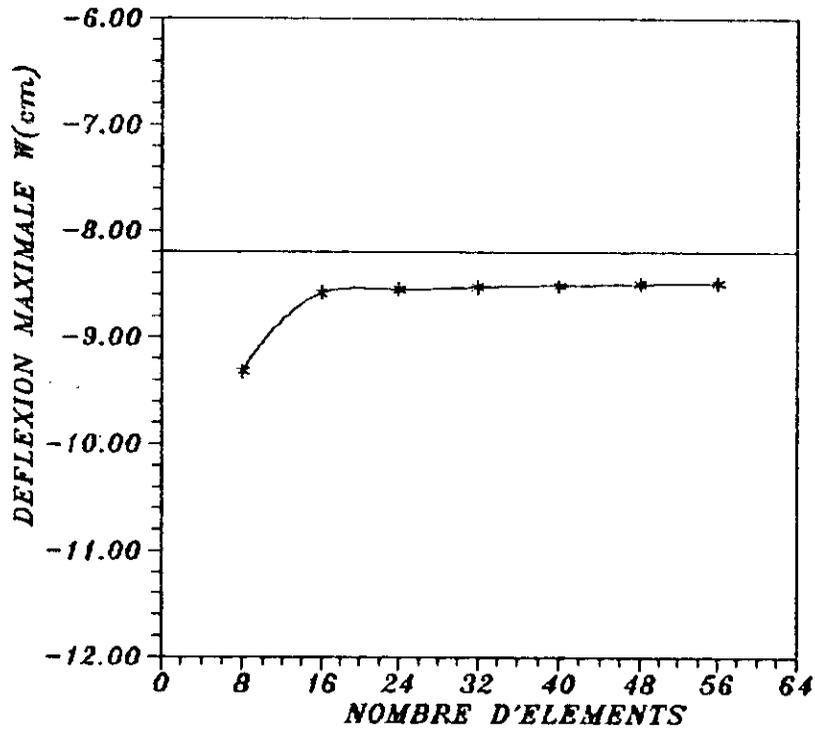
$h = 0.3\text{m}$

$D = 495.4 \text{ MN.m}$

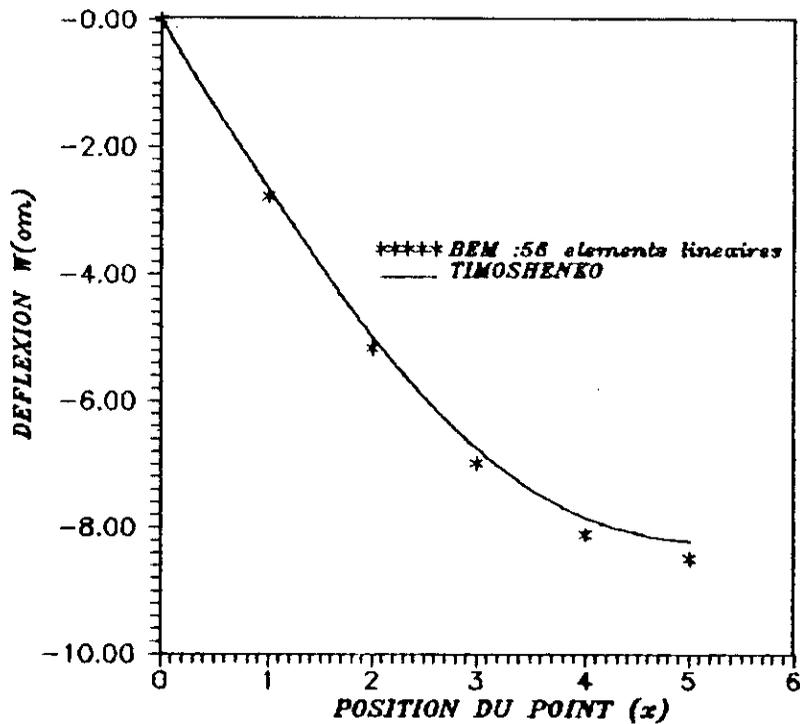
$E = 2.E+5 \text{ MPa}$



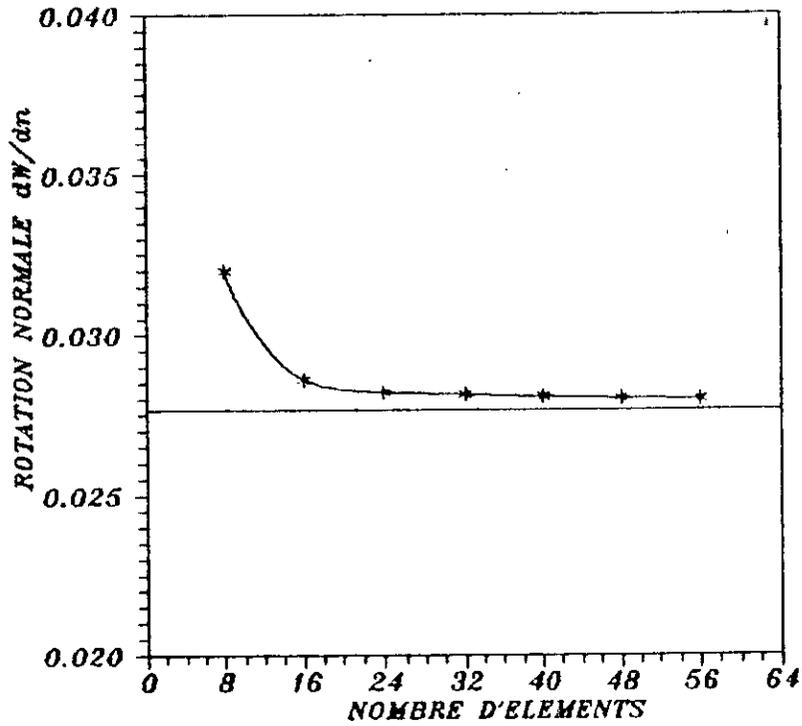
Nombre d'élément	w_{\max} (A)	$\Delta\%$	θ_n (B)	$\Delta\%$	V_n (B)	$\Delta\%$
8	-9.3234	6.55	0.03199	7.75	7.3469	82.6
16	-8.5838	4.49	0.002860	3.76	3.1466	24.7
24	-8.5499	4.08	0.02821	2.53	4.6909	12.2
32	-8.5267	3.8	0.02814	2.08	4.0018	4.27
40	-8.5098	3.6	0.02807	1.67	4.2716	2.19
48	-8.4974	3.44	0.02802	1.67	4.1604	0.48
56	-8.4876	3.32	0.02799	1.55	4.1999	0.48
Solutions Timoshenko	-8.215		0.02756		4.18	



