

23/87

وزارة التعليم و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : electronique



**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**S U J E T**

**LE FILTRAGE NUMERIQUE**

Application : Traitement automatique de  
la parole

Proposé par :

GUERTI.M

Etudié par :

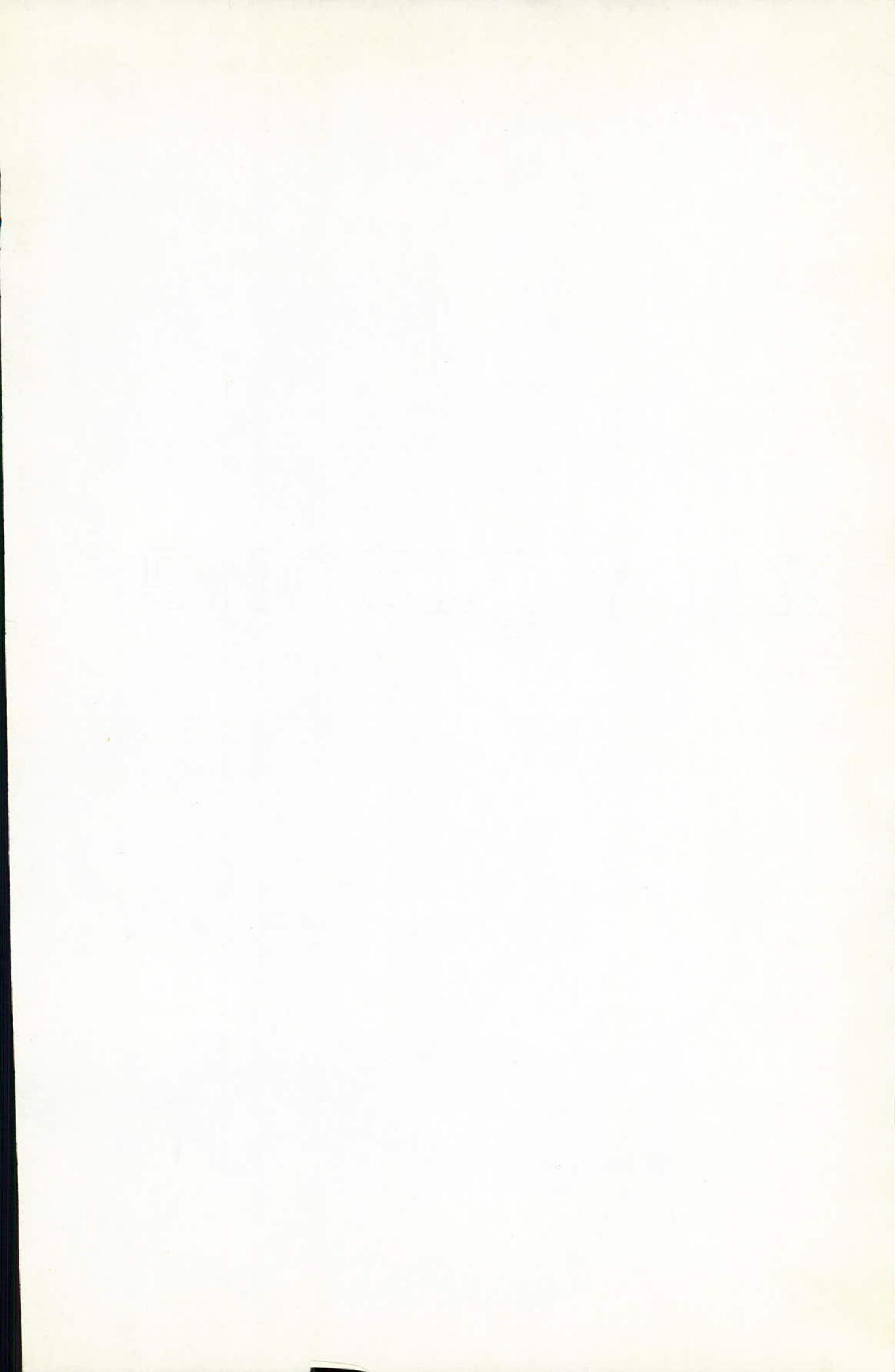
ADDOU.D  
BENGHANEM.M

Dirigé par :

GUERTI.M

PROMOTION :

JUIN 87



## REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à remercier Melle GUE... M. pour son aide et ses conseils tout au long de l'élaboration de cet humble travail.

Nous sommes particulièrement reconnaissants à Mr. MENED. M. Ingénieur en Informatique à l'USTHB pour l'aide précieuse qu'il nous apportée en programmation.

Nos remerciements vont également à Mr. SAYOUD. L. Ingénieur en électronique à l'ENSI pour son aide bibliographique.

Que tous les professeurs, qui ont contribué à notre formation trouvent ici un témoignage de nos remerciements le plus sincère.

Nous tenons à remercier tous ceux qui de près ou de loin nous ont aidé pour la réalisation de cet ouvrage.

DEDICACES

Je dédie cette thèse de fin d'étude

- a mon père qui m'a soutenu durant toute ma carrière scolaire et universitaire.
- a ma mère
- a mes frères et soeurs
- a toute ma famille
- a tous mes professeurs et assistants
- a tous ceux que j'estime.

ADDOU DJAMEL

## DEDICACES

Je dédie cette thèse de fin d'études :

- à la mémoire de mon père qui a toujours admiré le savoir, tant souhaité à ce que nous soyons cultivés, et tant espéré voir le fruit des efforts qu'il a déployés pour nous...
- a ma très chère mère qui a tout sacrifié pour ses enfants.
- a mes frères, soeurs, belle-soeur et neveu
- a toute la famille
- a tous les professeurs qui m'ont été d'un très grande secours durant mes études, en contribuant pleinement à ma formation.
- a tous mes amis

MOHAMED BENGHANEM



## INTRODUCTION

Le filtrage est l'une des principales fonctions de l'électronique et l'automatique. Il est d'abord apparu en optique où dès le début de la photographie, les filtres ont été utilisés. Plus tard, dans l'imprimerie en couleur, on en a fait un large usage et tout récemment l'observation de la terre par satellite s'est faite à travers des filtres de bande dans tous les domaines des radiations électromagnétiques : hyperfréquences, infrarouges, visibles, ultraviolets, rayons X.

La réalisation de la fonction " filtrage " dans le domaine analogique est assez familière aux électroniciens : Elle utilise des éléments passifs et actifs. Avec les progrès réalisés dans le domaine des techniques d'intégration à grande échelle vint la pénétration du " NUMERIQUE " dans les sciences de l'ingénieur.

Dans le domaine numérique, le signal à traiter n'est plus continu, mais se présente sous forme échantillonnée, codée.

La filtrage numérique consiste alors à filtrer le signal sans avoir à le décoder. Cette opération peut s'effectuer à l'aide d'un ordinateur à usage universel quand les échantillons peuvent être mémorisés, alors le pas et la finesse de la numérisation sont optimisés.

C'est grâce au microprocesseur que le filtrage numérique est aujourd'hui pratique avec aisance par tous ceux qui doivent améliorer les qualités des données numériques que ce soit dans les télécommunications ( Parole, image et son ) dans les servomécanismes ( Robotique, processus industriels ) ou la mesure ( géophysique et instruments médicaux ).

Cette amélioration s'obtient en débarrassant le signal numérique des valeurs parasites qui trouvent leur origine dans la perturbation des canaux d'acquisition et de transmission des données.

C'est donc à cette fonction " FILTRAGE " dans le domaine numérique qu'on s'est intéressé dans le cadre de ce projet de fin d'études d'Ingénieur.

Le travail que nous présentons est l'étude des filtres numériques utilisés dans un synthétiseur à base de prédiction linéaire pour l'analyse - synthèse de la parole. Cette étude comporte six chapitres :

- Le premier regroupe certaines notions fondamentales nécessaires pour certains concepts relatifs aux techniques numériques.

- Le second présente en dégagant certaines idées fondamentales, le filtrage analogique dans le but de faciliter les liaisons entre les domaines numérique et analogique.

- Le troisième aborde l'étude des filtres numériques ( récursifs et non récursifs ).

- Le quatrième expose les différentes méthodes permettant la synthèse des filtres récursifs et non récursifs.

- Le cinquième est consacré aux différentes structures des filtres numériques.

- Le sixième est une application des filtres numériques portant sur le traitement de la parole.

Enfin, la partie programmation de notre travail consistera en la simulation des filtres récursifs.

CHAPITRE I

NOTIONS PRELIMINAIRES

- 1 - 1 - SIGNAUX ET SYSTEMES
- 1 - 2 - TRANSFORMEE DE FOURIER
- 1 - 3 - TRANSFORMEE EN Z
- 1 - 4 - ECHANTILLONNAGE ET QUANTIFICATION.

Dans ce chapitre, on énoncera les définitions et les propriétés élémentaires concernant les signaux numériques. Une étude des principales propriétés des signaux et des systèmes discrets permettra d'aborder les filtres en tant que systèmes opérant sur des signaux.

### 1 - 1 - Signaux et systèmes

1 - 1 - 1. Les signaux délivrés par les capteurs ou traités dans les circuits sont des tensions ou des courants. Les signaux sont caractérisés par :

- Leur amplitude à laquelle est rattachée la puissance
- La façon dont ils évoluent dans le temps.

Les tensions "V (t) " ou les courants " I(t) " sont évidemment réelles, continus et dérivables en tout point. Pour simplifier les calculs, on fait intervenir des fonctions discontinues, échelon, impulsion de Dirac, mais ce ne sont que des images approchées de la réalité.

Dans le cas général on définit la valeur moyenne :

$$\bar{V} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T V(t) dt \quad (1)$$

et la puissance moyenne :

$$P = \bar{V}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) dt \quad (2)$$

Parmi tous les signaux possibles, on distingue les :

a - Signaux périodiques :

Ce sont des signaux liés aux phénomènes répétitifs. On définit la période "T" telle que :

$f(t + kT) = f(t)$  où k est un nombre entier. La fonction f(t) peut être représentée par une somme de fonctions sinusoidales de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Dans ce cas, on peut développer cette fonction périodique en série de fourier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn\omega t} \quad (3)$$

$$\text{avec } C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jn\omega t} \cdot dt \quad (4)$$

Ainsi, une fonction périodique est entièrement caractérisée par sa période et la suite des coefficients complexes "Cn". L'ensemble de ces coefficients constitue " le spectre du signal ".

b - Signaux non périodiques

Un signal non périodique est considéré comme la limite vers laquelle tend un signal périodique, lorsque sa période tend vers l'infini.

Utilisons le développement en série de fourier d'une fonction  $f_1(t)$  périodique de période "T" égale à la fonction apériodique f(t) sur l'intervalle  $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$ .

D'après les formules (3) et (4), on obtient :

$$T C_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

On pose  $TCh = F(w)$

Quand "T" tend vers l'infini, alors :

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

Cette intégrale, si elle existe, est par définition la transformée de fourier de  $f(t)$  ( cf. para. 22 ).

### c - Signaux analogiques et numériques

Le signal électrique est souvent proportionnel à la grandeur de départ qui est relié à cette dernière par une formule mathématique, connue. Si le signal traverse un système parfaitement linéaire, la relation mathématique est conservée. Après traitement, il est difficile de conserver une précision supérieure à 1%.

Pour cette raison, on a imaginé de ne pas utiliser des signaux continus dont l'une des caractéristiques ( Amplitude, fréquence phase ) est porteuse de l'information, mais de transmettre un nombre utilisant les grandeurs utiles dans un système donné.

Pour ce type de signaux appelés " NUMERIQUES ", la linéarité est peu importante. Bien que les composants électroniques de base soient les mêmes, et que les signaux soient encore des courants et des tensions fonctions continus du temps, les méthodes d'analyse sont très différentes de celles rencontrées dans les circuits dits " ANALOGIQUES ".

#### 1.2.2 - Les systèmes :

A tout système constitué d'un ensemble plus ou moins complexe de composants, est appliqué un ou plusieurs signaux d'excitation ( Signaux d'entrées ) et dont on recueille la ou les réponses ( signaux de sortie ).

Le système peut-être décrit par un opérateur "H" tel que :

$$s(t) = H.e(t) \quad (6)$$

Pour calculer la réponse d'un signal d'entrée quelconque, on décomposera donc l'opérateur "H" en exponentielles :

- Soit du type  $e^{j\omega t}$  ( transformée de fourier )

- Soit du type  $e^{pt}$  ( transformée de laplace )

Ainsi, la relation fondamentale entre les transformées de laplace  $E(p)$  du signal d'entrée et  $S(p)$  du signal de sortie est la suivante :

$$S(p) = H(p).E(p) \quad (7)$$

où :  $H(p)$  est la fonction de transfert du système

Cas particulier :

Supposons que le signal d'entrée  $e(t)$  soit une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  où sa transformée de Fourier est égale à l'unité :

$$\delta(\omega) = 1$$

$$\text{Alors } S(\omega) = H(\omega).$$

La réponse du système dans ce cas est appelée : réponse impulsionnelle notée " $h(t)$ ". Cette dernière n'est autre que la transformée de Fourier de sa fonction de transfert.

a - Convolution

Pour les systèmes linéaires continus et invariants, on sait que la sortie " $s(t)$ " s'exprime en fonction de l'entrée " $e(t)$ " et de la réponse impulsionnelle " $h(t)$ " du système, soit par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e(t - \tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) \cdot e(\tau) \cdot d\tau$$

d'où l'écriture suivante :

$$s(t) = h(t) * e(t) \quad (8)$$

\*:Symbole du produit de convolution ( C'est une loi de composition qui conduit à un certain retard ).

b - Stabilité :

On dit qu'un système est stable, s'il reprend son état d'équilibre antérieur après une excitation temporaire appliquée à l'entrée.

Ainsi, la stabilité d'un système linéaire est définie si sa fonction de transfert ne possède pas de pôles à partie réelle positive; les zéros de la fonction de transfert sont les racines réelles ou complexes du numérateur, tandis que les pôles sont celles du dénominateur.

Ces pôles et zéros sont mis en évidence, en écrivant "H" sous la forme :

$$H(p) = K \prod_i \frac{p - z_i}{p - p_i} \quad (9)$$

c - Structure :

D'une façon générale, les systèmes sont classés en systèmes ouverts et systèmes bouclés. Pour les premiers le signal de sortie n'interagit pas avec le signal d'entrée.

Pour les seconds, une fraction du signal de sortie est réinjectée à l'entrée ainsi le système est bouclé ( fig 1.1 )

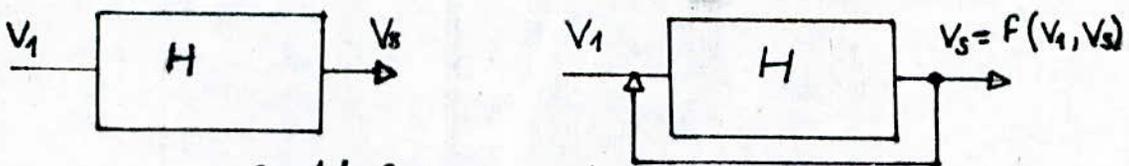


Fig 1.1. Structure du système (a) ouvert  
(b) bouclé

1 - 2 - Transformée de Fourier :

La transformée de Fourier est l'outil mathématique qui permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel continu.

Le module de la transformée de Fourier d'un signal donne son spectre continu.

1 - 2 - 1. Transformée de Fourier :

a - Définition :

La transformée de Fourier  $F(\omega)$  d'un signal représenté par  $f(t)$  est donnée par la relation suivante :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (10)$$

La transformée de Fourier  $f(t)$  existe, si  $f(\omega)$  est finie, une condition suffisante d'existence de  $f(\omega)$  est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot dt < +\infty$$

Si l'inverse de la transformée de fourier existe, elle s'écrit de la manière suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (11)$$

Une propriété fondamentale de la transformée de fourier est que la convolution dans le domaine temporel devient produit dans le domaine fréquentiel.

$$\text{Sachant que : } s(t) = h(t) * e(t) \quad (12)$$

La formule (12) donne dans le domaine fréquentiel.

$$S(\omega) = H(\omega) \cdot E(\omega).$$

où !  $S(\omega)$ ,  $E(\omega)$  et  $H(\omega)$  sont les transformées de fourier respectivement de  $s(t)$ ,  $e(t)$  et  $h(t)$ .

b - Théorème de base :

b - 1 - Considérons la transformée de fourier d'une fonction de la variable réelle "t".

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= R(\omega) + j X(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

On appelle :

$A(\omega)$  : Spectre de fourier

$A_2(\omega)$  : " d'énergie

$\varphi(\omega)$  : La phase.

b - 2 - Fonction du temps réelle :

Pour une fonction réelle  $f(t)$ , on a :

$$R(\omega) = R(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos \omega t \cdot dt.$$

$$X(\omega) = -X(-\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin \omega t \cdot dt.$$

$$A(-\omega) = A(\omega)$$

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega).$$

Inversement si :  $F(-\omega) = \bar{F}(\omega)$ ; alors  $f(t)$  est réelle

(  $\bar{F}(\omega)$  représente la conjuguée de  $f(\omega)$  ).

### 1.2.2 - Transformée de Fourier discrète ( T.F.D )

La transformée de Fourier discrète permet de calculer la transformée de Fourier continue sur calculateurs numériques.

a - Définition :

On appelle TFD d'une séquence  $g(k)$  de  $n$  valeurs discrètes, l'ensemble des "N" valeurs données par la séquence  $G(n)$  suivante :

$$G(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (12)$$

Pour  $0 \leq n \leq N-1$ .

Si l'inverse de la TFD existe, elle prend la forme suivante :

$$g(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G(n) \cdot e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad (13)$$

Pour  $0 \leq k \leq N-1$

b - Représentation matricielle :

Posons :  $W = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$

Les affixes des nombres  $W^n$  appelés coefficients de la " TFD " se trouvent sur le cercle unité ( Fig 1.2 ). Ce sont les racines de l'équation  $Z^n - 1 = 0$

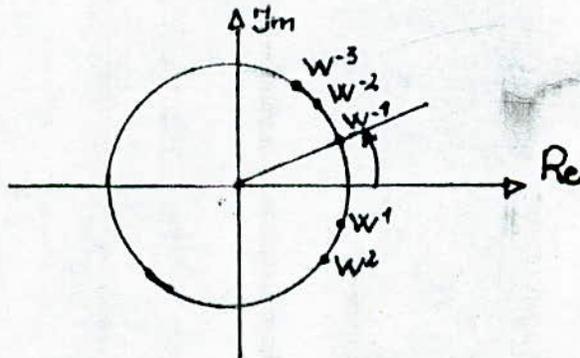


fig 1.2 - Affixes des coefficients de la T.F.D

En substituant  $W$  dans l'équation ( 12 ), on obtient

$$G(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \cdot W^{kn}$$

$$G(n) = g(0) + g(1) W^n + g(2) \cdot W^{2n} + \dots + g(N-1) \cdot W^{(N-1)n}$$

Pour  $n = 0$        $G(0) = g(0) + g(1) + g(2) + \dots$

Pour  $n = 1$        $G(1) = g(0) + g(1)w^1 + g(2)w^2 + \dots$

D'où la représentation matricielle de la " TFD " :

$$\begin{pmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ G(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_1 & w_2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w_2 & w_4 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \dots & \dots & w^{(N-1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g(N-1) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Pour la transformée inverse, on obtient :

$$\begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1} & \dots & \dots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1)} & \dots & \dots & w^{-(N-1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(0) \\ G(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ G(N-1) \end{pmatrix} \quad (15)$$

L'intérêt de la " TFD " réside dans l'existence de l'algorithme de calcul rapide et précis des transformées.

### 1.3 - Transformée en Z :

La transformée en "Z" est un outil mathématique qui joue dans le domaine numérique le même rôle fondamental que celui de la transformée de Laplace, dans le domaine analogique.

1.3.1. Définition :

Si nous considérons un signal discret  $x(nT)$ , sa transformée en Z s'écrit comme suit :

$$Z \left[ x(nT) \right] = X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) Z^{-n} \quad (16)$$

où Z est un nombre complexe

Exemple :

$$x(t) = \begin{cases} e^{at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(Z) = 1 + e^{at} Z^{-1} + \dots + e^{nat} Z^{-n} + \dots$$

qui peut s'écrire :

$$X(t) = \frac{1}{1 - e^{at} Z^{-1}} \text{ pour } |Z| > e^{at}$$

### 1 - 4 - Échantillonnage et quantification.

Le passage d'un signal analogique à une succession de nombres qui lui est équivalente pose cependant quelques problèmes le signal cesse d'être continu, puisqu'il n'est plus connu qu'à certains instants et de plus sa valeur est quantifiée. Il nous faut donc d'abord examiner dans quelles conditions les opérations d'échantillonnage puis de quantification ne modifient pas la quantité d'information contenue dans le signal initial.

#### 1 - 4 - 1. L'échantillonnage

L'échantillonnage d'une fonction donnée consiste à remplacer une fonction  $f(t)$  par la suite, qui a pour valeur  $f(nT_e)$  où " $T_e$ " est la période de l'échantillonnage.

Dans ce cas, l'échantillonneur idéal avec la période d'échantillonnage " $T_e$ " constitue un système analogique dont la réponse  $y(t)$  à un signal  $x(t)$  est donnée par :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \delta(t - nT_e) \quad (17)$$

avec :  $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$  la pulsation d'échantillonnage

L'échantillonnage peut-être considéré comme la modulation d'un train périodique d'impulsions de Dirac dont le résultat sera un signal impulsionnel ( fig 1.3 ).

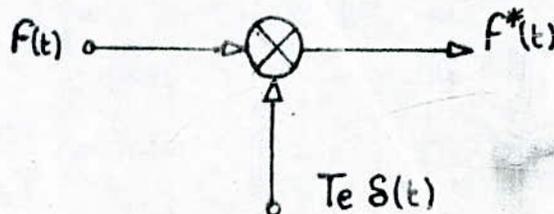


fig 1.3. Modulation par un train d'impulsions de DIRAC.

$$f^*(t) = f(t) \text{Te} \cdot \delta(t)$$

d'où :

$$f^*(t) = \text{Te} \sum_n f(n \text{Te}) \cdot \delta(t - n\text{Te})$$

b - Théorème de Shannon :

Soit  $f(t)$  une fonction du temps, on appelle échantillons de cette fonction ses valeurs instantanées à des instants  $(t_0, t_1, \dots)$  régulièrement répartis ou non dans le temps. On peut considérer la succession d'échantillons issus de  $f(t)$  comme une fonction  $f^*(t)$  constituée d'une suite d'impulsions de largeur réelle et dont l'amplitude est égale à  $f(t)$  aux instants correspondants (fig 1.4)

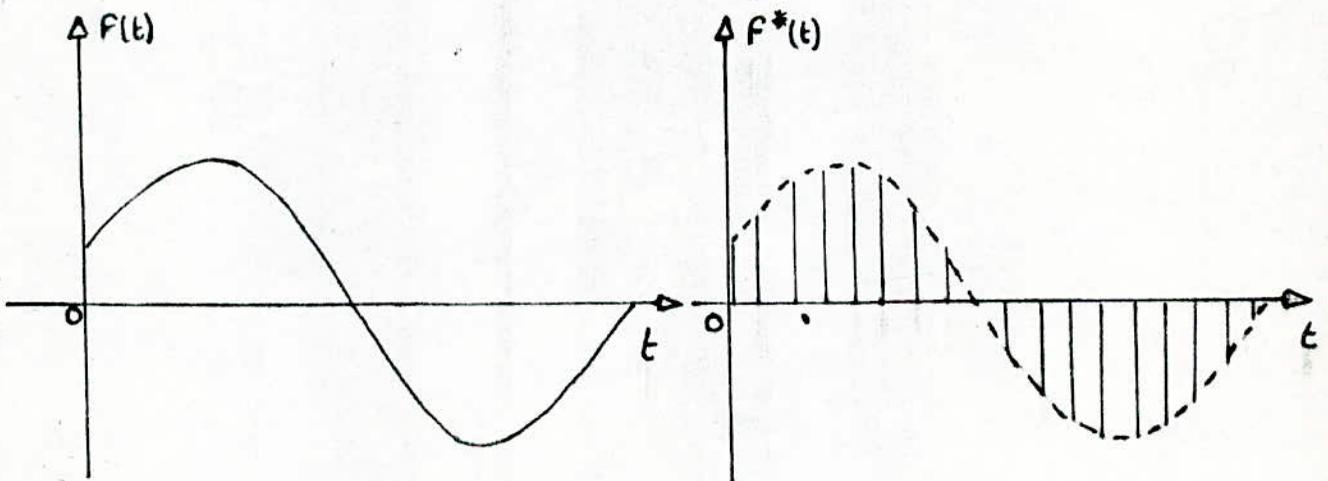


fig 1.4. Echantillonnage d'un signal  $f(t)$ .

Le théorème fondamental dû à Shannon, que l'on appelle aussi théorème d'échantillonnage, montre que dans certaines conditions de remplacement de  $f(t)$  par la succession d'échantillons  $f^*(t)$  ne provoque aucune perte d'informations.

c - Transformée de Fourier du signal échantillonné :

Soit  $F(w)$  la transformée de Fourier de  $f(t)$ , alors  $F^*(w)$  est la transformée de  $f^*(t)$ .

Si la fonction  $f(t)$  est continue et  $t = nT$ , alors

$$f(nT) = f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

où :

$$\delta(t - nT) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = nT \text{ (n entier)} \\ 0 & \text{pour } t \neq nT \end{cases}$$

La fonction  $f^*(t)$  est obtenue par multiplication de  $f(t)$  par un peigne de Dirac. Du fait que la transformée de Fourier d'un produit, étant le produit de convolution des transformées de Fourier, le spectre du signal échantillonné sera

$$F^*(w) = F(w) * \Delta(w) \quad (18)$$

où  $\Delta(w)$  est la transformée de Fourier de  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$

Dans ce cas, on obtient le produit suivant :

$$\begin{aligned} f(t) \cdot \Delta(t) &= f(t) \sum \delta(t - nT) \\ &= \sum f(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

$\Delta t$  étant une fonction périodique, elle est décomposable en série de fourier.

$$\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn\omega t}$$

avec :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_e}$$

et :

$$C_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T_e}$$

car :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = 1$

Le spectre de  $\Delta t$  s'écrit donc :

$$\Delta(\omega) = \sum_n \frac{1}{T_e} \delta(\omega - n\omega_e)$$

L'équation (18) devient :

$$F^*(\omega) = F(\omega) * \frac{1}{T_e} \sum_n \delta(\omega - n\omega_e)$$

d'où :

$$F^*(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum F(\omega - n\omega_e) \quad (19)$$

L'expression (19) montre que le spectre de fréquence  $F^*(\omega)$  de  $f^*(t)$  est périodique ( Période " $T_e$ " ), donc la transformée du signal échantillonné résulte de la superposition de toutes les translatées de multiples entiers de  $\omega_e$  de la transformée du signal original  $f(t)$  ( Fig 1.4 ).

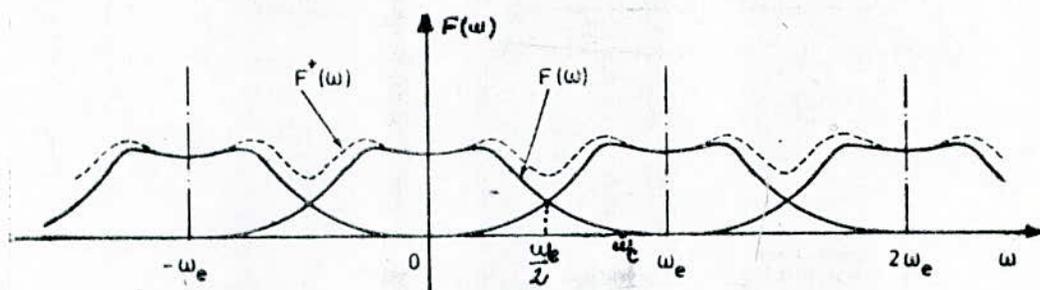


fig 1.5 - Spectre des signaux échantillonnés et original (  $\omega_c > \frac{\omega_e}{2}$  ).

On remarque qu'on a un empiétement des translatées pour  $\omega_c > \frac{\omega_e}{2}$ , ce qui interdit la reconstitution ultérieure du signal original  $f(t)$ .

Si le spectre de  $f(t)$  est à support borné ( bornes limitées ), c'est-à-dire  $F(\omega) = 0$  pour  $|\omega| > \omega_e$  avec un choix de la pulsation d'échantillonnage convenable tel que :  $\omega_e > 2\omega_c$  (  $\omega_e$  suffisamment grande ).

Dans ce cas, il n'y a pas de recouvrement de spectre ( Fig 1.5 ).

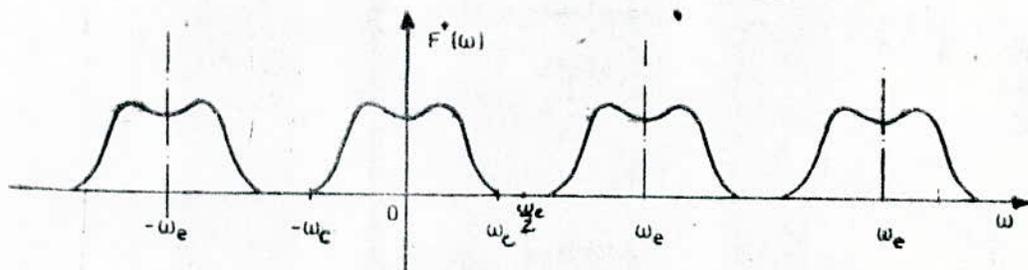


Fig 1.6. Spectre du signal échantillonné ( pour  $\omega_e > 2\omega_c$  )

d - Reconstitution du signal original :

Pour reconstituer un signal original  $f(t)$  à partir des échantillons  $f(nT)$ , il suffit que "  $f_e$  " ( fréquence d'échantillonnage soit supérieure de deux fois à la fréquence "  $f_c$  " du signal continu, afin d'éliminer le recouvrement du spectre  $F^*(w)$ .

