

17/97

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



D.E.R DE GENIE ELECTRIQUE & INFORMATIQUE

SPECIALITE : ELECTROTECHNIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

SIMPLIFICATION ET REDUCTION
DE MODELE DES SYSTEMES
COMPLEXES : APPLICATION DES
CERCLES DE GERSCHGORIN AU
MODELE DE LA MACHINE
ASYNCHRONE

Proposé & dirigé par :

M^r : O. TOUHAMI
M^r : R. IBTIOUEN

Etudié par :

M^r : A. MEZOUAR

PROMOTION : JUILLET 1997

E.N.P. 10, Avenue Hacén-Badi, EL-HARRACH, ALGER

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

D.E.R DE GENIE ELECTRIQUE & INFORMATIQUE

SPECIALITE : ELECTROTECHNIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

**SIMPLIFICATION ET REDUCTION
DE MODELE DES SYSTEMES
COMPLEXES : APPLICATION DES
CERCLES DE GERSCHGORIN AU
MODELE DE LA MACHINE
ASYNCHRONE**

Proposé & dirigé par :

M^r : O. TOUHAMI

M^r : R. IBTIOUEN

Etudié par :

M^r : A. MEZOUAR

PROMOTION : JUILLET 1997

E.N.P. 10, Avenue Hacén-Badi, EL-HARRACH, ALGER

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

Ma chère grand mère ;

Ma chère mère ;

Mon cher père ;

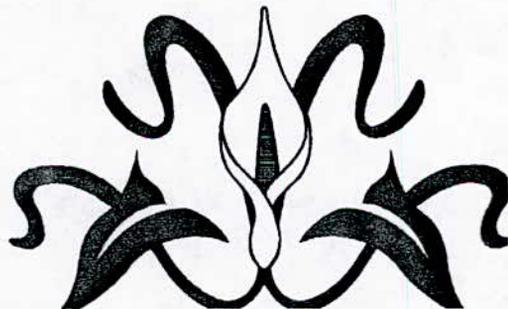
Toutes mes soeurs ;

Tous mes frères ;

Toute ma famille ;

tous mes amis ;

.....et à vous.



.... AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au département de Génie Electrique et Informatique de l'école nationale polytechnique, dirigé par Messieurs O. TOUHAMI et R. IBTIOUEN, Maîtres de conférences à L'ENP.

Je tiens, en tout premier lieu, à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à mes promoteurs pour l'aide qu'ils m'ont apporté pour réaliser ce travail.

Je tiens, également à remercier vivement Messieurs les membres de jury, qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à mes camarades M^{ed}. LARABI et Y. AMARA pour l'aide morale et matérielle qu'ils m'ont apporté pour effectuer ce travail.

Que les enseignants qui ont contribué à ma formation reçoivent ma gratitude.

Sans oublier d'exprimer mes remerciements à tous mes amis et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

المدسة الوطنفة المفعدة الففنفاف
BIBLIOTHEQUE — المففففة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

SOMMAIRE

NOTATIONS

INTRODUCTION GENERALE	01
-----------------------------	----

Chapitre -I- APERÇU SUR LES METHODES DE SIMPLIFICATION ET REDUCTION DE MODELES.

	Introduction	02
I.1.	Méthodes de réduction d'une fonction de transfert.....	02
I.2.	Méthodes de réduction d'une représentation d'état.....	02
I.2.1.	<i>Méthodes de symétrisation interne</i>	03
I.2.2.	<i>Méthodes d'agrégation</i>	05
I.3.	Méthodes de découplage des variables.....	07
I.3.1.	<i>Méthode des perturbations régulières</i>	07
I.3.2.	<i>Méthode de découplage par redondance</i>	08
I.3.3.	<i>Méthodes par bloc-triangularisation et bloc-diagonalisation</i>	10
I.4.	Conclusion.....	12

Chapitre -II- METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES

	Introduction.....	13
II.1.	Mise en évidence du paramètre ϵ	13
II.2.	Méthode des perturbations singulières pour les systèmes continus non-linéaires.....	15
II.3.	Méthode des perturbations singulières pour les systèmes continus linéaires.....	18
II.3.1.	<i>Calcul des modèles réduits lent et rapide</i>	19
II.3.2.	<i>Mise en œuvre sur un exemple</i>	20
II.4.	Conclusion.....	24

**Chapitre -III- APPLICATION DES CERCLES DE GERSCHGORIN POUR LE
DECOUPLAGE DES VARIABLES**



	Introduction.....	25
III.1.	Identification des dynamiques.....	25
III.1.1.	<i>Cercles de Gerschgorin</i>	25
III.1.2.	<i>Taux de séparabilité</i>	26
III.1.3.	<i>Mise en œuvre sur deux exemples</i>	27
III.1.3.1.	<i>Cas linéaire</i>	27
III.1.3.2.	<i>Cas non-linéaire</i>	27
III.2.	Séparation des dynamiques d'un système linéaire.....	28
III.2.1.	<i>Etape -1- (réorganisation du vecteur d'état)</i>	28
III.2.2.	<i>Etape -2- (séparation des dynamiques)</i>	28
III.2.3	<i>Mise en œuvre sur un exemple</i>	29
III.2.3.1.	<i>Séparation des dynamiques</i>	29
III.2.3.2.	<i>Application de la technique des perturbations singulières</i>	30
III.3.	Conclusion	32

Chapitre -IV- MODELISATION DE LA MACHINE ASYNCHRONE

	Introduction.....	33
IV.1.	Hypothèses simplificatrices	33
IV.2.	Représentation de la machine dans l'espace électrique.....	33
IV.3.	Equations électriques de la machine	34
IV.4.	Transformation de Park.....	35
IV.5.	Application à la machine asynchrone.....	36
IV.6.	Modèle de Park.....	37
IV.7.	Choix du référentiel	38
IV.7.1.	<i>Référentiel lié au stator</i>	39
IV.7.2.	<i>Référentiel lié au rotor</i>	39
IV.7.3.	<i>Référentiel lié au champ tournant</i>	39
IV.8.	Couple électromagnétique.....	40
IV.9.	Couplage avec l'équation mécanique.....	40

IV.10.	Représentation d'état	40
IV.10.1.	Description	40
IV.10.2.	Equations d'état	41
IV.11.	Simulations numériques	44
IV.12.	Conclusion	44

Chapitre -V- APPLICATION DES CERCLES DE GERSCHGORIN AU MODELE DE LA MACHINE ASYNCHRONE

V.1.	Problème de la dynamique	49
V.1.1.	Les modes électromagnétiques	49
V.1.2.	Le mode mécanique	52
V.2.	Décomposition de la transformation de Park	56
V.2.1.	Modèle en (α, β)	57
V.2.2.	Modèle en (d, q)	58
V.3.	Mise en évidence de l'existence de deux dynamiques électromagnétiques	58
V.4.	Séparation des dynamiques pour les petites vitesses	61
V.4.1.	Calcul des valeurs propres	61
V.4.2.	Estimation du paramètre ε	63
V.5.	Séparation en d,q par les cercles de Gerschgorin	64
V.5.1.	Séparation des valeurs propres	64
V.5.2.	Modèles réduits	72
V.5.2.1.	Modèle réduit lent	73
V.5.2.2.	Modèle réduit rapide	73
V.6.	Séparation en α, β par les cercles de Gerschgorin	74
V.6.1.	Calcul des valeurs propres	74
V.6.2.	Séparation des modes	75
V.7.	Mise sous forme simplifiée	82
V.7.1.	Modèles réduits	82
V.7.1.1.	Modèle réduit lent	82
V.7.1.2.	Modèle réduit rapide	82
V.7.2.	Modèles réduits en flux et courants	83

V.8.....	Simulation.....	85
V.9.....	Conclusion	85
	CONCLUSION GENERALE	90

DEFINITIONS ET NOTATIONS



- s, r : indices respectifs du stator et du rotor.
 a, b, c indices correspondants aux trois phases 'a', 'b', 'c'.
 d, q axes correspondants au repère de Park.
 p nombre de paires de pôles ;
 R_s, \mathcal{L}_s résistance et inductance propre d'une phase statorique ;
 R_r, \mathcal{L}_r résistance et inductance propre d'une phase rotorique ;
 M_s coefficient de mutuelle-inductance entre deux phases statoriques ;
 M_r coefficient de mutuelle-inductance entre deux phases rotoriques ;
 M_{sr} maximum de l'inductance mutuelle une phase du stator et une autre du rotor, il est obtenu lorsque les deux axes sont alignés ;
 L_s inductance cyclique statorique ($L_s = \mathcal{L}_s - M_s$) ;
 L_r inductance cyclique rotorique ($L_r = \mathcal{L}_r - M_r$) ;
 M inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor ($M = \frac{2}{3} M_{sr}$) ;
 l_s, l_r inductances de fuites statorique et rotorique ($l_s = L_s - M, l_r = L_r - M$) ;
 T_s, T_r constantes de temps statorique et rotorique ($T_s = L_s/R_s, T_r = L_r/R_r$) ;
 α, B_r nombres sans dimension ($\alpha = T_s/T_r, B_r = M/L_r$) ;
 σ_s, σ_r coefficients de fuites statorique et rotoriques ;
 σ coefficients de fuites totales ou de dispersion ($\sigma = 1 - M/L_s L_r$) ;
 T_{sp}, T_{rp} constantes de temps ($T_{sp} = \sigma T_s, T_{rp} = \sigma T_r$) ;
 L_s, L_r inductances cycliques statorique et rotorique ($L_s = \sigma L_s, L_r = \sigma L_r$) ;
 θ_s, θ_r angles électriques statorique et rotorique ;
 ω_s, ω_r pulsations électriques statorique et rotorique ($\omega_s = \frac{1}{p} \frac{d\theta_s}{dt}, \omega_r = \frac{1}{p} \frac{d\theta_r}{dt}$) ;
 θ angle électrique du rotor par rapport au stator ;
 Ω vitesse angulaire électrique du rotor par rapport au stator ($\Omega = \frac{1}{p} \frac{d\theta}{dt}$) ;
 Ω_{syn} vitesse angulaire du champ tournant ;
 ω_{syn} pulsation du champ tournant (vitesse synchrone) ;
 ϕ flux ;
 C_{em} couple électromagnétique ;
 v tension ;
 i courant.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La conception de tout système passe obligatoirement par la modélisation mathématique de celui-ci. La simulation numérique donne une approche du comportement réel de ce système. Dans de nombreux cas, on procède à une phase de simplification dans laquelle le facteur déterminant est le rapport entre le coût d'exploitation du modèle (en temps de calcul notamment) et la qualité du fonctionnement. Dans le travail que nous présentons, notre objectif est d'appliquer certaines méthodes de simplification et de réduction de modèles, au modèle mathématique de la machine asynchrone afin d'obtenir un modèle réduit qui représente de manière satisfaisante le comportement dynamique de la machine.

Le premier chapitre est un aperçu général sur les méthodes de simplification et de réduction de modèles actuellement développées. Nous avons insisté sur les méthodes intéressantes pour la réduction d'ordre du modèle et le découplage des variables, et concernant une représentation d'état linéaire ou non linéaire.

Le deuxième chapitre a pour but de présenter la technique des perturbations singulières. Nous nous sommes limités à détailler cette dernière pour les systèmes continus linéaires ou non linéaires, et nous avons appliqué cette méthode sur deux exemples de structures différentes.

Comme cette technique nécessite une forme bien spécifiée de la matrice d'état, nous avons présenté dans le troisième chapitre, une méthode géométrique qui répond à ce besoin. Cette méthode est basée sur les cercles de Gerschgorin.

Le quatrième chapitre concerne la modélisation dynamique de la machine.

Dans le cinquième chapitre, nous avons appliqué les résultats des trois premiers chapitres pour découpler les variables électromagnétiques de la machine. Ce découplage est fait dans deux repères, le premier est celui de Park (d,q) et le deuxième est celui de Concordia (α,β).

En fin, nous avons simulé les modèles réduits obtenus par application de la technique des perturbations singulières, et nous avons illustré l'influence du choix des conditions initiales.

CHAPITRE I

APERÇU SUR LES
METHODES DE
SIMPLIFICATION
ET RÉDUCTION DE
MODELES

INTRODUCTION :

Deux grandes classes de méthodes de simplification des modèles peuvent être définies. La première classe consiste à effectuer sur le modèle du système des simplifications d'ordre *structurel*, correspondant à une modification dans le type du modèle utilisé. On peut donner comme exemple :

- Un modèle non linéaire peut être linéarisé autour d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire, et remplacé par son modèle linéaire associé.
- Un système d'équations différentielles du premier ordre peut être transformé en un système d'équations récurrentes dans l'optique d'une mise en œuvre numérique.

La deuxième classe de méthodes a pour principe de base de ne pas modifier le type de modèle utilisé pour représenter le système global, mais de *réduire* l'ordre du modèle ou de *découpler* les variables pour aboutir à des sous-modèles d'ordre réduit. Dans ce cadre, une classification entre les méthodes apparaît suivant que le modèle de départ est :

- une fonction de transfert ;
- une équation d'état linéaire ;
- une équation d'état non-linéaire .

Le but de ces méthodes de réduction est de fournir à l'utilisateur un modèle de système plus simple qui lui permettra de résoudre, avec une quantité limitée de calculs, des problèmes tels que les lois de commande, la détermination et la construction d'observateurs...

I.1. METHODES DE REDUCTION D'UNE FONCTION DE TRANSFERT :

Puisque ces méthodes ne sont pas appliquées dans le cas des modèles non linéaires, on se limite à rappeler ces dernières sans entrer dans les détails.

1. Méthode d'approximation par les moments,
2. Méthode d'approximation par les paramètres de Markov,
3. Méthode de réduction modale,
4. Méthode de Routh,
5. Méthode d'approximation de Padé.

I.2. METHODES DE REDUCTION D'UNE REPRESENTATION D'ETAT LINEAIRE :

Le principe fondamental est le suivant ; à partir d'une représentation d'état de la forme :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x \end{cases} \quad x \in \mathfrak{R}^n ; \quad (1.1)$$

supposée commandable et observable, l'objet de la réduction est d'obtenir un modèle réduit :

$$(\Sigma_r) \begin{cases} \dot{z} = F \cdot z + G \cdot u \\ \hat{y} = L \cdot z \end{cases} \quad x \in \mathfrak{R}^q ; q < n.. \quad (1.2)$$

qui représente de manière satisfaisante le comportement de (Σ) lorsque la même commande $u(t)$ lui est appliquée, ou de conserver un certain nombre de valeurs propres du modèle initial.

Le problème de réduction montre bien l'importance des choix de l'entrée, de la structure du modèle réduit, et de l'indice utilisé pour mesurer la qualité de l'approximation sur le résultat final. Si on exclut les méthodes de recherche du triplet (F, G, L) reposant sur la minimisation d'une fonctionnelle de l'erreur entre les sorties y et \hat{y} , pour un ordre q fixé à priori et une classe d'entrées bien définie, les méthodes de réduction qui présentent le plus d'intérêt reposent toute sur une démarche similaire.

La représentation initiale du système est modifiée par un changement de base T , différent suivant les méthodes, de façon à obtenir une nouvelle représentation :

$$(\tilde{\Sigma}) \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \tilde{B} \cdot u \\ \tilde{y} = \tilde{C} \cdot \tilde{x} \end{cases}, \quad (1.3)$$

avec : $x = T \cdot \tilde{x}$; $\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T$; $\tilde{B} = T^{-1} \cdot B$; $\tilde{C} = C \cdot T$.

Puis le vecteur \tilde{x} est partitionné et tronqué par la matrice $P = [I_q \ 0]$, ce qui conduit aux expressions suivantes pour les matrices $(F$ et $G)$:

$$\begin{aligned} F &= P \cdot \tilde{A} \cdot P^T; \\ G &= P \cdot \tilde{B}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

La matrice de sortie L peut être déterminée de différentes manières et en particulier par minimisation d'une norme caractérisant l'erreur d'approximation.

I.2.1. METHODE DE SYMETRISATION INTERNE : [8]

Principe : Cette méthode consiste à chercher les composantes d'état les plus fortement commandables et observables. Pour cela, on associe au système (Σ) les matrices W_c et W_o correspondant respectivement au grammien de commandabilité et au grammien d'observabilité. Ces matrices sont définies par les expressions suivantes :

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T t} \cdot dt; \quad (1.5.a)$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T t} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{At} \cdot dt; \quad (1.5.b)$$

Ces deux matrices, solution uniques, définies positives, symétriques, des équations de Lyapounov suivantes :

$$A \cdot W_c + W_c \cdot A^T + B \cdot B^T = 0 ; \quad (1.6.a)$$

$$A^T \cdot W_o + W_o \cdot A + C^T \cdot C = 0 ; \quad (1.6.a)$$

permettent d'estimer le degré de commandabilité et d'observabilité des variables composant le vecteur d'état x .

Un changement de base T appliqué au modèle initial (1.1) fournit le modèle d'état (1.3), ce qui conduit aux expressions des grammians dans la nouvelle base :

$$\tilde{W}_c = T^{-1} \cdot W_c \cdot (T^{-1})^T ; \quad (1.7.a)$$

$$\tilde{W}_o = T^T \cdot W_o \cdot T ; \quad (1.7.b)$$

On remarque que ces nouvelles expressions ne correspondent à un changement de base que dans le cas où la matrice T est orthogonale, soit :

$$T^T = T^{-1}$$

Définition : Un modèle est dit *équilibré* si les grammians \tilde{W}_c et \tilde{W}_o sont identiques et égaux à une matrice diagonale W d'éléments α_i ($i=1, \dots, n$), soit :

$$\tilde{W}_c \cdot \tilde{W}_o = W^2 ; \quad (1.8)$$

avec :

$$W^2 = \text{diag} (\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2).$$

- La matrice T est donc formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice $W_c \cdot W_o$.

- Une permutation entre les composantes du vecteur d'état \tilde{x} conduit ensuite à un classement par valeurs décroissantes de α_i dans la matrice W .

- Lorsqu'il existe un ordre q tel que :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i \geq \sum_{i=q+1}^n \alpha_i ;$$

alors le modèle réduit, qui reflète la partie la plus commandable et la plus observable du modèle initial est simplement obtenu par application des expressions (1.4).

- La matrice L est définie soit directement par $L = \tilde{C} \cdot P^T$, soit par application de critère d'optimisation sur l'erreur d'approximation.

I.2.2. METHODE D'AGREGATION :[7]

Cette méthode repose sur la mise sous forme modale (ou de Jordan) de la matrice d'état. Le classement des modes par ordre d'importance des valeurs propres permet d'introduire la notion des modes dominants. Cependant, ce classement peut se faire selon d'autres critères, en particulier d'ordre énergétique, qui peuvent prendre en considération les entrées.

Principe de l'agrégation linéaire :

- L'agrégation consiste à imposer l'existence d'une application linéaire entre l'état x du système global (Σ) et l'état du système réduit (Σ_r), caractérisée par la relation :

$$z = H \cdot x ; \quad H \in \mathcal{R}^{q \times n} \quad (1.9)$$

où : H est du rang plein

- L'existence de H implique les relations :

$$F \cdot H = H \cdot A ; \quad G = H \cdot B ;$$

de sorte que F conserve nécessairement q valeurs propres de A . Plusieurs critères apparaissent pour définir un modèle agrégé :

- choix de la dimension q ;
- choix des valeurs propres de A retenues dans F ;
- choix de la matrice de sortie L ;
- choix des modes.

Choix des modes :

Ce choix est l'étape la plus importante. La démarche consiste à ordonner les valeurs propres du système, en regroupant les modes dits lents correspondant à des valeurs propres de faible module et les modes dits rapides pour les valeurs propres à module élevé.

Suivant le domaine temporel dans lequel on travaille, transitoire rapide ou régime quasi-permanent lent, on retiendra les modes associés au types de comportement considéré. Une fois les modes sélectionnés, la matrice de sortie L est déterminée par une minimisation d'un critère portant le plus souvent sur les erreurs entre les sorties du système et celles du modèle réduit.

Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice agrégée :

Notons λ_i et v_i une valeur propre de A et son vecteur propre associé. Donc , on peut écrire :

$$A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i \quad (1.10)$$

Soi, en multipliant à gauche par H ;

$$H \cdot A \cdot v_i = \lambda_i \cdot (H \cdot v_i)$$

donc :

$$F \cdot (H \cdot v_i) = \lambda_i \cdot (H \cdot v_i). \quad (1.11)$$

ce qui permet de conclure que la matrice F du système agrégé conserve q valeurs propres de la matrice initiale et a pour vecteurs propres les agrégés des vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres conservées.

Structure de la matrice d'agrégation :

Pour mettre en évidence la forme générale d'une matrice d'agrégation, appliquant au système initial le changement de base de la matrice T qui transforme A en matrice de Jordan (diagonale ou bloc-diagonale).

Soit $x = T \cdot v$, le système initial devient :

$$\dot{v} = Q \cdot v + R \cdot u; \quad (1.12)$$

avec :

$$Q = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}; \quad R = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}; \quad (1.13)$$

La troncature de matrice $P = [I_q \ 0]$ donne le modèle réduit de degré q :

$$\dot{v}_1 = Q_1 \cdot v_1 + R_1 \cdot u; \quad (1.14)$$

avec :

$$v_1 = P \cdot v = [I_q \ 0] \cdot T^{-1} \cdot x. \quad (1.15)$$

La forme élémentaire de la matrice d'agrégation apparaît ici sous l'expression :

$$H_0 = [I_q \ 0] \cdot T^{-1}. \quad (1.16)$$

La classe des modèles réduits issus de l'équation (1.15) est définie par la transformation :

$$z = M \cdot v_1; \quad (1.17)$$

où M est une matrice régulière quelconque de dimension q . La structure générale d'une matrice d'agrégation est donc :

$$H = M \cdot H_0; \quad (1.18)$$

et la forme générale d'un système agrégé est :

$$\dot{z} = F \cdot z + G \cdot u, \quad (1.19)$$

avec :

$$F = M \cdot P \cdot T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot P^T \cdot M^{-1};$$

$$G = M \cdot P \cdot T^{-1} \cdot B.$$

Remarque :

La matrice H_0 peut être calculée à partir de l'équation (1.16), ce qui donne l'inversion de la matrice T . Elle peut aussi être déduite du calcul de H_0^T qui est formé de valeurs propres de A^T associées aux valeurs propres retenues dans Q_1 .

I.3. METHODES DE DECOUPLAGE DES VARIABLES :

Ces méthodes ne conduisent pas à une réduction de l'ordre du modèle, mais plutôt à une séparation des variables en sous-ensembles disjoints. Le modèle découplé ainsi obtenu permet un calcul simplifié des lois de commande. Cette approche peut conduire à une réduction d'ordre du modèle en ne retenant que les variables associées aux modes dominants.

I.3.1. METHODE DES PERTURBATIONS REGULIERES :

Considérons le modèle d'état suivant :

$$\frac{d}{dt} x_1 = f_1(x_1, \varepsilon \cdot x_2, u, t) ; \quad x_1 \in \mathfrak{R}^{n_1} \quad (1.20.a)$$

$$\frac{d}{dt} x_2 = f_2(\varepsilon \cdot x_1, x_2, u, t) ; \quad x_2 \in \mathfrak{R}^{n_2} \quad (1.20.b)$$

$$y = g(x_1, x_2). \quad (1.20.c)$$

Le paramètre ε , supposé petit et positif, fait apparaître un faible couplage entre les variables x_1 et x_2 . L'approximation $\varepsilon = 0$, conserve l'ordre du modèle ($n = n_1 + n_2$), mais fait apparaître deux sous-ensembles découplés

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}_1 = f_1(\tilde{x}_1, 0, u, t) ; \quad (1.21.a)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}_2 = f_2(0, \tilde{x}_2, u, t) ; \quad (1.21.b)$$

$$\tilde{y} = g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) ; \quad (1.21.c)$$

une loi de commande par retour d'état, calculée globalement pour le modèle initial sous la forme :

$$u = K \cdot (x_1, x_2) ; \quad (1.22.a)$$

devient alors une loi de commande composite :

$$u = K_1 \cdot x_1 + K_2 \cdot x_2 ; \quad (1.22.b)$$

plus simple à construire.

L3.2. METHODE DE DECOUPLAGE PAR REDONDANCE : [9]

Principe : Cette méthode consiste à effectuer une *expansion* du modèle en introduisant des redondances, suivie d'une *contraction*.

Soit :

$$(\Sigma) \quad \frac{d}{dt} x = A \cdot x + B \cdot u \quad (1.23)$$

$$y = C \cdot x, \quad x \in \mathcal{R}^n,$$

le modèle d'état initial du système avec : $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$

Le vecteur x peut être partitionné en :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathcal{R}^{n_1}, \quad x_2 \in \mathcal{R}^{n_2}, \quad x_3 \in \mathcal{R}^{n_3}, \quad (1.24)$$

et la nouvelle représentation d'état sera :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (1.25.a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.25.b)$$

Cette méthode consiste à transformer le vecteur x en deux sous vecteurs :

$$\tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Avec un nouveau vecteur d'état : $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.27)$

défini par la transformation : $\tilde{x} = T \cdot x$

avec :

$$T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

I_{n_i} est la matrice unité d'ordre n_i .

Le modèle (Σ) est donc étendu au modèle ($\tilde{\Sigma}$), d'équation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x} &= \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \tilde{B} \cdot u \\ y &= \tilde{C} \cdot \tilde{x} \end{aligned} \quad (1.29)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T \cdot A \cdot T_g + M \\ \tilde{B} &= T \cdot B \\ \tilde{C} &= C \cdot T_g \end{aligned}$$

où :

$$T_g = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_{n2} & \frac{1}{2} I_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n3} \end{bmatrix},$$

est la matrice inverse à gauche de T, ($T_g \cdot T = I_n$),
ce qui donne :

$$(\tilde{\Sigma}) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.30.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.30.b)$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}_1 &= \tilde{A}_1 \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{B}_1 \cdot u_1 + \tilde{A}_{12} \cdot \tilde{x}_2 + \tilde{B}_{12} \cdot u_2 \\ y_1 &= \tilde{C}_1 \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{C}_{12} \cdot \tilde{x}_2 \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}_2 &= \tilde{A}_2 \cdot \tilde{x}_2 + \tilde{B}_2 \cdot u_2 + \tilde{A}_{21} \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{B}_{21} \cdot u_1 \\ y_2 &= \tilde{C}_2 \cdot \tilde{x}_2 + \tilde{C}_{21} \cdot \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Les équations (1.31) et (1.32) représentent deux modèles de systèmes interconnectés ($\tilde{\Sigma}_1$) et ($\tilde{\Sigma}_2$).

Cette décomposition est peut être utilisé pour le calcul de loi de commande optimale. Cette méthode est intéressante pour la commande décentralisée.

I.3.3. METHODE PAR BLOC-TRIANGULARISATION ET BLOC-DIAGONALISATION : [10]

Principe : Cette méthode consiste à faire des changement de variables pour avoir une matrice d'état sous forme bloc-triangulaire ou bloc-diagonale.

Soit le modèle d'état initial du système linéaire, qui correspond pour l'instant à une partition arbitraire du vecteur d'état x :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$x_1 \in \mathfrak{R}^{n_1}, \quad x_2 \in \mathfrak{R}^{n_2}, \quad n = n_1 + n_2.$$

I.3.3. 1. METHODE PAR BLOC-TRIANGULARISATION :

On définit le changement de base suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \tilde{T} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

avec :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_s & I \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

qui transforme le modèle initial sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{R}_s(L_s) & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \cdot u,$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_{11} + A_{12} \cdot L_s \\ \tilde{A}_2 &= A_{22} - L_s \cdot A_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_2 &= B_2 - L_s \cdot B_1 \\ \tilde{C}_1 &= C_1 + C_2 \cdot L_s \end{aligned}$$

et la matrice $\tilde{R}_s(L_s)$ s'exprime sous la forme d'une équation matricielle :

$$\tilde{R}_s(L_s) = A_{21} + A_{22} \cdot L_s - L_s \cdot A_{11} - L_s \cdot A_{12} \cdot L_s \quad (1.37)$$

S'il existe une matrice L_s solution de l'équation de Riccati $\tilde{R}_s(L_s) = 0$, le système transformé apparaît sous forme triangulaire supérieure par blocs.

Maintenant, au lieu de procéder à une triangularisation supérieure, on peut procéder à une triangularisation inférieure. Dans ce cas, le changement de base est défini par :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \bar{T} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec : } \bar{T} = \begin{bmatrix} I & L_i \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

I.3.3. 2. METHODE PAR BLOC-DIAGONALISATION :

Le modèle (1.36) peut également être diagonalisé par bloc par la transformation :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \hat{T} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \hat{T} = \begin{bmatrix} I & M_s \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

et le modèle obtenu est donc :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{R}_1(M_s) \\ \tilde{R}_1(L_s) & \hat{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \cdot u \quad (1.40)$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\hat{A}_1 = \tilde{A}_1 - M_s \cdot \tilde{R}_1(L_s) = A_{11} + A_{12} \cdot L_s - M_s \cdot \tilde{R}_1(L_s)$$

$$\hat{A}_2 = \tilde{A}_2 + \tilde{R}_1(L_s) \cdot M_s = A_{22} - L_s \cdot A_{12} + \tilde{R}_1(L_s) \cdot M_s$$

$$\hat{B}_1 = B_1 - M_s \cdot \tilde{B}_2 = B_1 - M_s \cdot (B_2 - L_s \cdot B_1)$$

$$\hat{B}_2 = \tilde{B}_2 = B_2 - L_s \cdot B_1$$

$$\hat{C}_1 = \tilde{C}_1 = C_1 + C_2 \cdot L_s$$

$$\hat{C}_2 = C_2 + \tilde{C}_1 \cdot M_s = C_2 + (C_1 + C_2 \cdot L_s) \cdot M_s$$

$$\hat{R}_1(M_s) = A_{12} + (A_{11} + A_{12} \cdot L_s) \cdot M_s - M_s \cdot (A_{22} - L_s \cdot A_{12}) \cdot A_{11} - M_s \cdot \tilde{R}_1(L_s) \cdot M_s \quad (1.41)$$

Finalement le modèle (1.40) est diagonalisé par bloc si les matrices L_s et M_s vérifient les équation de Riccati ($\hat{R}_1(M_s) = 0$ et $\tilde{R}_1(L_s) = 0$).

I.4. CONCLUSION :

Le choix d'une méthode de simplification de modèle dépend de la forme initiale du modèle et du but poursuivi. Le modèle simplifié est le plus souvent un modèle de pilotage qui fournit à l'utilisateur un outil pour la construction de lois de commande.

CHAPITRE II

**METHODE DES
PERTURBATIONS
SINGULIERES**

INTRODUCTION :

Cette méthode concerne les systèmes physiques continus ou échantillonnés, déterministes ou stochastiques, linéaires ou non linéaires pour lesquelles des dynamiques différentes ont été mises en évidence. Cette méthode est caractérisée par une équation d'état dans laquelle un petit paramètre $\varepsilon \in [0, 1]$ a été introduit.

Dans le cas linéaire, le paramètre ε intervient dans le membre de gauche de l'équation différentielle, soit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix},$$

ce qui indique que les composantes regroupées dans x_1 sont *lentes*, et que celles regroupées dans x_2 sont *rapides*.

L'intérêt de cette méthode concerne surtout la détermination de lois de commandes sous forme composite. Le modèle global est découpé en un sous-modèle lent et un sous-modèle rapide, et ce découplage apparaît aussi au niveau des commandes.

La loi de commande « u » se décompose en :

$$u = u_l + u_r ; \quad (2.1)$$

ce qui permet de calculer séparément les gains de retour d'état sous la forme :

$$u_l = G_l \cdot x_{1l}; \quad \text{et} \quad u_r = G_r \cdot x_{2r}; \quad (2.2)$$

où x_{1l} et x_{2r} représentent respectivement l'évolution lente (en régime quasi-permanent) et l'évolution rapide (transitoire).