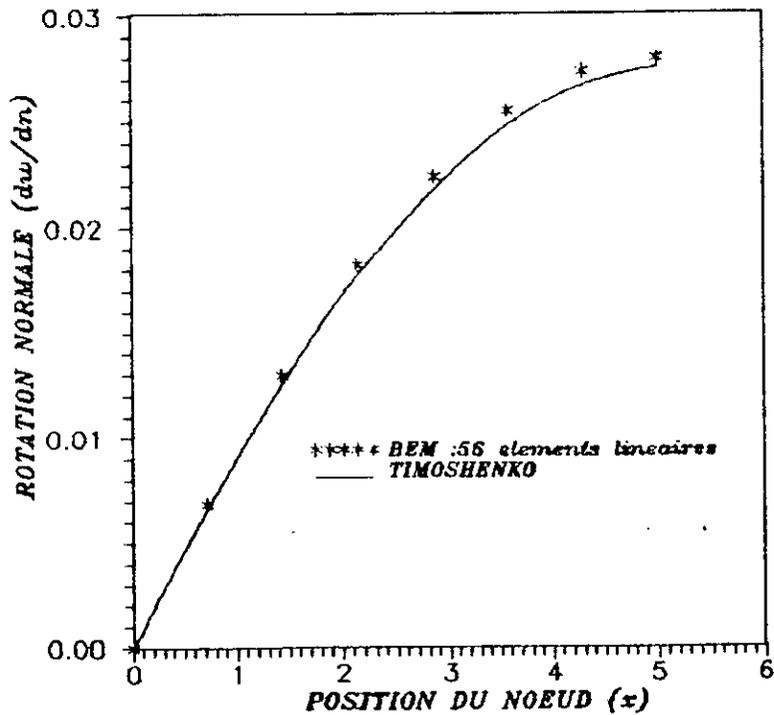
COURBE DE CONVERGENCE DE LA DEFLEXION MAXIMALE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: element lineaire, sans considerer les forces de kirchoff) . (Point A).



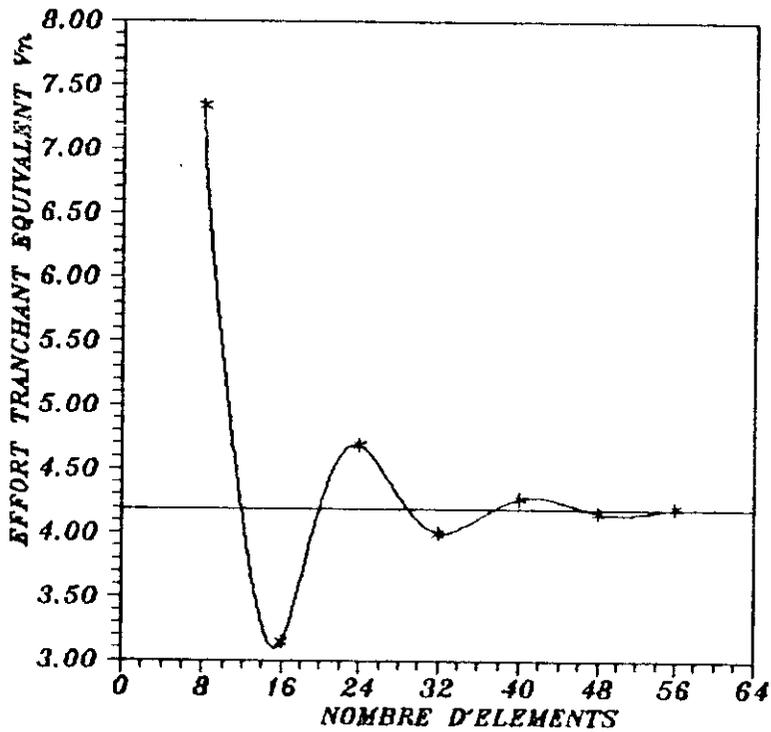
COURBE DE LA DEFLEXION DES POINTS INTERIEURS D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element lineaire, sans considerer les forces de KIRCHOFF)



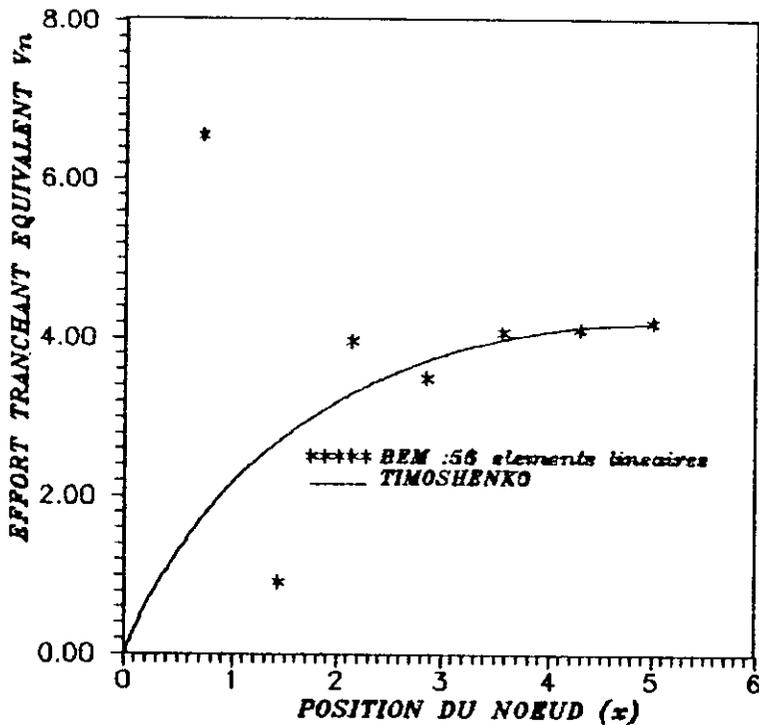
COURBE DE CONVERGENCE DE LA ROTATION NORMALE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: element lineaire, sans considerer les forces de KIRCHOFF). (Point B).