Cependant, on fait passer le signal  $f(t)$  continu à travers un filtre passe-bas de fréquence de coupure.

$$f_c \leq \frac{f_e}{2} \quad (\text{fig 1.7}).$$

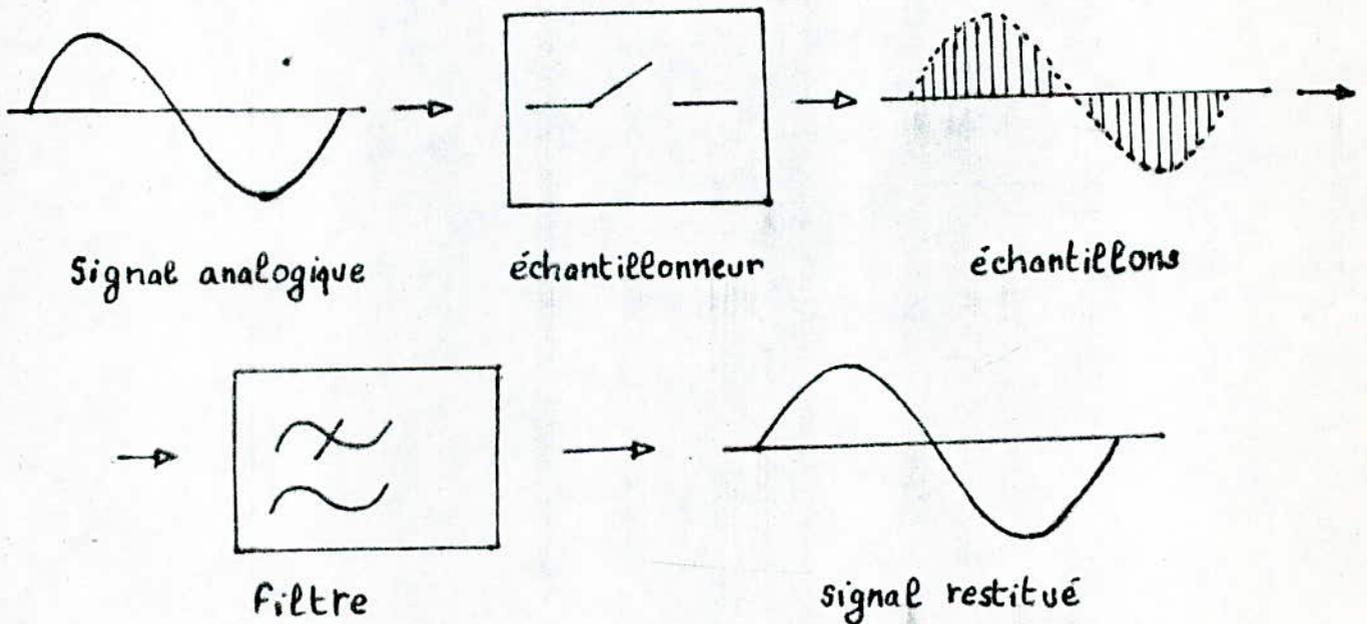


fig 1.7 Reconstitution du signal original.

### 1 - 4 - 2 - Quantification

Pour être traités par les systèmes numériques, les échantillons successifs d'un signal doivent être transformés en signaux numériques par quantification.

#### a - Définitions.

##### 1 - Quantum :

Soit  $E$  la valeur maximum d'un signal à convertir et soit " $n$ " la longueur d'un registre ( en bits ), on définit le quantum :

$$q = \frac{E}{2^n} \quad (20).$$

##### 2 - Pas de quantification :

On appelle pas de quantification " $q$ " l'écart entre deux valeurs quantifiées voisines.

Lorsque ce pas " $q$ " est indépendant de l'amplitude du signal, on dit que la quantification est uniforme.

##### 3 - Erreur due à la quantification :

Pour tout signal à temps discret  $x(n)$ , l'erreur de quantification est une suite  $e(n)$  telle que :

$$e(n) = X(n) - x(n)$$

avec :

$X(n)$  valeur quantifiée.

1. 5. 2 - Principe du traitement numérique.

Le schéma synoptique d'une chaîne de traitement numérique est donné par la figure ( 1.8 )

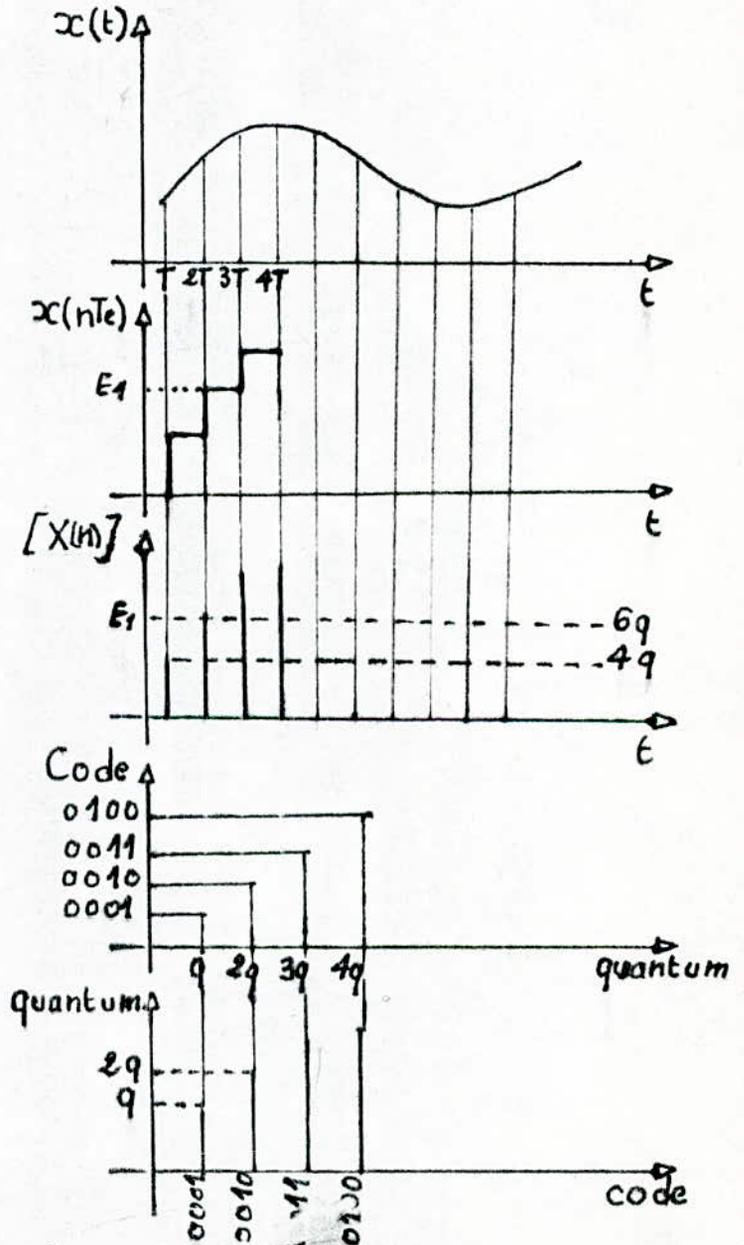
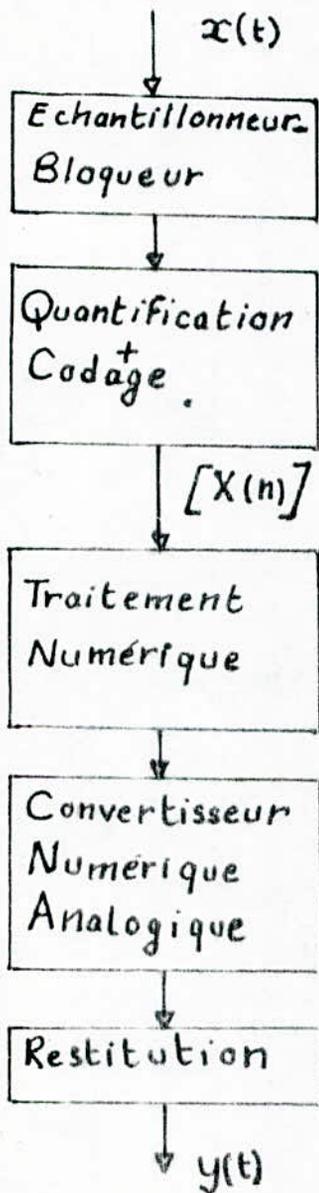


fig. 1.8. Quantification et codage.

Le signal  $x(t)$  est échantillonné par un échantillonneur bloqueur, on obtient ainsi un signal échantillonné  $x(nT_e)$ ; Ce dernier est mémorisé afin de pouvoir le convertir .

On remplace alors l'échantillon, c'est-à-dire l'amplitude exacte ( $E_1$ ) par un nombre entier de quantum ( l'amplitude doit-être la plus proche de l'amplitude réelle ) : C'est une opération de quantification.

Ensuite, on choisit un certain, code, par exemple le code binaire, on remplace ainsi chaque quantum par son équivalent binaire.

Exemple :

4q---- 0100

2q---- 0010

C'est l'opération de codage, de ce fait le C.A.N fait correspondre au signal d'entrée  $x(t)$ , une suite de nombre  $\lfloor x(n) \rfloor$

Exemple :

X (1) = 3 q

X (2) = 6 q

C'est une suite numérique compréhensible par le signal numérique.

## CHAPITRE 2

### Rappel sur les filtres analogiques

- 2 - 1 - Les filtres passifs
- 2 - 2 - Technique d'approximation des filtres analogiques
- 2 - 3 - Critère de comparaison

Dans le domaine analogique, le rôle d'un filtre est de sélectionner parmi toutes les composantes spectrales d'un signal, celles qui remplissent les conditions imposées dont on arrive parfois aux cas où il faut soit éliminer, soit laisser passer les courants où les tensions possédant une certaine gamme de fréquence.

Cependant, pour définir la notion du filtre numérique, on fera d'abord appel, les plus possible aux résultats connus sur les filtres analogiques traditionnels.

## 2 - 1 - Les filtres passifs

Il existe de nombreux types de filtres qui sont conçus pour favoriser les signaux, compris dans une certaine bande de fréquence.

On distingue :

- Les filtres " passe-bas " qui laissent passer les fréquences inférieures à une limite appelée : fréquence de coupure (f.c)

- Les filtres " passe-haut " qui au contraire favorisent les fréquences supérieures à f.c.

- Les filtres " passe-bande " qui ne laissent passer que les signaux dont les fréquences sont comprises, entre deux fréquences de coupure.

- Les filtres " coupe-bande " qui au contraire éliminent les signaux dans cette bande.

Les filtres analogiques sont caractérisés par :

- Leur fonction de transfert : qui est déterminée par le rapport, en fonction de la fréquence, de la tension de sortie  $V_s(j\omega)$  à la tension d'entrée  $V_e(j\omega)$  ( fig 2-1 )

$$H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$$

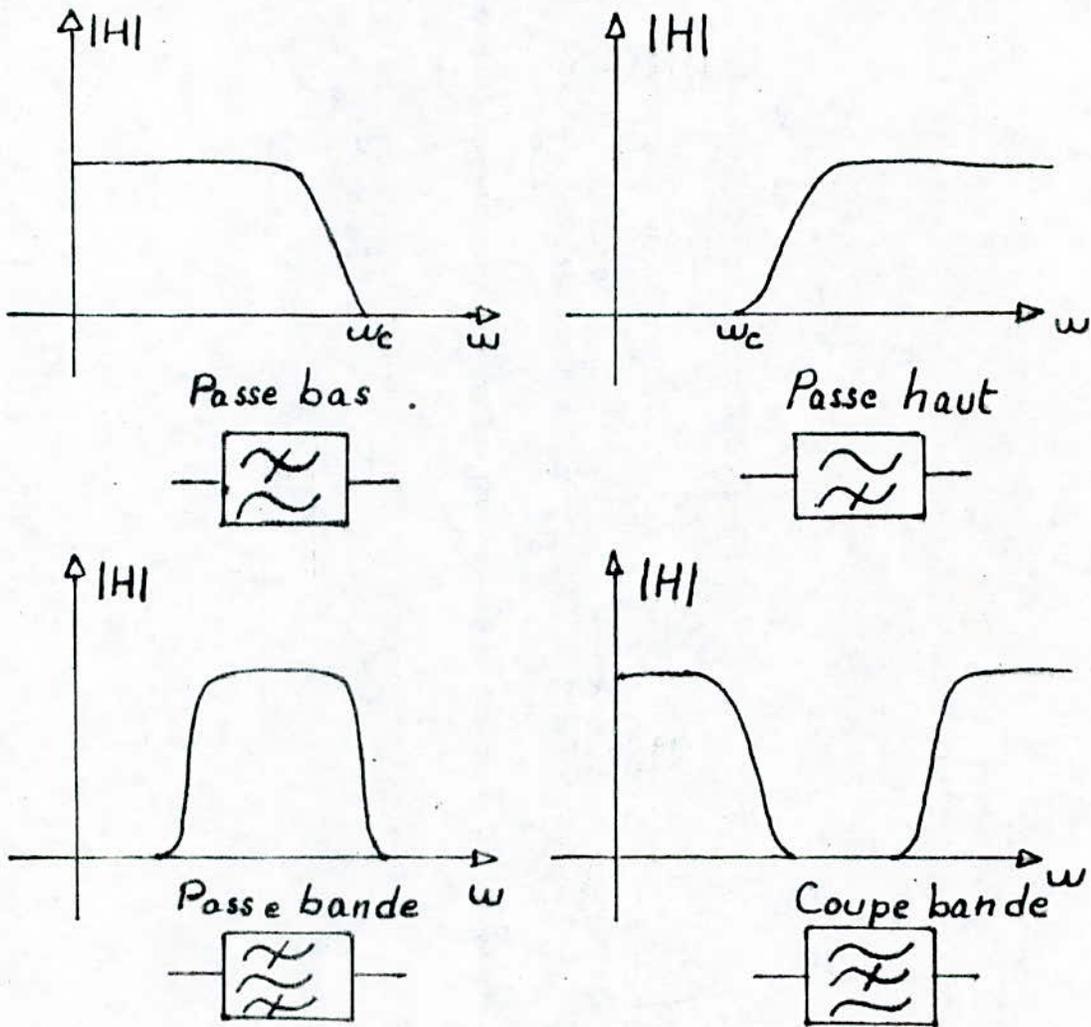


fig 2 - 1 - Les quatres fonctions fondamentales de filtrage.

- Le Gabarit : qui est une représentation graphique des conditions limites amplitude - fréquence,

nécessaire pour réaliser un filtrage donné; il délimite la Bande de fréquence à l'intérieur de laquelle le gain doit être constant; il précise la valeur de ce gain et les limites entre lequel il peut fluctuer, il donne les fréquences au delà des quelles le signal doit subir une atténuation déterminée ( fig 2 - 2 ).

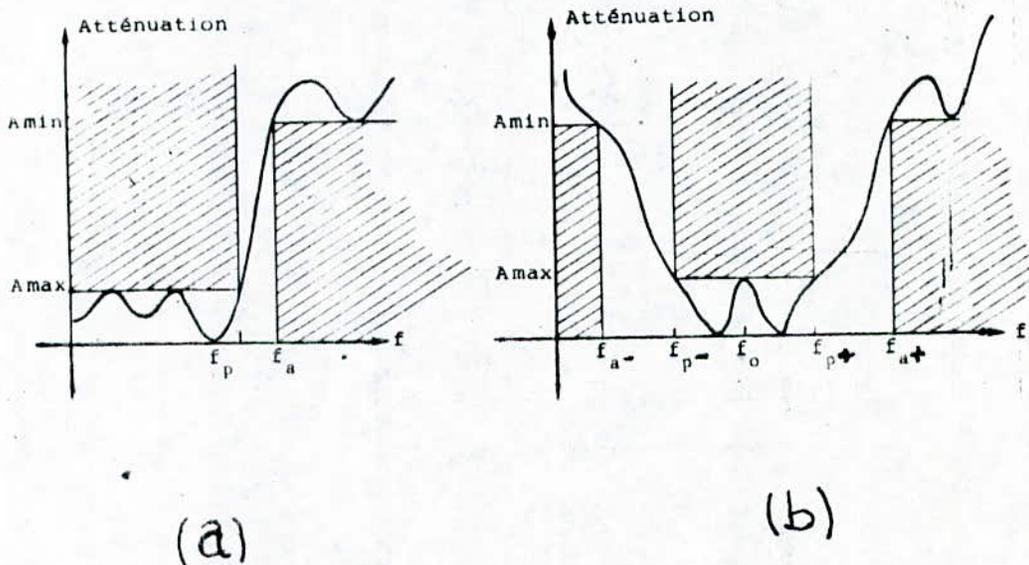


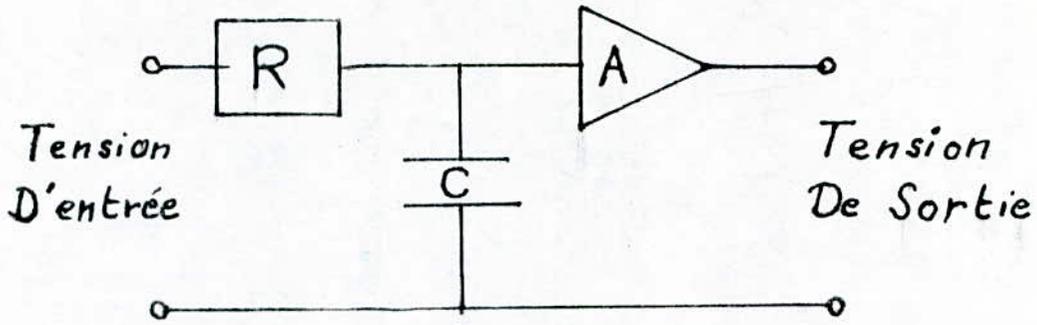
fig 2 - 2 - Gabarit de définition d'un filtre réel  
 passe-bas (a) - passe-bande (b)

Ainsi, le gabarit se définit par 4 paramètres : Amax, Amin,  $f_p$  : fréquence passante,  $f_a$  : fréquence atténuée. Pour les filtres passe-bande, on double les paramètres  $f_p$  et  $f_a$  en ( $f_{p-}$ ,  $f_{p+}$ ) et ( $f_{a-}$  et  $f_{a+}$ ), on définit ainsi la fréquence centrale  $f_o$

$$f_o^2 = f_{p+} \cdot f_{p-}$$

Exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre du type RC :

Si un tel circuit est associé à un amplificateur de gain A, ce filtre est dit " actif ", il possède un seul pôle réel de valeur ( $-\frac{1}{RC}$ ) ( fig 2 - 3 )



FORMULAIRE

Fonction de transfert :	$H(P) = \frac{A}{1 + RCP}$
Pulsation de coupure du filtre :	$\omega_0 = \frac{1}{RC}$
Constante de temps :	$\tau = RC$
Gain (à la fréquence 0, infinie) :	A, 0
Pôle pour :	$1 + RCP = 0$ ou $P = -\frac{1}{RC}$

fig 2 - 3 - Caractéristique d'un filtre " passe-bas" du 1er ordre à résistance capacité

Cependant, il existe des filtres qui constituent une approximation de la réponse désirée à l'aide de fractions de polynômes et peuvent remplir les différentes fonctions fondamentales " passe-bas "; passe-haut, etc...

Parmi ces filtres, on distingue :

- Les filtres de " BUTTERWORTH "
- Les filtres de " TCHEBYCHEV "
- Les filtres de " CAUER "

2 - 2 - Technique d'approximation des filtres analogiques.

On utilise la méthode classique d'approximation des filtres passe-bas analogiques en considérant les filtres de " Butterworth ", de " Tchebychev " et de " Cauer ".

2 - 2 + 1 - Les filtres de Butterworth

la fonction amplitude  $A(\Omega) = |H(j\Omega)|$  d'un filtre de Butterworth d'ordre  $n$ , présente un maximum pour  $\Omega = 0$  ( Fig 2 - 4 )

Le carré de l'amplitude d'un filtre de Butterworth normal est :

$$A^2(\Omega) = \frac{1}{1 + (\Omega^2)^n} \quad (21)$$

avec  $\Omega = \frac{w}{wc}$  Pulsation normalisée

$wc$  : pulsation de coupure d'un filtre passe-bas.

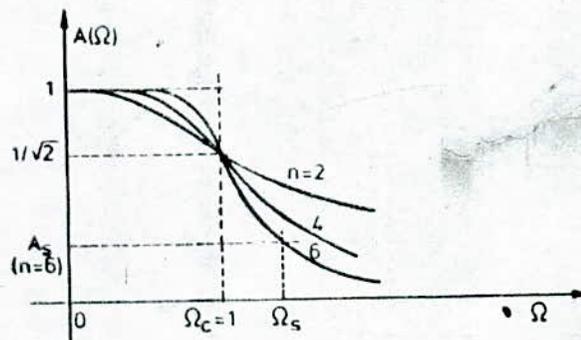


fig 2 - 4 - Courbes d'amplitudes de filtre de " Butterworth ".

On remarque que lorsque le degré "n" augmente, la qualité de l'approximation s'accroît dans la bande passante (fig 2-3) et dans la bande atténuée à la fréquence de coupure, l'amplitude reste égale à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  quelque soit n.

Calcul de la fonction de transfert :

Dans l'équation (21) substituons la valeur de  $p = j\omega$ , on obtient :

$$A^2(\omega) = H(p) H(-p) = \frac{1}{1 + (-p^2)^n} \quad (22)$$

Pour trouver les fonctions de transfert des filtres de Butterworth, il suffit de chercher les racines des dénominateurs de l'équation (22), soit :

$$1 + (-1)^n p^{2n} = 0 \quad (23)$$

La fonction de transfert s'écrira alors sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (p - p_k)}$$

où  $p_k$  sont les racines à parties réelles négatives de l'équation (23).

Dans ce cas, pour assurer la stabilité, les pôles de  $H(p)$  doivent être localisés à gauche de l'axe imaginaire.

La résolution de l'équation ( 23 ) donne la solution suivante :

Pour " n " pair :

$$P_k = e^{j (2k \pm 1) \frac{\pi}{2n}} \quad (24)$$

Pour " n " impair :

$$P_k = e^{jk \frac{\pi}{n}} \quad (25)$$

Une solution générale rassemble l'ensemble des solutions données, ci-dessus :

$$P_k = e^{j \pi \left[ \frac{1}{2} + \frac{(2k-1)}{2n} \right]}$$

avec  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Remarque :

L'ordre d'un filtre de Butterworth est déterminé par l'atténuation minimale désirée dans la bande atténuée.

Pour  $\Omega_s$ , on aura l'ordre "n" donné par :

$$n = \left[ \frac{\text{Log} (A s^{-2} - 1)}{2 \text{Log} \Omega_s} \right] + 1$$

où (x) représente la partie entière de x.

## 2 - 2 - 2 - Les filtres de Tchebychev

La courbe d'amplitude des filtres de Butterworth varie donc d'une façon monotone dans la bande passante et dans la bande atténuée. Par conséquent, si les spécifications portent sur l'erreur maximale tolérée dans la bande passante, celle-ci se présentera toujours à la fréquence de coupure, alors que l'écart entre les spécifications et l'amplitude sera important au début de la bande passante, donc il existe une approximation plus efficace qui conduit en général à une diminution du degré nécessaire et l'erreur sera répartie uniformément dans toute la bande passante ou dans toute la bande atténuée : C'est l'approximation de Tchebychev.

On distingue deux types de filtres de Tchebychev :

- Type I :

La courbe d'amplitude ondule dans la bande passante et elle est monotone dans la bande atténuée.

- Type II :

C'est l'inverse du Type I appelé : " Filtre de Tchebychev inversé ".

Le carré de l'amplitude des filtres de Type I de Tchebychev vaut :

$$A^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad (27)$$

où :  $T_n(\Omega)$  représente le polynôme de Tchebychev d'ordre "n" donné par :

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \Omega) & \text{pour } |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{argch} \Omega) & \text{pour } |\Omega| > 1 \end{cases} \quad (28)$$

et  $\epsilon$  paramètre lié à l'amplitude de l'ondulation.

Les courbes d'amplitudes des filtres de Tchebychev sont données dans la figure 2.5

Limites d'ondulation de  $A(\Omega)$  :

Pour  $0 \leq \Omega \leq 1$  :  $A^2(\Omega)$  ondule entre 1 et  $\frac{1}{1+\epsilon^2}$

Pour  $\Omega > 1$  :  $T_n(\Omega)$  croit, donc  $A^2(\Omega)$  décroît d'une façon monotone.

De même que les type I, le carré de l'amplitude des filtres de Tchebychev inverse est donné par :

$$A^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ \frac{T_n(\Omega_s)}{T_m(\frac{\Omega}{\Omega_s})} \right]^2} \quad (29)$$

où  $\Omega_s$  correspond à la fréquence du début de la bande atténuée.

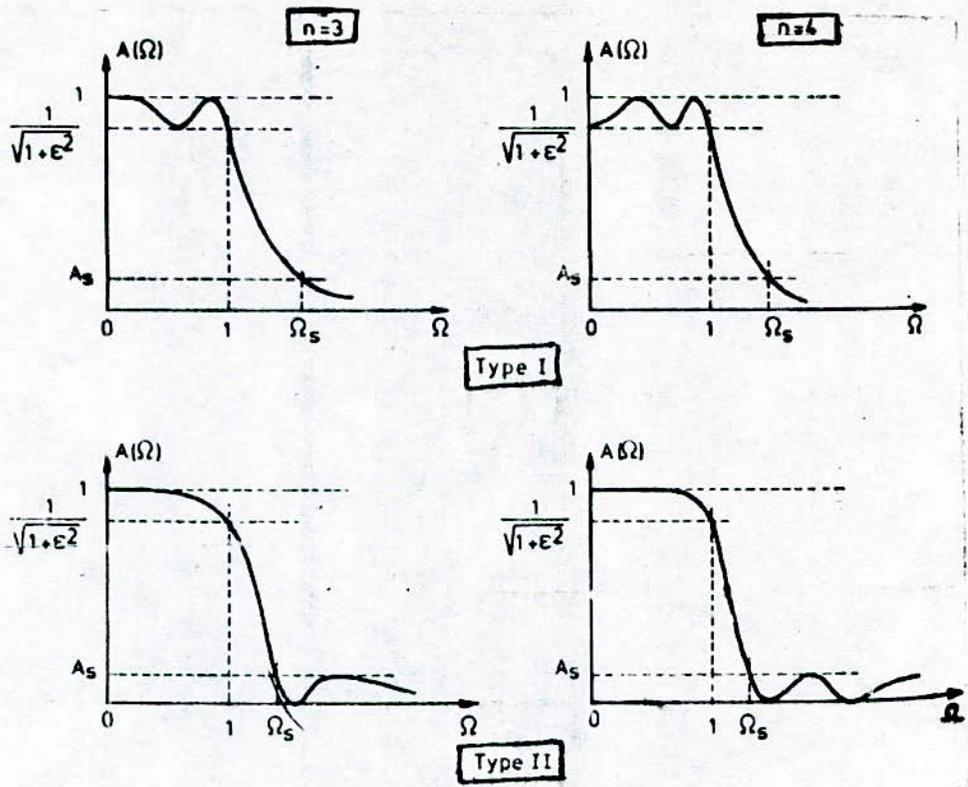


fig 2.5 - Réponse en amplitude des filtres de Tchebychev.

2 - 2 - 3 - Les filtres de CAUER ( ou filtres elliptiques )

La fonction amplitude des filtres de " CAUER " présente des ondulations dans la bande passante et dans la bande atténuée. Ces filtres sont optimaux, ils permettent une transition très courte de la bande passante vers la bande atténuée.

Le carré de l'amplitude des filtres de CAUER prend la forme suivante :

$$A^2 (\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n(\Omega, L)} \quad (30)$$

où "  $R_n(\Omega, L)$  " représente une fonction rationnelle de Tchebychev et "  $L$  " un paramètre lié à l'ondulation de  $R_n$  (fig 2.6 )

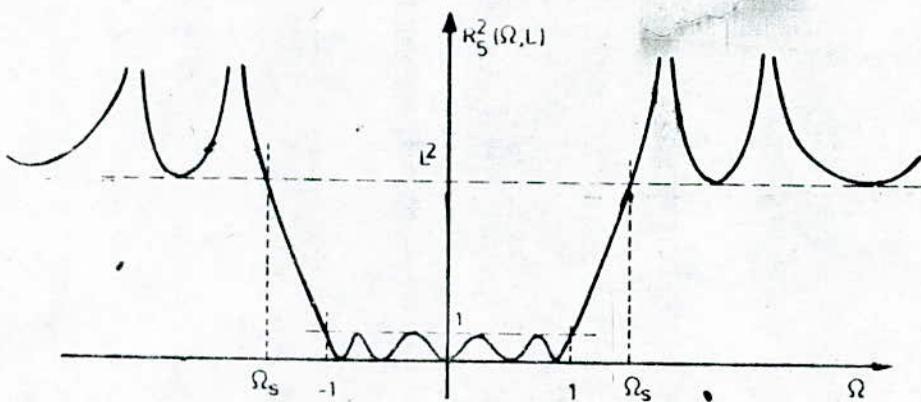


fig 2.6 - Fonction rationnelle de Tchebychev d'après ( BOITE ET LEICH ).

La fonction rationnelle  $Rn^2 ( L, \Omega )$  oscille entre zéro et l'unité pour  $\Omega / L < 1$  ; et entre  $L^2$  et l'infini pour  $\Omega / L > \Omega_s$  ( Fig 2.7 ).

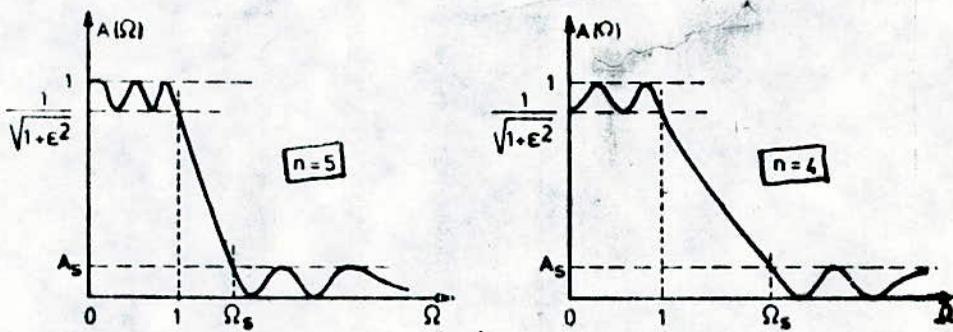


fig 2.7 - Courbes d'amplitudes des filtres elliptiques

### 2.3 - Critère de comparaison

L'approximation des caractéristiques du filtre idéal par un filtre réel montre qu'en matière de réalisation; il convient de fixer un compromis entre les différentes performances du filtre.

Le filtre de Butterworth, par exemple est une bonne approximation du filtre idéal, ses caractéristiques d'amplitude en fréquence sont très plates dans la bande passante, ils ont une excellente uniformité de l'atténuation dans la bande rejetée.

Le filtre de Tchebychev est très proche de Butterworth mais procure une rejection plus rapide à proximité de la coupure, au détriment d'une ondulation notable dans la bande passante. Ils ont aussi une excellente uniformité de l'atténuation dans la bande rejetée.

Le filtre de CAUER possède des caractéristiques analogues à celles du filtres de Tchebychev, mais présente de grandes variations de l'atténuation dans la bande éliminée, ainsi que des ondulations relativement importantes dans la bande passante.

Tableau de comparaison :

Type de Filtre	Caractéristiques	Regularité d'amplitude dans		Inconvénients
		La bande passante	La bande atténuée	
Butterworth	Réponse plate dans la bande passante	Excellente	Excellente	Flane de montée très peu raide
Tchebychev.	Ordre minimal pour atténuation donnée	Ondulation (Type I)	Excellente (Type I)	Oscillation pour la réponse impulsionnelle
Cauer	Ordre le plus faible	Ondulation	Ondulation	Complexité des calculs

### CHAPITRE 3

#### LES FILTRES NUMERIQUES

- 3.1 - GENERALITES
- 3.2 - DEFINITIONS
- 3.3 - CLASSIFICATION DES FILTRES
- 3.4 - PROPRIETES DES FILTRES NUMERIQUES
- 3.5 - TERMINOLOGIE ANALOGIQUE NUMERIQUE
- 3.6 - LES FILTRES NON RECURSIFS ET RECURSIFS.

