الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Etude D'un Systeme Plusieurs Entrees Plusieurs Sorties

Proposé par : F.CHIGARA

Etudié par : B.TOUATI
H.TAHAR

Dirigé par : F.CHIGARA

PROMOTION

AVANT-PROPOS

Nous tenons en premier lieu a remercier respectueusement Monsieur FARID CHIGARA , professeur a l'ecole polytechnique d'Alger, pour avoir accepte la direction scientifique de ce travail et pour sa participation au jury de notre these de fin d'etudes.

Nous prions egalement tous les membres du jury d'agreer nos sinceres remerciements pour l'interet qu'ils ont porte a ce travail en acceptant de le juger.

Nous ne pouvons oublier de remercier tous ceux qui, d'une maniere ou d'une autre, ont su nous apporter aide et sympathie.

Nous remercions chaleuresement Monsieur A.BOUAFIA pour l'attention et le soin qu'il a mis a la frappe de ce memoire

DEDICACES

A mes parents.

A mes freres.

A mes soeurs.

A mes amis (es).

TAHAR HOURIYA

A mes parents.

A mes freres et soeurs.

A mes amis (es).

TOUATI BOUALEM

SOMMAIRE

Principales notations utilisees

Remarque : toutes les variables doublement encadrees dans l'organigrammes sont des polynomes.

PWN : Polynomes W numerateur (W represente les termes de la matrice de liaison).
DPWN : Degre du polynome W numerateur.
PWD : Polynomes W denominateur.
DPWD : Degre du polynome W denominateur.
T : Vecteur dont le contenu nous donne les noeuds a supprimer (correspondant a la valeur 0) et les noeuds a lire (correspondant a la valeur 1).
A : Vecteur indiquant l'indice des noeuds a lire.
PSN : Polynome S numerateur, S represente la matrice reduite (apres effacement de noeuds).
DPSN : Degre du polynome S numerateur.
PSD : Polynome S denominateur.
DPSD : Degre du polynome S denominateur.
PDETN : Polynome determinant numerateur.
DPDETN : Degre du polynome determinant numerateur.
PDETD : Polynome determinant denominateur.
DPDETD : Degre du polynome determinant denominateur.
PFN : Polynome F numerateur (F variable de permutation).
DPFN : Degre du polynome F numerateur.
PFD : Polynome F denominateur.
DPFD : Degre du polynome F denominateur.
PDN : Polynome D numerateur (D variable de calcul).
DPDN : Degre du polynome D numerateur.
PDD : Polynome D denominateur.
DPDD : Degre du polynome D denominateur.
PGN : Polynome G numerateur (G variable de calcul).
DPGN : Degre du polynome G numerateur.
PGD : Polynome G denominateur.
DPGD : Degre du polynome G denominateur.
PSGN : Numerateur du produit des polynomes S et G.
PSGD : Denominateur // // //
DPSGN : Degre de PSGN.
DPSGD : Degre DE PSGD.
P1 : Produit des polynomes PSN et PSGD
DPP1 : Degre du polynome P1
P2 : Produit des polynomes PSD et PSGN
DPP2 : Degre du polynome P2
PSDN1 : Produit des polynomes PSDN et PDETD.
PSDN2 : // // PSDD et PDETN.
DPSN1 : Degre de PSDN1.
DPSN2 : // DE PSDN2.

PSDN : Polynome SD numerateur .
PSDD : // // denominateur.
DPSDN : Degre du polynome PSDN.
DPSDD : // // PSDD.
SD : Polynome denominateur de la MATRICE DE TRANSFERT.
DSD : Degre du polynome SD.
PSNN : Polynome SN numerateur.
PSND : // // denominateur.
DPSNN : Degre du polynome PSNN.
DPSND : // // PSND.
PSNN1 : Produit des polynomes PSNN et PDETD.
PSNN2 : // // PSND et PDETN.
DPSNN1 : Degre du polynome PSNN1.
DPSNN2 : // // PSNN2.
SN : Polynome numerateur de la matrice de transfert.
DSN : Degre de SN
A2 et B2 etant les polynomes faisant les operations polynomiales.
RES etant le polynome resultat entre A2 et B2.
DEN : Matrice dont les termes sont les degres du polynome numerateur de l'equation diff associee a une entree et une sortie precise.
DED : Matrice dont les termes sont les degres des polynomes denominateurs.
V1 = MOT1 : Module de la F.T de la matrice T1.
V2 = ART1 : Argument // //
N0 = V1 cos(V2) : Re(T1)
H0 = V1 sin(V2) : Im(T1)
MDW (ADW) : Matrice renfermant les modules (arguments) des variables complexes representant les polynomes denominateurs associees a la matrice de liaison.
MNW (ANW) : Matrice renfermant les modules (arguments) des variables complexes representant les polynomes numerateurs associees.
CON (COD) : Matrice renfermant les coefficients des polynomes numerateurs (denominateurs)
OM : La pulsation omega
BT1 (BT2) : Partie imaginaire du polynome numerateur (denominateur).
AF1 (AF2) : Partie reelle du polynome numerateur (denominateur).
MOSD (ARSD) : Module (argument) de SD.
MOS (ARS) : Module (argument) de S
MODET (ARDET) : Module (argument) du determinant DET

INTRODUCTION

Malgre les recents travaux developpes dans l'analyse des systemes la commande des systemes complexes, reste encore mal connue. Cette lacune represente un handicap dans la gestion des processus industriels complexes, representes principalement par des systemes multidimensionels.

Le travail qui se divise en 3 parties concerne l'etude des systemes multidimensionnels :

Dans la premiere partie, nous developpons un algorithme qui permet de determiner la matrice de transfert d'un systeme multidimensionnel par programmation.

La deuxieme partie est un prealable a la commande des systemes multidimensionnels dans l'espace d'etat. Nous presentons donc les divers modeles des systemes a commander a savoir :

representation d'etat, par matrice de transfert, par operateurs differentiels, ainsi que les methodes de passage d'une representation a la representation d'etat.

Nous developpons un algorithme de passage de la representation par operateurs differentiels a la representation d'etat.

Dans la troisieme partie nous exposons des notions de commande d'un systeme multidimensionnel.

CHAPITRE I

NOTION DE GRAND SYSTEME

I-1- Notion de systeme :

Un systeme est une collection d'objets lies entre eux par des liens physiques ou economiques et representant un tout ferme, que l'on isolera artificiellement du reste du monde. Le vocable systeme peut correspondre a un element facilement isolable ou a un ensemble d'elements, selon les besoins et le probleme a resoudre.

Tout systeme en general possede plusieurs entrees et plusieurs sorties.

Le systeme s'il est isole, il n'est pas completement separe du monde : les perturbations dues a son environnement peuvent le faire agir, ainsi les entrees d'un systeme seront des commandes ou des perturbations, les sorties seront les grandeurs caracteristiques ou variables auxquelles on s'interesse directement et que l'on mesure.

Donc pour pouvoir agir efficacement sur un systeme il est imperatif de bien connaitre son environnement et de bien le definir.

I-2- Notion de grand systeme :

Un grand systeme est compose d'un ensemble de petits systemes dont ils different quantitativement et qualitativement par :

- La complexite.
- Une conception generale.
- Un grand nombre d'entrees et de sorties, donc un grand nombre de fonctions a remplir.

On distingue en general deux types de grand systemes :

I-2-1 Grand systeme DETERMINISTE :

Il est caracterise par des grandeurs qui varient d'une facon continue conformement a des lois parfaitement deterministes, pour l'analyse de ce systeme on emploie les methodes analytiques classiques.

I-2-2 Grand systeme STOCHASTIQUE :

La variation des grandeurs se fait d'une maniere desordonnee et aleatoire. La description de ces systemes est faite a l'aide des methodes probabilistes et statistiques.

La plupart des systemes reels industriels, economiques,... ect sont de grands systemes multidimensionels c'est a dire ayant plusieurs entrees et plusieurs sorties.

I-3 Probleme de grand systeme :

Les problemes des sytemes complexes (systeme ayant un grand nombre d'entrees et de sorties) posent des difficultes enormes de point de vue analyse et controle. De tels systemes sont

rencontres non seulement dans l'industrie (systeme de production,... ect), mais aussi dans le domaine socio-economique (transport et distribution, systeme d'energie,... ect).
L'analyse et le controle des systemes d'ordre reduit ne posent pas de problemes, mais ceci n'est en general pas possible pour les systemes d'ordre eleve.
Les difficultes peuvent etre : la mauvaise convergence et divergence meme de l'algorithme de controle des grand systemes, insuffisance de la capacite memoire des calculateurs car la dimension du probleme a resoudre est en generale elevee et le temps d'execution qui est parfois grand.
Le traitement des systemes complexes exige donc une reduction de la dimension du probleme en utilisant la programmation dynamique ou bien decomposer le systeme complexe dans le but d'utiliser les methodes de decomposition-coordination.

CHAPITRE II

Fonctions de transfert et matrices de transfert

II-1 Fonction de transfert d'un systeme monovariable :

1-1 Definition : La fonction de transfert d'un systeme monovariable lineaire ,est le rapport de la transformee de LAPLACE de la reponse du systeme, par la transformee de LAPLACE du signal d'entree correspondant.

Les conditions initiales etant nulles ou le systeme est initialement au repos.

$$U(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow Y(p)$$

$$Y(p) = H(p) \,.\, U(p) \longrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

ou :

U(p) : Est la transformee de LAPLACE de la grandeur d'entree u(t)

$$U(p) = L\,[u(t)]$$

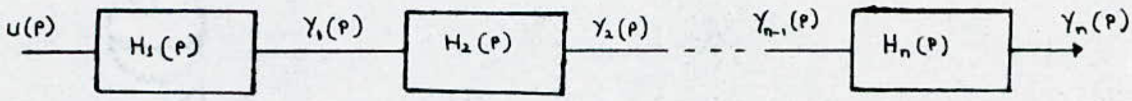
Y(p): Est la transformee de LAPLACE de la grandeur de sortie y(t)

$$Y(p) = L\,[y(t)]$$

H(p) : Est la transformee de LAPLACE de la fonction de transfert d'un systeme dont la reponse impulsionnelle est h(t).

$$H(p) = L\,[h(t)]$$

1-2- Fonction de transfert de systemes monovariables associes en chaine :



En appliquant la definition de la fonction de transfert a chaque etape :

$$Y_1(p) = H_1(p).U(p)$$

$$Y_2(p) = H_2(p).Y_1(p) = H_2(p).H_1(p).U(p).$$

.

.

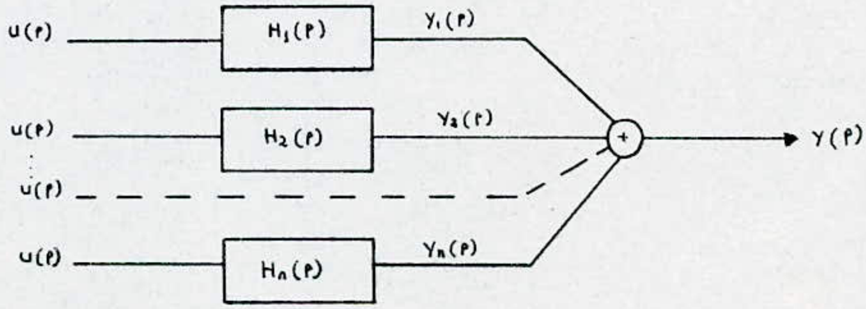
d'ou : $Y_n(p) = [H_1(p).H_2(p).......H_n(p)].U(p)$

d'une facon generale :

$$H(p) = \prod_{i=1}^{n} H(p)$$

Donc la fonction de transfert d'une chaine de systemes monovariables, lineaires et invariants est egale au produit des fonctions de transfert des systemes associes.

1-3 Fonction de transfert de systemes monovariables associes en paralleles :



On a :

$$Y_1(p) = H_1(p).U(p).$$

$$Y_2(p) = H_2(p).U(p)$$

.

.

.

$$Y_n(p) = H_n(p).U(p)$$

d'ou $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) + \ldots + Y_N(p) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(p)$

$$Y(p) = H_1(p).U(p) + H_2(p).U(p) + \ldots + H_n(p).U(p)$$

<u>d'une facon generale :</u> $H(p) = \sum_{i=1}^{n} H_i(p)$

Donc la fonction de transfert d'une chaine de systemes monovariables, lineaires et invariants associes en parallele est egale a la somme des fonctions de transferts individuelles.

II-2. Matrice de transfert d'un systeme multivariable :

2-1 <u>Definition</u> : La matrice de transfert, est une matrice de fonctions de tranfert representant les transmittances entre les divers couples entrees-sorties.

Pour un systeme ayant "m" entrees et "n" sorties, ce systeme multivariable possede (m.n) reponses impulsionnelles, il possede necessairement un nombre egal de fonctions de transfert qui sont reparties de la maniere suivante :

- Pour une sortie de rang "i" a laquelle m reponses impulsionnelles $h_{ij}(t)$ sont associes (j=1,2,...,m), on doit prevoir "m" fonctions de transfert $H_{ij}(p)$.

$$H_{i1}(p) = L\,[h_{i1}(t)]$$

$$H_{i2}(p) = L\,[h_{i2}(t)]$$

$$\vdots$$

$$H_{im}(p) = L\,[h_{im}(t)]$$

- Pour "i" allant de 1 a n nous aurons "n" combinaisons de fonctions de transfert analogues aux precedentes.

d'ou $i=1 \rightarrow H_{11}(p)\ ;\ H_{12}(p)\ ;\ \ldots\ ;\ H_{1m}(p)$

$i=2 \rightarrow H_{21}(p)\ ;\ H_{22}(p)\ ;\ \ldots\ ;\ H_{2m}(p)$

$\vdots$

$i=n \rightarrow H_{n1}(p)\ ;\ H_{n2}(p)\ ;\ \ldots\ ;\ H_{nm}(p)$

Les (m.n) fonctions de transfert constituent les elements d'une matrice appelee : matrice de transfert formee de n lignes et m colonnes.

$$H(p) = \begin{matrix} H_{12}(p) & H_{13}(p) & \ldots & H_{1m}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) & \ldots & H_{2m}(p) \\ \vdots & & & \\ H_{n1}(p) & H_{n2}(p) & \ldots & H_{nm}(p) \end{matrix}$$

La matrice de transfert est donc liee a la matrice des reponses impulsionnelles [h(t)] par la relation : $H(p) = L\,[h(t)]$.

On constate que cette relation generalise celle des systemes monovariables.

2-2. Proprietes de la matrice de transfert :

2-2-1. La reponse de rang "i" d'un systeme multivariable, lineaire, invariant est donnee par la relation :

$$Y_i(p) = H_{i1}(p).U_1(p) + H_{i2}(p).U_2(p) + \dots + H_{im}(p).U_m(p)$$

2-2-2. Lorsque "i" varie de 1 a n on aura des relations analogues.

$$Y_1(p) = H_{11}(p).U_1(p) + H_{12}(p).U_2(p) + \dots + H_{1m}(p).U_m(p)$$

$$Y_2(p) = H_{21}(p).U_1(p) + H_{22}(p).U_2(p) + \dots + H_{2m}(p).U_m(p)$$

$$\vdots$$

$$Y_n(p) = H_{n1}(p).U_1(p) + H_{n2}(p).U_2(p) + \dots + H_{nm}(p).U_m(p)$$

d'ou : $[Y(p)] = [H(p)].[U(p)]$

Cette relation generalise celle des systemes monovariables.

```
U(p)      -----------    Y(p)       [U(p)]     -----------   [Y(p)]
 -------     H(p)     -------        -------     [H(p)]    --------
          -----------                          -----------
```

Systeme monovariable — Systeme multivariable

- La matrice de transfert est en general le modele de base dont on dispose lorsque le systeme est trop complexe pour etre mis completement en equations. En utilisant les lois de la physique on procede a une identification globale entrees-sorties.

  La matrice de transfert d'un systeme mutivariable sera determinee dans le prochain chapitre.

CHAPITRE III

DETERMINATION DE LA MATRICE DE TRANSFERT

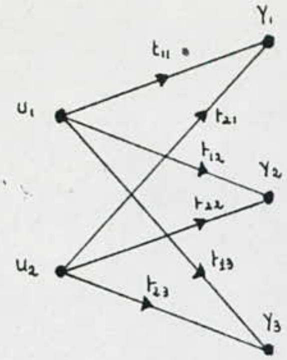
PAR ORDINATEUR

III-1. Introduction :

On peut representer un systeme multidimensionnel par sa matrice de transfert, qui decrit la facon dans laquelle toutes les sorties sont reliees a toutes les entrees. (Chap II.2)

La meme chose peut etre illustree en utilisant le graphe de fluence, lequel est une representation graphique que l'on peut etablir directement a partir du schema du systeme considere, sans qu'il soit necessaire d'ecrire le systeme d'equations qu'il lui est associe.

Sur l'exemple de la figure "1" ou t_{ij} designe les diverses fonctions de transfert liant l'entree "i" a la sortie "j", nous remarquons que l'emploi des indices nous a donne une matrice de transfert raisonable, mais les indices sont en contradiction avec la notation conventionnelle employee dans la representation des matrices. Pour resoudre ce probeleme et maintenir la notation conventionnelle laquelle nous considerons desirable, nous ecrirons la matrice de transfert de la Fig.1 dans une forme alternative, comme l'indique la Fig.2



$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$[Y_j] = [t_{ij}] . [U_i]$$

Diagramme de fluence d'un systeme 2-entrees et 3 sorties.

$[t_{ij}]$: Fonction de transfert.

Fig-1.

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{bmatrix}$$

$$[Y_j] = [U_i].[t_{ij}]$$

Fig-2.

Une autre forme de description du diagramme de fluence est donnee par une matrice appelee " MATRICE DE LIAISON ", dans laquelle nous pourrons distinguer toutes les liaisons entree-entree, entree-sortie, sortie-entree, sortie-sortie du systeme considere.
La Fig-3 nous montre la matrice de liaison du systeme de le Fig-1. A cause de la simplicite du graphe de fluence, cette matrice de liaison ne semble pas offrir mieux que la matrice de transfert, deduite directement du graphe de fluence.
Par contre, en ajoutant au systeme de la Fig-1 une boucle de retour (comme nous le montre la Fig-4), le graphe de fluence n'est plus simple et la matrice de transfert n'est pas facilement deduite du graphe de fluence, d'ou l'importance de la matrice de liaison qui nous servira de Base pour l'obtention de la matrice de transfert par la Regle de MASON, que l'on definira plus loin.
La Fig-5 nous permet de voir la matrice de liaison du systeme de le Fig-4, et a cause des divers branches ayant un gain unite, nous remarquerons que $Y_1 = U_1$, $Y_2 = U_2$, $Y_3 = U_3$, .. et ainsi nous pouvons reduire la matrice de liaison en une matrice plus maniable (comme le montre la Fig-6).
Dans la suite de notre d'etude, nous travaillerons avec des matrices de liaisons "reduites" ayant une forme analogue a celle de la Fig-6.

	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	0	0	g_{11}	g_{12}	g_{13}
X_2	0	0	g_{21}	g_{22}	g_{13}
Y_1	0	0	0	0	0
Y_2	0	0	0	0	0
Y_3	0	0	0	0	0

Fig-3. : <u>matrice de Liaison du systeme de la Fig-1</u>

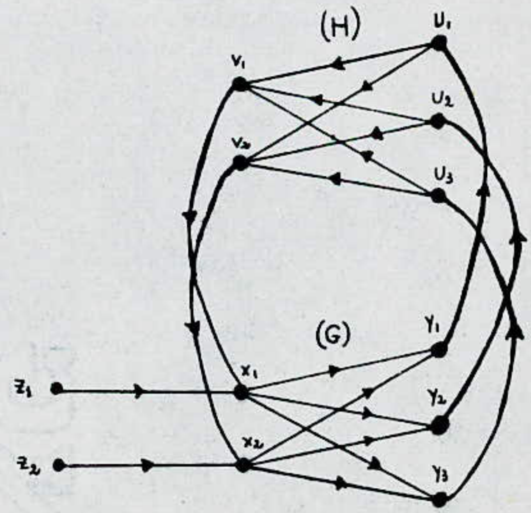


Fig-4. : <u>systeme avec boucles de retour ayant :</u>

<u>2 entrees et 3 sorties.</u>

	Z_1	Z_2	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	U_1	U_2	U_3	V_1	V_2
Z_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
X_1	0	0	0	0	g_{11}	g_{12}	g_{13}	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	0	g_{21}	g_{22}	g_{23}	0	0	0	0	0
Y_1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Y_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Y_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
U_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{11}	h_{12}
U_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{21}	h_{22}
U_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{31}	h_{32}
V_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V_2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Fig-5. :matrice de liaison du systeme de la Fig-4.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\
\hline
X_1 & 0 & 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\
X_2 & 0 & 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\
Y_1 & h_{11} & h_{12} & 0 & 0 & 0 \\
Y_2 & h_{21} & h_{22} & 0 & 0 & 0 \\
Y_3 & h_{31} & h_{32} & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Fig-6. :matrice de liaison reduite du systeme de la Fig-4

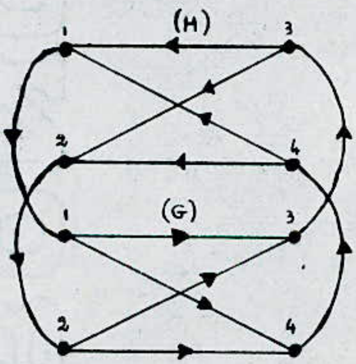


Fig-10 . : systeme 2 entrees -2sorties.

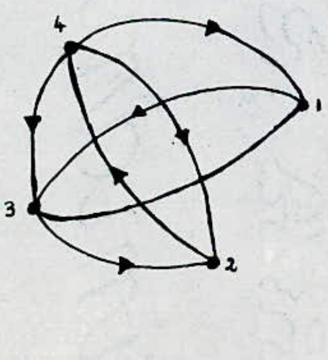


Fig-11 . Exemple de 4 noeuds.

III-2. Regle de MASON :

Mason a publie des travaux importants sur la topologie des diagrammes de fluence, il a etabli une formule generale donnant la transmittance entre deux noeuds quelconques d'un tel diagramme.

Il n'est pas utile de demontrer ici cette formule, qui resulte directement de la formule de KRAMER pour la resolution des systemes d'equations lineaires.

Nous nous contenterons d'exposer son mode d'emploi au moyen d'un exemple.

III-2-1. Calcul du determinant :

En premier lieu, toutes les trasmittances relatives a un diagramme de fluence donne ont pour denominateur commun le determinant , dont l'expression generale s'ecrit :

$$\Delta = 1 - \sum B_i + \sum B_i B_j - \sum B_i B_j B_k + \dots\dots\dots \qquad (1)$$

ou :

$\sum B_{ij}$ est la somme des transmittances de toutes les boucles du diagramme .

$\sum B_i B_j$ est la somme des produits deux a deux des transmittances des boucles, les deux boucles d'un meme produit ne doivent pas avoir de points communs (noeuds ou branches).

$\sum B_i B_j B_k$ est la somme des produits trois par trois des transmittances des boucles, les trois boucles d'un meme produit ne devant avoir de points communs.

Et ainsi de suite. on notera bien l'alternance des lignes + et -.

III-2-2. Calcul des transmittances :

Ceci etant, la transmittance $T_{ab} = \frac{b}{a}$ entre deux noeuds a et b.

$$T_{ab} = \frac{b}{a} = \frac{\sum_i C^i_{ab} \cdot \Delta^i_{ab}}{\Delta} \qquad (2)$$

Dans cette expression :

C^i_{ab} represente la transmittance de l'un des chemins ouverts (ne comprenant pas de boucles) reliant le noeud "a" au noeud "b".

Δ^i_{ab} represente le determinant du diagramme obtenu en supprimant dans le diagramme initial le chemin C^i_{ab}, c'est a dire l'ensemble des termes de Δ dont les boucles n'ont pas de points communs avec le chemin C^i_{ab}.

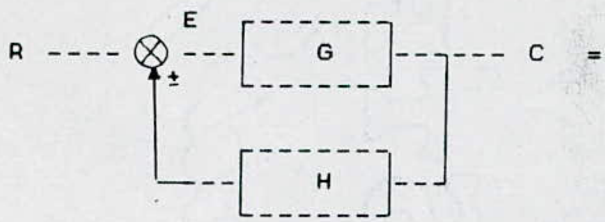
Pour un systeme ayant plus de 3 entrees et 3 sorties, le diagramme de fluence se complique au point ou la recherche des BOUCLES et des CHEMINS OUVERTS devient penible et non denuee de risques d'erreurs. L'interet de la formule de MASON vient de ce que les systemes d'equations decrivant les systemes physiques tels que les circuits electriques sont toujours tres incomplets, et qu'elle fournit directement l'ensemble des termes non nuls du develppement des determinants de KRAMER.

De plus, il est souvent possible d'etablir le diagramme de fluence par simple lecture du schema du systeme considere.[ ]

Comme il a ete deja dit precedemment que, nous nous contenterons d'exposer le mode d'emploi de MASON par des exemples.

Exemple 1 :

Considerons le systeme simple ayant une entree et une sortie :



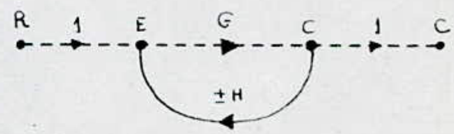


Figure "1"

Determinons la transmittance liant l'entree R (correspondant au noeud "1") a la sortie C (correspondant au noeud "2"), en utilisant la formule de MASON et ceci manuellement.

Donc en 1er lieu il faut numeroter les noeuds comme l'indique la figure "1".