ROTATION NORMALE DE LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element lineaire, sans considerer les forces de KIRCHOFF)



COURBE DE CONVERGENCE DE L'EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: element lineaire, sans considerer les forces de KIRCHOFF), (Point B).



EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT SUR LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element lineaire, sans considerer les forces de KIRCHOFF)

APPLICATION : 5

PROGRAMME : LINFLEX

METHODE : METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

RESUME : UTILISATION D'UN ELEMENT DE FRONTIERE LINEAIRE
POUR L'ETUDE D'UNE PLAQUE CARREE SIMPLEMENT
APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR , SOUMISE A
UN CHARGEMENT TRANSVERSAL ET UNIFORME , EN
TENANT COMPTE DES FORCES DE KIRCHOFF.

I- CONVERGENCE :

- *) DEFLEXION MAXIMALE
- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) ROTATION NORMALE

II- COURBES COMPARATIVES :

- *) DEFLEXION MAXIMALE
- *) EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT
- *) ROTATION NORMALE

III- FORCE? DE KIRCHOFF :

- *) LA CONVERGENCE

DONNEES :

$$a = b = 10\text{m}$$

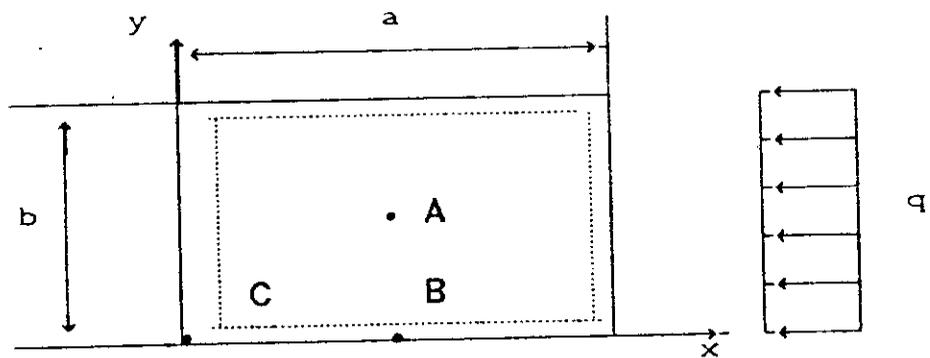
$$q = 1 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