II.1. MISE EN EVIDENCE DU PARAMETRE ε :

Lorsque la matrice d'état possède des termes d'ordre de grandeur très différents, on doit réorganiser le vecteur d'état pour regrouper les termes en fonction de leur amplitude.

Supposons que le modèle $\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U$ se répartisse en :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot u , \quad (2.3)$$

où :

A_{21} , A_{22} , B_2 sont très grands en module par rapport à ceux de A_{11} , A_{12} , B_1 . Alors une normalisation peut être faite en introduisant un paramètre ε , $\varepsilon \in [0, 1]$, tel que :

$$\begin{aligned} \dot{A}_{21} &= \varepsilon \cdot A_{21}; \\ \dot{A}_{22} &= \varepsilon \cdot A_{22}; \\ \dot{B}_2 &= \varepsilon \cdot B_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

EXEMPLE : [5]

Considérons l'exemple suivant caractérisé par :

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U;$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.15 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.15 & 0.005 & 0 \\ 2.05 & 1.85 & -1.95 & 0 \\ 3.25 & 0 & 0 & -1.52 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.015 \\ 0.052 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

L'introduction du paramètre $\varepsilon = 0.1$, normalise les ordres de grandeur des termes de A et B :

$$\dot{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0.205 & 0.185 \\ 0.325 & 0 \end{bmatrix}; \dot{A}_{22} = \begin{bmatrix} -0.195 & 0 \\ 0 & -0.152 \end{bmatrix}; \dot{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.15 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Et le modèle apparaît sous une forme singulièrement perturbée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{12} \\ \dot{A}_{21} & \dot{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} \cdot u, \quad (2.7)$$

le paramètre ε peut être également calculé à partir des valeurs caractéristiques du modèle global obtenu après bloc-diagonalisation, ainsi on peut citer

$$\varepsilon = \frac{\min |\lambda(\hat{A}_1)|}{\max |\lambda(\hat{A}_2)|}, \quad (2.8.a)$$

ou :

$$\varepsilon = \left\| \hat{A}_1 \right\| \cdot \left\| \hat{A}_2^{-1} \right\|, \quad (2.8.b)$$

ou :

$$\varepsilon = \left\| A_{22}^{-1} \right\| \cdot \left(\left\| A_{00} \right\| + \left\| A_{12} \right\| \cdot \left\| L_0 \right\| \right). \quad (2.8.c)$$

Avec :

$$L_0 = -A_{22}^{-1} \cdot A_{21} \quad \text{et} \quad A_0 = A_{11} + A_{12}^{-1} \cdot L_0$$

II.2. METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES POUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES :[11]

Un grand avantage de l'approche par la méthode de perturbations singulières des systèmes à deux échelles de temps est qu'elle n'est pas limitée aux systèmes linéaires contrairement à toutes les autres méthodes de simplification vues précédemment.

Le modèle :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u, \varepsilon, t) \quad (2.9.a)$$

$$\varepsilon \cdot \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u, \varepsilon, t) \quad (2.9.b)$$

$$y = h(x_1, x_2) \quad (2.9.c)$$

avec :

$$x_1(t_0) = x_{10} \quad ; \quad x_1 \in \mathcal{R}^{n_1},$$

$$x_2(t_0) = x_{20} \quad ; \quad x_2 \in \mathcal{R}^{n_2},$$

$$\varepsilon \in [0, 1],$$

est le premier modèle de système à avoir été utilisé pour la construction simplifiée de lois de commande.

Les fonction f_1, f_2 sont supposées suffisamment continues et dérivables par rapport à leurs arguments $x_1, x_2, u, \varepsilon, t$.

Le modèle (2.9) est dit sous forme *singulièrement perturbée* car :

- l'introduction d'un petit, paramètre ε est considéré comme une perturbation.
- la valeur particulière $\varepsilon = 0$ introduit une *singularité*, car n_2 équations différentielles se transforment en équations algébriques .

$$f_1(x_{1l}, x_{2l}, u_l, \varepsilon, t) = 0, \quad (2.10)$$

L'indice « l » sur les variables indique qu'elles appartiennent au modèle écrit avec $\varepsilon = 0$. La commande u est devenue u_l , car écrire $\varepsilon = 0$ revient à considérer le système en régime quasi-permanent et à supposer que seules les composantes lentes de l'entrée sont encore actives, les transitoires rapides ont donc disparus.

On dit que le modèle (2.9) est sous *forme standard* si et seulement si la propriété très importante suivante est satisfaite :

propriété :

L'équation (2.10) admet k racines réelles distinctes ($k \geq 1$) définies par :

$$x_{2i} = \Phi_i(x_{1i}, u_i, t), \quad i = 1, \dots, k \quad (2.11)$$

Cette propriété assure qu'un modèle réduit bien défini de dimension n_1 correspondra à chaque solution x_{2i} , de (2.11).

Pour obtenir le i -ième modèle réduit, il suffit de substituer (2.11) dans (2.9.a) et (2.9.c), soit :

$$\dot{x}_{1i} = f_1(x_{1i}, \Phi_i(x_{1i}, u_i, t), u_i, 0, t) \quad (2.12.a)$$

$$y = h(x_{1i}, \Phi_i(x_{1i}, u_i, t)) \quad (2.12.b)$$

En gardant la même condition initiale sur x_{1i} que sur x_1 :

$$x_{1i}(t) = x_{10} \quad (2.13)$$

Dans la suite nous utiliserons la notation plus compacte :

$$\dot{x}_{1i} = f_1(x_{1i}, u_i, t) \quad (2.14.a)$$

$$y = h(x_{1i}, u_i, t) \quad (2.14.b)$$

$$x_{2i} = \Phi(x_{1i}, u_i, t) \quad (2.14.c)$$

Ce modèle réduit est appelé le *modèle lent* ou le modèle *quasi-permanent* car il donne l'évolution du système quand les transitoires rapides ont disparus.

Si l'on considère maintenant le modèle (2.14.c), qui correspond au régime quasi-établi de la variable rapide x_2 , il est évident que x_{2i} n'est libre de partir de la valeur initiale x_{20} , et qu'il peut y avoir un grand écart entre la valeur initiale et :

$$x_{2i}(t_0) = \Phi_i(x_{1i}(t_0), u_i(t_0), t_0). \quad (2.15)$$

ceci indique que x_{2i} ne peut pas être une approximation uniforme de x_2 valable sur $[t_0, T]$. Le mieux que l'on puisse obtenir est que l'approximation :

$$x_2(t) = x_{2i}(t) + o(\varepsilon) \quad (2.16)$$

soit valable sur un intervalle excluant t_0 , soit $[t_1, T]$, avec $t_1 > t_0$.

Par contre, on peut contraindre x_{1i} à partir de x_{10} , et l'approximation,

$$x_1(t) = x_{1i}(t) + o(\varepsilon) \quad (2.17)$$

sera valable sur $[t_0, T]$.

L'approximation (2.16) établit que, durant un intervalle $[t_0, t_1]$ dit de *couche limite*, la variable initiale x_2 approche x_{2l} dans $[t_0, T]$. Dans le domaine $[t_0, t_1]$ la vitesse de x_2 peut être grande, soit

$$\dot{x}_2 = f_2/\varepsilon.$$

Poser $\varepsilon = 0$ revient en fait à considérer que les transitoires sont instantanés si $f_2 \neq 0$. Le terme $\varepsilon \dot{x}_2$ doit rester fini, même si $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\dot{x}_2 \rightarrow \infty$.

Pour cela, posons :

$$\varepsilon \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{d\tau} \quad \text{avec} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.18)$$

et utilisons $\tau = 0$ comme valeur initiale à $t = t_0$. la nouvelle variable temporelle :

$$\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}, \quad \tau = 0 \text{ pour } t = t_0, \quad (2.19)$$

est dilaté, et τ tend vers l'infini quand ε tend vers 0, même pour un temps t légèrement supérieur à t_0 . De plus, alors que x_2 et τ changent presque instantanément, x_1 reste très proche de sa valeur initiale x_{10} .

Pour décrire le comportement de x_2 comme fonction de τ , on utilise la correction de couche limite :

$$x_{2r} = x_2 - x_{2l} \quad (2.20)$$

vérifiant l'équation de couche limite :

$$\frac{dx_{2r}}{d\tau} = f_2(x_{10}, x_{2r}(\tau), x_{2l}(\tau), u(\tau), t_0), \quad (2.21.a)$$

$$y_r = h(x_{10}, x_{2r}(\tau) + x_{2l}(\tau)) \quad (2.21.b)$$

$$x_{2r}(0) = x_{20} - x_{2l}(t_0) \quad (2.21.c)$$

Cette équation comporte le terme $u(\tau)$ qui, à cette échelle de temps τ , correspond au comportement rapide de la variable rapide de la variable u , défini par :

$$u_r = u - u_l \quad (2.22)$$

Une approximation uniforme de x_2 , valable sur $[t_0, T]$ est :

$$x_2 = x_{2l}(t) + x_{2r}(\tau) + o(\varepsilon) \quad (2.23)$$

avec x_{2l} , x_{2r} décrivent respectivement les composantes lentes et rapides de x_2 .

Pour que l'approximation (2.23) converge, après une courte période, vers l'approximation (2.16), il faut que le terme correctif $x_{2r}(\tau)$ décroisse, quand $\tau \rightarrow \infty$, vers une valeur en $o(\varepsilon)$. Ceci revient en fait à étudier la stabilité asymptotique du modèle (2.21) dans le domaine de couche limite.

Propriété 1:

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_{2r}(\tau) = 0$ si l'équilibre $x_{2r}(\tau) = 0$ de l'équation (2.21) est asymptotiquement stable uniformément en x_{10} et t_0 , et si $x_{20} - x_{21}(t_0)$ appartient à son domaine d'attraction.

Propriété 2:

Les valeurs propres de $(f_2)_{x_2}$ calculées pour $\varepsilon = 0$, le long des trajectoires $x_{11}(t)$ et $x_{21}(t)$, ont des parties réelles plus faibles qu'un nombre négatif fixé, soit :

$$\text{Rel}(\lambda\{(f_2)_{x_2}\}) \leq -c \leq 0$$

L'énoncé des propriétés 1 et 2 conduit au théorème de Tikhonov,

Théorème : [7].

Si les propriétés 1 et 2 sont satisfaites, alors les approximations :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + o(\varepsilon) \\ x_2 &= x_{21} + x_{2r} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

sont valables pour tout $t \in [t_0, T]$ et il existe un instant $t_1 \geq t_0$ tel que :
 $x_2 = x_{21} + o(\varepsilon)$ est valable pour $t \in [t_1, T]$.

II.3 METHODE DES PERTURBATIONS SINGULIERES POUR LES MODELES CONTINUS LINEAIRES : [11]

Soit le modèle sous la forme singulièrement perturbée suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot u, \quad (2.24)$$

$$y = [C_1 \ C_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

avec

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_{10} & ; & \quad x_1 \in \mathcal{R}^{n_1}, \\ x_2(t_0) &= x_{20} & ; & \quad x_2 \in \mathcal{R}^{n_2}, \end{aligned}$$

Il est dit sous *forme explicite* si la matrice A_{22} est inversible, et sous *forme implicite* dans le cas contraire. Ce dernier cas suppose que le découplage en x_1 (*lent*) et x_2 (*rapide*) est mauvais, et que les différentes dynamiques sont encore réparties entre x_1 et x_2 , il faut donc faire un changement de variables pour regrouper les dynamiques.

II.3.1 Calcul des modèles réduits lent et rapide :

Le modèle réduit lent est obtenu en considérant que les variables rapides x_2 ont atteint leur régime établi, ce qui correspond à écrire $\varepsilon = 0$.

Le modèle devient :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1l} &= A_{11} x_{1l} + A_{12} x_{2l} + B_1 u_l; \\ 0 &= A_{21} x_{1l} + A_{22} x_{2l} + B_2 u_l; \\ y_l &= C_1 x_{1l} + C_2 x_{2l};\end{aligned}\tag{2.25}$$

où x_{1l} , x_{2l} , u_l , y_l représentent les composantes lentes des variables x_1 , x_2 , y , u .

après transformations, on obtient le système lent réduit d'ordre n_1 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1l} &= A_l x_{1l} + B_l u_l; \\ y_l &= C_l x_{1l} + D_l u_l; \\ x_{2l} &= A_{22}^{-1} \cdot (A_{21} x_{1l} + B_2 u_l);\end{aligned}\tag{2.26}$$

avec :

$$\begin{aligned}A_l &= A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}, \\ B_l &= B_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot B_2, \\ C_l &= C_1 - C_2 \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}, \\ D_l &= -C_2 \cdot A_{22}^{-1} \cdot B_2,\end{aligned}\tag{2.27}$$

Si A_{22} est inversible, le modèle (2.26) fournit une bonne approximation du comportement du modèle global, qui sera valable pour $t \geq t_0$

si on fixe :

$$x_{1l}(t_0) = x_{10};\tag{2.28}$$

par contre, la valeur initiale des composantes lentes x_{2l} vaut :

$$x_{2l}(t_0) = A_{22}^{-1} \cdot A_{12} \cdot x_{1l}(t_0);\tag{2.29}$$

ce qui est en général différent de x_{20} . Les variables rapides x_2 ne peuvent donc pas être approchées par x_{21} sur tout l'intervalle de temps $[0, T]$.

Introduisant un terme correctif x_{2r} , défini par :

$$x_{2r} = x_2 - x_{21}; \quad (2.30)$$

représentant les variations rapides de x_2 . L'équation de couche limite, exprimée en temps dilaté τ ($\varepsilon \frac{dx_{2r}}{dt} = \frac{dx_{2r}}{d\tau}$):

$$\frac{dx_{2r}}{d\tau} = A_{22} \cdot x_{2r}(\tau) + B_2 \cdot u_r(\tau);$$

$$y_r = C_2 \cdot u_r(\tau); \quad (2.31)$$

$$x_{2r}(t_0) = x_{22} + A_{22}^{-1} \cdot A_{12} \cdot x_{10};$$

est obtenue par la différence entre le modèle initial (2.24) et le modèle simplifié (2.26), en considérant immobiles les variables lentes pendant les transitoires rapides ($\frac{dx_{1l}}{d\tau} = 0$)

II.3.2 Mise en œuvre sur un exemple :

Considérons le système d'état, correspondant à la forme singulièrement perturbée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -0.08 & 0.04 & -0.01 \\ -0.01 & -0.1 & -0.14 \\ \hline 0.011 & 0.002 & -0.09 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \cdot u,$$

$$y = [1.0 \quad 0.0 \quad -0.5] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$x_1(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2(t_0) = [1],$$

Pour avoir une idée sur l'influence du choix de ε , on prend quatre valeurs pour ε . Soit : $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = 0.4$ et $\varepsilon_4 = 0.6$.

Conformément aux équations (5.3) à (5.8), nous obtenons les deux sous modèles suivants :

1). *Sous modèle lent :*

$$\frac{d}{dt} x_{1l} = \begin{bmatrix} -0.0812 & 0.0398 \\ -0.0271 & -0.1031 \end{bmatrix} \cdot x_{1l} + \begin{bmatrix} 0.9889 \\ -0.1556 \end{bmatrix} \cdot u_l$$

$$y_l = \begin{bmatrix} 0.9389 & -0.0111 \end{bmatrix} \cdot x_{1l} + \begin{bmatrix} -0.5556 \end{bmatrix} \cdot u_l \quad (2.33)$$

$$x_{1l}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{2l} = \begin{bmatrix} 0.1222 & 0.0222 \end{bmatrix} \cdot x_{1l} + \begin{bmatrix} 1.1111 \end{bmatrix} \cdot u_l$$

2). *Sous modèle rapide :*

$$\frac{d}{dt} x_{2r} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} & 0.09 \end{bmatrix} \cdot x_{2r} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0.1 \end{bmatrix} \cdot u_l$$

$$y_r = x_{2r} \quad (2.34)$$

$$x_{2r}(t_0) = 0.8778$$

On porte sur la figure (II.1), les réponses indicielles des quatre modèles correspondant aux quatre choix de ε .

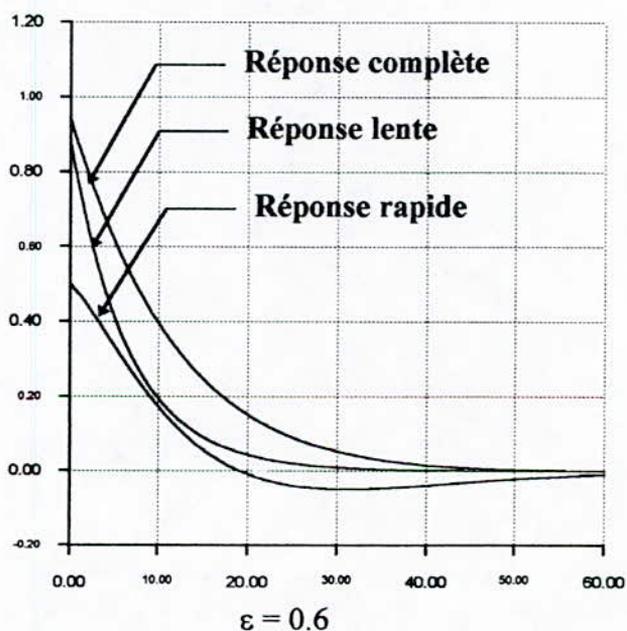
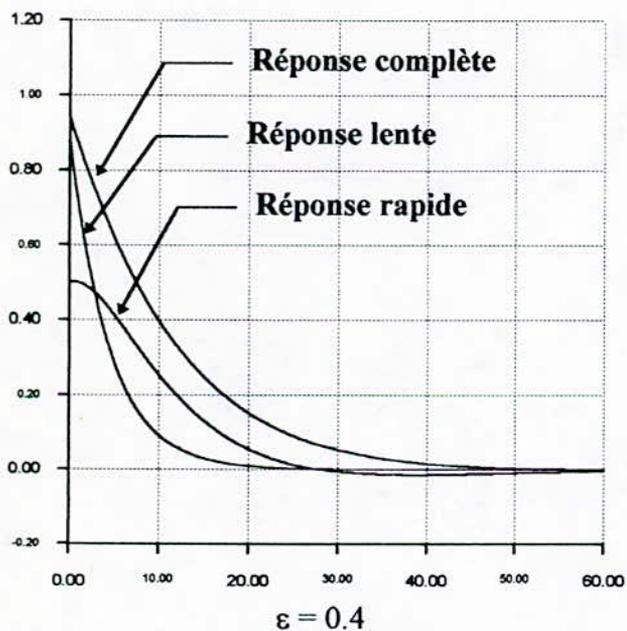
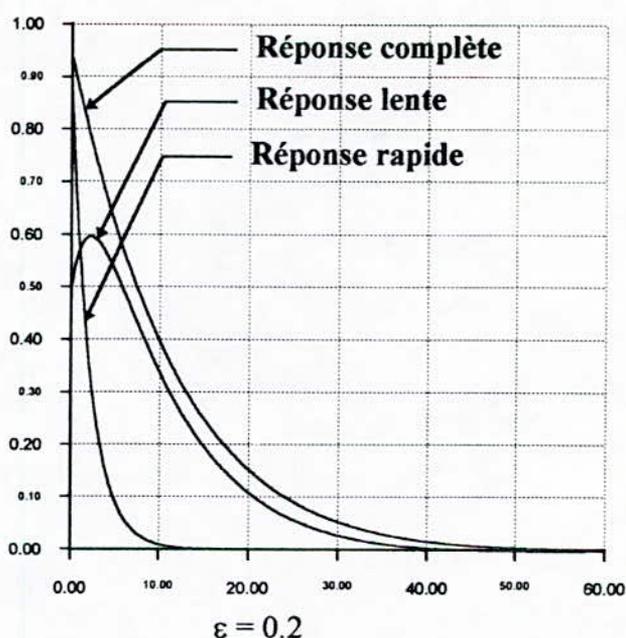
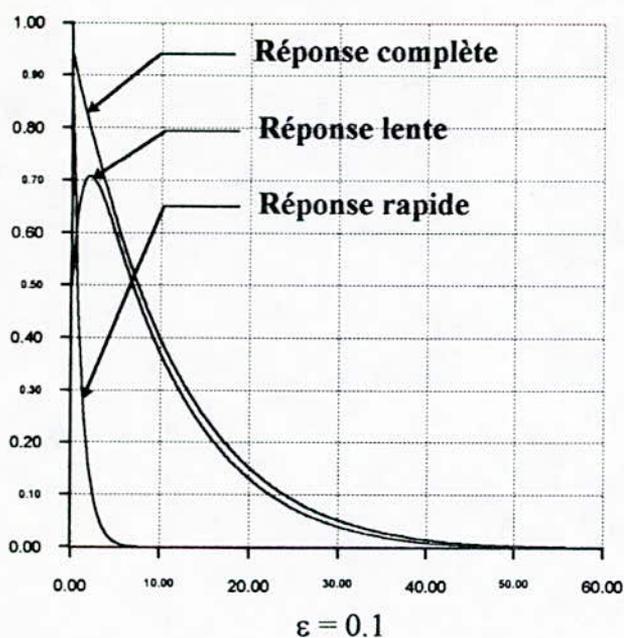


Fig.II.1.a. Réponses indicielles en fonction du terme parasite .

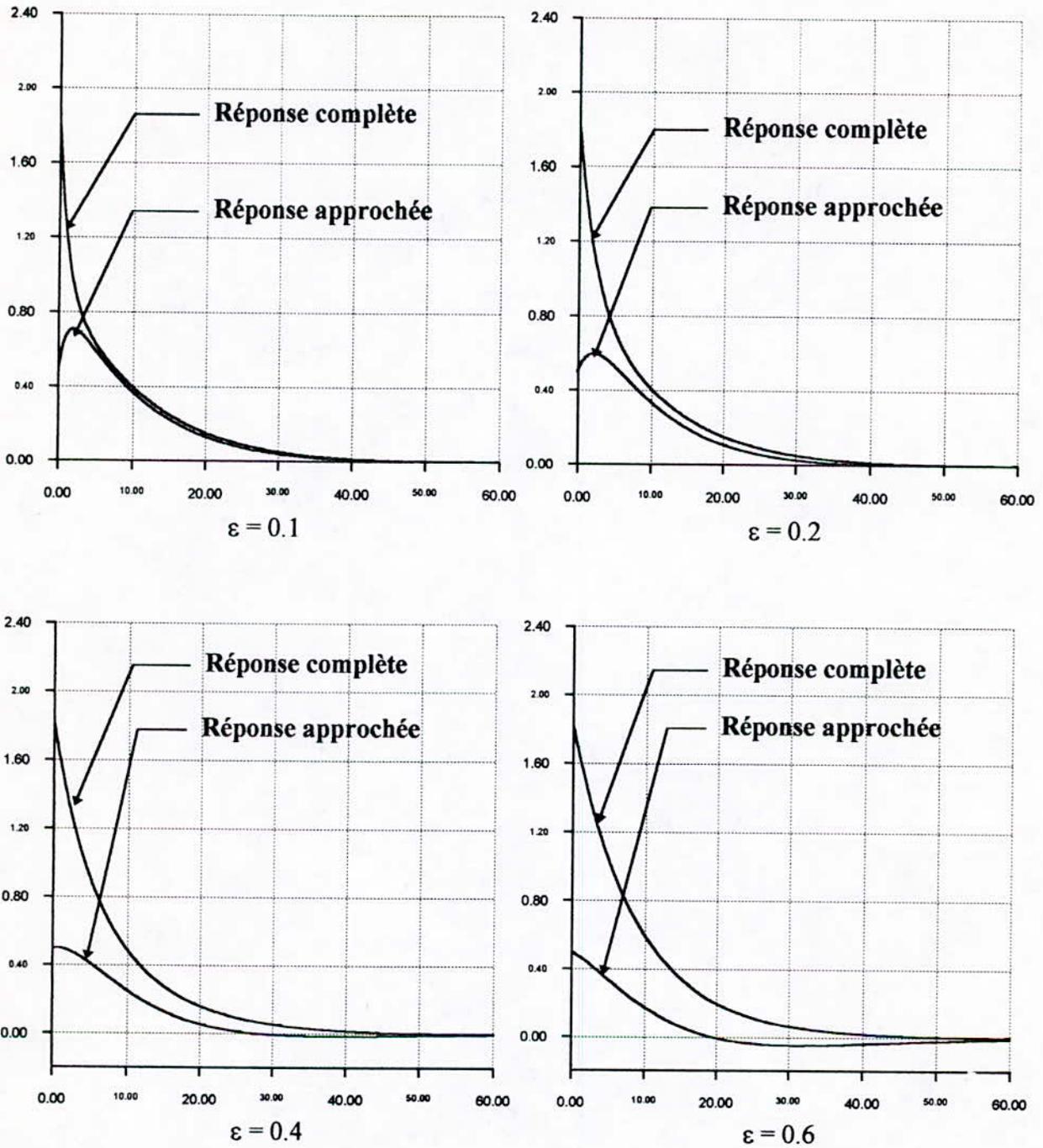


Fig.II.1.b. Réponses réelle et approchées.

Interprétation :

La validité de la méthode des perturbations singulières dépend du terme parasite ε , c'est à dire du taux de séparabilité des dynamiques. Différentes courbes sont représentées pour diverses valeurs de ε .

La figure (II.1.b) montre bien la différence des conditions initiales entre les deux réponses réelle et approchée. On remarque aussi l'importance de la durée de couche limite au fur et à mesure que la valeur du terme parasite augmente.

Les valeurs propres de la matrice d'état pour $\varepsilon = 0.1$ sont :

$$\lambda(A_1) = \{ (-0.0919 + j0.0311), (-0.0919 - j0.0311), (-0.8961) \}.$$

Elles sont approchées de façon satisfaisante par les valeurs propres de A_l , et A_r :

$$\lambda(A_{1l}) = \{ (-0.0922 + j0.0310), (-0.0922 - j0.0310) \}.$$

$$\lambda(A_{1r}) = \{ (-0.9000) \}.$$

CONCLUSION :

Les modèles découplés sont essentiellement des modèles de commande. Il sont plus difficiles à utiliser pour une simulation en boucle ouverte car il n'est pas toujours possible de décomposer une entrée en une composante lente et une composante rapide.

Si le calcul des valeurs propres de la matrice d'état met en évidence des dynamiques lentes et des dynamiques rapides, l'identification des variables d'état correspondantes peut être difficile. De plus même s'il n'est pas utile de connaître la valeur exacte de ε , Il est par contre important de pouvoir chiffrer le *taux de séparabilité* des dynamiques et d'avoir un ordre de grandeur pour ε .

Pour les systèmes non linéaires, il est difficile de chiffrer ε . Dans la plupart des cas, seule l'expérience de l'utilisateur peut fournir des renseignements sur le comportement des variables. Cependant, sans information particulière, l'utilisateur peut décider d'introduire un paramètre ε , même proche de 1, pour bénéficier de la simplification engendrée par l'application de la technique des perturbations singulières. On parle dans ce cas de *perturbations singulières forcées*.

CHAPITRE III

**APPLICATION DES CERCLES
DE GERSCHGORIN
POUR LE DECOUPLAGE
DES VARIABLES D'UN
SYSTEME DE PLUSIEURS
ECHELLES DE TEMPS**

INTRODUCTION :

Il est bien connu que la technique des perturbations singulières pour la réduction des modèles requière l'identification et la séparation des différentes échelles de temps existantes dans le comportement du système d'ordre élevé.

La première difficulté qui apparaît lorsque l'on veut découpler les variables réside dans l'identification des variables lentes et rapides.

Ceci peut être effectué dans certains cas directement grâce à des méthodes géométriques, ou par des méthodes analytiques.

Le calcul direct des valeurs propres de la matrices d'état permet de déterminer les modes du modèle, mais ne conduit pas à une identification des variables correspondantes. De plus, ce calcul n'est valable qu'en linéaire. Cette restriction disparaît pour les méthodes géométriques pour certaines classes de modèles non linéaires.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode géométrique basée sur les cercles de Gerschgorin. Cette méthode donne une bonne sélection des variables lentes et rapides. Cependant, cette dernière nécessite une forme spéciale de la matrice d'état qui doit être à diagonale dominante.

III.1. IDENTIFICATION DES DYNAMIQUES :

Notons $(a_{ij}, i, j = 1, \dots, n)$ les éléments de la matrice d'état A et :

$$P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (3.1)$$

$$Q_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (3.2)$$

III.1.1. CERCLES DE GERSCHGORIN :***Théorème 1 : [5]***

Les valeurs propres de A appartiennent au domaine $D1$ du plan complexe formé par la réunion des régions intérieurs des n cercles de Gerschgorin C_i , centrés en a_{ii} et de rayon R_{ii} :

$$R_{ii} = P_i$$

et dans le domaine $D2$ formé par la réunion des n interférences de centres a_{ii} et de rayon R_{ci} :

$$R_{ci} = Q_i$$

Théorème 2 : [5]

1- Chaque valeur propre de la matrice carrée A appartient à au moins un des cercles C_i de centre a_{ii} et de rayon :

$$R_i = P_{ii} \text{ ou } R_i = Q_{ci},$$

2 - Si s cercles $C_i (a_{ii}, R_i)$ forment un domaine séparé des autres cercles, alors il y'a exactement s valeurs propres situées dans ce domaine.

Théorème 3 : [7] (Système deux dynamiques).

Si on peut définir deux ensembles d'indices I et K , avec $I \cap K = \emptyset$ et $I \cup K = \{1, \dots, n\}$, tels que :

$\forall (i, j) \in I \times K$, les cercles $C_i(a_{ii}, R_i)$ et $C_k(a_{kk}, R_k)$ vérifient :

$$|a_{ii} - a_{kk}| \geq (R_i + R_k) \quad \forall i \in I \text{ et } \forall k \in K,$$

alors la matrice A possède deux ensembles de valeurs propres séparés. Si $|a_{ii}|$ est supposé plus grands que $|a_{kk}|$ Figure (III.1), les variables x_i , $i \in I$ sont alors rapides et x_k , $k \in K$ sont lentes.

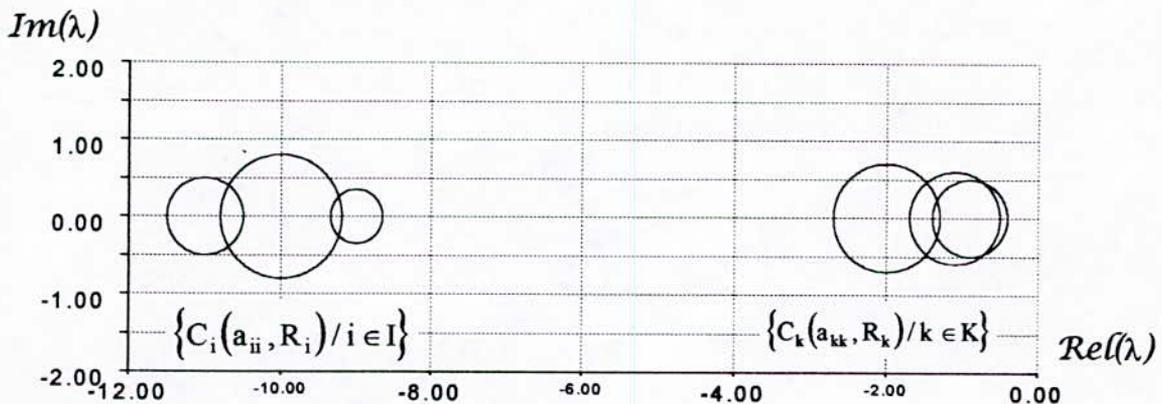


Fig.III.1. Localisation des modes d'un système à deux dynamiques.