De même que le filtre analogique, le filtre numérique résoud dans de très nombreux cas le problème de la mise en forme d'un signal.

Après avoir défini les propriétés couramment utilisées dans le domaine analogique, nous aborderons dans ce chapitre le domaine numérique.

### 3 - 1 - Généralités :

Le filtre numérique est un système qui recevant à son entrée un signal sous forme d'échantillons  $x(n)$ , délivre à sa sortie une suite de nombres  $y(n)$ .

Lors de la réalisation du filtrage numérique de signaux analogiques, nous observons une succession des dispositifs nécessaires ( Fig 3.1 )



Fig 3.1 - Organisation d'un filtre numérique

Le signal  $x(t)$  est échantillonné par un échantillonneur bloqueur (E.B) qui permet d'avoir un signal analogique échantillonné  $x(nT_e)$ . Ainsi, le signal  $x(t)$  sera converti en un nombre  $x(n)$  par le convertisseur analogique numérique (CAN); ce nombre sera codé en binaire. Le filtre numérique est programmé pour calculer à partir de  $x(n)$ , la valeur  $y(n)$  d'une séquence de nombres qui constitue la grandeur de sortie du filtre numérique.

Les nombres  $y(n)$  sont présentés à un convertisseur numérique analogique ( C.N.A ) à la sortie duquel est disponible un signal analogique  $y(t)$ , qui sera traité par un filtre passe-bas, pour reconstituer le signal continu  $y(t)$ .

### 3 - 2 - Définitions

Un filtre numérique est un algorithme de calcul par lequel une séquence de nombre  $x(n)$  dite séquence d'entrée est transformée en une autre séquence de nombre  $y(n)$  dite séquence de sortie.

D'une manière générale, un filtre numérique est constitué par :

- Un ou plusieurs organes de retard
- Des sommateurs et des multiplicateurs.
- Des registres fournissent les coefficients de pondération du filtre.

un exemple de filtre numérique : à chaque fois qu'une nouvelle valeur numérique contenue dans le registre d'entrée est appliquée, le contenu du retardateur ( c'est la valeur de sortie précédemment traitée ) sera multiplié par le facteur constant  $K$  ( contenu dans un registre ).

Le résultat sera additionné avec la nouvelle valeur numérique d'entrée ( Fig 3.2 ).

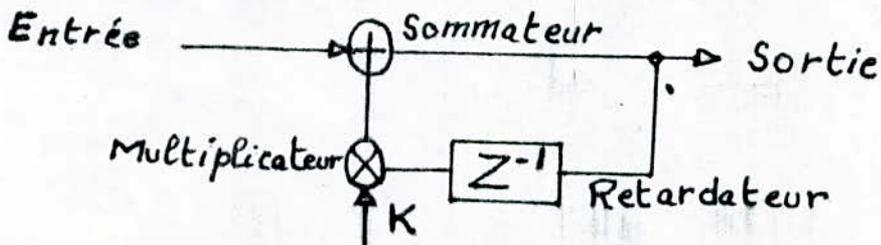


fig 3.2 - Synoptique d'un filtre numérique.

### 3 - 3 - Classification des filtres

Les filtres font appel à des techniques extrêmement variées selon des analyses par les hypothèses de définition, par les méthodes de construction, par leur finalité.

On distingue un grand nombre de familles :

- Les filtres linéaires et non-linéaires :

Les premiers vérifiant les propriétés de linéarité

- Les filtres temps réel et temps différé :

Les premiers ont une réponse impulsionnelle causale et ainsi la détermination d'une valeur filtrée.

On ne fait appel qu'aux valeurs d'indice inférieur  $n' \leq n$ , soient  $x(n')$  ou  $y(n')$  : Elle peut donc être calculée en temps réel.

- Les filtres déterministes et statistiques :

Les premiers sont issus des méthodes déterministes, les seconds de méthodes statistiques.

- Les filtres récursifs et non-récursifs :

Pour les filtres récursifs, les valeurs calculées précédemment par le filtre servent à la détermination des valeurs suivantes : ( fig 3.3 )

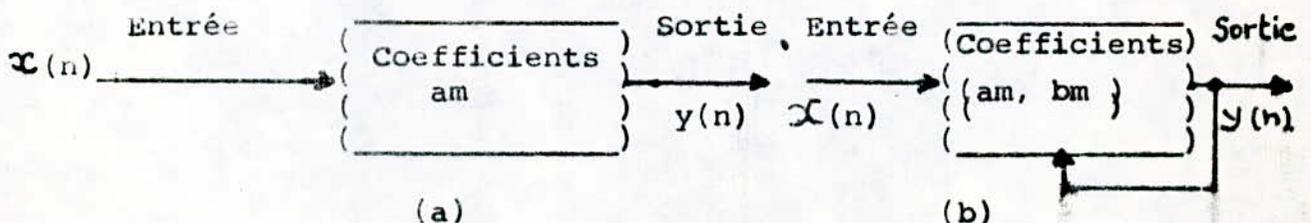


Fig 3.3 : Synoptique des filtres  
(a) - non récursifs, (b) récursifs.

Le filtre non récursif constitue une réplique assez proche des filtres analogiques classiques; alors que le filtre récursif est fondé sur un processus de rétro-action et peut donner lieu en plus à des structures nouvelles.

Une étude détaillée est consacrée pour ces deux types de filtre **ou** paragraphe ( 3.6 )

### 3.4 - Propriétés des filtres numériques :

#### - Stabilité :

Un filtre numérique est stable si, écarté de sa position d'équilibre (  $x(n) = 0 \rightarrow (y(n) = 0)$  ) par l'application de la s quence impulsion unité (  $\delta(n)$  ), il revient à son état initial après disparition de la s quence  $\delta(n)$ .

En d'autres termes, le filtre est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 quant  $n$  tend vers l'infini. Cette condition est nécessaire mais non suffisante pour la stabilité du filtre.

Soit  $h(n)$  la réponse impulsionnelle du filtre numérique et  $H(z)$  sa transformée en  $Z$  donnée par l'équation (9); alors le filtre est stable si tous les pôles  $Z_i$  de la fonction de transfert ont un module  $|Z_i| < 1$ , donc tous les pôles sont situés à l'intérieur du cercle de rayon d'une unité dans le plan complexé.

- Linéarité :

Un filtre est linéaire si à la séquence d'entrée  $a (x_1 (n)) + b (x_2 (n))$  fait correspondre la séquence de sortie  $a (y_1 (n)) + b (y_2 (n))$  où  $(y_1 (n))$  et  $(y_2 (n))$  sont les séquences de sortie correspondants à  $(x_1 (n))$  et  $(x_2 (n))$ .

$$a (y_1 (n)) + b (y_2 (n)) = H ( a (x_1 (n)) + b(x_2 (n)) )$$

- Invariance temporelle :

Un filtre est dit invariant temporel si à la séquence d'entrée  $(x (n - k))$ , il fait correspondre la séquence de sortie  $(y (n - k))$

$$(y (n - k)) = H ( (x (n - k)) )$$

- Causalité

Le filtre est causal, si à un instant quelconque no

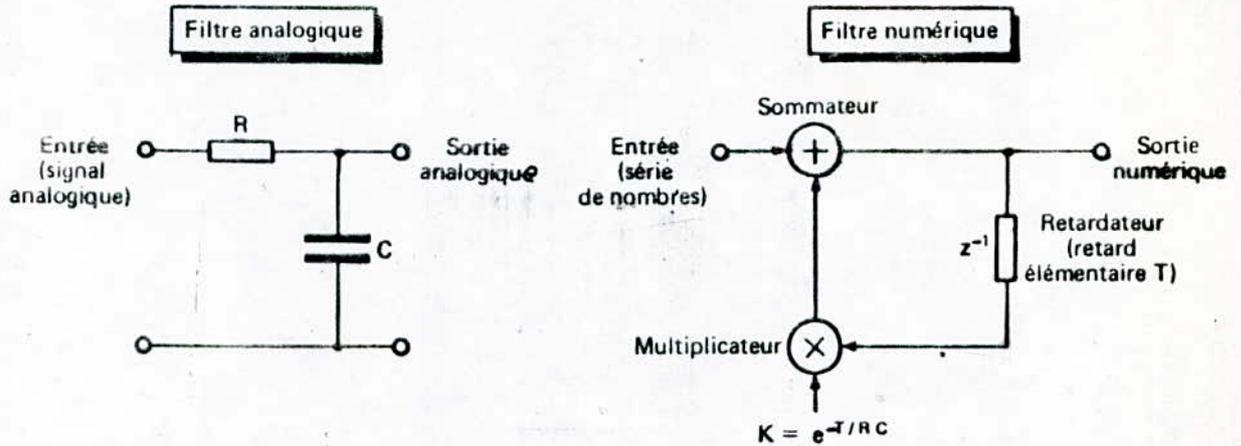
$$y (no) = H ( (x (n \leq no)) ; (y (n < no)) )$$

3.5 - Terminologie " Analogique - numérique "

3.5.1 - Exemple de transfert d'un filtre analogique à un filtre numérique.

La plupart des modèles de filtres analogiques peuvent être ainsi reproduits sous forme numérique.

Les éléments tels que : les résistances, condensateurs, bobines d'induction sont transformés en éléments logiques ( fig 3.4 ).



Formulaire :

Formulaire :

Fonction de transfert :

$$H(P) = \frac{1}{1 + RCP}$$

Module:  $|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}^{1/2}$

Argument:  $\psi = - \text{Arctg } R\omega C$

Fonction de transfert :

$$H(Z) = \frac{1}{1 - KZ^{-1}}$$

Module:  $|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2 - 2K \cos \omega T}}^{1/2}$

Argument:  $\psi = \omega T - \text{Arctg } \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - K}$

Fig (3.4) - Analogie entre un filtre passe-bas analogique et numérique.

La réplique d'un filtre analogique passe-bas du 1er ordre du type RC montre que les fonctions de transfert des deux types de filtres, ainsi que les modules et les arguments, présentent une certaine similitude; en particulier, on peut, conserver la notion des pôles et de zéros dans ces deux cas. Mais en réalité, les concepts sont suffisamment éloignés pour interdire une correspondance élémentaire directe entre les calculs effectués sur les structures de filtres analogiques et les algorithmes,

Fixant les caractéristiques des filtres numériques. Par contre, on a recours à des transformations mathématiques qui permettent d'établir la fonction de transfert du filtre numérique à partir de celle du filtre analogique pris comme modèle.

3.5.2 - Comparasion entre un filtre analogique et un filtre numérique.

En général, il n'existe pas d'analogie stricte entre le filtrage numérique et l'analogique; les deux procédés étant basés sur des approches fort différentes ( Fig 3.5 ).

Néanmoins les notions de transformation de fourier et de fonction de transfert du domaine classique des fonctions continues du temps restent applicables et peuvent être transposées aux filtres numériques.

En particulier, la " transformation en Z " permet d'appliquer la plupart des résultats connus sur les filtres analogiques, aux filtres numériques.

CARACTERISTIQUES PRINCIPALES	FILTRE ANALOGIQUE	FILTRE NUMERIQUE
Processus Fondamentaux	Propriétés électriques des résistances, capacitances et inductances	Manipulation des nombres
Temps	Continus	discontinu
Représentation du signal	Fonction du temps	Distribution ou série du temps
Outil mathématique d'analyse	Transformation de la place	Transformation en Z
Fonction de transfert	H (P) Variable complexe P = jw	H (Z) Variable complexe Z = e <sup>jw</sup>
	:	:
	:	:

Fig (3.5) Différences fondamentales entre un filtre analogique et un filtre numérique.

### 3.5.3. Avantages des filtres numériques.

Les avantages du filtre numérique par rapport au filtre analogique sont importants; ils concernent la reproductibilité des caractéristiques, la souplesse de modification des paramètres, la précision, la stabilité dans le temps et bien sûr la miniaturisation.

#### - Reproductibilité

Les caractéristiques de tous les filtres établis sur une même configuration sont rigoureusement identiques.

#### - Souplesse :

La réponse en fréquence peut être aisément modifiée en changeant les coefficients arithmétiques.

De plus un filtre numérique est susceptible d'être utilisé en mode multiplixé, soit pour traiter plusieurs canaux de données d'entrées, soit pour réaliser plusieurs configurations avec les mêmes circuits élémentaires.

#### - Précision :

Les différentes manipulations étant effectuées sur des nombres, la précision ne dépend, en grande partie que de celle du " C.A.N " d'entrée et de celle du " C.N.A " de sortie.

#### - Stabilité :

Il n'y a pas de vieillissement des composants, ni d'influence de la température sur les caractéristiques du filtre; celles-ci restent parfaitement stables au cours du temps.

- Miniaturisation :

Le filtre numérique se prête bien à une réalisation en circuits très intégrés, même aux très basses fréquences où : le filtre analogique se trouve handicapé par l'usage de composants de grandes dimensions.

### 3 - 6 - Les filtres non récursifs et récursifs

La définition de filtre numérique récursif ou non récursif, répondant à des hypothèses particulières, est due au développement d'un certain nombre de méthodes.

La mise en oeuvre d'un tel filtre pourra cependant être réalisée par différentes structures ( cf. chap.5 )

#### 3.6.1 - Filtres non récursifs ( ou filtres transversaux )

##### a - Définition :

Un filtre non-récursif est un filtre où chaque échantillon de sortie "  $y(n)$  " est une combinaison linéaire des échantillons précédents "  $x(n-i)$  " et présents "  $x(n)$  " d'entrée.

L'équation de récurrence s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^n a_i x(n-i) \quad (31)$$

D'autre part, si la somme pondérée des valeurs du signal d'entrée  $x(n)$  se fait par la suite des coefficients de la réponse impulsionnelle discrète "  $h(n)$  " du filtre.

( Dans ce cas, on parle de filtrage par convolution linéaire ).

L'équation (31) devient :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{i=0}^n h(i) x(n-i) \\ &= h(0) x(n) + h(1) x(n-1) + \dots + h(n) x(0). \end{aligned}$$

ou encore en inversant le classement :

$$y(n) = h(n) x(0) + h(n-1) x(1) + \dots + h(0) x(n) \quad (32)$$

où  $n$  est le rang de l'échantillon.

La pondération  $h(n)$  qui définit le filtre, constitue la réponse temporelle du filtre à une séquence d'entrée (1, 0, 0, 0, .....

On remarque que pratiquement le nombre de coefficients est limité, d'où l'appellation de " filtre à réponse impulsionnelle finie " ( FIR : Finite impulse Response, dans la terminologie Anglo-saxonne ).

b - Fonctionnement du filtre non-récuratif :

La méthode de calcul consiste en une opération de décalage et de superposition ( Fig 3.6 ).

soit à convoluer un groupe de valeurs " XYZ " représentant le signal avec le groupe " ABC " représentant la réponse impulsionnelle. On effectue trois décalages du groupe " XYZ " pour le multiplier successivement par A, B et C, puis on fait la somme des produits partiels, on obtient la suite des valeurs numériques :

$$AX; (BX + AY); (CX + BY + AZ); (CY + BZ) \text{ et } CZ.$$

A présent, nous effectuons le décalage du signal avant la multiplication et la sommation; ensuite, nous observons la convolution du signal par la réponse impulsionnelle en exécutant toutes les multiplications avec les coefficients de celle-ci et en terminant, enfin, par le décalage des sommations (Fig 3.6).

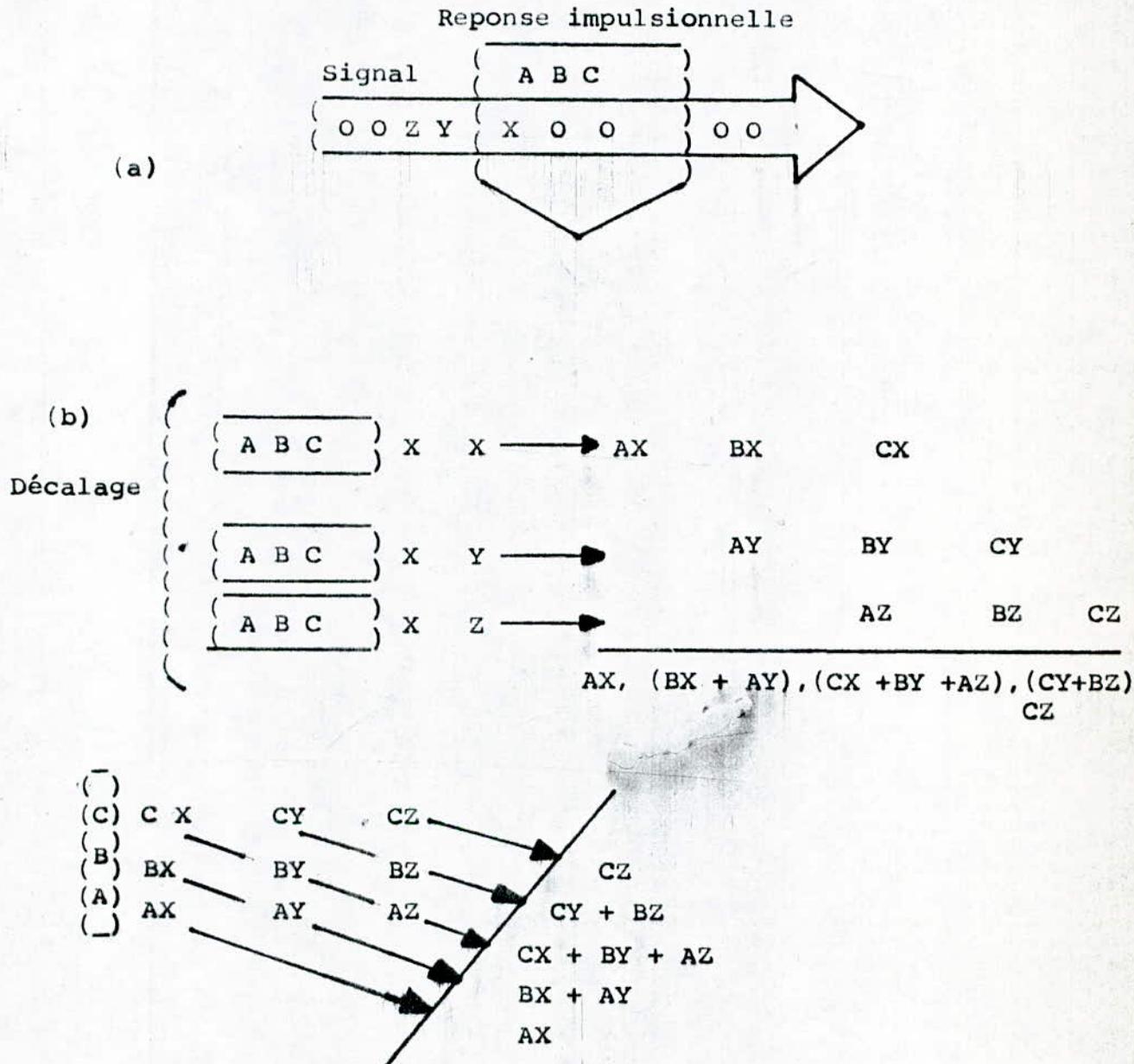


Fig 3.6 (a) Decalage et superposition

(b) convolution du signal par la réponse impulsionnelle.

Les cinq termes résultant de la convolution avec la réponse impulsionnelle  $h(n)$  sont obtenus successivement par :

$$y(0) = h(0) x(0) + 0 + 0 = \text{AX}$$

$$y(1) = h(1) x(0) + h(0) x(1) + 0 = \text{BX} + \text{AY}$$

$$y(2) = h(2) x(0) + h(1) x(1) + h(0) x(2) = \text{CX} + \text{BY} + \text{AZ}$$

$$y(3) = 0 + h(2) x(1) + h(1) x(2) = \text{CY} + \text{BZ}$$

$$y(4) = 0 + 0 + h(2) x(2) = \text{CZ}$$

Ainsi, on peut transformer un signal rectangulaire (1,1,1) par un filtre numérique transversal à convolution, de réponse impulsionnelle triangulaire (1; 0,75; 0,5; 0,25)

Pour cela, on utilise la structure directe ( Fig 3.7 ) qui est la plus fréquente.

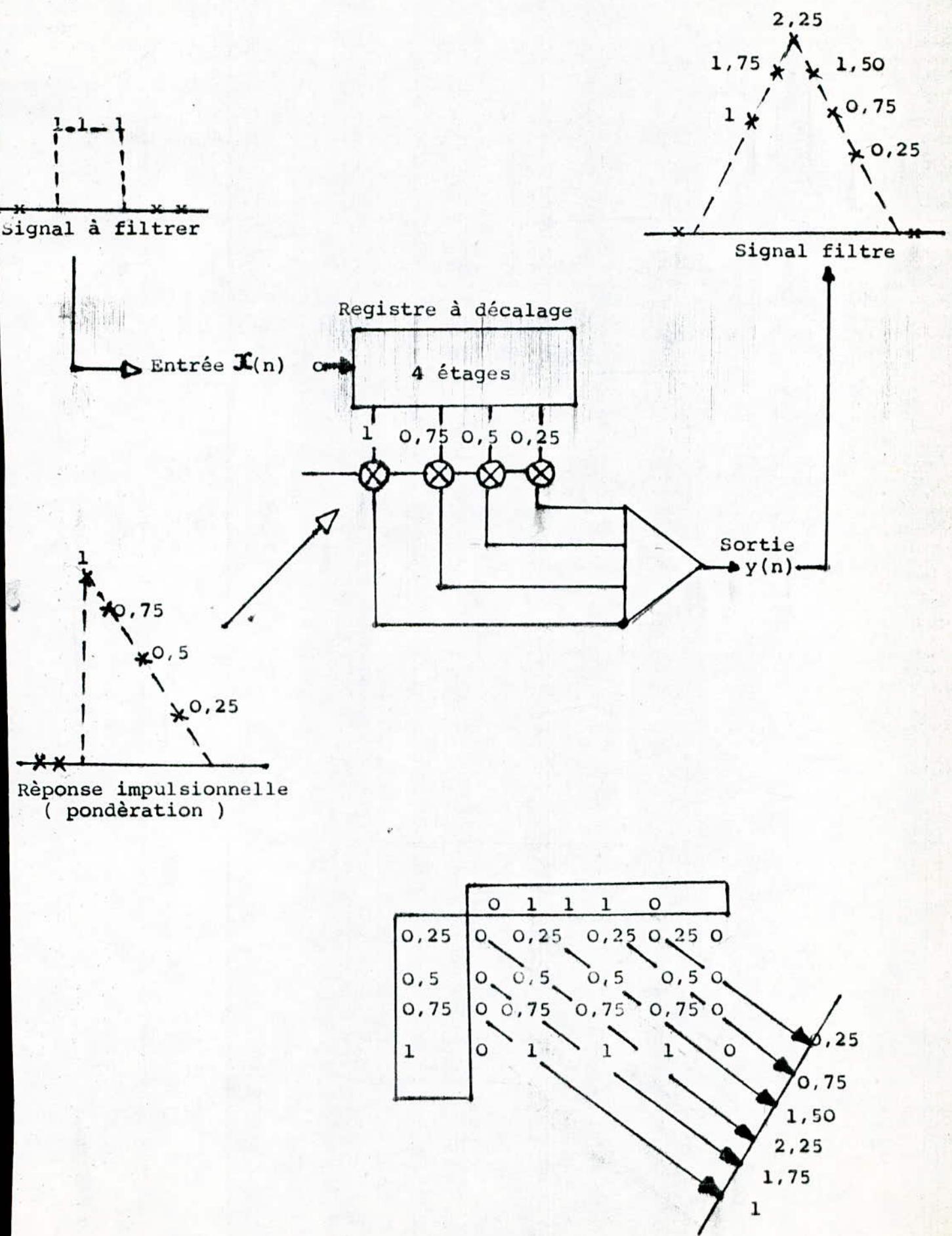


Fig 3.7 - Réalisation pratique d'une convolution à l'aide d'un registre à décalage muni d'un filtre transversal.

Le filtre comporte un registre à décalage, dont les sorties à chacun des étages, sont pondérées par les coefficients de la réponse impulsionnelle; ces sorties sont additionnées pour restituer le signal résultant de sorties ( signal filtré ).

### 3.6.2 - Filtres récursifs

#### a) • Définition

Un filtre récursif est un filtre dont chaque échantillon de sortie  $y(n)$  est une combinaison linéaire des échantillons présents  $x(n)$  et passés  $x(n-1)$  d'entrées, mais également de l'échantillon passé de sortie  $y(n-1)$ .

L'équation de récurrence caractérisant ce type de filtre s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a(i)x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i) \quad (33)$$

D'autre part, la réponse impulsionnelle ( $y(n) = h(n)$ ) d'un filtre étant la réponse à une séquence impulsion  $x(n) = \delta(n)$ . Ce qui permet d'écrire à partir de l'équation (33).

$$h(n) = \sum_{i=0}^N a_i \delta(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i \delta(n-i)$$

$$h(n) = a_0 \delta(n) + a_1 \delta(n-1) + \dots + a_n \delta(n-n) - b_1 \delta(n-1) - \dots - b_n \delta(n-n) \quad (34)$$

Dans ce cas le nombre d'échantillons  $h(n)$  est illimité d'où l'appellation de " filtre à réponse impulsionnelle infinie " ( IIR : Infinite Impulse Reponse )

b) Calcul de la fonction de transfert

La fonction de transfert  $H(Z)$  d'un filtre numérique est définie par le rapport :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$$

où  $X(Z)$  et  $Y(Z)$  sont les transformées en  $Z$  respectivement des séquences de nombres  $x(n)$  et  $y(n)$ .

En appliquant les propriétés de la transformée en  $Z$  (cf. Annexe A) à l'équation (33), on obtient:

$$\begin{aligned} Z(Y(n)) = Y(Z) &= Z \left[ \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i) \right] \\ Y(Z) &= Z \left[ \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) \right] - Z \left[ \sum_{i=1}^N b_i y(n-i) \right] \quad (35) \end{aligned}$$

D'après la propriété de linéarité l'équation (35) s'écrit :

$$Y(Z) = \sum_{i=0}^M a_i Z(x(n-i)) - \sum_{i=1}^N b_i Z(y(n-i)) \quad (36)$$

D'après le théorème de retard, l'équation (36) s'écrit :

$$Y(Z) = \sum_{i=0}^M a_i Z^{-i} X(Z) - \sum_{i=1}^N b_i Z^{-i} Y(Z)$$

$$Y(Z) \left( 1 + \sum_{i=1}^N b_i Z^{-i} \right) = \left( \sum_{i=0}^M a_i Z^{-i} \right) X(Z)$$

d'où :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i Z^{-i}} \quad (37)$$

N caractérise l'ordre du filtre

Remarques :

- Lorsque le numérateur de l'équation (37) est égal à l'unité, le filtre ne comporte que des pôles. Cette variante est désignée par les filtres " purement récurrents "

- Si on pose, dans l'équation (37),  $b_i = 0$  pour  $i = 0, 1, \dots, N$  on obtient la fonction de transfert d'un filtre non récurrent

$$H(Z) = \sum_{i=0}^m a_i Z^{-i} \quad (38)$$

qui ne possède aucun pôle en Z, d'où stabilité assurée.

3.6.3 - Comparaison entre filtres non-récurrents et récurrents.

En comparant les principales propriétés des filtres numériques ( tableau 3.8 ), on remarque que les filtres "RIF" sont par construction, toujours stables alors que les filtres " RII " peuvent être instables, si certaines conditions ne sont pas remplies ( là position des pôles est déterminante dans ce cas )

	Filtre RIF	Filtre RII
Mode	Non récurrent	Récurrent
Fonction de transfert $H(z)$	Uniquement des pôles ( Pas de zéros )	Des pôles et des Zéros
Coefficient $(h(n))$ de la réponse impulsionnelle	Coefficient du filtre tous nuls, sauf pour un nombre fini de valeurs $n$	Infinité de valeurs non nulles
Longueur de mémoire	Finie	Infinie
Stabilité	Toujours stable ( car pas de pôles en dehors de l'origine )	Stable, si les pôles de la fonction de transfert sont à l'intérieur du cercle unité.

Fig 3.8 - Comparaison des filtres " RIF " et " RII ".

La distinction profonde entre les deux méthodes mises en oeuvre pour la réalisation des filtres numériques peut-être illustrée par une analogie acoustique :

- Les filtres "RIF" fonctionnent comme une chambre sans écho ( ou anéchoïque ), dans laquelle l'énergie sonore est absorbée sélectivement par les parois, c'est-à-dire dans une chambre " sourde ", un claquement bref est vite amorti. Par contre, les filtres à "RII" sont assimilables à une chambre réverbérante qui maintient un niveau acoustique important sur une longue durée lors d'un claquement bref.

## CHAPITRE 4

### SYNTHESE DES FILTRES NUMERIQUES

4 - 1 - SYNTHESE DES FILTRES NON-RECURSIFS

4 - 2 - SYNTHESE DES FILTRES RECURSIFS

Il s'agit de réaliser un filtre numérique ayant sensiblement le même comportement que le filtre analogique de départ remplissant la fonction souhaitée, que nous appellerons ainsi " filtre prototype ".

Aussi, les méthodes de synthèse les plus utilisées trouvent-elles leur point de départ dans les propriétés bien connues des filtres analogiques.

#### 4.1 - Synthèse des filtres r . récurifs.

Le problème est de déterminer la réponse impulsionnelle du filtre, suivant la réponse, en fréquence désirée.

Deux méthodes peuvent résoudre ce problème :

- Méthode des " fenêtres "
- Méthode "d'échantillonnage de fréquence "

##### 4.1.1 - Méthode des fenêtres :

Cette méthode est fondée sur la propriété de périodicité de la fonction de transfert d'un filtre numérique. Ceci permet d'envisager un développement en série de fourier dont les coefficients sont justement les termes  $h(n)$ .

Le développement en série de fourier menant à une réponse impulsionnelle infinie, on se ramènera donc à un nombre fini de termes en opérant une Troncature de la sèquence infinie à l'aide d'une fenêtre

En premier lieu, nous citerons les différentes étapes pour la réalisation d'un filtre à phase linéaire.