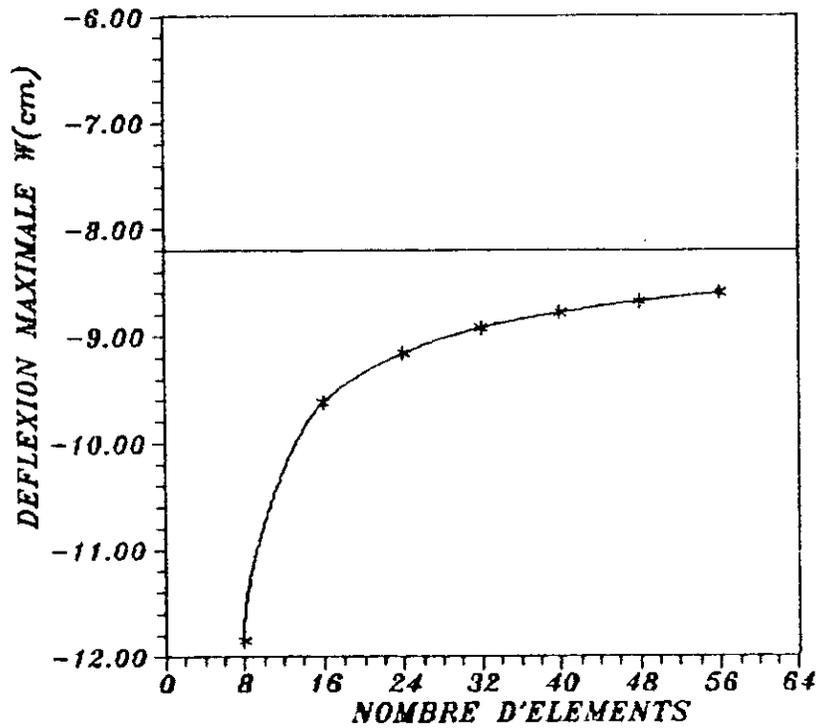
$$h = 0.3\text{m}$$

$$D = 495.4 \text{ MN.m}$$

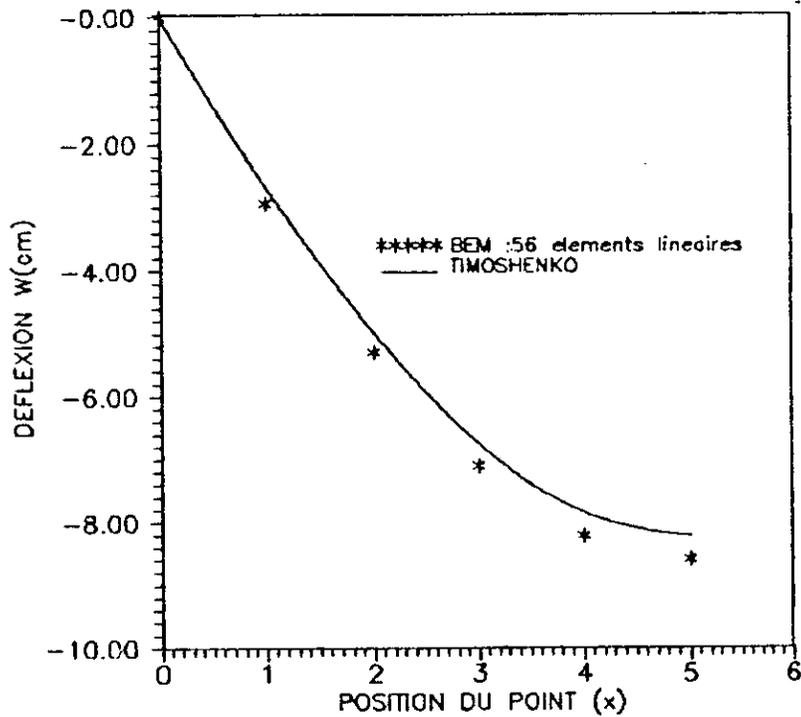
$$E = 2. \text{E}+5 \text{ MPa}$$



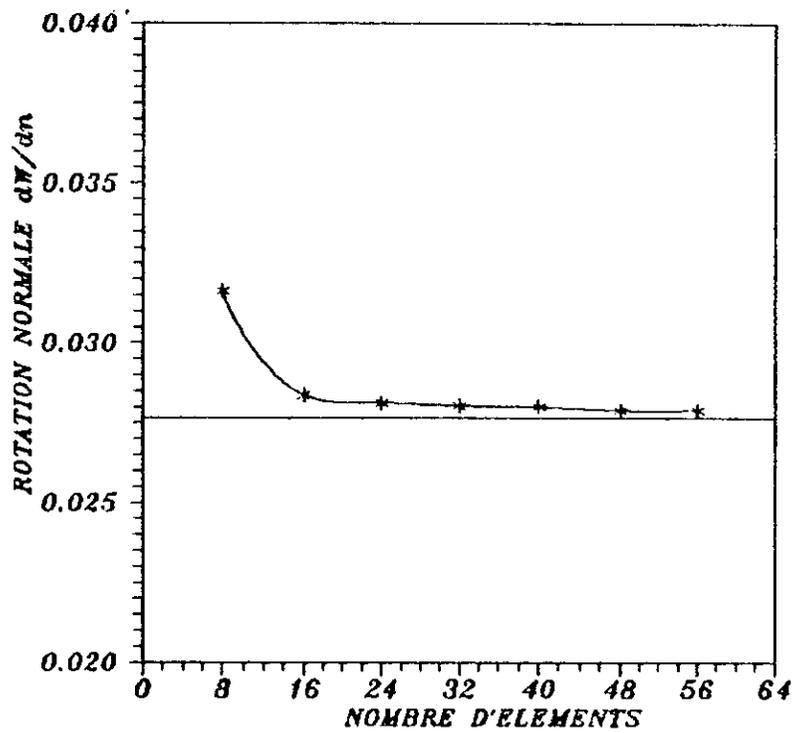
Nombre d'élément	$w_{\max} (A)$	$\Delta\%$	$\theta_n (B)$	$\Delta\%$	$V_n (B)$	$\Delta\%$
8	-11.8502	44.3	0.03163	14.7	7.0307	68.2
16	-9.6185	17.1	0.02836	2.89	3.6780	12
24	-9.1569	11.5	0.02812	2.01	4.3787	4.75
32	-8.9208	8.68	0.02804	1.73	4.1325	0.99
40	-8.7801	6.88	0.02797	1.59	4.2052	0.6
48	-8.6755	5.61	0.02797	1.49	4.1835	0.08
56	-8.5954	4.63	0.02795	1.42	4.1835	0.08
Solutions Timoshenko	-8.215		0.02756		4.18	



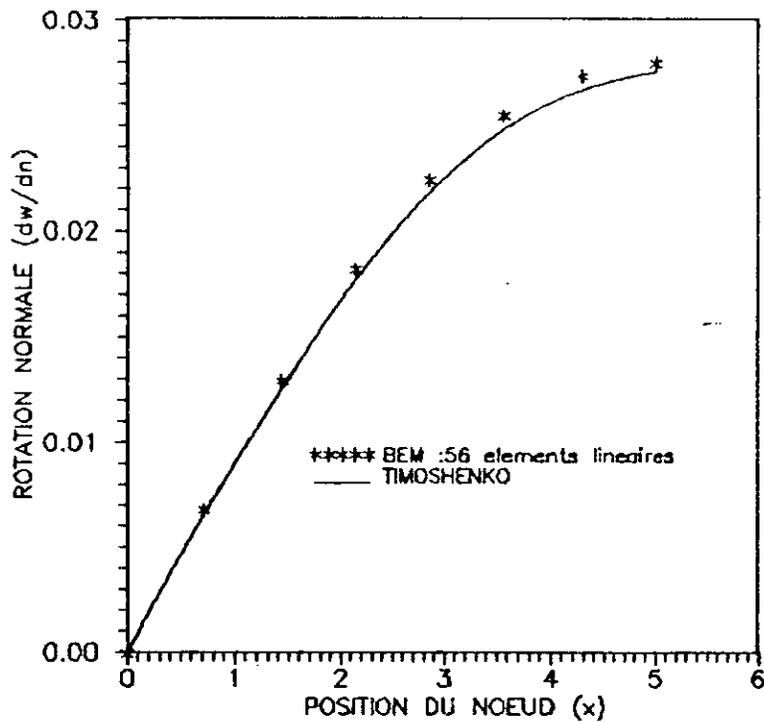
COURBE DE CONVERGENCE DE LA DEFLEXION MAXIMALE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: element lineaire, en tenant compte des forces de KIRCHOFF), (Point A).



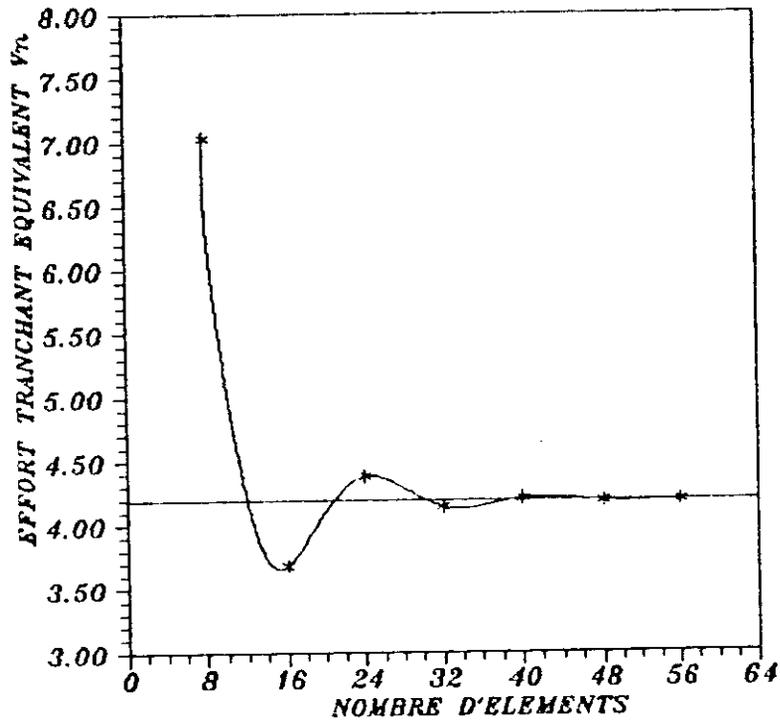
COURBE DE LA DEFLEXION DES POINTS INTERIEURS D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element lineaire, en tenant compte des forces de KIRCHOFF)