III.1.2. TAUX DE SEPARABILITE :

Le taux de séparabilité des dynamiques peut être estimé par la relation :

$$\varepsilon_s = \sup(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad 0 < \varepsilon_s < 1. \quad (3.3.a)$$

avec :

$$\varepsilon_1 = \max_{\substack{i \in I \\ k \in K}} \left(\frac{R_i + R_k}{|a_{ii} - a_{kk}|} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \max_{\substack{i \in I \\ k \in K}} \left(\frac{|a_{kk}|}{|a_{ii}|} \right), \quad (3.3.b)$$

Les deux paramètres ε_1 et ε_2 ont des rôles complémentaires : ε_1 indique le degré de couplage entre les différentes variables, et ε_2 correspond au rapport entre les différentes échelles de temps.

III.1.3. MISE EN ŒUVRE SUR DEUX EXEMPLES :

1)- Cas d'un modèle linéaire :

Considérons le modèle proposé par [12] d'un générateur de vapeur :

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 3.493 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.908 & -0.167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0 \\ 0 & 0.273 & 0.047 & 0.28 & -0.1125 \end{bmatrix} \cdot x, \quad (3.4)$$

Le tracé des cercles de Gerschgorin est représenté sur la figure (III.2).

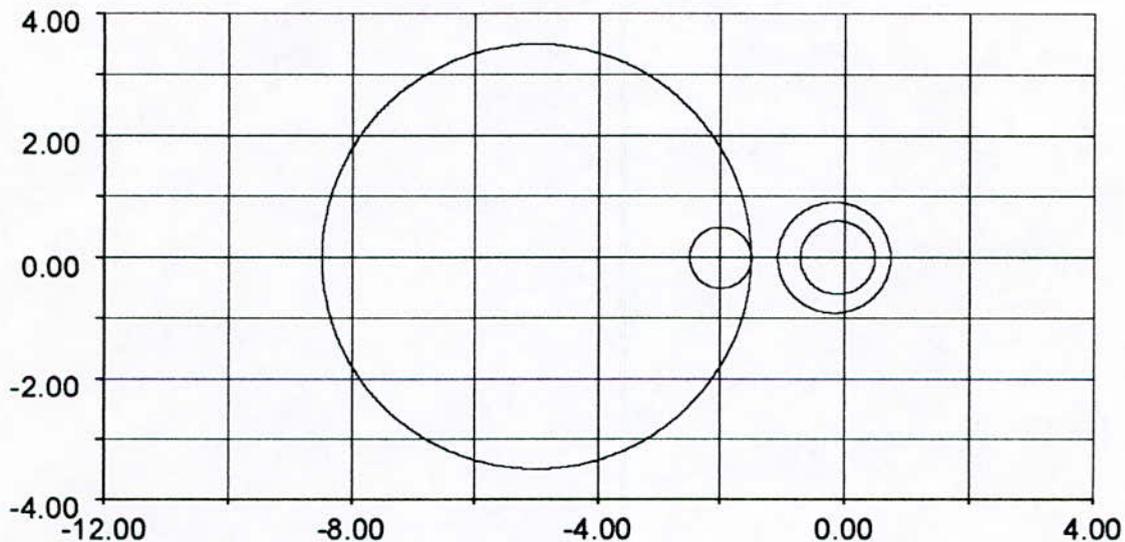


Fig.III.2. Les cercles de Gerschgorin pour modèle d'un générateur de vapeur (cas linéaire).

Les cercles indiquent deux différentes échelles de temps, avec les sous-ensembles de variables d'état (x_3, x_5) et (x_1, x_2, x_4) , respectivement lent et rapide, correspondant au rapport $\varepsilon_s = 0.747$.

2)- Cas d'un modèle non linéaire :

On considère maintenant le modèle suivant :[7]

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 - 0.1 \cdot \sin(t) & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 2.525 & 0.025 & -10 - e^{-|t|} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

qui donne les cercles présentés par la figure (III.3) :

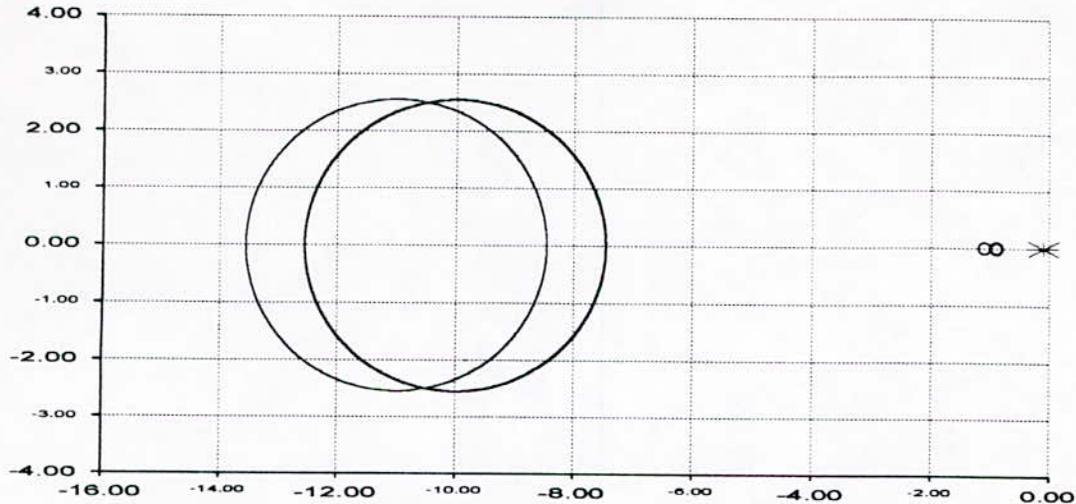


Fig.III.3. Exemple de cercles de Gerschgorin pour un système non linéaire.

III.2. SEPARATION DES DYNAMIQUES D'UN SYSTEME LINEAIRE : [6]

Dans ce contexte, on présente un simple algorithme pour la séparation des différentes échelles de temps d'un système linéaire. Cet algorithme, basé sur les cercles de Gerschgorin, suppose que la matrice d'état est à diagonale dominante.

III.2.1. Etape 1 (Réorganisation du vecteur d'état).

Comme la localisation des valeurs propres est liée aux lignes de la matrice d'état, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de telle sorte à regrouper les termes de la diagonale en fonction de leurs amplitude d'ordre croissant. Cette réorganisation permet l'utilisation de la technique des perturbations singulières.

Ce processus nécessite la transformation suivante :

$$\begin{aligned}
 - \tilde{A} &= P^T \cdot A \cdot P, \\
 - \tilde{B} &= P^T \cdot B, \\
 - \tilde{C} &= C \cdot P^T,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

La matrice P caractérise le changement de lignes correspondant à l'ordre croissant des valeurs propres de A. Les éléments de la matrice P seront déterminés comme ci-dessous :

$$\begin{cases}
 P_{ij} = 1, & \text{si la } i^{\text{ième}} \text{ ligne sera transférée à la } j^{\text{ième}}. \\
 P_{ii} = 1, & \text{si la } i^{\text{ième}} \text{ ligne ne sera pas à permuter} \\
 P_{ij} = 0, & \text{autrement.}
 \end{cases} \tag{2.7}$$

III.2.2. Etape 2 : (Séparation des dynamiques).

L'utilisation des cercles de Gerschgorin met en évidence les différentes dynamiques du système.

Si les cercles présentent q ensembles disjoints, alors le système est à q échelles de temps.

III.2.3. Mise en œuvre sur un exemple : [6]

III.2.3.1. Séparation des dynamiques :

Considérons le modèles d'ordre 5 suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -17.0 & 0.2 & 0.0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.1 & -16.5 & -0.4 & 0.0 & -1.0 \\ 0.5 & -0.03 & -1.5 & -0.02 & -0.05 \\ -0.3 & 0.0 & -1.1 & -16.0 & -0.2 \\ -0.01 & -0.4 & 0.0 & 0.04 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$C = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \text{ et } x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Pour partitionner le vecteur d'état correctement, on utilise l'algorithme précédent (étape 1). En effet, la matrice P est :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

et la nouvelle représentation d'état est comme ci-dessous :

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|ccc} -1.2 & 0.0 & 0.04 & -0.4 & -0.01 \\ -0.05 & -1.5 & -0.02 & -0.03 & 0.5 \\ \hline -0.2 & -1.1 & -16.0 & 0.0 & -0.3 \\ -1.0 & -0.4 & 0.0 & -16.5 & -0.1 \\ -0.5 & 0.0 & -0.5 & 0.2 & -17.0 \end{array} \right], \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\tilde{C} = [1 \ 1 \ | \ 0 \ 0 \ 1],$$

Le tracé des cercles est représenté sur la figure (III.4). On remarque deux ensembles disjoints des cercles, donc il y'a deux échelles de temps, et les sous-vecteurs

$\tilde{x}_1 = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2]^T$ et $\tilde{x}_2 = [\tilde{x}_3 \ \tilde{x}_4 \ \tilde{x}_5]^T$ sont respectivement lent et rapide et les valeurs initiales sont $\tilde{x}01 = [0 \ 0]^T$ et $\tilde{x}02 = [0 \ 0 \ 0]^T$.

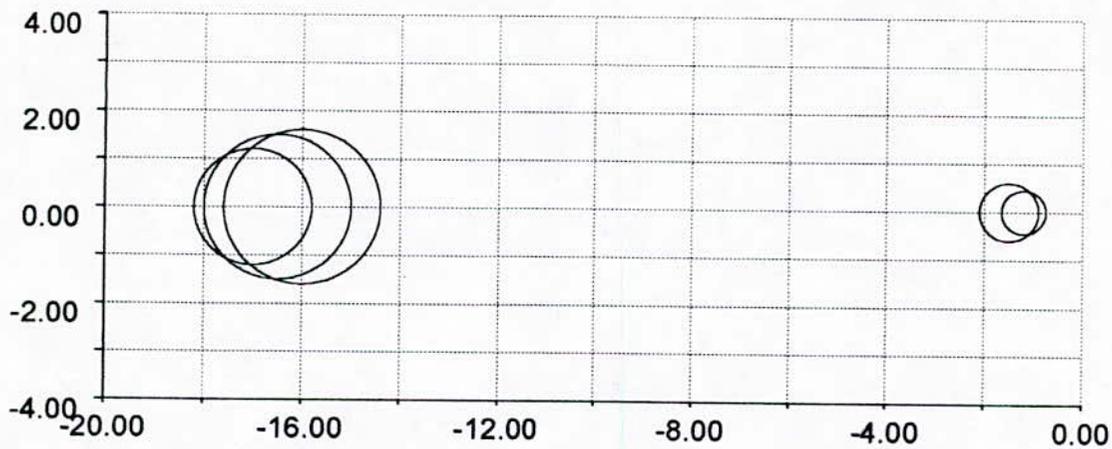


Fig.III.4. Cercles de Gerschgorin de l'exemple numérique considéré..

III.2.3.2. Application de la technique des perturbations singulières:

En appliquant les équations (2.25) à (2.31), les deux sous-systèmes sont :

1- Modèle réduit lent :

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}_{1l} = \begin{bmatrix} -1.1760 & 0.0069 \\ -0.0628 & -1.4970 \end{bmatrix} \tilde{x}_{1l} + \begin{bmatrix} -0.9758 \\ -0.0015 \end{bmatrix} \tilde{u}_l,$$

$$\tilde{y}_l = [0.9702 \ 1.0013] \tilde{x}_{1l} + [7.1336 * 10^{-4}] \tilde{u}_l \quad (3.12)$$

$$\tilde{x}_{2l} = \begin{bmatrix} -0.0119 & -0.0688 \\ -0.0604 & -0.0243 \\ -0.0298 & 0.0017 \end{bmatrix} \tilde{x}_{1l} + \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0606 \\ 0.0007 \end{bmatrix} \tilde{u}_l$$

avec : $\tilde{x}01 = [0 \ 0]^T$.

2- Modèle réduit rapide :

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{x}_{2r} = \begin{bmatrix} -16.0000 & 0.0000 & -0.3000 \\ 0.00000 & -16.5000 & -0.1000 \\ -0.5000 & 0.2000 & -17.0000 \end{bmatrix} \tilde{x}_{2r}(\tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}_r(\tau) \quad (3.13.a)$$

$$\tilde{y}_r(\tau) = [0 \ 1 \ 1] \tilde{x}_{2r}(\tau), \quad (3.13.b)$$

avec :

$$\tilde{x}_{02r} = \tilde{x}_{02} + \begin{bmatrix} 0.0119 & 0.0688 \\ 0.0604 & 0.0243 \\ 0.0298 & -0.0017 \end{bmatrix} \tilde{x}_{01} \quad (3.13.c)$$

On présente à la figure (III.5), les réponses indicielles du modèle initial et des modèles réduits lent et rapide.

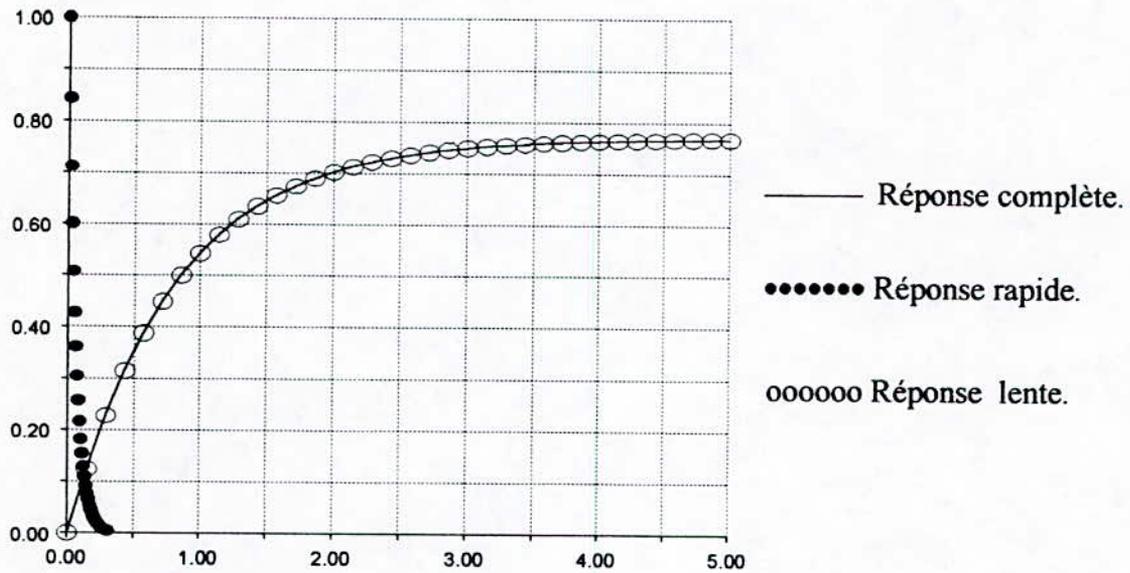


Fig.III.5.a. Réponses lente et rapide .

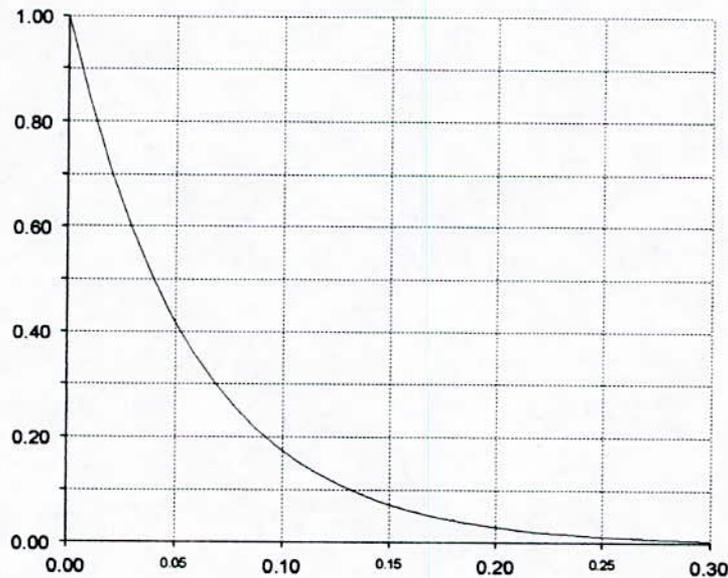


Fig.III.5.b. Réponse rapide .

III.3. CONCLUSION :

Cet exemple numérique montre clairement la simplicité et la souplesse lors de l'application de cet algorithme.

Ce dernier permet la séparation correcte des différentes dynamiques ainsi que l'application de la technique des perturbations singulières.

La méthode des cercles de Gerschgorin pour l'identification des dynamiques, peut être utilisée même si on ne connaît pas a priori les variables lentes et rapides. En effet, le calcul des valeurs propres donne un test sur le bon partitionnement du vecteur d'état global. Dans certains cas, il est nécessaire d'effectuer un calibrage (changement de base diagonal) qui transforme la matrice d'état initiale en une autre à diagonale dominante.

CHAPITRE IV

**MODELISATION
DE LA MACHINE
ASYNCHRONE**

INTRODUCTION :

Dans toutes les disciplines de l'Ingénieur, la modélisation tient une place importante ; la compréhension et l'amélioration de tout fonctionnement passent nécessairement par cette phase.

Dans ce chapitre, on présente le modèle mathématique de la machine asynchrone. Cette machine fonctionne en moteur, dont les phases du stator sont alimentées par un réseau triphasé de tensions sinusoïdales à fréquence et amplitude constantes ou par un onduleur de tension ou de courant à fréquence et à amplitude variables.

IV.1. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES :

Pour établir des relations simples entre les tensions d'alimentation de la machine et les courants statoriques et rotoriques, il faut faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

- On suppose que la machine est de construction symétrique équilibrée, tant au rotor qu'au stator.
- L'entrefer est d'épaisseur uniforme, (l'effet d'encochage est négligé).
- On ne tient compte que du premier harmonique d'espace de la distribution de la force magnétomotrice de chaque phase du stator (F.M.M à répartition sinusoïdale).
- On considère une densité de courant uniforme dans la section des conducteurs élémentaires. Les résistances des enroulements ne varient pas avec la température. L'effet de peau est négligé.

On néglige la saturation et l'hystérésis du circuit magnétique ainsi que les pertes par hystérésis et par courant de Foucault (tôles feuilletées).

Parmi les conséquences importantes de ces hypothèses :

1. Superposition des flux.
2. La constance des inductances propres.
3. La loi de variation sinusoïdale des inductances mutuelles entre les enroulements statoriques et rotoriques en fonction de l'angle électrique de leurs axes magnétiques.

IV.2. REPRESENTATION DE LA MACHINE DANS L'ESPACE ELECTRIQUE :

La machine est représentée à la figure (IV.1) par ces six enroulements dans l'espace électrique. L'angle θ repère l'axe de la phase rotorique de référence \vec{R}_a par rapport à l'axe fixe de la phase statorique \vec{S}_a .

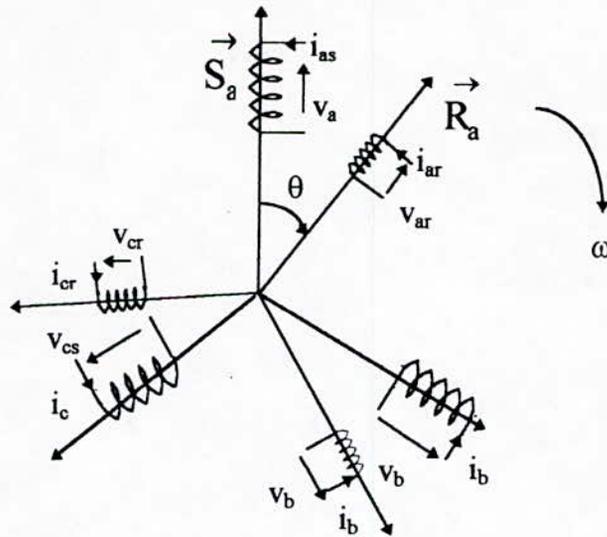


Fig.IV.1. Représentation des enroulements de la machine asynchrone triphasée.

IV.3. EQUATIONS ELECTRIQUES DE LA MACHINE :

Par application de la loi de Faraday à la machine asynchrone, la loi des mailles s'exprime par la relation :

$$v = R \cdot i + \frac{d\phi}{dt} \tag{4.1}$$

On déduit pour l'ensemble des phases ;
statoriques :

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{as} \\ \phi_{bs} \\ \phi_{cs} \end{bmatrix} \tag{4.2.a}$$

où :

$$[V_s] = [R_s] [I_s] + \frac{d}{dt} [\phi_s] \tag{4.2.b}$$

et rotoriques :

$$\begin{bmatrix} v_{ar} \\ v_{br} \\ v_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{ar} \\ \phi_{br} \\ \phi_{cr} \end{bmatrix} \tag{4.3.a}$$

où :

$$[V_r] = [R_r] [I_r] + \frac{d}{dt} [\phi_r] = [0] \tag{4.3.b}$$

IV.4. TRANSFORMATION DE PARK :

Transformation initiale : La transformation de Park, appelée souvent transformation des deux axes, fait correspondre aux variables réelles leurs composantes de Park figure.(IV.2) . Ce passage est assuré par une matrice de transformation $[P_0(\psi)]$

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} = [P_0(\psi)] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} ; x = v, i \quad (4.4)$$

Les expressions des matrices de passage de Park :

- directe :

$$[P(\psi)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \cos(\psi - 2\pi/3) & \cos(\psi - 4\pi/3) \\ -\sin(\psi) & -\sin(\psi - 2\pi/3) & -\sin(\psi - 4\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

- et inverse :

$$[P(\psi)]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\psi - 2\pi/3) & -\sin(\psi - 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\psi - 4\pi/3) & -\sin(\psi - 4\pi/3) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

- conserve l'invariance de la puissance instantanée.
- conduit à des schémas où les inductances mutuelles sont réciproques.

La transformation de Park consiste à appliquer aux courants, tensions et flux, un changement de variables faisant intervenir l'angle entre l'axe des enroulements et les axes 'd' et 'q'.

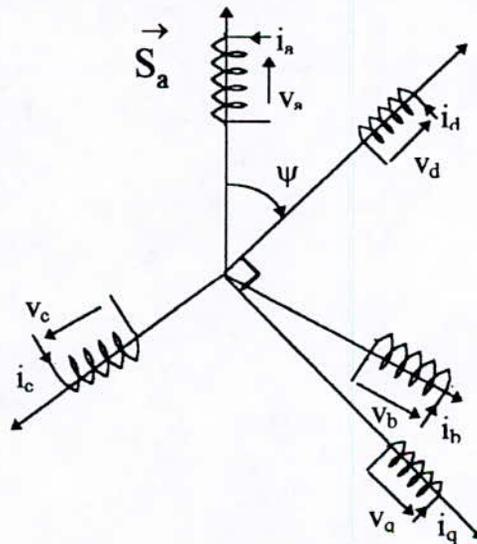


Fig.IV.2. Transformation système triphasé - système diphasé .

IV.5. APPLICATION A LA MACHINE ASYNCHRONE :

Pour rendre les coefficients du système d'équations du modèle de la machine asynchrone indépendantes de θ , on applique la transformation de Park. La figure (IV.3) permet de définir les divers référentiels et les relations spatiales qui les lient.

Deux transformations sont définies à partir de la matrice de Park, dans laquelle l'angle ψ est remplacé par θ_s pour les grandeurs statoriques et par θ_r pour celles du rotor, on les note respectivement :

$$[P(\theta_s)] \text{ et } [P(\theta_r)]$$

On désigne par :

θ_s : l'angle électrique(S_a, O_d).

θ_r : l'angle électrique(R_a, O_d).

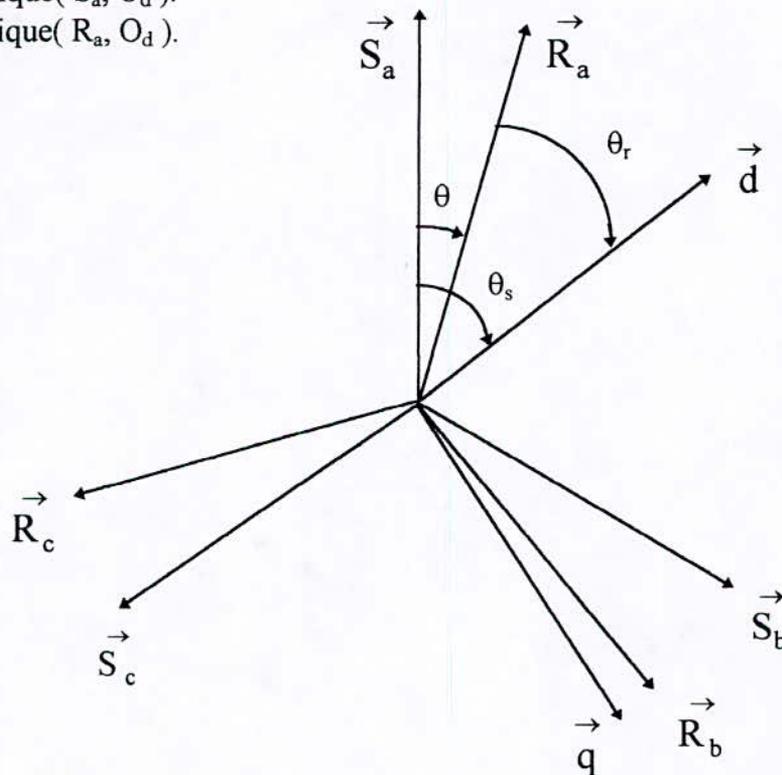


Fig.IV.3. Repérage angulaire des systèmes d'axes fictifs de la machine asynchrone.

On remarque sur la figure que θ_s et θ_r sont liés naturellement à θ par la relation rigide

$$\theta = \theta_s - \theta_r, \quad (4.7.a)$$

et par suite :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_s}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} \quad (4.7.b)$$

IV.6. MODELE DE PARK :

Si la machine est symétrique et équilibrée avec rotor en court-circuit, la substitution des enroulements fictifs S_d, S_q, R_d, R_q aux enroulements triphasés permet l'écriture des équations suivantes :

- Equations électriques :

$$v_{ds} = R_s \cdot i_{ds} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} - \frac{d\theta_s}{dt} \cdot \phi_{qs} \quad (4.8.a)$$

$$v_{qs} = R_s \cdot i_{qs} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} + \frac{d\theta_s}{dt} \cdot \phi_{ds} \quad (4.8.b)$$

$$v_{dr} = R_r \cdot i_{dr} + \frac{d\phi_{dr}}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} \cdot \phi_{qr} \quad (4.8.c)$$

$$v_{qr} = R_r \cdot i_{qr} + \frac{d\phi_{qr}}{dt} + \frac{d\theta_r}{dt} \cdot \phi_{dr} \quad (4.8.d)$$

- Equations magnétiques :

$$\phi_{ds} = L_s \cdot i_{ds} + M \cdot i_{dr} \quad (4.9.a)$$

$$\phi_{qs} = L_s \cdot i_{qs} + M \cdot i_{qr} \quad (4.9.b)$$

$$\phi_{qr} = L_r \cdot i_{qr} + M \cdot i_{ds} \quad (4.9.c)$$

$$\phi_{dr} = L_r \cdot i_{dr} + M \cdot i_{qs} \quad (4.9.d)$$

ou :

$$i_{ds} = \frac{1}{\sigma L_s} \cdot \phi_{ds} - \frac{M}{\sigma L_s L_r} \cdot \phi_{dr} \quad (4.10.a)$$

$$i_{qs} = \frac{1}{\sigma L_s} \cdot \phi_{qs} - \frac{M}{\sigma L_s L_r} \cdot \phi_{qr} \quad (4.10.b)$$

$$i_{dr} = -\frac{M}{\sigma L_s L_r} \cdot \phi_{ds} + \frac{1}{\sigma L_r} \cdot \phi_{dr} \quad (4.10.c)$$

$$i_{qr} = -\frac{M}{\sigma L_s L_r} \cdot \phi_{qs} + \frac{1}{\sigma L_r} \cdot \phi_{qr} \quad (4.10.d)$$

La machine diphasée sera représentée dans l'espace électrique par la figure (IV.4)

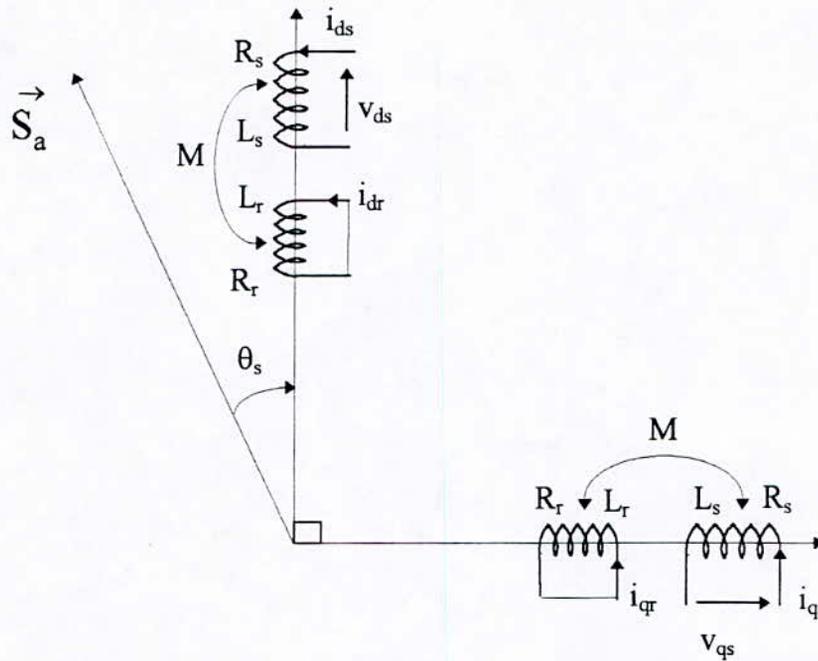


Fig. IV.4. Représentation des enroulements fictifs d'axes 'd' et 'q'.

IV.7. CHOIX DU REFERENTIEL :

Ils existent différentes possibilités concernant le choix du repère d'axe d,q qui dépendent des objectifs de l'application.

1. Axe tournant à la vitesse du rotor ($\theta_r = 0$) : étude des grandeurs statoriques.
2. Axe liés au stator ($\theta_s = 0$) : étude des grandeurs rotoriques.
3. Axe solidaire du champ tournant : étude de la commande.

On désigne par:

- $\omega_s = \frac{d\theta_s}{dt}$, la vitesse angulaire des axes d, q dans le repère statorique.
- $\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}$, la vitesse angulaire des axes d, q dans le repère rotorique.

de sorte qu'à partir de l'expression ($\theta = \theta_s - \theta_r$), il se déduit par dérivation :

$$\omega_s - \omega_r = \frac{d\theta}{dt} \tag{4.11}$$

Les équations électriques de la machine s'écrivent :

$$v_{ds} = R_s \cdot i_{ds} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} - \omega_s \cdot \phi_{qs} \tag{4.12.a}$$

$$v_{qs} = R_s \cdot i_{qs} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} + \omega_s \cdot \phi_{ds} \quad (4.12.b)$$

$$0 = R_r \cdot i_{dr} + \frac{d\phi_{dr}}{dt} - \omega_r \cdot \phi_{qr} \quad (4.12.c)$$

$$0 = R_r \cdot i_{qr} + \frac{d\phi_{qr}}{dt} + \omega_r \cdot \phi_{dr} \quad (4.12.d)$$

IV.7.1. Référentiel lié au stator :

Il se traduit par les relations :

$$\theta_s = 0, \theta_r = \theta. \quad (4.13)$$

On obtient le système d'équations suivant :

Ce référentiel est choisi dans le cas des dérivations importantes de la vitesse de rotation associés ou non à des variations de la fréquence d'alimentation.

IV.7.2. Référentiel lié au rotor :

Il se traduit par les relations :

$$\theta_r = 0, \theta_s = \theta. \quad (4.14)$$

Ce choix est intéressant dans l'étude des régimes transitoires ou la vitesse de rotation est constante.

IV.7.3. Référentiel lié au champ tournant :

Il se traduit par la relation :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_{syn}. \quad (4.15)$$

avec : ω_{syn} , la vitesse synchrone.

On choisi ce référentiel lorsqu'on veut étudier des problème de commande.