En effet, l'une des principales caractéristiques des filtres RIF est que l'argument de leur fonction de transfert peut varier linéairement en fonction de la fréquence, la fonction de transfert isochrone  $H(j\omega)$  sera le produit d'un terme  $G(j\omega)$  réel ou imaginaire pur par un autre  $\exp [j\varphi(\omega)]$ .

$$H(j\omega) = G(j\omega) \cdot \exp [j\varphi(\omega)] \quad (39)$$

Pour la réalisation d'un filtre RIF causal, à phase linéaire de fonction de transfert  $H(j\omega)$ , on adoptera donc la stratégie suivante ( Fig 4.1 ).

a - Définir un filtre non-causal à phase constante (  $0; \pm \frac{\pi}{2}$  ) dont la fonction de transfert est  $G(j\omega)$ , fonction réelle ou imaginaire pure.

b - Au cas où cette réponse impulsionnelle  $[g(n)]$  de ce filtre comporte un nombre infini de termes, on opère par troncature un nombre fini "N" de termes de cette réponse.

c - Pour obtenir un filtre causal, on fera un décalage vers la droite de cette réponse impulsionnelle d'un nombre bien précis de période d'échantillonnage : C'est précisément ce décalage qui introduit le terme de phase linéaire.

En effet, si la réponse impulsionnelle non-causale comporte "N" termes numérotés de  $-\frac{N-1}{2}$  à  $+\frac{N-1}{2}$ , on voit qu'un décalage vers la droite de  $\frac{N-1}{2}$  périodes d'échantillonnage donne une réponse impulsionnelle causale composée de "N" termes numérotés de 0 à (N-1) fig 4.1 ).

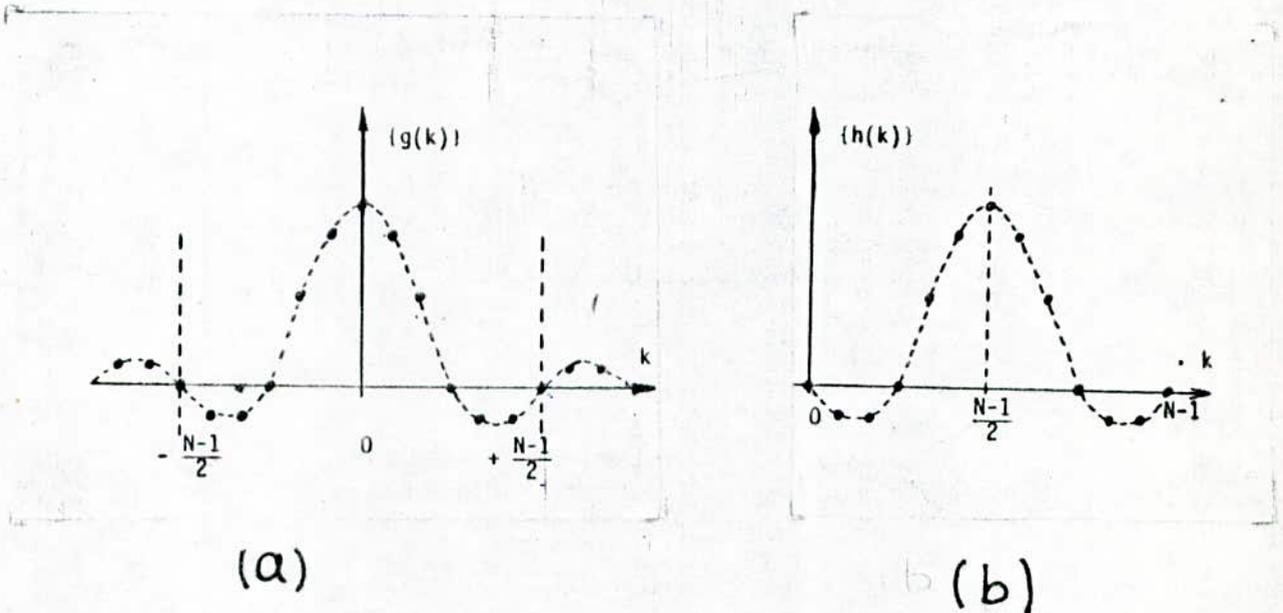


Fig 4.1. a - Filtre non causal à phase nulle  
(Arg G = 0 )

b - Filtre causal à phase linéaire  
(Arg H = 0 - 2 π  $\frac{N-1}{2} \frac{f}{F_e}$  )

Dans tous les cas, on peut écrire :

$$H(j\omega) = G(j\omega) e^{-j(2\pi \frac{N-1}{2} \frac{f}{F_e})} \quad (40)$$

avec  $G(j\omega) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} g(k) e^{-jk\omega T_e} \quad (41)$

On aura ensuite :

$$(w) = - 2 \pi \cdot \frac{N - 1}{2} \frac{f}{F_e} \quad (42)$$

Exemple : Fenêtre rectangulaire

Soit à réaliser par exemple un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $F_e$ . Sa fonction de transfert est définie entre  $-\frac{F_e}{2}$  et  $+\frac{F_e}{2}$ . Elle est périodique ( période  $T_e$  ).

$$G(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\frac{F_e}{2} \angle f \angle -F_e \\ 1 & \text{pour } -\frac{F_e}{2} \angle f \angle +F_e \\ 0 & \text{pour } +F_e \angle f \angle +\frac{F_e}{2} \end{cases}$$

avec :  $\text{Arg } G(f) = 0$ .

Nous utiliserons donc la stratégie définie précédemment : le point de départ étant le filtre causal de phase nulle, la décomposition en série de fourier de la fonction de transfert  $G(f)$  permet d'associer à la réponse en fréquence souhaitée une réponse impulsionnelle  $\overline{g_0(k)}$  non causale et composée d'une infinité de termes de valeur:

$$g_0(k) = \frac{1}{F_e} \int_{-\frac{F_e}{2}}^{+\frac{F_e}{2}} G(f) \cdot e^{jk(2k\pi \frac{f}{F_e})} df \quad (43)$$

$$g_0(k) = \frac{1}{F_e} \int_{-\frac{F_e}{2}}^{+\frac{F_e}{2}} 1 \cdot e^{j(2k\pi \frac{f}{f_e})} \cdot df$$

Soit :

$$g_0(k) = 2 \frac{F_e}{F_e} \cdot \frac{\sin(2k\pi \frac{F_c}{F_e})}{(2k\pi \frac{F_c}{F_e})} \quad (44)$$

L'équation (44) montre que la réponse impulsionnelle comportera un nombre infini de termes, il faut donc réduire cette réponse à un nombre fini " N " de termes numérotés de  $-\frac{(N-1)}{2}$  à  $+\frac{(N-1)}{2}$  tel que

$$\overline{g(k)} = \overline{g_0(k)} \cdot \overline{W(k)}$$

où  $\overline{W(k)}$  est la fonction fenêtre

Dans notre cas ( Fenêtre rectangulaire ).

$$W(k) = \begin{cases} 1 & \text{Si } k \in \left[ -\frac{(N-1)}{2}; +\frac{(N-1)}{2} \right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Donc, par application de la fonction fenêtre  $\overline{W(k)}$ , on obtient la séquence tronquée  $\overline{g(k)}$  ( Fig 4.2 ).

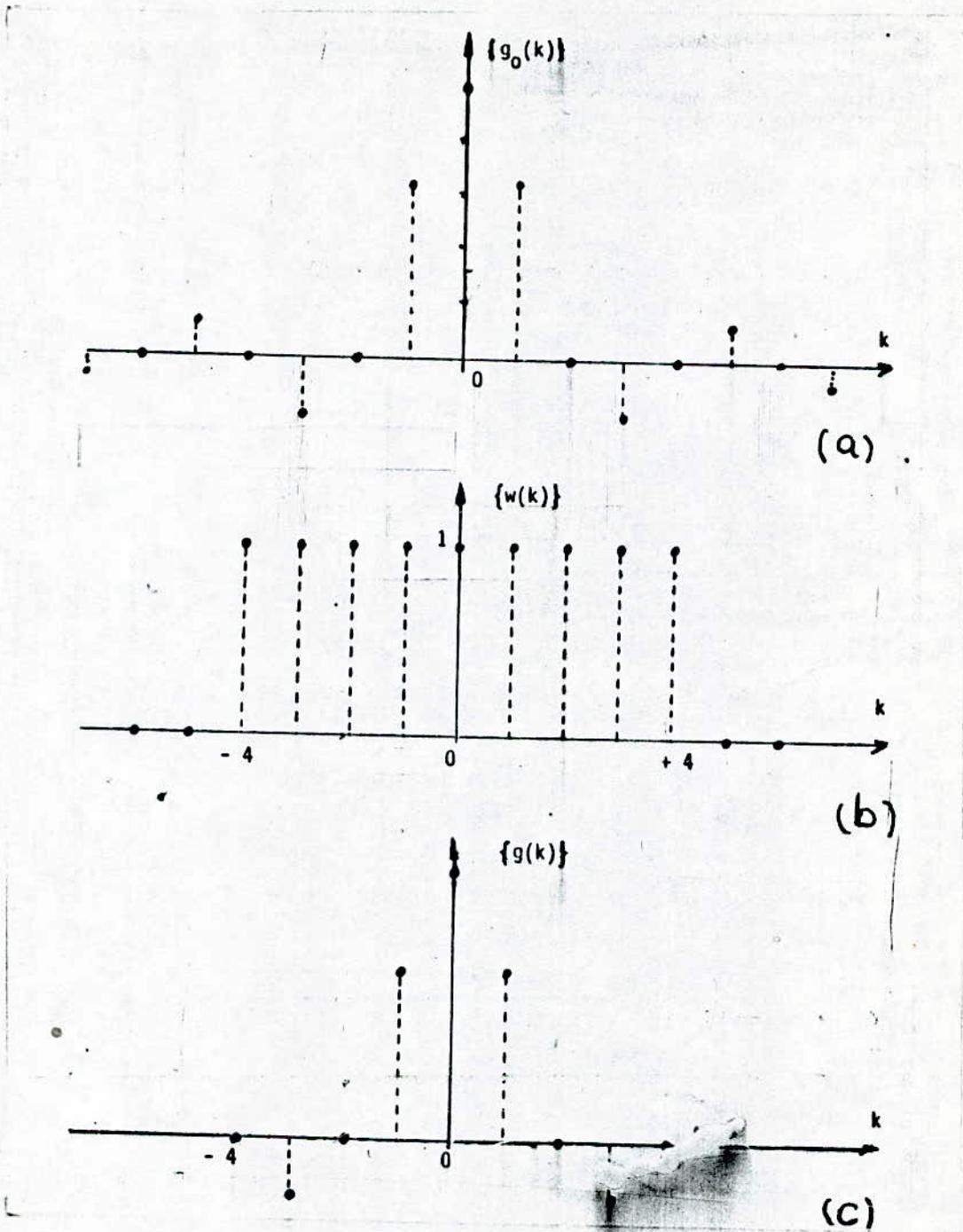


Fig (4.2). - a - La sèquence  $\{g_0(k)\}$   
b - La fenêtre rectangulaire  $N = 9$   
c - La sèquence tronquée  $\{g(k)\}$

Dans l'exemple donné, nous avons gardé  $N=9$  termes de  $\overline{g_0(k)}$  numérotés de -4 à +4.

Après troncature, la fonction transfert du filtre non causal s'écrit donc :

Selon l'équation (41), nous avons :

$$G(j\omega) = \sum_{k=-4}^{+4} g(k) e^{-j(k\omega T_e)}$$

$$= g(0) + \sum_{k=1}^4 2g(k) \cos(k\omega T_e)$$

( le filtre non-causal, ayant été choisi à phase nulle, la réponse impulsionnelle est bien symétrique fig (4.2) ).

Pour le rendre causal, il convient de décaler la réponse impulsionnelle tronquée de 4 périodes d'échantillonnage vers la droite, d'où l'apparition d'un terme de phase :

$$\varphi(\omega) = -2\pi \cdot 4 \cdot \frac{f}{F_e}$$

La fonction de transfert du filtre causal est :

$$H(j\omega) = \overline{g(0)} + \sum_{k=1}^4 2g(k) \cos\left[2k\pi \frac{f}{F_e}\right] \overline{e^{-j8\pi \frac{f}{F_e}}}$$

Inconvénients de la méthode :

La réponse fréquentielle du filtre RIF présente d'importantes ondulations dans la bande passante et est atténuée, ( Fig 4.3 ), ainsi le passage de la bande passante à la bande atténuée se fait.

d'une façon progressive

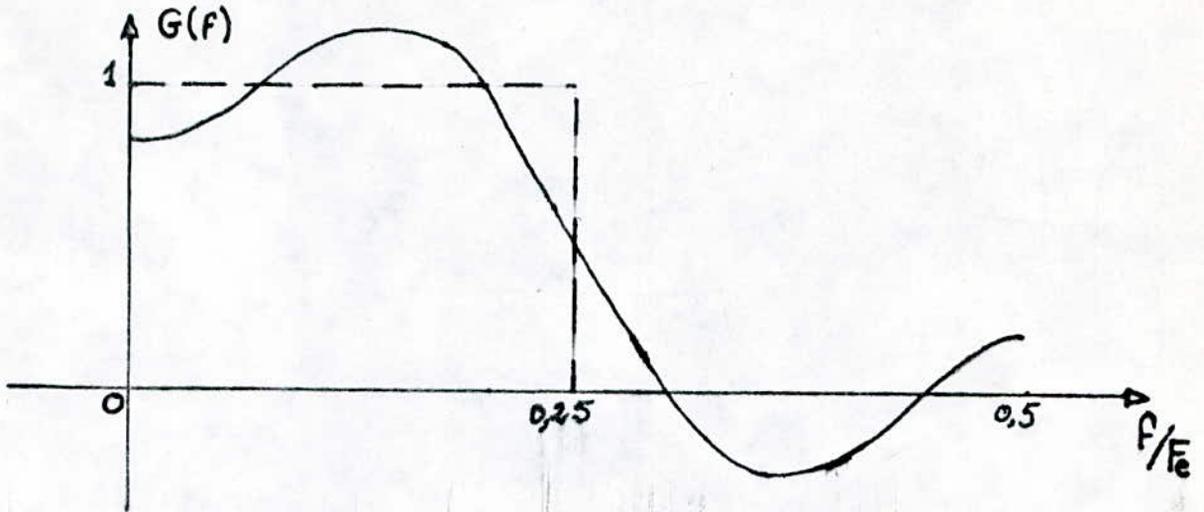


Fig 4.3. Réponse fréquentielle  $G(f)$ .

Cependant, pour diminuer l'amplitude des ondulations on utilise d'autres fenêtres telles que la fenêtre triangulaire et Hamming ( cf. Annexe B ).

#### 4.1.2 - Méthode d'échantillonnage de fréquence

Cette méthode consiste à choisir sur la courbe de réponse en fréquence, "N" points équidistants en fréquence et équirépartis sur une période (  $-\frac{F_e}{2}$  ,  $+\frac{F_e}{2}$  ) de la fonction transfert, auxquels on peut associer à ces "N" points, "N" termes de la réponse impulsionnelle.

Le problème posé est alors l'interpolation réalisé entre les "N" points choisis et l'optimisation de ce choix pour que le comportement fréquentiel du filtre soit le plus proche possible de celui désiré ( Fig 4.4 ).

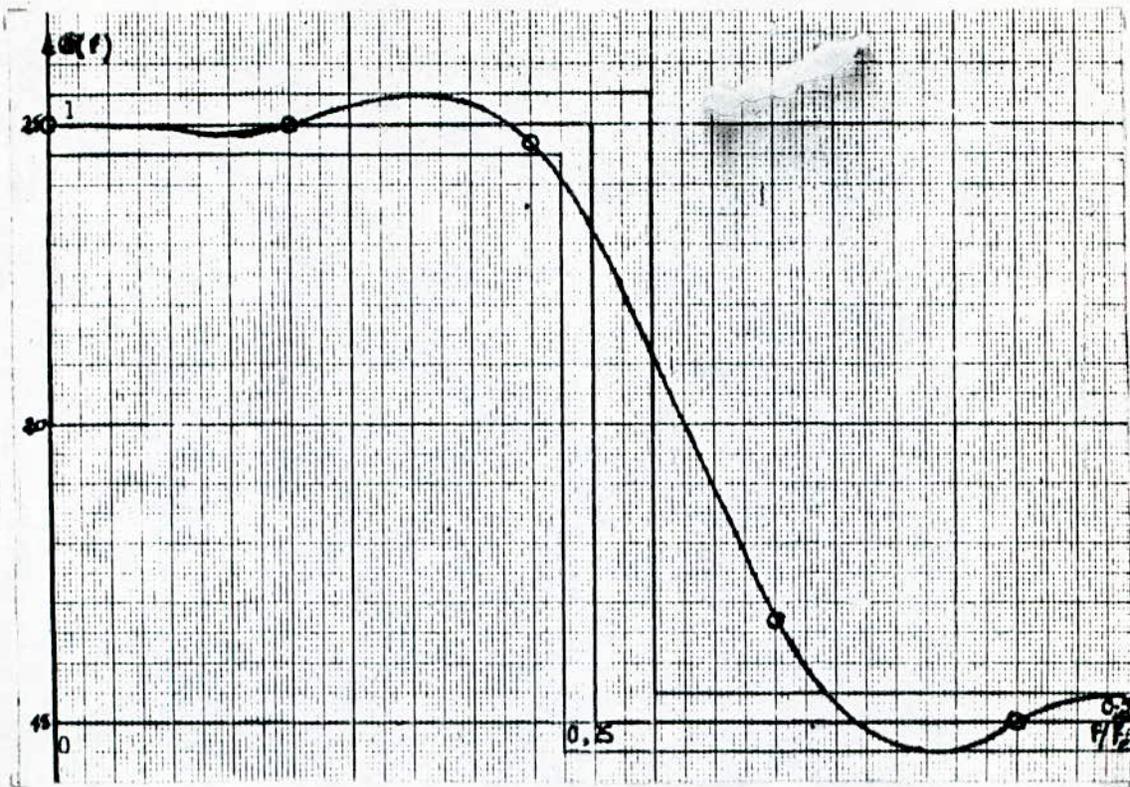


Fig 4.4. - Fonction de transfert obtenue avec ses valeurs d'échantillons de fréquence ( d'après P. FONDANECHÉ ).

On constate que l'importante amélioration obtenue sur l'ondulation est contrariée par une augmentation de la largeur de la zone de transition. On peut y remédier en augmentant le nombre "N" d'échantillons.

#### 4.2 - Synthèse des filtres récursifs

Les filtres à RII issus d'une technique de transformation du domaine analogique au domaine numérique (transformation bi-linéaire), présentent par rapport aux filtres à RIF l'avantage d'une plus grande rapidité de calcul, mais stabilité et phase linéaire ne sont plus assurés d'où les méthodes de synthèse différentes.

##### 4.2.1 - Synthèse par invariance impulsionnelle :

###### a - Principe de la méthode :

Considérons un filtre analogique dont la fonction de transfert est :

$$H_a (P) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{(P + P_i)} \quad (45)$$

où  $P_i$  sont les pôles complexes de  $H_a (P)$

Sa réponse impulsionnelle est :

$$h_a (t) = \sum_{i=1}^N K_i e^{-P_i t} \mu(t) \quad (46)$$

où  $\mu(t)$  représente l'échelon unité.

La méthode consiste à synthétiser le filtre numérique dont la réponse impulsionnelle serait celle du filtre analogique mais échantillonnée, soit :

$$h(n) = h_a(nT_e) = \sum_i K_i e^{-P_i n T_e} \mathcal{U}(n) \quad (47)$$

Aux instants d'échantillonnage, on a bien une parfaite coïncidence des réponses impulsionnelles des deux filtres numérique et analogique.

b - Comparaison des comportements fréquentiels :

La fonction de transfert  $H_n(Z)$  du filtre numérique étant la transformée en Z de sa réponse impulsionnelle.

$$h(n) = \sum_i K_i \cdot e^{-P_i n T_e} \cdot \mathcal{U}(n) = \sum_i K_i \mathcal{Z}[e^{-P_i T_e}]^n$$

$$\mathcal{Z}[e^{-P_i T_e}]^n = \frac{1}{1 - e^{-P_i T_e} Z^{-1}} \quad (\text{cf. Annexe A}).$$

$$\text{d'où : } H_n(Z) = \sum_i \frac{K_i}{1 - e^{-P_i T_e} Z^{-1}} \quad (48)$$

La fonction de transfert isochrone du filtre s'obtient en remplaçant Z par  $e^{j\omega T_e}$  dans l'équation (48) :

$$H_n(j\omega) = \sum_i \frac{K_i}{1 - e^{-P_i T_e} e^{-j\omega T_e}} \quad (49)$$

Cette du filtre analogique s'obtient pour  $p = j\omega$

$$H_a(j\omega) = \sum_i \frac{K_i}{j\omega + P_i} \quad (50)$$

La relation  $Z = e^{pT_e}$  permet donc d'établir la correspondance qui existe entre le plan P et le plan Z ( Fig 4.6 ).

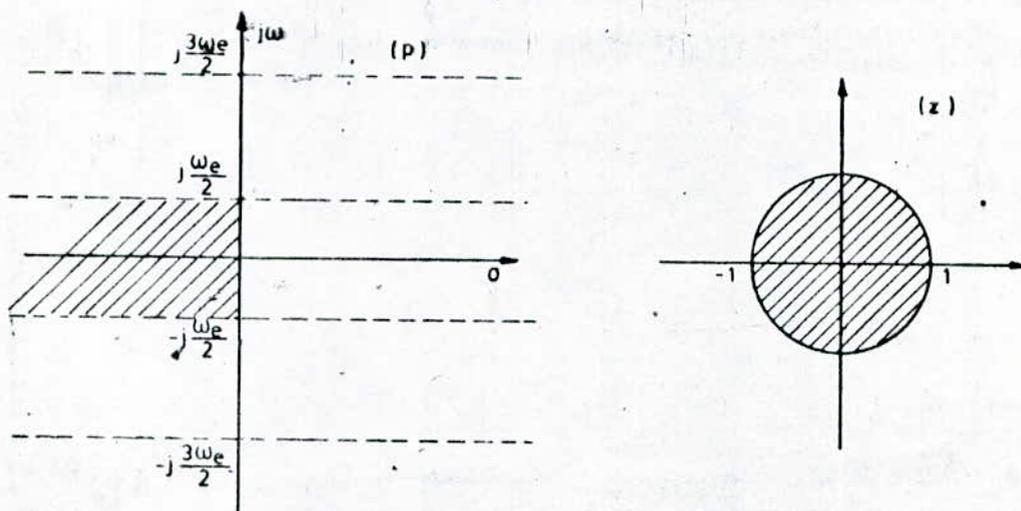


Fig 4.5. Correspondance entre le plan P et le plan Z.

On observe que des bandes horizontales de largeur  $\omega_e$  du plan P sont transformées dans la totalité du plan Z. la largeur de bande maximale utilisable pour le filtre numérique correspond. à  $\omega / \omega_e < \frac{\omega_e}{2}$ . Il est donc indispensable que la réponse en fréquence du filtre prototype de départ soit nulle ou tout au moins négligeable hors de la bande du plan P limitée par les ordonnées  $\pm j \frac{\omega_e}{2}$ .

c - Stabilité du filtre numérique obtenu :

Dans l'équation (49) les  $P_i$  représentant les pôles de  $H_a(p)$ . A chaque pôle  $P_i$  correspond un pôle  $e^{-P_i T_e}$  de  $H_n(Z)$ .

Comme  $\text{Re}(-P_i) < 0$ , donc  $|e^{-P_i T_e}| < 1$

De ce fait, la stabilité est préservée par la transformation analogique numérique, par contre, les réponses fréquentielles des deux filtres ci-dessus cités sont différentes.

( Fig 4.6 ).

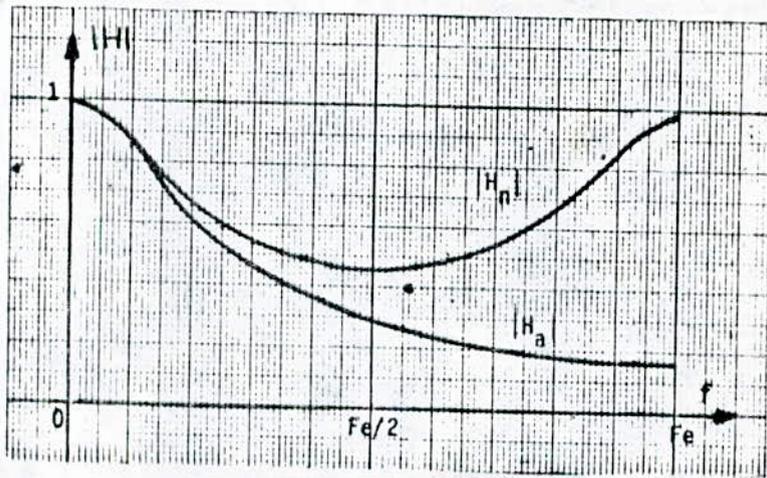


Fig 4.6. Réponses fréquentielles des filtres analogique et numérique du 1er Ordre ( P. FONDANECHÉ ).

La méthode qui vient d'être exposée permet d'obtenir un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est identique à celle du filtre analogique de départ, mais elle présente par ailleurs un inconvénient qui est de modifier la réponse en fréquence du filtre original.

#### 4.2.2 - Transformation bilinéaire :

La " transformation bilinéaire " dite aussi "transformation homographique " permet de mettre en relation les fonctions de transfert des filtres analogiques et celles des filtres discrets.

La méthode consiste à remplacer dans la fonction de transfert du filtre analogique P par :

$$P = \frac{2}{T_e} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (51)$$

avec :  $T_e = \frac{1}{f_e}$  période d'échantillonnage du système numérique.

$$\text{d'où : } Z = \frac{1 + P \cdot \frac{T_e}{2}}{1 - P \cdot \frac{T_e}{2}} \quad (52)$$

On note : H ( P ) fonction de transfert du filtre analogique.

T ( Z ) Fonction de transfert du filtre numérique.

La transformation bilinéaire établit une correspondance entre l'axe des imaginaires du Plan P et le cercle unité du plan Z.

En posant :  $P = j\omega a$  et  $Z = e^{j\varphi}$  avec  $\varphi = \omega_j T_e$

En substituant la valeur de Z dans l'équation (51), on obtient :

$$P = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\varphi} - 1}{e^{j\varphi} + 1} = \frac{2}{T_e} j \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{T_e} j \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$j\omega a = \frac{2}{T_e} j \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{d'où : } \omega a = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \frac{\omega d T_e}{2} \quad (53)$$

De ce fait, on obtient la correspondance entre la pulsation "  $\omega a$  " du filtre analogique avec "  $\omega d$  " du filtre discret.

Si on remplace dans l'équation (52)  $P$  par  $\alpha + j\omega$  ( Solution générale) il vient par suite de calculs :

$$Z = \frac{(1 + \frac{T}{2} \alpha) + j\omega \frac{T}{2}}{(1 - \frac{T}{2} \alpha) - j\omega \frac{T}{2}} \quad (54)$$

On remarque que si  $\alpha < 0 \Rightarrow |Z| < 1$

Donc, il on pose :

$$T(Z) = H(P) \quad \text{tel que : } P = \frac{2}{T_e} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$

$$\text{Alors : } T(e^{j\omega d T_e}) = H(j\omega a).$$

Comme un système stable est caractérisé par une transmittance  $H(P)$  dont tous les zéros sont situés à gauche de l'axe des imaginaires, donc pour un système à temps discret, les zéros de  $T(Z)$  sont situés à l'intérieur du cercle unité.

$$P = j\omega a = j \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

Alors au demi-plan de gauche du plan  $P$  correspond l'intérieur du cercle unité et au demi-plan de droite correspond l'extérieur du même cercle. L'axe imaginaire est donc transformé en un cercle ( Fig 4.8 ).

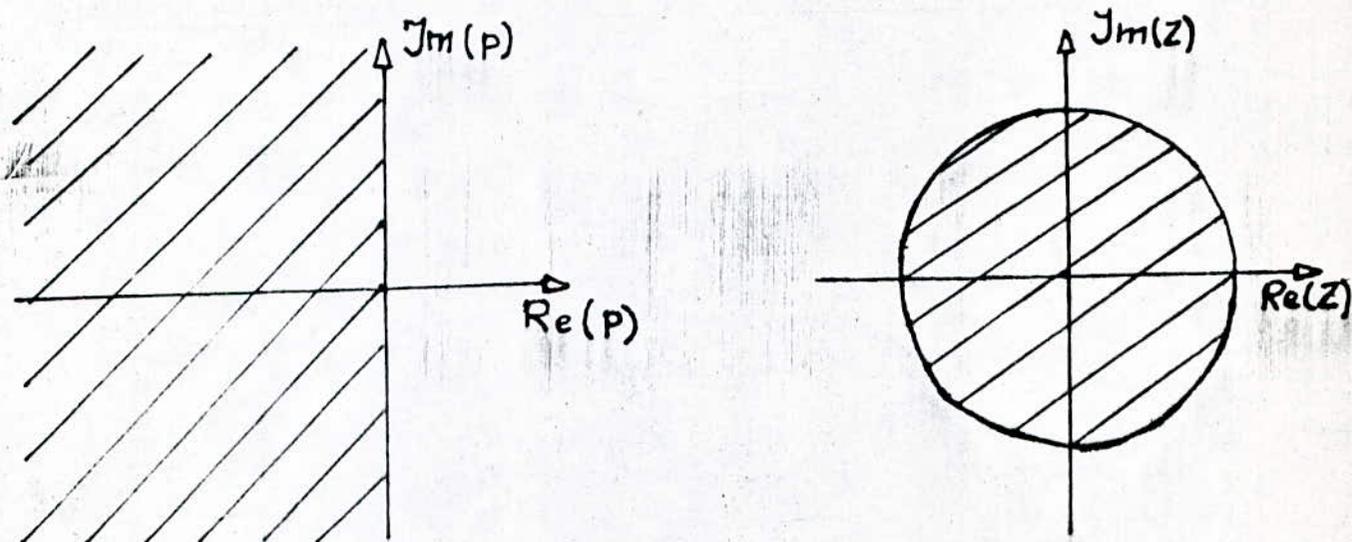


Fig 4.7 - Correspondance entre le plan P et le plan Z définie par la transformée bilinéaire.

Remarque :

L'équation (51) s'écrit en général :  $P = K \frac{Z - 1}{Z + 1}$  (55)

"K" n'est autre qu'un facteur d'échelle appelé :  
" facteur d'adaptation en fréquence ". Il permet de faire correspondre les réponses en fréquence du filtre analogique pour  $\omega_a = \omega_{ao}$  et du filtre numérique pour  $\omega_d = \omega_{do}$ , soit :

$$K = \frac{\omega_{ao}}{\frac{\text{tg } \omega_{do} T_e}{2}} \quad (56)$$

Le choix  $\omega_{a0} = \omega_{d0} = \omega_c$  conserve la pulsation de coupure, tandis que  $K = \frac{2}{T_e}$  garde le comportement basse fréquence.

#### 4.2.3 - Comparaison entre les deux méthodes

La transformation bi-linéaire s'applique aux filtres de " Butterworth ", de " Tchebycher " et de " Cauer "; leurs propriétés sont conservées après transformation.

Les avantages que présente cette transformation est qu'elle assure une réponse fréquentielle pour le filtre numérique très proche de celle du filtre analogique de départ, et que la stabilité du filtre est préservée.