On remarque sur le graphe de fluence une seule boucle, entre le noeud 3 et le noeud 4 de gain + GH ou - GH : $B34 = \pm GH$

d'ou, d'apres la formule de MASON (1)

$$\Delta = 1 - B_{34} = 1 \mp G.H$$

- Calcul de la transmittance liant le noeud 1 au noeud 2 :

Il n'y a qu'un seul chemin ouvert reliant le noeud 1 au noeud 2 et ne comprenant pas de boucles, c'est le chemin : 1.3.4.2

$$C^{1}_{12} = G$$

En supprimant du diagramme initial le chemin C^{1}_{12}, on n'obtient aucune boucle d'ou :

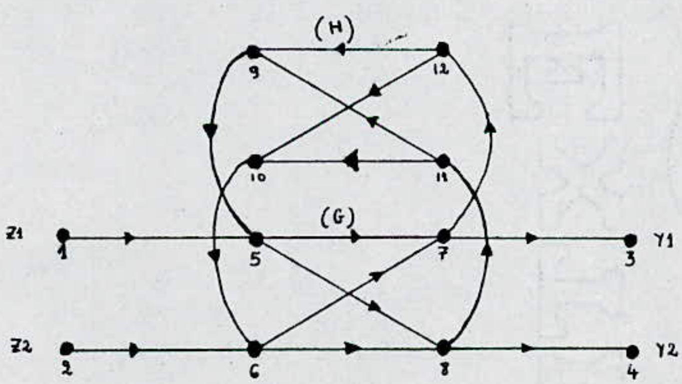
$$\Delta^{1}_{12} = 1 - 0 = 1$$

Enfin d'apres la formule de MASON (2) nous obtenons la transmittance liant le noeud 1 au noeud 2 :

$$T = \frac{\sum_i C^i_{ab} \cdot \Delta^i_{ab}}{\Delta} = \frac{\sum_i C^1_{12} \cdot \Delta_{12}}{\Delta} = \frac{C^1_{12} \cdot \Delta_{12}}{\Delta}$$

$$T_{12} = \frac{G}{1 \underset{-}{+} G.H}$$

Exemple 2 : considerons le systeme ayant 2 entrees et 2 sorties :



D'apres la formule de MASON (1) on a :

$$\sum B_i = g_{11} h_{11} + g_{22} \cdot h_{22} + g_{12} h_{21} + g_{21} h_{12} + g_{11} h_{12} g_{22} h_{21} + g_{21} h_{11} g_{12} h_{22}$$

$$\sum B_i B_j = g_{11} h_{11} g_{22} h_{22} + g_{12} h_{21} g_{21} h_{12}$$

d'où

$$\Delta = 1 - \left[g_{11} h_{11} + g_{22} h_{22} + g_{12} h_{21} + g_{21} h_{12} + g_{11} h_{12}\, g_{22} h_{21} + g_{21} h_{11}\, g_{12} h_{22} \right] + g_{11} h_{11}\, g_{22} h_{22} + g_{12} h_{21}\, g_{21} h_{12}$$

Recherche de la transmittance joignant le noud "1" (correspondant à l'entrée 1) au noeud "3" (correspondant à la sortie "1")

D'aprés La formule (2) de MASON : On a deux chemins joignant les noeuds en question.

$$C^1_{12} = g_{11} \qquad \Delta^1_{12} = 1 - g_{22} h_{22}$$

$$C^2_{12} = g_{12} \cdot h_{22} \cdot g_{21} \qquad \Delta^2_{12} = 1$$

d'où

$$T_{11} = \frac{3}{1} = \frac{g_{11}(1 - g_{22} h_{22}) + g_{12} h_{22}\, g_{21}\,(1)}{\Delta}$$

$$T_{11} = \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{g_{11} - g_{11} g_{22} h_{22} + g_{12} h_{22}\, g_{21}}{\Delta}$$

De la même maniére nous pourrons obtenir les autres transmittances (T_{12}, T_{21}, T_{22}).

III-3.Algorithme general :

III-3-1.Introduction a la determination de la regle de MASON par ordinateur :

Avant d'aborder l'algorithme nous allons definir quelques proprietes sur les matrices de liaison qui nous aideraient a etablir l'organigramme.

i- Si un noeud est supprime du diagramme de fluence, qui signifie une ligne et une colonne de la matrice de liaison W, le determinant de la matrice reduite, se refere a un mineur de W, lequel donnera les gains des boucles ayant (n-1) noeuds et le produit des gains des boucles disjointes ayant (n-1) noeuds entre eux.

Quand chaque noeud par suite est considere etre le seul supprime le reste des mineurs donne l'ensemble des gains de toutes les boucles et groupes disjointes aves (n-1) noeuds.

Ce processus peut clairement etre poursuivi en supprimant deux noeuds en meme temps (dans chaque cas possible), par suite trois noeuds jusqu'a (n-1) noeuds et la somme des mineurs deduit donnera la somme de tout les gains des boucles ensemble avec les sommes des produits dans les divers groupes disjoints, exactement pour former le determinant A de la formule de MASON.

ii- Si la colonne i et la ligne j sont supprimes de W, nous aurons supprime du graphe de fluence toutes les entrees du noeud i et toutes les sorties du noeud j, le mineur deduit (le determinant de la matrice reduite) donnera les gains des chemins joignant le noeud i au noeud j avec le gain de chaque chemin, multiplie par les gains des groupes de boucles disjointes associees.

Par exemple un systeme a 2 entrees et 2 sorties reproduit par la figure 10, engendre la matrice de liaison suivante :

$$W = \begin{matrix} 0 & 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 & g_{21} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & 0 \end{matrix}$$

En supprimant toutes les entrees du noeud 1 et toutes les sorties du noeud 3 signifie supprimer la colonne 1 et la ligne 3 de W. La matrice reduite est donc donnee par W^*.

$$W^* = \begin{matrix} 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{21} & g_{22} \\ h_{22} & 0 & 0 \end{matrix}$$

et le mineur par :

$$\text{Det } W^* = h_{22}\left(g_{11}\, g_{22} - g_{12}\, g_{21}\right) = g_{11}\left(g_{22}\, h_{22}\right) - g_{12}\, h_{22}\, g_{21}$$

Le premier terme est le gain d'un chemin du noeud 1 au noeud 3, multiplie par le gain de la boucle qui ne doit pas toucher le chemin , et le second terme est le gain d'un autre chemin joignant ces noeuds qui n'ont pas de boucles dijointes .

iii- Pour connaitre chaque chemin allant du noeud i au noeud j avec les groupes disjoints associes, nous devons en premier lieu supprimer la colonne i et la ligne j de la matrice de liaison W (comme dans ii-), et calculer le determinant de W^* (W^* matrice reduite). En deuxieme lieu supprimer la colonne i, la ligne j et le noeud k (ligne et colonne k), ou k prendra la valeur de tous les noeuds possibles exepte i et j; en calculant a chaque etape le determinant des matrices reduites notees W^*_k
En troisieme lieu effacer la colonne i, la ligne j , et les noeuds pris dans tous les groupes possibles de deux exepte les noeuds i et j, ensuite calculer a chaque etape le determinant des matrices reduites obtenues.
Et ainsi de suite en prenant les noeuds dans des groupes de (n-1)
Illustrons ce paragraphe en considerant le graphe de la figure 11 dont la matrice de liaison est la suivante :

$$W = \begin{matrix} 0 & 0 & w_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & 0 & 0 \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & 0 \end{matrix}$$

Et decrivons le chemin et les boucles disjointes du noeud 4 au noeud 2 .

$$W^{*} = \begin{matrix} 0 & 0 & w_{13} \\ w_{31} & w_{32} & 0 \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} \end{matrix}$$

Suppression de la colonne 4 et la ligne 2.

$$W^{*}_{1} = \begin{matrix} w_{32} & 0 \\ w_{42} & w_{43} \end{matrix}$$

Suppression de la colonne 4 et la ligne 2 plus colonne 1 et ligne 1

$$W^{*}_{3} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ w_{41} & w_{42} \end{matrix}$$

Suppression de la colonne 4 ligne 2, plus colonne 3 et ligne 3.

$$W^{*}_{13} = [W_{42}]$$

Suppression de la colonne 4 ligne 2, plus (colonne 1, ligne 1 et colonne 3, ligne 3)

Donc :

$$\text{Det } W^{*} = W_{13} W_{31} W_{42} - W_{13} W_{32} W_{41}$$

$$\text{Det } W^{*}_{1} = W_{32} W_{43}$$

$$\text{Det } W^{*}_{3} = 0$$

$$\text{Det } W^{*}_{1,3} = W_{42}$$

IL est facile de verifier que ces termes donnent tous les gains necessaires plus le gain du parcours multiplie par le gain de la boucle disjointe.

III-3-2. Determination de la fonction de transfert :

Il est clair maintenant que les divers termes exiges pour formuler la fonction de transfert en utilisant la regle de MASON sont disponibles dans les mineurs de la matrice de liaison W.

Pour verifier ceci, considerons le reseau suivant :

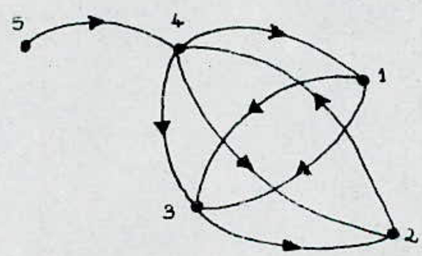


Fig-12.

Et determinons la fonction de transfert liant le noeud 5 au noeud 2.

III-3-2-1. Utilisation de la regle de MASON :

- Calcul du determinant :

Remarquons qu'il y a 4 boucles : B13, B24, B243, B1324

et deux boucles disjointes: B13, B24.

d'ou :

$$\Delta = 1 - (B13 + B24 + B243 + B1324) + (B13 . B24) \quad \ldots . (9)$$

- Il y a trois chemins allant du noeud 5 au noeud 2 :

C542, C5432, C54132, parmi lesquels le chemin C542 a une boucle disjointe B13, de la le numerateur de la fonction de transfert allant du noeud 5 au noeud 2 sera :

$$\sum_{i=1}^{3} C^{i}_{52}\,\Delta^{i}_{52} = C542 . (1 - B13) + C5432 + C54132 \quad \ldots (10)$$

III-3-2-2. Calcul du denominateur de la fonction de transfert en manipulant sur la matrice de liaison :

En appliquant la propriete "i" a la matrice de liaison du graphe de fluence representee par la figure 12 :

$$W = \begin{matrix} 0 & 0 & w_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{24} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & 0 & 0 & 0 \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{54} & 0 \end{matrix}$$

En supprimant noeud par noeud, puis deux par deux, ensuite trois par trois jusqu'a quatre par quatre, les determinants non nuls des matrices reduites sont :

$$W_5 = \begin{matrix} 0 & 0 & w_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & 0 & 0 \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & 0 \end{matrix}$$

Suppression du noeud 5.

$$W_{5,1} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ w_{32} & 0 & 0 \\ w_{42} & w_{43} & 0 \end{matrix}$$

Suppression du noeud 5 et du noeud 1

$$W_{5,3,1} = \begin{matrix} 0 & w_{24} \\ w_{42} & 0 \end{matrix}$$

Suppression des noeuds 5, 3 et 1.

$$W_{5,4,2} = \begin{matrix} 0 & w_{13} \\ w_{31} & 0 \end{matrix}$$

Suppression des noeuds 5, 4 et 2.

Si la dimension de la matrice reduite (apres effacement des noeuds) est notee C alors $C_5 = 4$; $C_{5,1} = 3$; $C_{5,3,1} = 2$; $C_{5,4,2} = 2$

donc le denominateur de la fonction de transfert est donnee par :

$$\Delta = 1 + S_d$$

$$S_d = (-1)^{C_5} . \mathrm{Det}\, W_5 + (-1)^{C_{5,1}} . \mathrm{Det}\, W_{5,1} + (-1)^{C_{5,3,1}} . \mathrm{Det}\, W_{5,3,1} + (-1)^{C_{5,4,2}} \mathrm{Det}\, W_{5,4,2}$$

$$S_d = W_{13} W_{24} (W_{31} W_{42} - W_{32} W_{41}) - W_{24} W_{32} W_{43} - W_{24} W_{42} - W_{13} W_{31}$$

d'ou :

$$\Delta = 1 + (B13).(B24) - B1324 - B243 - B24 - B13$$

On remarque que ce determinant est identique a celui obtenue en utilisant la regle de MASON manuellement. .... (9)

III-3-2-3. Calcul du numerateur de la fonction de transfert en manipulant sur la matrice de liaison :

Si la fonction de transfert qui nous interesse est T(i,j), l'element W(i,j) de la matrice de liaison sera un pivot, on procedera exactement comme l'indique la propriete "iii-".

Mais a chaque etape on doit localiser le pivot a l'aide de sa ligne R et sa colonne CL pour en deduire :

P = R + CL + C - 1 .... (8)

ou C est la dimension de la matrice reduite W^*_k

Ainsi on deduit que :

$$\mathrm{Det}\, W^* = W_{54} . W_{13} W_{31} . W_{42} - W_{54} . W_{13} W_{32} W_{41}$$

$$\mathrm{Det}\, W^*_1 = W_{5,4} . W_{32} . W_{43}$$

$$\mathrm{Det}\, W^*_{1,3} = W_{54} . W_{42}$$

Sont les seuls mineurs differents de zero, pour chacun de ces mineurs on peut calculer le P selon l'equation (8).

$$P_0 = 4 + 2 + 4 - 1 = 9 \quad (\mathrm{Det}\ W^*)$$

$$P_1 = 3 + 1 + 3 - 1 = 6 \quad (\mathrm{Det}\ W^*_1)$$

$$P_{1,3} = 2 + 1 + 2 - 1 = 4 \quad (\mathrm{Det}\ W^*_{1,3})$$

Ainsi on obtient le numerateur de la fonction de transfert liant le noeud 5 au noeud 2.

$$S_n = (-1)^{P_0}\ \mathrm{Det}\ W^* + (-1)^{P_1} \cdot \mathrm{Det}\ W_1^* + (-1)^{P_{1,3}}\ \mathrm{Det}\ W_{1,3}^*$$

$$S_n = W_{54} W_{42} (1 - W_{13} W_{31}) + W_{54} W_{41} W_{13} W_{32} + W_{54} W_{43} W_{32}$$

SN = C542.(1 - B13) + C54132 + C5432.

Ceci est identique a ce qui a ete obtenu par la regle de MASON (10).

III-3-3. RESUME :

La fonction de transfert liant un noeud d'entree i au noeud de sortie j est donnee par l'expression suivante :

$$T(i,j) = \frac{SN}{1 + SD} = \frac{\sum (-1)^P \cdot M^*}{1 + \sum (-1)^C \cdot M}$$

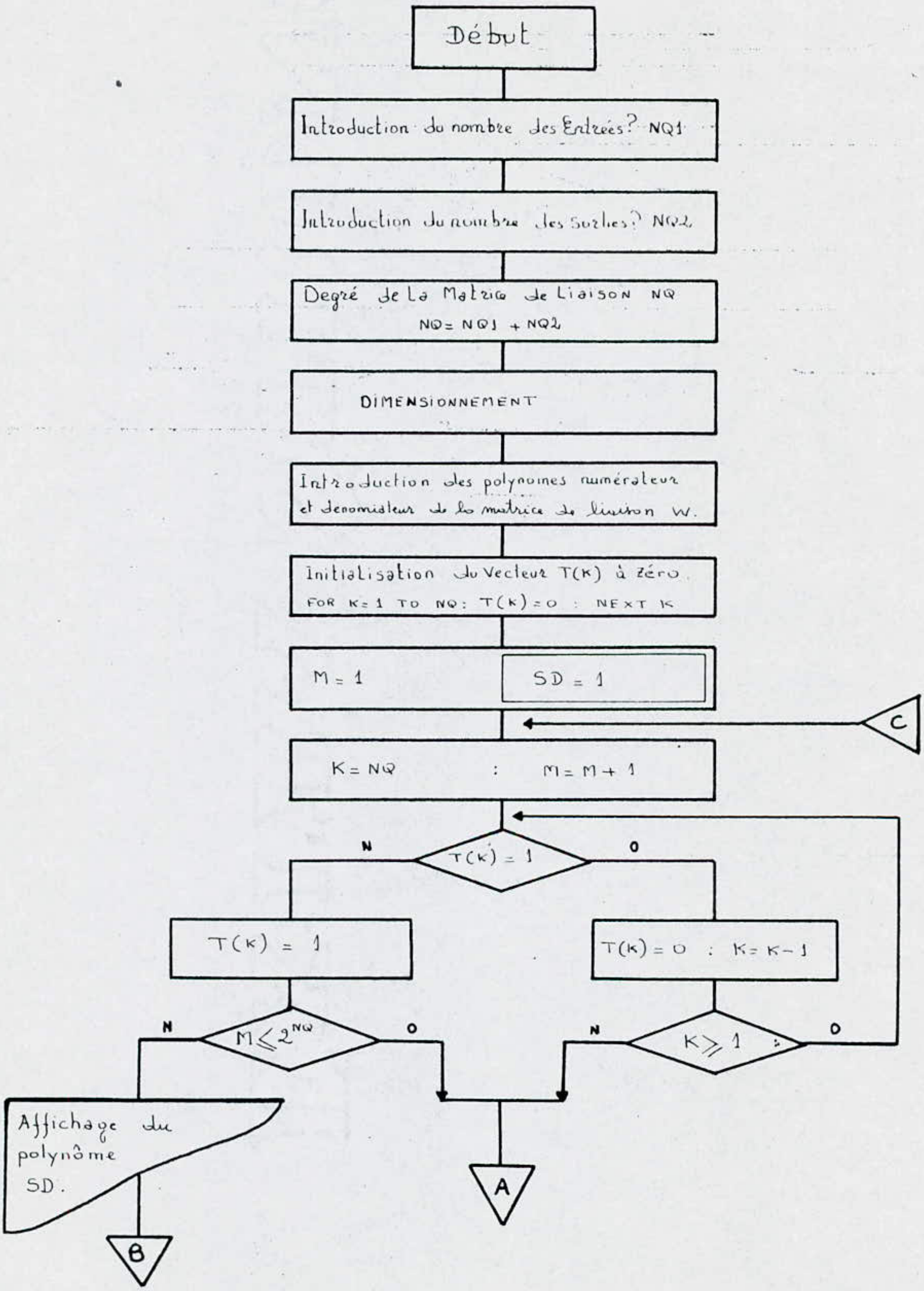
ou M est le mineur de la matrice de liaison W, et la sommation se fait sur tous les mineurs possibles obtenus par effacement des noeuds un par un ensuite deux par deux jusqu'a (n-1) noeuds, n etant le nombre total des noeuds d'entrees et de sorties.

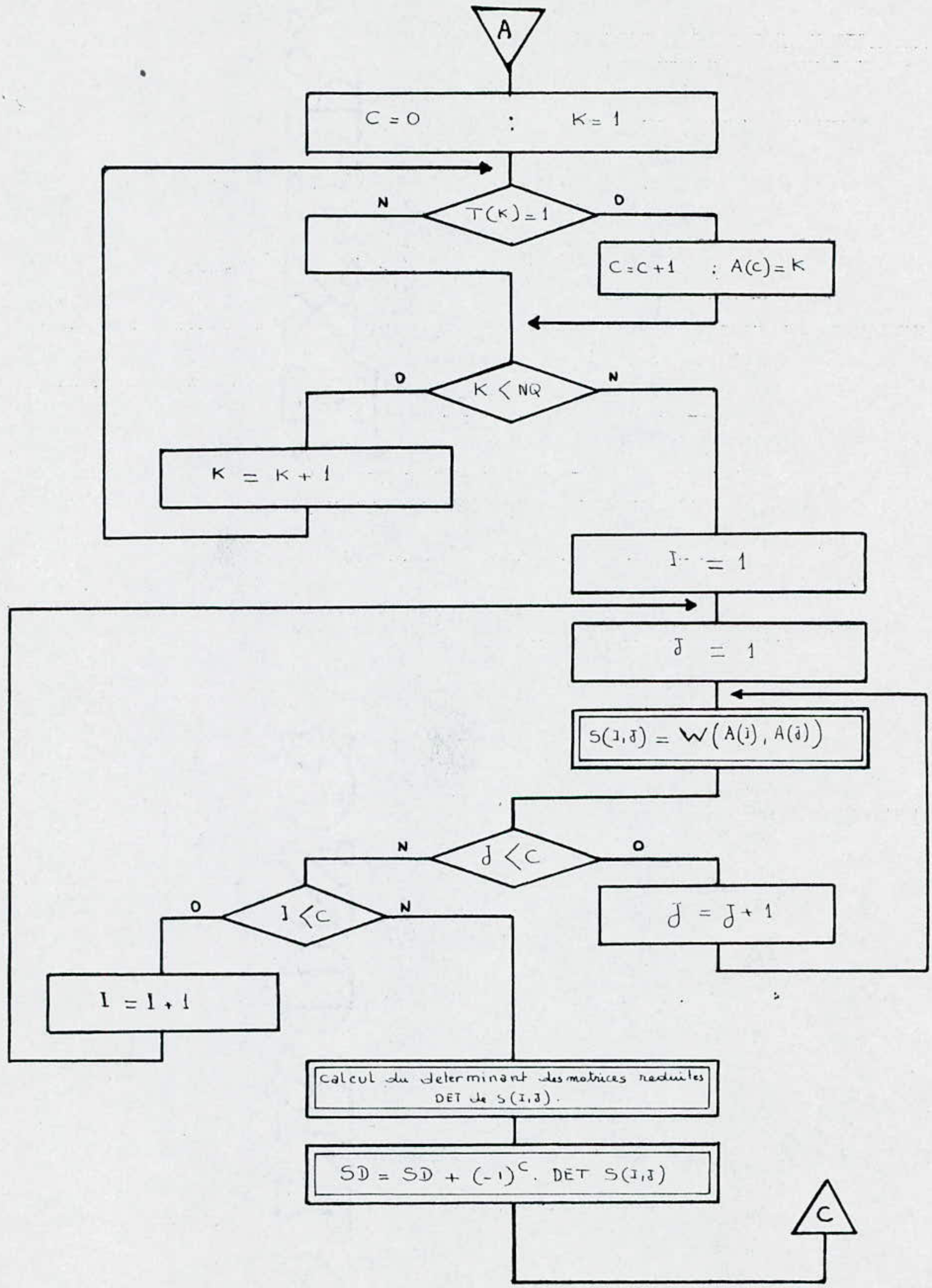
De meme M^* est le mineur de la matrice de liaison reduite (apres effacement de la colonne i et de la ligne j) organigramme pour le calcul

du denominateur de

la matrice de

transfert


Début
Introduction du nombre des Entrées? NQ1
Introduction du nombre des Sorties? NQ2
Degré de La Matrice de Liaison NQ
NQ= NQ1 + NQ2
DIMENSIONNEMENT
Introduction des polynomes numérateur et denominateur de la matrice de liaison W.
Initialisation du Vecteur T(K) à zéro
FOR K=1 TO NQ: T(K)=0 : NEXT K
M = 1
SD = 1
C
K = NQ : M = M + 1
N
T(K) = 1
O
T(K) = 1
T(K) = 0 : K= K-1
N
M ≤ 2^NQ
O
N
K ≥ 1
O
Affichage du polynôme SD.
A
B

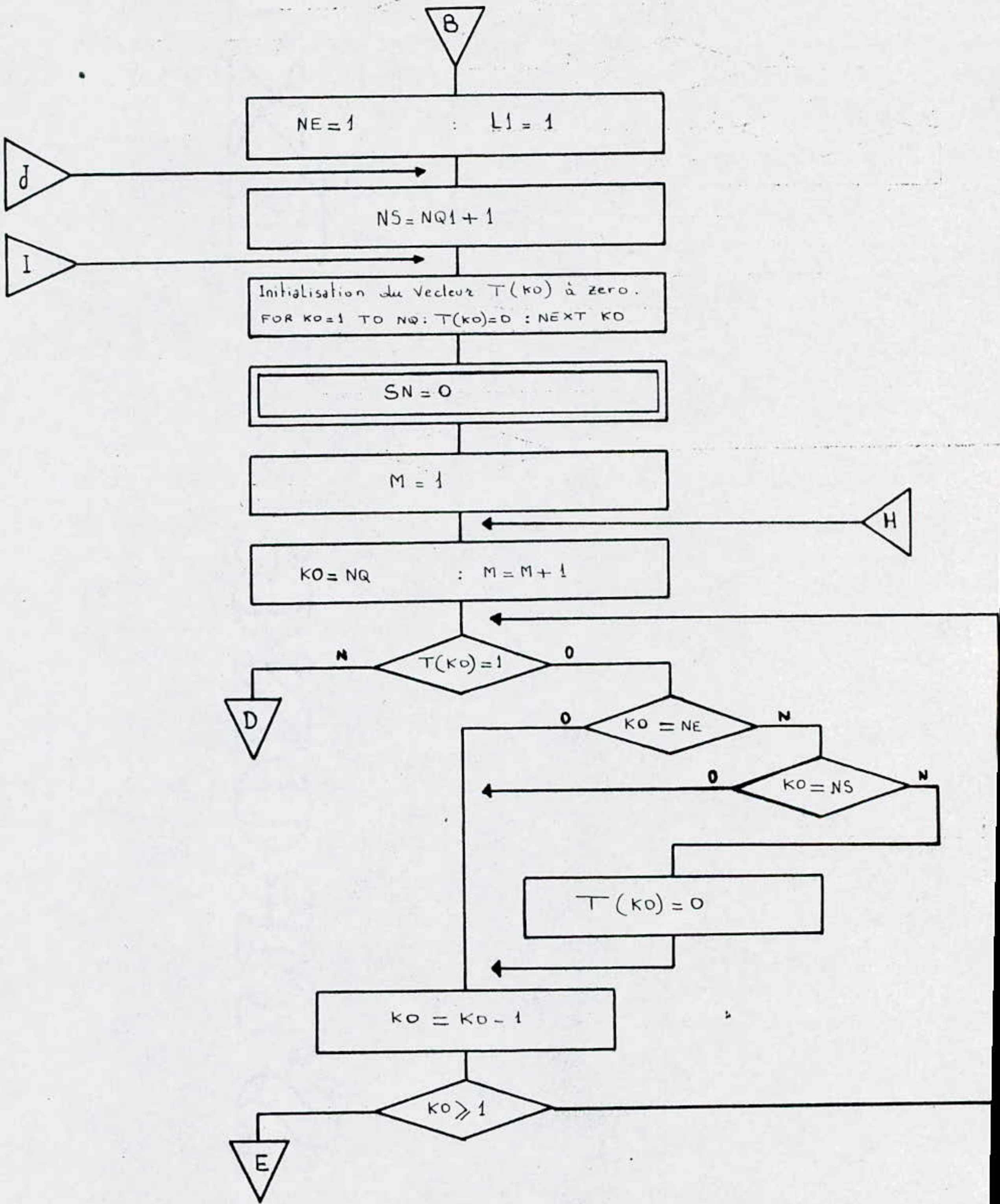

A
C = O : K = 1
T(K) = 1
N
O
C = C + 1 : A(C) = K
K < NQ
O
N
K = K + 1
I = 1
J = 1
S(I,J) = W(A(I), A(J))
J < C
N
O
I < C
O
N
J = J + 1
I = I + 1
Calcul du determinant des matrices reduites DET de S(I,J).
SD = SD + (-1)^C. DET S(I,J)
C