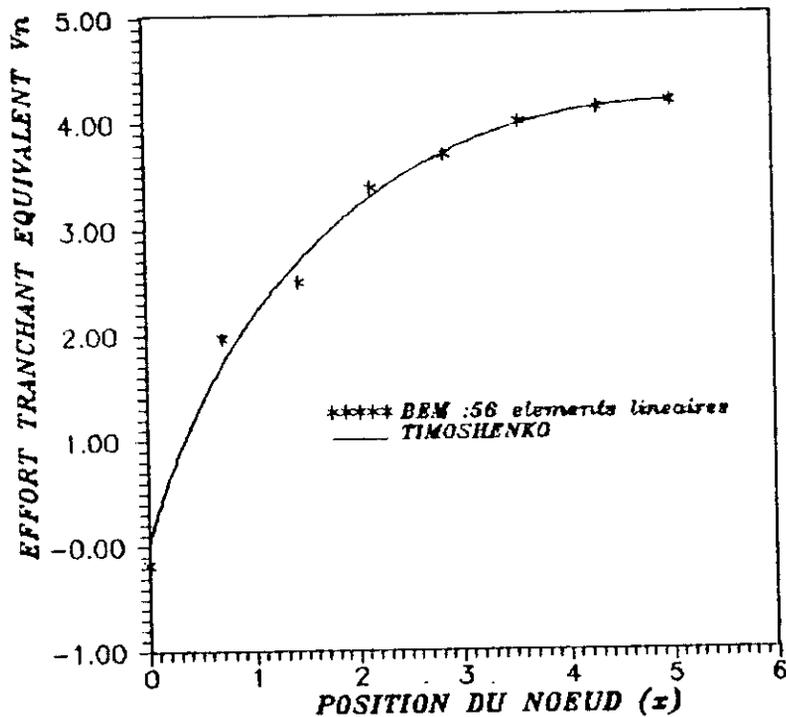
COURBE DE CONVERGENCE DE LA ROTATION NORMALE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: element lineaire, en tenant compte des forces de KIRCHOFF), (Point B).



ROTATION NORMALE DE LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element lineaire, en tenant compte des forces KIRCHOFF)



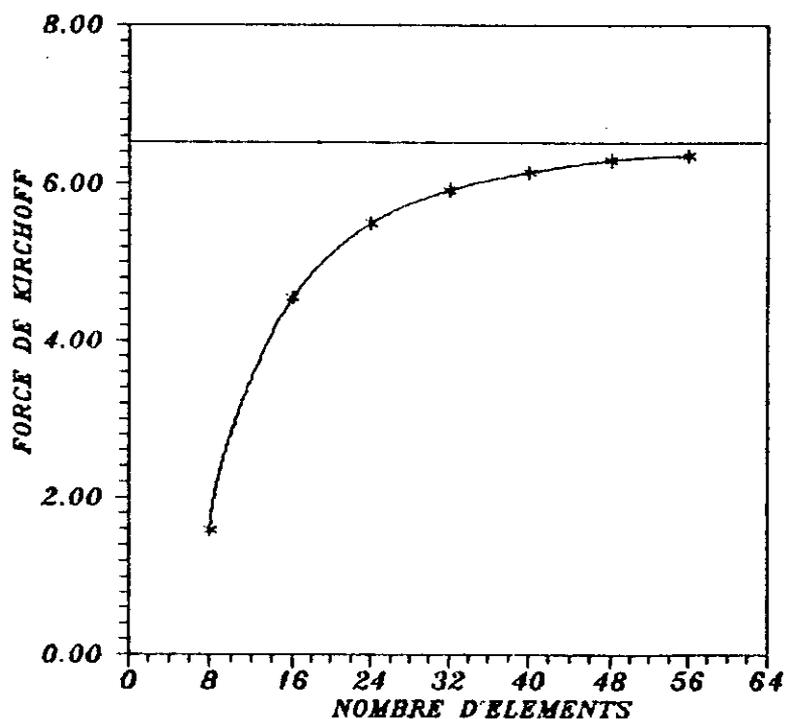
COURBE DE CONVERGENCE DE L'EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM: element linéaire, en tenant compte des forces de KIRCHOFF), (Point B).



EFFORT TRANCHANT EQUIVALENT SUR LA MOITIE D'UN COTE D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR. (BEM : element linéaire, en tenant compte des forces de KIRCHOFF)

TEST DE CONVERGENCE DE LA FORCE DE KIRCHOFF

Nombre d'éléments	Réaction	$\Delta \%$
8	1,585	75,62
16	4,548	30,03
24	5,500	15,38
32	5,920	08,92
40	6,145	05,46
48	6,276	03,44
56	6,361	02,15
Solution de Timonshenko	6,500	



COURBE DE CONVERGENCE DE LA FORCE DE KIRCHOFF (au niveau des coins) D'UNE PLAQUE CARREE UNIFORMEMENT CHARGEE ET SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUT SON CONTOUR.
(BEM: element lineaire) , (Point C).

APPLICATION : 6

Introduction : Pour appliquer la méthode des équations intégrales aux plaques raidies, il nous a fallu associer à cette plaque un modèle fictive équivalent d'une plaque isotrope avec un coefficient de rigidité flexionnel équivalent :

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} + \frac{E I}{S}$$

Programme : l'inflex

Méthode : méthode des équations intégrales aux frontières

Resume : utilisation d'un élément de frontière linéaire pour l'étude d'une plaque raidie homogénéisée carrée encastree sur tout son contour, soumise à un chargement transversal et uniforme.