IV.8. COUPLE ELECTROMAGNETIQUE :

L'expression du couple électromagnétique de la machine s'écrit :

$$C_{em} = [I_s] \cdot \frac{d}{dt} \{ [M_{sr}] \cdot [I_r] \} \quad (4.16)$$

Après utilisation de la transformation de Park, on aboutit à l'expression :

$$C_{em} = p \cdot M (i_{dr} \cdot i_{qs} - i_{ds} \cdot i_{qr}) \quad (4.17)$$

En utilisant les expressions (4.9) et (4.10), d'autres expressions du couple électromagnétique peuvent être obtenues :

$$C_{em} = p \cdot M \cdot (\phi_{qs} \cdot \phi_{dr} - \phi_{ds} \cdot \phi_{qr}) \quad (4.18)$$

$$C_{em} = p \cdot (\phi_{qr} \cdot i_{dr} - \phi_{dr} \cdot i_{qr}) \quad (4.19)$$

$$C_{em} = p \cdot (\phi_{ds} \cdot i_{qs} - \phi_{qr} \cdot i_{dr}) \quad (4.20)$$

$$C_{em} = p \cdot \frac{M}{L_s} \cdot (\phi_{qs} \cdot i_{dr} - \phi_{ds} \cdot i_{qr}) \quad (4.21)$$

$$C_{em} = p \cdot \frac{M}{L_r} \cdot (\phi_{dr} \cdot i_{qs} - \phi_{qr} \cdot i_{ds}) \quad (4.22)$$

IV.9. COUPLAGE AVEC L'EQUATION MECANIQUE :

L'équation la plus simple d'un mobile en rotation est de la forme :

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega = C_{em} - C_r \quad (4.23)$$

avec :

J : moment d'inertie de la partie tournante.

Ω : vitesse angulaire de rotation

f : coefficient de frottement visqueux.

C_r : Couple résistant.

IV.10. REPRESENTATION D'ETAT :

IV.10.1 Description :

Pour une machine asynchrone triphasée alimentée en tension, les tensions statoriques (v_{ds} , v_{qs}) et la vitesse du champ tournant (ω_{syn}) sont considérées comme variables de commande, le couple résistant (C_r) comme perturbation. Nous choisissons le référentiel lié aux champ tournant, le modèle de la machine est représenté par les équations (4.8) à (4.12) en supposant $v_{dr} = 0$, $v_{qr} = 0$.

IV.10.2 Equations d'état

Nous pouvons choisir les courants statoriques, les courants rotoriques et la vitesse électrique ($i_{ds}, i_{qs}, i_{dr}, i_{qr}, \omega$) ou les flux statoriques, les flux rotoriques et la vitesse électrique ($\phi_{ds}, \phi_{qs}, \phi_{dr}, \phi_{qr}, \omega$) ou les flux statoriques, les courants statoriques et la vitesse électrique ($\phi_{ds}, \phi_{qs}, i_{dr}, i_{qr}, \omega$) comme variables d'état.

1. Considérons tout d'abord les courants statoriques, les courants rotoriques et la vitesse électrique ($i_{ds}, i_{qs}, i_{dr}, i_{qr}, \omega$) comme variables d'état, après réarrangement des équations (4.8) à (4.12), nous obtenons :

• Equations électriques :

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + B \cdot U \tag{4.24.a}$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{bmatrix} \tag{4.24.b}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega & \frac{M}{\sigma L_s T_r} & \frac{M}{\sigma L_s} \omega \\ -(\omega s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega) & -\frac{1}{\sigma T_s} & \frac{M}{\sigma L_s} \omega & \frac{M}{\sigma L_s T_r} \\ \frac{M}{\sigma L_r T_s} & -\frac{M}{\sigma L_r} \omega & -\frac{1}{\sigma T_r} & \omega s - \frac{1}{\sigma} \omega \\ \frac{M}{\sigma L_r} \omega & \frac{M}{\sigma L_r T_s} & -(\omega s - \frac{1}{\sigma} \omega) & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix} \tag{4.24.c}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ -\frac{M}{\sigma L_s L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{M}{\sigma L_s L_r} \end{bmatrix} \tag{4.24.d}$$

Equation mécanique :

$$\frac{d\omega}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{p^2 M}{J} i_{qr} & \frac{p^2 M}{J} i_{dr} & 0 & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ \omega \end{bmatrix} - \frac{p}{J} \cdot [C_r] \tag{4.24.e}$$

2. Considérons ensuite les flux statiques, les flux rétorques et la vitesse électrique (ϕ_{ds} , ϕ_{qs} , ϕ_{dr} , ϕ_{qr} , ω) comme variables d'état, après arrangement des équations (4.8) à (4.12), nous obtenons :

- Equations électriques :

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + B \cdot U \quad (4.25.a)$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ \phi_{dr} \\ \phi_{qr} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{bmatrix} \quad (4.25.b)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega s & \frac{M}{\sigma L_r T_s} & 0 \\ -\omega s & -\frac{1}{\sigma T_s} & 0 & \frac{M}{\sigma L_r T_s} \\ \frac{M}{\sigma L_s T_r} & 0 & -\frac{1}{\sigma T_r} & \omega s - \omega \\ 0 & \frac{M}{\sigma L_s T_r} & -(\omega s - \omega) & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix} \quad (4.25.c)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25.d)$$

- Equation mécanique :

$$\frac{d\omega}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{p^2 M}{J \sigma L_s L_r} \phi_{qr} & \frac{p^2 M}{J \sigma L_s L_r} \phi_{dr} & 0 & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ \omega \end{bmatrix} - \frac{p}{J} \cdot [C_r] \quad (4.25.e)$$

3. Considérons enfin les flux statoriques, les courants statoriques et la vitesse électrique ($\phi_{ds}, \phi_{qs}, i_{ds}, i_{qs}, \omega$) comme variables d'état, après arrangement des équations(4.8) à (4.12), nous obtenons :

- Equations électriques :

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + B \cdot U \tag{4.26.a}$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qs} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{bmatrix} \tag{4.26.b}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega s & -R_s & 0 \\ -\omega s & 0 & 0 & -R_s \\ \frac{1}{\sigma L_s T_r} & \frac{1}{\sigma L_s} \omega & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_r} \right) & \omega s - \omega \\ \frac{1}{\sigma L_s} \omega & \frac{1}{\sigma L_s T_r} & -(\omega s - \omega) & \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_r} \right) \end{bmatrix} \tag{4.26.c}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \end{bmatrix} \tag{4.26.d}$$

- Equation mécanique :

$$\frac{d\omega}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{p^2}{J} i_{qs} & \frac{p^2}{J} i_{ds} & 0 & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ \omega \end{bmatrix} - \frac{p}{J} \cdot [Cr] \tag{4.26.e}$$

IV.11.1. Simulations numériques :

Nous utilisons le modèle d'état représenté par les équations (4.24), pour la simulation numérique. Les autres grandeurs (courant statoriques et rotoriques), sont déduites à partir des équations (4.9) et les grandeurs réelles sont obtenues par application de la transformation inverse de Park.

La machine étant alimentée par un système de tension triphasées équilibrées de valeur efficace de 220V, et le repère d,q est lié au champ tournant.

Nous avons simulé le modèle précédent figure (IV.5), pour deux essais typiques :

1. Démarrage à vide de la machine asynchrone.
2. Démarrage puis application d'un échelon de couple résistant en régime permanent.

IV.11.2. Interprétation :

Le démarrage sous la pleine tension à vide permet d'avoir un établissement rapide (0.31 s) des flux et des courants statoriques et rotoriques, et de la vitesse avec un couple électromagnétique maximum instantané de 135 N·m.

Le temps de démarrage est donc de (0.31 s) et i_{ds} se stabilise à une valeur proche de zéro après avoir atteint une valeur maximale de crête égale à (63 A), alors que le courant i_{qs} prend une valeur constante.

Le couple électromagnétique se stabilise à une valeur de (1.56 N·m) qui compense les pertes par frottements et ventilations.

D'autre part, on remarque un appel considérable des courants de lignes au démarrage (environ 63 A).

L'introduction de la perturbation provoque une diminution de la vitesse (jusqu'à 300 rad/s) traduit par un glissement supplémentaire de la machine, le couple électromagnétique compense instantanément cette sollicitation.

Parmi les composantes statoriques, seul le courant i_{ds} subit une variation remarquable.

IV.11.3 CONCLUSION :

Ce chapitre nous a permis de présenter une formulation originale des modèles pour la machine asynchrone triphasée associée à sa source d'alimentation.

Comme le choix des variables d'état est un élément fondamental pour le domaine de la *modélisation* et de la *simulation*, nous avons alors présenté les modèles d'état les plus utilisés dans ce domaine.

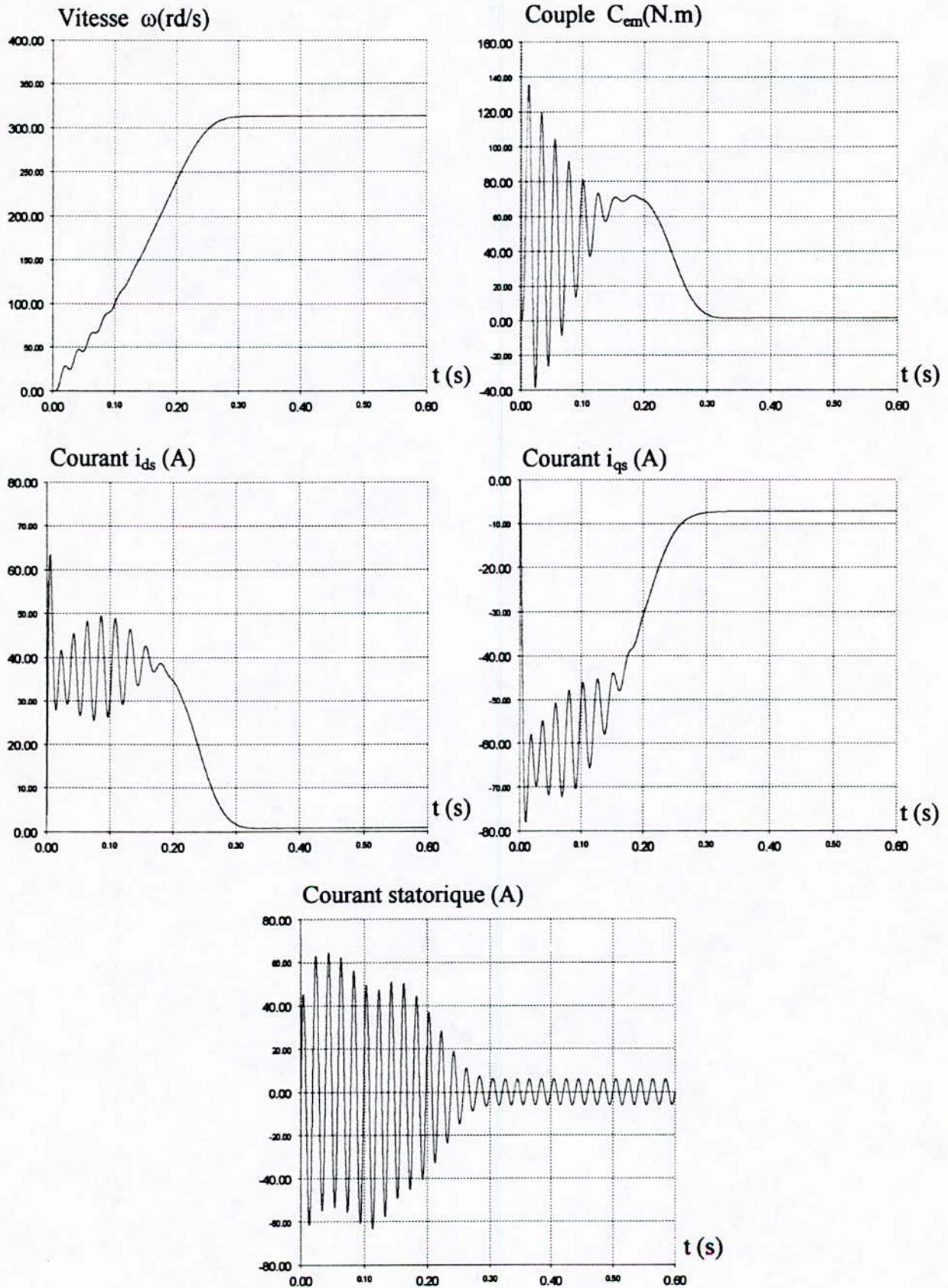


Fig.III.4.a. Démarrage à vide d'un moteur asynchrone couplé directement au réseau.

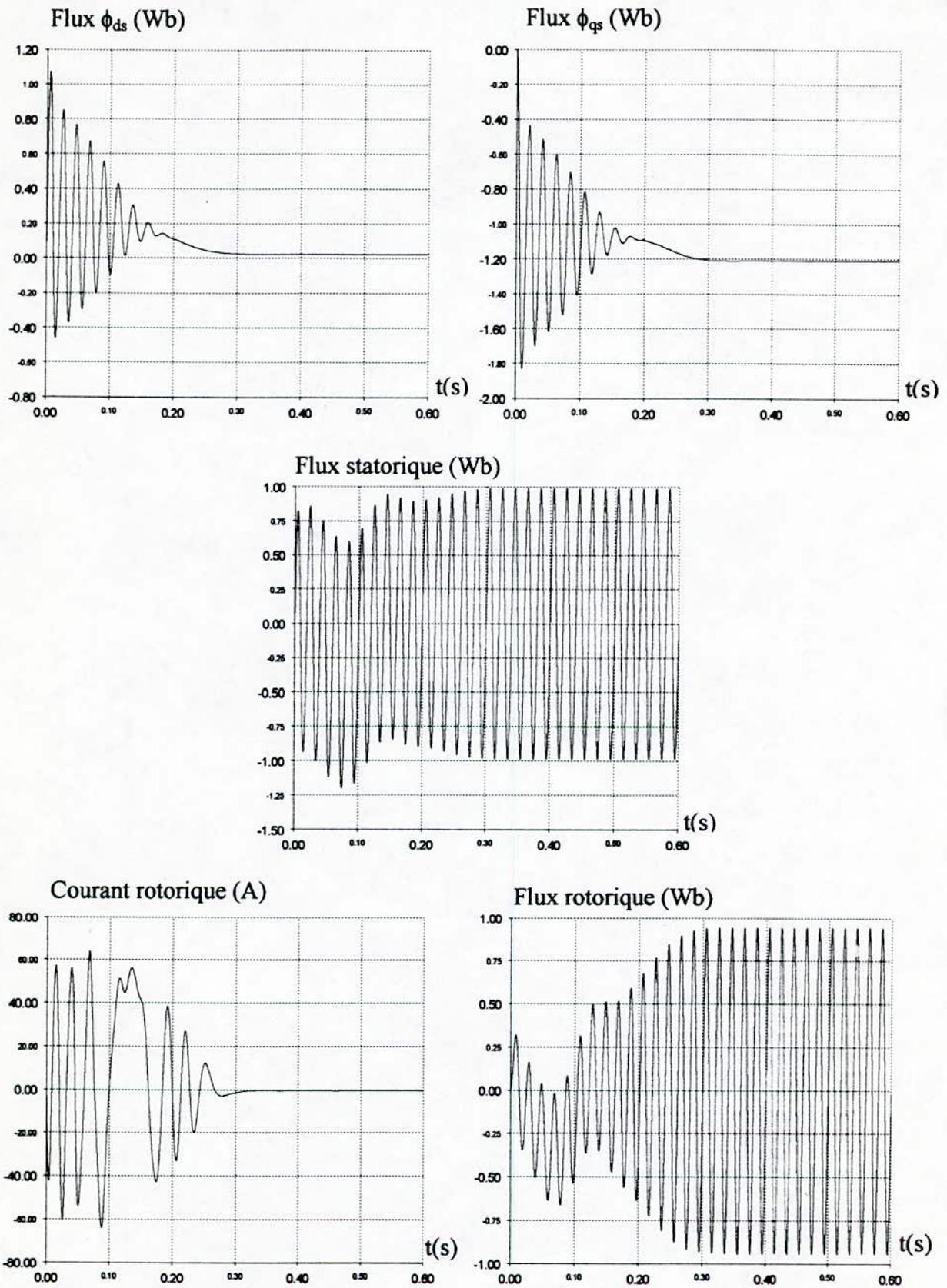


Fig.III.4.b. Démarrage à vide d'un moteur asynchrone couplé directement au réseau.

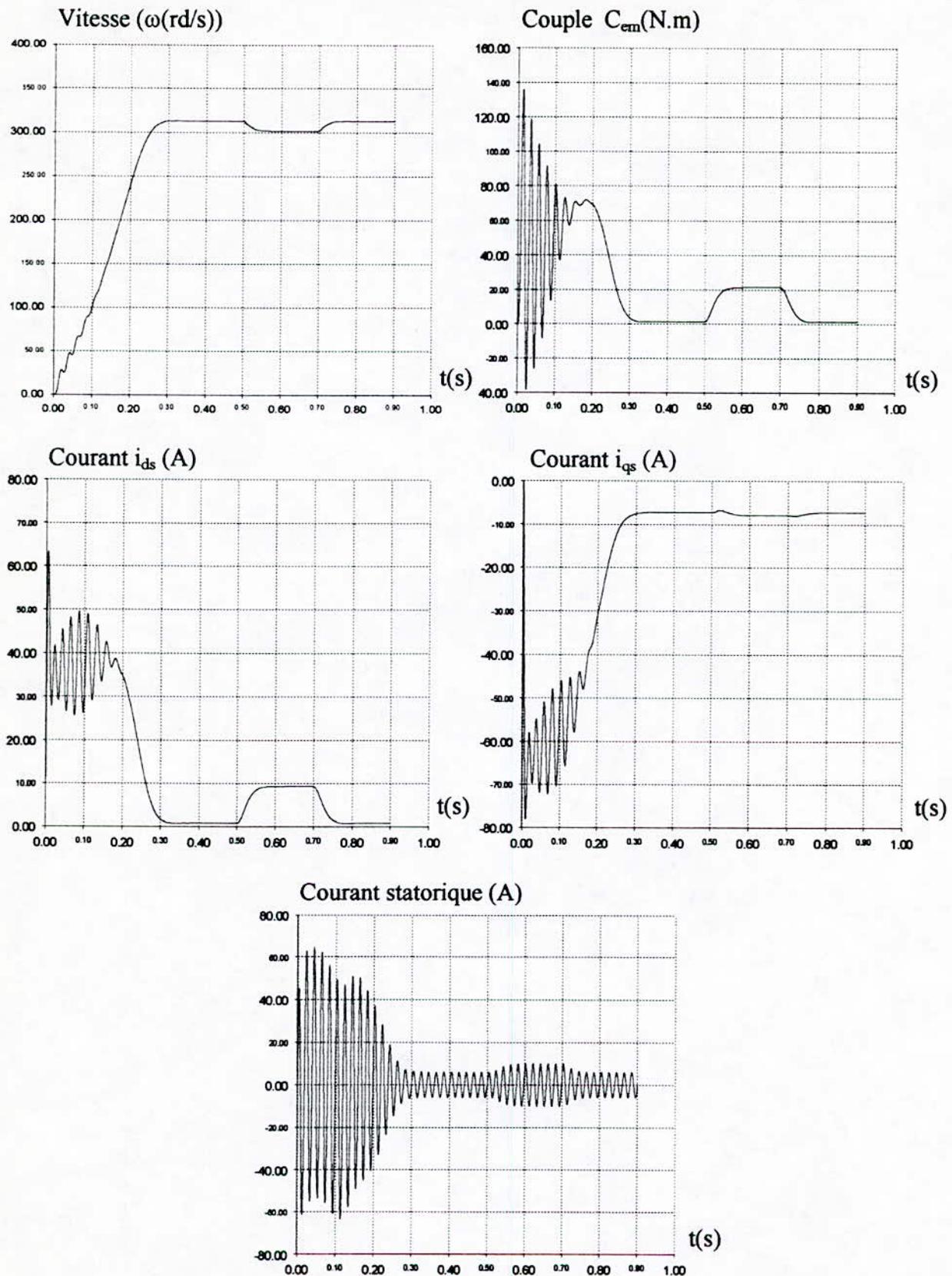


Fig.III.5.a. Démarrage à vide et réponse à une perturbation de couple résistant de (20 N·m).

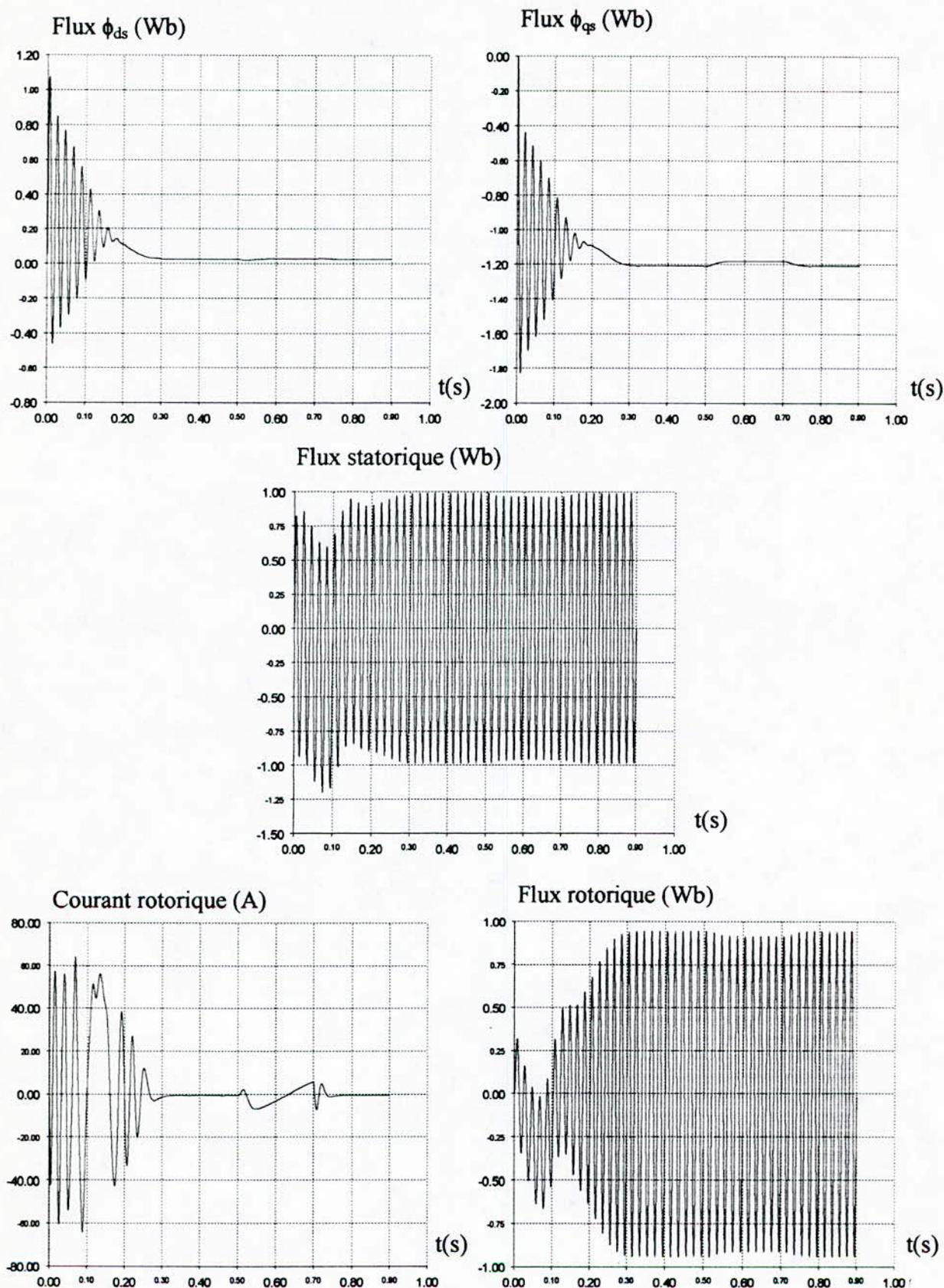


Fig.III.5.b. Démarrage à vide et réponse à une perturbation de couple résistant de (20 N·m).

CHAPITRE V

**APPLICATION
DES CERCLES DE
GERSCHGORIN
AU MODELE
DE LA MACHINE
ASYNCHRONE**

V.1. LE PROBLEME DE LA DYNAMIQUE :

La cartographie des pôles et des zéros donne une bonne approche visuelle des modes dynamiques d'un système, notamment du comportement dominant et peut être une aide précieuse pour l'analyse et la compréhension du processus.

L'expression matricielle (4.8) du modèle électrique de la machine est à coefficients variables avec les vitesses angulaires ω_s et ω_r . Il s'agit donc d'un système non linéaire et il n'est normalement pas possible d'établir des fonctions de transfert explicitant des relations opérationnelles entre les entrées et les sorties.

V.1.1. LES MODES ELECTROMAGNETIQUES :

Les expressions (4.8) peuvent être mises sous la forme d'une équation différentielle généralisée :

$$[U] = [R] \cdot [I] + [L] \cdot \frac{d}{dt} [I] \tag{5.1.a}$$

avec :

$$[U] = [v_{ds}; v_{qs}; 0; 0], \quad [I] = [i_{ds}; i_{qs}; i_{dr}; i_{qr}]. \tag{5.1.b}$$

Mise sous forme d'équation d'état, cette équation devient :

$$\frac{d}{dt} [I] = [A] \cdot [I] + [B] \cdot [U], \tag{5.2.a}$$

avec :

$$[A] = -[L]^{-1} \cdot [R], \text{ et } [B] = [L]^{-1}. \tag{5.2.b}$$

Soit la matrice d'évolution :

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \tag{5.3.a}$$

Pour laquelle :

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_s} & \omega_s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega \\ -(\omega_s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega) & -\frac{1}{\sigma T_s} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sigma T_s} \cdot I_2 - (\omega_s + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega) \cdot J \tag{5.3.b}$$

$$[A_{12}] = \begin{bmatrix} \frac{M}{\sigma L_s T_r} & \frac{M}{\sigma L_s \omega} \\ -\frac{M}{\sigma L_s \omega} & \frac{M}{\sigma L_s T_r} \end{bmatrix} = \frac{M}{\sigma L_s T_r} \cdot I_2 - \frac{M}{\sigma L_s \omega} \cdot J \quad (5.3.c)$$

$$[A_{21}] = \begin{bmatrix} \frac{M}{\sigma L_r T_s} & \frac{M}{\sigma L_r \omega} \\ -\frac{M}{\sigma L_r \omega} & \frac{M}{\sigma L_r T_s} \end{bmatrix} = \frac{M}{\sigma L_r T_s} \cdot I_2 - \frac{M}{\sigma L_r \omega} \cdot J \quad (5.3.d)$$

$$[A_{22}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma T_r} & (\omega_s - \frac{1}{\sigma} \omega) \\ -(\omega_s - \frac{1}{\sigma} \omega) & -\frac{1}{\sigma T_r} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sigma T_r} \cdot I_2 - (\omega_s - \frac{1}{\sigma} \omega) \cdot J \quad (5.3.e)$$

et la matrice d'application des entrées :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ -\frac{1}{\sigma L_s L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sigma L_s L_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} I_2 \\ -\frac{M}{\sigma L_s L_r} I_2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

avec :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.5)$$

et J une matrice de rotation de 90° .

Les pôles de ce système sont donc les valeurs propres de la matrice d'évolution, obtenues en recherchant les racines du déterminant de la matrice de transition. Ces racines caractéristiques précisent la dynamique des modes électriques propres à la machine et sont les éléments non nuls de la matrice diagonale $[D_\lambda]$, semblable à $[A]$

L'analyse avec des valeurs numériques montre que cette matrice prend la forme générale suivante :

$$[D_\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (5.6.a)$$

où :

$$\lambda_1 = -\xi \omega_n + j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^* \quad (5.6.b)$$

$$\lambda_3 = -\xi' \omega'_n + j \omega'_n \sqrt{1 - \xi'^2}, \quad \lambda_4 = \lambda_3^* \quad (5.6.c)$$

et, que par un changement de base approprié, on peut revenir à une partition en blocs réels, soit :

$$\left[\hat{A} \right] = \begin{bmatrix} -\xi \omega_n & \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} & 0 & 0 \\ -\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} & -\xi \omega_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi' \omega'_n & \omega'_n \sqrt{1 - \xi'^2} \\ 0 & 0 & -\omega'_n \sqrt{1 - \xi'^2} & -\xi' \omega'_n \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

De cette disposition, il en résulte deux modes électromagnétiques oscillatoires, quel que soit le point de fonctionnement. Les pulsation naturelles ω_n et ω'_n , et les facteurs d'amortissements ξ_n et ξ'_n sont ainsi des paramètres du polynôme du quatrième ordre caractérisant la partie électrique du processus machine asynchrone.

La figure (V.1) donne, dans le plan complexe les zones qu'occupent les pôles complexes représentant les deux modes lorsque la pulsation statorique varie de 0 à 314 rad/s sachant que la pulsation rotorique n'excède jamais 31.4 rad/s, et ce pour les deux premières machines du tableau (V.1).

	$R_s(\Omega)$	$L_s(H)$	$R_r(\Omega)$	$L_r(H)$	$M(H)$	$J (kg \cdot m^2)$
MACHINE 1	5.793	0.386	3.421	0.386	0.363	0.018
MACHINE 2	1.100	0.16734	1.465	0.16734	0.160	0.092
MACHINE 3	1.200	0.1554	1.000	0.1554	0.150	0.066
MACHINE 4	1.000	0.250	1.630	0.250	0.242	0.070

Tableau V.1 : Exemples de machines asynchrones.[1]

Ces résultats confirment qualitativement le comportement global de la machine, lors d'un démarrage direct sur le réseau. On remarque l'importance de la partie imaginaire du modèle qui devient dominant au fur et à mesure que diminue la pulsation statorique. Cette tendance révèle un découplage des modes pour les faibles valeurs ω_s , mais il est ainsi prouvé qu'une commande de la machine asynchrone à forte dynamique ne peut être réalisée qu'en contrôlant les grandeurs instantanées, lorsque la qualité du couple moteur est un facteur important pendant les régimes transitoires.

Remarque :

Il existe différentes représentations d'un processus en raison du multiple choix possible pour le vecteur d'état lui-même. Dans cas présent, le vecteur constitué des quatre flux (ϕ_{ds} , ϕ_{qs} , ϕ_{dr} , ϕ_{qr}) ou ce lui constitué des flux et des courants statoriques (ϕ_{ds} , ϕ_{qs} , i_{ds} , i_{qs}) sont vecteurs d'état.

Cette diversité ne remet évidemment pas en cause les modes électromagnétiques puisque dans tous les cas le déterminant reste le même, donc les valeurs propres également.

V.1.2. LE MODE ELECTROMAGNETIQUE :

Chacune des configurations de quatre pôles des modes électromagnétiques est donnée par une vitesse constante de rotation de l'arbre, puisque les vitesses ω et ω' sont elles mêmes fixées.

Dans ces conditions, l'accélération $\frac{d\Omega}{dt}$ est nulle et le couple moteur C_e peut être considéré égal à sa valeur moyenne pour le point de fonctionnement considéré .

Cette hypothèse permet d'analyser le mode électromécanique pour des petits mouvements (petites variations de la vitesse de rotation).

En régime permanent le couple électromagnétique s'exprime par la relation suivante :

$$C_{em} = 3 \cdot p \cdot \phi_s^2 \cdot \frac{R \cdot \omega_r}{R^2 + (N \cdot \omega_r)^2} \quad (5.8)$$

avec :

ω_r : la pulsation des grandeurs rotoriques.