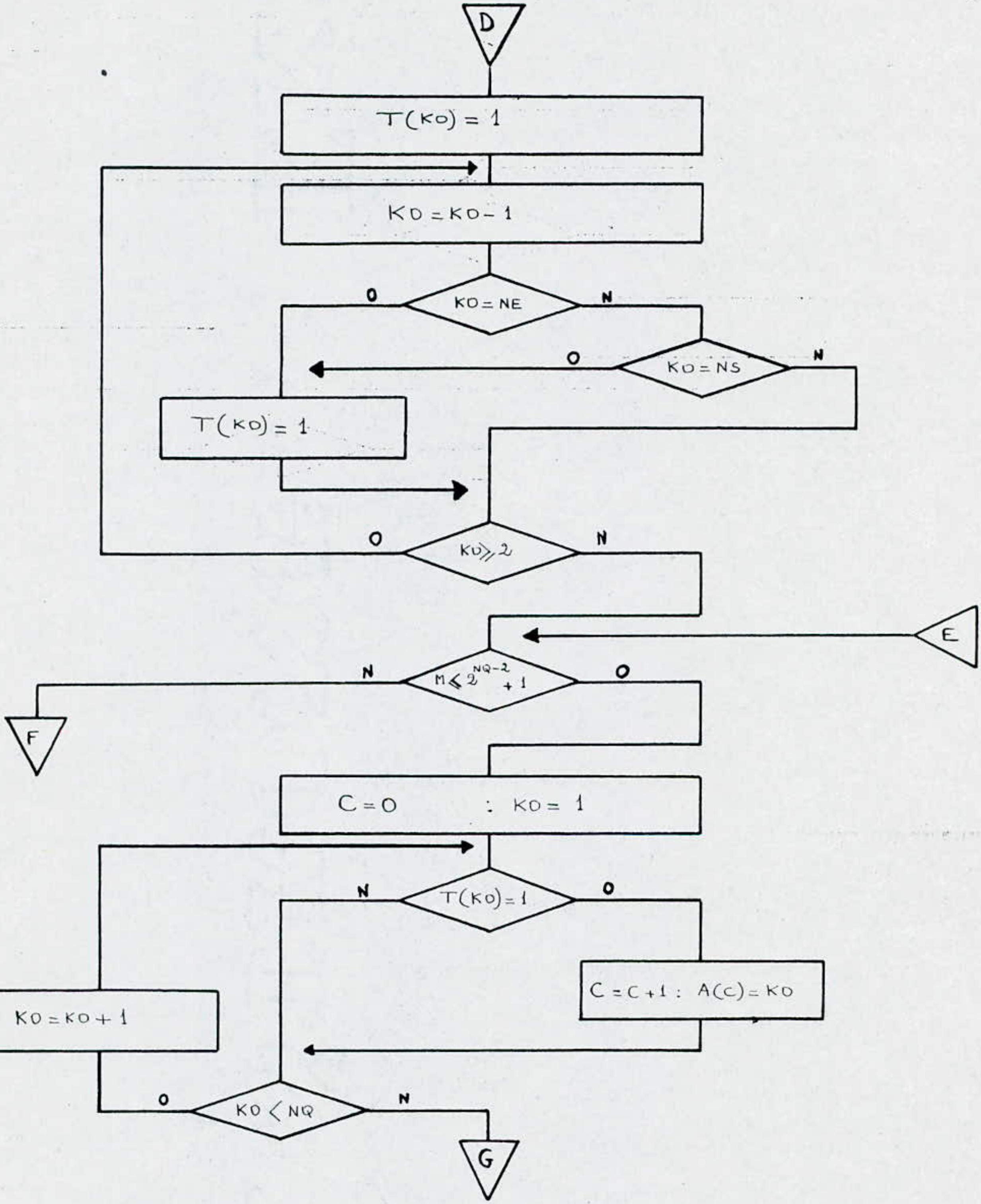
organigramme pour le calcul

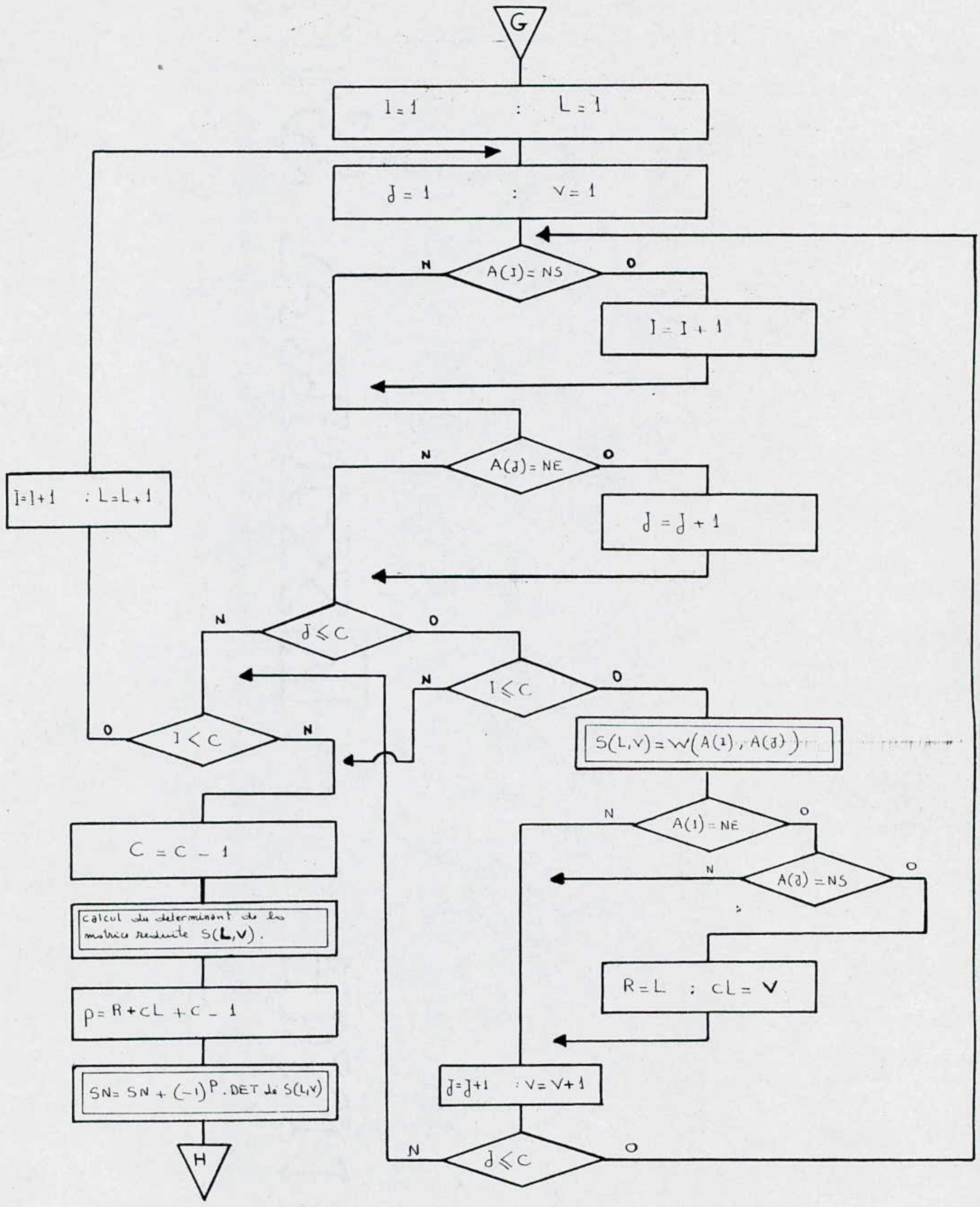
du numerateur de la

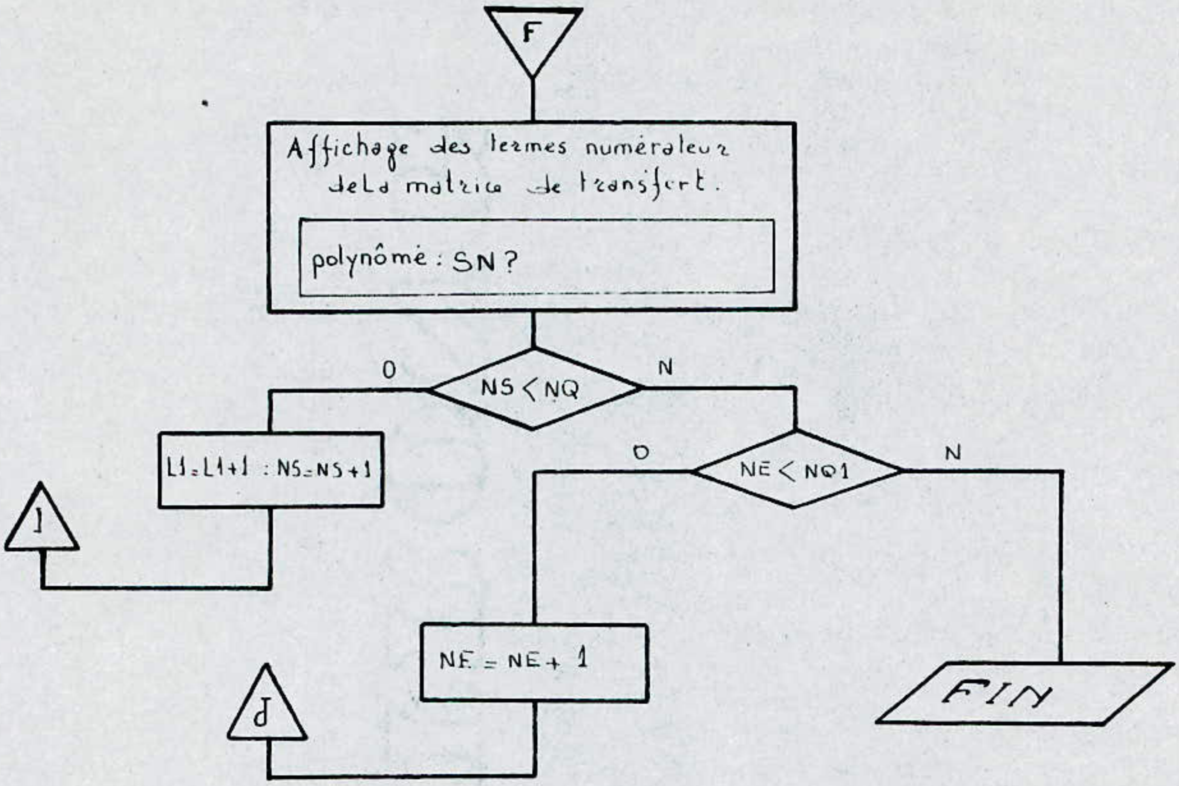
matrice de

tranfert


B
NE = 1 : L1 = 1
J
NS = NQ1 + 1
I
Initialisation du Vecteur T(KO) à zero.
FOR KO=1 TO NQ: T(KO)=0 : NEXT KO
SN = 0
M = 1
H
KO = NQ : M = M + 1
T(KO) = 1
N
O
D
KO = NE
KO = NS
T(KO) = 0
KO = KO - 1
KO ≥ 1
E


D
T(KO) = 1
KO = KO - 1
O
KO = NE
N
O
KO = NS
N
T(KO) = 1
O
KO ≥ 2
N
E
N
M ≤ 2^{NQ-2} + 1
O
F
C = O : KO = 1
N
T(KO) = 1
O
C = C + 1 : A(C) = KO
KO = KO + 1
O
KO < NQ
N
G


G
I = 1 : L = 1
J = 1 : V = 1
A(I) = NS
I = I + 1
A(J) = NE
J = J + 1
I=I+1 : L=L+1
J ≤ C
I ≤ C
I < C
S(L,V) = W(A(I), A(J))
A(I) = NE
A(J) = NS
R = L ; CL = V
J=J+1 : V= V+1
J ≤ C
C = C − 1
calcul du determinant de la matrice reduite S(L,V).
p= R+CL + C − 1
SN= SN + (−1)^P . DET de S(L,V)
H
N
O


F
Affichage des termes numérateur de la matrice de transfert.
polynômé : SN ?
NS < NQ
O
N
L1=L1+1 : NS=NS+1
I
NE < NQ1
O
N
NE = NE + 1
J
FIN

III-5. Introduction de donnees :

Les elements de la F.T peuvent etre exprimes sous forme de rapport de deux polynomes ou sous la forme complexe (coordonnes polaires).

Les fonctions de transfert auront la meme forme que les elements de la matrice de liaison (ML) qui est l'element de base pour le calcul de la matrice de transfert.

III-5-1. Terme de la "ML" sous forme polynomiale :

En general les divers transmittances d'un systeme sont exprimes en fonction de la variable "p" (de LAPLACE) et sont souvent donnees sous formes de fractions rationnelles.

L'introduction des donnees de la matrice est realise par l'introduction des numerateurs et denominateurs des transmittances associees.

III-5-2. Terme de la "ML" sous forme complexe :

Considerons le cas precedant et si l'on pose p=jw on peut exprimer les fractions rationnelles en fonction de la variable w. L'introduction donc des transmittances ne modifie en rien la demarche prise pour le calcul avec introduction de donnees polynomiales. Cependant les fonctions de transfert seront exprimes en coordonnees polaires en fonction de wc, ce qui est interessant pour le trace de la reponse frequencielle de chaque fonction de transfert.

CHAPITRE IV

ESPACE D'ETAT

IV-1. Diverses Representation des systemes Multientrees-Multisorties :

Comme pour les systemes monoentrees-monosorties continus , trois types de representation sont possibles :

a- Par une matrice de transfert, c'est a dire une matrice de fonctions de transfert representant les transmittances entres les divers couples entrees-sorties.

b- Par un systeme de "r" equations differentielles liant les "r" sorties aux "m" entrees et a leur derivees.

c- par le modele d'etat.

- Le premier modele (voir Chapitre II).
- Le deuxieme modele est celui auquel on arrive generalement lorsque les lois de la physique (mecanique, electricite, ...) peuvent etre utilisees (en aeronautique, dans le domaine spatial, en mecanique, ...).
- Quand au troisieme modele, ce sera le plus souvent un modele abstrait, fondamental pour l'analyse et la commande, mais qui n'apparaitra que rarement et qu'il faut deduire des deux modeles precedents.

IV-2-1. NOTION D'ETAT [1] :

Les proprietes d'un processus physique dependent d'un certain nombre de grandeurs, qu'on identifie generalement soit comme des variables d'entrees "U" soit comme des variables de sorties "Y". L'etude d'un tel processus nous amene a le caracteriser par des relations entrees-sorties de deux types bien connues.

a- L'equation differentielle :

$$F\,(\,Y,\ \dot{Y},\ \ldots\ Y^{(n)},\ U,\ \dot{U},\ \ldots\ U^{(n)}\ )=0$$

Qui lie l'entree U et ses derivees temporelles à la sortie Y et ses derivees.

b- La fonction de transfert liant la transformee de LAPLACE U(p) de l'entree, a la transformee de LAPLACE Y(p) de la sortie.

$$Y(p)=F(p)\ .\ U(p)$$

p etant la variable de LAPLACE.

Si ces representations sont bien connues au niveau des systemes monoentrees-monosorties (U et Y scalaires), elles peuvent bien evidemment s'etendre aux cas des systemes multientrees-multisories (U et Y etant des vecteurs).

L'equation differentielle est alors remplacee par un systeme d'equations differentielles couplees , comportant autant d'equations qu'il y a de composants dans le vecteur de sortie et ceci pour definir completement le processus.

La fonction de transfert F(p) est remplacee par une matrice de transfert Z(p) dont chaque element est une fonction de transfert liant une composante du vecteur d'entree a une composante du vecteur d'etat.

Ces relations devraient permettre, connaissant les commandes U appliquees sur un intervalle $[t_0, t]$, de determiner le comportement du systeme sur cet intervalle; mais on sait que, pour un systeme defini par une equation differentielle par exemple, les conditions initiales conditionnent le comportement des sorties a partir de l'instant "t_0" de l'application de la commande. Ceci nous amene a adjoindre aux equations precedentes une notion supplementaire, celle de l'etat du systeme a l'instant "t_0" de l'application de la commande.

Cet etat est en fait un vecteur constitue de "n" composantes qui vont elles-memes evoluer dans le temps par application des commandes $U(t_0, t)$.

IV-2-2. REPRESENTATION D'ETAT :

D'une facon intuitive, l'etat d'un systeme a l'instant donne est l'etat ou il se trouve a cet instant. Ce sont "n" caracteristiques du systeme $X_1, \ldots X_n$ formant le vecteur d'etat

$$X(t) = \begin{matrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{matrix}$$

Vecteur evoluant dans l'espace d'etat a "n" dimensions, son extremite decrivant la trajectoire d'etat.

En fait, connaissant les lois de la dynamique du systeme et les commandes auxquelles il est soumis, le vecteur d'etat sera l'ensemble des caracteristiques du systeme dont la connaissance permet de determiner l'evolution ulterieure de ce systeme.

$X(t_0)$ est le vecteur d'etat a l'instant "t_0" si le comportement pour $t > t_0$ est determine par les lois physiques. les actions $U(t_0, t)$ et les "n" composants de X(b), d'une facon generale, on pourra ecrire :

$$X(t) = F\,[\,X(t_0),\, U(t_0, t),\, t\,] \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Avec F fonction univoque.

(Le parametre "t" indique que le systeme peut etre variant, c'est a dire a coefficients dependant du temps).

L'etat a l'instant "t_0" resume du passe du systeme, ce qui est determinant pour son comportement ulterieur. C'est la "memoire minimale" pour le comportement futur.

En fait, si nous avons deja avec fini, le vecteur de commande U(t), Le vecteur d'etat X(t), nous avons ignore pour l'instant le vecteur des sorties Y(t) du systeme, il est naturellement fonction de X(t) par une fonction :

$$Y(t) = G\,[\,X(t),\, U(t_0, t),\, t\,] \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

L'equation (1) est habituellement appelee equation d'etat, et (2) equation d'observation (du comportement des sorties du systeme).

$X(t_0)$ apparait donc comme l'ensemble minimum des conditions initiales requises pour que les equations (1) et (2) determinent $X(t)$ et $Y(t)$ d'une facon unique pour $t > t_0$.

Si l'on se limite au cas des systemes lineaires (principe de superposition), les equations (1) et (2) peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t).X(t) + B(t).U(t) \\ Y(t) &= C(t).X(t) + D(t).U(t) \end{aligned} \qquad \ldots \quad (3)$$

A : matrice d'EVOLUTION (ou d'etat).

B : matrice de COMMANDE (ou d'entree).

C : matrice d'OBSERVATION (de sortie).

D : matrice de TRANSMITTANCE directe.

IV-3. Notion de commandabilite et d'observabilite [1] :

Si l'on envisage la representation en variables d'etat comme une parametrisation des relations entrees-sorties, on peut se demander si le choix des parametres, c'est a dire des variables d'etat, est correct. Les entrees etant les moyens que l'on a pour agir sur l'etat du systeme, les sorties etant les grandeurs par l'intermediaire desquelles ces etats sont observes, deux quetions primordiales viennent a l'esprit :

- Peut on determiner l'etat initial a partir d'une observation des sorties (observabilite) ?
- Peut on determiner une commande admissible (c'est a dire

qu'elle ne peut pas prendre des valeurs quelconques, elle est assujetie a verifier des conditions appelees contraintes) transferant le systeme considere d'un etat donne a un autre (commandabilite) ?.

A ce stade, nous touchons a deux notions tres importantes : celle de commandabilite et celle d'observabilite.

IV-3-1. OBSERVABILITE :

Le systeme (3) est dit observable si, etant donne un instant quelconque "t_0", il existe un instant t_1 ($t_1 >= t_0$) tel que l'observation de S(t) et la connaissance de U(t) sur l'intervalle de temps [t_0 , t_1] permettent de determiner l'etat initial $x(t_0)$

- il faut pouvoir determiner d'une facon unique x_0, en fonction de Y(t) et U(t), ce qui est la condition d'observabilite.

- Critere d'observabilite :

La condition necessaire et suffisante d'observabilite sera que la matrice :

$$[C^t , A^t C^t , \ldots ((A^{n-1})^t) C^t] \text{ soit de rang } n.$$

ou "n" est le nombre d'etats (dimension de X) et t designant la matrice transposee.

IV-3-2. COMMANDABILITE :

Le systeme (3) est dit commandable si, etant donne un instant quelconque "t_0" et deux etats quelconques x_0 et x_1, il est possible de trouver un instant t_1 ($t_1 >= t_0$) et une commande Admissible u(t) sur l'intervalle de temps [t_0 , t_1], transferant le systeme de l'etat x_0 a l'instant "t_0" a l'etat x_1 a l'instant "t_1"

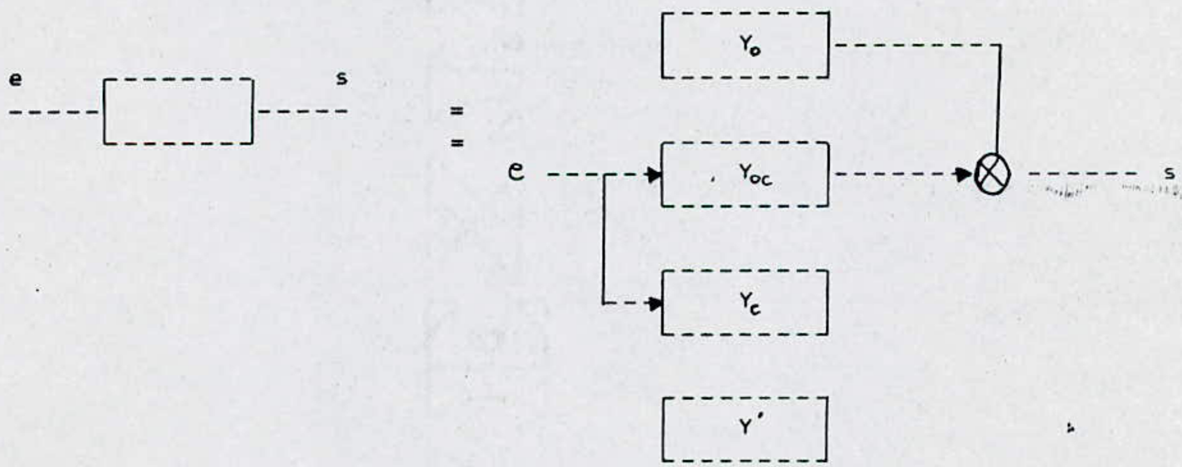
- Critere de Commandabilite :

La condition necessaire est suffisante de commandabilite sera que la matrice :

$$[\ B\ ,\ AB\ ,\ \ldots\ldots\ A^{n-1}\ B\ ]\ \text{soit de rang n.}$$

IV-3-3. Interet des notions de gouvernabilite et d'observabilite

[5] Si on considere une equation d'etat Y quelconque de la forme (2) on peut toujours la decomposer en quatre parties comme le montre la figure suivante :



- Une partie observable et commandable Y_{oc}
- Une partie observable et non commandable Y_o
- Une partie commandable et non observable Y_c

- Une partie non observable et non commandable Y .

La notion d'observabilite est importante dans le probleme du choix du type (3) pour representer l'evolution d'un processus reel. En effet l'etat d'un systeme est un concept abstrait; sur un processus reel, l'experimentation n' acces qu'aux grandeurs mesurables : entrees et sorties.

Donc si l'on choisi a priori un type de modele pour representer l'evolution d'un processus, une identification experimentale ne permettra de determiner que la partie observable Y_{oc} et Y_{o} qui est d'ailleurs, la seule qui nous interesse, il est inutile d'avoir d'autres parties.

La notion de commandabilite est importante pour l'etude de l'existence d'une solution a un probleme de commande. Remarquons que cette existence est quelques fois evidente physiquement, dans ce cas si la solution mathematique n'existait pas , c'est que le modele mathematique ne serait pas valable.

En general, quand on parle de commandabilite, on ne considere pas de contraintes sur les commandes, c'est a dire qu'on suppose que le vecteur commande peut etre dans l'espace R^{n} tout entier.

PARTIE A :

IV-4. DIVERSES METHODES DE PASSAGE A LA REPRESENTATION D'ETAT :

IV-4-1. Passage de la representation par matrice de transfert a la representation d'etat :

1- Methode des graphes :

Soit la fonction de transfert de la forme :

$$F(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + p^n}$$

Ou encore : $$F(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{b_0 (1/p)^n + b_1 (1/p)^{n-1} + \ldots + b_m (1/p)^{n-m}}{a_0 (1/p)^n + a_1 (1/p)^{n-1} + \ldots + 1}$$

On pose

$$W(p) = \frac{e(p)}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, p^{i-n}}$$

Donc

$$s(p) = \left[b_0 (1/p)^n + b_1 (1/p)^{n-1} + \ldots + b_m (1/p)^{n-m} \right] \cdot W(p)$$

$$e(p) = W(p) \cdot \left[a_0 (1/p)^n + \ldots + a_n (1/p)^{n-1} + \ldots + 1 \right]$$

$$W(p) = e(p) - W(p) \left[a_{n-1} \cdot (1/p) + \ldots + a_0 (1/p)^n \right]$$

2- Methode des modes :

Cette methode fait apparaitre les modes du systeme c'est a dire les poles de la fonction de transfert.

Elle a l'avantage de conduire a une matrice A diagonale ou plus generalement ayant la forme canonique de JORDAN.

Elle presente l'inconvenient d'exiger la decomposition de la F T.

a- poles simples reels :

On decompose la F.T en elements simples de la forme :

$$\frac{\alpha_i}{p - \lambda_i}$$

en posant :

$$x_i(p) = \frac{e(p)}{p - \lambda_i} ;$$

il vient :

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + e$$

soit :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} e \qquad (1)$$

La matrice est diagonale car les modes sont independants et la dimension de l'espace d'etat est egale a l'ordre du systeme.

$$s = [\alpha_1 \; \alpha_2 \qquad\qquad \alpha_n]\, x$$

Les coefficients α_i sont les residus de la fonction de transfert relatifs aux poles λ_i.

b- Poles multiples reels :

La fonction de transfert possede un pole multiple d'ordre k, on la decompose en elements simples de la forme :

$$\frac{\alpha_1}{(p-\lambda)^k} + \frac{\alpha_2}{(p-\lambda)^{k-1}} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p-\lambda} + \frac{\alpha_{k+1}}{p-\lambda_{k+1}} + \ldots\ldots$$

Posons :

$$x_k(p) = \frac{e(p)}{p-\lambda} \qquad\qquad \dot{x}_k = \lambda x_k + e$$

$$x_{k-1}(p) = \frac{x_k(p)}{p-\lambda} \qquad\qquad \dot{x}_{k-1} = \lambda x_{k-1} + x_k$$

$$\text{— — — — — — — —} \qquad \longrightarrow \qquad \text{— — — — — — — — —}$$

$$x_1(p) = \frac{x_2(p)}{p-\lambda} \qquad\qquad \dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2$$

Les autres composantes etant analogues au cas precedent

Il vient alors :

$$\dot{x} = \begin{array}{c} 1\rightarrow \\ 2\rightarrow \\ \vdots \\ k-1\rightarrow \\ k\rightarrow \\ k+1\rightarrow \\ \vdots \\ n\rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda_{k+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \vdots \\ \leftarrow k-1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} e \qquad\qquad (2)$$

$$S = [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]\ x$$

La matrice ci dessus est appelee matrice canonique de JORDAN. Dans le cas de pole multiple seul α_k est le residu relatif au pole de multiplicite k. Cette propriete peut etre utile pour calculer le residu d'un pole double lorsque les autres sont simples.

c- Poles complexes :

La methode precedente s'applique mais on operera une transformation partielle de maniere a faire disparaitre les coefficients imaginaires de la matrice.