Courbe comparatives :

comparaison de la déflexion (pour $x = \frac{a}{2}$, y varie) par les méthodes :

- * Assemblage : (M. E. F)
- * Homogénéisation (M. E. F)
- * M. E. I. F

DONNEES :

$$a = b = 20,18 \text{ cm}$$

$$q = 1 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E = 2,116 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

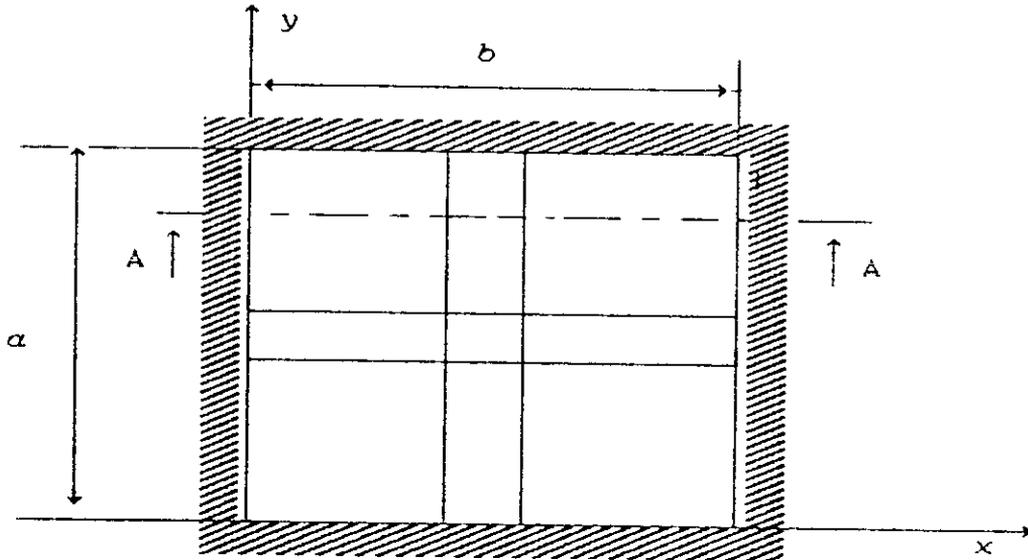
$$I = 5,96 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^4$$

$$D = 0,5582 \cdot 10^4 \text{ Kg.cm}$$

$$e = 0$$

$$s = 20,18 \text{ cm}$$

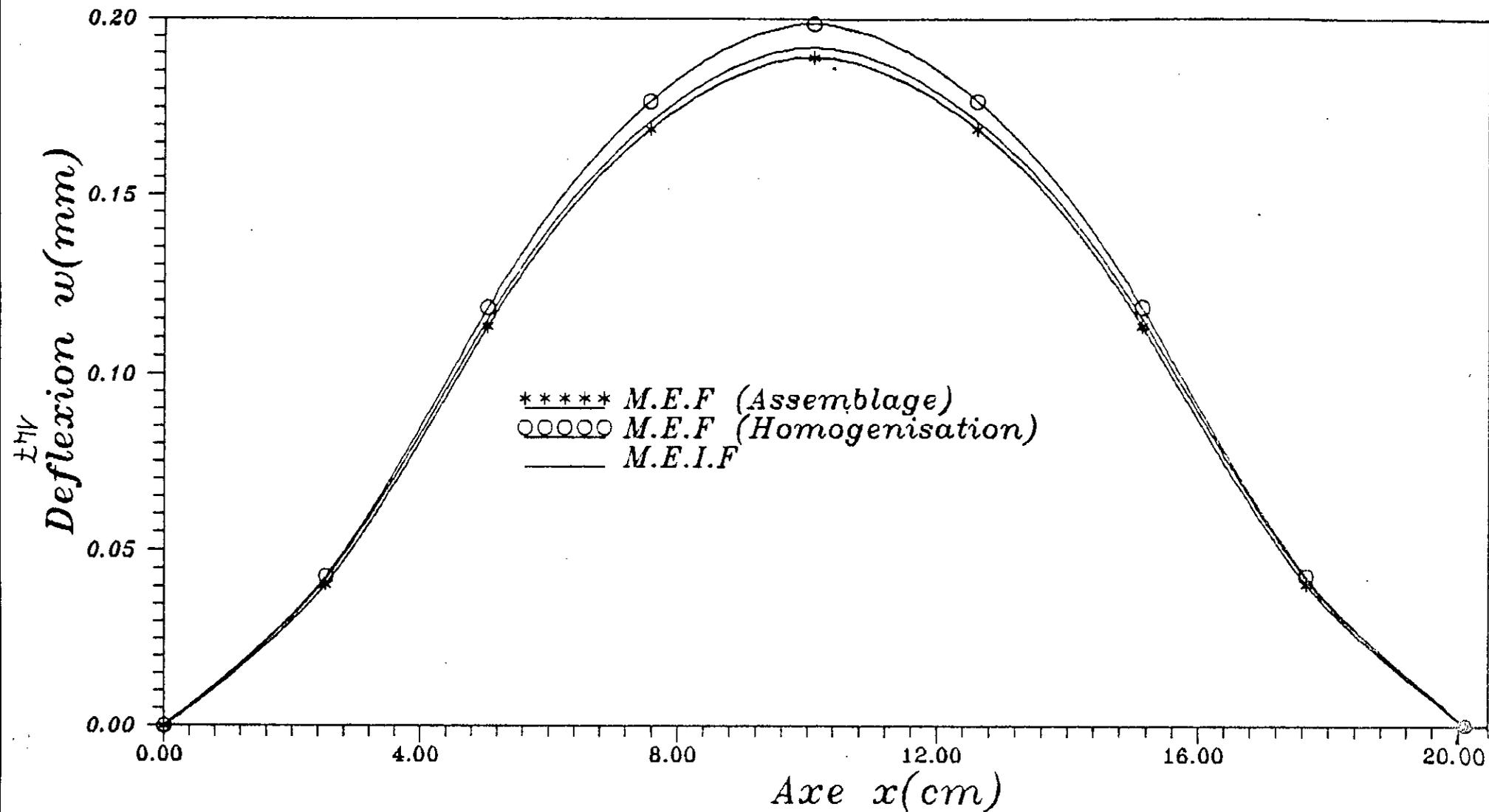
$$t = 0,2817 \text{ cm}$$



TABLEAUX DES RESULTATS

w (mm) , $y = b/2$

x	MEF <i>homogénéisation</i>	MEF <i>assemblage</i>	MEIF <i>homogénéisation</i>
0	0	0	0
$1/8 a$	0,042888	0,0406843	0,042249
$1/4 a$	0,118035	0,112956	0,114998
$3/8 a$	0,176915	0,16900	0,171294
$1/2 a$	0,198440	0,189024	0,191749



Courbes comparatives de la variation de la deflexion suivant l'axe x pour $y=b/2$.