R : la résistance d'une phase rotorique ramenée au stator.

$$R = R_r \cdot \left(\frac{L_s}{M} \right)^2 ; \quad (5.9)$$

N : l'inductance de fuite rotorique totalisée ramenées au stator.

$$N = \sigma \cdot L_r \cdot \left(\frac{L_s}{M} \right)^2 ; \quad (5.10)$$

à partir de l'expression (5.8), et en considérant $N \cdot \omega_r \ll R$, on obtient :

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} = 3 \cdot p \cdot \frac{\phi_s^2}{R} \cdot \omega_r - C_r . \quad (5.11)$$

En remplaçant ω_r par $\omega_s - p\Omega$ et en choisissant la valeur nominale du flux statorique, il vient :

$$\tau_m \cdot \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \Omega_{sn} - \frac{1}{K_m} C_r \quad (5.12)$$

$$\tau_m = \frac{J \cdot R}{3 \cdot P^2 \cdot \phi_{Sn}^2}, \quad K_r = \frac{R}{3 \cdot P^2 \cdot \phi_{Sn}^2} \text{ et } \phi_{sn} = \frac{V_{Sn}}{\omega_{Sn}} \quad (5.13)$$

τ_m représente une constante de temps électromécanique de même nature que celle du moteur à courant continu.

Pour les machines du tableau (V.1), on calcul les modes électromécaniques. Le flux nominal est donné à une tension de 220V à 314.16 rad/s. Les pôles correspondants $P_m = -\omega_m$ sont reportés sur le tableau (V.2).

MACHINE	MAS_1	MAS_2	MAS_3	MAS_4
Pôle électromagnétique (P_m)	-120.68	-57.00	-118.63	-68.78

Tableau.V.2 Exemples des modes électromécaniques.

Remarque :

En comparant aux résultats précédents, la conclusion est immédiate : le mode électromécanique ne peut être considéré découplé pour des valeurs élevées du moments d'inertie et de la pulsation statorique(ω_s). Une telle disposition placerait le pôle électromécanique proche de l'origine et éloigné des modes électromagnétiques.

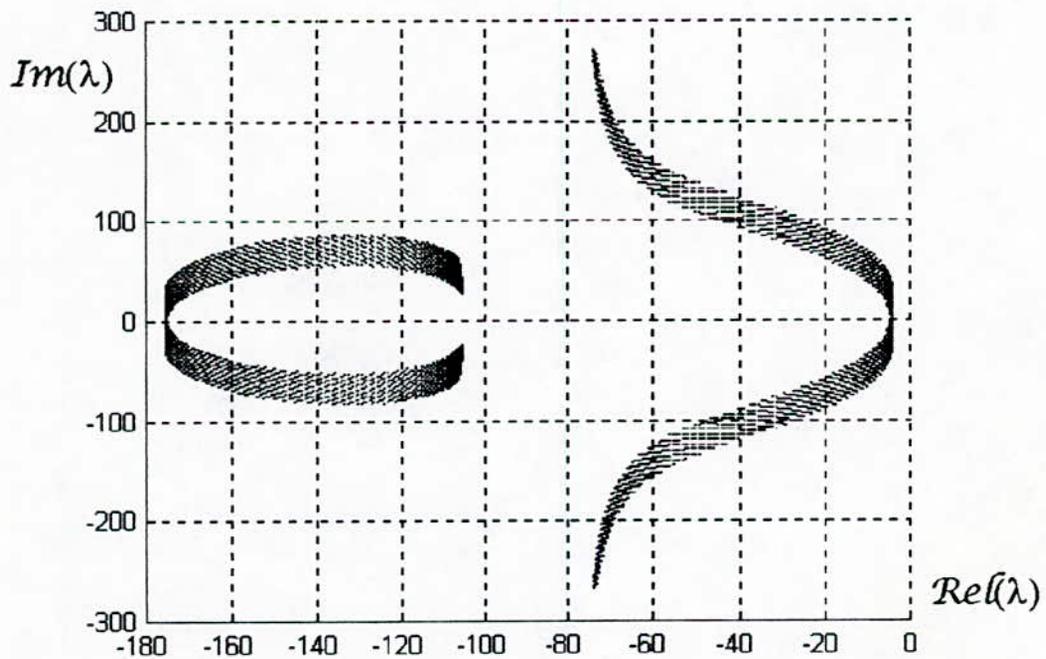
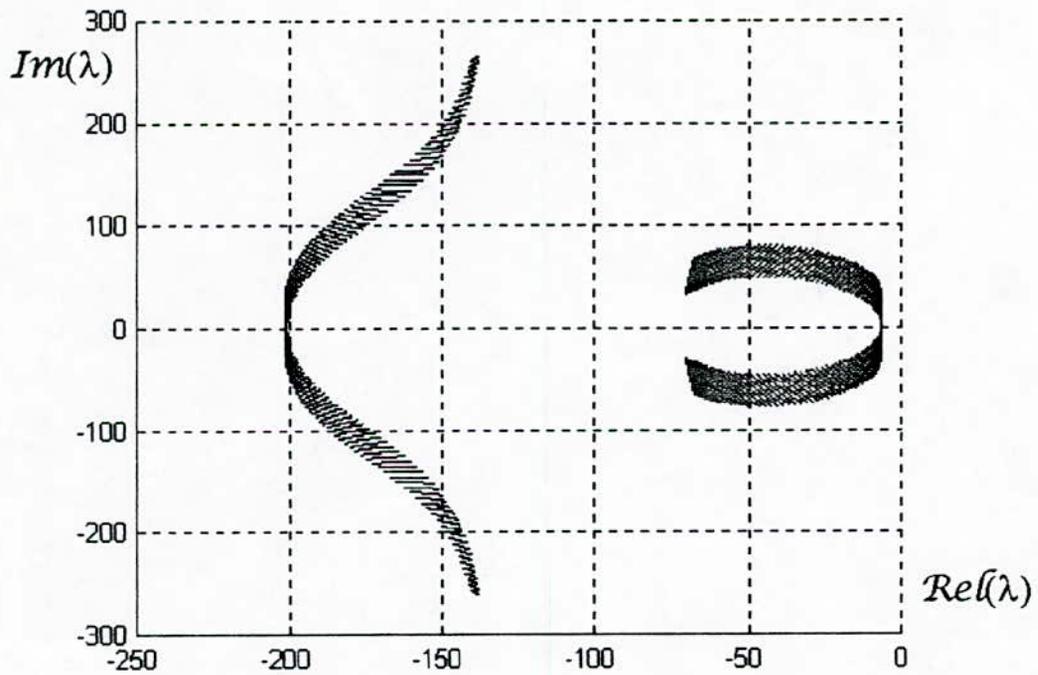


Fig. V.2.a. Configuration des modes électromagnétiques et du mode mécanique pour les machines MAS_1 et MAS_2 .

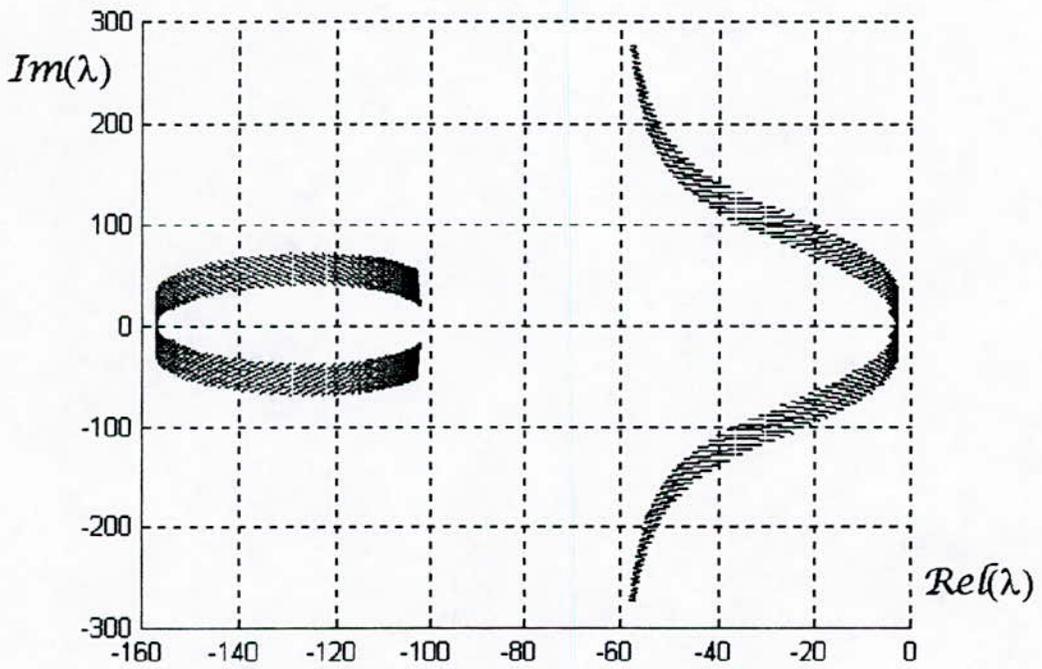
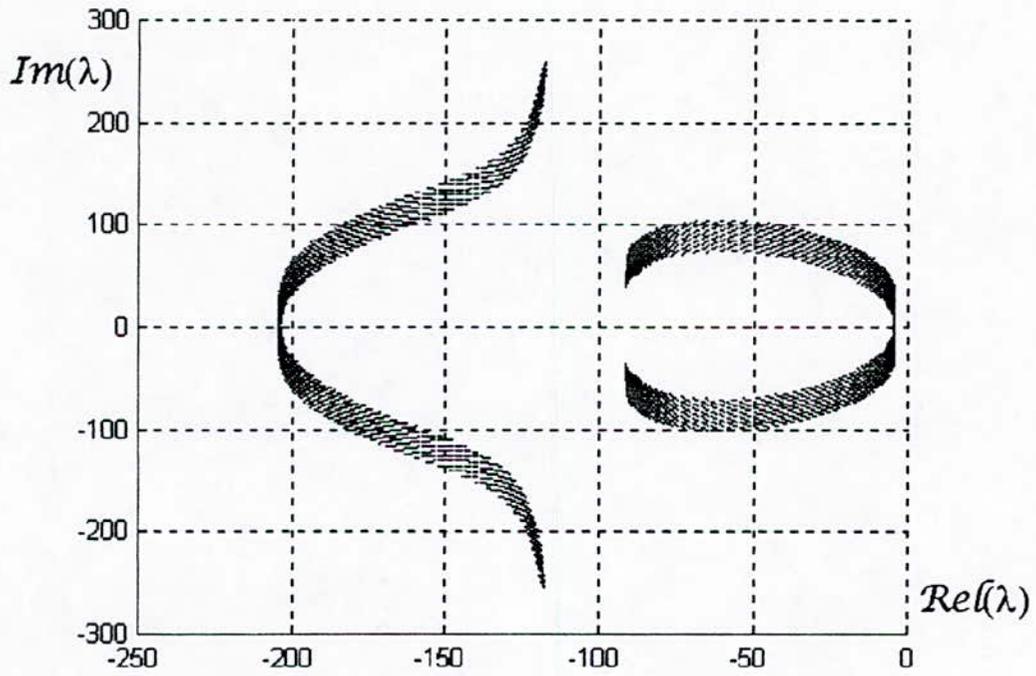


Fig.V.2.b. Configuration des modes électromagnétiques et du mode mécanique pour les machines MAS_3 et MAS_4 .

V.2. DECOMPOSITION DE LA TRANSFORMATION DE PARK :

Lorsque la valeur zéro est attribuée à l'angle ψ , la transformation de Park ainsi particularisée porte le nom de transformation de Concordia [C], et les axes d,q sont habituellement désignés par α, β .

Le passage aux axes d,q s'effectue tout simplement au moyen de la matrice de rotation $[R(\psi)]$ de sorte que :

$$[P(\psi)] = [C] \cdot [R(\psi)], \quad (5.14)$$

avec :

$$[X_{\alpha\beta 0}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [X_{abc}] \quad (5.15)$$

et :

$$[X_{dq0}] = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [X_{\alpha\beta 0}] \quad (5.16)$$

Dans le cas de la machine asynchrone triphasée équilibrée, cette décomposition permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s I_2 & 0 \\ 0 & R_r I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s\alpha\beta} \\ I_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad (5.17.a)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s I_2 & M \cdot R(-\theta) \\ M \cdot R(\theta) & L_r I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s\alpha\beta} \\ I_{r\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad (5.17.b)$$

$$C_{em} = p \cdot M \cdot I_{s\alpha\beta}^T \cdot R(-\theta) \cdot J \cdot I_{r\alpha\beta}, \quad (5.17.c)$$

avec :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

J est matrice de rotation de 90° .

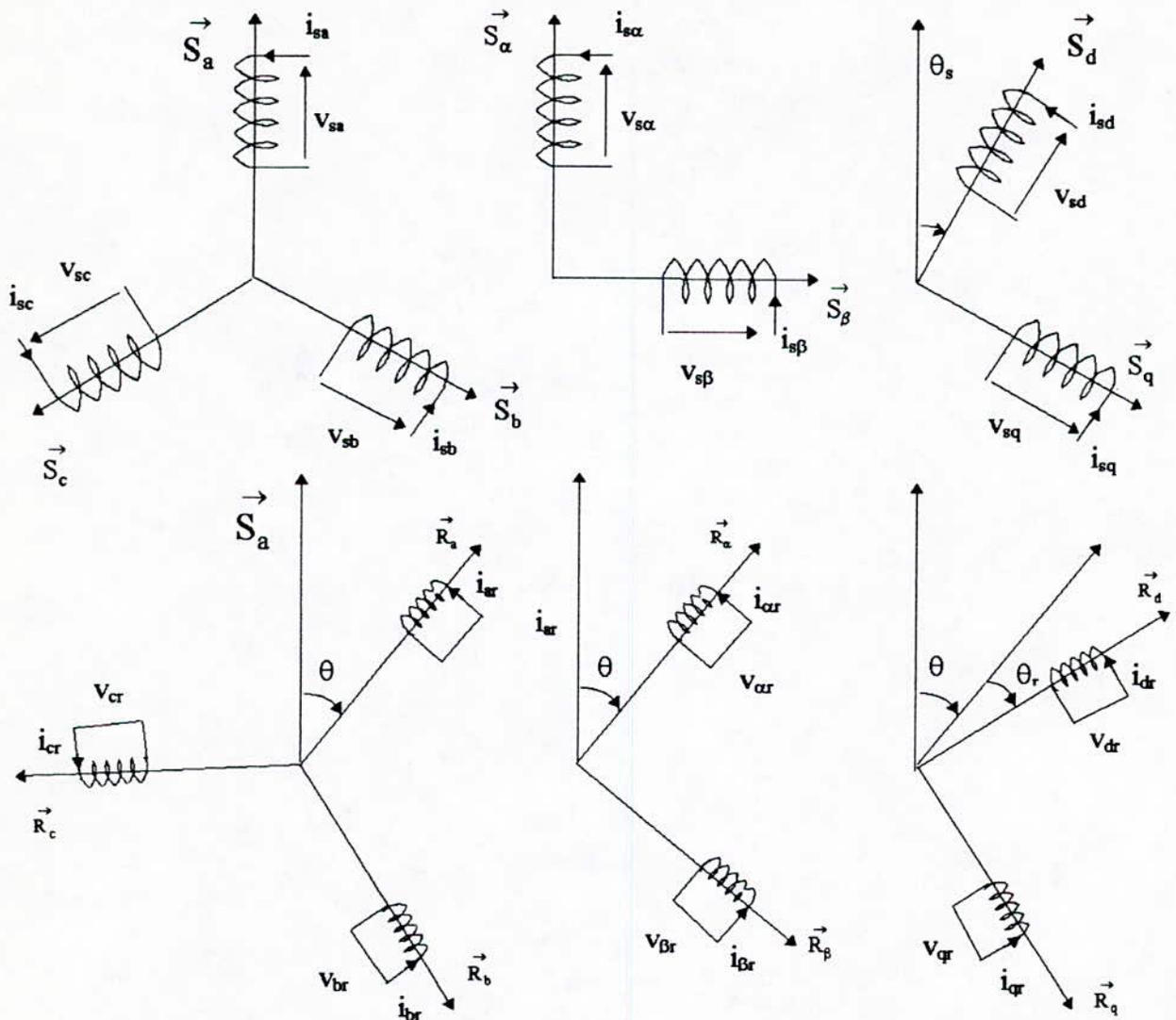


Fig.V.3. Décomposition de la transformation de Park.

V.2.1. MODELE D'ETAT DE LA MACHINE EN α, β :

En utilisant les équations (5.1) et (5.5), le modèle d'état s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma \cdot T_s} I_2 & \frac{B_r}{\sigma \cdot T_s} R(-\theta) \\ \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot T_r \cdot B_r} R(\theta) & -\frac{1}{\sigma \cdot T_r} I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.19.a)$$

avec : $B_r = \frac{M}{L_r}$,

et l'expression du couple électromagnétique devient :

$$C_{em} = p \cdot \frac{B_r}{\sigma \cdot L_s} \cdot \phi_{s\alpha\beta}^T \cdot R(-\theta) \cdot J \cdot \phi_{r\alpha\beta}, \quad (5.19.b)$$

V.2.2. MODELE D'ETAT DE LA MACHINE EN d,q:

A partir du chapitre précédent, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{sdq} \\ \phi_{rdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\sigma \cdot T_s} I_2 + \omega_s J\right) & \frac{B_r}{\sigma \cdot T_s} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot T_r \cdot B_r} I_2 & -\left(\frac{1}{\sigma \cdot T_r} I_2 + \omega_r J\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{sdq} \\ \phi_{rdq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{sdq} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.20.a)$$

et :

$$C_{em} = p \cdot \frac{B_r}{\sigma \cdot L_s} \cdot \phi_{sdq}^T \cdot J \cdot \phi_{rdq}. \quad (5.20.b)$$

Remarque :

Ces deux représentations d'état seront utilisées pour la mise sous forme réduite du modèle de la machine asynchrone.

V.3. MISE EN EVIDENCE DE L'EXISTENCE DE DEUX DYNAMIQUES ELECTROMAGNETIQUES :

Comme nous l'avons déjà indiqué dans le chapitre (1), l'application de certaines méthodes de réduction nécessite l'identification des dynamiques du système. Pour cette raison, nous avons représenté sur la figure (V.4) la distribution des modes électromagnétiques du modèle de la machine (5.1), pour différents choix de repère d'axes d,q.

Les valeurs propres pour les quatre machines asynchrones du tableau (5.1), sont paramétrées en ω . Le tracé est effectué dans le plan complexe.

	$R_s(\Omega)$	$L_s(H)$	$R_r(\Omega)$	$L_r(H)$	$M(H)$	σ
MACHINE 1	5.793	0.386	3.421	0.386	0.363	0.1156
MACHINE 2	1.100	0.16734	1.465	0.16734	0.160	0.0858
MACHINE 3	1.200	0.1554	1.000	0.1554	0.150	0.0683
MACHINE 4	1.000	0.250	1.630	0.250	0.242	0.0661

Tableau V.3 : Exemple des machines asynchrones.

Remarque :

On remarque que la distribution des valeurs propres dépendent du choix du référentiel. Au contraire des systèmes linéaires comme celles vues au chapitre (1), il est difficile de donner une valeur au paramètre ε , et par suite la difficulté d'avoir un modèle réduit à partir du modèle d'état (5.1) directement.

Pour surmonter ce problème, il faut découpler les variables d'état ou les séparer de manière suffisante pour pouvoir utiliser la technique des perturbations singulières.

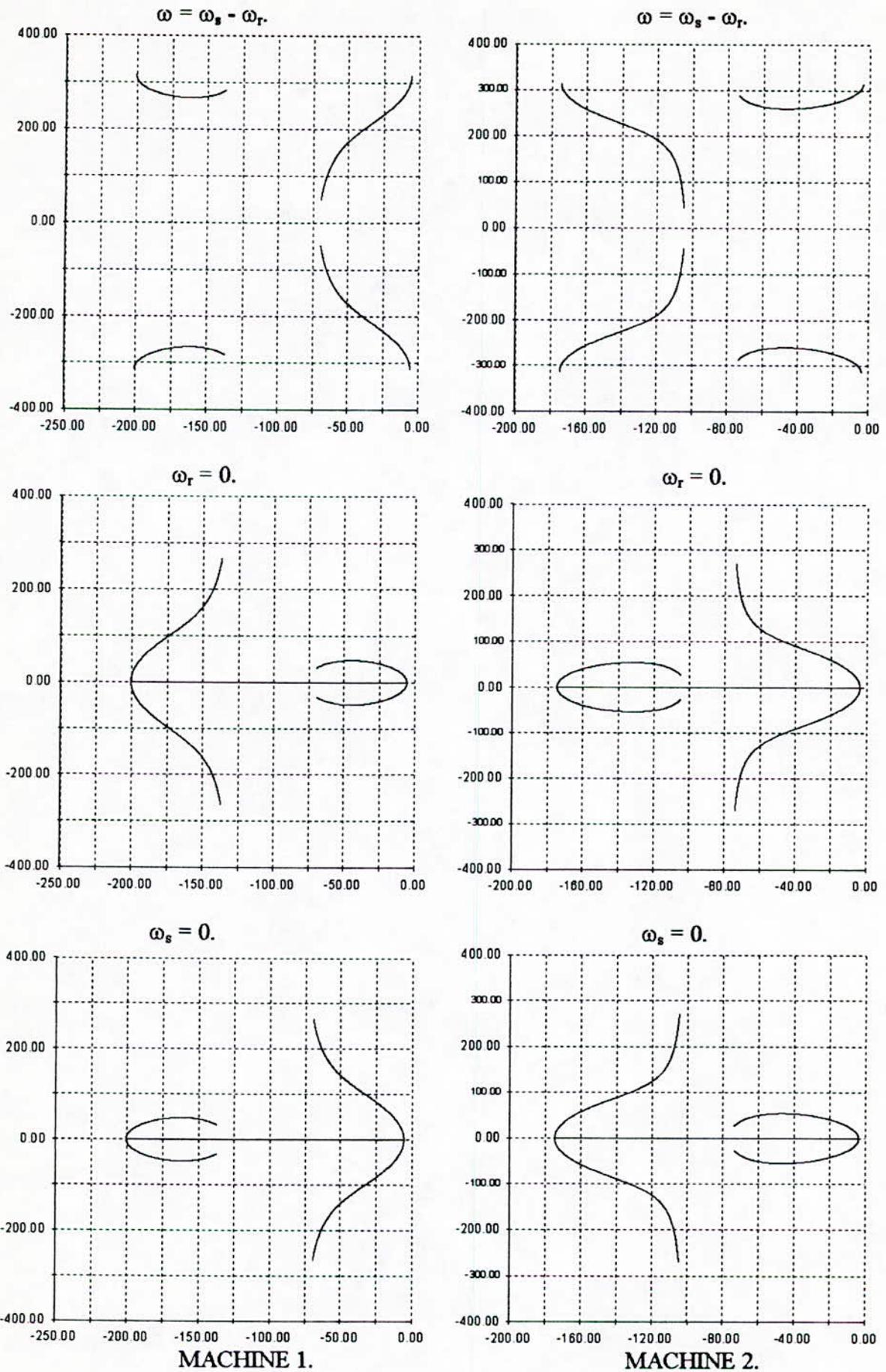


Figure V.3.a. Tracé des valeurs propres pour des exemples des machines asynchrones.

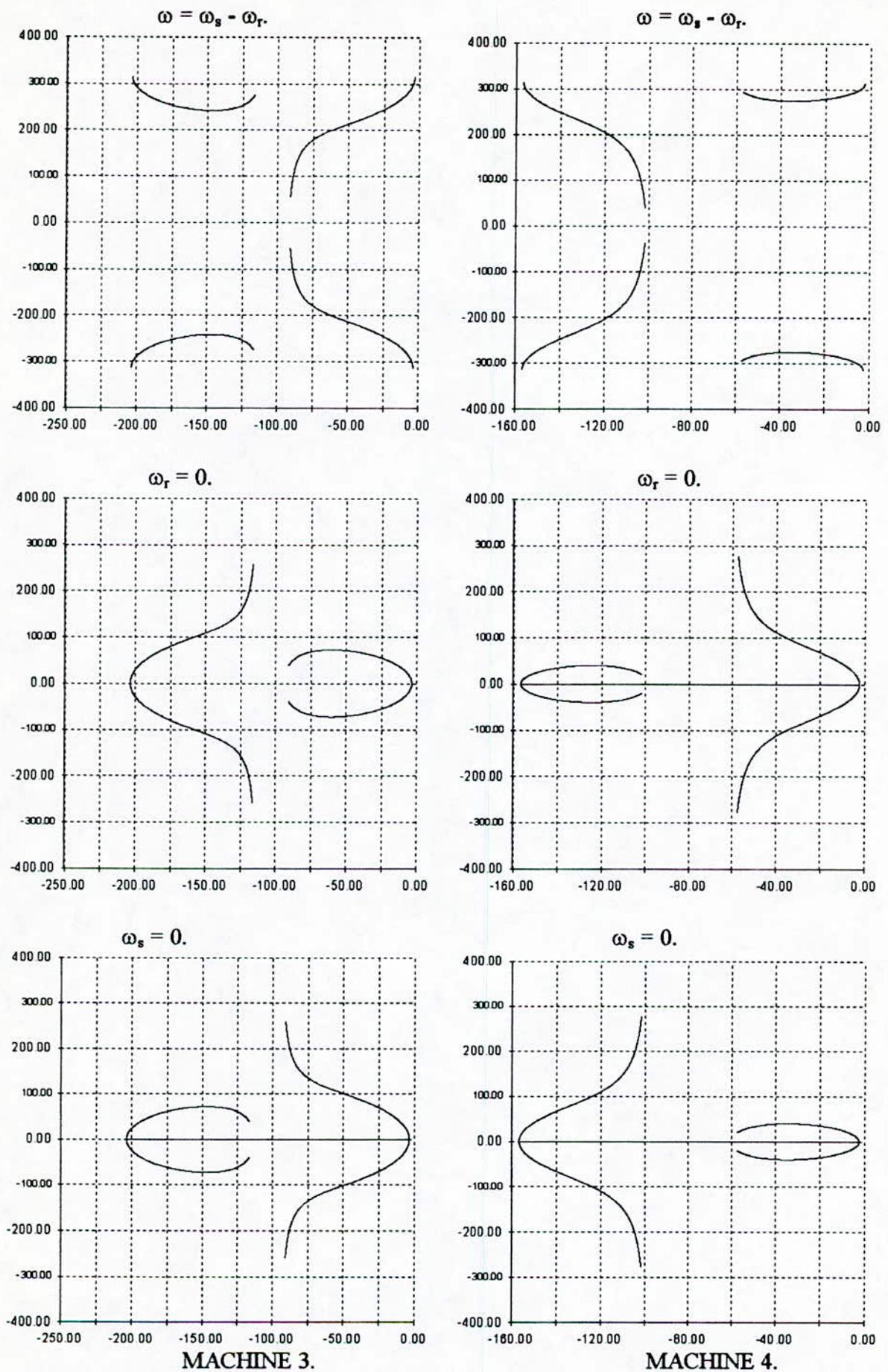


Figure.V.3.b. Tracé des valeurs propres pour des exemples des machines asynchrones.

V.4. SEPARATION DES DYNAMIQUES POUR LES PETITES VITESSES :

En se basant sur les tracés des valeurs propres de la figure (V.2), les variables lentes sont ϕ_{sd} et ϕ_{sq} et les variables rapides sont ϕ_{rd} et ϕ_{rq} .

La matrice d'état (5.20) s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (5.21)$$

et l'équation caractéristique a la forme suivante :

$$P(\lambda) = \det \left[(A_{11} - \lambda \cdot I_2) \cdot [(A_{22} - \lambda \cdot I_2) - A_{21}(A_{11} - \lambda \cdot I_2)^{-1} A_{12}] \right] \quad (5.22)$$

Pour utiliser l'équation (5.22) d'une manière efficace, on effectue le changement de base suivant ; (équation de Riccati).

$$\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{sdq} \\ \tilde{\phi}_{rdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & B_r I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{sdq} \\ \phi_{rdq} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

qui transforme le système (5.20) en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{sdq} \\ \tilde{\phi}_{rdq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_s J & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ -\left(\frac{\sigma}{T_{rp}} I_2 - \omega J\right) & -\left(\frac{1+\alpha}{T_{pr}} I_2 + \omega_r J\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{sdq} \\ \tilde{\phi}_{rdq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \cdot v_{sdq}, \quad (5.24)$$

avec : $T_{sp} = \sigma \cdot T_s$, $T_{rp} = \sigma \cdot T_r$ et $\alpha = T_s / T_r$.

a)- Calcul des valeurs propres :

Pour les petites vitesses ($\omega \rightarrow 0$), l'équation (5.22) s'écrit :

$$P(\lambda) = \det \left\{ (\lambda I_2 + \omega_s J) \cdot \left[(\lambda I_2 + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} + \omega_r J) + \frac{\alpha \sigma}{\Delta T_{sp}^2} (\lambda I_2 - \omega_s J) \right] \right\} = 0, \quad (5.25)$$

avec :

$$\Delta = \lambda^2 + \omega_s^2$$

ou :

$$P(\lambda) = \det \left\{ \left[\lambda \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \right) - \omega_s \cdot \omega_r + \frac{\alpha \cdot \sigma}{T_{sp}^2} \right] \cdot I_2 + \left[\lambda \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \right) + \lambda \omega_r \right] \cdot J \right\} = 0 \quad (5.26)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\det[(\alpha_1 I_2 + \alpha_2 J)] = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.27)$$

soit :

$$\alpha_1 = \pm j \alpha_2 . \quad (5.28)$$

L'équation (5.26) devient :

$$\left[\lambda \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \right) - \omega_s \omega_r + \frac{\sigma \alpha}{T_{sp}^2} \right] = \pm j \cdot \left[\lambda \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \right) - \lambda \omega_r + \frac{\omega}{T_{sp}} \right] \quad (5.29)$$

et après arrangement, elle s'écrit :

$$(\lambda \pm j\omega_s) \cdot \left(\lambda + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \pm j\omega_r \right) + \frac{\alpha\sigma}{T_{sp}^2} = 0 \quad (5.30)$$

Cette équation est du deuxième ordre, et facile à résoudre. Donc, l'équation caractéristique s'annule pour :

L'équation caractéristique de la matrice d'état du système (5.20) est :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha\sigma}{(1+\alpha)T_{sp}} \pm j\omega_s, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} \left(1 - \frac{\alpha\sigma}{(1+\alpha)^2} \right) \pm j\omega_r \quad (5.31)$$

Si le repère de Park est lié au stator ou au rotor :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha\sigma}{(1+\alpha)T_{sp}}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} \left(1 - \frac{\alpha\sigma}{(1+\alpha)^2} \right) \quad (5.32)$$

Sinon

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha\sigma}{(1+\alpha)T_{sp}} \pm j\omega_s, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} \left(1 - \frac{\alpha\sigma}{(1+\alpha)^2} \right) \pm j\omega_s \quad (5.33)$$

Ces résultats sont validés par les tracés de la figure (V.3).

b)- Estimation du paramètre ε :

Soit le rapport des modules des valeurs propres :

$$\frac{|\lambda_{3,4}|}{|\lambda_{1,2}|} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha\sigma}{(1+\alpha)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_s T_{sp}}{1+\alpha}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha\sigma}{(1+\alpha)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_s T_{sp}}{1+\alpha}\right)^2}}, \quad (3.34)$$

Vu l'ordre de grandeur de σ , le rapport $\frac{|\lambda_{3,4}|}{|\lambda_{1,2}|}$ est toujours supérieur à σ . Donc, lorsque la vitesse tend vers zéro, le choix $\varepsilon = \sigma$ est correct.

La mise du modèle du système sous forme réduite est possible, mais le problème se pose sur l'ordre de grandeur sur la gamme de vitesse pour laquelle l'approximation est valable.