La contribution de deux poles imaginaires conjugues peut etre representee par :

$$\dot{\underline{X}} = A'.x + B'.e$$

$$S = C'.x$$

avec $A' = \begin{bmatrix} a+jb & 0 \\ 0 & a-jb \end{bmatrix}$; $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $C' = [\alpha\ ,\ \bar{\alpha}\ ]$

étant le residu relatif au pole a+jb.

La transformation Z = M.x donne :

$$\dot{Z} = M.A'.M^{-1}.Z + M.B'.e$$

$$S = C'.M^{-1}.Z$$

En prenant par exemple :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

Cette transformation conduit a des matrices a coefficients tous reels :

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$S = [\ Re(\alpha),\ Im(\alpha)\ ]\ Z$$

IV-4-4.2 Passage de la representation par operateur differentiel a la representation d'etat :

Presentation par operateur differentiel :

La mise theorique en equatios d'un systeme physique conduit souvent, apres elimination des variables intermediaires, a le representer sous la forme :

$$L(D)\ .\ Y = M(D)\ .\ U \qquad [1]$$

L(D) et M(D) etant des matrices polynomiales par rapport a l'operateur de differentiation D.

· Methodes de passage de la reprsentation par operateur differentiel a la representation d'etat :

a- Methode de construction d'une realisation par triangularisation de L(p) (algorithme de POLAK) [3]

b- Methode particuliere au cas L_v est inversable

c- Methode pratique de realisation dans le cas ou L_v n'est pas inversible (methode de BROWN) [2]

Le systeme a "r" sorties, $S_1, \ldots S_r$ et "M" entrees $e_1, \ldots e_m$ est defini par un ensemble de r equations differentielles couplees (dans chacune d'elles peut apparaitre les differentes entrees et sorties, ainsi que leur derivees successives)

En introduisant l'operateur de differentiation $D = \dfrac{d}{dt}$, c'est a dire remplacant $S_j^{(k)}$ par $D^k S_j$, le systeme d'equations peut etre mis sous la forme plus commode :

$$L(D).S = M(D).E \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

L et M etant des matrices polynomiales par rapport a D, de dimensions (r,r) et (r,M) qui seront explicitees sous les formes:

$$L(D) = L_v.D^v + \ldots + L_1 D + L_0$$

$$M(D) = M_u.D^u + \ldots + M_1 D + M_0$$

Avec L_i et M_i matrices des coefficients de termes en D^i de L(D) et M(D); v et u ordres de differentiation maximale sur les sorties et les entrees, on suppose que u < v

IV-4-2. <u>OPERATIONS LICITES</u> :

Lorsqu'on a a traiter un systeme differentiel, on est souvent amene a le manipuler pour l'ecrire sous une forme jugee plus commode. il est essentiel (car ces manipulations sont a la source de nombreuses erreurs) de savoir qu'on ne peut faire n'importe quoi et que les seules operations licites auxquelles on doit se limiter sont :

- La premultiplication de tout le systeme par une matrice a determinant constant, c'est a dire ni nul, ni dependant de D.
- Un changement des variables de sortie $Y = T.Z$ ou T est une matrice non singuliere.

IV-4-3. <u>Algorithme du passage des equations differentielles aux equations d'etats</u> :

Le probleme de la mise sous forme d'etat d'un systeme differentiel revient a trouver une representation de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A.X + B.E \\ Y &= C.X + D.E \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (2)$$

Avec $X = [X_1, X_2, \ldots, X_n]^t$ vecteur d'etat telle que :

- La dimension du vecteur d'etat X soit egale a l'ordre du systeme differentiel (1) : n = degre det(L)
- L'elimination des variables X dans (2) conduit au systeme initial (1).

Dans la pratique, on distinguera deux cas, selon l'inversibilite de la matrice L_v, matrice des coefficients de plus haut degre de L(D).

IV-4-3-1. Cas ou la matrice L_v est inversible [1] :

Si L_v est inversible on commence par se ramener au cas ou L_v est la matrice unite en premultipliant le systeme (1) par L_v^{-1}, operation licite ne modifiant pas l'ordre du systeme.

Dans ce cas l'ordre du systeme peut s'exprimer sous la forme :

$$n = \text{degre } \det(L) = r.v$$

Si l'on definit les r.v composantes du vecteur d'etat par :

$$X_1 = S$$

$$X_2 = L_{v-1} . S + \dot{S}$$

$$X_3 = L_{v-2} . S + L_{v-1} . \dot{S} + \ddot{S}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$X_{v-1} = L_2 . S + L_3 . \dot{S} + \dots\dots + S^{(v-2)} - (M_2 . E + \dots\dots + M_u E^{(u-2)})$$

$$X_v = L_1 . S + L_2 . \dot{S} + \dots\dots + S^{(v-1)} - (M_1 . E + \dots\dots + M_u E^{(u-1)})$$

On a une equation d'etat immediate sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{X}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{v-1} & I & 0 & \dots & 0 \\ -L_{v-2} & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ -L_1 & 0 & \dots & \dots & I \\ -L_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_u \\ \vdots \\ M_1 \\ M_0 \end{bmatrix} E \qquad (3)$$

$$S = [\, I \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 \,] \, . \, X$$

Les matrices L_i , I , 0 etant des matrices de dimensions (r,r) et les matrices M_i de dimensions (r,m).

EXEMPLE :

Soit le systeme a deux entrees et deux sorties defini par les equations suivantes :

$$\begin{bmatrix} m_1 D^2 + f_1 D + r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & m_2 D^2 + r_2 + r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

La matrice $L_v = L_2$ est inversible, le systeme est donc d'ordre 4, et sous la forme normalisee ($L_2 = I$) ,les equations s'ecrivent :

$$\begin{bmatrix} D^2 + \dfrac{f_1}{m_1} . D + \dfrac{r_1 + r_2}{m_1} & - \dfrac{r_2}{m_1} \\ - \dfrac{r_2}{m_2} & D^2 + \dfrac{r_2 + r_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

d'ou d'apres (3) :

$$
\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cc|cc}
-\frac{f_1}{m_1} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-\frac{r_1+r_2}{m_1} & \frac{r_2}{m_1} & 0 & 0 \\
\frac{r_2}{m_2} & -\frac{r_1+r_2}{m_2} & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}
+
\left[\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\hline
\frac{1}{m_1} & 0 \\
0 & \frac{1}{m_2}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cc|cc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
[X]
$$

IV-4-3-2. Cas ou la matrice L n'est pas inversible :

On trouvera sous la referance [2 ou 3] une methode proposee par BRWON (ou POLAK) permettant de construire d'une maniere simple une realisation sous forme de variable d'etat d'un systeme donne par l'equation matricielle :

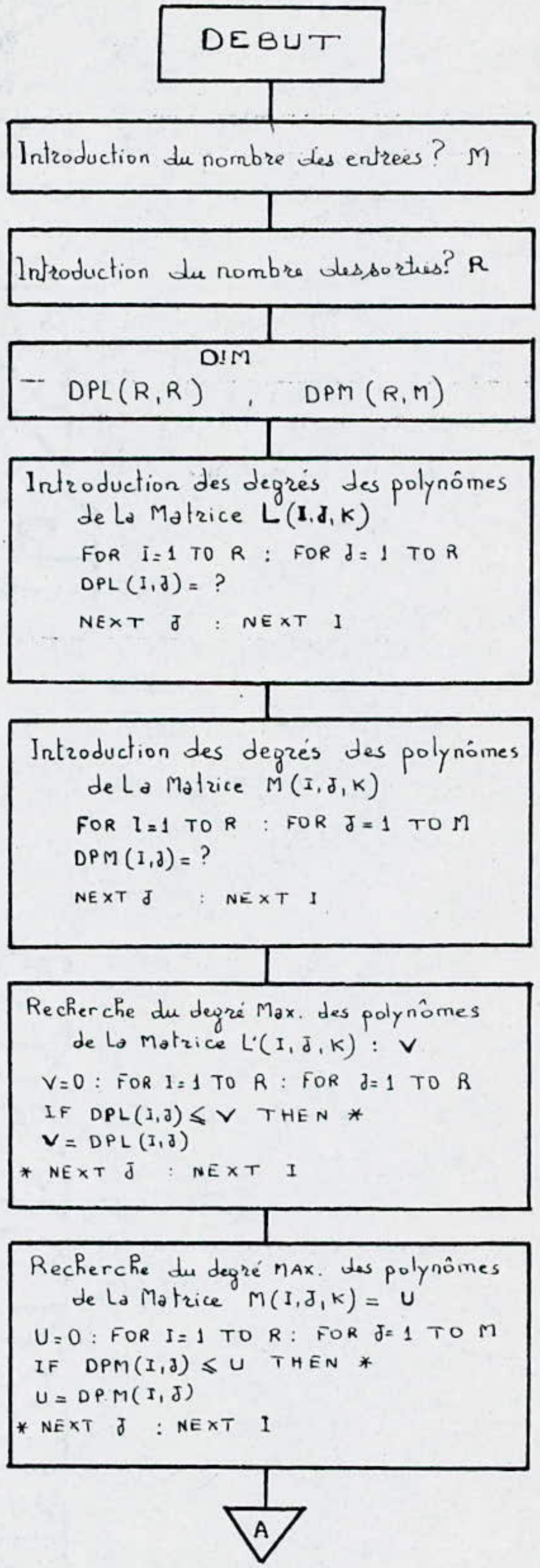
$$L(D) \,.\, Y = M(D) \,.\, E$$

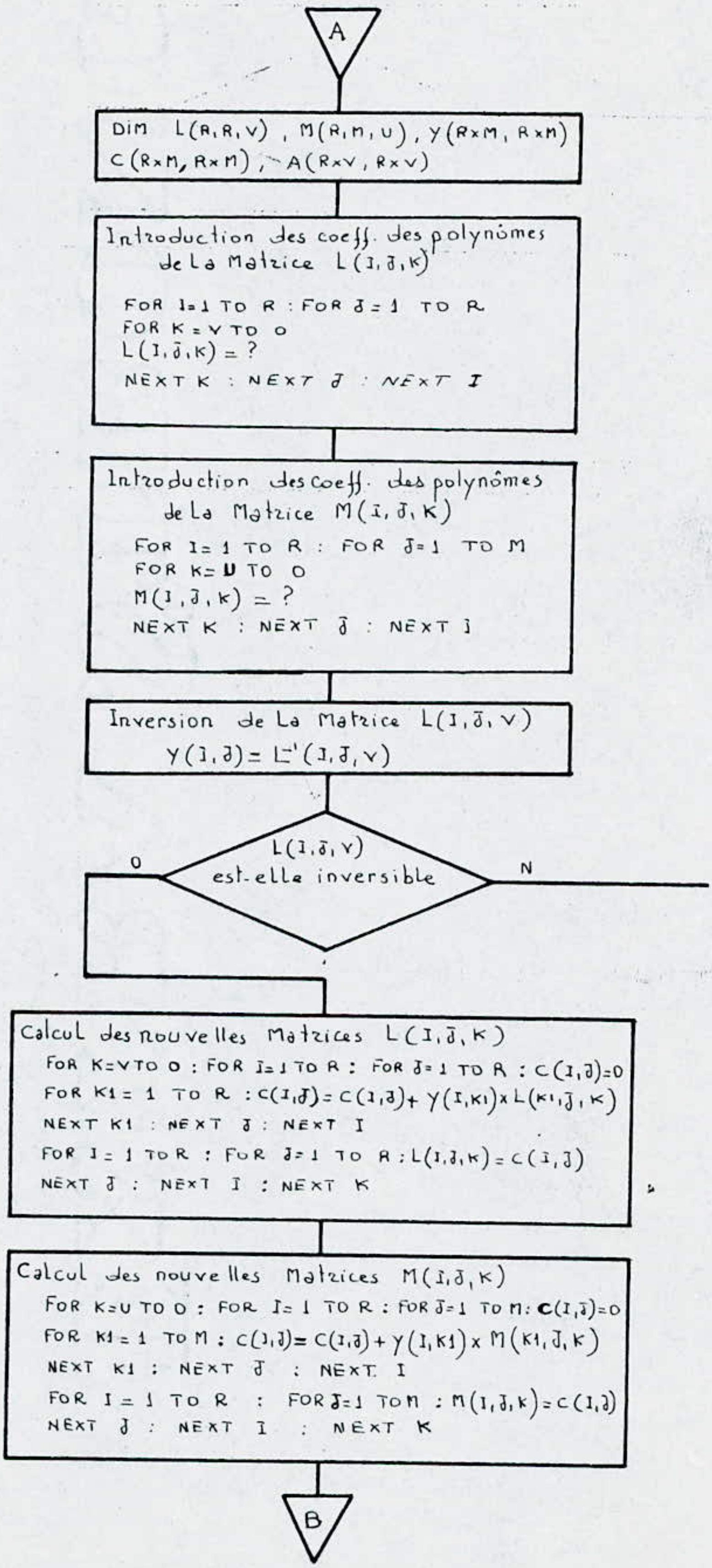
organigramme faisant le

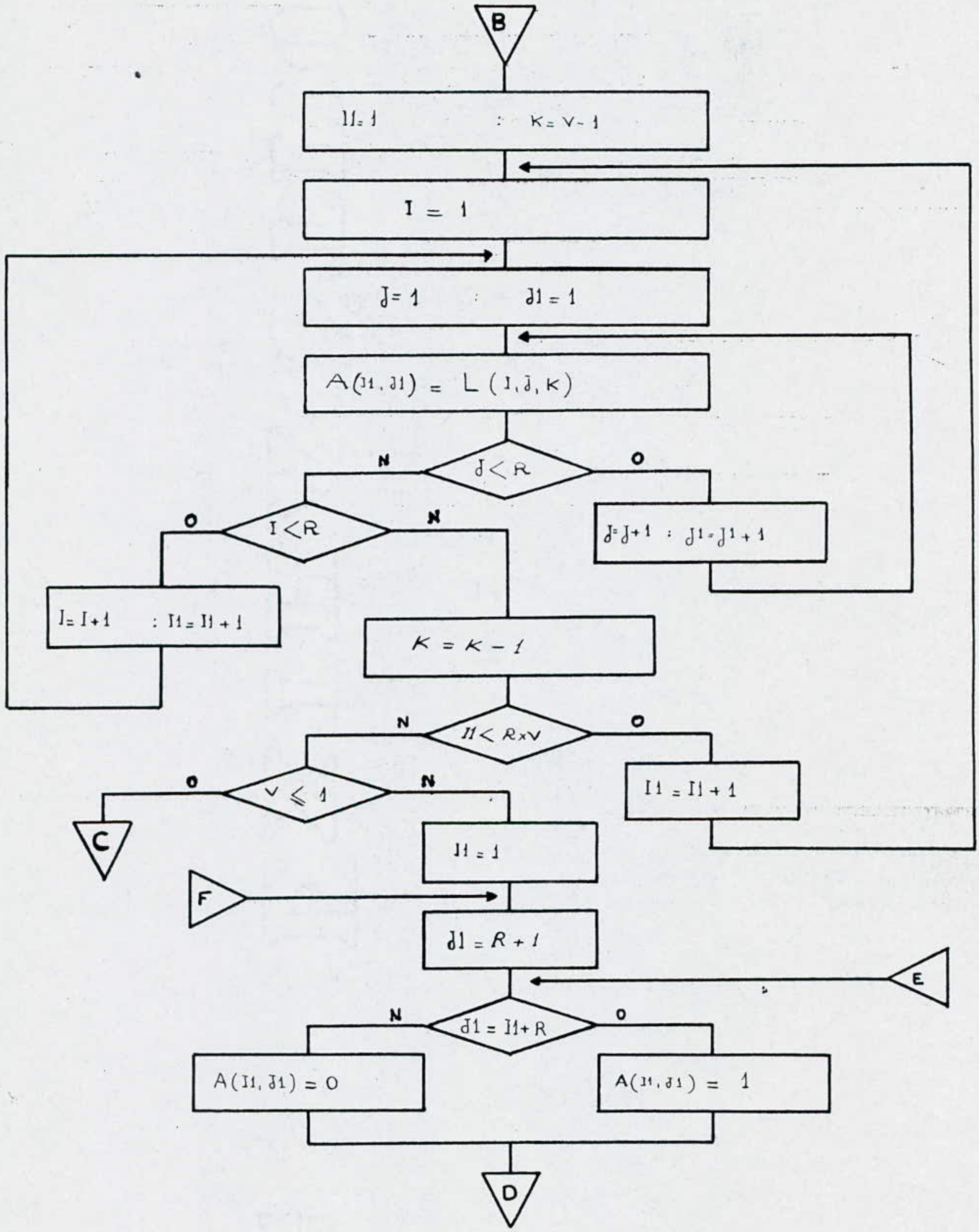
passage des

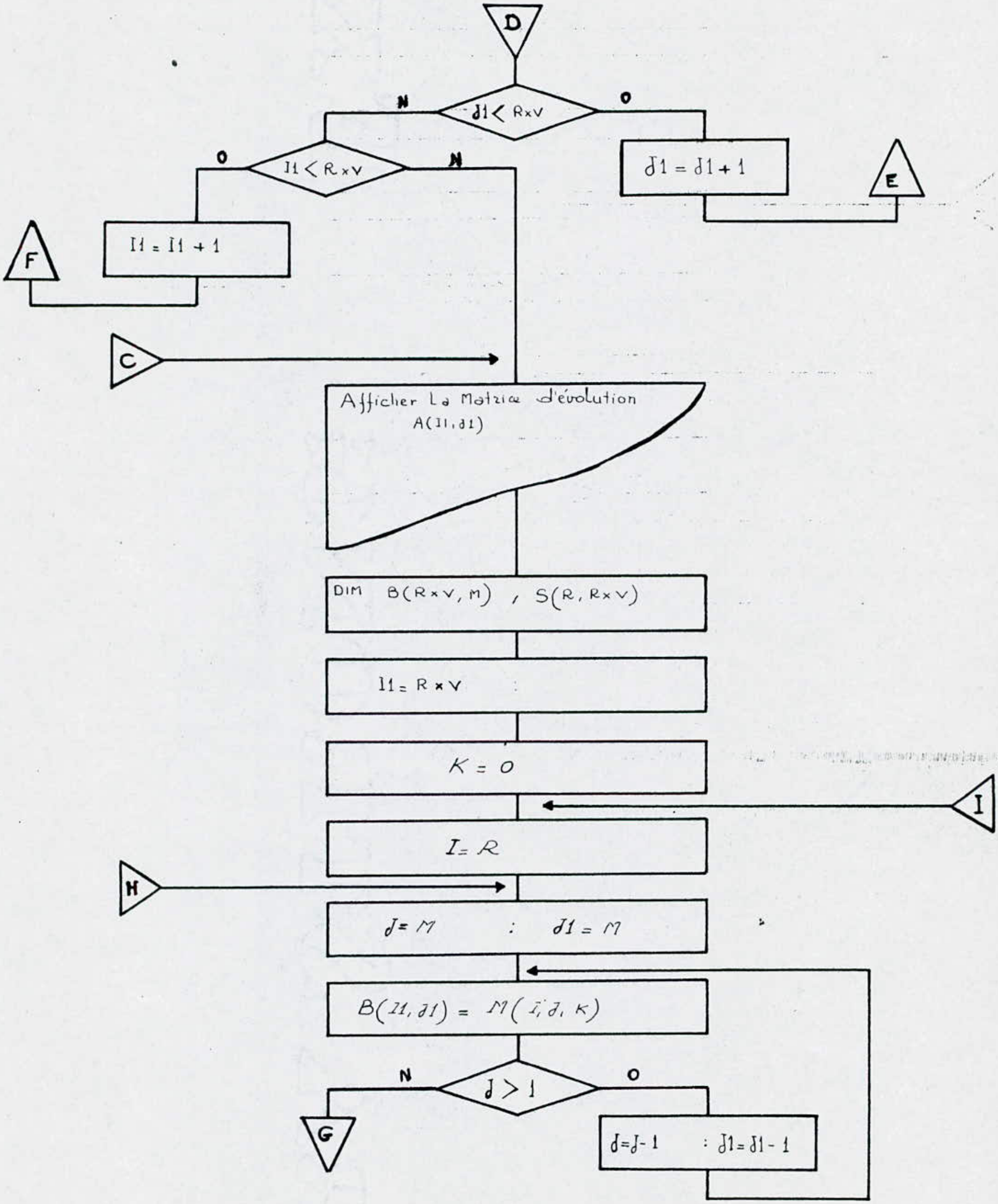
eq-differentielles aux

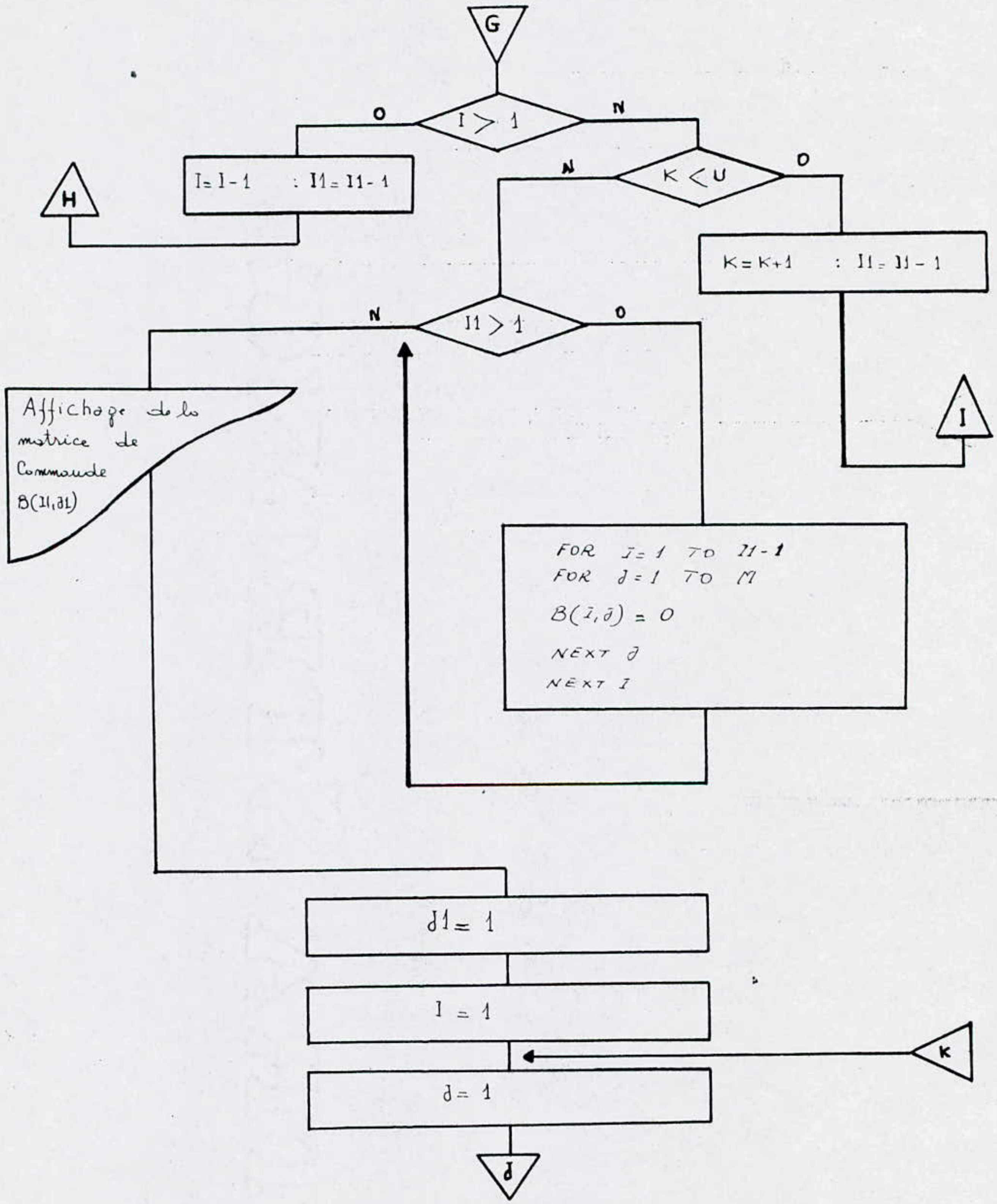
eq-d´etats

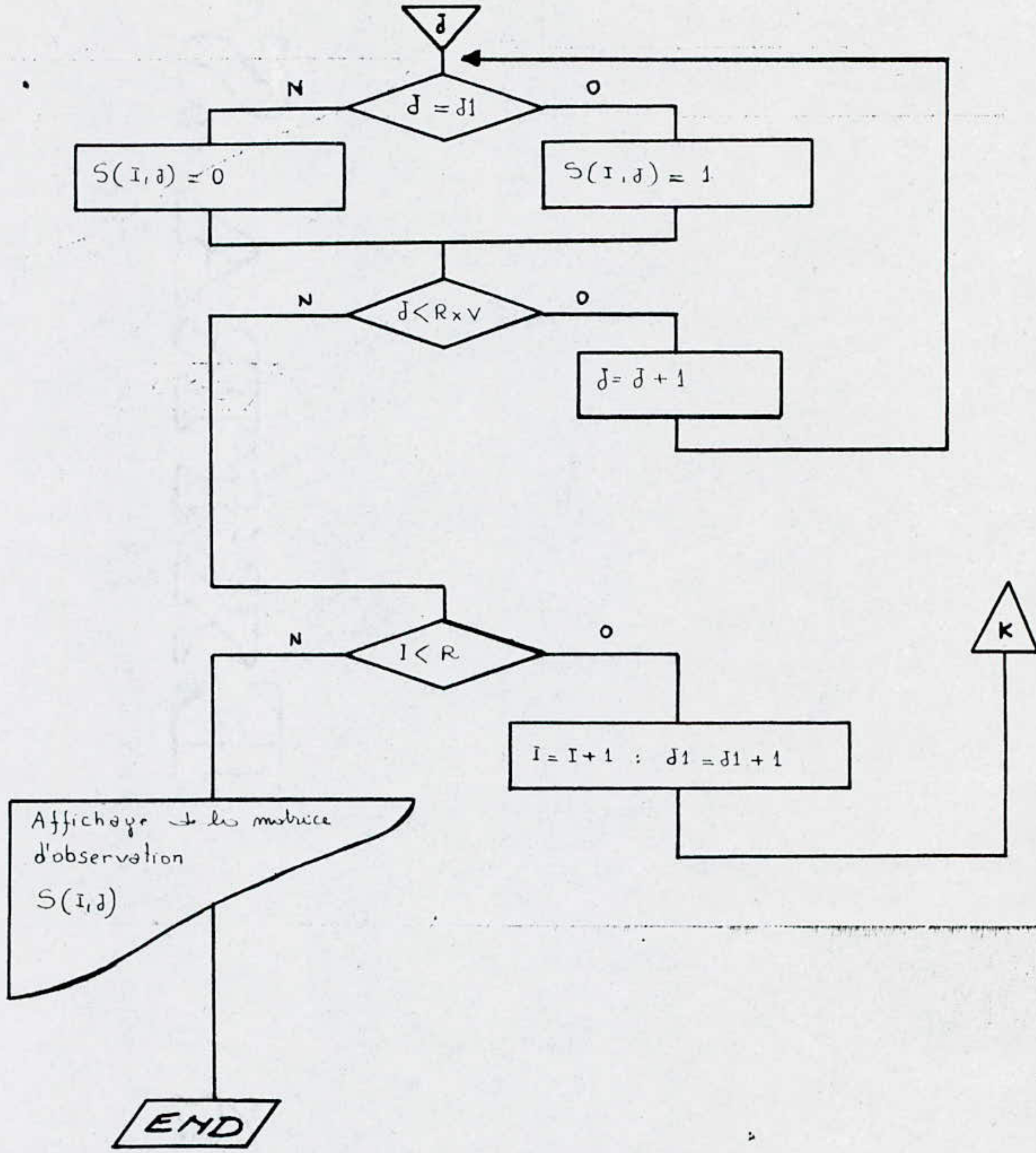

DEBUT
Introduction du nombre des entrees ? M
Introduction du nombre dessorties? R
DIM
DPL(R,R) , DPM (R,M)
Introduction des degrés des polynômes
de La Matrice L(I,J,K)
FOR I=1 TO R : FOR J=1 TO R
DPL(I,J) = ?
NEXT J : NEXT I
Introduction des degrés des polynômes
de La Matrice M(I,J,K)
FOR I=1 TO R : FOR J=1 TO M
DPM(I,J) = ?
NEXT J : NEXT I
Recherche du degré Max. des polynômes
de La Matrice L(I,J,K) : V
V=0 : FOR I=1 TO R : FOR J=1 TO R
IF DPL(I,J) ≤ V THEN *
V = DPL(I,J)
* NEXT J : NEXT I
Recherche du degré MAX. des polynômes
de La Matrice M(I,J,K) = U
U=0 : FOR I=1 TO R : FOR J=1 TO M
IF DPM(I,J) ≤ U THEN *
U = DPM(I,J)
* NEXT J : NEXT I
A