INTERPRETATION DES RESULTATS:

Les cinq applications qu'on a pris en compte dans notre étude, vont nous permettre de bien voir le comportement des variables sur les frontières, ainsi on peut repérer le degré de puissance de la méthode des équations intégrales aux frontières.

La structure prise en considération est toujours une plaque carrée de dimensions bien définie, soumise à un chargement uniforme appliqué sur son plan supérieur.

Les résultats de ces applications, obtenus par les programmes CONFLEX et LINFLEX, vont être interprétés comme suit: Pour les deux premières applications, la frontière est discrétisée par des éléments constants de même longueur (un noeud au milieu de chaque élément). En faisant varier le maillage, on a obtenue des courbes de convergence dont l'allure varie d'une variable à une autre, on peut expliquer cela par la dépendance qu'il y a entre ces variables, puisque l'une s'obtient à partir de l'autre par différentiation; mais pour chaque cas on arrive toujours à une bonne convergence. En effet pour un maillage de 60 éléments constants (pour un point situé au milieu du bord de la plaque) l'erreur varie entre 0,21 % et 1,31 % , à l'exception de la déflexion au centre de la plaque où l'erreur est quasiment constante , environ 2 % .

Pour les courbes comparatives, les résultats obtenus sont d'une bonne précision, comme on le constate sur les graphes, à l'exception de l'effort tranchant qui pour la plaque simplement appuyée où le moment fléchissant et la déflexion sont nuls, les résultats au niveau des coins sont erronés. On peut expliquer cela par le fait de la présence d'une réaction concentrée prescrite par la théorie classique des plaques, au niveau des coins. Cette réaction appelée force de Kirchoff n'a pas été prise en compte par le programme CONFLEX pour une raison de simplification .

Dans les trois dernières applications, les variables sur la frontière, sont interpolées linéairement d'où une convergence plus rapide et plus nette .

Pour les deux dernières applications, où la plaque est simplement appuyée sur tout son contour; on constate que dans la première, où la force de Kirchoff n'est pas prise en compte, les résultats sont légèrement meilleurs que ceux obtenus avec CONFLEX, alors que pour la deuxième, où on a tenu compte de la force de Kirchoff, on remarque qu'au niveau des coins l'effort tranchant s'améliore nettement ; effectivement avec un maillage de 56 éléments linéaires l'erreur est de 0,1 % pour V_n , et pour la force de Kirchoff au coins, elle est de 2,5 %.

Après cette étude, on peut dire qu'on peut se contenter de l'élément constant pour l'étude du comportement de certaines plaques soumises à la flexion, telle que la plaque encadrée; alors qu'il est bon d'étudier les plaques appuyées simplement par l'élément linéaire.

En ce qui concerne la 6^{ème} application, on remarque que la courbe obtenue par la M.E.I.F est relativement plus proche de celle obtenue par la technique d'assemblage (M.E.F), que celle obtenue par la technique d'homogénéisation (M.E.F), cela est dû au fait que le coefficient de rigidité flexionnelle de la plaque isotrope fictive associée, s'adapte mieux à l'exemple considéré.

Enfin on dira que les deux programmes, basés sur une formulation intégrale, ont donné des résultats satisfaisants surtout au niveau des frontières, ceci est dû principalement à la puissance de cette formulation.

CONCLUSION

CONCLUSION

Les plaques minces raidies sujettes seulement à des petites flèches, représentent une classe extrêmement importante de problèmes, qui ont un grand nombre d'applications pratiques. Notre but est de présenter quelques formulations numériques, adaptées aux plaques raidies, économiques à l'usage, d'utilisation aisée, rapide et donnant des résultats précis.

Ainsi on a présenté en premier lieu, une méthode simple et rapide qui consiste à étudier le problème des plaques raidies par assimilation à des plaques orthotropes en utilisant des rigidités fictives de torsion et de flexion de cette plaque équivalente à celle de la plaque raidie réelle, cela nous a conduit à appliquer la méthode des éléments finis systématiquement, en établissant seulement la matrice de rigidité orthotrope d'un élément rectangulaire à quatre noeuds (élément conforme) semi-analytiquement. En second lieu, pour bien définir le comportement réel de la structure en tenant compte de l'interaction plaque-raidisateurs, il nous a fallu suivre la démarche naturelle de subdiviser tout le système en leurs composants élémentaires. Ainsi, on a étudié les plaques raidies par la méthode des éléments finis en approximant le comportement réel par l'assemblage des deux comportements respectifs, des plaques et des poutres, et en introduisant l'influence mutuelle entre ces deux éléments.

Vu, l'importance pratique des plaques raidies sujettes notamment dans les superstructures, l'application de la méthode des éléments finis dans de telles structures exige de grandes capacités de mémoires des ordinateurs et la résolution de grands systèmes d'équations algébriques. Cela nous a mené à chercher une

autre méthode très efficace dans ce genre de problèmes qui est la méthode des équations intégrales aux frontières, laquelle à un processus de discrétisation ne concernant que la frontière de la plaque raidie, ceci grâce à une intégration par partie. Cela réduit le nombre des inconnues par rapport à la méthode des éléments finis, ce qui constitue un avantage économique important.

La difficulté qui réside dans l'application de la méthode des équations intégrales aux frontières aux problèmes des plaques raidies, nous a conduit à suivre les étapes suivantes :

En premier, nous avons étudié le comportement membranaire théoriquement et numériquement par cette dernière méthode.

En second, nous avons analysé les plaques isotropes en flexion en élaborant deux programmes, utilisant la méthode des équations intégrales aux frontières dont l'un exploite l'élément constant et l'autre l'élément linéaire.