V.5. SEPARATION EN d,q PAR LES CERCLES DE GERSCHGORIN :

V.5.1. Séparation des valeurs propres :

Comme nous l'avons déjà vu, le problème de découplage des variables réside dans l'identification des variables lentes et rapides. Pour cela, on va utiliser les cercles de Gerschgorin pour surmonter cette difficulté et en supposant que le repère de Park est libre.

1)- L'algorithme basé sur les cercles de Gerschgorin, appliqué à la matrice d'état :

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_{sp}} I_2 + \omega_s J\right) & \frac{B_r}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{B_r T_{rp}} I_2 & -\left(\frac{1}{T_{rp}} I_2 + \omega_r J\right) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

donne les cercles représentés sur la figure (V.4).

1. Les cercles sont doublés et leurs rayons sont variables.
2. Les valeurs propres sont mal localisées.

2)- On peut simplifier la matrice A par la transformation :

$$T_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & B_r I_2 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

avec : $\phi_1 = T_1 \phi_{dq}$ et $A_1 = T_1 A T_1^{-1}$. (5.37)

Soit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_{sp}} I_2 + \omega_s J\right) & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{T_{rp}} I_2 & -\left(\frac{1}{T_{rp}} I_2 + \omega_r J\right) \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

- Les cercles restent toujours doublés et quelconques.

3)- Pour réduire les tailles des rayons, on utilise la transformation suivante :

$$\phi_2 = T_2 \phi_1, \quad (5.39)$$

avec :

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad j^2 = -1. \quad (5.40)$$

Et on obtient :

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_{sp}} I_2 - j\omega_s I_{-1}\right) & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{T_{rp}} I_2 & -\left(\frac{1}{T_{rp}} I_2 - j\omega_r I_{-1}\right) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

1. Cette fois, les cercles sont doublés deux à deux, avec une séparation au niveau de l'axe des imaginaires figure (V.5).
2. Le problème d'estimation de ε est toujours très difficile à résoudre.

4)- Pour séparer les parties réelles des valeurs propres, on exploite la transformation vue dans le premier chapitre :

soit :

$$\phi_3 = T_3 \phi_2, \quad T_3 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -\delta I_2 & I_2 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

et la nouvelle matrice d'état s'écrit :

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1-\delta}{T_{sp}} I_2 + j\omega_s I_{-1}\right) & \left(\frac{1}{T_{sp}} I_2\right) \\ \left(\frac{(1-\delta)(\alpha+\delta) - \alpha\sigma}{T_{sp}} I_2 + j\delta\omega I_{-1}\right) & -\left(\frac{(\alpha+\delta)}{T_{sp}} I_2 + j\omega_r I_{-1}\right) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

1. Les nouveaux cercles sont centrés en $C_1 = \left(-\frac{1-\delta}{T_{sp}} - j\omega_s\right)$, $C'_1 = \left(-\frac{1-\delta}{T_{sp}} + j\omega_s\right)$,

$C_2 = \left(-\frac{\alpha+\delta}{T_{sp}} - j\omega_r\right)$ et $C'_2 = \left(-\frac{\alpha+\delta}{T_{sp}} + j\omega_r\right)$, mais leurs rayons respectifs $R_1 = \frac{1}{T_{sp}}$,

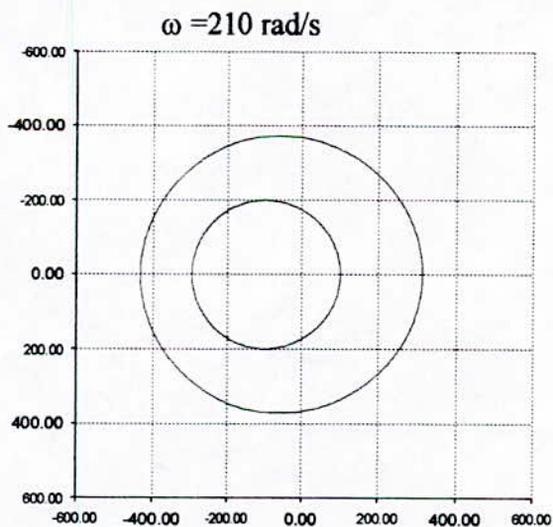
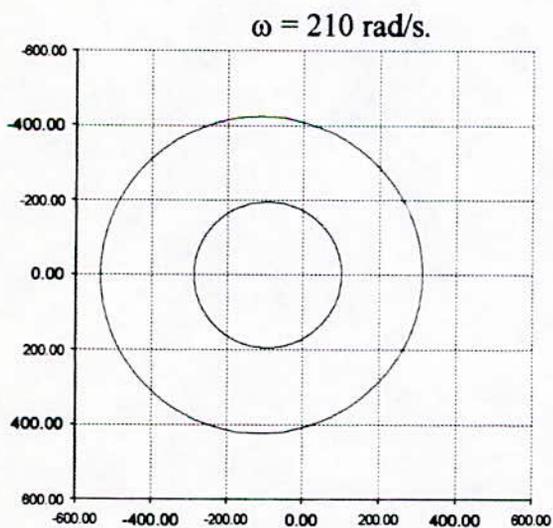
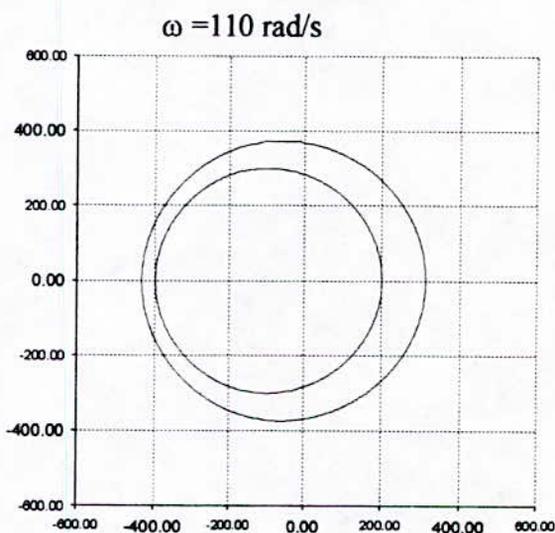
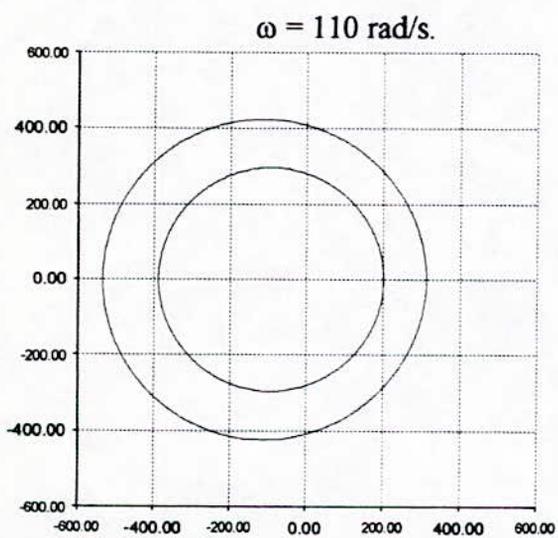
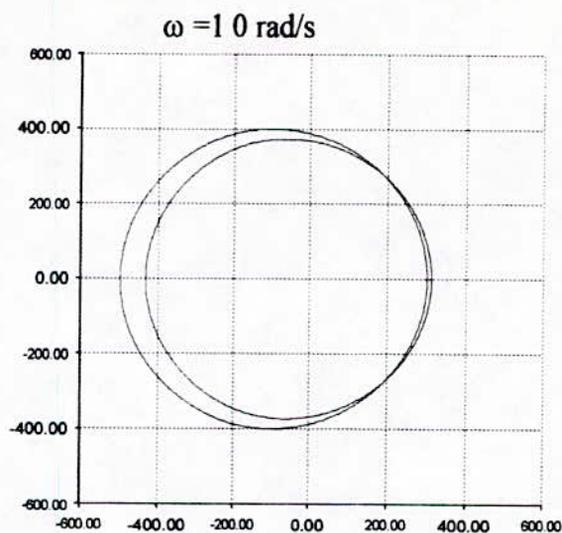
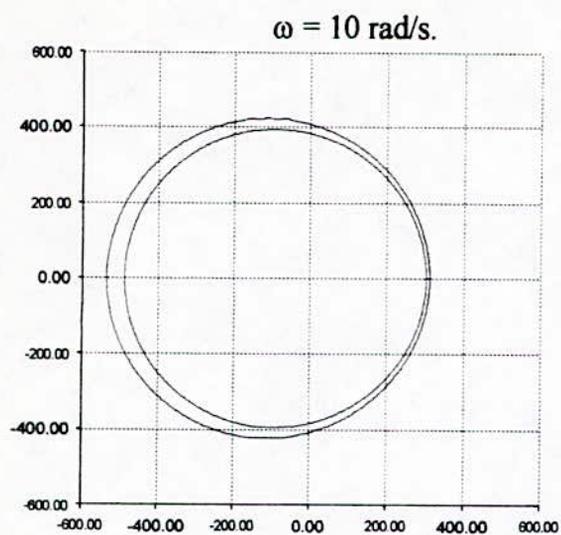
$R'_1 = \frac{1}{T_{sp}}$, $R_2 = \frac{1}{T_{sp}} \sqrt{[(1-\delta)(\alpha+\delta) - \alpha\sigma]^2 + [\delta\omega T_{sp}]^2}$ et

$R'_2 = \frac{1}{T_{sp}} \sqrt{[(1-\delta)(\alpha+\delta) - \alpha\sigma]^2 + [\delta\omega T_{sp}]^2}$ sont fonctions de la vitesse.

2. Pour éloigner les cercles sur l'axe des réelles, il faut que δ soit positif.
3. Pour réduire la taille des rayons lorsque ω augmente, on doit choisir δ comme fonction de la vitesse.
4. Lorsque la condition nécessaire et suffisante est satisfaite : $C_1 C_2 \geq R_1 + R_2$, la séparation des modes est possible.
5. Pour tout cela, on va prendre $\delta = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s}$.

6. Le tracé des cercles pour ce choix est représenté sur la figure (V.6).

Le paramètre ε peut être estimé par la relation (3.3) du troisième chapitre.



MACHINE (3).

MACHINE (4).

Fig. V.4.b. Tracé des cercles de Gerschgorin (matrice d'état initiale).

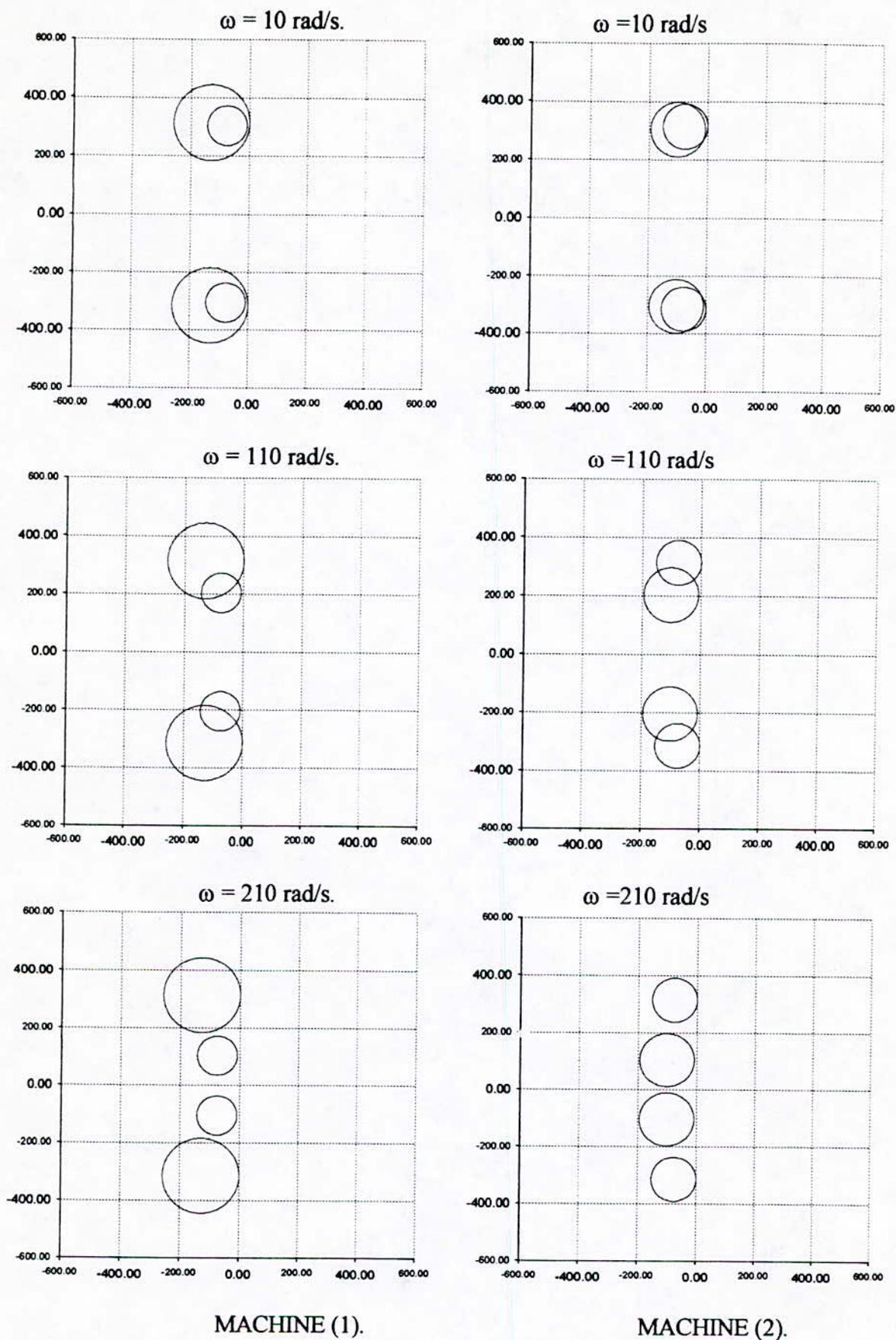
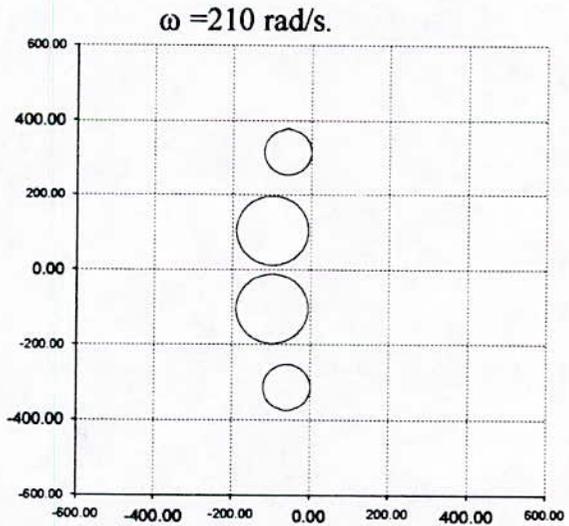
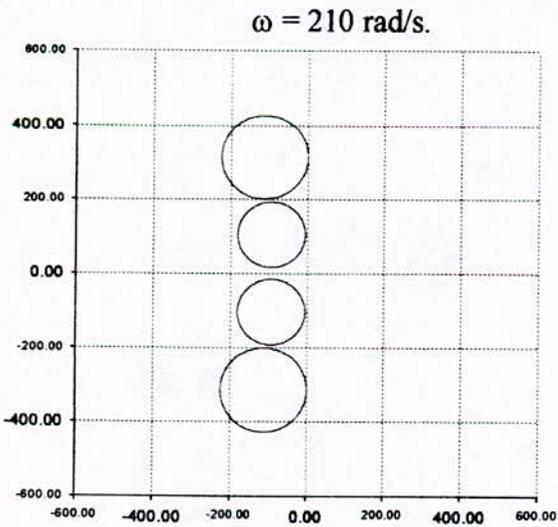
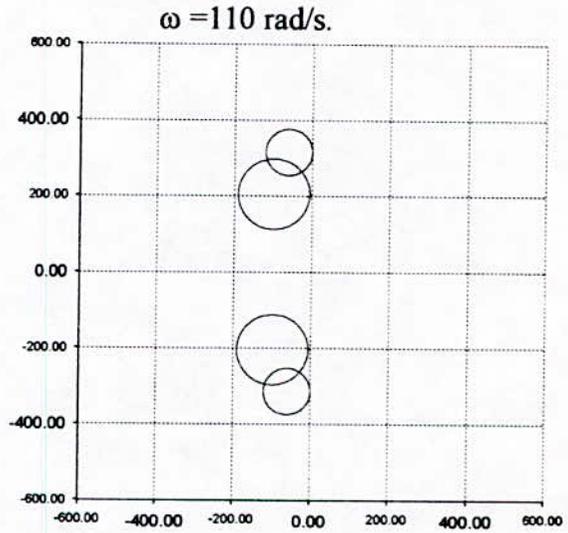
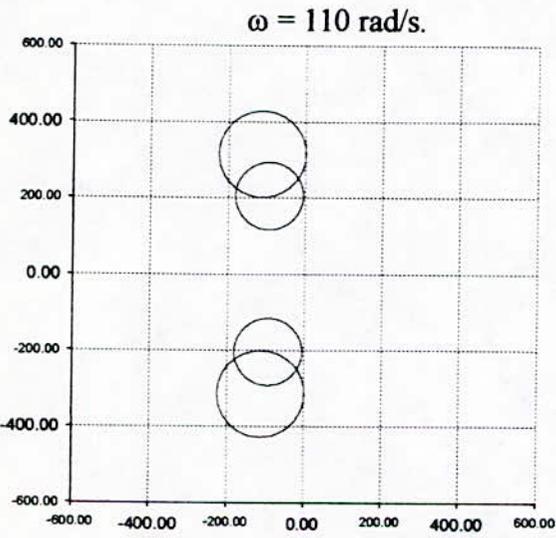
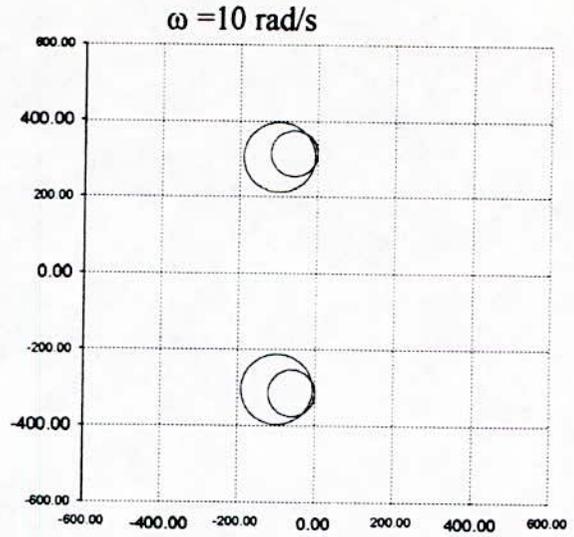
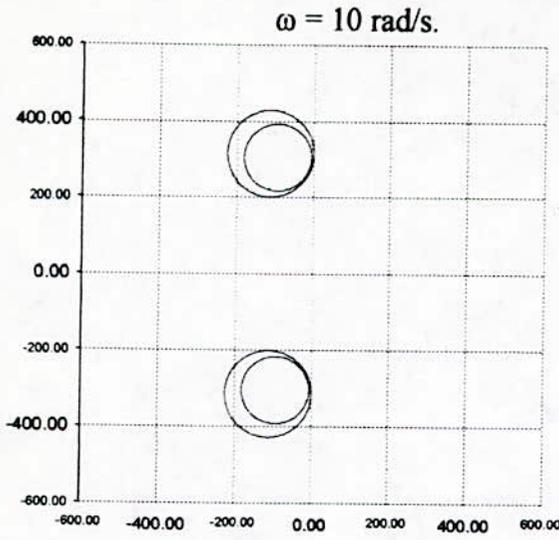


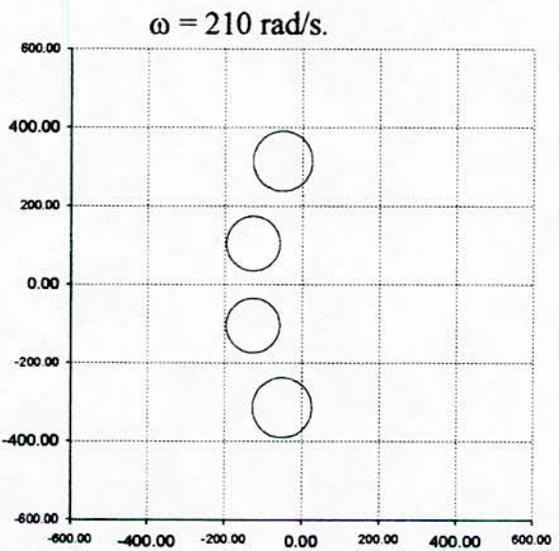
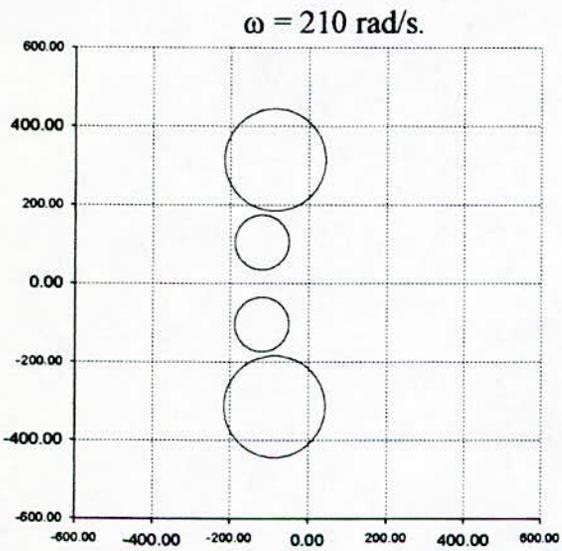
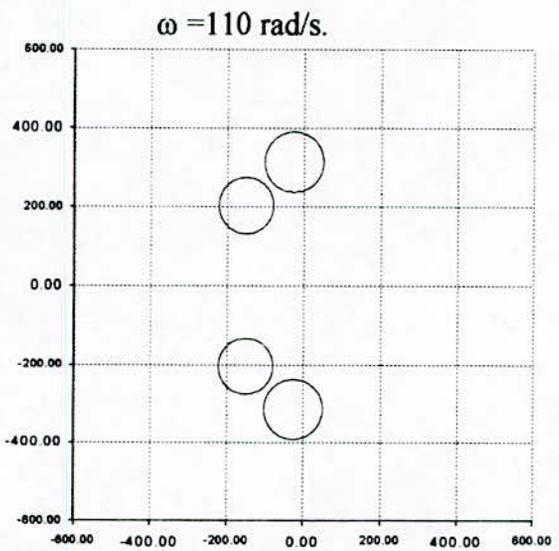
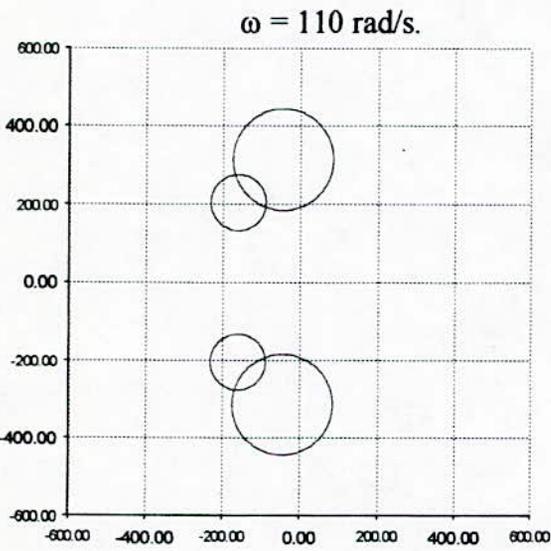
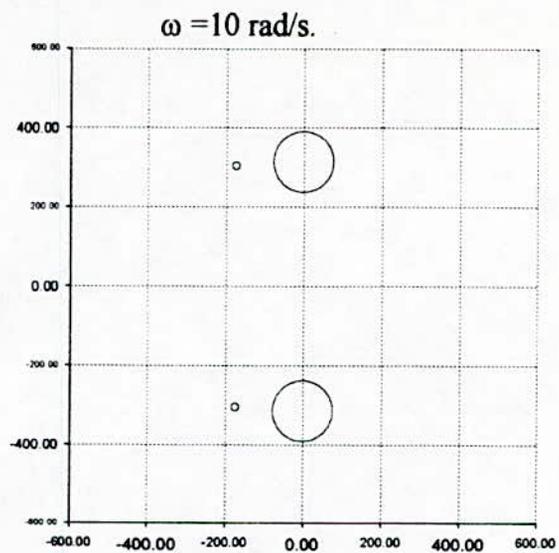
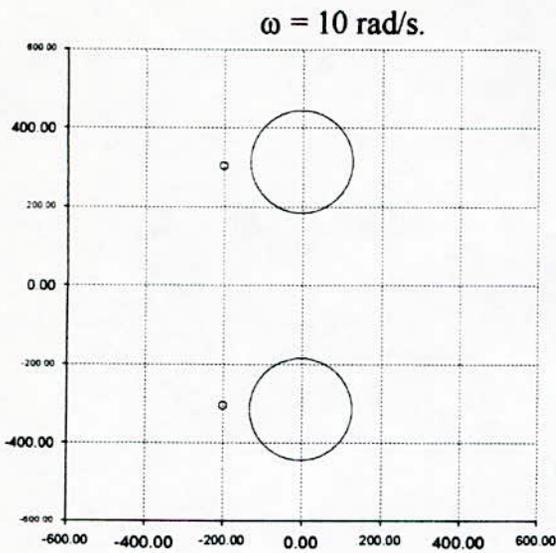
Fig. V.5.a. Tracé des cercles de Gerschgorin (première séparation).



MACHINE (3).

MACHINE (4).

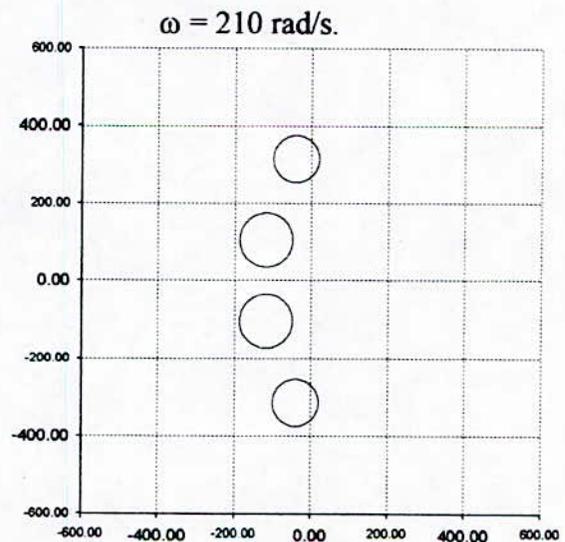
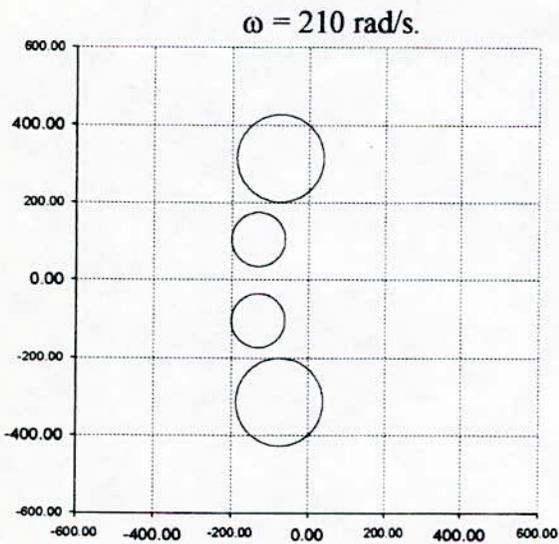
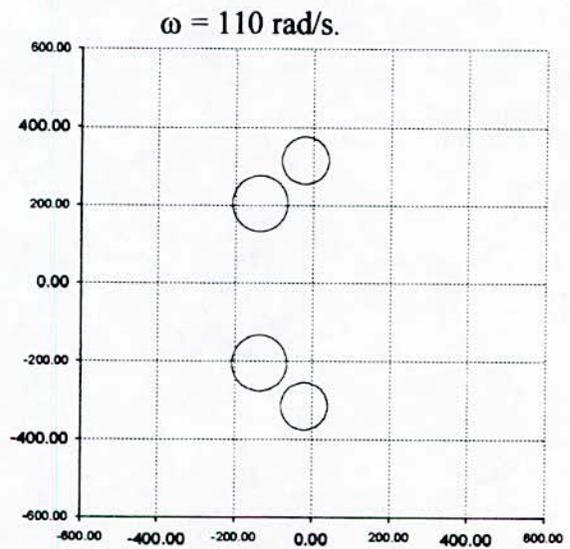
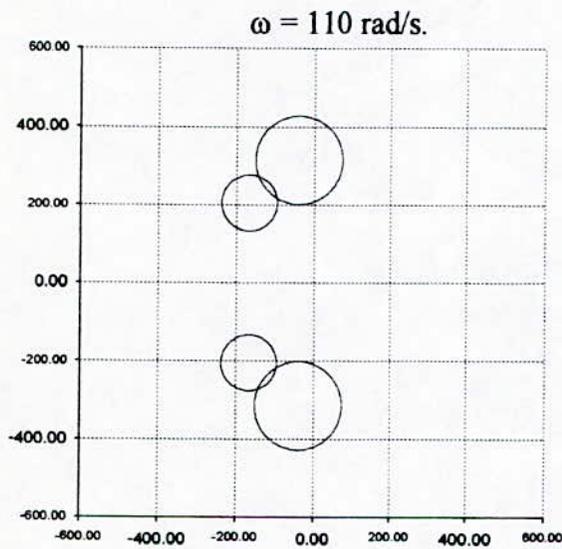
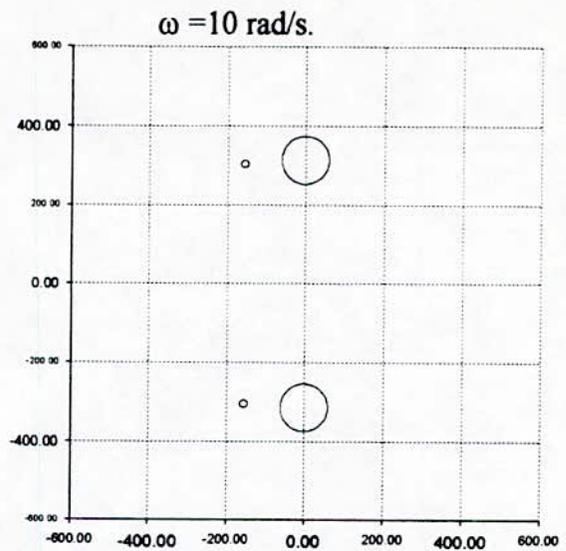
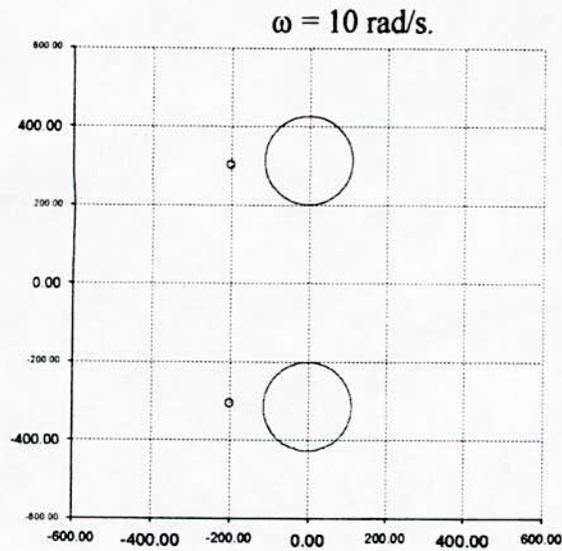
Fig. V.5.b. Tracé des cercles de Gerschgorin (première séparation).



MACHINE (1).

MACHINE (2).