A
DIM L(R,R,V) , M(R,M,U) , Y(R×M, R×M)
C(R×M, R×M) , A(R×V , R×V)
Introduction des coeff. des polynômes
de La Matrice L(I,J,K)
FOR I=1 TO R : FOR J = 1 TO R
FOR K = V TO 0
L(I,J,K) = ?
NEXT K : NEXT J : NEXT I
Introduction des coeff. des polynômes
de La Matrice M(I,J,K)
FOR I= 1 TO R : FOR J=1 TO M
FOR K= U TO 0
M(I,J,K) = ?
NEXT K : NEXT J : NEXT I
Inversion de La Matrice L(I,J,V)
Y(I,J)= L⁻¹(I,J,V)
L(I,J,V)
est-elle inversible
O
N
Calcul des nouvelles Matrices L(I,J,K)
FOR K=V TO 0 : FOR I=1 TO R : FOR J=1 TO R : C(I,J)=0
FOR K1= 1 TO R : C(I,J)= C(I,J)+ Y(I,K1)×L(K1,J,K)
NEXT K1 : NEXT J : NEXT I
FOR I= 1 TO R : FOR J=1 TO R : L(I,J,K) = C(I,J)
NEXT J : NEXT I : NEXT K
Calcul des nouvelles Matrices M(I,J,K)
FOR K=U TO 0 : FOR I= 1 TO R : FOR J=1 TO M: C(I,J)=0
FOR K1 = 1 TO M : C(I,J)= C(I,J) + Y(I,K1) × M(K1,J,K)
NEXT K1 : NEXT J : NEXT I
FOR I = 1 TO R : FOR J=1 TO M : M(I,J,K) = C(I,J)
NEXT J : NEXT I : NEXT K
B


B
I1 = 1 : K = V - 1
I = 1
J = 1 : J1 = 1
A(I1, J1) = L (I, J, K)
J < R
N
O
J = J + 1 : J1 = J1 + 1
I < R
O
N
I = I + 1 : I1 = I1 + 1
K = K - 1
I1 < R x V
N
O
I1 = I1 + 1
V ≦ 1
O
N
C
I1 = 1
F
J1 = R + 1
E
J1 = I1 + R
N
O
A(I1, J1) = 0
A(I1, J1) = 1
D


D
J1 < R×V
N
O
J1 = J1 + 1
E
I1 < R×V
O
N
I1 = I1 + 1
F
C
Afficher La Matrice d'évolution A(I1, J1)
DIM B(R×V, M) , S(R, R×V)
I1 = R×V
K = 0
I
I = R
H
J = M : J1 = M
B(I1, J1) = M(I, J, K)
J > 1
N
O
G
J=J-1 : J1=J1-1


G
I > 1
O
N
I = I - 1 : I1 = I1 - 1
H
K < U
N
O
K = K+1 : I1 = I1 - 1
I1 > 1
N
O
I
Affichage de la matrice de Commande B(I1,J1)
FOR I = 1 TO I1 - 1
FOR J = 1 TO M
B(I,J) = 0
NEXT J
NEXT I
J1 = 1
I = 1
K
J = 1
J


J
N
J = J1
O
S(I, J) = 0
S(I, J) = 1
N
J < R x V
O
J = J + 1
K
N
I < R
O
I = I + 1 : J1 = J1 + 1
Affichage de la matrice d'observation
S(I, J)
END

Chapitre V

COMMANDE DES SYSTEMES MULTIDIMENSIONNELS

criteres statistiques

V-1. Introduction :

Si l'on suppose que les entrees des systemes sont de nature aleatoire , une methode rationnelle doit partir des proprietes statistiques de ces entrees (commandes et perturbation). De la sorte, on peut resoudre le probleme exact donne, qui consiste a executer au mieux une certaine categorie d'ordre, malgre certaines perturbations, au lieu de se contenter de faire un asservissement satisfaisant pour des entrees tres particulieres.

Ainsi, on peut esperer realiser le systeme optimal pour le probleme pose [13].

Des methodes de PHILIPS, WIENER, et ecart quadratique ont ete developpees et conduit a d'interessantes generalisations.

V-2. Critere statistique et ecart quadratique moyen [13] :

V-2-1. Criteres statistiques :

Les criteres usuels ne concernent que la reponse a des entrees particulieres (par exemple echelon de position ou de vitesse, regime sinusoidal permanent) alors que les systemes asservis sont soumis a des entrees aleatoires. La necessite d'utiliser des methodes statistiques, si on veut etudier le probleme de facon rationnelle, implique donc l'emploi de criteres statistiques.

Dans les systemes de commande, on desire que la sortie s(t) du systeme soit aussi voisine que possible de l'entree e(t), c'est a dire que l'erreur,

$$\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$$

soit minimale.

Mais des difficultes surgissent lorsqu'on desire preciser ce que veut dire "minimiser" la difference de deux fonctions aleatoires du temps. Le plus souvent, on caracterise $\varepsilon(t)$ par sa valeur quadratique moyenne :

$$\overline{\varepsilon}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon^2(t) . dt$$

Et on considere le meilleur l'asservissement pour lequel $\overline{\varepsilon}^2$ est le plus petit. C'est le critere quadratique moyen.

On peut aussi caracteriser l'ecart par l'integrale

$$|\overline{\varepsilon}| = \lim_{T \to \infty} 1/2T \cdot \int_{-T}^{T} |\varepsilon(t)| \, dt$$

Ces expressions constituent une definition de la precision d'un systeme de commande.

Les ecarts de position ou de trainage caracterisent seulement pour des entrees tres particulieres, alors qu'une definition satisfaisante de la precision doit tenir compte des caracteristiques aleatoires des entiers (commande et perturbation) du systeme.

Nous desirons insister sur le fait que la valeur de l'ecart quadratique moyen ne saurait, en aucune facon, caracteriser de maniere complete l'erreur de l'asservissement, donc le critere de l'ecart quadratique moyen peut laisser certains aspects importaants d'un probleme d'asservissement.

Notamment, $\overline{\mathcal{E}}^2$ est independant de la distribution de dans le spectre de frequences. Or un systeme n'opere jamais seul, et les autres systemes qui travaillent en conjonction avec lui transmettent $\mathcal{E}(t)$ d'une maniere qui depend de leur frequences propres et du spectre de $\mathcal{E}(t)$.

V-2-2. Application du critere quadratique moyen :

Le critere de l'ecart quadratique moyen est le plus couramment utilise des criteres statistiques. Un des principaux interets de l'application de ce critere est en effet qu'il intervient sous une forme mathematique directe dans le cas de systemes lineaires soumis a des entrees aleatoires stationnaires.

Le critere peut etre applique de deux manieres au projet des systemes de commande lineaires dont les entrees (commande et perturbations) sont caracterises par leur spectres de frequences.

a- Si les organes du systeme ont ete choisis, quelques valeurs de parametres de reglages restent disponibles, on evalue l'ecart quadratique moyen par differentes valeurs et on choisit celles qui donne le reglage optimal. C'est la methode la plus courante est plus realiste.

b- On peut aussi essayer de determiner la forme des fonctions de transfert qui minimisent l'ecart quadratique moyen, au lieu de regler simplement des parametres pour des fonctions de transfert de forme donnee.

Une telle methode, fondee sur les idees de N.WIENER, constitue une veritable synthese du systeme lineaire optimal au sens du critere de l'ecart quadratique moyen.

Nous allons envisager successivement ces deux methodes, que nous designerons respectivement sous les noms de methodes de PHILIPS et de methode de WIENER.

V-3. Methode de PHILIPS :

V-3-1. Calcul de l'ecart quadratique moyen :

Soit H(p) la fonction de transfert erreur/entree d'un systeme dont l'entree probable est une variable aleatoire stationnaire de spctre de frequence $\phi(w)$ [13], la valeur moyenne quadratique de l'ecart $\mathcal{E}(t)$ (voir Fig"1"-a)

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon^2(t)\,.\,dt$$

a pour expression

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega)\,.\,|H(j\omega)|^2\,.\,d\omega \qquad (1)$$

plus generalement, dans le cas de deux entrees independantes (c. a.d telles que leur fonction de correlation mutuelle est identiquement nulle) de spectres ϕ_1 et ϕ_2, avec

$$\mathcal{E}(p) = H_1(p).E_1(p) + H_2(p).E_2(p)$$

on a (Fig 1-b)

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\phi_1 |H_1|^2 + \phi_2 |H_2|^2\right) d\omega \qquad (2)$$

$\phi(\omega) \longrightarrow$ [$H(p)$] $\xrightarrow{\overline{\varepsilon^2}}$

(a)

$e_1 \longrightarrow$, $e_2 \longrightarrow$ [H_1 / H_2] $\xrightarrow{\varepsilon}$

(b)

Fig-1.

Soit alors un asservissement lineaire appele a recevoir **deux** sortes d'entrees :

- L'ordre e de spectre de frequence ϕ_e.
- Les perturbations d (bruits de fond), de spectre ϕ_d, (nous ne considerons que le cas d'une perturbation unique).

L'ecart est donnee par la relation :

$$\varepsilon(p) = H_1(p).E(p) + H_2(p).D(p)$$

ou $H_1(p)$ est la fonction de transfert **ecart/commande, dont** l'expression, dans le cas de retour unitaire, est :

$$H_1 = \frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + K.G(p)}$$

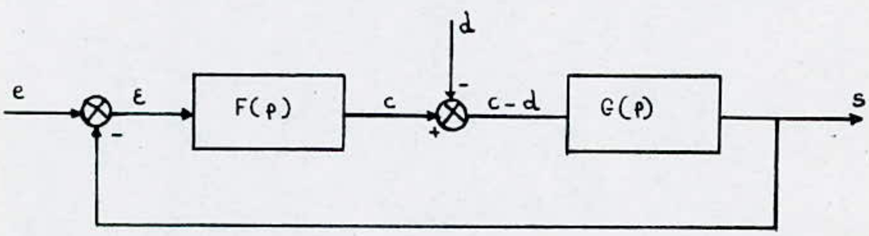


Fig-2: Commande e(t) et perturbation d(t)

Quant a $H_2(p)$, c'est la fonction de transfert ecart/perturbation. Son expression depend de la facon dont la perturbation s'introduit dans l'asservissement; d'apres la Fig-2 on aura :

$$H_2(p) = \frac{\mathcal{E}(p)}{D(p)} = \frac{G(p)}{1 + F(p).G(p)}$$

d'ou l'epression complete :

$$\mathcal{E}(p) = \frac{1}{1 + F.G} . E(p) + \frac{G}{1 + F.G} . D(p) \quad .... \quad \mathbf{(3)}$$

V-3-2. Methode de PHILIPS :

Si on connait les spectres de frequences des entrees E et D, $\mathcal{E}(p)$ est donne par (3); on deduit par (2) l'ecart quadratique moyen d'apres le calcul on juge le systeme asservi.

Ce calcul n'est pas autre chose que le calcul de l'asservissement qui minimise $\overline{\mathcal{E}^2}$ en donnant le plus grand poids aux entrees les plus probables, c'est a dire aux frequences por laquelles $\phi(w)$ est grand : La relation (1) n'est en effet qu'une ponderation de $H(w)$ par $\phi(w)$. [13]

Le calcul est fastidueux pour un degre des equations en jeu eleve. Cette methode s'applique fort bien dans les cas, tres frequents, ou les elements essentiels du systeme sont definis a des reglages pres : mathematiquement, lorsque la forme des fonctions H_1 et H_2 est impose.

Toutefois, l'application de la methode suppose qu'on connait les caracteristiques aleatoires des entrees (entrees de commande et perturbation).

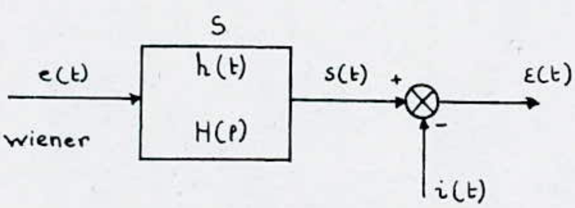
V-4. Methode de WIENER : [13]

V-4-1. Generalites :

La methode de WIENER admet un critere de qualite celui de l'ecart quadratique moyen minimal, comme celle de PHILIPS.
Mais elle ne se contente pas de determiner les valeurs optimales des parametres libres d'un systeme deja dessine ou realise : Elle cherche d'emblee la forme des fonctions de transfert assurant l'ensemble des performances optimales.

V-4-2. Probleme de WIENER :

On suppose que la grandeur d'entree e(t) d'un systeme lineaire S est une fonction aleatoire stationnaire, definie par sa fonction d'auto-correlation $\varphi_{ee}(\tau)$. On cherche a determiner S de telle facon que l'ecart quadratique moyen entre la sortie effective s(t) et une sortie ideale i(t) soit le plus petit possible.



probleme de wiener

Le systeme S pouvant etre caracterise par sa reponse impulsionnelle h(t), cela revient a chercher la forme de la fonction h(t) qui minimise la quantite :

$$\overline{\varepsilon}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[s(t) - i(t) \right]^2 \cdot dt .$$

La minimisation de $\overline{\varepsilon}^2$ s'obtient par application de l'equation de WIENER-HOPF [13], ou $\varphi_{ei}(\tau)$ designe la fonction de correlation mutuelle de l'entree e(t) et de la sortie ideale i(t)

$$\varphi_{ei}(\tau) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma)\, \varphi_{ee}(\tau - \sigma) \cdot d\sigma = 0$$

Pour toute valeur positive de τ.

Cette equation peut se resoudre par transformation de FOURRIER et conduit a une solution unique pour la fonction de transfert H(p) du systeme lineaire cherche. L'expression de cette solution unique est la suivante [13] :

$$H(p) = \frac{\left[\phi_{ei}(p) / \phi_{ee}^{-}(p) \right]_{+}}{\phi_{ee}^{+}(p)}$$

Ou les ϕ affectes d'indices se deduisent des transformees de FOURRIER de $\varphi_{ee}(\tau)$ et $\varphi_{ei}(\tau)$ par des manipulations de poles [13].

La condition "egale a zero pour toutes les valeurs positives de τ" qui apparait dans l'equation de WIENER-HOPF correspond au fait que la reponse impulsionnelle d'un systeme physique ne saurait etre differente de zero aux instants negatifs c'est a dire avant l'apparition de l'impulsion d'entree. Soulignons qu'on ne peut parler de systeme optimal que :

1- Par rapport a un critere precis : ici, $\overline{\varepsilon^2}$ soit minimal

2- A partir de donnees aleatoires connues : ici seuls interviennent $\varphi_{ee}(\tau)$ et $\varphi_{ei}(\tau)$, ou , ce qui revient au meme, leurs transformmes de FOURRIER $\phi_{ee}(\omega)$ et $\phi_{ei}(\omega)$.

3- Dans des conditions bien precises : ici, systeme d'une part obligatoirement lineaire et d'autre part physiquement realisable et stable .

V-4-3. Interet pratique de la methode de WIENER :

La methode de WIENER est une methode de synthese globale, qui tient compte du caractere aleatoire des entrees des systemes asservis.

Malheureusement, son application est soumise a un certain nombre de limitations et de difficultes se rattachant aux diverses proprietes de la methode.

1- Limitation : celle du critere de l'ecart quadratique moyen souvent insufisant [13].

2- Difficulte : la methode de Wiener comme toute methode statistique ,suppose les entrees caracterisees par leurs spectres de frequence : outre que ce n'est pas toujours possible [13], cela represente un travail tres vaste d'essais et de depouillement .

V-4-4. interet des methodes statistiques :

L'interet theorique des methodes statistiques est immense. Les systemes a commande automatique devant, par nature meme fonctionner dans des conditions imprevisibles, la seul maniere de les etudier consiste a commencer par l'etude statistique des entrees (commande et perturbations) qu'ils sont appeles a rencontrer.

L'application pratique des methodes statistiques n'est en effet aisee que lorsqu'on a affaire a des variables aleatoires stationnaires,ce qui n'est malheureusement pas le cas pour de nombreuses perturbations et pour la plupart des entrees de commande.De plus ,la mise en oeuvre des methodes statistiques exige de nombreux et longs essais preliminaires (enregistrement et entrees),dont le depouillement est laborieux et frequemment delicat;cela limite souvent l'application de ces methodes a des projets tres importants de systemes asservis.

CONCLUSION

Cette etude nous a permis de developper un algorithme permettant d'informatiser la regle de MASON et de determiner la matrice de transfert d'un systeme multidimensionnel.

Le developpement de l'algorithme a ete programme sur micro-ordinateur du type O.M24 SP.

Le calculateur ne nous a permis de similer qu'un systeme cinq entrees max. Cette limite est principalement due au langage utilise BASIC. Pour de meilleures performances (temps d'execution reduit et un nombre superieur d'entrees et de sorties) il est avantageux d'utiliser un langage evolue (PASCAL) et un calculteur plus rapide (32 bits).

Nous avons developpe un algorithme permettant le passage d'une equation differentielle au mode d'etat.

Sur les differents cas etudies, nous avons developpe un algorithme dans le cas ou la matrice est inversible.

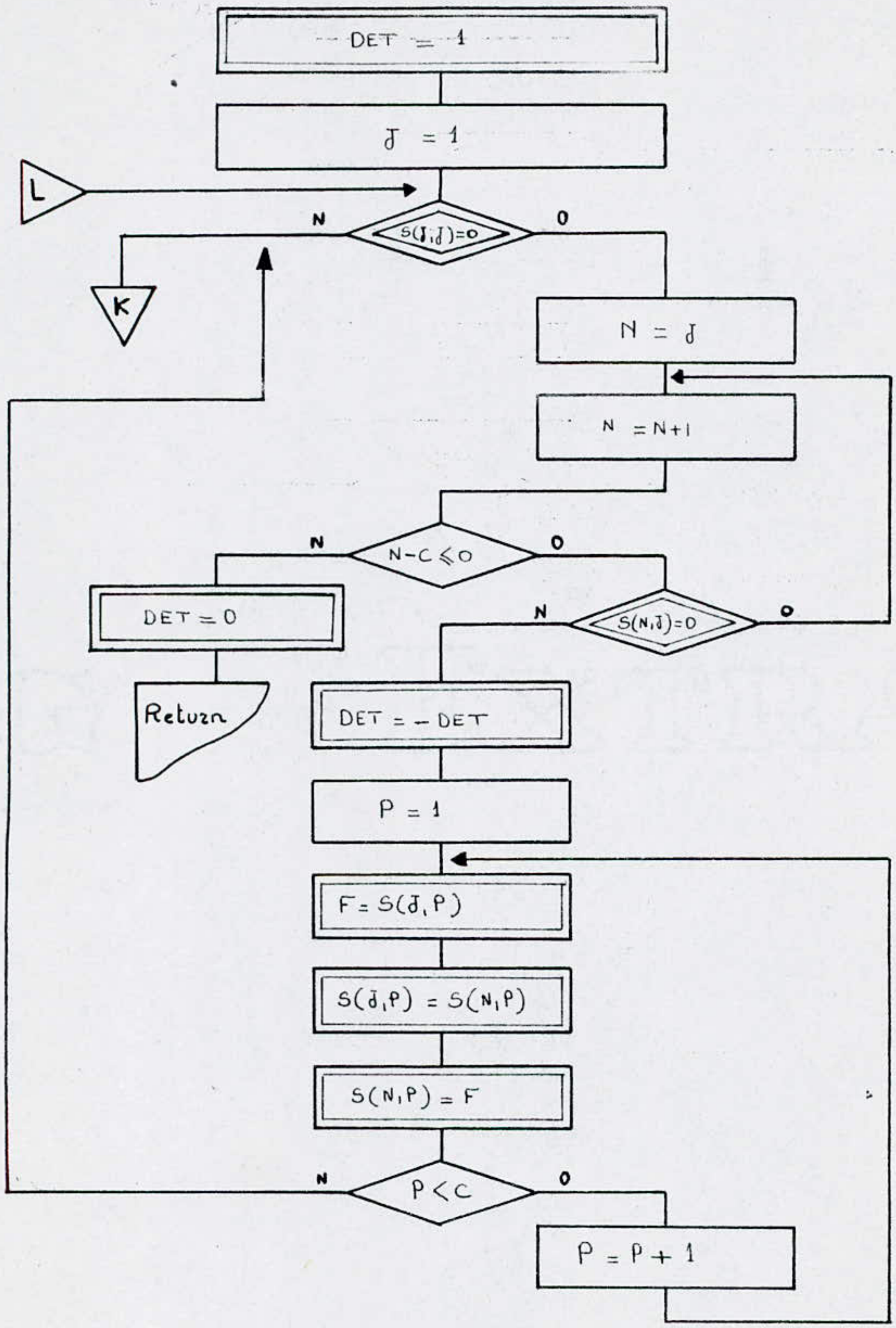
Un travail ulterieur peut etre prevu pour etudier le cas ou la matrice L n'est pas inversible (methode de BROWN).

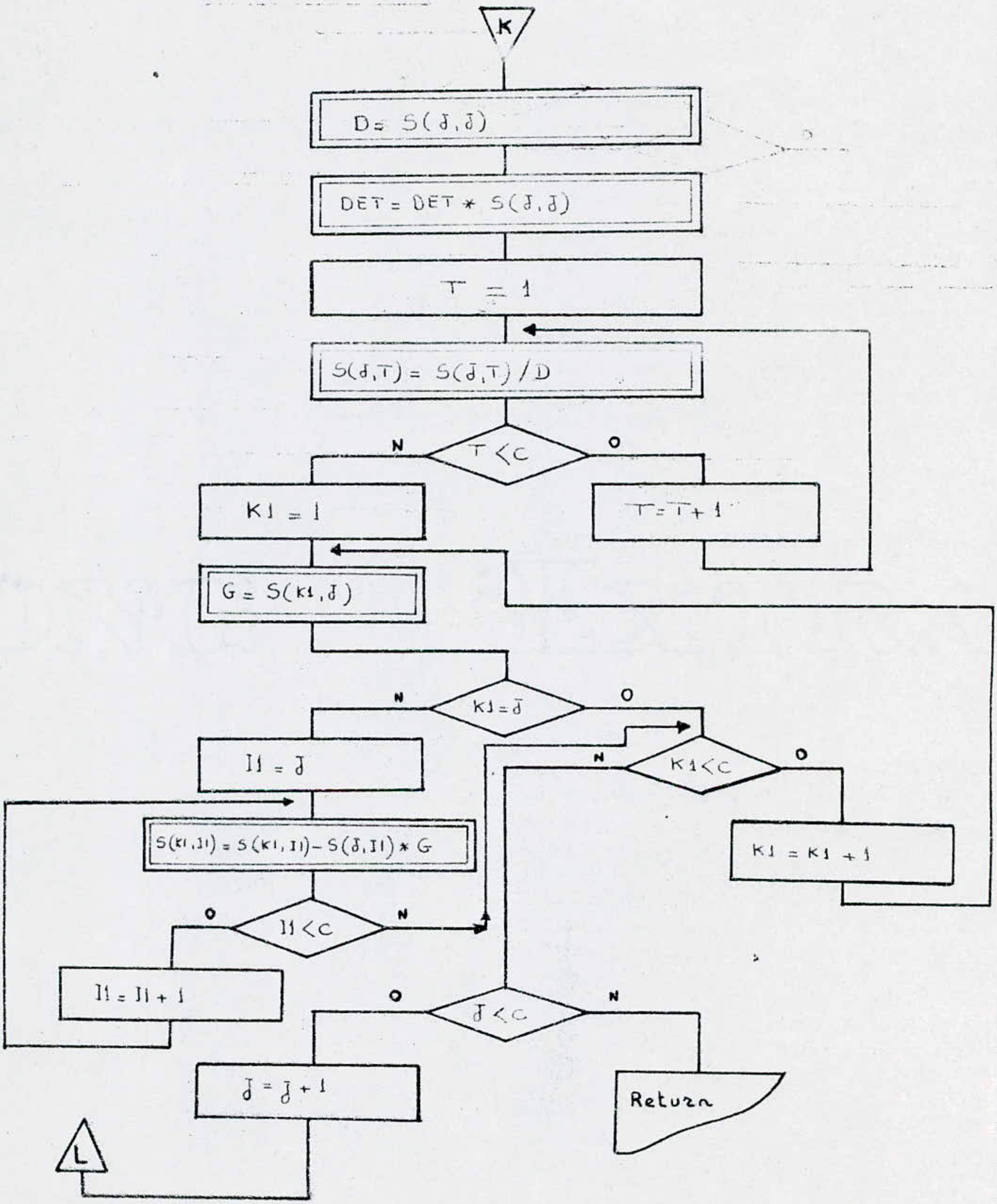
Le travail est un prealable a la commande de systemes plusieurs entrees-sorties.