L'approche bi-linéaire présente par rapport à l'invariance impulsionnelle l'avantage d'éviter les problèmes de recouvrement. En effet, lorsque  $\omega_a$  balaye le domaine  $[-\infty, +\infty]$  la fréquence  $\omega_d$  parcourt l'intervalle  $[-\frac{\pi}{T_e}, \frac{\pi}{T_e}]$ , or le recouvrement est dû aux valeurs du filtre à l'extérieure du domaine  $[-\frac{\pi}{T_e}, \frac{\pi}{T_e}]$ . (Fig.4.8)

La méthode d'invariance impulsionnelle donne au filtre numérique la même réponse impulsionnelle que celle du filtre analogique aux instants d'échantillonnage: Par ailleurs, elle modifie la réponse fréquentielle du filtre analogique.

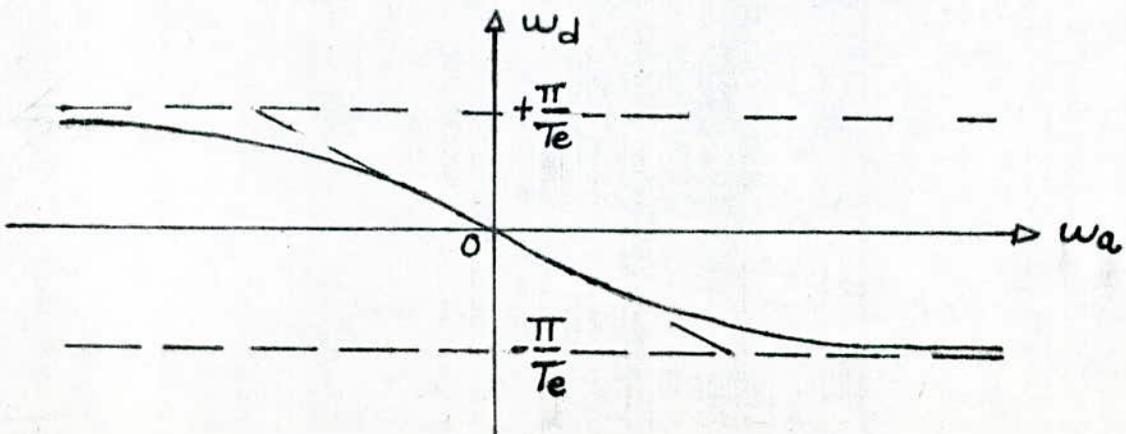


Fig 4.8. Déformation en fréquence apportée par la transformation bilinéaire.

## CHAPITRE 5

### STRUCTURE DES FILTRES NUMERIQUES

5.1 - GENERALITES

5.2 - STRUCTURE D'UN FILTRE NUMERIQUE

5.2.1 - STRUCTURE NON RECURSIVE

5.2.2 - STRUCTURE RECURSIVE.

### 5.1 - GENERALITES :

Le choix de la structure de réalisation (Organisation des calculs qui est très importante ) est effectué après que la synthèse du filtre numérique soit connue.

On peut distinguer selon la mise en oeuvre, les filtres récursifs et non récursifs qui conduisent à des difficultés de nature différentes. En ce qui concerne les filtres non récursifs, l'effort principal porte sur la réduction du temps de calcul. Pour les filtres récursifs le problème est de minimiser la propagation des erreurs.

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes structures envisageables.

Après avoir conçu un filtre numérique, il est nécessaire de l'implanter sur calculateur ( Ordinateur ou microprocesseur ).

Les structures les plus répandues sont, la directe; parallèle et cascade.

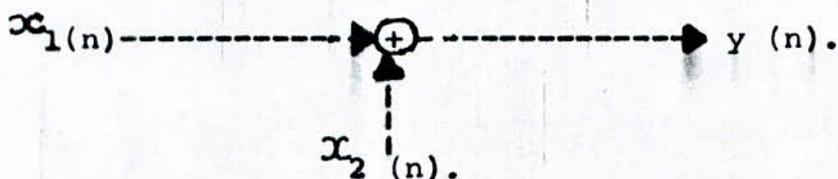
Le principe est d'écrire la fonction de transfert  $H(z)$  du filtre sous une forme propre au type de programmation :

- Utilisation de variables intermédiaires
- Décomposition en éléments simples de la fonction de transfert.
- Décomposition en produits de fonction de transfert du 1er ordre.

5.2 - Structures d'un filtre numérique :

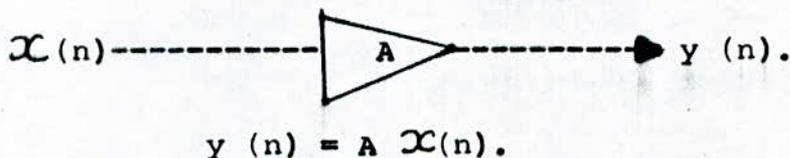
Les opérations utilisées par l'ordinateur de calcul seront représentées par les symboles suivants :

- Sommateur :



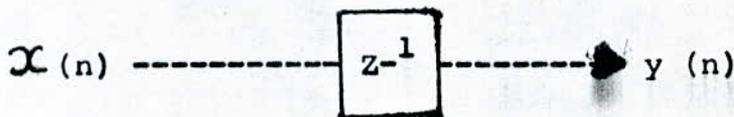
$$y(n) = x_1(n) + x_2(n).$$

- Multiplication par une constante :



$$y(n) = A x(n).$$

- Retard :



$$y(n) = z^{-1} x(n) = x(n-1)$$

### 5.2.1 - Structure non récursive :

La structure des filtres non-récurrents (Fig 5.1) découle directement de l'équation de récurrence :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i)$$

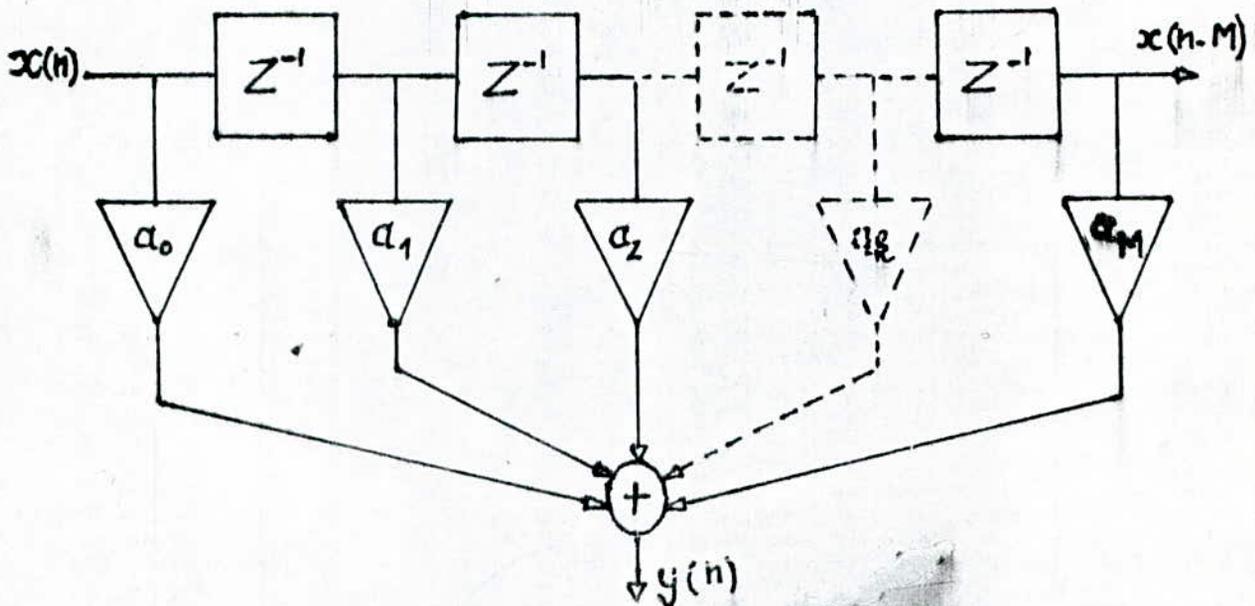


Fig (5.1) : Structure non récursive

Cette structure nécessite  $(M+1)$  emplacement mémoire, la gestion de la table  $x(n-1)$  et  $(M+1)$  multiplications

### 5.2.2 - Structure récursive

En partant de l'exemple d'un filtre récursif dont la nième valeur de sortie est calculée par :

$$y(n) = a_0 x(n) - b_1 y(n-1) \text{ Fig (5.2) }$$

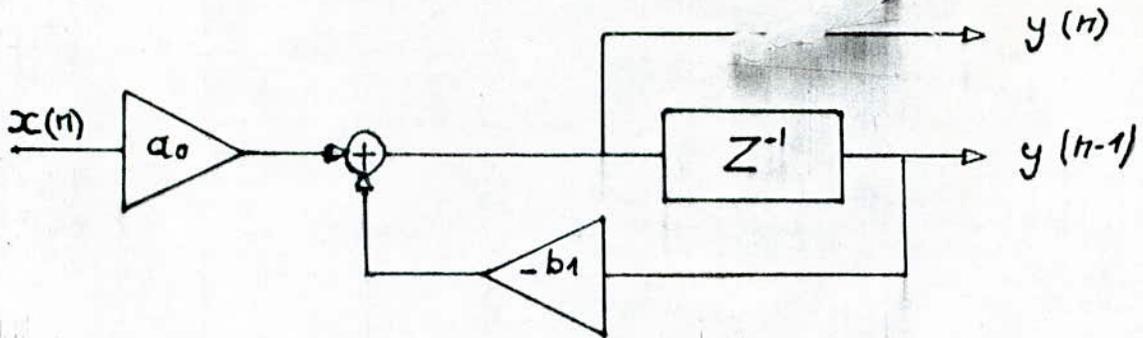


Fig ( 5.2 ) : Structure de réalisation d'un 1er Ordre

Pour mettre en oeuvre un tel filtre, il faut :

- 5 registres :  $y(n)$  ;  $y(n-1)$  ;  $x(n)$  ;  $a_0$  et  $b_1$

- Pour le calcul de chaque valeur de sortie, il faut compter :

2 multiplications, 1 addition, 1 décalage  
(  $y(n) \rightarrow y(n-1)$  ).

Pour les filtres d'ordre quelconque, leur structure découle de l'équation de récurrence définie par:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i)$$

Les formes suivantes sont envisageables :

a - Forme directe 1

A partir de "  $(M + 1)$  " valeurs d'entrée et "  $N$  " valeurs passées des sorties, on peut calculer  $y(n)$  en utilisant la structure de la figure (5.3 ).

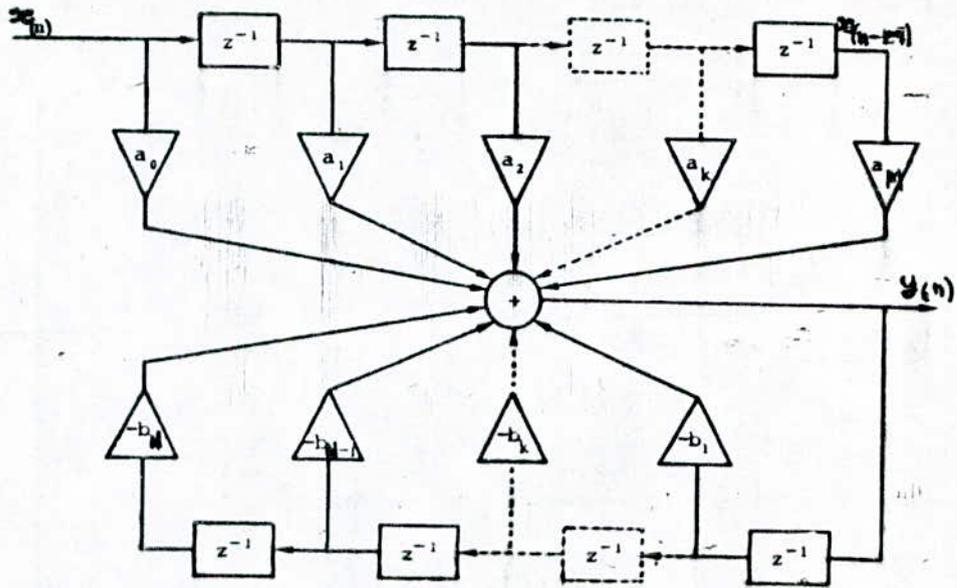


Fig (5.3 ) : Structure réalisée sous la forme directe 1.

Pour mettre en oeuvre un tel filtre, il faut

- M + N + 1 : Multiplications
- M + N : Additions
- N + M : Décalages

Cette forme n'est pas économique, car elle utilise plus d'éléments retards qu'il n'est nécessaire. On préfère alors la forme canonique ou forme directe 2, plus compacte qui diminue le nombre d'informations à garder en mémoire.

b - Forme canonique ou forme directe 2 :

On peut améliorer la structure réalisée sous la forme directe 1, en introduisant une variable intermédiaire  $W(Z)$  dans la fonction de transfert.

$$H(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_M Z^{-M}}{1 + b_0 Z^{-1} + \dots + b_N Z^{-N}} = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

soit :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{Y(Z)}{W(Z)} \cdot \frac{W(Z)}{X(Z)} = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^M a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i Z^{-i}}$$

d'où :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i w(n-i) \quad (57)$$

$$\text{et : } w(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N b_i w(n-i) \quad (58)$$

Cette structure est appelée forme directe 2 (fig (5.4)).

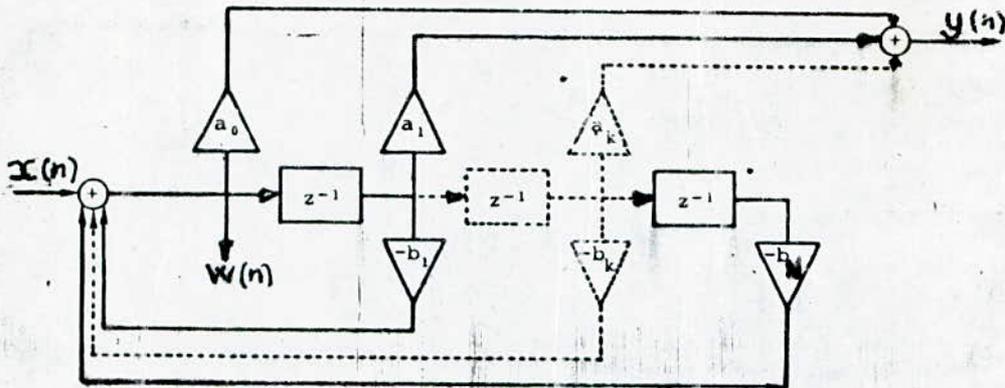


Fig ( 5.4 ) : Forme canonique

La forme canonique permet de réduire le nombre d'emplacements mémoires à  $N$  et la gestion d'une seule table  $W. ( n - i )$ , il faut prévoir aussi:

(  $M + N + 1$  ) : Multiplications

$N$  : Décalages

c - Forme parallèle

Soit  $H ( Z )$  la fonction de transfert en  $Z$  du filtre récursif.

$$H ( Z ) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i \cdot Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i \cdot Z^{-i}}$$

La forme parallèle (Fig 5.5 ) est obtenue en décomposant  $H (Z)$  en fractions simples du premier ou second ordre.

$$H (Z) = H_1 (Z) + H_2 (Z) + \dots + H_r (Z) = \sum_{i=1}^r H_i (Z)$$

$H_i (Z)$  peut être réalisée sous la forme directe 1 ou 2

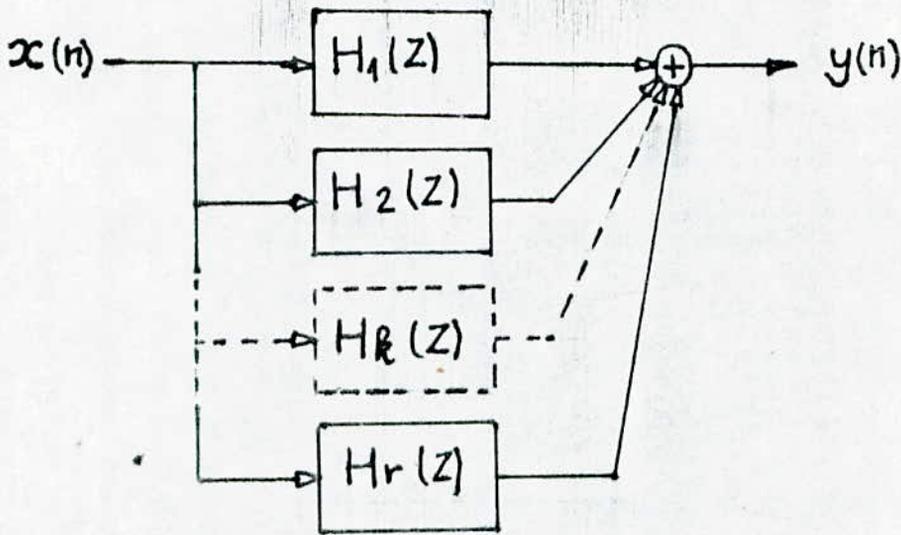


Fig (5.5 ) : Forme parallèle

La décomposition en éléments simples de  $(H(Z))$  donne :

$$H (Z) = D + \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{z - z_i}$$

avec :  $D = \lim_{|z| \rightarrow \infty} H (Z) = a_0 = \text{constante}$

$$C_i = (z - z_i) H (z) / z = z_i$$

Alors :

$$H(Z) = D + \sum_{i=1}^r H_i(Z) \quad (59)$$

$$H(Z) = D + \sum_{i=1}^r \frac{a_{0i} + a_{1i} Z^{-1}}{1 + b_{1i} Z^{-1} + b_{2i} Z^{-2}} \quad (\text{Cas d'une cellule du 2ème Ordre})$$

La figure (5.6) montre le schéma de réalisation de 2 cellules du 2ème ordre où chacune est montée selon la structure canonique.

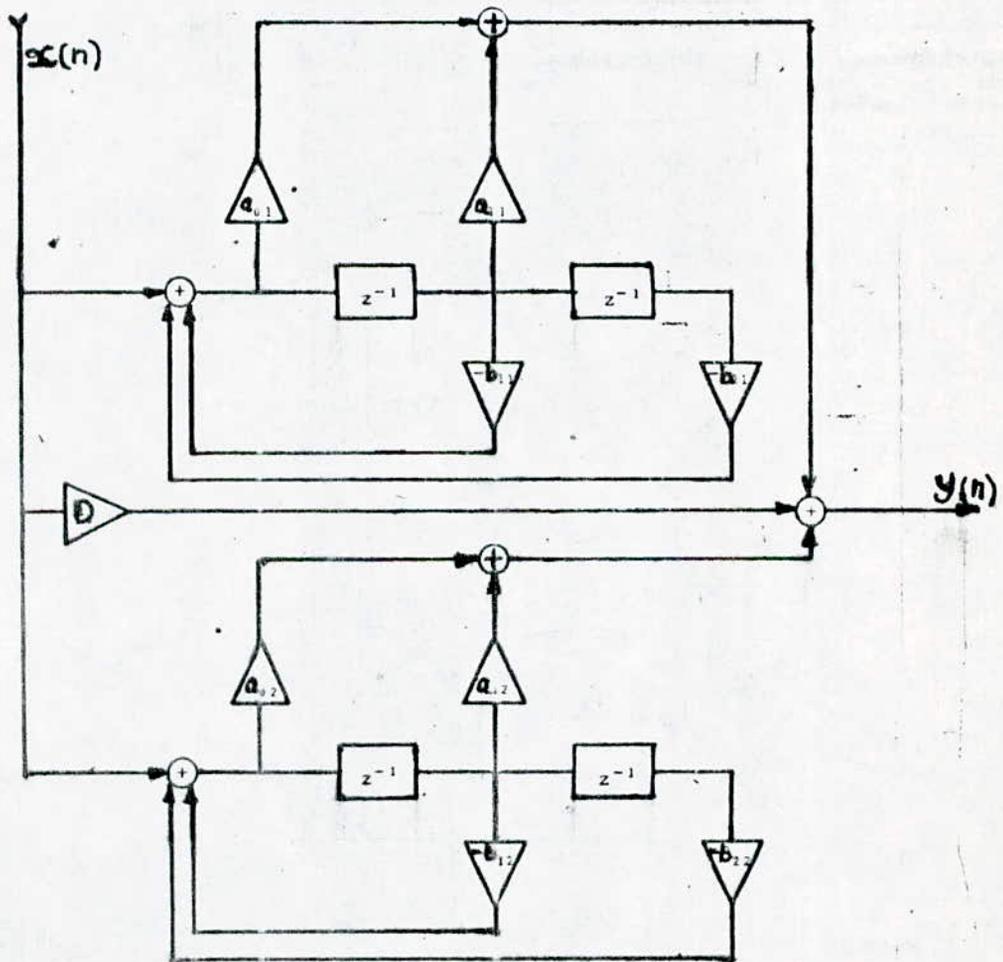


Fig 5.6. Forme parallèle de 2 cellules du 2ème ordre

d - Forme cascade :

Une fonction de transfert du nieme ordre peut-être factorisée en un produit de n fonctions de transfert du 1er ordre réelles ou complexes (Fig 5.7).

$$H(Z) = a_0 \frac{(Z-Z^1_1)(Z-Z^1_2)\dots(Z-Z^1_M)}{(P-P_1)(P-P_2)\dots(P-P_N)} \quad (M \leq N)$$

d'où :  $Z^j$  ( $j = 1, \dots, M$ ) sont les zéros de  $H(Z)$

$P_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sont les pôles de  $H(Z)$

Soit :  $H_i(Z) = \frac{(Z - Z^1_j)}{(Z - P_i)}$  ( $j = 1, \dots, M$ )

d'où :  $H(Z) = a_0 \prod_{i=1}^r H_i(Z)$  (60)

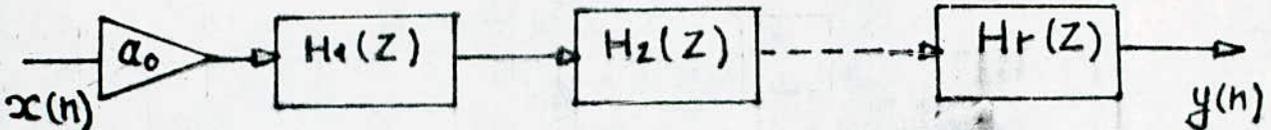


Fig (5.7) Forme cascade

De même que pour la réalisation sous la forme parallèle  $H_i(Z)$  peut-être réalisée sous la forme directe 1 ou 2.

- Réalisation sous forme cascade ( Fig 5.8 )

$$\text{Cellule du 2ème Ordre : } H_i (Z) = \frac{1 + a_{i1} Z^{-1} + a_{i2} Z^{-2}}{1 + b_{i1} Z^{-1} + b_{i2} Z^{-2}}$$

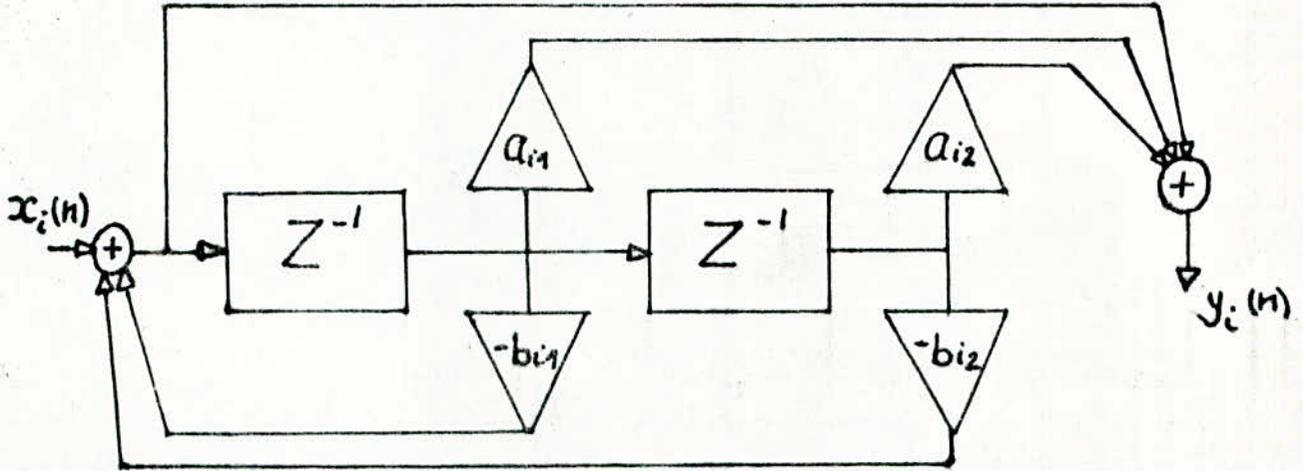


Fig (5.8 ). Cellule élémentaire usuelle (forme cascade ).

En général, on écrit

$$H (Z) = a_0 \prod_{i=1}^r \frac{1 + a_{i1} Z^{-1} + a_{i2} Z^{-2}}{1 + b_{i1} Z^{-1} + b_{i2} Z^{-2}}$$

l'équation (5.5 ) peut s'écrire :

$$H_i (Z) = \frac{Y_i (Z)}{X_i (Z)} = \frac{Y_i (Z)}{W_i (Z)} \bullet \frac{W_i (Z)}{X_i (Z)}$$

d'où l'équation de récurrence :

$$Y_i(n) = W_i(n) + a_{i1} W_i(n-1) + a_{i2} W_i(n-2) \quad (61)$$

$$W_i(n) = X_i(n) - b_{i1} W_i(n-1) - b_{i2} W_i(n-2) \quad (62)$$

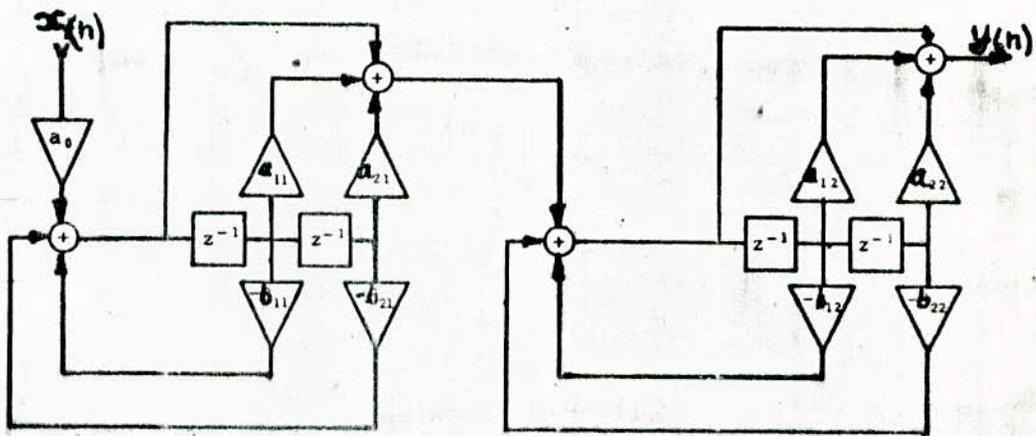


Fig 5.9. Forme cascade.

**CHAPITRE 6**

**APPLICATION DES FILTRES NUMERIQUES**

- 6.1 - PROPRIETES DU SIGNAL DE LA PAROLE**
- 6.2 - TECHNIQUE D'ANALYSE - SYNTHESE DE LA PAROLE**
  - 6.2.1 - LES DIFFERENTES METHODES D'ANALYSE DE LA PAROLE**
  - 6.2.2 - LA SYNTHESE DE LA PAROLE.**

Les filtres numériques jouent un rôle primordial dans le traitement des signaux, plus particulièrement dans le domaine de la parole, du fait qu'ils présentent plusieurs avantages par rapport aux filtres analogiques, tels que la facilité d'utilisation, la grande précision et la variété assez large; leurs domaines d'application sont multiples. Nous citerons entre-autres la parole, télécommunications,...

Le traitement de la parole fera l'objet de notre application où nous décrirons brièvement les méthodes d'analyse et de synthèse de la parole. Pour cela, on s'intéressera le plus au synthétiseur à prédiction linéaire car il est fondé sur l'utilisation d'un filtre numérique.

#### 6.1 - Propriétés du signal de la parole :

##### 6.1.1. Aspect physiologique de la phonation :

Les principaux organes composant l'appareil phonatoire sont : les poumons, les cordes vocales, le pharynx, la cavité buccale et la cavité nasale ( Fig 6.1 ).

Les poumons débitent un courant d'air continu que les cordes vocales transforment en flux d'air périodique ou aléatoire.

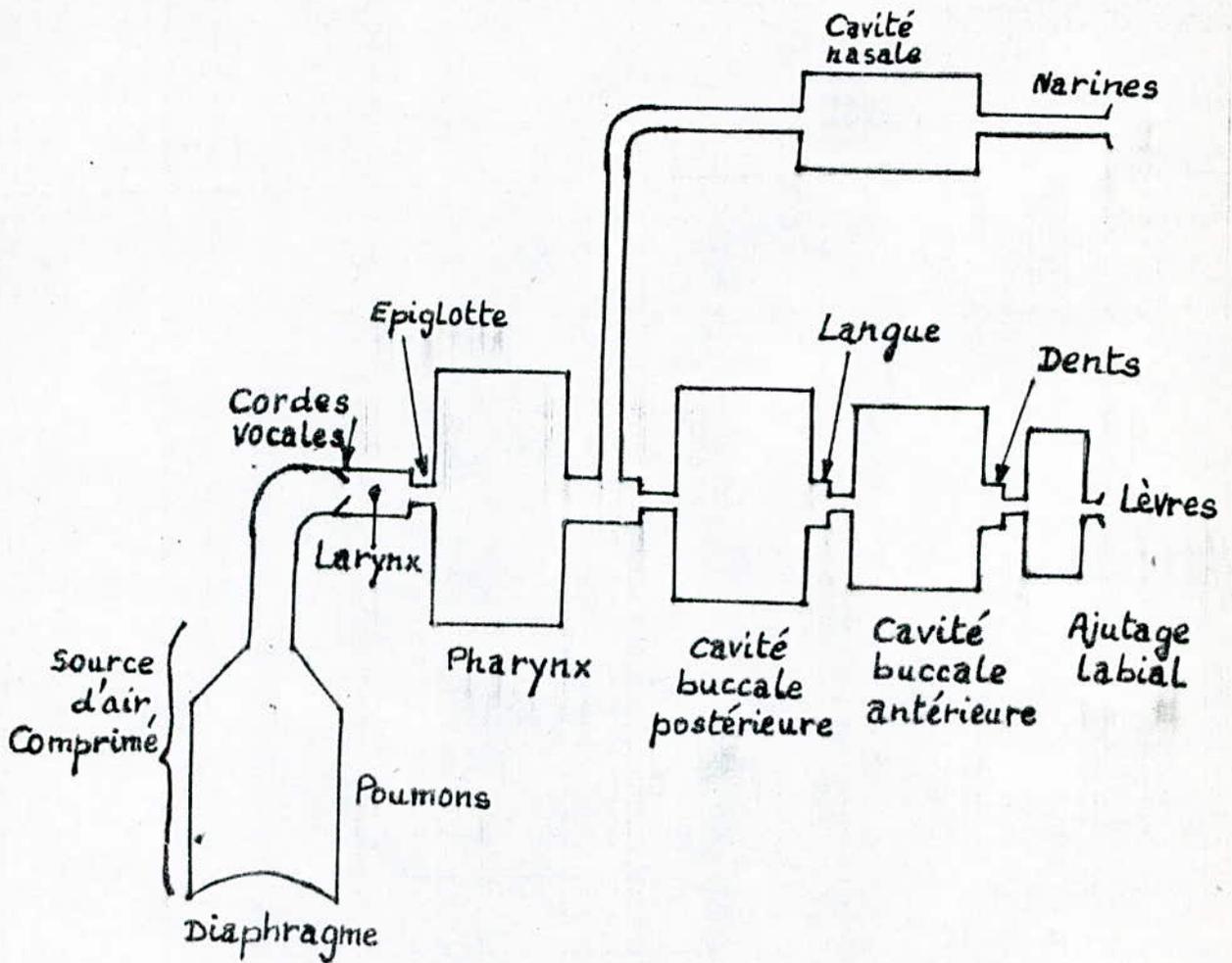


Fig 6.1. L'appareil phonatoire humain.