Fig.V.6.a. Tracé des cercles de Gerschgorin (deuxième séparation).



MACHINE (3).

MACHINE (4).

Fig. V.6.a. Tracé des cercles de Gerschgorin (deuxième séparation).

V.5.2. MODELES REDUITS :

La matrices de regroupement des modes est obtenue par la transformation finale :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T_1 T_2 T_3 \begin{bmatrix} \phi_{dqs} \\ \phi_{dqr} \end{bmatrix}, \quad (5.44.a)$$

avec :

$$T_1 T_2 T_3 = \begin{bmatrix} W & 0 \\ -B_r W & B_r W \end{bmatrix}. \quad (5.44.b)$$

La nouvelle représentation d'état est :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1-\delta}{T_{sp}} + j\omega_s & 0 & \frac{1}{T_{sp}} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\delta}{T_{sp}} - j\omega_s & 0 & \frac{1}{T_{sp}} \\ \frac{s}{T_{sp}} - j\delta\omega & 0 & -\frac{\alpha+\delta}{T_{sp}} + j\omega_r & 0 \\ 0 & \frac{s}{T_{sp}} - j\delta\omega & 0 & -\frac{\alpha+\delta}{T_{sp}} - j\omega_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W \\ -\delta W \end{bmatrix} \cdot v_{sdq}$$

$$C_{em} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{1}{L_{sp}} \cdot x_1^T \cdot J \cdot x_2 \quad (5.45)$$

avec :

$$s = (1-\delta)(\alpha+\delta) - \alpha\sigma$$

$$L_{sp} = \sigma \cdot L_s$$

Pour calculer les sous modèles déduits, on pose :

$$k = s + j\delta T_{sp} \omega, \quad k^* = s - j\delta T_{sp} \omega,$$

$$d = (\alpha + \delta) + jT_{sp} \omega_r, \quad d^* = (\alpha + \delta) - jT_{sp} \omega_r \quad \text{et} \quad D = d \cdot d^*.$$

Et on considère :

$$x_1 = x_{1l}, \quad x_2 = x_{2l} + x_{2r}(\tau),$$

$$v_{sdq} = v_{sdql} + v_{sdqr}(\tau),$$

$$\tau = \frac{t - t_0}{\sigma}.$$

En fin, les sous systèmes réduit décrivant le comportement du système global s'écrivent :

V.5.2.1. Modèle réduit lent :

En appliquant les équations (2.25), (2.26) et (2.27), le sous système réduit lent s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{1l} &= A_{1l} \cdot x_{1l} + B_{1l} \cdot v_{sdql} \\ x_{2l} &= A_{2l} \cdot x_{1l} + B_{2l} \cdot v_{sdql} \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$C_{eml} = \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{L_{sp}} \cdot x_{1l}^T \cdot J \cdot x_{2l}$$

avec :

$$A_{1l} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1-\delta}{T_{sp}} + j\omega_s\right) + \frac{1}{T_{sp}} \frac{d^* \cdot k}{D} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1-\delta}{T_{sp}} - j\omega_s\right) + \frac{1}{T_{sp}} \frac{d \cdot k^*}{D} \end{bmatrix},$$

$$B_{1l} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta \cdot d^*}{D} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\delta \cdot d}{D} \end{bmatrix} \cdot [W].$$

$$A_{2l} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d^* \cdot k & 0 \\ 0 & d \cdot k^* \end{bmatrix}, \quad B_{2l} = -\frac{\delta \cdot T_{sp}}{D} \begin{bmatrix} d^* & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot [W],$$

V.5.2.2. Modèle réduit rapide :

L'équation (2.31) permet d'écrire :

$$\frac{d}{d\tau} x_{2r}(\tau) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha + \delta}{T_{sp}} + j\omega_r\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\alpha + \delta}{T_{sp}} - j\omega_r\right) \end{bmatrix} \cdot x_{2r}(\tau) - \delta \cdot [W] \cdot v_{sdqr} \quad (5.47)$$

$$C_{emr} = \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{L_{sp}} \cdot x_{1l}^T \cdot J \cdot x_{2r}$$

Remarque:

Les transformations développées conduisent à des résultats de forme simples qui mettent en évidence la position des modes électromagnétiques pour un repère d,q tout en utilisant les cercles de Gerschgorin.

Le paramètre ε peut être estimé par la relation (3.3) du troisième chapitre.

V.6. SEPARATION EN α, β PAR LES CERCLES DE GERSCHGORIN:

L'équations de la machine en α, β s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma \cdot T_s} I_2 & \frac{B_r}{\sigma \cdot T_s} R(-\theta) \\ \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot T_r \cdot B_r} R(\theta) & -\frac{1}{\sigma \cdot T_r} I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$C_{em} = p \cdot \frac{B_r}{\sigma \cdot L_s} \cdot \phi_{s\alpha\beta}^T \cdot R(-\theta) \cdot J \cdot \phi_{r\alpha\beta}$$

avec :

$$R(\theta) \cdot R(-\theta) = I_2$$

$$R(\theta) \cdot J \cdot R(-\theta) = J$$

$$R(\theta) \cdot R(-\theta) = -\omega \cdot J$$

On voit que la matrice d'état est une fonction de la vitesse et du temps. Donc, on ne peut pas faire un tracé direct des valeurs propres comme nous l'avons déjà fait pour la séparation précédente.

Pour montrer l'existence de deux dynamiques pour les variables électromagnétiques, on doit simuler ce modèle ou faire un calcul numérique (à l'aide d'une calculatrice).

V.6.1. Calcul des valeurs propres :

L'équations caractéristique de la matrice d'état (5.48) est :

$$P(\lambda) = \det \left\{ \left[\left(\lambda + \frac{1}{T_{sp}} \right) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{T_{rp}} \right) - \frac{1-\sigma}{T_{sp} T_{rp}} \right] \cdot I_2 \right\} = 0 \quad (5.49.a)$$

soit :

$$\left[\left(\lambda + \frac{1}{T_{sp}} \right) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{T_{rp}} \right) - \frac{1-\sigma}{T_{sp} T_{rp}} \right]^2 = 0 \quad (5.49.b)$$

ou :

$$\left(\lambda^2 + \frac{1+\alpha}{T_{sp}} \cdot \lambda + \frac{\alpha \cdot \sigma}{T_{sp}^2} \right) = 0 \quad (5.49.c)$$

La résolution de cette dernière équation donne :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\alpha}{2 \cdot T_{sp}} \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha \cdot \sigma}{(1+\alpha)^2}} \right] \quad \text{et} \quad \lambda_{3,4} = \frac{1+\alpha}{2 \cdot T_{sp}} \left[-1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha \cdot \sigma}{(1+\alpha)^2}} \right], \quad (5.50)$$

pour une valeur toujours positive de $\sqrt{1 - \frac{4\alpha \cdot \sigma}{(1+\alpha)^2}}$

Un calcul des valeurs propres pour les quatre machines précédentes, est donné dans le tableau (V.4).

	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	σ	$\varepsilon_0 = \lambda_{1,2} / \lambda_{3,4} $	$\varepsilon_0^{-1} = \lambda_{3,4} / \lambda_{1,2} $
MACHINE 1	-5.7312	-200.7240	0.1156	0.0286	35.0229
MACHINE 1	-3.8368	-174.8086	0.0858	0.0219	45.5607
MACHINE 1	-3.5715	-203.7340	0.0683	0.0175	57.0438
MACHINE 1	-2.5189	-156.7036	0.0661	0.0161	62.2102

Tableau.V.4. Valeurs propres des machines asynchrones en α, β .

On voit que les valeurs propres sont différentes deux à deux, et le choix $\varepsilon = \sigma$ reste valable puisque la valeur de σ est toujours supérieure à celle de ε_0 .

V.6.2. Séparation des modes :

a)- L'application de l'algorithme des cercles de Gerschgorin à la matrice d'état :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma \cdot T_s} I_2 & \frac{B_r}{\sigma \cdot T_s} R(-\theta) \\ \frac{1-\sigma}{\sigma \cdot T_r \cdot B_r} R(\theta) & -\frac{1}{\sigma \cdot T_r} I_2 \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

donne :

1. Les cercles sont doublés et centrés en $C_{1,2} = -\frac{1}{T_{sp}}$ et $C_{3,4} = -\frac{1}{T_{rp}}$, et leur rayons sont respectivement $R_{1,2} = -\frac{B_r}{T_{sp}} (|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|)$ et $R_{3,4} = -\frac{1-\sigma}{B_r T_{sp}} (|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|)$.
2. Pour toutes les valeurs de $R_{1,2}$ et $R_{3,4}$, les cercles se coupent. Donc, on peut rien dire.

b)- Pour éliminer les coefficients B_r et $R(\theta)$, on utilise la transformation :

$$\phi_1 = P_1 \begin{bmatrix} \phi_{sa\beta} \\ \phi_{ra\beta} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & B_r R(-\theta) \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

avec : $A_1 = P_1 \cdot A \cdot P_1^{-1}$

soit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{sp}} I_2 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1-\sigma}{T_{rp}} I_2 & -\frac{1}{T_{rp}} I_2 + \omega J \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

1. Les cercles sont toujours doublés et centrés en $C_{1,2} = -\frac{1}{T_{sp}}$ et $C_{3,4} = -\frac{1}{T_{rp}}$, et leurs rayons

sont respectivement $R_{1,2} = \frac{1}{T_{sp}}$ et $R_{3,4} = \frac{1-\sigma}{B_r T_{sp}} + \omega$.

2. Les cercles se coupent même pour les petites vitesses.

d)- On peut déplacer les centres des cercles doublés par la transformation :

$$\phi_2 = P_2 \cdot \phi_1, P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -\mu I_2 & I_2 \end{bmatrix}, \quad (5.54)$$

qui donne :

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1-\mu}{T_{sp}} I_2 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{(\alpha + \mu) \cdot (1-\mu) - \alpha\sigma}{T_{sp}} I_2 + \mu\omega J & -\frac{\alpha + \mu}{T_{sp}} I_2 + \omega J \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

- La valeur de μ doit être supérieur à zéro.

Pour le choix $\mu = 1$, la matrice d'état s'écrit :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} I_2 + \omega J & -\frac{\alpha + 1}{T_{sp}} I_2 - \omega J \end{bmatrix} \quad (5.56.a)$$

ou

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{T_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_{sp}} \\ -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} & -\omega & -\frac{\alpha + 1}{T_{sp}} & \omega \\ \omega & -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} & -\omega & -\frac{\alpha + 1}{T_{sp}} \end{bmatrix} \quad (5.56.b)$$

On représente sur la figure (V.7), les cercles de Gerschgorin qui sont encore doubles et centrés en $C_{1,2} = 0$ et $C_{3,4} = -\frac{1+\alpha}{T_{sp}}$, et leurs rayons sont respectivement $R_{1,2} = \frac{1}{T_{sp}}$ et

$$R_{3,4} = \frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} + 2\omega.$$

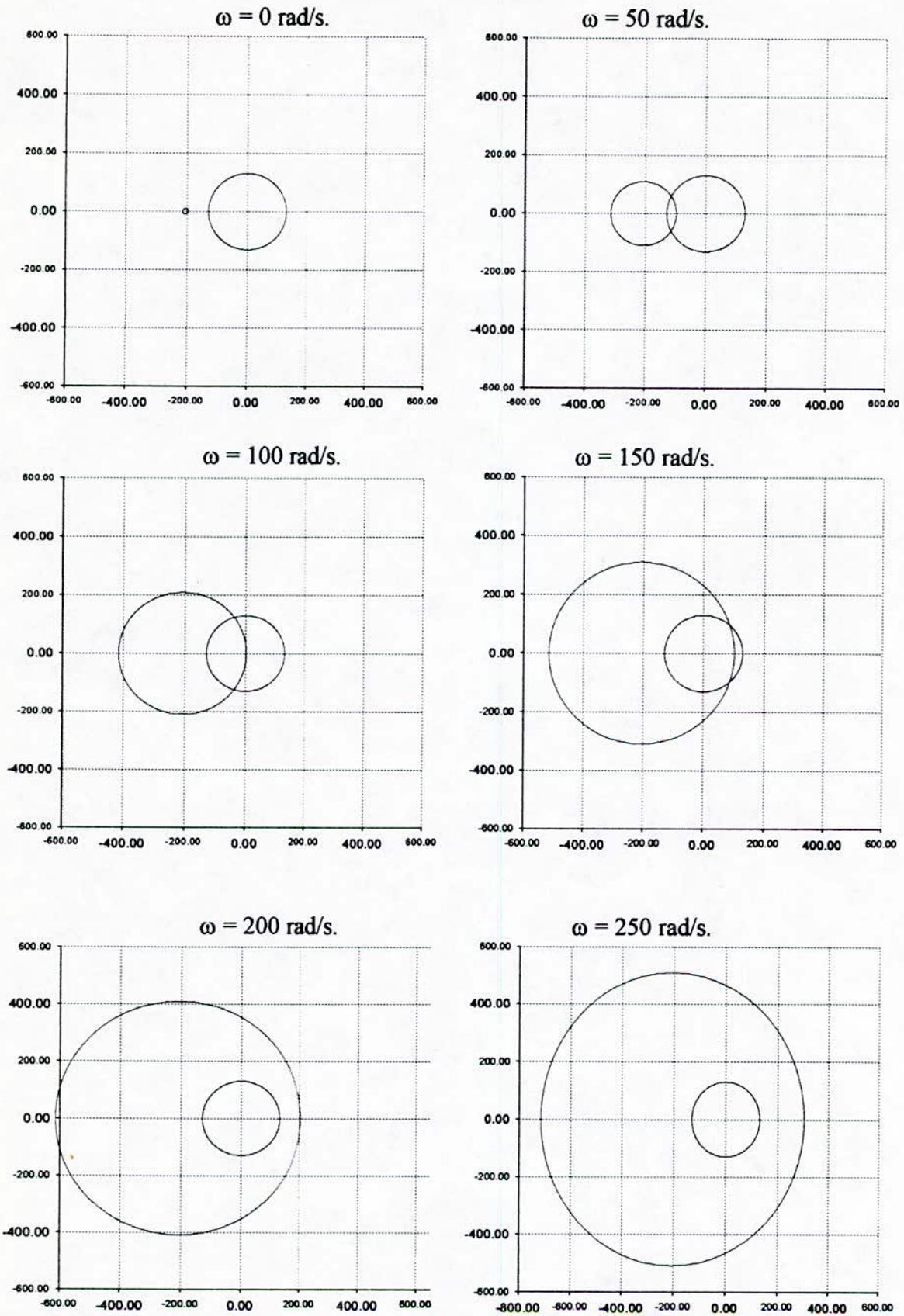


Fig. V.7.a. Tracé des cercles de Gerschgorin pour la machine (1).

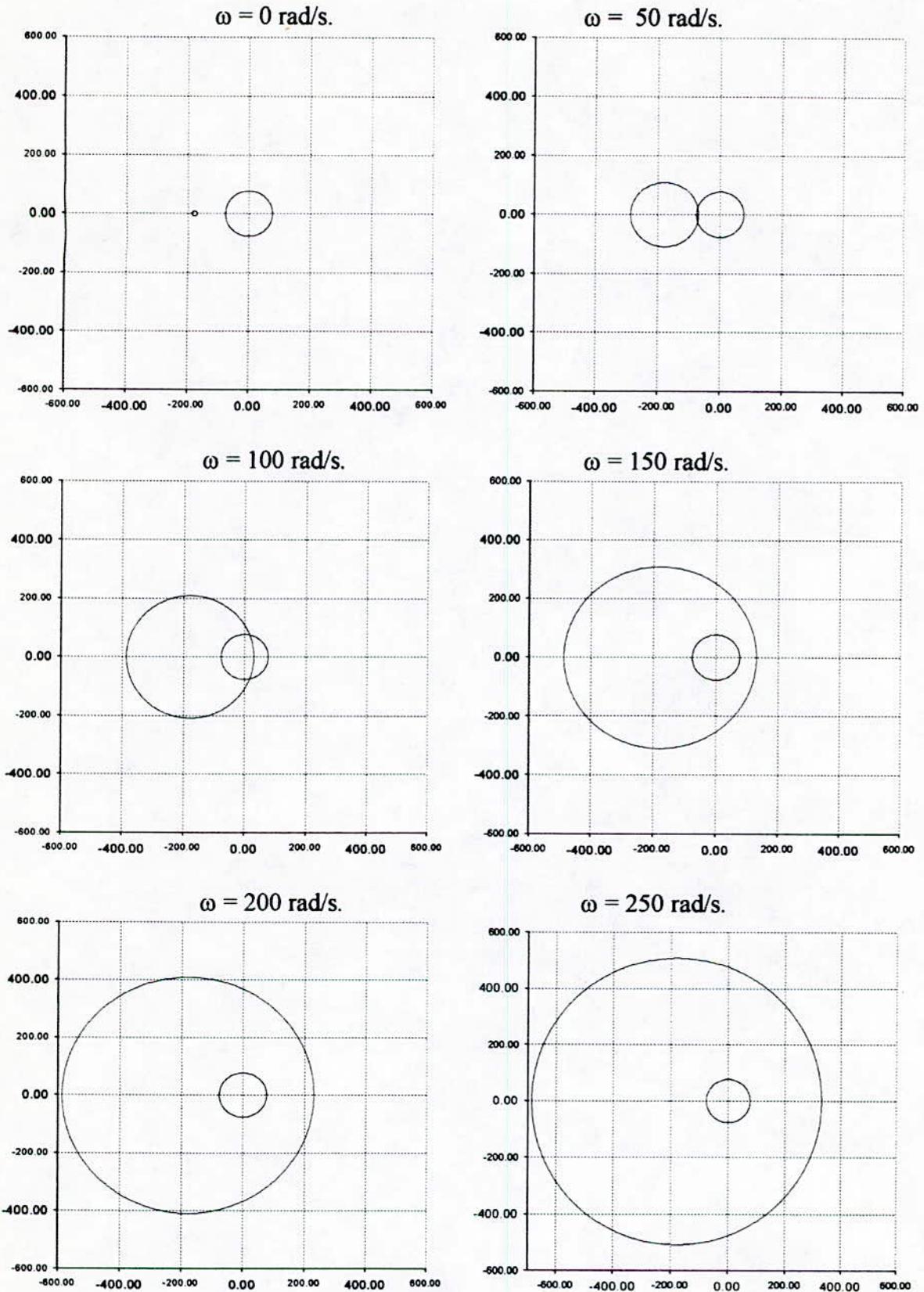


Fig. V.7.b. Tracé des cercles de Gerschgorin pour la machine (2).

d)- On peut maintenant changer la taille de ces rayons par la transformation :

$$\phi_3 = P_3 \cdot \phi_3, \quad P_3 = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}, \quad W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

avec :

$$W \cdot J \cdot W^{-1} = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}.$$

D'où :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} I_2 + \omega W \cdot J \cdot W^{-1} & -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} I_2 + \omega W \cdot J \cdot W^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.58.a)$$

ou encore :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{T_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_{sp}} \\ -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} - j\omega & 0 & -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} - j\omega & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}} + j\omega & 0 & -\frac{1+\alpha}{T_{sp}} + j\omega \end{bmatrix} \quad (5.58.b)$$

1. Les cercles centrés en $C_{1,2} = 0$ et $C_{3,4} = -\left(\frac{1+\alpha}{T_{sp}} \pm j\omega\right)$, et leurs rayons respectivement

$$R_{1,2} = \frac{1}{T_{sp}} \text{ et } R_{3,4} = \sqrt{\left(\frac{\alpha\sigma}{T_{sp}}\right)^2 + (\omega)^2}, \text{ sont représentés sur la figure (V.8).}$$

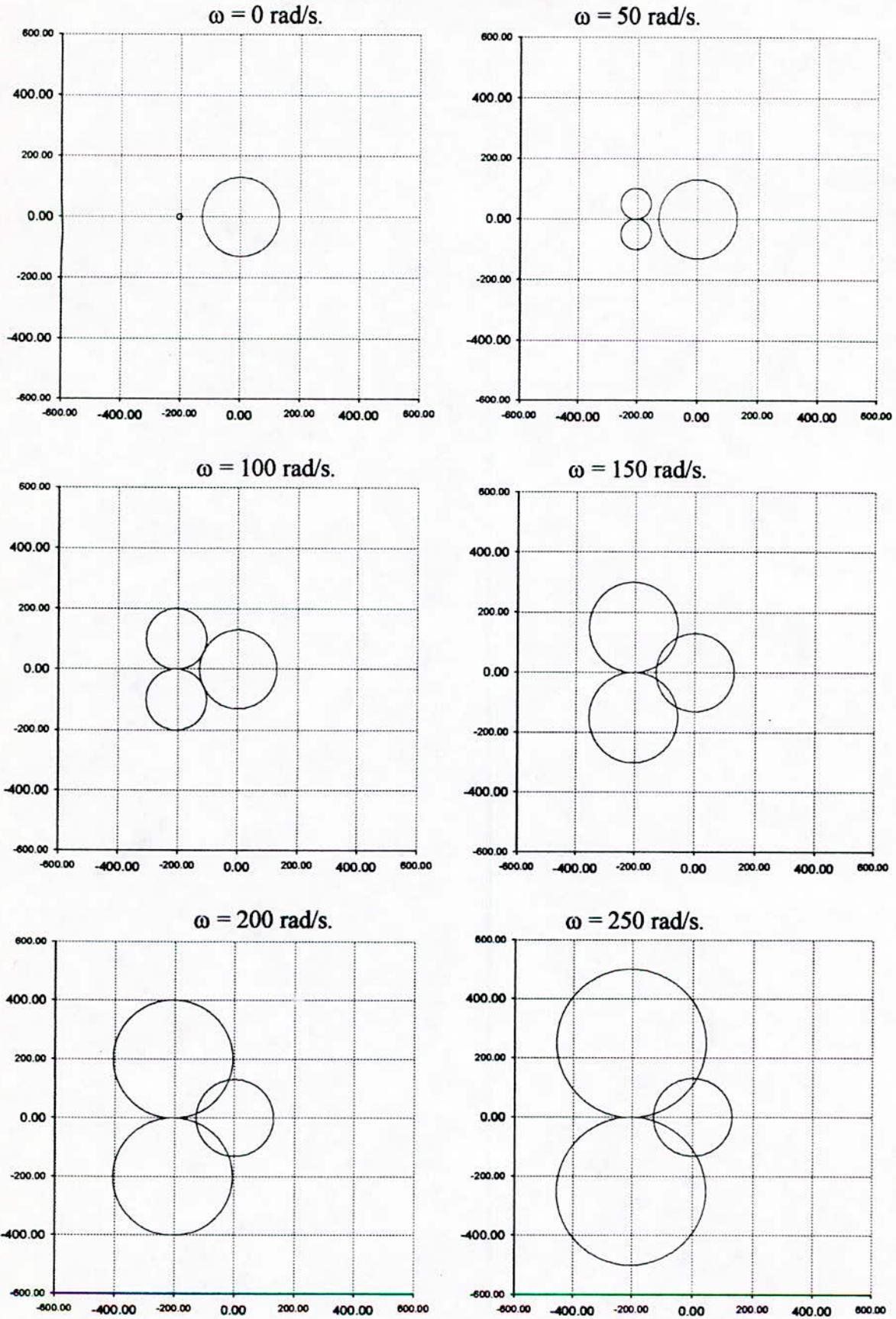


Fig. V.8.a. Tracé des cercles de Gerschgorin pour la machine (1).

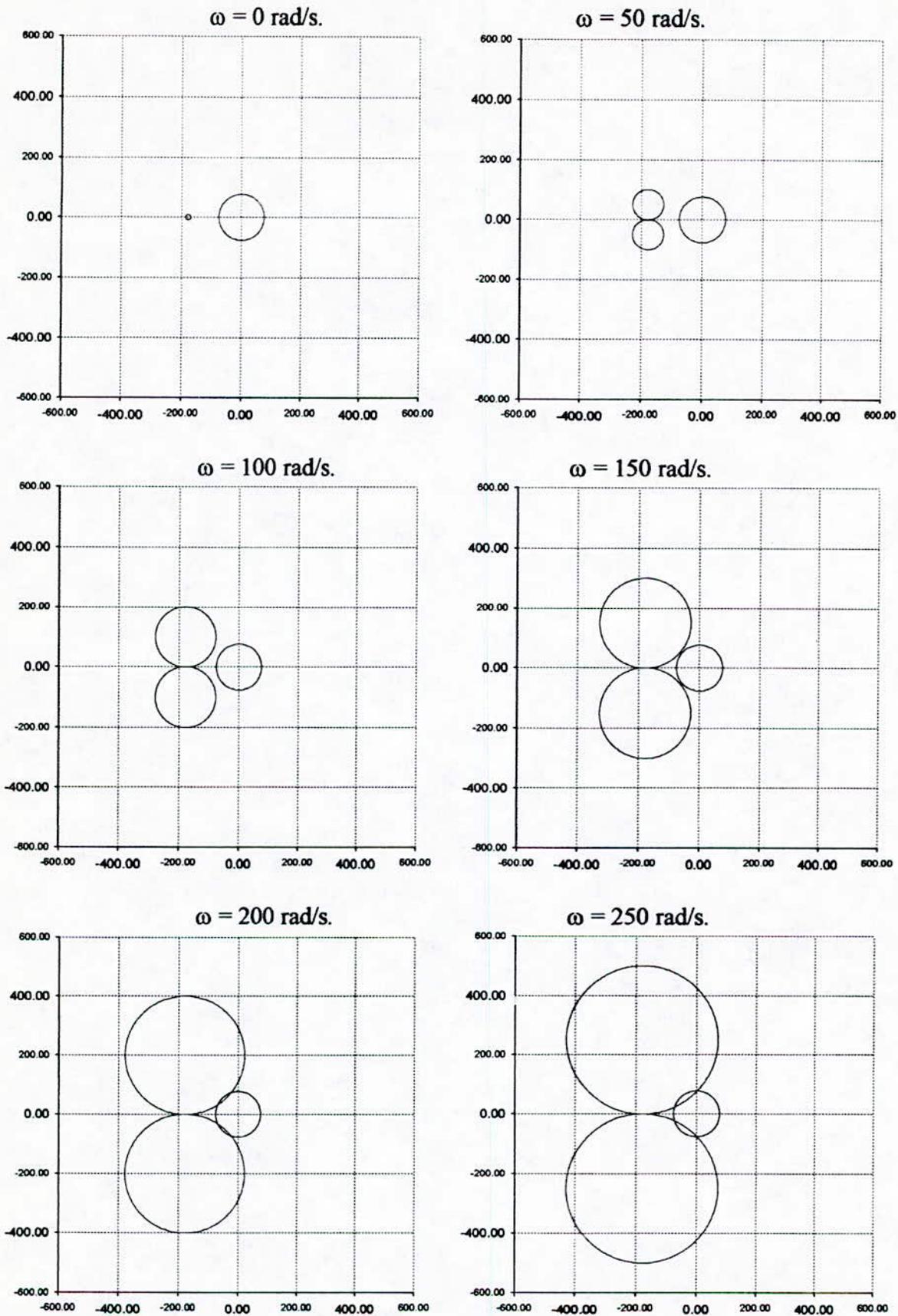


Fig. V.8.b. Tracé des cercles de Gerschgorin pour la machine (2).

V.7. Mise sous forme simplifiée :

Pour les petites vitesses, la transformation finale utilisée est :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P_1 \cdot P_1 \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \\ \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad P_1 \cdot P_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & B_r R(-\theta) \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

et la nouvelle représentation d'état s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_{sp}} I_2 \\ \frac{1}{T_{rp}} I_2 & -\frac{\alpha+1}{T_{sp}} I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & B_r R(-\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{s\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Le couple électromagnétique s'exprime par l'expression :

$$C_{em} = \frac{p}{L_{sp}} x_1^T \cdot J \cdot x_2. \quad (5.61)$$

Les modèles réduits sont calculés en posant :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1l} \\ x_2 &= x_{2l} + x_{2r} \\ v_{s\alpha\beta} &= v_{s\alpha\beta l} + v_{s\alpha\beta r} \end{aligned} \quad (5.62)$$

V.7.1.1. Modèle réduit lent :

Ce modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_{1l} = -\frac{1}{T_r(1+\alpha)} x_{1l} + \frac{\alpha}{1+\alpha} v_{s\alpha\beta l} \\ x_{2l} = -\frac{T_{sp}}{1+\alpha} \left(\frac{1}{T_r} x_{1l} + v_{s\alpha\beta l} \right) \\ C_{eml} = \frac{p}{L_{sp}} x_{1l}^T \cdot J \cdot x_{2l} \end{cases} \quad (5.63)$$

V.7.1.2. Modèle réduit rapide :

Ce modèle s'exprime par :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} x_{2r}(\tau) = -\frac{(1+\alpha)}{T_s} x_{2r} - \sigma v_{s\alpha\beta r} \\ C_{emr} = \frac{p}{L_{sp}} x_{1l}^T \cdot J \cdot x_{2r} \end{cases} \quad (5.64)$$

V.7.2 Modèles réduits en flux et en courants :

On peut expliciter les expressions précédentes avec les flux et les courants

1. D'après la relation (5.59), on écrit :

$$\phi_{s\alpha\beta} = x_1 \quad (5.6.a)$$

$$\phi_{r\alpha\beta} = \frac{1}{B_r} R(\theta) \cdot (x_1 + x_2) \quad (5.6.b)$$

Les flux $\phi_{s\alpha\beta}$ sont donc des variables lentes et les flux $\phi_{r\alpha\beta}$ peuvent être décomposés en des flux lents $\phi_{r\alpha\beta l}$ et des flux rapides $\phi_{r\alpha\beta r}$.