La commande de systeme etant complexe, nous avons presente l'etude comparative des differents cas.

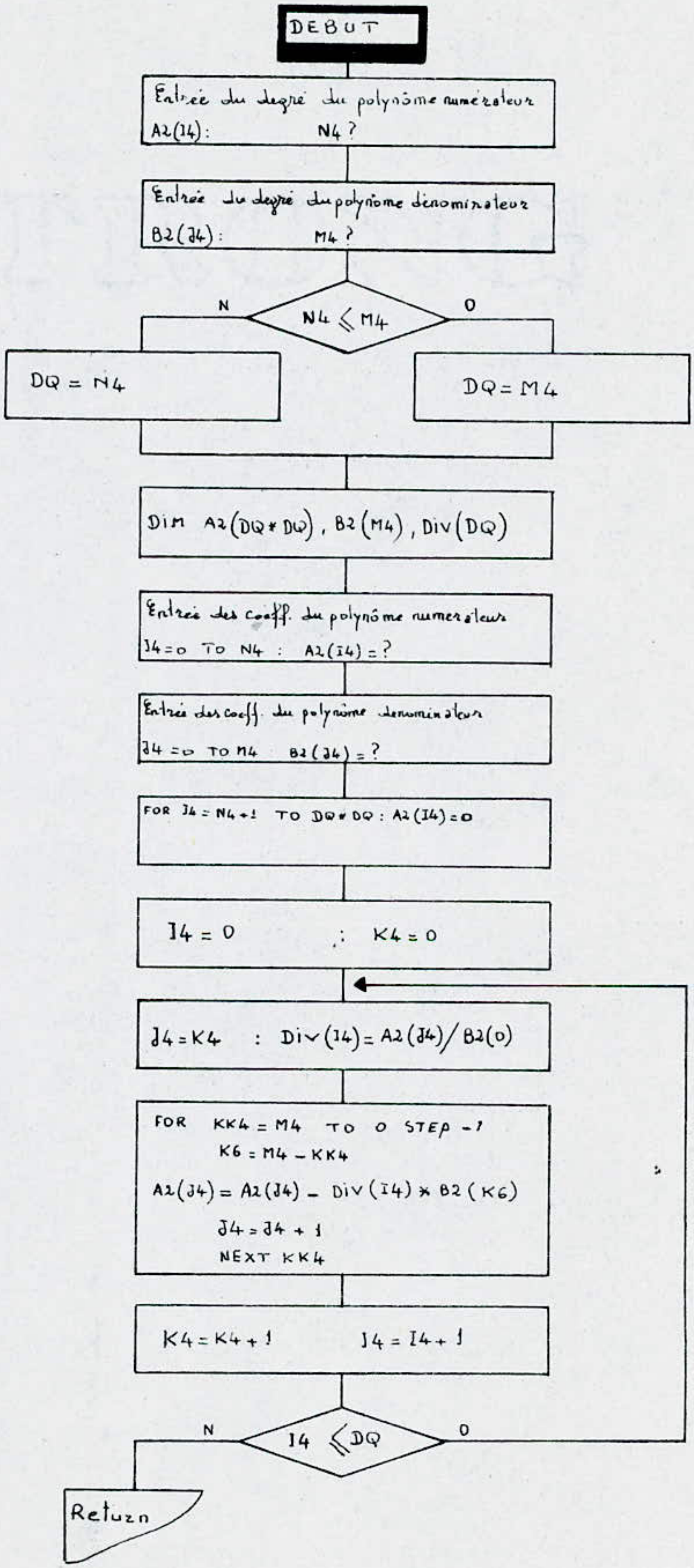
ANNEXES

Sous programme du Calcul du determinant

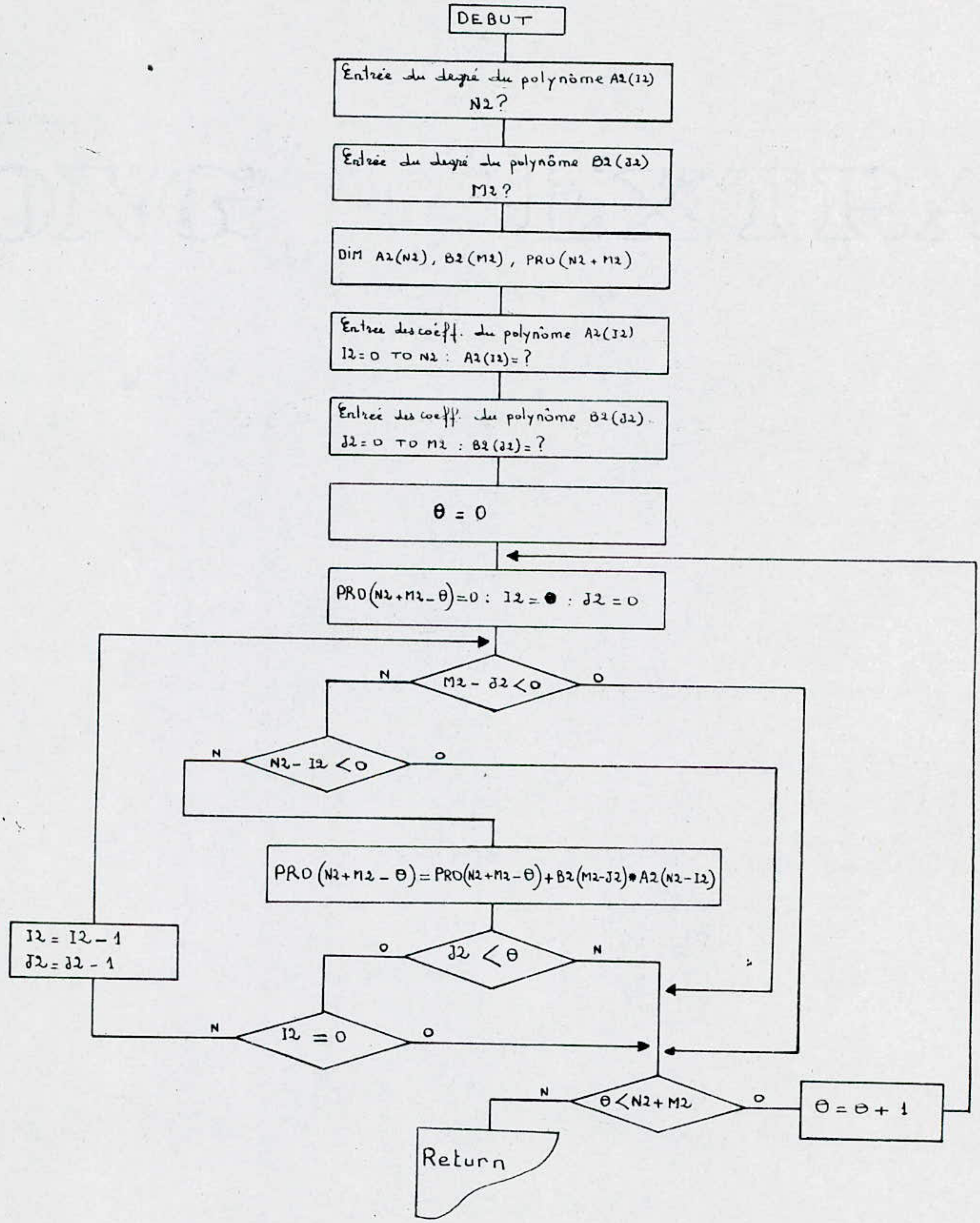



K
D= S(J,J)
DET = DET * S(J,J)
T = 1
S(J,T) = S(J,T) / D
N
T < C
O
K1 = 1
T=T+1
G = S(K1,J)
N
K1 = J
O
I1 = J
N
K1 < C
O
S(K1,I1) = S(K1,I1) − S(J,I1) * G
K1 = K1 + 1
O
I1 < C
N
I1 = I1 + 1
O
J < C
N
J = J + 1
Return
L

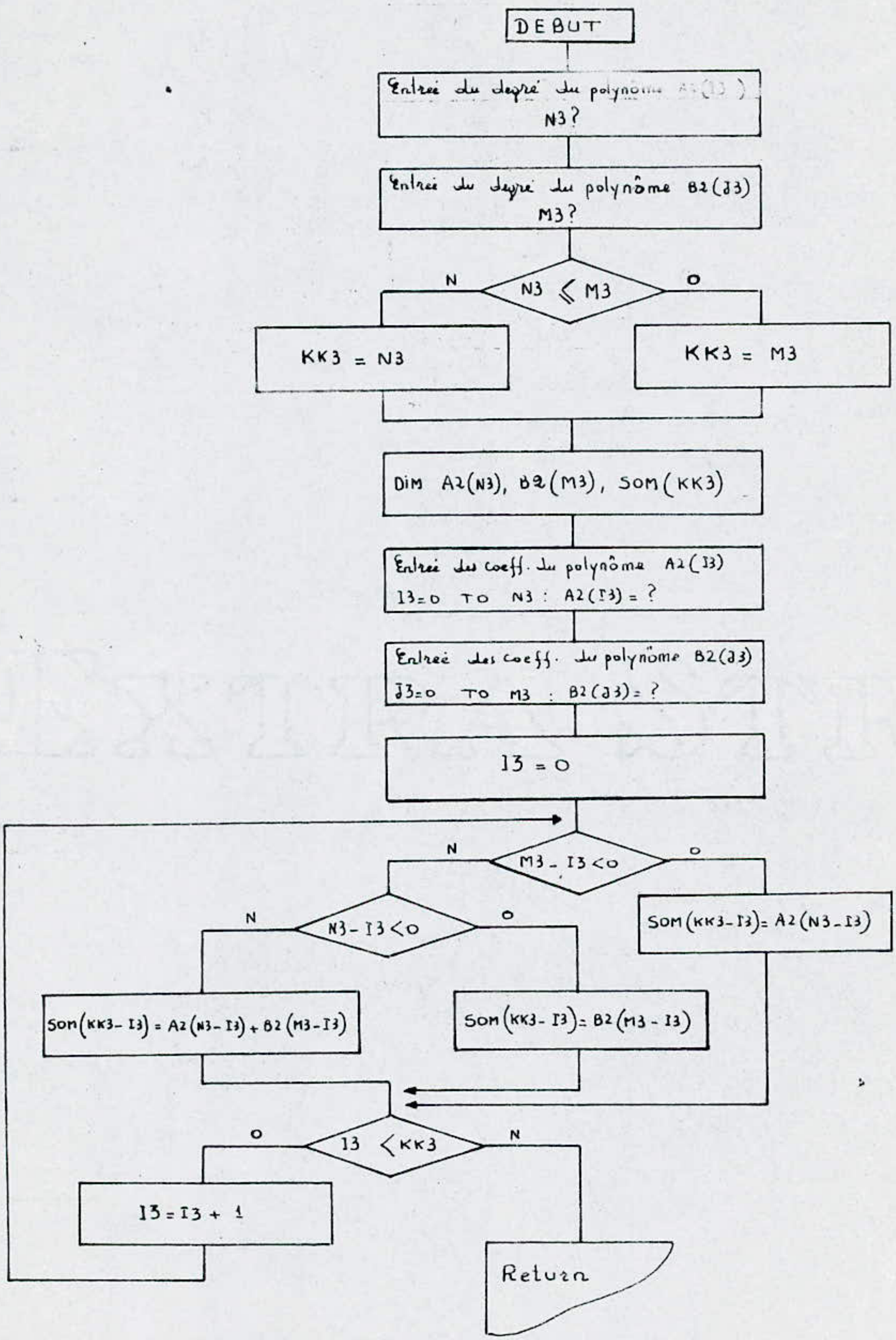
Sous-programme de la Division de deux polynômes



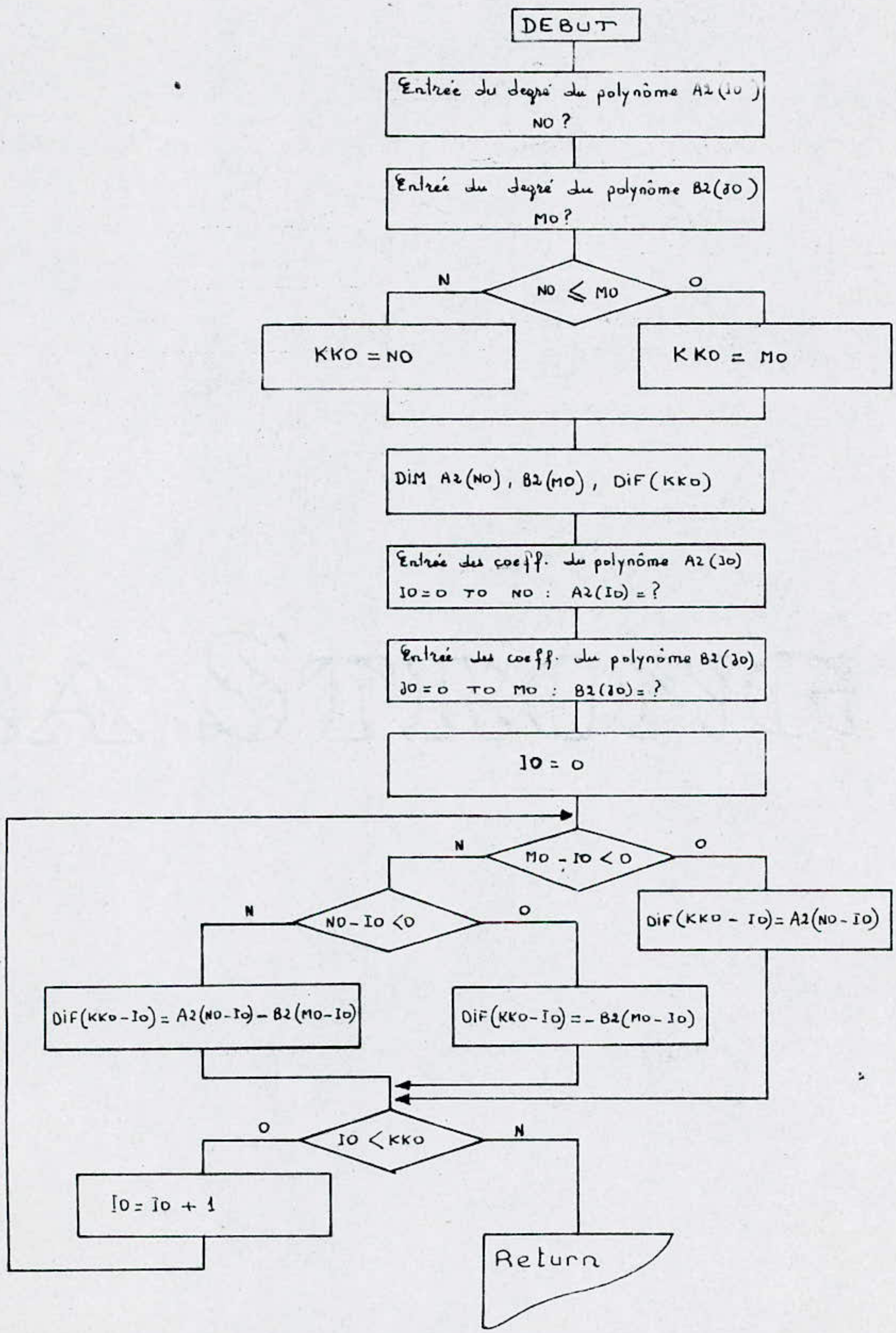
Sous-programme du produit de deux polynômes