6.1.2 - Les principales caractéristiques acoustiques de la parole :

Le paramètre essentiel qui caractérise le signal de la parole est la fréquence du signal d'excitation issue du larynx appelée : " fréquence fondamentale  $F_0$ " (ou pitch ) celle-ci varie entre 70 et 150 Hz pour les voix d'hommes et entre 150 et 400 Hz pour les voix de femmes et enfants ( CINARE.F. 1983 ).

Cette différence est due à la longueur et la masse des cordes vocales qui est plus petite chez les femmes que chez les hommes.

La fonction de transfert acoustique du conduit vocal est de la même forme que la fonction de transfert en Z d'un filtre numérique ( R. MIQUEL 1985 ).

Les maxima. de la courbe de réponse en fréquence du conduit vocal sont appelés " Formants " ( Fig 6.2 ).

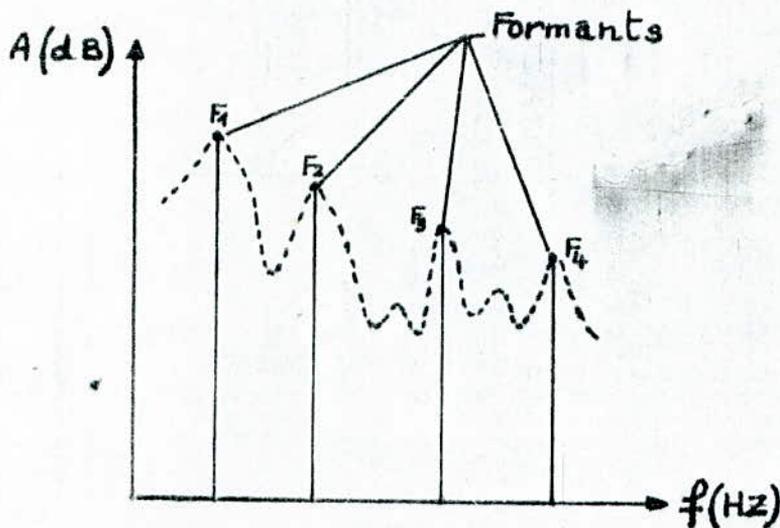


Fig 6.2. Spectre vocalique présentant quatre résonances formantiques.

### 6.1.3. Opposition voisée - non-voisée :

Un son est dit voisé ( Sonore ) lorsque les cordes vocales vibrent ( Exemple : les voyelles ). Dans le cas contraire ( Cordes vocales inactives ), on parle de son non-voisé ( Sourd ).

Exemple : ( f ) ; ( s ) ; (  $\int$  ).

## 6.2. Technique d'analyse synthèse de la parole :

Pour transmettre une information donnée entre un émetteur et un récepteur, il faut utiliser des techniques qui permettent une représentation du signal sous une forme " réduite " ( codage ) telle que, après transmission ( ou stockage ), on peut reconstituer le signal original ( décodage ) à partir de ces informations ( Fig 6.3 ).

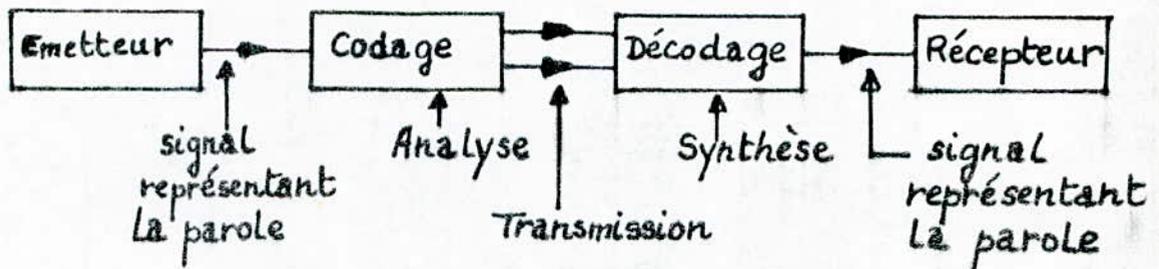


Fig 6.3. Schéma classique de la théorie de l'information développée par SHANNON et WEAVER ( 1947 ).

### 6.2.1 - Les différentes méthodes d'analyse de la parole :

La première opération d'analyse consiste à transformer le temps en intervalles d'environ 10 à 20 ms. Ces intervalles de temps sont appelés " fenêtre temporelle."

L'analyse du signal de la parole repose sur l'hypothèse fondamentale suivante :

Le signal à analyser est stationnaire pendant toute la durée de la fenêtre d'analyse. Le signal est ensuite échantillonné et l'on obtient pour chaque fenêtre une suite d'échantillons  $S(n)$ .

### 6.2.1.1 - Analyse spectrale

Cette analyse permet la connaissance de la composition spectrale du signal de la parole. On distingue deux méthodes :

- Méthode analogique
- Méthode numérique

#### A - Analyse analogique :

Les méthodes utilisées sont :

a - Analyse de Fourier : permet d'obtenir le spectre du signal de la parole en utilisant la transformée de Fourier.

b - Analyse instrumentale : basée sur deux types d'analyseurs.

- Analyseur à filtres en parallèle (Vocodeurs)
- Analyseur à filtre unique.

#### B - Analyse numérique :

Il s'agit de numériser le signal de la parole pour le mémoriser dans un ordinateur ou le traiter par la suite ( Fig 6.4 ).

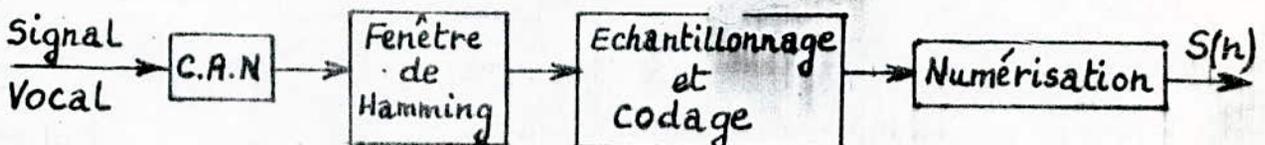


Fig 6.4. Schéma du principe d'analyse numérique.

Après avoir appliqué le fenêtrage (Sgl. Stationnaire) au signal vocal converti, on procède à l'opération d'échantillonnage et de codage afin de le mettre en mémoire.

Il existe deux méthodes d'analyse numérique :

- Analyse par TFD ( cf. Chap. 1 )
- Analyse cepstrale

#### 6.2.1.2 - Analyse temporelle :

Cette analyse permettra l'étude de certains phénomènes qui sont mieux caractérisés par leur évolution dans le temps, que par leur spectre.

Les principales méthodes de cette analyse sont :

- La méthode de passage par zéro
- La méthode de la fonction d'auto-corrélation
- La méthode de la prédiction linéaire ( L.P.C ).

Parmi ces trois méthodes on s'intéresse à la prédiction linéaire ( appelée aussi : Techniques du codage prédictif linéaire " LPC ") car elle est fondée sur un modèle simple ( filtre numérique récursif ) de production de la parole et donne une estimation très précise des paramètres de la parole ( formants, fréquence fondamentale).

#### - Méthode de la prédiction linéaire :

##### 1°) Principe :

La méthode "LPC" repose sur le fait qu'un échantillon de parole peut être approximativement prédit par une combinaison linéaire des échantillons précédents pondérés par des coefficients.

Soit :  $S(n)$  : l'échantillon du signal de parole original  
 $\hat{S}(n)$  : l'échantillon prédit de  $S(n)$ .

$S(n)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\hat{S}(n) = \sum_{k=1}^P a(k) \cdot S(n-k) \quad (63)$$

où :  $a(k)$  sont les coefficients du prédicteur

Connaissant les coefficients de prédiction, on calcule le signal de manière approchée par récurrence et ceci tant que le signal reste stable ( c'est-à-dire : intervalle de temps suffisamment faible ).

En appliquant à l'équation (63) la transformation Z, on obtient :

$$\hat{S}(Z) = \sum_{k=1}^P a(k) \cdot Z^{-k} S(Z) \quad (64)$$

$$\text{d'où : } \hat{S}(Z) = F(Z) \cdot S(Z) \quad (65)$$

$F(Z)$  représente le filtre linéaire de prédiction

D'autre part, l'erreur de prédiction entre le signal original et le signal prédit est donnée par :

$$e(n) = S(n) - \hat{S}(n) \quad (66)$$

$$E(Z) = S(Z) - \hat{S}(Z) \quad (\text{Par la T.Z}) \quad (67)$$

Les équations (64) et (67) donnent :

$$E(Z) = S(Z) \left[ 1 - \sum_{k=1}^P a(k) \cdot Z^{-k} \right]$$

$$E(z) = S(z) [1 - F(z)] \quad (68)$$

on pose :

$$A(z) = 1 - F(z).$$

on aura :

$$E(z) = S(z) A(z) \quad (69)$$

Ainsi, on obtient le modèle de prédiction linéaire (Fig 6.5 ).

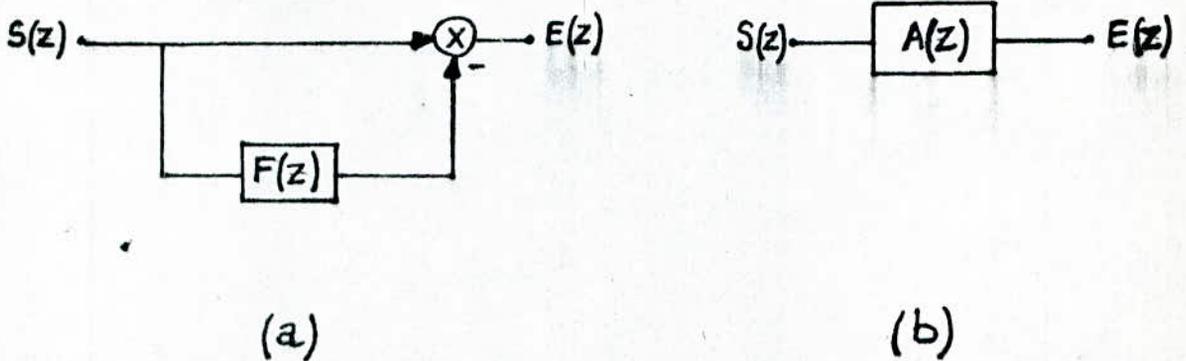


Fig 6.5. a - Représentation du filtre prédicteur F (Z)  
b - Représentation équivalente du filtre inverse

On se base sur le principe que le conduit vocal filtrant le signal d'excitation  $u(n)$  peut être assimilé à un filtre récursif. La prédiction linéaire consiste donc à exprimer la valeur du  $n^{\text{ième}}$  échantillon en fonction des "P" échantillons précédents et de l'entrée  $U(nT)$  du système si le signal est échantillonné avec une période d'échantillonnage "T", cette valeur est donnée par :

$$\hat{S}(nT) = \sum_{k=1}^P a(k) \hat{S}(nT - kT) + AU(nT) \quad (70)$$

où A est un facteur de gain.

On obtient ainsi le modèle de production de la parole dans le domaine temporel (Fig 6.6 ).

En appliquant la transformée en Z à l'équation(69), on obtient :

$$\hat{S}(z) = \sum_k a(k) \cdot \hat{S}(z) \cdot z^{-k} + AU(z) \quad (71)$$

$$\text{d'où : } H(z) = \frac{S(z)}{U(z)} = \frac{A}{1 - \sum_k a(k) \cdot z^{-k}} \quad (72)$$

d'où le modèle de production de la parole dans le domaine fréquentiel.

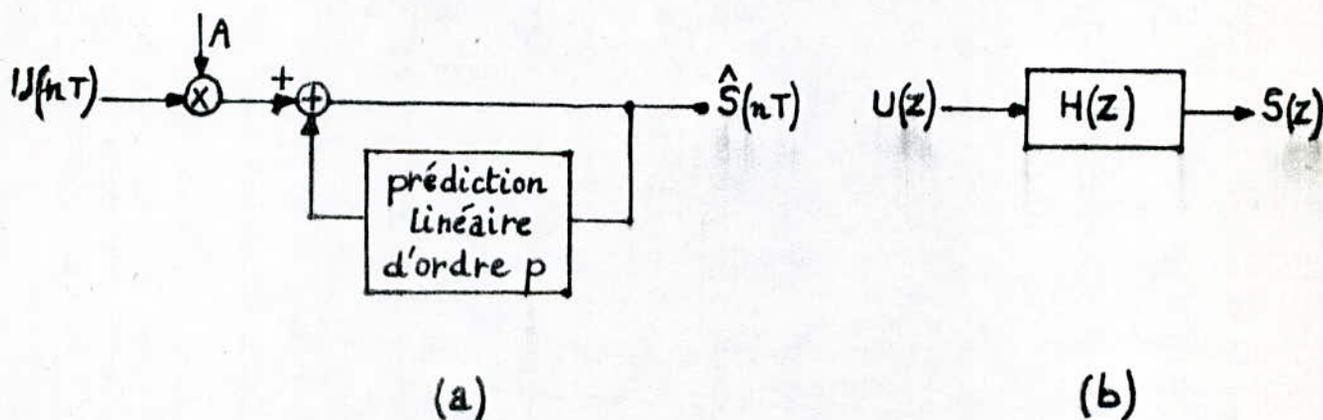


Fig 6.6. - Modèle de production de la parole

- a - Le domaine temporel
- b - Le domaine fréquentiel

Le modèle utilisé dans la méthode " L P C " est fondé sur les trois hypothèses suivantes :

- La source vocale et le conduit vocal peuvent être considérés comme constants pour les intervalles de temps courts.

- Pendant ces intervalles de temps, on suppose que l'on approche la fonction de transfert d'un filtre récursif.

- Le signal de parole de synthèse est constitué par le signal de sortie d'un filtre dont les coefficients  $a(k)$  avec  $1 \leq k \leq P$  sont renouvelés.

D'autre part, la prédiction linéaire permet d'estimer des paramètres " pertinents " du signal; pour cela deux critères sont utilisés :

a - Le critère L1 :

Soient : un signal  $S(n)$

$n$  : nombre entier

$\mu(a)$  une approximation linéaire de  $s(n)$  où  $a$  est le vecteur des coefficients de prédiction.

Le critère "L1" consiste en la minimisation de la quantité.

$$L1 = \sum_n |S(n) - \mu(a)| = \sum_n |S(n) - \sum_{k=1}^P \mu(k) \cdot a(k)| \quad (73)$$

où :  $P$  ordre du prédicteur

Dans le cas de la parole :  $\mu(k) = S(n-k)$

d'où :

$$L1 = \sum_n |S(n) - \sum_{k=1}^P a(k) \cdot S(n-k)| \quad (74).$$

b - Le critère L2 - (critère des moindres carrés).

Ce critère consiste en la minimisation de l'erreur quadratique totale, à savoir que :

$$e(n) = S(n) - \hat{S}(n) = S(n) - \sum_{k=1}^P a(k) \cdot S(n-k).$$

Soit E, l'erreur quadratique totale :

$$E = \sum_n e^2(n) = \sum_n \left[ S(n) - \sum_{k=1}^P a(k) \cdot S(n-k) \right]^2 \quad (75).$$

On cherche à minimiser "E" par rapport à chaque coefficient prédicteur a(k), pour cela, on procède par la dérivée partielle suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial a(i)} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k, i \leq P.$$

d'où :

$$2 \sum_n \left[ S(n) - \sum_{k=1}^P a(k) \cdot S(n-k) \right] S(n-i) = 0$$
$$\Rightarrow \sum_n \sum_{k=1}^P a(k) \cdot S(n-k) \cdot S(n-i) = \sum_n S(n) \cdot S(n-i) \quad (76)$$

avec :  $1 \leq k \leq P$  et  $1 \leq i \leq P$

L'équation (76) peut s'écrire encore :

$$\sum_{k=1}^P a(k) \sum_n S(n-k) \cdot S(n-i) = \sum_n S(n) \cdot S(n-i), \quad (77)$$

L'équation (77) constitue un système de "P" équations à "P" inconnues.

2° les principales méthodes de prédiction linéaire :

l'analyse par "LPC" regroupe plusieurs méthodes dont les plus utilisées sont :

- La méthode de covariance
- La méthode d'auto-corrélation
- La formulation du filtre entreilli.

a - Méthode de covariance :

Elle consiste à trouver les " P " coefficients " a(k) " en posant :

$$c(i, k) = \sum_n S(n-k) \cdot S(n-i) \quad (78)$$

L'équation (77) devient :

$$\sum_{k=1}^P a(k) \cdot c(i, k) = C(i, 0) \text{ avec } 1 \leq i \leq P$$

Supposons qu'on a "N" échantillons de parole :

$$S(p) = [ S(0); S(1); \dots S(N-1) ]$$

la méthode de covariance se résume comme suit :

$$\left( \begin{array}{l} \sum_{k=1}^P a(k) \cdot C(i, k) = C(i, 0) \\ \text{avec } c(i, k) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n-i) \cdot S(n-k). \end{array} \right) \quad (79)$$

Sous forme matricielle, l'équation (79) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} c(1,1) & c(1,2) & \dots & c(1,P) \\ c(2,1) & c(2,2) & \dots & c(2,P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(P,1) & c(P,2) & \dots & c(P,P) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(1,0) \\ c(2,0) \\ \vdots \\ c(P,0) \end{pmatrix} \quad (80)$$

b - Méthode d'autocorrélation :

Le signal n'est connu que sur un intervalle fini, il est nul à l'extérieur d'un autre de "N" échantillons délimité par une fenêtre.

Dans ce cas, on pose :  $m=n-i$   
 l'équation (77) devient :

$$\sum_{k=1}^P a(k) \sum_m S(m) \cdot S(m + |i - k|)$$

$$= \sum_m S(m + |i|) \cdot S(m) \quad (81)$$

En général, l'autocorrélation est donnée par :

$$c(i, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n-i) \cdot S(n-k) \quad (82)$$

Puisque le signal est limité par une fenêtre

$$S(m) = 0 \text{ pour } m \notin [0; N-1]$$

L'équation (82) devient :

$$c(i, k) = \sum_{m=0}^{N-1-|i-k|} S(m) \cdot S(m + |i - k|) \quad (83)$$

D'autre part, on définit les coefficients de corrélation par :

$$R(i - k) = \sum_{m=0}^{N-1-|i-k|} S(m) \cdot S(m + |i - k|)$$

d'où :

$$R(i) = \sum_{m=0}^{N-1-|i|} S(m) \cdot S(m + |i|) \quad (84)$$

La résolution du système (81) donne :

$$R(i) = \sum_{k=1}^P a(k) \cdot R(|i-k|) \quad 1 \leq i \leq P \quad (85)$$

L'équation (85) se traduit par la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(P-1) \\ R(1) & R(0) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ R(P-1) & R(P-2) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(P) \end{pmatrix} \quad (86)$$

Nous remarquons que la matrice carrée (Rp) est symétrique et définie positive; sa diagonale est constituée d'éléments identiques : c'est la matrice de " TOEPLITZ ".

c - Formulation du filtre en treillis :

Le principe de cette méthode sera décrit au paragraphe 6-2.2.2.

6-2.2 - Synthèse de la parole

Le principe des synthétiseurs est de créer une analogie avec l'appareil phonatoire humain.

Les différentes techniques offertes par les synthétiseurs de parole sont :

- Vocodeur à canaux
- Vocodeur à prédiction linéaire.

6.2.2.1 - Le vocodeur à canaux :

Le vocodeur à canaux est un appareil, qui permet de réduire le nombre d'informations à transmettre sur une ligne téléphonique, il fonctionne par conséquent à faible débit et se compose de deux parties : l'analyseur et le synthétiseur ( Fig 6.7 ).

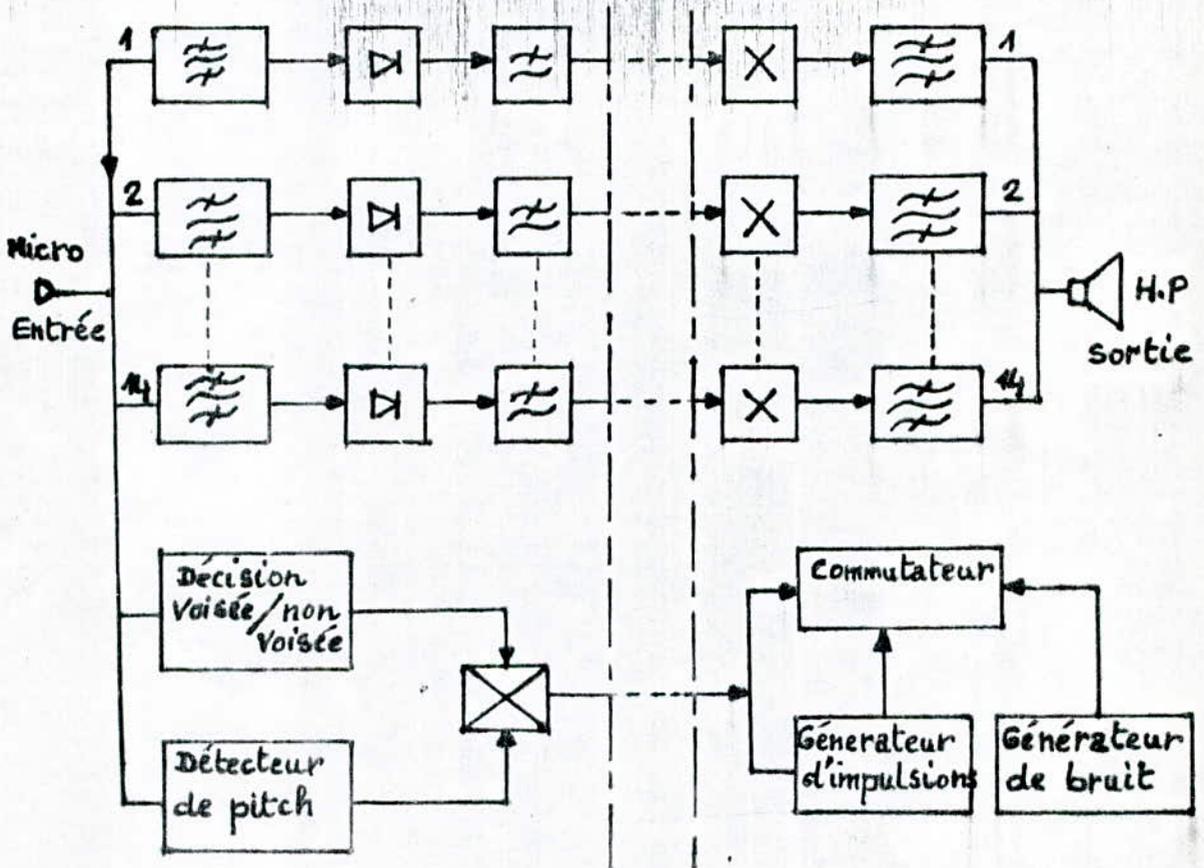


Fig 6.7. Schéma fonctionnel d'un vocodeur à 14 canaux.

#### A - L'analyseur :

Le signal issu du microphone est analysé dans différents canaux (10 à 20) où chaque canal traite une bande de fréquence à l'aide d'un banc de filtres " passe-bande ". Chaque filtre est suivi d'un étage de détection, lui-même suivi d'un étage de filtrage passe-bas qui est suivi d'un autre étage de numérisation.

L'analyseur comporte également un détecteur de voisement qui permet de donner la valeur de la fréquence fondamentale de sons voisés.

#### B - Le synthétiseur :

La synthèse est effectuée à l'aide d'un banc de filtre passe-bande identique à celui de l'analyse.

Ces filtres sont excités par un signal d'excitation provenant soit d'un générateur périodique ( pour les sons voisés ) soit d'un générateur de bruit ( pour les sons non-voisés ).

L'entrée de chaque filtre passe-bande est modulée en amplitude en fonction de l'énergie mesurée derrière le filtre d'analyse correspondant.

Le signal de sortie est obtenu par addition des sorties des filtres de synthèse.

#### 6.2.2.2 - Le vocodeur à prédiction linéaire :

La " LPC " a permis un développement considérable des vocodeurs, elle conduit à des synthétiseurs constitués.

essentiellement d'un filtre numérique récursif ( Fig 6.8 ), de plus, la parole synthétique obtenue est de bonne qualité.

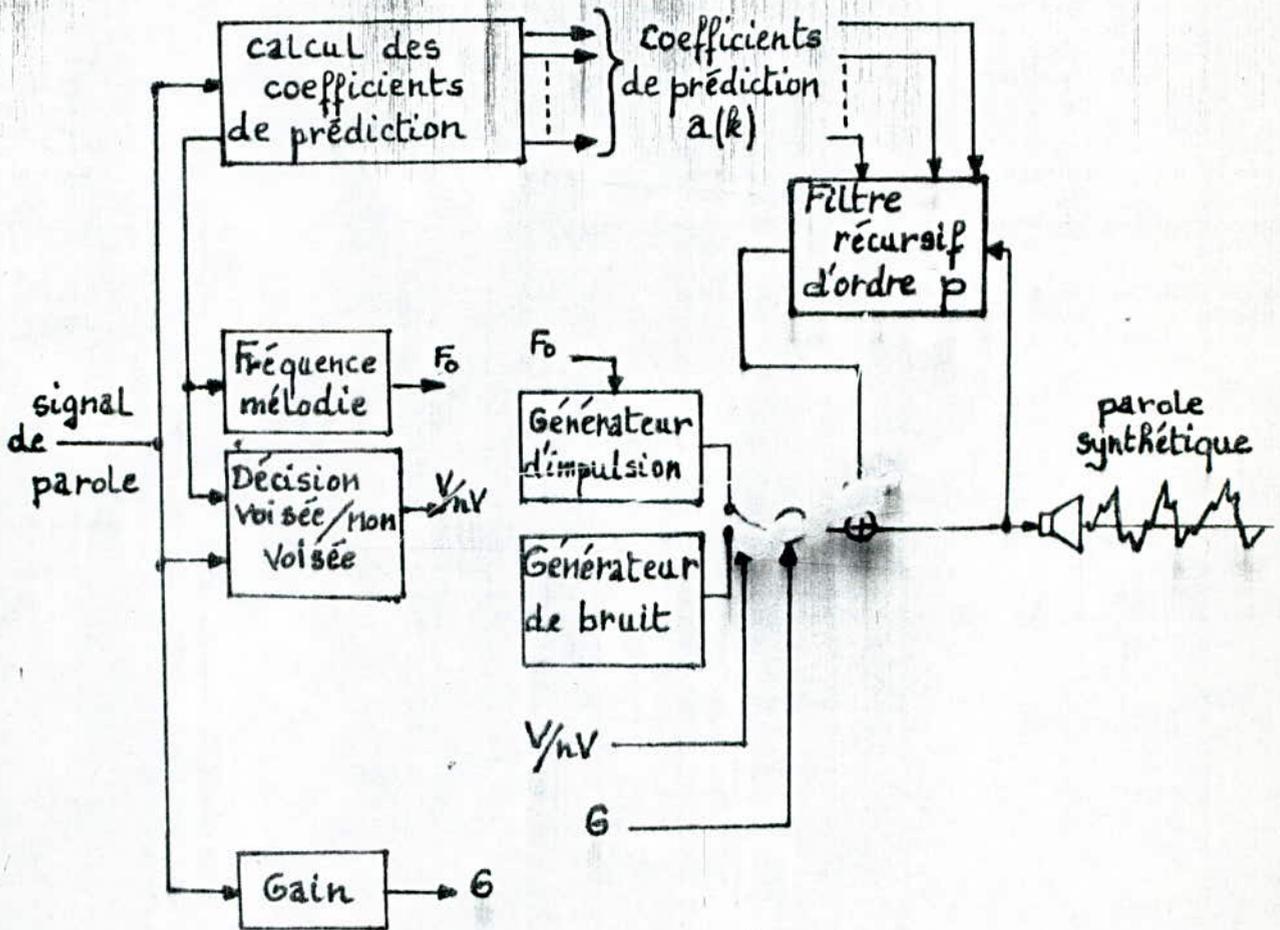


Fig 6.8. Analyse synthèse par prédiction linéaire.

#### A - Analyseur à L.P.C :

Ce type d'analyseur permet la détection de voisement et de la fréquence fondamentale. Il opère le codage sur les paramètres à transmettre au synthétiseur ( le gain, la mélodie et le voisement ).

Le spectre du signal de la parole est exprimé sous la forme d'une réponse d'un filtre récursif. Le problème essentiel réside à la détermination des coefficients du filtre prédicteur, pour cela on pourra utiliser la méthode d'autocorrélation qui permet la détermination rapide de ces coefficients.

Remarque :

La fenêtre d'analyse utilisée pour le traitement du signal de la parole est la fenêtre de Hamming (cf. Annexe B ).

#### B - Le synthétiseur à L.P.C

Le synthétiseur est contrôlé à l'aide des paramètres relevés lors de l'analyse.

- La période "  $T_0$  " du fondamental
- Le signal relatif au choix de l'excitation (voisée ou non voisée ).
- L'amplitude du signal d'excitation qui est ajustée à l'aide de l'amplificateur G.
- Les coefficients  $a(k)$  de prédiction (coefficients du filtre ).

Il est constitué par la source d'excitation et par le filtre modèle :

a - L'excitation :

Un commutateur s'élèctionnera le type d'excitation correspondant.

- Un générateur d'impulsions en cas de voisement
- Un générateur de bruit blanc en cas de non-voisement.

b - Le filtre modèle :

Dans la technique de synthèse par L.P.C, on sépare les paramètres provenant de la source de sons, de ceux fournis par le conduit vocal ( représentés par les coefficients de LPC )

b. 1 - Modèle du filtre récursif : La parole synthétique provient donc de l'excitation d'un filtre récursif de fonction de transfert  $\frac{1}{A(Z)}$ , soit par des impulsions, soit par du bruit blanc. (Fig. 6.9 ).