En dernier, vu la méthode d'homogénéisation qui a été validée par la méthode des éléments finis, nous l'avons aussi appliquée à la méthode des équations intégrales, mais dans ce cas, on a associé à cette plaque raidie un modèle fictif équivalent, d'une plaque isotrope, et non par un modèle orthotrope. Ce choix est obligatoire si on ne veut pas entrer dans d'autres considérations complexes des plaques orthotropes.

Enfin, on peut conclure par :

* La méthode des éléments finis s'applique plus facilement, aux problèmes complexes de structures, que la méthode des équations intégrales aux frontières, qui exige la connaissance de la solution singulière de chaque problème particulier, qui est très délicate à obtenir.

* La méthode des équations intégrales se prête bien pour dimensionner les structures de grande dimension.

* La répartition transversale des charges dans les constructions planes dépend de l'efficacité de la liaison des éléments portants principaux. Un plus faible pourcentage du chargement total est repris par l'élément directement chargé.

* Une construction soumise à l'action de lourdes charges est d'autant plus économique à l'aide des éléments non sollicités, directement apportés à ceux chargés, qu'à l'aide des éléments directement chargés .

* Afin de pouvoir choisir une méthode par rapport à une autre, l'ingénieur pourrait être aidé par son intuition et son sens physique de réalités . C'est à travers un savant dosage de ces connaissances, que les méthodes numériques peuvent être utilisées avec le maximum d'efficacité .

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. AISSAOUI, M. BENALLEGUE , " *Analyse fléxionnelle des plaques multicouches par éléments finis conformes* ", Projet de fin d'étude proposé et dirigé par Pr M. TILIOUINE et M. DEMIDEM, E.N.P. (1988)
- [2] P.K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD; " *Boundary element methods in engineering science* "; Mc Graw-Hill ,(1981)
- [3] R. BARES, C. MASSONNET; " *Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon-Massonnet-Bares* " ; SNITL, DUNOD, (1966)
- [4] K. J. BATHE ; " *Finite element procedures in engineering analysis* " ; Prentice-Hall ,(1982)
- [5] M. K. BARRAH; *Notes de cours de la mécanique du milieu continue*, E.N.P
- [6] A. A. BENAZOUZ, M. HADID " *Méthode des éléments finis* ", Mini Projet Proposé par M. K. BERRAH ,E.N.P ,(1991)
- [7] H. G. BRADY;" *A direct formulation of Boundary element of stress analysis for complete plane strain* "; Int. J. Rock. Min. sci. & Geomech. Abstr. Vol.16, pp 235 to 244 Pergamon press LTD 1979
- [8] C. A. BREBBIA, J. DOMINGUEZ, " *Boundary elements an introductory course* " ,MC Graw-Hill Book Company, (1989)
- [9] R. BUTTERFIELD, DSc. DIC. CEng. MICE , MIMStructE and B. FATAMI-ARDAKANI , BSc. " *The application of B.E.M to problems of elastically supported thin plates* ", Departement of Civil engineering, The University, Southampton, U.K.
- [10] R. D. COOK, D. S. MALKUS, M. E. PLESHA " *Concepts and applications of finite element analysis* "; John Wiley & Sons (1989).

- [11] A. J. DAVIES ; " *The finite element methode : A first approach*", Clarendon Press, Oxford, (1980)
- [12] M. DEMIDEM; *Notes de cours de calcule des structures*, E. N. P
- [13] G. DHATT, G. TOUZOT ; " *Une présentation de la méthode des éléments finis* "; Maloine. S. A. Editeur, paris, (1971)
- [14] C. DYKA, H. R. MILLWATER ;" *Formulation and integration of continous and discontinous quadratic Boundary elements for two dimensional potential and elostatics* "; Computers and structures. Vol 31, No 4, pp 495-504, (1989)
- [15] L. E. Elsgolc , " *Calculus of variations* ", Pergmon Press , (1961)
- [16] R. H. GALLAGHER ;" *Introduction aux éléments finis* "; Eyrolles, Paris, (1979)
- [17] J. F. IMBERT ; " *Analyse des structures par éléments finis*"; CEPAD ,(1984)
- [18] J. C. LACHAT, P. RAPIN, " *Méthode des équations intégrales sur le countour* ", T 7228, Techniques d'ingénieurs
- [19] MARTIN, HAROLD CLIFFORD ;" *Introduction to finite element analysis* ", Mc Graw-Hill ,(1973)
- [20] F. MERAGHNI , " *Analyse des plaques minces pliées par la méthode des éléments finis* ". Projet de fin d'étude proposé et dirigé par Pr M. TILIOUINE et M. DEMIDEM , E. N. P , (1989)
- [21] F. PARIS, S. DE LEON , " *Boundary element method applied to the analysis of thin plates* "Computers and structures Vol 25, No 2 pp 225-233, (1987)
- [22] SHEN PENG-CHENG, HUANGDADE, WANG ZONGMU " *Static, vibration and stability analysis of stiffned plates using B.Spline functions* "; Computers & structures Vol 27, No 1, pp 73-78, (1987)
- [23] O. RAHMANI, S. KEBDANI ;" *Introduction à la méthode des éléments finis*"; OPU

- [24] K. C. ROCKEY , H. R. EVANS, D. W. GRIFFITHS, D. A. NETHERCOT ;
" *Introduction à la méthode des éléments finis* "; Eyrolles ,
Paris, (1979)
- [25] I. H. SHEMS, C. L. DYM, " *energy and finite element methods in
structural mechanics* "; Hemisphere Publishing Corporation,
(1985)
- [26] MORRIS STERN " *A General Boundary integral formulation for
the numerical solution of plate bending problems* ";
Int. J. Solids structures, Vol 15, pp 769-782, (1979)
- [27] S. TIMONSHENKO, " *théorie de l'élasticité* " Librairie
polytechnique ch. Béranger, (1948)
- [28] S. TIMONSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER , " *Théorie des plaques et
des coques* "; Librairie polytechnique ch. Béranger, (1961)
- [29] K. W A SHIZU " *Variational methods in elasticity and
plasticity* ", Pergamon, New york, (1982)
- [30] O. C. ZIENKIEWICZ; " *The finite element methode in engineering
science* "; Mc Graw-Hill, London, (1971)