Sous-programme de la somme de deux polynômes



Sous programme de la Difference de deux polynômes



```
10 '**************************************************************************
20 '*************************************************************************
30 '************  CALCUL DE LA F.T D'UN SYSTEME M.I.M.O  *******************
40 '**************************************************************************
50 '***************************************************************************
60 '
70 '
80 CLS
90 '
100 INPUT "QUEL EST LE NOMBRE DES ENTREES DE VOTRE SYSTEME NQ1";NQ1
110 INPUT "QUEL EST LE NOMBRE DES SORTIES DE VOTRE SYSTEME NQ2";NQ2
120 '
130 CLS
140 NQ=NQ1+NQ2
150 '
160 '*************************************************************************
170 '                        DIMENSIONNEMENT                                 '
180 '*************************************************************************
190 '
200 DIM DPWN(NQ,NQ),PWN(NQ,NQ,2),DPWD(NQ,NQ),PWD(NQ,NQ,6),T(NQ),A(NQ)
210 DIM DPSN(NQ,NQ),PSN(NQ,NQ,100),DPSD(NQ,NQ),PSD(NQ,NQ,100)
220 DIM PDETN(100),PDETD(100),PFN(100),PFD(100),PDN(100),PDD(100)
230 DIM PGN(100),PGD(100),PSGN(100),PSGD(100),P1(100),P2(100)
240 DIM PSDN1(100),PSDN2(100),PSDN(100),PSDD(100),SD(100)
250 DIM A2(150),B2(150),RES(150)
260 '
270 FOR I=1 TO NQ
280 FOR J=1 TO NQ
290 '
300 '***************************************************************************
310 '   ENTREE DES DEGRES DES POLYNOMES TERMES DE LA MATRICE DE LIAISON       '
320 '**************************************************************************
330 '
340 PRINT"DONNER LE DEGRE DPWN(";I;",";J;") DU POLYNOME NUMERATEUR PWN(",I;",",J
    ;",IPWN)";:INPUT "=";DPWN(I,J)
350 PRINT"DONNER LE DEGRE DPWD(";I;",";J;") DU POLYNOME DENOMINATEUR PWD(",I;","
    ;J;",IPWD)";:INPUT "=";DPWD(I,J)
360 PRINT "DONNER LES COEFFICIENTS DU POLYNOME NUMERATEUR PWN(";I;",";J;",IPWN)"
370 FOR IPWN=0 TO DPWN(I,J)
380 '
390 '**************************************************************************
400 ' ENTREE DES COEFFICIENTS DES POLYNOMES TERMES DE LA MATRICE DE LIAISON '
410 '**************************************************************************
420 '
430 PRINT"PWN(";I;",";J;",";IPWN;")=COEFFICIENT DE P^";DPWN(I,J)-IPWN;:INPUT "="
    ;PWN(I,J,IPWN)
440 NEXT IPWN
450 PRINT"DONNER LES COEFFICIENTS DU POLYNOME DENOMINATEUR PWD(";I;",";J;",IPWD)
```

```
460 FOR IPWD=0 TO DPWD(I,J)
470 PRINT"PWD(";I;",";J;",";IPWD;")=COEFFICIENT DE P^";DPWD(I,J)-IPWD;:INPUT "="
    ;PWD(I,J,IPWD)
480 NEXT IPWD
490 CLS
500 NEXT J
510 NEXT I
520 '
530 SCREEN 1:CLS:LOCATE 10,12:PRINT "PATIENTEZ LES CALCULS SONT EN COURS"
540 TIME$="00:00:00"
550 '
560 '*******************************************************************
570 '            INITIALISATION DU VECTEUR T(K) A ZERO
580 '*******************************************************************
590 '
600 FOR K=1 TO NQ
610 T(K)=0
620 NEXT K
630 '
640 M=1
650 '********************************************************************
660 '                 INITIALISATION DU POLYNOME SD
670 '********************************************************************
680 '
690 DPSDN=0:SDN=0:PSDN(SDN)=1
700 DPSDD=0:SDD=0:PSDD(SDD)=1
710 '
720 K=NQ:M=M+1
730 IF T(K)=1 THEN 1050
740 T(K)=1
750 IF M<=2^NQ THEN 1080
760 '
770 '***********************************************************************
780 '******* CALCUL DU POLYNOME DENOMINATEUR DE LA F.T DU SYSTEME  ***********
790 '***********************************************************************
800 '
810 N4=DPSDN:M4=DPSDD
820 IF N4<=M4 THEN 840
830 DQ=N4:GOTO 850
840 DQ=M4
850 FOR I4=N4+1 TO DQ*DQ:A2(I4)=0:NEXT I4
860 FOR I4=0 TO N4:A2(I4)=PSDN(I4):NEXT I4
870 FOR J4=0 TO M4:B2(J4)=PSDD(J4):NEXT J4
880 GOSUB 3620
890 DSD=DQ:FOR I=0 TO DSD:SD(I)=RES(I):NEXT I
900 '
```

```
910 '*******************************************************************
920 '************ IMPRESSION DU POLYNOME DENOMINATEUR SD(I) ***************
930 '*******************************************************************
940 '
950 CLS:SCREEN 3
960 LOCATE 2,5:PRINT "VOICI VOTRE POLYNOME DENOMINATEUR "
970 FOR I=0 TO DSD:LOCATE (I+3),30
980 PRINT "SD(";I;")=COEFF.DE P^";DDG-I;"=";SD(I):NEXT I
990 '
1000 LOCATE 3,70:PRINT TIME$
1010 LOCATE 22,1:PRINT "APPUYER SUR LA BARRE POUR OBTENIR LE NUMERATEUR"
1020 IF INKEY$ () " " THEN 1020
1030 ERASE PSDN1,PSDN2,PSDN,PSDD,SD:GOTO 3800
1040 '
1050 T(K)=0:K=K-1
1060 IF K)=1 THEN 730
1070 GOTO 750
1080 C=0:K=1
1090 IF T(K)=1 THEN 1130
1100 IF K(NQ THEN 1120
1110 GOTO 1150
1120 K=K+1:GOTO 1090
1130 C=C+1:A(C)=K:GOTO 1100
1140 '
1150 FOR I=1 TO C
1160 FOR J=1 TO C
1170 DPSN(I,J)=DPWN(A(I),A(J))
1180 FOR SS=0 TO DPSN(I,J)
1190 PSN(I,J,SS)=PWN(A(I),A(J),SS)
1200 NEXT SS
1210 DPSD(I,J)=DPWD(A(I),A(J))
1220 FOR SS=0 TO DPSD(I,J)
1230 PSD(I,J,SS)=PWD(A(I),A(J),SS)
1240 NEXT SS:NEXT J:NEXT I
1250 '
1260 GOSUB 1640
1270 '*******************************************************************
1280 '     CALCUL DU POLYNOME NUMERATEUR DU DENOMINATEUR DE LA F.T        '
1290 '*******************************************************************
1300 '
1310 N2=DPSDN:M2=DPDETD
1320 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSDN(I2):NEXT I2
1330 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PDETD(J2):NEXT J2
1340 GOSUB 3190
1350 DPSDN1=N2+M2:FOR I=0 TO DPSDN1 :PSDN1(I)=RES(I):NEXT I
```

```
1360 '
1370 N2=DPSDD:M2=DPDETN
1380 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSDD(I2):NEXT I2
1390 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PDETN(J2):NEXT J2
1400 GOSUB 3190
1410 DPSDN2=N2+M2:FOR I=0 TO DPSDN2:PSDN2(I)=(-1)^C*RES(I):NEXT I
1420 '
1430 N3=DPSDN1:M3=DPSDN2
1440 IF N3<=M3 THEN 1460
1450 KK3=N3:GOTO 1470
1460 KK3=M3
1470 FOR I3=0 TO N3:A2(I3)=PSDN1(I3):NEXT I3
1480 FOR J3=0 TO M3:B2(J3)=PSDN2(J3):NEXT J3
1490 GOSUB 3360
1500 DPSDN=KK3:FOR I=0 TO KK3:PSDN(I)=RES(I):NEXT I
1510 '
1520 '**********************************************************************
1530 '      CALCUL DU POLYNOME DENOMINATEUR DU DENOMINATEUR DE LA F.T       '
1540 '**********************************************************************
1550 '
1560 N2=DPSDD:M2=DPDETD
1570 FOR I2=0 TO N2 :A2(I2)=PSDD(I2):NEXT I2
1580 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PDETD(J2):NEXT J2
1590 GOSUB 3190
1600 DPSDD=N2+M2:FOR I=0 TO DPSDD:PSDD(I)=RES(I):NEXT I
1610 GOTO 720
1620 '
1630 '**********************************************************************
1640 '*********  CALCUL DU DETERMINANT DE LA MATRICE RESTANTE  **************
1650 '**********************************************************************
1660 '
1670 DPDETN=0:DETN=0:PDETN(DETN)=1
1680 DPDETD=0:DETD=0:PDETD(DETD)=1
1690 '
1700 FOR J=1 TO C
1710 '
1720 FOR IPSN=0 TO DPSN(J,J)
1730 IF PSN(J,J,IPSN)=0 THEN 1750
1740 GOTO 2270
1750 NEXT IPSN
1760 '
1770 N=J
1780 N=N+1
1790 IF (N-C)<=0 THEN 1860
1800 '
```

```
1810 DPDETN=0:DETN=0:PDETN(DETN)=0
1820 DPDETD=0:DETD=0:PDETD(DETD)=1
1830 '
1840 RETURN
1850 '
1860 FOR IPSN=0 TO DPSN(N,J)
1870 IF PSN(N,J,IPSN)=0 THEN 1890
1880 GOTO 1920
1890 NEXT IPSN:GOTO 1780
1900 '
1910 '
1920 FOR I4=0 TO DPDETN
1930 PDETN(I4)=-PDETN(I4)
1940 NEXT I4
1950 '
1960 FOR P=1 TO C
1970 '
1980 FOR I5=0 TO DPSN(J,P)
1990 PFN(I5)=PSN(J,P,I5)
2000 NEXT I5
2010 FOR I5=0 TO DPSD(J,P)
2020 PFD(I5)=PSD(J,P,I5)
2030 NEXT I5
2040 '
2050 '
2060 FOR I6=0 TO DPSN(N,P)
2070 PSN(J,P,I6)=PSN(N,P,I6)
2080 NEXT I6
2090 FOR I6=0 TO DPSD(N,P)
2100 PSD(J,P,I6)=PSD(N,P,I6)
2110 NEXT I6
2120 '
2130 '
2140 FOR I7=0 TO DPSN(J,P)
2150 PSN(N,P,I7)=PFN(I7)
2160 NEXT I7
2170 FOR I7=0 TO DPSD(J,P)
2180 PSD(N,P,I7)=PFD(I7)
2190 NEXT I7
2200 '
2210 '
2220 DFN=DPSN(J,P):DPSN(J,P)=DPSN(N,P):DPSN(N,P)=DFN
2230 DFD=DPSD(J,P):DPSD(J,P)=DPSD(N,P):DPSD(N,P)=DFD
2240 '
2250 NEXT P
```

```
2260 '
2270 FOR I8=0 TO DPSN(J,J)
2280 PDN(I8)=PSN(J,J,I8)
2290 NEXT I8:DPDN=DPSN(J,J)
2300 FOR I8=0 TO DPSD(J,J)
2310 PDD(I8)=PSD(J,J,I8)
2320 NEXT I8:DPDD=DPSD(J,J)
2330 '
2340 '
2350 N2=DPDETN:M2=DPSN(J,J)
2360 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PDETN(I2):NEXT I2
2370 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PSN(J,J,J2):NEXT J2
2380 GOSUB  3190
2390 DPDETN=N2+M2:FOR I=0 TO DPDETN:PDETN(I)=RES(I):NEXT I
2400 N2=DPDETD:M2=DPSD(J,J)
2410 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PDETD(I2):NEXT I2
2420 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PSD(J,J,J2):NEXT J2
2430 GOSUB 3190
2440 DPDETD=N2+M2:FOR I=0 TO DPDETD:PDETD(I)=RES(I):NEXT I
2450 '
2460 FOR T=1 TO C
2470 '
2480 N2=DPSN(J,T):M2=DPDD
2490 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSN(J,T,I2):NEXT I2
2500 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PDD(J2):NEXT J2
2510 GOSUB 3190
2520 DPSN(J,T)=N2+M2:FOR I=0 TO DPSN(J,T):PSN(J,T,I)=RES(I):NEXT I
2530 N2=DPSD(J,T):M2=DPDN
2540 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSD(J,T,I2):NEXT I2
2550 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PDN(J2):NEXT J2
2560 GOSUB 3190
2570 DPSD(J,T)=N2+M2:FOR I=0 TO DPSD(J,T):PSD(J,T,I)=RES(I):NEXT I
2580 '
2590 NEXT T
2600 FOR K1=1 TO C
2610 '
2620 FOR I9=0 TO DPSN(K1,J)
2630 PGN(I9)=PSN(K1,J,I9)
2640 NEXT I9
2650 DPGN=DPSN(K1,J)
2660 FOR I9=0 TO DPSD(K1,J)
2670 PGD(I9)=PSD(K1,J,I9)
2680 NEXT I9
2690 DPGD=DPSD(K1,J)
2700 '
```

```
2710 IF K1=J THEN 3150
2720 FOR I1=J TO C
2730 '
2740 N2=DPSN(J,I1):M2=DPGN
2750 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSN(J,I1,I2):NEXT I2
2760 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PGN(J2):NEXT J2
2770 GOSUB 3190
2780 DPSGN=N2+M2:FOR I=0 TO DPSGN:PSGN(I)=RES(I):NEXT I
2790 N2=DPSD(J,I1):M2=DPGD
2800 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSD(J,I1,I2):NEXT I2
2810 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PGD(J2):NEXT J2
2820 GOSUB 3190
2830 DPSGD=N2+M2:FOR I=0 TO DPSGD:PSGD(I)=RES(I):NEXT I
2840 '
2850 '
2860 N2=DPSN(K1,I1):M2=DPSGD
2870 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSN(K1,I1,I2):NEXT I2
2880 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PSGD(J2):NEXT J2
2890 GOSUB 3190
2900 DPP1=N2+M2:FOR I=0 TO DPP1:P1(I)=RES(I):NEXT I
2910 N2=DPSD(K1,I1):M2=DPSGN
2920 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSD(K1,I1,I2):NEXT I2
2930 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PSGN(J2):NEXT J2
2940 GOSUB 3190
2950 DPP2=N2+M2:FOR I=0 TO DPP2:P2(I)=RES(I):NEXT I
2960 '
2970 '
2980 N0=DPP1:M0=DPP2
2990 IF N0<=M0 THEN 3010
3000 KK0=N0:GOTO 3020
3010 KK0=M0
3020 FOR,I0=0 TO N0:A2(I0)=P1(I0):NEXT I0
3030 FOR J0=0 TO M0:B2(J0)=P2(J0):NEXT J0
3040 GOSUB 3490
3050 DPSN(K1,I1)=KK0:FOR I=0 TO KK0:PSN(K1,I1,I)=RES(I):NEXT I
3060 '.
3070 '
3080 N2=DPSD(K1,I1):M2=DPSGD
3090 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSD(K1,I1,I2):NEXT I2
3100 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PSGD(J2):NEXT J2
3110 GOSUB 3190
3120 DPSD(K1,I1)=N2+M2:FOR I=0 TO DPSD(K1,I1):PSD(K1,I1,I)=RES(I):NEXT I
3130 '
3140 NEXT I1
3150 NEXT K1
```

```
3160 NEXT J
3170 RETURN
3180 '************************************************************************
3190 '                    PRODUIT DE DEUX POLYNOME                           '
3200 '************************************************************************
3210 '
3220 O=O
3230 RES(N2+M2-O)=0:I2=0:J2=0
3240 IF (M2-J2)<0 THEN 3330
3250 IF (N2-I2)<0 THEN 3330
3260 RES(N2+M2-O)=RES(N2+M2-O)+B2(M2-J2)*A2(N2-I2)
3270 IF J2<0 THEN 3310
3280 IF O<N2+M2 THEN 3300
3290 RETURN
3300 O=O+1:GOTO 3230
3310 IF I2=0 THEN 3280
3320 J2=J2+1:I2=I2-1:GOTO 3240
3330 GOTO 3270
3340 '
3350 '************************************************************************
3360 '                    SOMME  DE  DEUX  POLYNOMES                         '
3370 '************************************************************************
3380 '
3390 FOR I3=0 TO KK3
3400 IF M3-I3<0 THEN 3450
3410 IF N3-I3<0 THEN 3460
3420 RES(KK3-I3)=A2(N3-I3)+B2(M3-I3)
3430 NEXT I3
3440 RETURN
3450 RES(KK3-I3)=A2(N3-I3):GOTO 3430
3460 RES(KK3-I3)=B2(M3-I3):GOTO 3430
3470 '
3480 '************************************************************************
3490 '                 DIFFERENCE  DE  DEUX  POLYNOMES                       '
3500 '************************************************************************
3510 '
3520 FOR I0=0 TO KK0
3530 IF M0-I0<0 THEN  3580
3540 IF N0-I0<0 THEN  3590
3550 RES(KK0-I0)=A2(N0-I0)-B2(M0-I0)
3560 NEXT I0
3570 RETURN
3580 RES(KK0-I0)=A2(N0-I0):GOTO 3560
3590 RES(KK0-I0)=-B2(M0-I0):GOTO 3560
3600 '
```

```
3610 '*********************************************************************
3620 '                    DIVISION DE DEUX POLYNOMES                       '
3630 '*********************************************************************
3640 '
3650 I4=0:K4=0:DDG=N4-M4
3660 J4=K4
3670 RES(I4)=A2(J4)/B2(0)
3680 FOR KK4=M4 TO 0 STEP -1
3690 K6=M4-KK4
3700 A2(J4)=A2(J4)-RES(I4)*B2(K6)
3710 J4=J4+1:NEXT KK4
3720 K4=K4+1
3730 I4=I4+1
3740 IF I4<=DQ THEN 3660
3750 RETURN
3760 '
3770 '
3780 '*********************************************************************
3790 '*********************************************************************
3800 '********* CALCUL DU POLYNOME NUMERATEUR DE LA F.T *******************
3810 '*********************************************************************
3820 '*********************************************************************
3830 '
3840 DIM PSNN1(100),PSNN2(100),PSNN(100),PSND(100),DSN(NQ1,NQ1+NQ2),SN(NQ1,NQ1+N
Q2,50)
3850 '
3860 '
3870 FOR NE=1 TO NQ1
3880 L1=1
3890 FOR NS=NQ1+1 TO NQ
3900 CLS:SCREEN 1:LOCATE 10,12:PRINT "PATIENTEZ LES CALCULS SONT EN COURS"
3910 '
3920 '*********************************************************************
3930 '          INITIALISATION DU VECTEUR T(KO) A ZERO                     '
3940 '*********************************************************************
3950 '
3960 FOR KO=1 TO NQ
3970 T(KO)=0
3980 NEXT KO
3990 '
4000 '*********************************************************************
4010 '          INITIALISATION DU POLYNOME  SN  A ZERO                     '
4020 '*********************************************************************
4030 '
4040 DPSNN=0:SNN=0:PSNN(SNN)=0
4050 DPSND=0:SND=0:PSND(SND)=1
```

```
4060 '
4070 M=1
4080 K0=NQ:M=M+1
4090 IF T(K0)=1 THEN 4550
4100 T(K0)=1
4110 K0=K0-1
4120 IF K0=NE THEN 4540
4130 IF K0=NS THEN 4540
4140 IF K0>=2 THEN 4110
4150 IF M<=2^(NQ-2)+1 THEN 4610
4160 '*****************************************************************
4170 '           CALCUL DES POLYNOMES NUMERATEURS DE LA F.T
4180 '*****************************************************************
4190 N4=DPSNN:M4=DPSND
4200 IF N4<=M4 THEN 4220
4210 DQ=N4:GOTO 4230
4220 DQ=M4
4230 FOR I4=N4+1 TO DQ*DQ :A2(I4)=0 :NEXT I4
4240 FOR I4=0 TO N4:A2(I4)=PSNN(I4):NEXT I4
4250 FOR J4=0 TO M4:B2(J4)=PSND(J4):NEXT J4
4260 GOSUB 3620
4270 DSN(NE,NS)=DQ:FOR I=0 TO DSN(NE,NS):SN(NE,NS,I)=RES(I):NEXT I
4280 '
4290 DSN(NE,L1)=DSN(NE,NS)
4300 FOR I=0 TO DSN(NE,L1)
4310 SN(NE,L1,I)=SN(NE,NS,I)
4320 NEXT I
4330 '
4340 '*********************************************************************
4350 '       IMPRESSION DES POLYNOMES NUMERATEUR DE LA F.T SN(NE,NS,I)      '
4360 '*********************************************************************
4370 '
4380 SCREEN 3:CLS
4390 LOCATE 3,5:PRINT"VOICI LES TERMES NUMERATEUR DE VOTRE MATRICE DE TRANSFERT"
4400 FOR I=0 TO DSN(NE,L1):LOCATE (I+4),30
4410 PRINT "SN(";NE;",";L1;",";I;")=COEFF.DE P^";DOG-I;"=";SN(NE,L1,I)
4420 NEXT I
4430 '
4440 LOCATE 3,70:PRINT TIME$
4450 LOCATE 22,5:PRINT "APPUYEZ SUR LA BARRE POUR OBTENIR LE PROCHAIN"
4460 IF INKEY$ <> " " THEN 4460
4470 L1=L1+1
4480 NEXT NS
4490 NEXT NE
4500 '
```

```
4510 LOCATE 23,15:PRINT "VOUS NE POUVEZ AVOIR D'AUTRES TERMES"
4520 END
4530 '
4540 T(KO)=1:GOTO 4140
4550 IF KO=NE THEN 4580
4560 IF KO=NS THEN 4580
4570 T(KO)=0
4580 KO=KO-1
4590 IF KO)=1 THEN 4090
4600 GOTO 4150
4610 C=0:KO=1
4620 IF T(KO)=1 THEN 5100
4630 IF KO<NQ THEN 5110
4640 I=1:L=1
4650 J=1:V=1
4660 IF A(I)=NS THEN I=I+1:GOTO 4670
4670 IF A(J)=NE THEN J=J+1:GOTO 4680
4680 IF J<=C THEN 5140
4690 IF I<C THEN 5120
4700 C=C-1
4710 GOSUB 1640
4720 P=R+CL+C-1
4730 '
4740 '*********************************************************************
4750 '       CALCUL DU POLYNOME NUMERATEUR DU NUMERATEUR DE LA F.T          '
4760 '*********************************************************************
4770 '
4780 N2=DPSNN:M2=DPDETD
4790 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSNN(I2):NEXT I2
4800 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PDETD(J2):NEXT J2
4810 GOSUB 3190
4820 DPSNN1=N2+M2:FOR I=0 TO DPSNN1:PSNN1(I)=RES(I):NEXT I
4830 '
4840 N2=DPSND:M2=DPDETN
4850 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSND(I2):NEXT I2
4860 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PDETN(J2):NEXT J2
4870 GOSUB 3190
4880 DPSNN2=N2+M2:FOR I=0 TO DPSNN2:PSNN2(I)=(-1)^P*RES(I):NEXT I
4890 '
4900 N3=DPSNN1:M3=DPSNN2
4910 IF N3<=M3 THEN 4930
4920 KK3=N3:GOTO 4940
4930 KK3=M3
4940 FOR I3=0 TO N3:A2(I3)=PSNN1(I3):NEXT I3
4950 FOR J3=0 TO M3:B2(J3)=PSNN2(J3):NEXT J3
```

```
4960 GOSUB 3360
4970 DPSNN=KK3:FOR I=0 TO DPSNN:PSNN(I)=RES(I):NEXT I
4980 '
4990 '*****************************************************************
5000 '    CALCUL DU POLYNOME DENOMINATEUR DU NUMERATEUR DE LA F.T
5010 '*****************************************************************
5020 '
5030 N2=DPSND:M2=DPDETD
5040 FOR I2=0 TO N2:A2(I2)=PSND(I2):NEXT I2
5050 FOR J2=0 TO M2:B2(J2)=PDETD(J2):NEXT J2
5060 GOSUB 3190
5070 DPSND=N2+M2:FOR I=0 TO DPSND:PSND(I)=RES(I):NEXT I
5080 '
5090 GOTO 4080
5100 C=C+1:A(C)=K0:GOTO 4630
5110 K0=K0+1:GOTO 4620
5120 I=I+1:L=L+1:GOTO 4650
5130 '
5140 IF I<=C THEN 5160
5150 GOTO 4700
5160 DPSN(L,V)=DPWN(A(I),A(J))
5170 FOR I3=0 TO DPSN(L,V)
5180 PSN(L,V,I3)=PWN(A(I),A(J),I3)
5190 NEXT I3
5200 DPSD(L,V)=DPWD(A(I),A(J))
5210 FOR I3=0 TO DPSD(L,V)
5220 PSD(L,V,I3)=PWD(A(I),A(J),I3)
5230 NEXT I3
5240 '
5250 IF A(I)=NE THEN 5290
5260 J=J+1:V=V+1
5270 IF J<=C THEN 4660
5280 GOTO 4690
5290 IF A(J)=NS THEN 5310
5300 GOTO 5260
5310 R=L:CL=V:GOTO 5260
```

```
10 '**************************************************************************
20 '**************************************************************************
30 '*********** CALCUL DE LA F.T D'UN SYSTEME M.I.M.O ***********************
40 '**************************************************************************
50 '**************************************************************************
60 '
70 '
80 '
90 CLS
100 '
110 INPUT "QUEL EST LE NOMBRE DES ENTREES DE VOTRE SYSTEME NQ1";NQ1
120 INPUT "QUEL EST LE NOMBRE DES SORTIES DE VOTRE SYSTEME NQ2";NQ2
130 '
140 'CLS
150 NQ=NQ1+NQ2
160 '
170 '**************************************************************************
180 '                        DIMENSIONNEMENT
190 '**************************************************************************
200 '
210 DIM MOW(NQ,NQ),ARW(NQ,NQ),MOT1(NQ1,NQ,100),ART1(NQ1,NQ,100)
220 DIM T(NQ),A(NQ),MOS(NQ,NQ),ARS(NQ,NQ),DEN(NQ,NQ),DED(NQ,NQ)
230 DIM V1(100),V2(100),NO(100),HO(100),MDW(NQ,NQ),ADW(NQ,NQ),MNW(NQ,NQ),ANW(NQ,
NQ)
240 DIM CON(NQ,NQ,100),COD(NQ,NQ,100)
250 '
260 '**************************************************************************
270 '          INTRODUCTION DES DONNEES DE LA MATRICE DE LIAISON(W)
280 '**************************************************************************
290 '
300 FOR I=1 TO NQ:FOR J=1 TO NQ
310 PRINT "DONNER LES DEGRES DES EQU. DEN(";I;",";J;")";:INPUT "=";DEN(I,J)
320 NEXT J
330 NEXT I
340 FOR I=1 TO NQ:FOR J=1 TO NQ
350 PRINT "DONNER LES DEGRES DES EQU.DED(";I;",";J;")";:INPUT "=";DED(I,J)
360 NEXT J
370 NEXT I
380 FOR I=1 TO NQ:FOR J=1 TO NQ:FOR KO=0 TO DEN(I,J)
390 PRINT "DONNER LES COEFFIENTS PAR DEG.CROISSANT DES POLY.CON(";I;",";J;",";KO
;")";:INPUT "=";CON(I,J,KO)
400 NEXT KO
410 NEXT J
420 NEXT I
430 FOR I=1 TO NQ:FOR J=1 TO NQ:FOR KO=0 TO DED(I,J)
440 PRINT "DONNER LES COEFF.DES POLY.COD(";I;",";J;",";KO;")";:INPUT "=";COD(I,J
,KO)
450 NEXT KO
```

```
460 NEXT J
470 NEXT I
480 CLS
490 '
500 '***************************************************************************
510 '         CALCUL DE LA MATRICE MODULES DES POLY. NUMERATEURS  DE (W):(MNW)
520 '      ET CALCUL DS MATRICE ARGUMENTS DES POLY. NUMERATEURS DE (W):(ANW)
530 '***************************************************************************
540 PI=3.1415926536#
550 FOR NE=1 TO NQ1
560 FOR NS=NQ1+1 TO NQ
570 OM=1
580 FOR I=1 TO NQ
590 FOR J=1 TO NQ
600 ALFA1=CON(I,J,0)
610 IF DEN(I,J)=0 THEN 820
620 BETA1=CON(I,J,1)*OM
630 NA=1
640 LI=2*NA
650 DE1=DEN(I,J)
660 IF LI<=DE1 THEN 680
670 AF1=ALFA1:GOTO 720
680 CO1=CON(I,J,LI)
690 ALFA1=ALFA1+(-1)^NA*CO1*OM^(LI)
700 TI=1+LI
710 IF TI<=DE1 THEN 790
720 BT1=BETA1
730 MNW(I,J)=SQR(AF1^2+BT1^2)
740 IF AF1=0 THEN 810
750 ANW(I,J)=ATN(BT1/AF1)*180/PI
760 NEXT J
770 NEXT I
780 GOTO 850
790 BETA1=BETA1+(-1)^NA*OM^TI*CO1
800 NA=NA+1:GOTO 640
810 ANW(I,J)=90:GOTO 760
820 BETA1=0:GOTO 630
830 '
840 '***************************************************************************
850 '        CALCUL DE LA MATRICE MODULES DES POLY. DENOMINATERS DE (W):(MDW)
860 '     ET CALCCUL DE LA MATRICE ARGUMENTS DES POLY.DENOMINATEURS DE (W):(ADW)
870 '***************************************************************************
880 '
890 FOR I=1 TO NQ
900 FOR J=1 TO NQ
```

```
910 ALFA2=COD(I,J,0)
920 IF DED(I,J)=0 THEN 1140
930 BETA2=COD(I,J,1)*OM
940 NA=1
950 LI=2*NA
960 DE2=DED(I,J)
970 IF LI<=DE2 THEN 990
980 AF2=ALFA2:GOTO 1030
990 CO2=COD(I,J,LI)
1000 ALFA2=ALFA2+(-1)^NA*CO2*OM^LI
1010 TI=1+LI
1020 IF TI<=DE2 THEN 1110
1030 BT2=BETA2
1040 MDW(I,J)=SQR(AF2^2+BT2^2)
1050 IF AF2=0 THEN 1130
1060 ADW(I,J)=ATN(BT2/AF2)*180/PI
1070 MOW(I,J)=MNW(I,J)/MDW(I,J)
1080 ARW(I,J)=ANW(I,J)-ADW(I,J)
1090 NEXT J
1100 NEXT I:GOTO 1150
1110 BETA2=BETA2+(-1)^NA*CI2*OM^TI
1120 NA=NA+1:GOTO 950
1130 ADW(I,J)=90:GOTO 1070
1140 BETA2=0:GOTO 940
1150 SCREEN 1:LOCATE 10,12:PRINT "PATIENTEZ LES CALCULS SONT EN COURS"
1160 '
1170 '************************************************************************
1180 '**********  CALCUL DU DENOMINATEUR DE LA F.T  ***************************
1190 '************************************************************************
1200 '
1210 '************************************************************************
1220 '        * INITIALISATION DU VECTEUR T(K) A ZERO *
1230 '************************************************************************
1240 FOR  K=1 TO NQ
1250 T(K)=0
1260 NEXT K
1270 '-----------------------------------------------------------------------
1280 M=1
1290 '
1300 MOSD=1:ARSD=0
1310 '
1320 K=NQ:M=M+1
1330 IF T(K)=1 THEN 1420
1340 T(K)=1
1350 IF M<=2^NQ THEN 1440
```

```
1360 '
1400 GOTO 2110
1410 '
1420 T(K)=0:K=K-1:IF K)=1 THEN 1330
1430 GOTO 1350
1440 C=0:K=1
1450 IF T(K)=1 THEN 2020
1460 IF K<NQ THEN 2030
1470 FOR I=1 TO C
1480 FOR J=1 TO C
1490 '
1500 MOS(I,J)=MOW(A(I),A(J)):ARS(I,J)=ARW(A(I),A(J))
1510 '
1520 NEXT J
1530 NEXT I
1540 '
1550 '*************************************************************************
1560 '           CALCUL DU DETERMINANT DE S(I,J)
1570 '*************************************************************************
1580 '
1590 MODET=1:ARDET=0
1600 FOR J=1 TO C
1610 IF MOS(J,J)=0 THEN 1910
1620 D=MOS(J,J):A=ARS(J,J)
1630 MODET=MODET*MOS(J,J)
1640 ARDET=ARDET+ARS(J,J)
1650 FOR T=1 TO C
1660 MOS(J,T)=MOS(J,T)/D
1670 ARS(J,T)=ARS(J,T)-A
1680 NEXT T
1690 FOR K1=1 TO C
1700 G=MOS(K1,J):H=ARS(K1,J)
1710 IF K1=J THEN 1810
1720 FOR I1=J TO C
1730 '
1740 R01=MOS(K1,I1):R02=MOS(J,I1)*G
1750 FI1=ARS(K1,I1):FI2=ARS(J,I1)+H
1760 MOS(K1,I1)=SQR(R01^2+R02^2-2*R01*R02*COS((FI1-FI2)*PI/180))
1770 IF R01*COS(FI1*PI/180)=R02*COS(FI2*PI/180) THEN 2050
1780 ARS(K1,I1)=ATN((R01*SIN(FI1*PI/180)-R02*SIN(FI2*PI/180))/(R01*COS(FI1*PI/18
0)-R02*COS(FI2*PI/180)))*180/PI
1790 '
1800 NEXT I1
```

```
1810 NEXT K1
1820 NEXT J
1830 '
1840 RA1=MOSD:RA2=MODET
1850 FA1=ARSD:FA2=ARDET
1860 MOSD=SQR(RA1^2+RA2^2+(-1)^C*2*RA1*RA2*COS((FA1-FA2)*PI/180))
1870 IF RA1*COS(FA1*PI/180)+(-1)^C*RA2*COS(FA2*PI/180)=0 THEN 2060
1880 ARSD=ATN((RA1*SIN(FA1*PI/180)+(-1)^C*RA2*SIN(FA2*PI/180))/(RA1*COS(FA1*PI/1
80)+(-1)^C*RA2*COS(FA2*PI/180)))*180/PI
1890 '
1900 GOTO 1320
1910 N=J
1920 N=N+1
1930 IF(N-C)<=0 THEN 1950
1940 MODET=0:ARDET=0:GOTO 1840
1950 IF MOS(N,J)=0 THEN 1920
1960 ARDET=180+ARDET
1970 FOR P=1 TO C
1980 F=MOS(J,P):MOS(J,P)=MOS(N,P):MOS(N,P)=F
1990 F1=ARS(J,P):ARS(J,P)=ARS(N,P):ARS(N,P)=F1
2000 NEXT P
2010 GOTO 1620
2020 C=C+1:A(C)=K:GOTO 1460
2030 K=K+1
2040 GOTO 1450
2050 ARS(K1,I1)=90:GOTO 1800
2060 ARSD=90:GOTO 1900
2070 '
2080 '****************************************************************************
2090 '************  CALCUL DU NUMERATEUR DE LA F.T DU SYSTEM MIMO *************
2100 '****************************************************************************
2110 MOSN=0:ARSN=0
2120 '
2130 '****************************************************************************
2140 '          * INITIALISATION DU VECTEUR T(K1) A ZERO *
2150 '****************************************************************************
2151 '
2160 FOR K1=1 TO NQ
2170 T(K1)=0
2180 NEXT K1
2181 '--------------------------------------------------------------------------
2182 '
2190 M=1
2200 K1=NQ:M=M+1
2210 IF T(K1)=1 THEN 2650
2220 T(K1)=1
2230 K1=K1-1
2240 IF K1=NE THEN 2710
2250 IF K1=NS THEN 2710
```