Soit :

$$\phi_{s\alpha\beta} = \phi_{s\alpha\beta l} \quad (5.66.a)$$

$$\phi_{r\alpha\beta} = \phi_{r\alpha\beta l} + \phi_{r\alpha\beta r} \quad (5.66.b)$$

Avec (5.62) et (5.65), l'équation (5.66) devient :

$$\phi_{r\alpha\beta} = \frac{1}{B_r} R(\theta) \cdot \left(\frac{1+\alpha-\sigma\alpha}{1+\alpha} x_{1l} - \frac{T_{sp}}{1+\alpha} v_{s\alpha\beta l} + x_{2r} \right), \quad (5.67)$$

et en identifiant les parties lentes et rapides, l'équation (5.66.b) permet d'écrire :

$$\phi_{r\alpha\beta l} = \frac{1}{B_r} R(\theta) \cdot \left(\frac{1+\alpha-\sigma\alpha}{1+\alpha} x_{1l} - \frac{T_{sp}}{1+\alpha} v_{s\alpha\beta l} \right) \quad (5.68.a)$$

$$\phi_{r\alpha\beta r} = \frac{1}{B_r} R(\theta) \cdot x_{2r} \quad (5.68.b)$$

2). En utilisant la relation (5.17.b), il vient :

$$L_{sp} I_{s\alpha\beta} = \phi_{s\alpha\beta} - B_r \cdot R(-\theta) \cdot \phi_{r\alpha\beta} \quad (5.69.a)$$

$$L_{rp} I_{r\alpha\beta} = -\frac{1-\sigma}{B_r} R(\theta) \cdot \phi_{s\alpha\beta} + \phi_{r\alpha\beta} \quad (5.69.b)$$

et en décomposant les courants en courants lents et rapides :

$$I_{s\alpha\beta} = I_{s\alpha\beta l} + I_{s\alpha\beta r} \quad (5.70.a)$$

$$I_{r\alpha\beta} = I_{r\alpha\beta l} + I_{r\alpha\beta r} \quad (5.70.b)$$

on aboutit aux expressions suivantes :

$$L_{sp} I_{s\alpha\beta l} = \phi_{s\alpha\beta} - B_r \cdot R(-\theta) \cdot \phi_{r\alpha\beta l} \quad (5.71.a)$$

$$L_{sp} I_{s\alpha\beta r} = -B_r \cdot R(-\theta) \cdot \phi_{r\alpha\beta r} \quad (5.71.b)$$

et :

$$L_{rp} I_{\alpha\beta l} = -\frac{1-\sigma}{B_r} R(\theta) \cdot \phi_{s\alpha\beta} + \phi_{r\alpha\beta l} \quad (5.72.a)$$

$$L_{rp} I_{\alpha\beta r} = \phi_{r\alpha\beta r} \quad (5.72.b)$$

3). Donc, les sous systèmes (5.63) et (5.64) deviennent:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(1+\alpha)T_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(1+\alpha)T_r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \begin{bmatrix} v_{s\alpha l} \\ v_{s\beta l} \end{bmatrix} \quad (5.73.a)$$

$$C_{eml} = \frac{pT_s}{(1+\alpha)L_s} (\phi_{s\alpha} v_{s\beta l} - \phi_{s\beta} v_{s\alpha l}), \quad (5.73.b)$$

$$I_{s\alpha\beta l} = \frac{1}{L_{sp}} \left(\frac{\alpha\sigma}{1+\alpha} \cdot \phi_{s\alpha\beta l} + \frac{T_{sp}}{1+\alpha} \cdot v_{s\alpha\beta l} \right), \quad (5.73.c)$$

et :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{s\alpha r} \\ I_{s\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1+\alpha}{T_s} & 0 \\ 0 & -\frac{1+\alpha}{T_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s\alpha r} \\ I_{s\beta r} \end{bmatrix} - \frac{1}{L_s} \cdot \begin{bmatrix} v_{s\alpha r} \\ v_{s\beta r} \end{bmatrix} \quad (5.74.a)$$

$$C_{emr} = p(\phi_{s\alpha} I_{s\beta r} - \phi_{s\beta} I_{s\alpha r}) \quad (5.74.b)$$

avec :

$$\begin{cases} I_{r\alpha\beta l} = \frac{1}{(1+\alpha)B_r L_r} R(\theta) \cdot (\phi_{s\alpha\beta l} - T_s \cdot v_{s\alpha\beta l}) \\ I_{r\alpha\beta r} = -\frac{L_s}{M} R(\theta) I_{s\alpha\beta r} \end{cases}, \quad (5.75)$$

$$\begin{cases} \phi_{r\alpha\beta l} = \frac{1}{B_r} R(\theta) \cdot \left(\left(1 - \frac{\alpha\sigma}{1+\alpha} \right) \phi_{s\alpha\beta l} - \frac{T_{sp}}{1+\alpha} \cdot v_{s\alpha\beta l} \right) \\ \phi_{r\alpha\beta r} = -\frac{L_s}{B_r} R(\theta) I_{s\alpha\beta r} \end{cases} \quad (5.76)$$

V.8. SIMULATIONS ET INTERPRETATIONS :

Nous utilisons les modèles réduits (5.73.a) et (5.74.a) pour la simulation numérique. Les tensions d'alimentation sont considérées sinusoïdales, équilibrées et de valeurs efficaces de 220V.

Pour montrer l'influence du choix des valeurs initiales, nous avons pris deux vecteurs d'état initiaux, $\phi_{10} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, figure (V.9) et $\phi'_{10} = [0 \ 0.9 \ 0 \ 0]^T$, figure (V.10).

Le tracé des différentes grandeurs caractérisant les modèles réduits est représenté sur les figures (V.9) et (V.10). On remarque que les variables rapides s'annulent pour $t = 0.2$ s, puis les grandeurs réelles sont données par leurs composantes réelles lentes.

On constate aussi que le deuxième choix se rapproche des résultats réels de la simulation mieux que le premier choix. Ce constat résultat est prévisible, car il est clair que l'approximation $\varepsilon = 0$, ne peut respecter les conditions initiales des variables originales. Cependant, un tel choix permet de réduire la durée de *la couche limite*.

Il est intéressant de signaler que le modèle réduit est une approximation acceptable du régime transitoire (démarrage de la machine), que du régime permanent (influence du taux de séparabilité des dynamiques).

V.9. CONCLUSION :

Ce chapitre nous a permis de présenter un modèle simplifié de la machine asynchrone. A cet effet, nous avons simulé ce modèle obtenu par application de la technique des perturbations singulières.

Nous avons également montré l'influence du choix des valeurs initiales sur l'approximation apportée par le modèle réduit. Ce choix est un élément fondamental pour l'approche multiéchelle de temps. Nous avons aussi proposé deux modèles simplifiés pour les deux repères d,q et α,β .

Enfin, les modèles développés conviennent au régime transitoire car les dynamiques sont suffisamment éloignées.

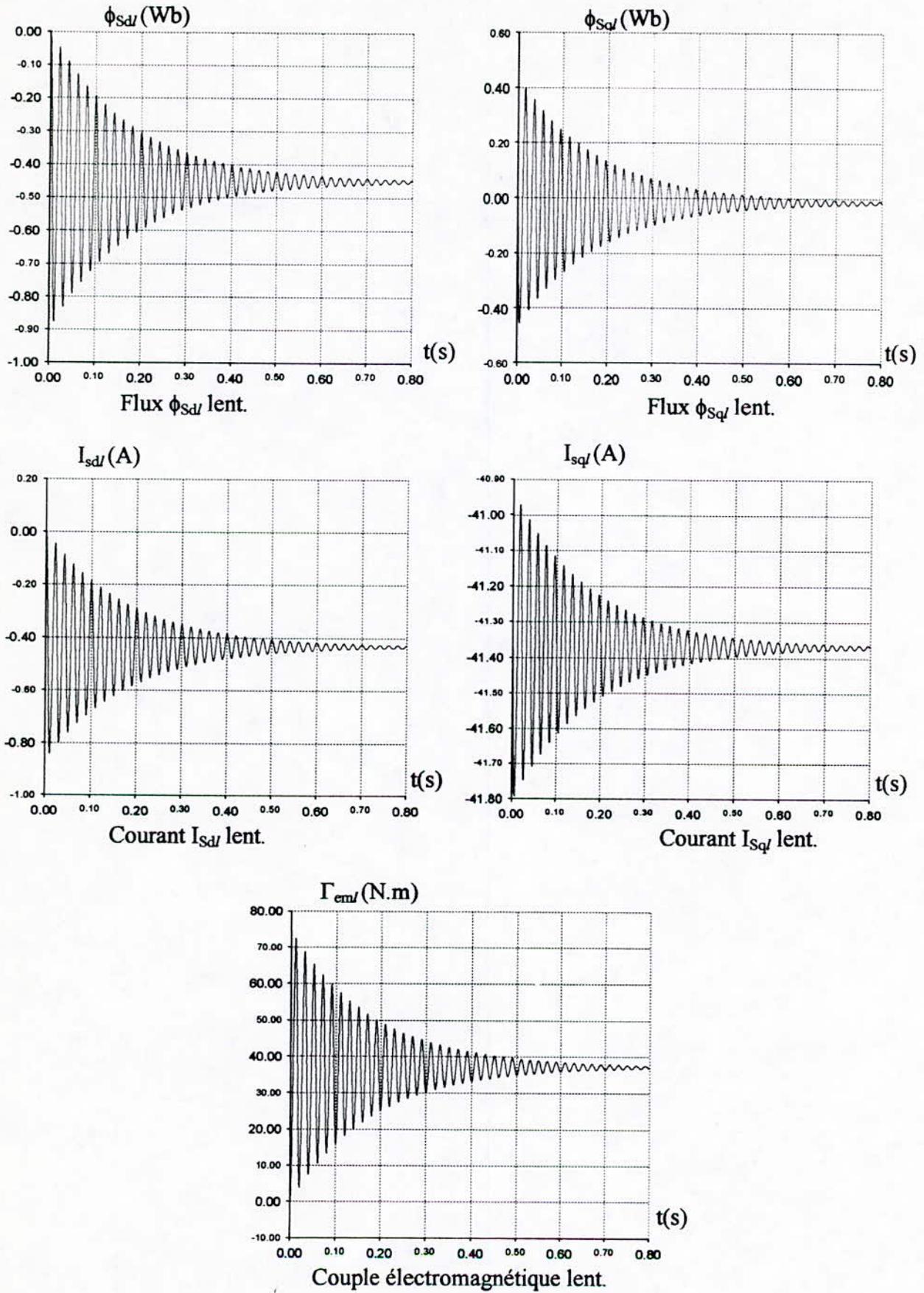


Fig. V.9.a. Evolution des grandeurs électromagnétiques des modèles réduits.

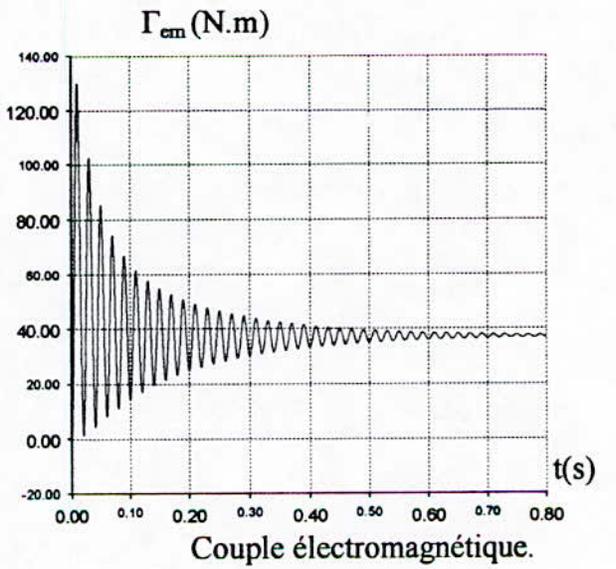
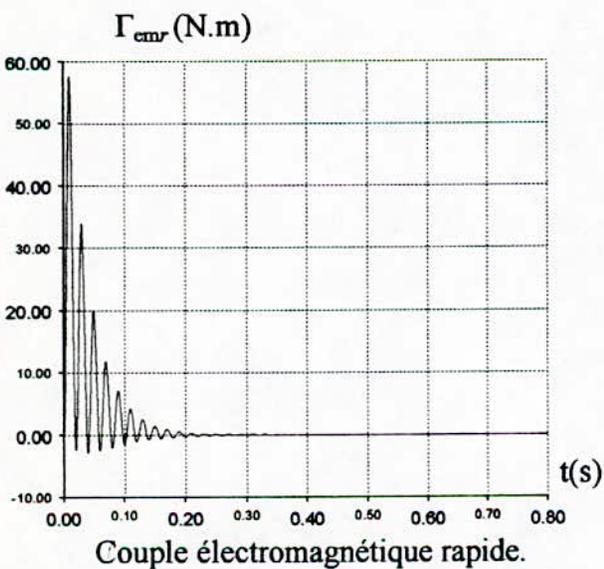
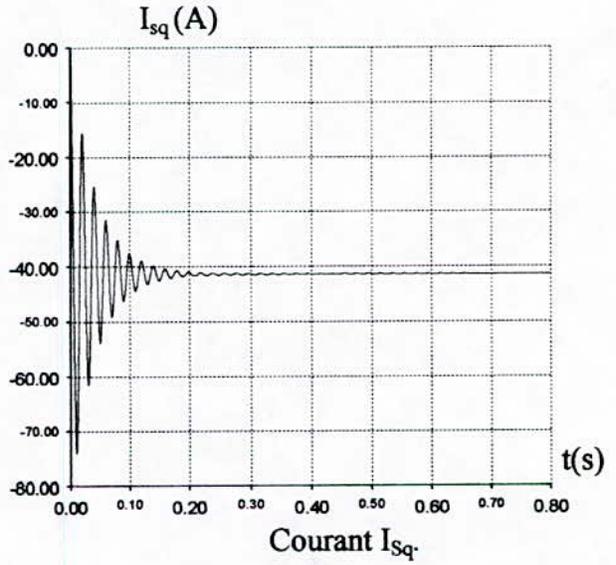
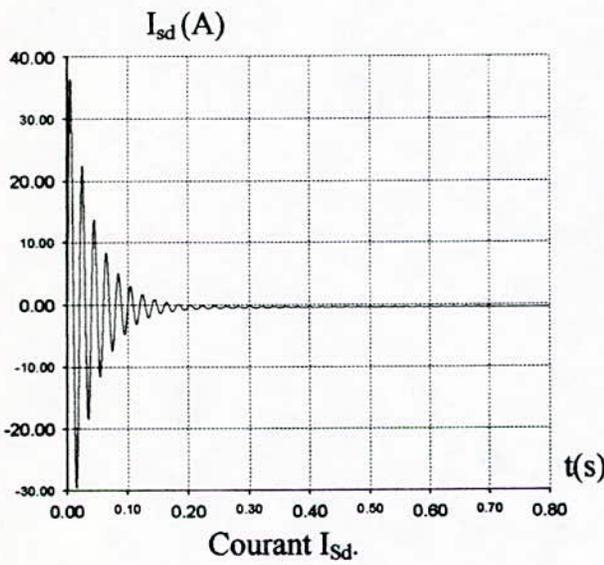
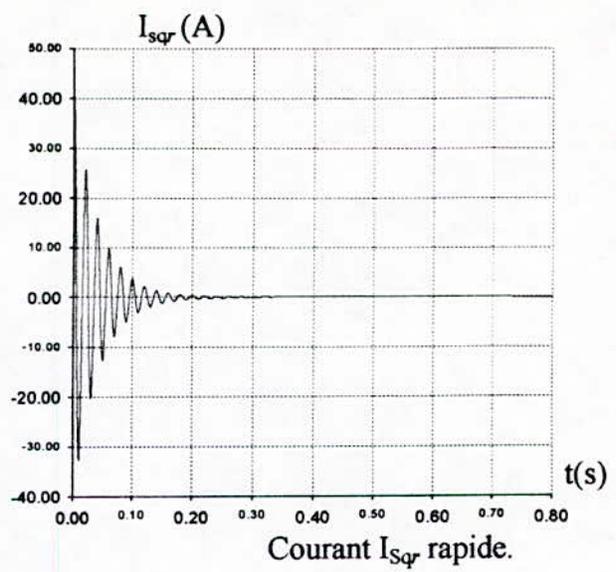
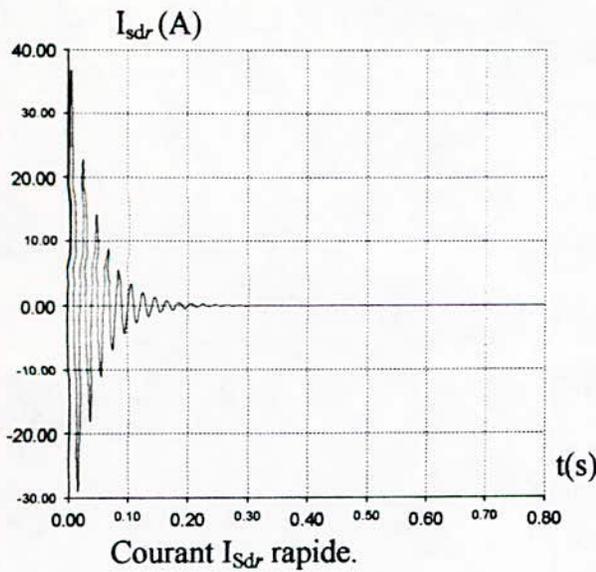


Fig. V.9.b. Evolution des grandeurs électromagnétiques des modèles réduits.

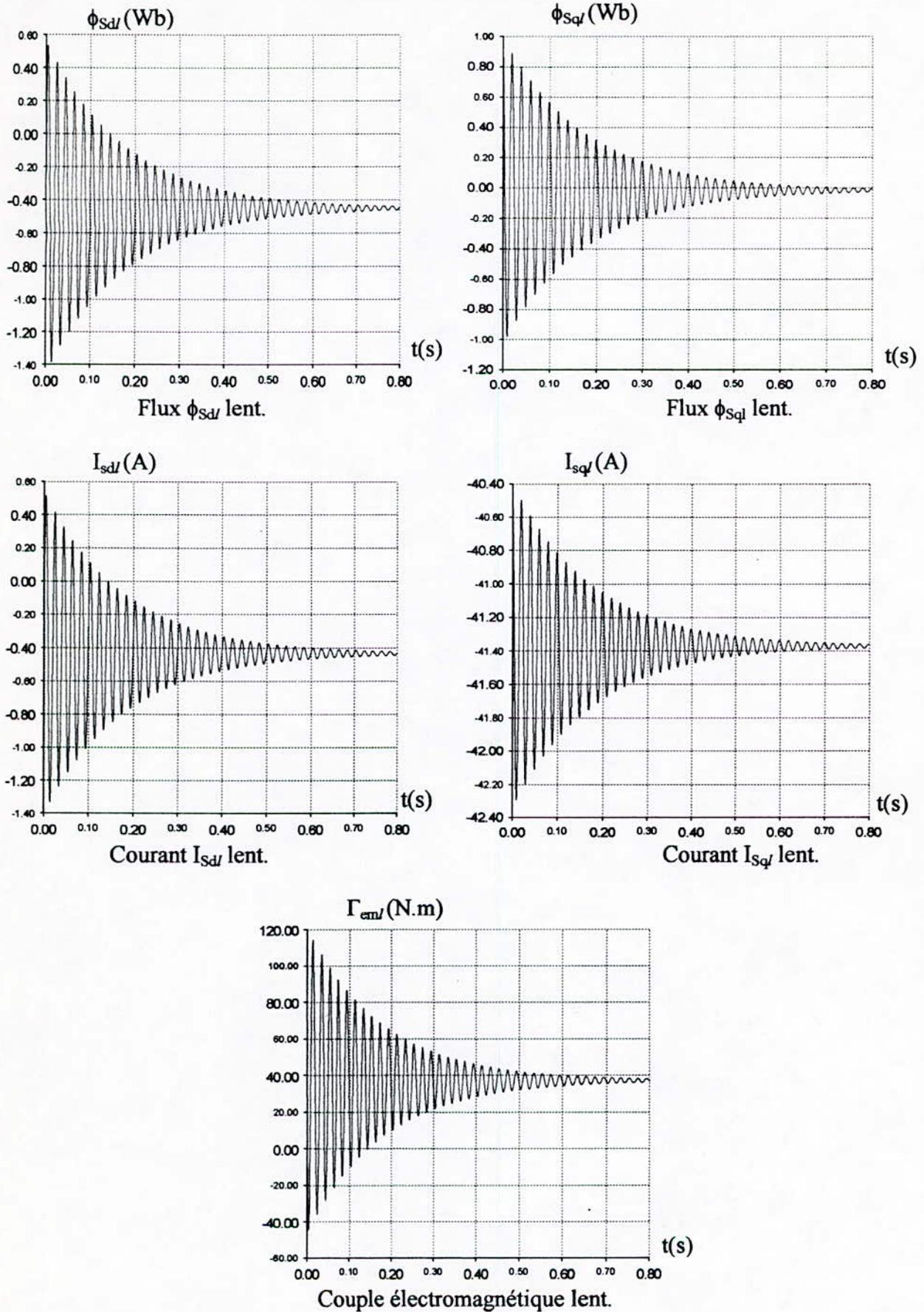


Fig. V.10.a. Evolution des grandeurs électromagnétiques des modèles réduits

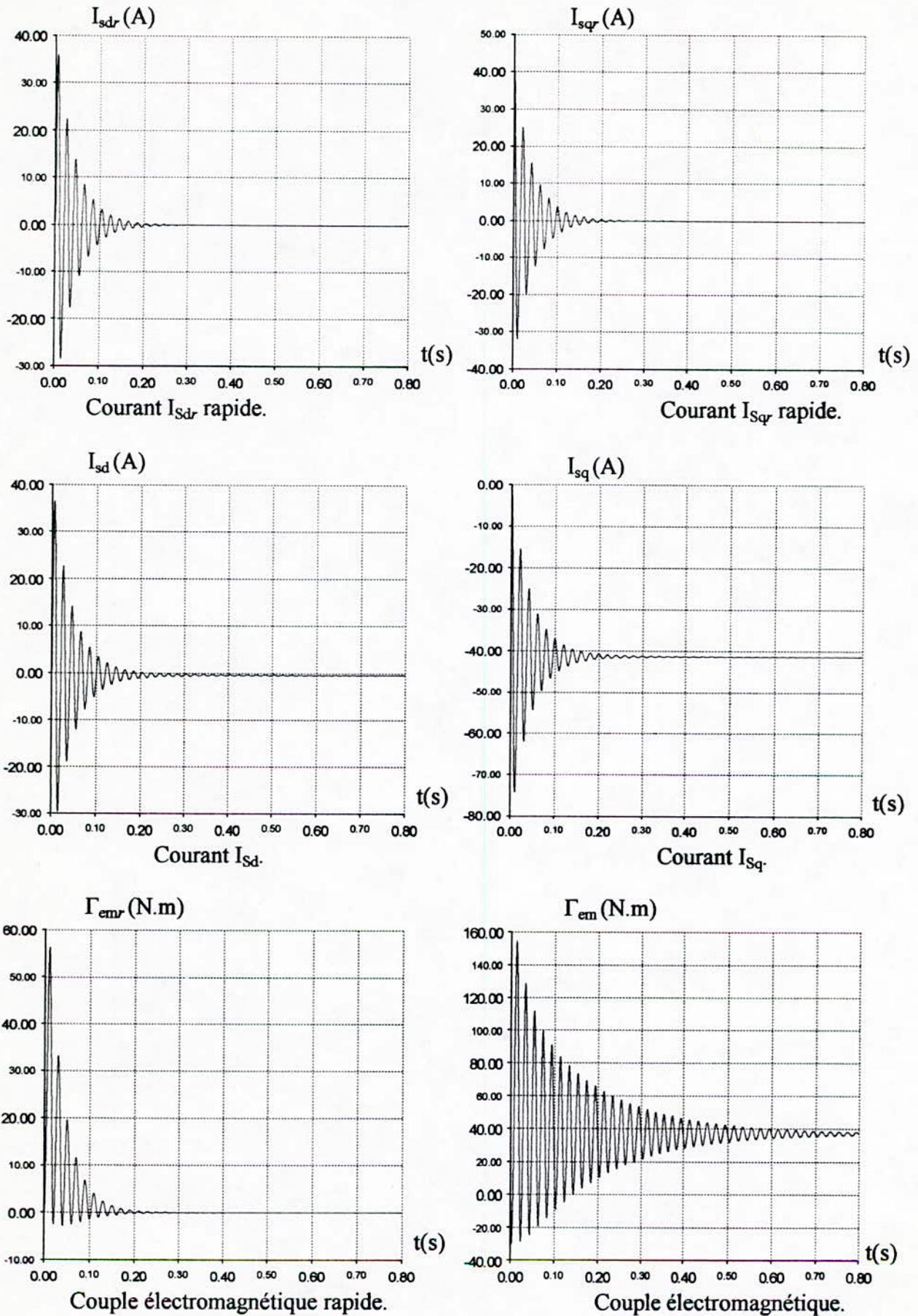


Fig. V.10.b. Evolution des grandeurs électromagnétiques des modèles réduits.

CONCLUSION GENERALE

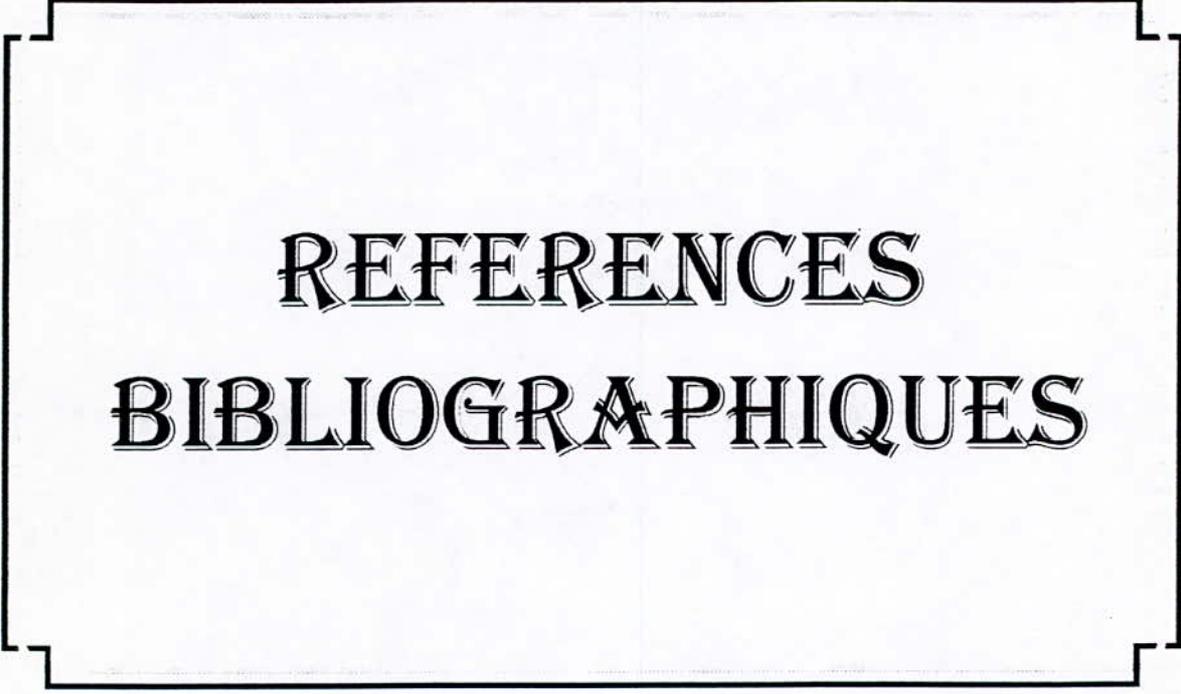
Dans ce travail, nous avons donné un modèle simplifié de la machine asynchrone. L'obtention de ce modèle est basée sur l'utilisation des cercles de Gerschgorin pour la séparation des dynamiques et la technique des perturbations singulières pour la mise sous forme simplifiée. Ces deux étapes nécessitent une forme bien spécifiée de matrice d'état, cependant, nous avons appliqué un certain nombre de transformations algébriques sur la matrice de base initiale afin de la partitionner le mieux possible, le vecteur d'état de manière à regrouper d'une part les variables rapides et d'autre part les variables lentes et éloigner ainsi les différentes dynamiques.

La séparation des modes et des dynamiques par application des cercles de Gerschgorin devient simple est efficace s'ils sont suffisamment éloignés. Le modèle réduit ainsi obtenu garde un sens physique, car ce sont les variables originales qui y interviennent ou éventuellement des combinaisons simples de ces variables.

Les résultats du spectre des valeurs propres donnent une idée sur le comportement global de la machine et notamment lors d'un démarrage direct sur le réseau, qui se traduit par la présence d'une composante oscillatoire importante du couple électromagnétique, ainsi que l'importance de la partie imaginaire qui devient dominante pour l'une des deux dynamiques au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente. Si le mode électromécanique est placé entre ces deux dynamiques alors il ne peut être considéré comme une troisième dynamique.

Pour les petites vitesses, la séparation des dynamiques est nette et donc l'application de la technique des perturbations singulières est efficace. Ce résultat est confirmé par la simulation du modèle réduit qui donne une bonne approche au démarrage de la machine. Mais, pour des vitesses élevées, le découplage des dynamiques est très difficile à cause de la valeur élevée du terme parasite ε (proche de 1), malgré la séparation possible des modes.

Sur l'exemple du modèle de la machine asynchrone, nous avons montré l'efficacité de l'application de la technique des perturbations singulières et notamment pour les dynamiques éloignées (démarrage de la machine), mais l'inconvénient de cette méthode réside dans le choix des valeurs initiales qui ne sont jamais triviales. Cependant, seule l'expérience pratique peut fournir une idée pour surmonter ce problème.



REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

References bibliographiques

- [1] H. Guesbaoui, « Contribution à la mise sous forme standard des systèmes à multiechelles de temps; application à la modélisation des machines à courant alternatif », Thèse de Doctorat ès-science, INPL, Nancy 1992.
- [2] C. Iung. « Contribution à la simplification et à la simulation des systèmes complexes; Application à des procédés électromécaniques », Thèse de Doctorat ès-science, INPL, Nancy 1981.
- [3] O. Touhami, « Contribution à l'identification paramétrique des machines électriques », Thèse de Doctorat d'état ès-science, ENP, ALGER 1994.
- [4] H. Guesbaoui, et C. Iung, «A models reduction of multitime-scale discrete-time linear systems using the Gerschgorin's circle technique », *Int. J. Modelling and simulation*, Vol.16, No.2, 1996.
- [5] E. Durand, « Solutions numériques des équations algébriques », Tome II, Masson, 1972.
- [6] A. Ansary and J. A. DE Abreu-Garcia, « A simple algorithm for time scale separation », 15th Ann. Conf. of IEEE-IES, pp , 1989.
- [7] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rottéla, et I. Zambettakis, « Modélisation et identification des processus », Tome II, Edition Technip-Paris, 1992.
- [8] J. P. Caron et J. P. Hautier, « Modélisation et commande de la machine asynchrone », Edition Technip-Paris, 1995
- [9] B. C. Moore, « Principal analysis in linear systems : controllability, observability and model reduction », *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. AC-26, pp. 17-32, 1975.
- [10] M. Ikda, M.D.Siljak, «Overlapping decompositions, expansions and contractions of dynamic systems », *Large scale system*, No.1, pp.29-38,1980.

References bibliographiques

- [11] P. V. Kokovic, «A Riccati equation for block-diagonalisation of ill-conditioned systems », IEEE Trans. Aut. Control, Vol.AC-20, pp.812-814, 1975.
- [12] G. P. Syros and P. Sannuti, « Singular perturbation modelling of continuous and discrete physical systems », Int. J. of Control, Vol.37, No.5, pp.1007-1022,1983.
- [13] J. H. Chow, P. V. Kokotovic, « Eigenvalue placement in two-time scale system », Proc. of IFAC Symposium on large scale systems, Udine, Italie, pp. 321-326, 1976.
- [14] F. Rottila and G. Dauphin-Tunguy, « Non-linear systems: Identification and Optimal Control », Int. J. of Control, Vol.48, No.2, pp.525-544,1988.
- [15] R. E. Skelton, « Cost decomposition of linear systems with application to model reduction », Int. J. of Control, Vol.32, No.6, pp.1031-1055,1980.
- [16] M. Hutton and B. Friedland , « Routh approximations for reducing order of linear time-invariant systems », IEEE Trans. Aut. Control, Vol.AC-20,pp.329-337,1975.
- [17] R. Unnikrishnan and A. Gupta, « Reduced order models for discrete time systems using remainder matching method », 15th Ann. Conf. of IEEE-IES, Vol.11, pp.383-388,1989.
- [18] O. Wasynczuk and P.C. Krause, « Theory and comparaisn of reduced order models of induction machines », IEEE Trans. Power. App. Syst, Vol. PAS-104, No.3, pp. 598-606, March 1985.
- [19] N. A. Khalil , O. T. Tan and I. U. Baran, « Reduced order models for double-cage induction motors », », IEEE Trans. Power. App. Syst, Vol. PAS-101, pp. 3135-3140,Sept. 1985.
- [20] T. L. Skvarenina and P. C. Krause, « Accuruy of a reduced order model of induction machines in dynamic stability studies », IEEE Trans. Power. App. Syst, Vol. PAS-98, No.4, July/Aug.1979.

References bibliographiques

- [21] L. H. Shamash, « Linear system reduction using Pade approximation to allow retention of dominant modes », *Int. J. of Control*, Vol.21, No.2, pp.257-272,1975.
- [22] H. A. Nour-Eldin and L. F. Lopez, « Modelling and model reduction of the synchronous machines through singular perturbation », Elsevier Science Publishers, pp. 27-34, B.V. Holland, 1984.
- [23] P. Ahmed Zaid , P. W. Sawyer , M. A. Pai and M. K. Sarioglu, « Reduced order modelling of synchronous machines using singular perturbation », *IEEE Trans. Power. App. Syst*, Vol. PAS-29, No.11, pp. 782-789 , 1982.