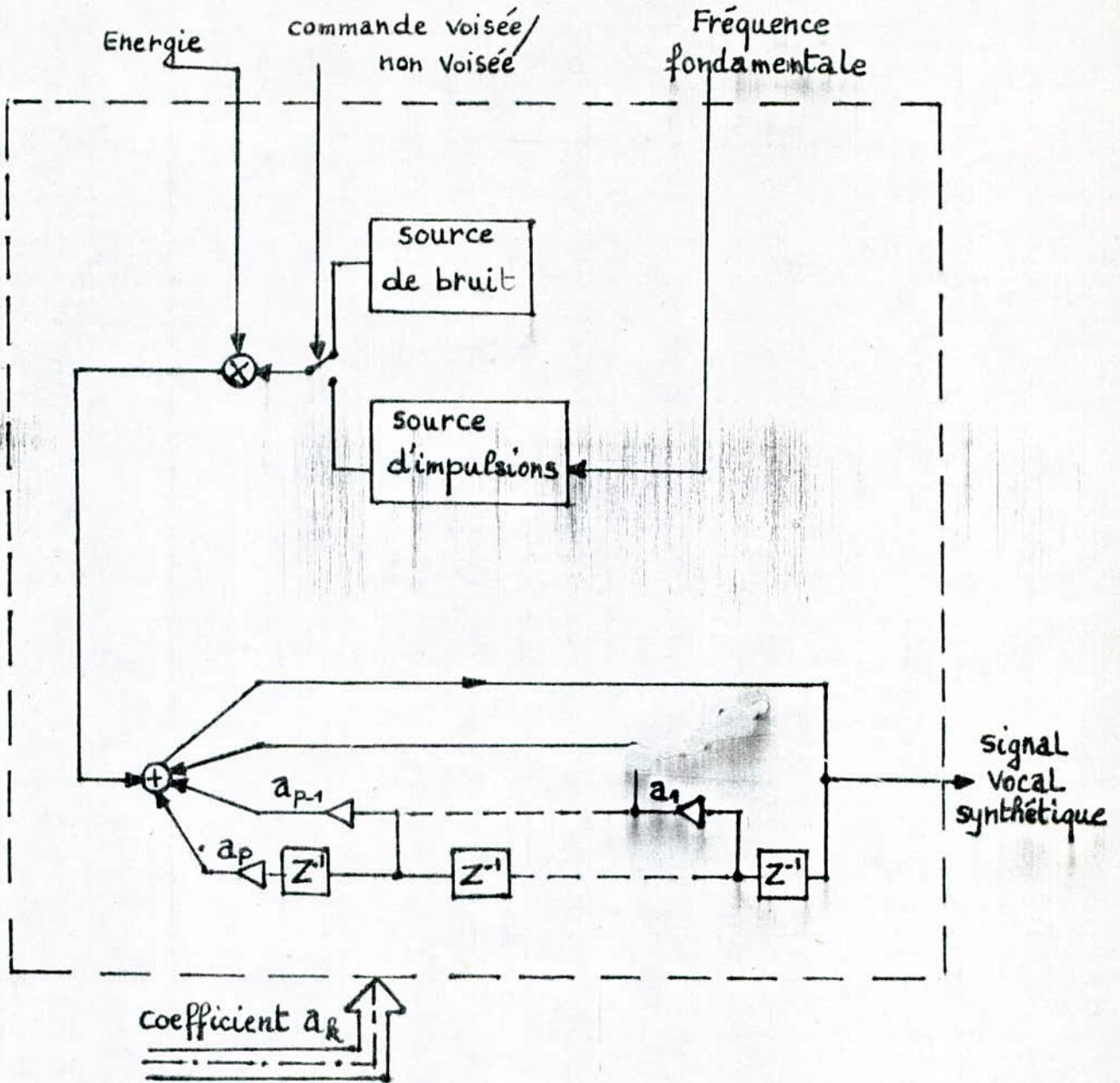


Fig 6.9. Structure directe du filtre de synthèse.

L'utilisation des coefficients  $a(k)$  du filtre modèle conduit à un synthétiseur d'une extrême simplicité et permet d'obtenir une parole de synthèse de bonne qualité à des débits moyens.

La nécessité de parvenir à des débits plus faibles sans risques d'instabilité du filtre conduit à l'utilisation du modèle du filtre en treillis qui est caractérisé par la détermination des coefficients de réflexion bornés et compris entre  $-1$  et  $+1$ .

C'est donc un moyen simple de contrôle de la stabilité d'un filtre.

b.2 - Modèle du filtre en treillis : c'est un filtre à "m" étages ( m est l'ordre du filtre ) où dans chaque étage on réalise deux multiplications des signaux par les coefficients de réflexion ( Fig 6.10 ).

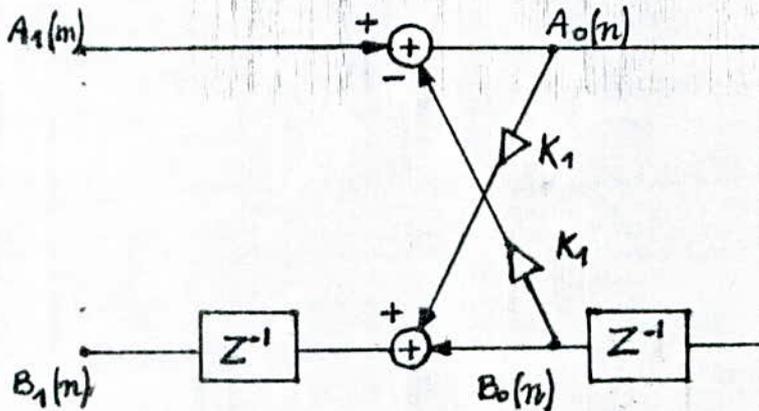


Fig 6.10. Etage élémentaire du filtre en treillis

De ce fait la synthèse par filtre en treillis est très utilisée car elle est basée sur un modèle simple de production du signal de la parole.

La fonction de transfert du filtre utilisé est donné par :

$$H ( Z ) = \frac{1}{A ( Z )} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_{mi} Z^{-i}} \quad (87)$$

Le filtre inverse A ( Z ) est donné par une structure en treillis ( Fig 6.11 ).

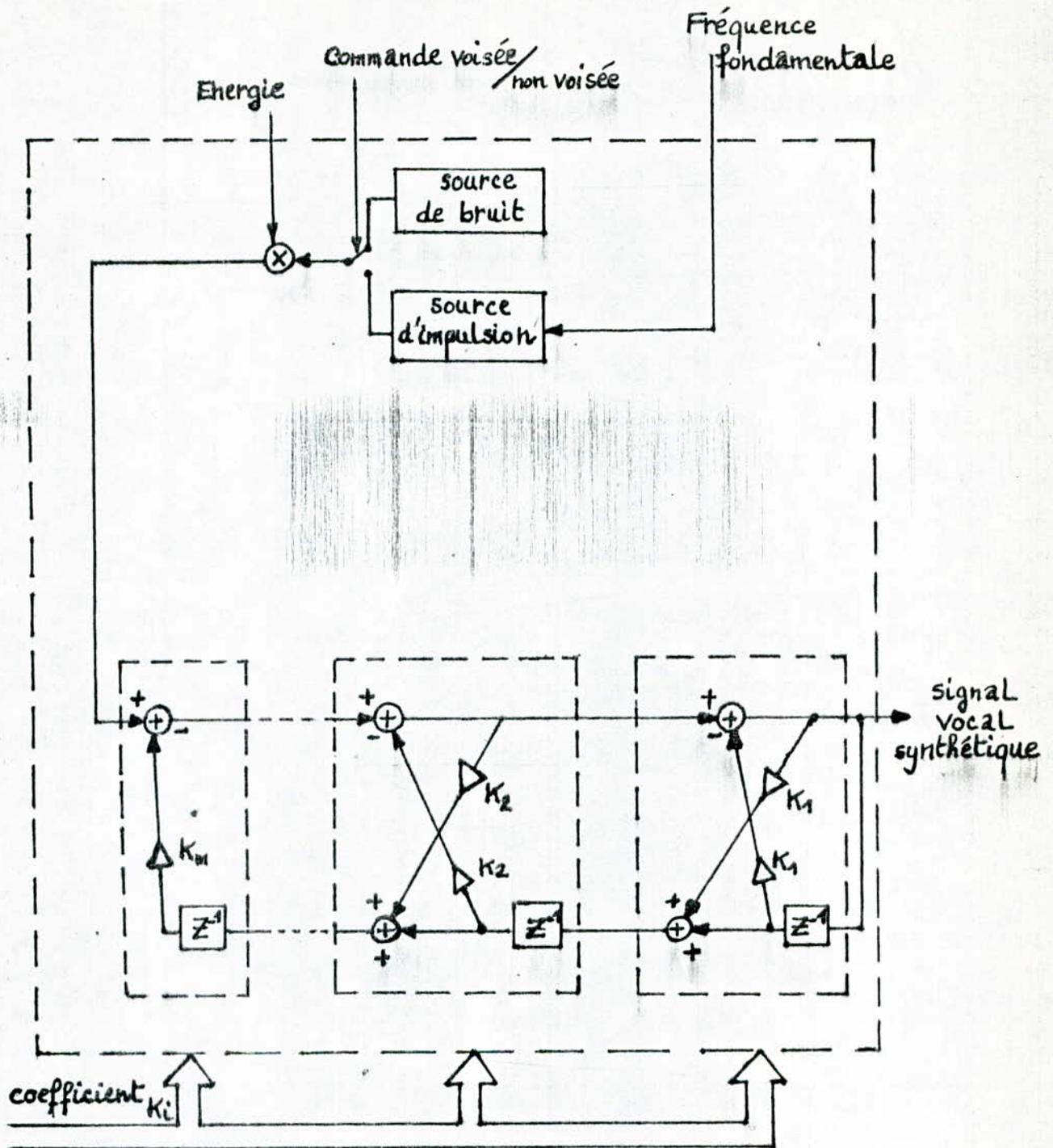


Fig 6.11. Filtre en treillis à deux multiplieurs pour un synthétiseur à prédiction linéaire.

Les équations qui régissent ce filtre sont :

$$A_m(n) = A_{m-1}(n) + K_m B_{m-1}(n) \quad (88)$$

$$B_m(n) = Z^{-1} [ B_{m-1}(n) + K_m A_{m-1}(n) ] \quad (89)$$

La transformée en Z des équations (88) et (89) donne :

$$A_m(Z) = A_{m-1}(Z) + K_m B_{m-1}(Z) \quad (90)$$

$$Z B_m(Z) = K_m A_{m-1}(Z) + B_{m-1}(Z) \quad (91)$$

avec :  $A_0(Z) = 1$  et  $B_0(Z) = Z^{-1}$ ,

D'autre part, les polynômes  $A_m(Z)$  et  $B_m(Z)$  sont donnés par :

$$A_m(Z) = \sum_{i=0}^m a_{mi} Z^{-i} \quad (92) \quad \text{avec } a_{m0} = 1$$

$$\begin{aligned} B_m(Z) &= Z^{-(m+1)} A_m\left(\frac{1}{Z}\right) \\ &= Z^{-(m+1)} \sum_{i=0}^m a_{mi} Z^i \end{aligned}$$

d'où :

$$B_m(Z) = \sum_{i=1}^{m+1} a_{m, m+1-i} Z^{-i} \quad (93)$$

En substituant les équations (92) et (93) dans l'équation (90), on obtient :

$$\sum_{i=0}^m a_{mi} Z^{-i} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{m-1, i} Z^{-i} + K_m \sum_{i=1}^m a_{m-1, m-i} Z^{-i} \quad (94)$$

avec  $m = 1, \dots, M.$

L'équation (94) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{l} \text{Am-1,i} \quad \text{pour } i = 0 \\ \text{am-1,i} + \text{Km am-1, m-i} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \\ \text{Km} \quad \text{pour } i = 0 \end{array} \right) \\
 \text{ami} = & \left( \begin{array}{l} \text{Am-1,i} \quad \text{pour } i = 0 \\ \text{am-1,i} + \text{Km am-1, m-i} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \\ \text{Km} \quad \text{pour } i = 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Aussi, cette méthode nous permettra de déterminer les coefficients du filtre A (Z) connaissant les coefficients de réflexion K (I) ( I = 1,2,...M ) et l'ordre M du filtre (cf. programme 1)

avec :

$$\frac{1}{A(Z)} = \frac{1}{AM(Z)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^M \text{ami} \cdot Z^{-i}}$$

Autrement dit, en appliquant l'algorithme de DURBIN on aura.

```

( E (0) = R (0) )
( Pour K variant de 1 à P, On procéde )
( Début )
( | K (I) = [ R (I) - \sum_{j=1}^{I-1} A(j,I-1) \cdot R (I-j) ] / E (I-1) )
( | )
( | A (I,I) = K (I) )
( | A (J,I) = A (J,I-1) + K(I) \cdot A(I-J, I-1) 1 \le J \le I-1 )
( | E (I) = [ 1 - K^2 (I) ] \cdot E (I-1) )
( FIN )
    
```

avec : p : ordre du prédicteur

A (I) : coefficients du filtre

E (I) : erreur de prédiction à l'ordre " I "

K (I) : coefficients de corrélation partielle ( PARCOR )  
ou coefficients de réflexion.

R (I) : coefficients d'autocorrélation  $0 \leq I \leq P$ .

PROGRAMMATION

Les programmes ont été exécutés sur le micro  
ordinateur OLIVETTI M24 du centre de calcul de l'E.N.P.A.

# PROG:1

```
10 CLS
20 KEY OFF
30 PRINT "FILTRE ENTREILLIS"
40 REM *****
50 REM **CALCUL DES COEFFICIENTS DU FILTRE A(Z)**
60 REM *****
65 LPRINT"EXEMPLE NUMERIQUE:"
70 PRINT "INTRODUIRE L'ORDRE M DU FILTRE":M
80 LPRINT " L'ORDRE M DU FILTRE EST: ";M
90 PRINT "INTRODUIRE LES COEFFICIENTS DE REFLEXION K(J):"
100 FOR J=1 TO M
110 INPUT K(J)
120 NEXT J
130 FOR J=1 TO M
140 LPRINT "LE COEFFICIENT K(";J-1;")=";K(J)
150 NEXT J
160 A(0,0)=1
170 FOR T=1 TO M
180 A(T,0)=A(T-1,0)
190 FOR I=1 TO T-1
200 A(T,I)=A(T-1,I)+K(T)*A(T-1,T-I)
210 NEXT I
220 A(T,I)=K(T)
230 NEXT T
235 LPRINT "LES VALEURS DE A(S) SONT:"
240 FOR S=0 TO M
250 LPRINT"A(";S+1;")=";A(M,S)
260 NEXT S
270 STOP
```

## EEXEMPLE NUMERIQUE:

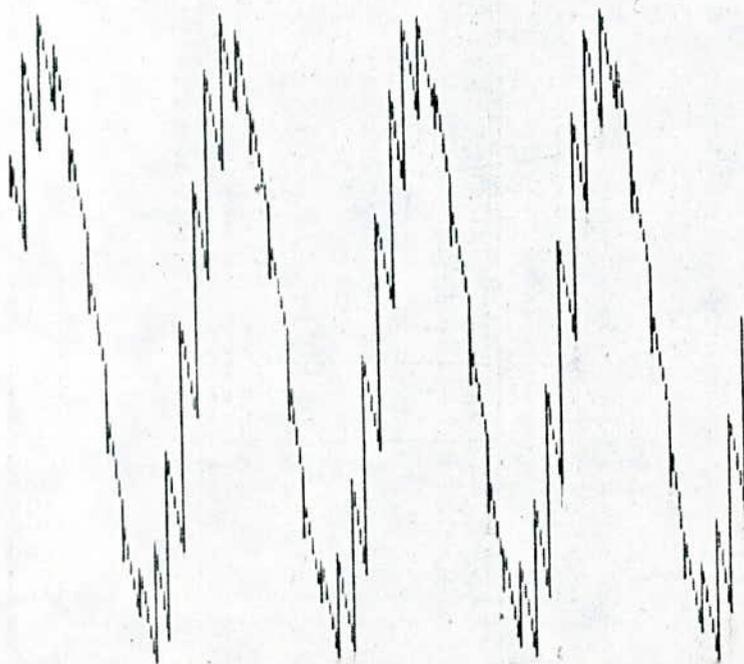
```
L'ORDRE M DU FILTRE EST: 8
LE COEFFICIENT K( 0 )=-.94217
LE COEFFICIENT K( 1 )= .92386
LE COEFFICIENT K( 2 )=-.56198
LE COEFFICIENT K( 3 )=-.09454
LE COEFFICIENT K( 4 )= .20218
LE COEFFICIENT K( 5 )= .53595
LE COEFFICIENT K( 6 )=-.32922
LE COEFFICIENT K( 7 )=-.05899
LES VALEURS DE A(S) SONT:
A( 1 )= 1
A( 2 )=-2.346445
A( 3 )= 1.656965
A( 4 )=-5.988129E-03
A( 5 )= .3230458
A( 6 )=-1.482134
A( 7 )= 1.154633
A( 8 )=-.1896576
A( 9 )=-.05899
```

# PROG:2

```
10 CLS
20 REM *****
30 REM **SIMULATION DU SIGNAL DE PAROLE PAR UNE FONCTION SINUSOÏDALE**
40 REM *****
50 REM ** CHOIX DU NOMBRE D'ECHANTILLONS **
60 DIM S(5000),Y(5000)
70 PRINT "INTRODUIRE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE TE":INPUT TE
80 LPRINT "LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE TE EST: ";TE
90 PRINT "INTRODUIRE LA PERIODE DU SIGNAL T":INPUT T
100 LPRINT "LA PERIODE DU SIGNAL T EST: ";T
110 PI=3.141592
120 PRINT "DONNER LE NOMBRE DE POINT N":INPUT N
130 LPRINT "LE NOMBRE DE POINT N EST: ";N
140 FOR I=1 TO INT(N/2)
150 S(I)=SIN(2*PI*I*(1/T)*TE)
160 NEXT I
170 CLS
180 SCREEN 3
190 VIEW (10,10)-(628,371)
200 WINDOW ( 0,-2)-(1.1*N,+2)
210 FOR I=1 TO INT(N/2)
220 PSET (I,S(I))
230 NEXT I
240 E=1
250 FOR I=1 TO INT(N/2)-1
260 LINE (I,S(I))-(I,S(I)+.15) : Y(E)=S(I) : E=E+1
270 LINE (I,S(I)+.15)-(I+1,S(I)-.2) : Y(E)=S(I)+.15 : E=E+1
280 LINE (I+1,S(I)-.2)-(I+1,S(I+1)) : Y(E)=S(I)-.2 : E=E+1
290 NEXT I
300 LOCATE 22,15 :PRINT "SIGNAL DE PAROLE SIMULE"
310 STOP
```

## EXEMPLE:

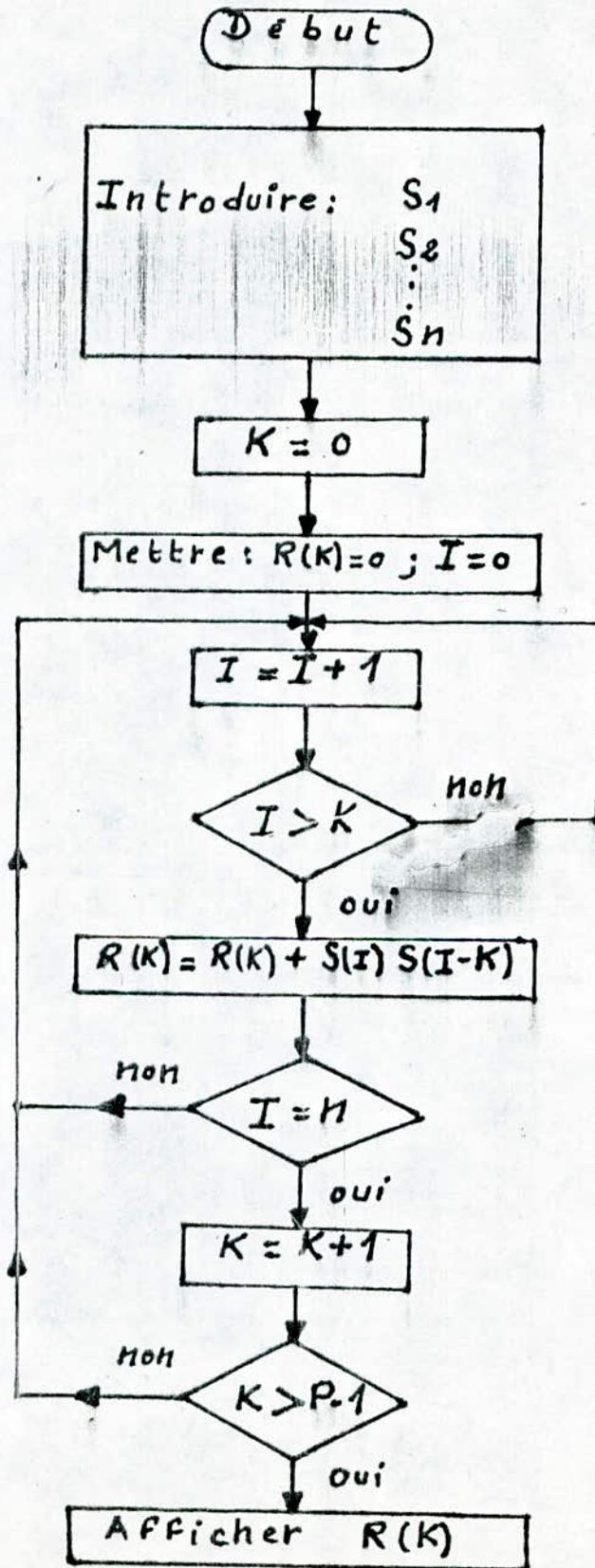
```
LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE TE EST: .17
LA PERIODE DU SIGNAL T EST: 2.08
LE NOMBRE DE POINT N EST: 99
```



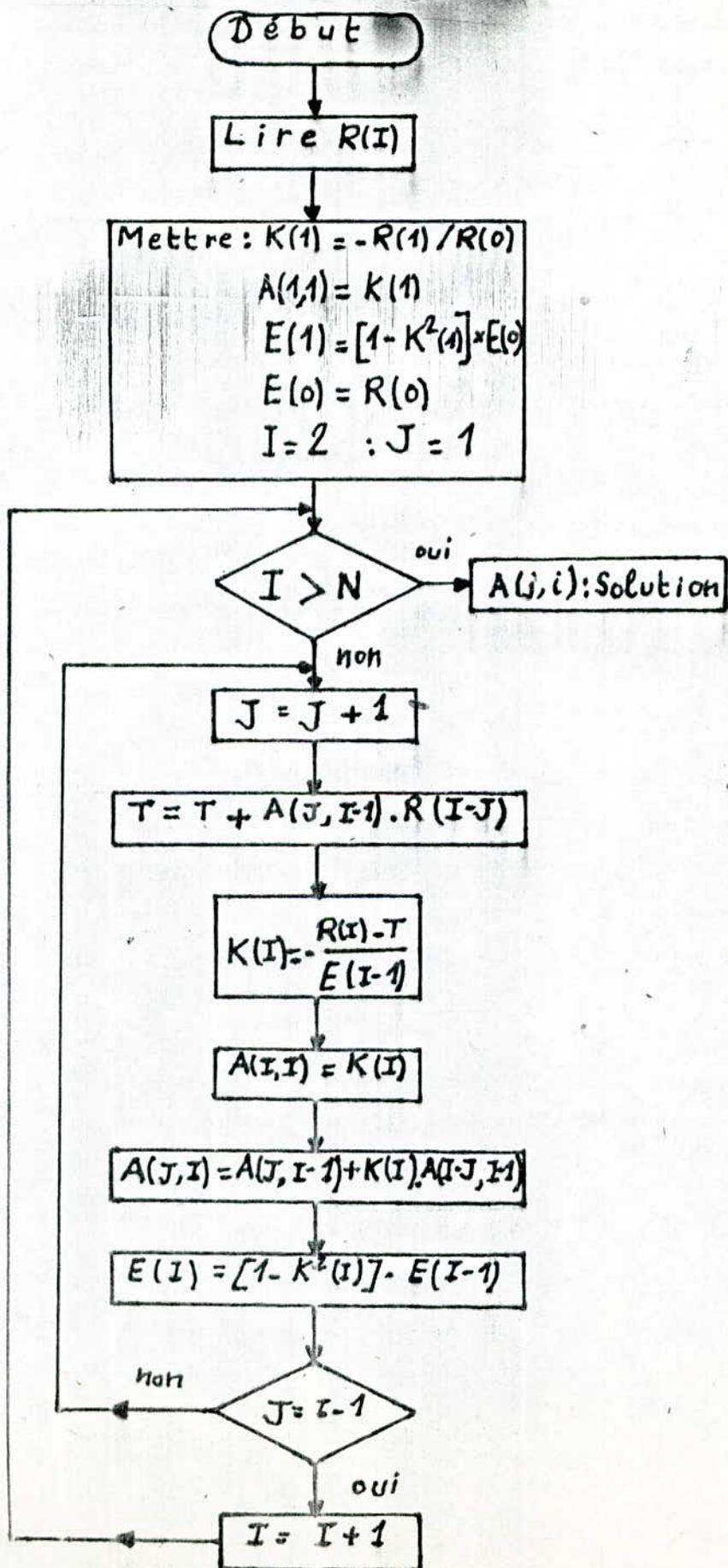
SIGNAL DE PAROLE SIMULE

ORGANIGRAMME : ( Relatif au programme 3 )

CALCUL DES R (K) : Valeurs de la fonction d'autocorrélation.



CALCUL DES COEFFICIENTS  $[ak]$  DU PREDICTEUR :



L'algorithme présenté par l'organigramme précédent nécessite le calcul des coefficients d'auto corrélation " R (k) " qui sont calculés à partir de la méthode d'auto-corrélation.

Pour introduire des échantillons du signal de parole, on simule ce dernier à une fonction sinusoidale ( cf. prog. 2 ) de période " T " où l'on choisira la période d'échantillonnage "Te" afin d'avoir le nombre d'échantillons.

Nous présentons deux exécutions du programme 3 où l'on fait varier la fréquence fondamentale : la première sera relative à la voix d'un homme et la seconde à celle d'une femme (fig P.1).

	Execution n°1 voix d'homme	Exécution n°2 voix de femme
fo: fréquence fondamentale	120 Hz	2,40 Hz
T: Période du signal ( 1/fo )	8,33 ms	4,16 ms
Te : Periode d'échantillonnage	0,17 ms	0,17 ms
M : Nombre de périodes	2	4
N' : Nombre N' = T/Te d'intervalles	49	24
NP : Nombre de points NP = ( M X N' ) + 1	99	99
t : Durée de la fenêtre d'analyse 10 < t = MT < 20 ms	16,6 ms	16,6 ms

Fig P.1 - Exécutions relatives au programme 3.

Le signal de la parole étant introduit, il sera traité pour être reconstitué par la suite. Cependant, on obtient de nouvelles valeurs des coefficients prédicteurs utilisés au programme 4. ( Simulation d'un filtre récursif ) pour identifier la stabilité du filtre utilisé.