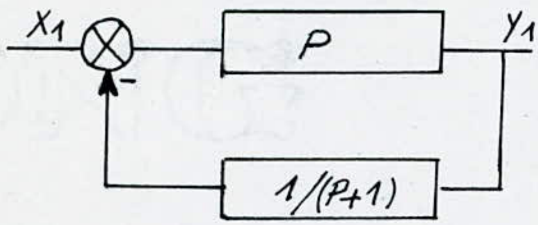
```
2260 IF K1>=2 THEN 2230
2270 IF M<=2^(NQ-2)+1 THEN 2720
2271 '
2272 '***********************************************************************
2280 '          CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT DU SYSTHEME
                     EN FONCTION DE LA FREUENCE "OM"
2281 '***********************************************************************
2282 '
2290 MOT1(NE,NS,OM)=MOSN/MOSD:ART1(NE,NS,OM)=ARSN-ARSD
2300 MOT1(NE,NS,OM)=(INT(100*MOT1(NE,NS,OM)))/100:ART1(NE,NS,OM)=(INT(100*ART1(N
E,NS,OM)))/100
2310 V1(OM)=MOT1(NE,NS,OM):V2(OM)=ART1(NE,NS,OM)
2360 OM=OM+1
2370 IF OM<=100 THEN 580
2380 CLS
2390 '
2391 '***********************************************************************
2400 '           TRACE DE LA REPONSE FREQUENTIELE DE F.T:T(I1,J1)
2410 '***********************************************************************
2411 '
2420 SCREEN 3:CLS
2430 XMAX=600:YMAX=300
2440 VIEW(0,0)-(620,320)
2450 WINDOW(-XMAX/2,-YMAX/2)-(XMAX,YMAX)
2460 LINE (-XMAX,0)-(XMAX,0):LINE(0,-YMAX)-(0,YMAX)
2470 FOR X=-XMAX TO XMAX STEP 10
2480 LINE(X,0)-(X,3)
2490 NEXT X
2500 FOR Y=-YMAX TO YMAX STEP 10
2510 LINE(0,Y)-(3,Y)
2520 NEXT Y
2530 FOR OM=1 TO 100
2540 HO(OM)=V1(OM)*COS(V2(OM))*180/PI
2550 NO(OM)=V1(OM)*SIN(V2(OM))*180/PI
2560 PSET(HO(OM)/10,NO(OM)/10)
2570 NEXT OM
2580 FOR OM=1 TO 99
2590 LINE (HO(OM)/10,NO(OM)/10)-(HO(OM+1)/10,NO(OM+1)/10)
2591 FOR VV=1 TO 1000: NEXT VV
2600 NEXT OM
2610 '------------------------------------------------------------
2620 NEXT NS
2630 NEXT NE
2640 END
2650 IF K1=NE THEN 2680
2660 IF K1=NS THEN 2680
2670 T(K1)=0
2680 K1=K1-1
2690 IF K1>=1 THEN 2210
2700 GOTO 2270
```

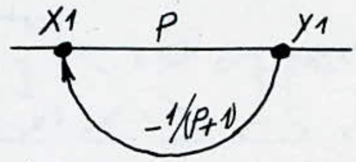
```
2710 T(K1)=1:GOTO 2260
2720 CT=0:K1=1
2730 IF T(K1)=1 THEN 2900
2740 IF K1<NQ THEN 2910
2750 I=1:L=1
2760 J=1:K=1
2770 IF A(I)=NS THEN 2920
2780 IF A(J)=NE THEN 2930
2790 IF J<=CT THEN 2940
2800 IF I<CT THEN 3030
2810 CT=CT-1
2820 GOSUB 3070
2830 P=R+CL+CT-1
2840 RU1=MOSN:RU2=MODET
2850 FU1=ARSN:FU2=ARDET
2860 MOSN=SQR(RU1^2+RU2^2+(-1)^P*2*RU1*RU2*COS((FU1-FU2)*PI/180))
2870 IF RU1*COS(FU1*PI/180)+(-1)^P*RU2*COS(FU2*PI/180)=0 THEN 3040
2880 ARSN=ATN((RU1*SIN(FU1*PI/180)+(-1)^P*RU2*SIN(FU2*PI/180))/(RU1*COS(FU1*PI/1
80)+(-1)^P*RU2*COS(FU2*PI/180)))*180/PI
2890 GOTO 2200
2900 CT=CT+1:A(CT)=K1:GOTO 2740
2910 K1=K1+1:GOTO 2730
2920 I=I+1:GOTO 2780
2930 J=J+1:GOTO 2790
2940 IF I>=CT THEN 2810
2950 MOS(L,K)=MOW(A(I),A(J)):ARS(L,K)=ARW(A(I),A(J))
2960 IF A(I)=NE THEN 3000
2970 J=J+1:K=K+1
2980 IF J<=CT THEN 2770
2990 GOTO 2800
3000 IF A(J)=NS  THEN 3020
3010 GOTO 2970
3020 R=L:CL=K:GOTO 2970
3030 I=I+1:L=L+1:GOTO 2760
3040 ARSN=90:GOTO 2890
3041 '
3042 '***************************************************************************
3050 '            CALCUL DU DETERMINANT DE LA MATRICE RESTANTE
3060 '***************************************************************************
3061 '
3070 MODET=1:ARDET=0
3080 FOR R1=1 TO CT
3090 IF MOS(R1,R1)=0 THEN 3320
3100 D=MOS(R1,R1):A=ARS(R1,R1)
3110 MODET=MODET*MOS(R1,R1):ARDET=ARDET+ARS(R1,R1)
3120 FOR I=1 TO CT
3130 MOS(R1,I)=MOS(R1,I)/D:ARS(R1,I)=ARS(R1,I)-A
3140 NEXT I
3150 FOR L1=1 TO CT
```

```
3160 G=MOS(L1,R1):H=ARS(L1,R1)
3170 IF L1=R1 THEN 3260
3180 FOR M1=R1 TO CT
3190 R01=MOS(L1,M1):R02=MOS(R1,M1)*G
3200 FI1=ARS(L1,M1):FI2=ARS(R1,M1)+H
3210 MOS(L1,M1)=SQR(R01^2+R02^2-2*R01*R02*COS((FI1-FI2)*PI/180))
3220 IF R01*COS(FI1*PI/180)=R02*COS(FI2*PI/180) THEN 3440
3230 ARS(L1,M1)=ATN((R01*SIN(FI1*PI/180)-R02*SIN(FI2*PI/180))/(R01*COS(FI1*PI/18
0)-R02*COS(FI2*PI/180)))*180/PI
3240 '
3250 NEXT M1
3260 NEXT L1
3270 NEXT R1
3310 RETURN
3320 N=R1
3330 N=N+1
3340 IF (N-CT)<=0 THEN 3370
3350 MODET=0:ARDET=0
3360 RETURN
3370 IF MOS(N,R1)=0 THEN 3330
3380 ARDET=ARDET+180
3390 FOR M2=1 TO CT
3400 F=MOS(R1,M2):MOS(R1,M2)=MOS(N,M2):MOS(N,M2)=F
3410 F1=ARS(R1,M2):ARS(R1,M2)=ARS(N,M2):ARS(N,M2)=F1
3420 NEXT M2
3430 GOTO 3100
3440 ARS(L1,M1)=90:GOTO 3250
```

. Exemple simple d'application
Système à une entrée - une sortie

Schema fonctionnel | **Graphe de fluence**





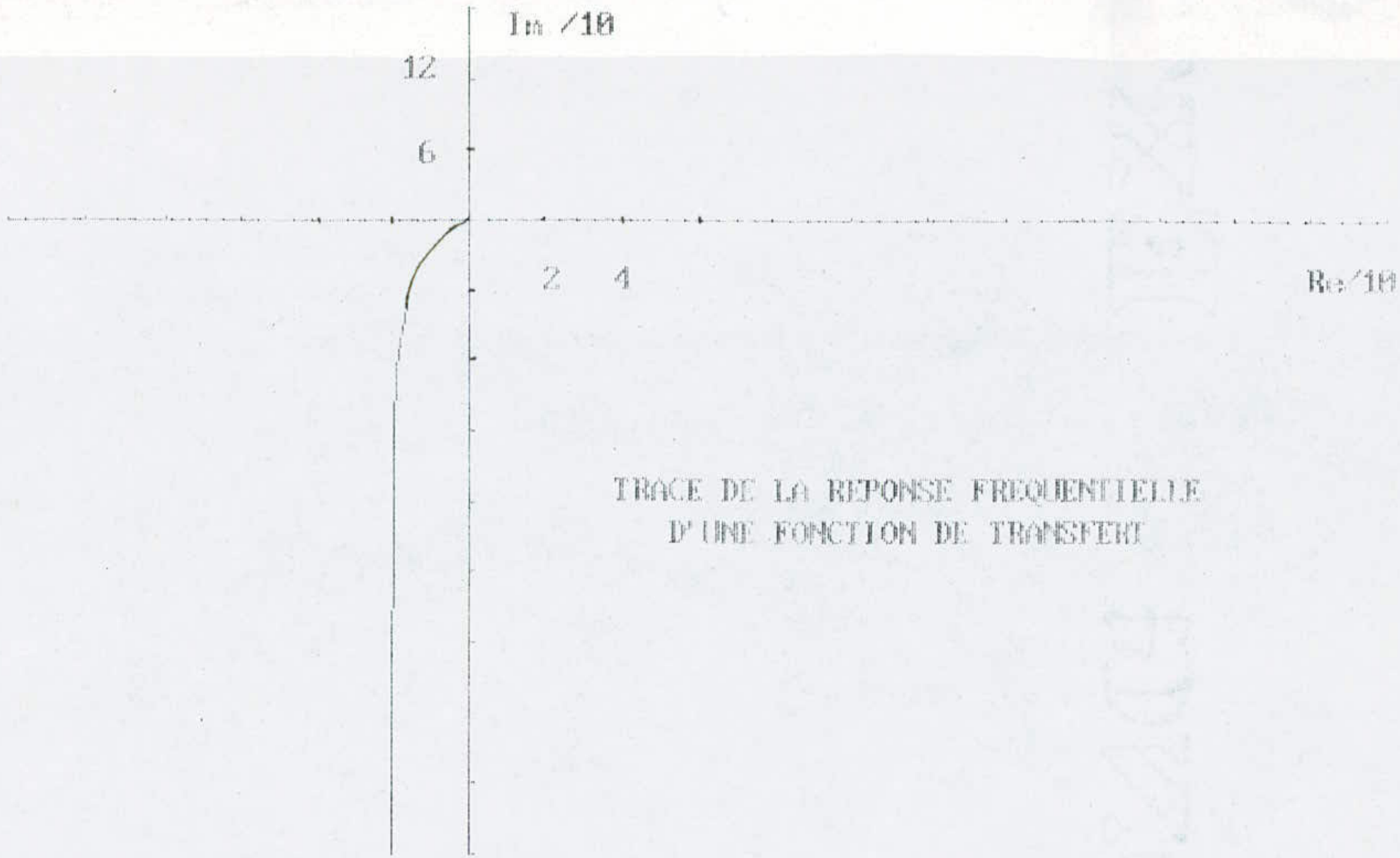
Matrice de liaison associée :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & P \\ 1/P+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Données nécessaire pour le calcul de la "M.T" :

$$DEN = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad DED = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CON = \begin{bmatrix} 0 & (0,1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad COD = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (1,1) & 1 \end{bmatrix}$$



TRACE DE LA REPONSE FREQUENTIELLE
D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

```
10 CLS
20 '
30 INPUT "QUEL EST LE NOMBRE DES ENTREES DU SYSTEME  M ";M
40 INPUT "QUEL EST LE NOMBRE DES SORTIES DU SYSTEME  R ";R
50 '
60 DIM DPL(R,R),DPM(R,M)
70 '
80 '               ENTREE DES DEGRES DE LA MATRICE L(I,J,K)
90 '
100 CLS
110 FOR I=1 TO R
120 FOR J=1 TO R
130 PRINT "DPL(";I;",";J;")=DEGRE DU POLYNOME L(";I;",";J;",K)";:INPUT "=";DPL(I
,J)
140 NEXT J
150 NEXT I
160 '
170 '               ENTREE DES DEGRES DE LA MATRICE M(I,J,K)
180 '
190 CLS
200 FOR I=1 TO R
210 FOR J=1 TO M
220 PRINT "DPM(";I;",";J;")=DEGRE DU POLYNOME M(";I;",";J;",K)";:INPUT "=";DPM(I
,J)
230 NEXT J
240 NEXT I
250 '
260 '             RECHERCHE DU DEGRE MAX. DE LA MATRICE L(I,J,K):V
270 '
280 V=0
290 FOR I=1 TO R
300 FOR J=1 TO R
310 IF DPL(I,J)<=V THEN 330
320 V=DPL(I,J)
330 NEXT J
340 NEXT I
350 '
360 '             RECHERCHE DU DEGRE MAX. DE LA MATRICE M(I,J,K):U
370 '
380 U=0
390 FOR I=1 TO R
400 FOR J=1 TO M
410 IF DPM(I,J)<=U THEN 430
420 U=DPM(I,J)
430 NEXT J
440 NEXT I
450 '
```

```
460 DIM L(R,R,V),M(R,M,U),Y(R*M,R*M),C(R*M,R*M),A(R*V,R*V)
470 '
480 '
490 '              ENTRÊE DES POLYNOME DE LA MATRICE L(I,J,K)
500 '
510 CLS
520 FOR I=1 TO R
530 FOR J=1 TO R
540 FOR K=V TO 0 STEP -1
550 PRINT "L(";I;",";J;",";K;")=COEFF.DE D^";K;:INPUT "=";L(I,J,K)
560 NEXT K
570 CLS
580 NEXT J
590 NEXT I
600 '
610 '              ENTREE DES POLYNOMES DE LA MATRICE M(I,J,K)
620 '
630 CLS
640 FOR I=1 TO R
650 FOR J=1 TO M
660 FOR K=U TO 0 STEP -1
670 PRINT "M(";I;",";J;",";K;")=COEFF.DE D^";K;:INPUT "=";M(I,J,K)
680 NEXT K
690 CLS
700 NEXT J
710 NEXT I
720 '
730 '
740 '            INVERSION DE LA MATRICE Lv
750 LOCATE 2,10 :PRINT " MATRICE INVERSE DE Lv "
760 FOR I=1 TO R
770 FOR J=1 TO R
780 Y(I,J)=L(I,J,V)
790 NEXT J:NEXT I
800 E=R-1
810 FOR G=1 TO R
820 Z(G)=0
830 T=Y(G,1)
840 IF T()0 THEN 970
850 FOR I=G+1 TO R
860 Z(G)=I
870 IF Y(I,1)=0 THEN 950
880 FOR J=1 TO R
890 S=Y(G,J)
900 Y(G,J)=Y(I,J)
```

```
910 Y(I,J)=S
920 NEXT J
930 GOTO 830
940 NEXT I
950 PRINT "pas d' inverse"  :REM ==========================================
960 END
970 FOR J=1 TO E
980 Y(G,J)=Y(G,J+1)/T
990 NEXT J
1000 Y(G,R)=1/T
1010 FOR I=1 TO R
1020 IF I=G THEN 1080
1030 S=Y(I,1)
1040 FOR J=1 TO E
1050 Y(I,J)=Y(I,J+1)-S*Y(G,J)
1060 NEXT J
1070 Y(I,R)=-S*Y(G,R)
1080 NEXT I
1090 NEXT G
1100 FOR I=1 TO R
1110 FOR J=1 TO R
1120 LOCATE (I+3),J*4:PRINT Y(I,J):NEXT J:NEXT I
1125 LOCATE 22,2:PRINT"APPUYEZ SUR LA BARRE POUR OBTENIR LA MATRICE D'EVOLUTION"
1130 IF INKEY$()" " THEN 1130
1140 '
1150 '               CALCUL DES MATRICES Li
1160 '
1170 FOR K=V TO 0 STEP -1
1180 FOR I=1 TO R
1190 FOR J=1 TO R
1200 C(I,J)=0:FOR K1=1 TO R
1210 C(I,J)=Y(I,K1)*L(K1,J,K)+C(I,J)
1220 NEXT K1
1230 NEXT J
1240 NEXT I
1250 FOR I=1 TO R
1260 FOR J=1 TO R
1270 L(I,J,K)=-C(I,J)
1280 NEXT J:NEXT I
1290 NEXT K
1300 '
1310 '              CALCUL DES MARICES Mi
1320 '
1330 FOR K=U TO 0 STEP -1
1340 FOR I=1 TO R
1350 FOR J=1 TO M
```

```
1360 C(I,J)=0:FOR K1=1 TO M
1370 C(I,J)=Y(I,K1)*M(K1,J,K)+C(I,J)
1380 NEXT K1
1390 NEXT J
1400 NEXT I
1410 FOR I=1 TO R
1420 FOR J=1 TO M
1430 M(I,J,K)=C(I,J)
1440 NEXT J:NEXT I:NEXT K
1450 '
1460 '          DETERMINATION DE LA MATRICE D'ETAT A(I,J)
1470 '
1480 I1=1:K=V-1
1490 I=1
1500 J=1:J1=1
1510 A(I1,J1)=L(I,J,K)
1520 IF J<R THEN 1730
1530 IF I<R THEN 1740
1540 K=K-1
1550 IF I1<R*V THEN I1=I1+1:GOTO 1490
1560 IF V<=1 THEN 1640
1570 I1=1
1580 J1=R+1
1590 IF J1=I1+R THEN A(I1,J1)=1:GOTO 1610
1600 A(I1,J1)=0
1610 IF J1<R*V THEN J1=J1+1 :GOTO 1590
1620 IF I1<R*V THEN I1=I1+1 :GOTO 1580
1630 '
1640 '          IMPRESSION DE LA MATRICE D'EVOLUTION A(I1,J1)
1650 '
1660 CLS
1670 FOR I1=1 TO R*V
1680 FOR J1=1 TO R*V
1690 LOCATE 2,10:PRINT "MATRICE D'EVOLUTION A(I,J)"
1700 LOCATE (I1+3),J1*4:PRINT A(I1,J1):NEXT J1:NEXT I1
1705 LOCATE 22,2:PRINT"APPUYEZ SUR LA BARRE POUR OBTENIR LA MATRICE DE COMMANDE"
1710 IF INKEY$<>" " THEN 1710
1720 GOTO 1760
1730 J=J+1:J1=J1+1:GOTO 1510
1740 I=I+1:I1=I1+1:GOTO 1500
1750 '
1760 '          CALCUL DE LA MATRICE DE COMMANDE (OU D'ENTREE) B(I,J)
1770 '
1780 DIM B(R*V,M)
1790 I1=R*V:K=0
1800 I=R
```

```
1810 J=M:J1=M
1820 B(I1,J1)=M(I,J,K)
1830 IF J>1 THEN 1880
1840 IF I>1 THEN 1890
1850 IF K<U THEN 1900
1860 IF I1>1 THEN 1910
1870 GOTO 1940
1880 J=J-1:J1=J1-1:GOTO 1820
1890 I=I-1:I1=I1-1:GOTO 1810
1900 K=K+1:I1=I1-1:GOTO 1800
1910 FOR I=1 TO I1-1
1920 FOR J=1 TO M
1930 B(I,J)=0:NEXT J:NEXT I
1940 '          AFFICHAGE DE LA MATRICE DE COMMANDE (OU D'ENTREE) B(I,J)
1950 CLS
1960 FOR I=1 TO R*V
1970 FOR J=1 TO M
1980 LOCATE 2,10:PRINT "MATRICE  DE COMMANDE (OU D'ENTREE) B(I,J) "
1990 LOCATE (I+3),J*4:PRINT B(I,J):NEXT J:NEXT I
1995 LOCATE 22,2:PRINT "APPUYER SUR LA BARRE POUR OBTENIR LA MATRICE D'OBSERVATI
ON"
2000 IF INKEY$<>" " THEN 2000
2010 '
2020 '            CALCUL DE LA MATRICE D'OBSERVATION (OU DE SORTIE) S(I,J)
2030 '
2040 J1=1:I=1
2050 J=1
2060 IF J=J1 THEN 2080
2070 S(I,J)=0:GOTO 2090
2080 S(I,J)=1
2090 IF J<R*V THEN J=J+1:GOTO 2060
2100 IF I<R THEN 2120
2110 GOTO 2130
2120 I=I+1:J1=J1+1:GOTO 2050
2130 '
2140 '     AFFICHAGE DE LA MATRICE D'OBSERVATION (OU DE SORTIE) S(I,J)
2150 '
2160 CLS
2170 FOR I=1 TO R
2180 FOR J=1 TO R*V
2190 LOCATE 2,10:PRINT "MATRICE D'OBSERVATION (OU DE SORTIE) S(I,J)"
2200 LOCATE (I+3),J*4:PRINT S(I,J):NEXT J:NEXT I:LOCATE 22,2:PRINT "FIN"
```

- BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDRE FOSSARD - commande des systemes multidimensionels.

[2] F.M. BROWN - A new way to construct state equation. Dept E.E air force inst. Tech .Wright PAHERSON, OHIO.

[3] E.POLAK - An algorithm for reducing a linear time-invariant differentiel system to state form. TRANS. IEEE. AC, Vol.11, pp.577-570.

[4] H.BESTOUGEFF, C.GUILPIN, M.JACQUES, MASSON.
TOME I - La technique informatique, principes generaux et programmation.
TOME II - Algorithmes numeriques et non numeriques.

[5] R.BOUDAREL, J.DELMAS, P.GHIGET.
TOME 1 - Commande optimale des processus.

[6] P.NASLIN - theorie de la commande et variables d'etat.

[7] P.NASLIN - Calcul symbolique et diagrammes de fluence.

[8] FOULARD CLAUDE - Commande et regulation par calculateur numerique, de la theorie aux applications.

[9] Y.FAES - Commmande des processus industriels par calculateur.

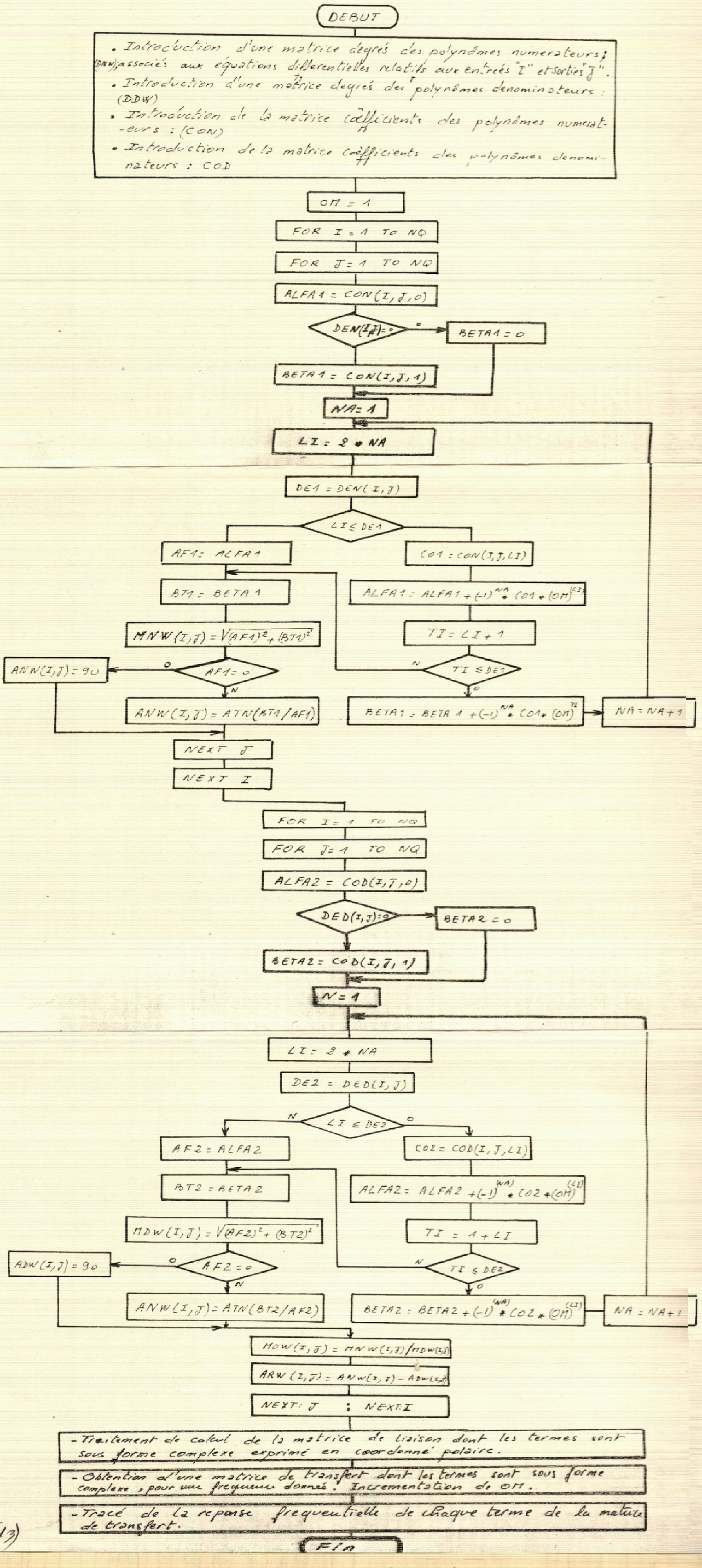
[10] ch.V.FEVRIER - Simulation des systemes de commande

[11] Technique de l'ingenieur : control

[12] J.J.DISTEFANO - Systemes asservis (Tome I et II).

[13] J.ch.GILLE, P.DECAULNE, M.PELEGRIN.
- Theorie et calcul des asservissements lineaires.

Organigramme soulignant l'introduction des termes de la matrice de liaison (M.L) : sous forme complexe - coordonnées polaires.



Organigramme des étapes à suivre pour l'obtention de la "M.T"

Début

Introduction des termes de la "M.L"

Calcul du denominateur de la "M.T" : SD

Initialisation d'un vecteur $T=(T(1),T(2)\ldots T(K))$ à "0". Vecteur variable selon le code "GRAY"

FOR $M = 1$ TO 2^{NQ}

Remplissage du $M^{\text{ème}}$ vecteur T (selon le code "GRAY")

Lecture du $M^{\text{ème}}$ vecteur T :
$T(K)=1 \longrightarrow$ noeud "K" à enlever
$T(K)=0 \longrightarrow$ noeud "K" à lire

Etablissement de la matrice $(S_{(M)})$ de dimension "q", constituée par les noeuds lus. 1

Calcul du déterminant de $(S_{(M)})$

$S_{(M')} = (-1)^q . Det(S_{(M)})$

Next M

$SD = 1 + \sum_{M'=1}^{2^{NQ}} S_{(M')}$

Calcul du numerateur de la "M.T" : SN

Soit à calculer la fonction de transfert : $T(I1, J1)$

Initialisation d'un vecteur $T=(T(1),T(2),\ldots T(K))$

FOR $M=1$ TO 2^{NQ}

Remplissage du $M^{\text{ème}}$ vecteur T, selon le code "GRAY", tout en forçant les noeuds correspondant à $K1=I1$ et $K1=J1$ à "0". 2

Lecture du $M^{\text{ème}}$ vecteur T

- Supression de la ligne "J1" et la colonne "I1" de la matrice de Liaison "W" : Obtention de (S_M).
- Localisation du pivot $W(I1,J1)$ dans la matrice (S_M) de dimension q.
- Definition de la quantite $p = r + c - q + 1$
  où : r : ligne dans laquelle le pivot est localisé dans (S_M)
  c : Colonne dans laquelle le pivot est localisé dans (S_M)

Calcul du determinant de (S_M)

$S_{(M')} = (-1)^p . Det(S_{(M)})$

Next M

$SN = \sum_{M'=1}^{2^{NQ}} (S_{(M')})$ 3

Calcul de $T(I1, J1) = SN/SD$

Fin