# PROG : 3

```
10 REM *****
20 REM ** INTRODUCTION DES ECHANTILLONS DU SIGNAL DE PAROLE **
30 REM *****
40 DIM S(300), W(300), YS(300)
50 CLS
60 PI=3.141592
70 PRINT "INTRODUIRE L'ORDRE DU PREDICTEUR:P": INPUT P
80 LPRINT "L'ORDRE DU PREDUCTEUR P EST: "; P
90 PRINT "INTRODUIRE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE:TE": INPUT TE
95 LPRINT "LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE TE EST: "; TE
100 PRINT "INTRODUIRE LA PERIODE DU SIGNAL:T": INPUT T
105 LPRINT "LA PERIODE DY SIGNAL T EST: "; T
110 PRINT "DONNER LE NOMBRE DE POINT:N": INPUT N
115 LPRINT "LE NOMBRE DE POINT N EST: "; N
120 FOR I=1 TO N
130 S(I)=SIN(2*PI*I*(1/T)*TE)
140 NEXT I
150 REM ** FILTRE DE PREACCENTUATION **
160 PRINT "INTRODUIRE LE COEFFICIENT DE PREACCENTURATION M" INPUT M
165 LPRINT "LE COEFFICIENT DE PREACCENTURATION M EST: "; M
170 FOR I=1 TO N
180 W(I)=S(I)-M*S(I-1)
190 NEXT I
200 CLS
210 SCREEN 3
220 VIEW (0,0)-(628,371)
230 WINDOW (-100,-2)-(100,+2)
240 FOR I=1 TO N
250 NEXT I
260 FOR I=1 TO N-1
270 LOCATE 20,50 :PRINT "SIGNAL DE PAROLE "
280 LINE (300,5)-(300,300):LINE (300,150)-(600,150)
290 LINE (I,W(I))-(I+1,W(I+1))
300 NEXT I
310 REM *****
320 REM ** CALCUL DES VALEURS DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION:R(K) **
330 REM *****
340 PRINT
350 DIM R(200), K(200)
360 FOR I=0 TO P
370 R(I)=0
380 NEXT I
390 FOR L=0 TO P
400 FOR I=L TO N
410 R(L)=R(L)+S(I)*S(I-L)
420 NEXT I
430 R(L)=R(L)/N
440 NEXT L
450 FOR L=0 TO P
460 PRINT "R(", L, ")= "; R(L)
470 NEXT L
```

4

```
480 REM *****
490 REM ** CALCUL DES COEFFICIENTS DU PREDICTEUR :A(K) **
500 REM ** ET DES COEFFICIENTS DE REFLEXION :K(I) **
510 REM *****
520 DIM E(199)
530 DIM A(P,P+1)
540 DIM D(12)
550 E(0)=R(0)
560 K(1)=-R(1)/R(0)
570 A(1,1)=K(1)
580 E(1)=(1-(K(1)*K(1)))*E(0)
590 FOR I=2 TO P
600 T=0
610 FOR J=1 TO I-1
620 T=T+A(J,I-1)*R(I-J)
630 NEXT J
640 K(I)=- (R(I)+T)/E(I-1)
650 A(I,I)=K(I)
660 FOR J=1 TO I-1
670 A(J,I)=A(J,I-1)+K(I)*A(I-J,I-1)
680 NEXT J
690 E(I)=(1-(K(I)*K(I)))*E(I-1)
700 NEXT I
710 REM *****
720 REM ** CALCUL DU GAIN **
730 REM *****
740 G=SQR(E(P))
750 LPRINT "LE GAIN G EST :";G
760 LPRINT "LES VALEURS DE A(I) SONT : "
770 OPEN "0",#1,"A:A"
780 FOR I=1 TO P
790 LPRINT "A(",I,")=";A(I,P)
800 D(I)=A(I,P):WRITE #1,D(I)
810 NEXT I
820 CLOSE #1
830 LPRINT "LES VALEURS DE K(I) SONT : "
840 FOR I=1 TO P
850 LPRINT "K(",I,")=";K(I)
860 NEXT I
870 REM *****
880 REM ** SIGNAL DE PAROLE SYNTHETIQUE **
890 REM *****
900 DIM Y(300),U(300)
910 PRINT "INTRODUIRE LA PERIODE DES IMPULSIONS NP":INPUT NP
920 LPRINT "LA PERIODE DES IMPULSIONS NP EST :";NP
930 FOR I=0 TO N STEP NP
940 U(I)=1
950 NEXT I
960 Y(0)=G*U(0)
970 FOR I=1 TO N
980 Z=0
990 FOR K=1 TO P
1000 IF (I-K)<0 THEN 1040
```

```
1010 Z=Z+D(K)*Y(I-K)
1020 Y(I)=G*U(I)-Z
1030 NEXT K
1040 NEXT I
1050 REM ** FILTRE DE DESACCENTUATION **
1060 REM ( M:EST LE ZERO DE LA PREACCENTUATION )
1070 YS(0)=Y(0)
1080 FOR I=1 TO N
1090 YS(I)=M*YS(I-1)+Y(I)
1100 NEXT I
1110 CLS
1120 SCREEN 3
1130 VIEW (0,0)-(628,371)
1140 WINDOW (-100,-2)-(100,+2)
1150 FOR I=1 TO N-1
1160 LINE (I,YS(I))-(I+1,YS(I+1))
1170 NEXT I
1180 LOCATE 20,50:PRINT"SIGNAL DE PAROLE SYNTHETISEE"
1190 STOP
```

## EXÉCUTION:1

L'ORDRE DU PRODUCTEUR P EST: 12  
LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE TE EST: .17  
LA PERIODE DU SIGNAL T EST: 8.33  
LE NOMBRE DE POINT N EST: 99  
LE COEFFICIENT DE PREACCENTUATION M EST: .01

LE GAIN G EST = 2.906979E-02

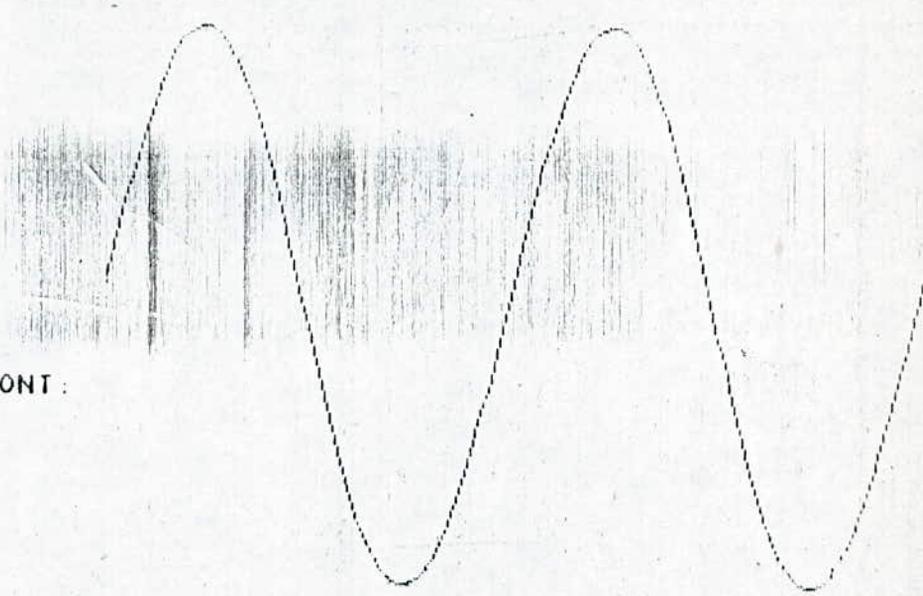
LES VALEURS DE A(I) SONT:

A( 1 ) = -1.58986  
A( 2 ) = .3808471  
A( 3 ) = .1446164  
A( 4 ) = 5.682949E-02  
A( 5 ) = .0201695  
A( 6 ) = 9.582841E-03  
A( 7 ) = 2.073767E-03  
A( 8 ) = 1.65844E-03  
A( 9 ) = 8.703728E-04  
A( 10 ) = 7.061903E-04  
A( 11 ) = 1.907116E-03  
A( 12 ) = -4.981316E-03

LES VALEURS DE K(I) SONT:

K( 1 ) = -.9914593  
K( 2 ) = .9418511  
K( 3 ) = .3137306  
K( 4 ) = .1126681  
K( 5 ) = 3.644269E-02  
K( 6 ) = 8.602744E-03  
K( 7 ) = -2.99708E-03  
K( 8 ) = -5.782653E-03  
K( 9 ) = -7.052251E-03  
K( 10 ) = -6.876287E-03  
K( 11 ) = -6.012628E-03  
K( 12 ) = -4.981316E-03

LA PERIODE DES IMPULSIONS NP EST: 50



SIGNAL DE PAROLE



SIGNAL DE PAROLE SYNTHETIQUE

## EXÉCUTION: 2

L'ORDRE DU PREDUCTEUR P EST: 12  
LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE TE EST: .17  
LA PERIODE DY SIGNAL T EST: 4.16  
LE NOMBRE DE POINT N EST: 99  
LE COEFFICIENT DE PREACCENTUATION M EST: .01

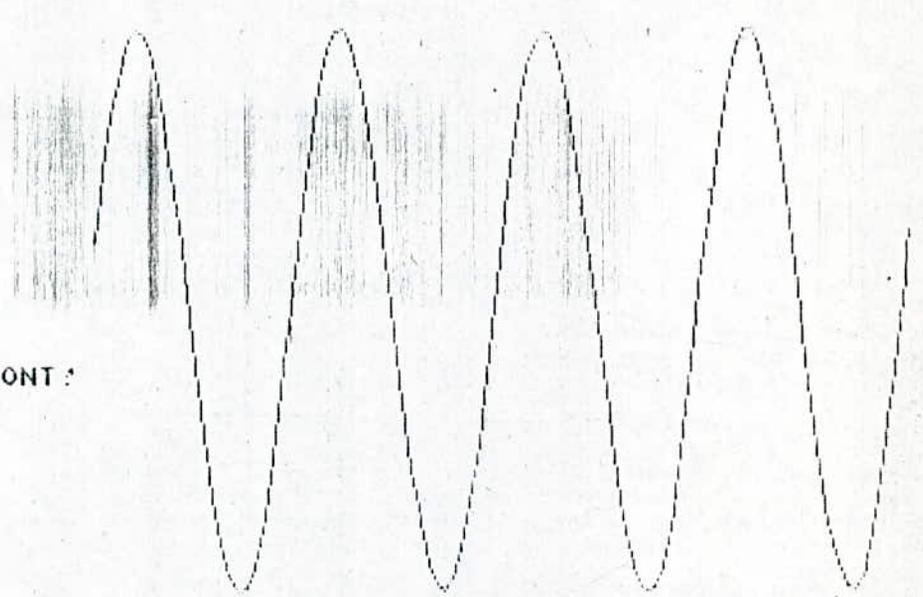
LE GAIN G EST = 5.924297E-02

LES VALEURS DE A(I) SONT:

A( 1 ) = -1.507348  
A( 2 ) = .3611633  
A( 3 ) = .1505029  
A( 4 ) = 6.261841E-02  
A( 5 ) = 2.624085E-02  
A( 6 ) = 1.078461E-02  
A( 7 ) = 4.389918E-03  
A( 8 ) = 1.550983E-03  
A( 9 ) = -2.704017E-04  
A( 10 ) = -1.898193E-03  
A( 11 ) = -5.626243E-03  
A( 12 ) = 6.453155E-03

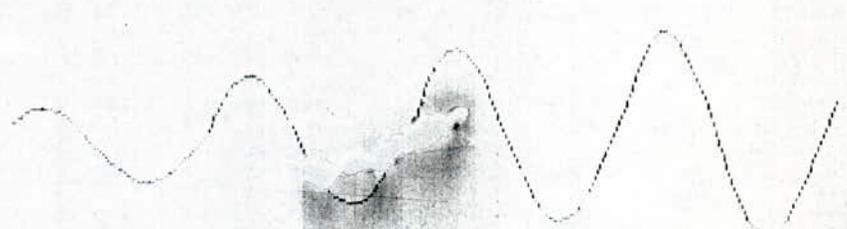
LES VALEURS DE K(I) SONT:

K( 1 ) = -.9657232  
K( 2 ) = .9376722  
K( 3 ) = .3338511  
K( 4 ) = .1305007  
K( 5 ) = 4.908068E-02  
K( 6 ) = 1.616524E-02  
K( 7 ) = 3.82718E-03  
K( 8 ) = 1.570801E-04  
K( 9 ) = 2.207613E-04  
K( 10 ) = 1.952888E-03  
K( 11 ) = 4.101081E-03  
K( 12 ) = 6.453155E-03



SIGNAL DE PAROLE

LA PERIODE DES IMPULSIONS NP EST: 25



SIGNAL DE PAROLE SYNTHETIQUE

### COMMENTAIRE

La condition nécessaire et suffisante de stabilité du filtre de synthèse est que le module des coefficients de réflexion soit compris entre " -1 " et " + 1 " c'est-à-dire  $|K(I)| < 1$  (  $I = 1, \dots, P$  ). ( Condition vérifiée par le programme 4 ).

Cependant, le signal de parole synthétique est périodique, de même période que le signal de départ et son amplitude croît progressivement à cause de l'accumulation des erreurs, Donc, avec des échantillons réels de parole, on obtiendra de meilleurs résultats car le synthétiseur du vocodeur est choisi de telle manière à simuler le mieux possible la parole humaine.

PROG : 4 SIMULATION DE FILTRE RECURSIF

Soit un filtre récursif défini par :

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^K b_j e(n-j)$$

Ce qui correspond à la fonction de transfert en Z suivante:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^K b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

Le programme calcule la sortie  $y(n)$  pour une entrée échelon, rampe, impulsion de DIRAC ou Série d'impulsions retardée de  $T$  par rapport à l'origine ( $T \geq 0$ ).

Le programme fournit les valeurs de la sortie ainsi qu'une courbe du signal de sortie.

```

10 REM
20 REM
30 REM
40 CLS
50 KEY OFF
60 '*****
70 ' ** SYSTEMES DISCRETS **
80 '*****
90 LPRINT " SYSTEME DISCRETS "
100 DIM A(13),B(13),E(13),S(13),Y(401)
110 PRINT "INTRODUIRE LA DUREE (la DUREE MAX=300)"
120 INPUT D
130 IF D<=300 GOTO 160
140 PRINT "RECOMMENCER, LA DUREE MAX EST 300"
150 GOTO 110
160 PRINT "INTRODUIRE LES VALEURS DE K ET N (K<=12 ET N<=12)"
170 INPUT K
180 INPUT N
190 IF K>12 GOTO 220
200 IF N>12 GOTO 220
210 GOTO 240
220 PRINT "RECOMMENCER ,K ET N DOIVENT ETRE <=12"
230 GOTO 160
240 LPRINT "LES VALEURS DE K ET N SONT:"K,N
250 LPRINT
260 PRINT "INTRODUIRE LES VALEURS DES COEFFICIENTS A(I):"
270 FOR I=1 TO N+1
280 INPUT A(I)
290 NEXT I
300 FOR I=1 TO N+1
310 LPRINT "LE COEFFICIENT A(";I-1;")=";A(I)
320 NEXT I
330 LPRINT
340 PRINT "INTRODUIRE LES VALEURS DES COEFFICIENTS B(J):"
350 FOR J=1 TO K+1
360 INPUT B(J)
370 NEXT J
380 FOR J=1 TO K+1
390 LPRINT "LE COEFFICIENT B(";J-1;")=";B(J)
400 NEXT J
410 LPRINT
420 PRINT "INTRODUIRE UNE DES VALEURS SUIVANTES SELON LA"
430 PRINT "FONCTION D ENTREE CHOISIE"
440 PRINT "ECHELON:1"
450 PRINT "RAMPE:2"
460 PRINT "IMPULSION DE DIRAC:3"
470 PRINT "SERIE D'IMPULSIONS:4"
480 INPUT Z
490 IF Z<>1 GOTO 540
500 PRINT

```

```

510 LPRINT " FONCTION ENTREE:ECHELON"
520 LPRINT
530 GOTO 710
540 IF Z<>2 GOTO 590
550 PRINT
560 LPRINT " FONCTION ENTREE:RAMPE"
570 LPRINT
580 GOTO 710
590 IF Z<>3 GOTO 640
600 PRINT
610 LPRINT " FONCTION ENTREE:IMPULSION DE DIRAC"
620 LPRINT
630 GOTO 710
640 IF Z<>4 GOTO 690
650 PRINT
660 LPRINT "FONCTION ENTREE:SERIE D'IMPULSIONS"
670 LPRINT
680 GOTO 710
690 PRINT "RECOMMENCER ,Z=1,Z=2,Z=3 OU Z=4"
700 GOTO 410
710 IF Z<>4 THEN PRINT "INTRODUIRE LA VALEUR DU RETARD T" ELSE GOTO 750
720 INPUT T
730 PRINT
740 LPRINT "LA VALEUR DU RETARD T EST:"T:GOTO 770
750 PRINT "INTRODUIRE LA PERIODE NP:"INPUT NP
760 LPRINT "LA PERIODE NP EST:";NP
770 LPRINT
780 FOR J=1 TO N+1
790 S(J)=0
800 NEXT J
810 FOR X=1 TO R+1
820 E(X)=0
830 NEXT X
840 PRINT
850 LPRINT "LA DUREE DU CALCUL EST:";D
860 LPRINT
870 LPRINT " FONCTION DE SORTIE"
880 LPRINT
890 M1=0
900 M2=0
910 FOR X=1 TO D+1
920 REM
930 REM:X EST EGAL AU TEMPS +1
940 REM
950 S=0
960 IF Z<>1 GOTO 990
970 GOSUB 2000
980 GOTO 1060
990 IF Z<>2 GOTO 1020
1000 GOSUB 2080
1010 GOTO 1060

```

4

```
1020 IF Z<>3 GOTO 1050
1030 GOSUB 2160
1040 GOTO 1060
1050 GOSUB 2240
1060 E(1)=E
1070 FOR J=1 TO K+1
1080 S=S+(B(J)*E(J)/A(1))
1090 NEXT J
1100 FOR I=2 TO N+1
1110 S=S-(A(I)*S(I)/A(1))
1120 NEXT I
1130 S(1)=S
1140 IF S<M1 THEN M1=S
1150 IF S>M2 THEN M2=S
1160 FOR I=0 TO N-1
1170 S(N-I+1)=S(N-I)
1180 NEXT I
1190 FOR I=0 TO K-1
1200 E(K-I+1)=E(K-I)
1210 NEXT I
1220 Y(X)=S
1230 LPRINT "S(";X-1;")=";S
1240 NEXT X
1250 LPRINT
1260 ' *****
1270 LPRINT " COURBE DE LA FONCTION DE SORTIE "
1280 ' *****
1290 IF N >3 GOTO 1860
1300 IF K >3 GOTO 1860
1310 FOR I=1 TO 54
1320 LPRINT " ";
1330 NEXT I
1340 LPRINT "sens positif"
1350 FOR I=1 TO 47
1360 LPRINT " ";
1370 NEXT I
1380 LPRINT "----->>"
1390 IF M1=M2 GOTO 1430
1400 M3=60/(M2-M1)
1410 M4=(M2-61*M1)/(M2-M1)
1420 GOTO 1450
1430 M3=0
1440 M4=1
1450 I2=INT(M4)
1460 LPRINT
1470 GOSUB 2290
1480 GOSUB 2310
1490 LPRINT "min=";M1; " " ; "max=";M2
1500 IF M1=0 GOTO 1560
1510 IF M2=0 GOTO 1560
1520 FOR I=1 TO I2-1
1530 LPRINT " ";
1540 NEXT I
1550 LPRINT "0"
```

```

1560 FOR H=1 TO D+1
1570 I1=INT(M3*Y(H)+M4)
1580 IF I1<I2 THEN I3=I1 ELSE I3=I2
1590 IF I1>I2 THEN I4=I1 ELSE I4=I2
1600 IF I3=1 GOTO 1640
1610 FOR I=1 TO I3-1
1620 LPRINT " ";
1630 NEXT I
1640 IF I1<>I2 GOTO 1670
1650 LPRINT "*"
1660 GOTO 1790
1670 IF I3=I1 GOTO 1700
1680 LPRINT CHR$(179);
1690 GOTO 1710
1700 LPRINT "*";
1710 IF I4=I3+1 GOTO 1750
1720 FOR I=I3+1 TO I4-1
1730 LPRINT ". ";
1740 NEXT I
1750 IF I4=I1 GOTO 1780
1760 LPRINT CHR$(179)
1770 GOTO 1790
1780 LPRINT "*"
1790 NEXT H
1800 LPRINT
1810 GOSUB 2310,
1820 LPRINT
1830 GOSUB 2290
1840 LPRINT
1850 GOTO 1960
1860 Y(X)=5 :CLS :SCREEN 3
1870 VIEW (10,10)-(628,371)
1880 WINDOW (-100,-10)-(100,+10)
1890 LINE (M1*1.1,0)-(M2*1.1,0)
1900 LINE (0,-100)-(0,100):LINE (-100,0)-(100,0)
1910 FOR X =0 TO 100
1920 PSET (X,Y(X))
1930 NEXT X
1940 FOR X =0 TO 99
1950 LINE (X,Y(X))-(X+1,Y(X+1)):NEXT X
1960 END
1970 REM *****
1980 REM ** fonction d'entree : echelon **
1990 REM *****
2000 IF X-1<T GOTO 2030
2010 E=1
2020 RETURN
2030 E=0
2040 RETURN

```

```

2050 REM *****
2060 REM ** fonction d'entree : rampe **
2070 REM *****
2080 IF X-1<T GOTO 2110
2090 E=X-T-1
2100 RETURN
2110 E=0
2120 RETURN
2130 REM *****
2140 REM ** FONCTION D'ENTREE :IMPULSION DE DIRAC **
2150 REM *****
2160 IF X-1<>T GOTO 2190
2170 E=1
2180 RETURN
2190 E=0
2200 RETURN
2210 REM *****
2220 REM ** FONCTION ENTREE :SERIE D'IMPULSIONS **
2230 REM *****
2240 E=1:RETURN
2250 E=1
2260 NEXT I
2270 RETURN
2280 E=0 GOTO 2260
2290 LPRINT"0.      .1.      .2.      .3.      .4.      .5.
      .7."
2300 RETURN
2310 FOR I=0 TO 6
2320 LPRINT CHR$(179); ".....";
2330 NEXT I
2340 LPRINT CHR$(179)
2350 RETURN

```

# EXÉCUTION : 1

SYSTEME DISCRETS

LES VALEURS DE K ET N SONT: 0

2

LE COEFFICIENT A( 0 )= 1

LE COEFFICIENT A( 1 )=-1.2

LE COEFFICIENT A( 2 )= 1

LE COEFFICIENT B( 0 )= .8

FONCTION ENTREE: IMPULSION DE DIRAC

LA VALEUR DU RETARD T EST: 0

LA DUREE DU CALCUL EST: 40

FONCTION DE SORTIE

S( 0 )= .8

S( 1 )= .9600001

S( 2 )= .3520001

S( 3 )=-.5376

S( 4 )=-.9971199

S( 5 )=-.658944

S( 6 )= .2063871

S( 7 )= .9066085

S( 8 )= .8815431

S( 9 )= .1512433

S( 10 )=-.7000512

S( 11 )=-.9913047

S( 12 )=-.4895145

S( 13 )= .4038873

S( 14 )= .9741792

S( 15 )= .7651278

S( 16 )=-5.602587E-02

S( 17 )=-.8323589

S( 18 )=-.9428049

S( 19 )=-.299007

S( 20 )= .5839965

S( 21 )= .9998028

S( 22 )= .6157668

S( 23 )=-.2608826

S( 24 )=-.9288259

S( 25 )=-.8537086

S( 26 )=-9.562439E-02

S( 27 )= .7389593

S( 28 )= .9823756

S( 29 )= .4398914

S( 30 )=-.4545059

S( 31 )=-.9852984

S( 32 )=-.7278523

S( 33 )= .1118758

S( 34 )= .8621032

S( 35 )= .9226481

S( 36 )= .2450746

S( 37 )=-.6285586

S( 38 )=-.9993449

S( 39 )=-.5706553

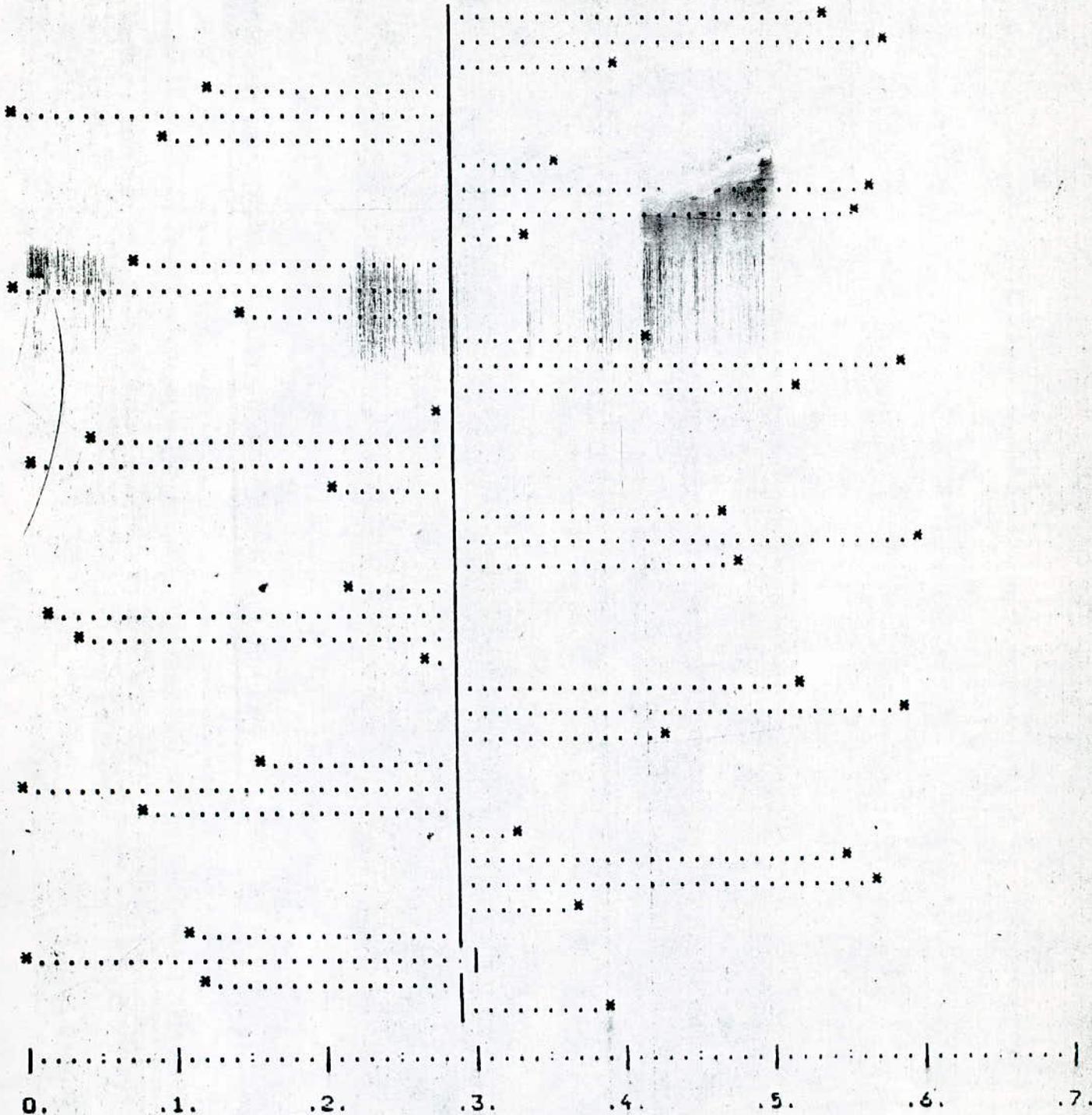
S( 40 )= .3145585

COURBE DE LA FONCTION DE SORTIE

sens positif >>

0. .1. .2. .3. .4. .5. .6. .7.  
|.....|.....|.....|.....|.....|.....|.....|  
min=-.9993449 max=.9998028

0



# EXÉCUTION : 2

SYSTEME DISCRETS

LES VALEURS DE K ET N SONT : 2

2

LE COEFFICIENT A( 0 ) = 1.249

LE COEFFICIENT A( 1 ) = -1.95

LE COEFFICIENT A( 2 ) = .8011

LE COEFFICIENT B( 0 ) = .025

LE COEFFICIENT B( 1 ) = .0502

LE COEFFICIENT B( 2 ) = .0251

FONCTION ENTREE : IMPULSION DE DIRAC

LA VALEUR DU RETARD T EST : 0

LA DUREE DU CALCUL EST : 30

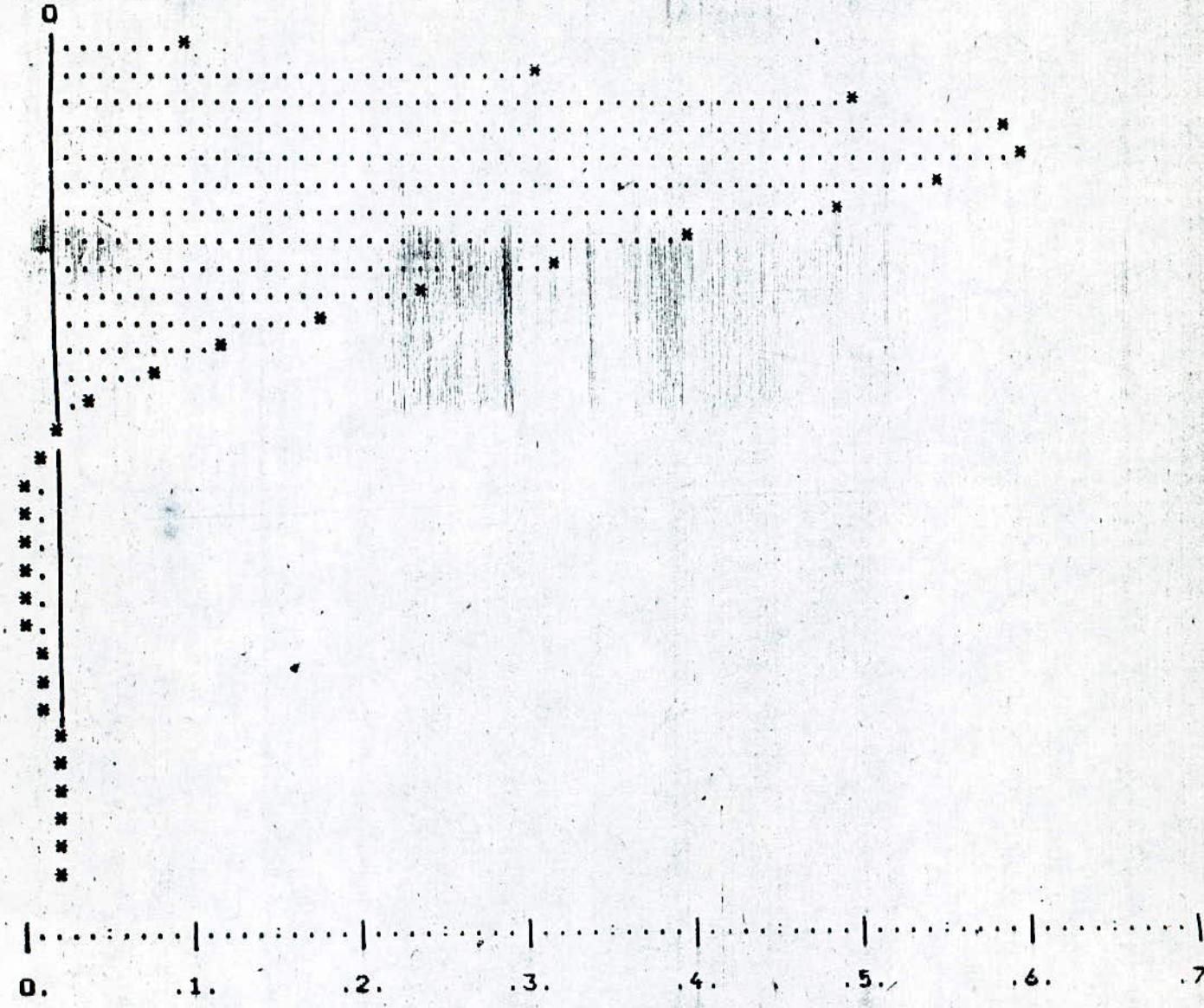
FONCTION DE SORTIE

S( 0 ) = 2.001602E-02  
S( 1 ) = 7.144215E-02  
S( 2 ) = .1187969  
S( 3 ) = .1396491  
S( 4 ) = .1418315  
S( 5 ) = .1318643  
S( 6 ) = .1149032  
S( 7 ) = 9.481573E-02  
S( 8 ) = 7.433285E-02  
S( 9 ) = 5.523793E-02  
S( 10 ) = 3.856359E-02  
S( 11 ) = 2.477814E-02  
S( 12 ) = 1.395043E-02  
S( 13 ) = 5.887561E-03  
S( 14 ) = 2.442403E-04  
S( 15 ) = -3.394921E-03  
S( 16 ) = -5.456972E-03  
S( 17 ) = -6.342213E-03  
S( 18 ) = -6.40171E-03  
S( 19 ) = -5.926811E-03  
S( 20 ) = -5.147216E-03  
S( 21 ) = -4.234671E-03  
S( 22 ) = -3.309987E-03  
S( 23 ) = -2.451625E-03  
S( 24 ) = -1.704594E-03  
S( 25 ) = -1.088841E-03  
S( 26 ) = -6.066369E-04  
S( 27 ) = -2.487362E-04  
S( 28 ) = 7.535273E-07  
S( 29 ) = 1.607142E-04  
S( 30 ) = 2.504315E-04

COURBE DE LA FONCTION DE SORTIE

sens positif >>

0. .1. .2. .3. .4. .5. .6. .7.  
min=-6.40171E-03 max= .1418315



# EXÉCUTION:3

SYSTEME DISCRETS  
LES VALEURS DE K ET N SONT: 0

12

LE COEFFICIENT A( 0 ) = 1  
LE COEFFICIENT A( 1 ) = -1.58986  
LE COEFFICIENT A( 2 ) = .3808471  
LE COEFFICIENT A( 3 ) = .1446164  
LE COEFFICIENT A( 4 ) = 5.682949E-02  
LE COEFFICIENT A( 5 ) = .0201695  
LE COEFFICIENT A( 6 ) = 9.582841E-03  
LE COEFFICIENT A( 7 ) = 2.073767E-03  
LE COEFFICIENT A( 8 ) = 1.65844E-03  
LE COEFFICIENT A( 9 ) = 8.703728E-04  
LE COEFFICIENT A( 10 ) = 7.861904E-04  
LE COEFFICIENT A( 11 ) = 1.907116E-03  
LE COEFFICIENT A( 12 ) = -4.981316E-03

LE COEFFICIENT B( 0 ) = 1

FONCTION ENTREE: IMPULSION DE DIRAC

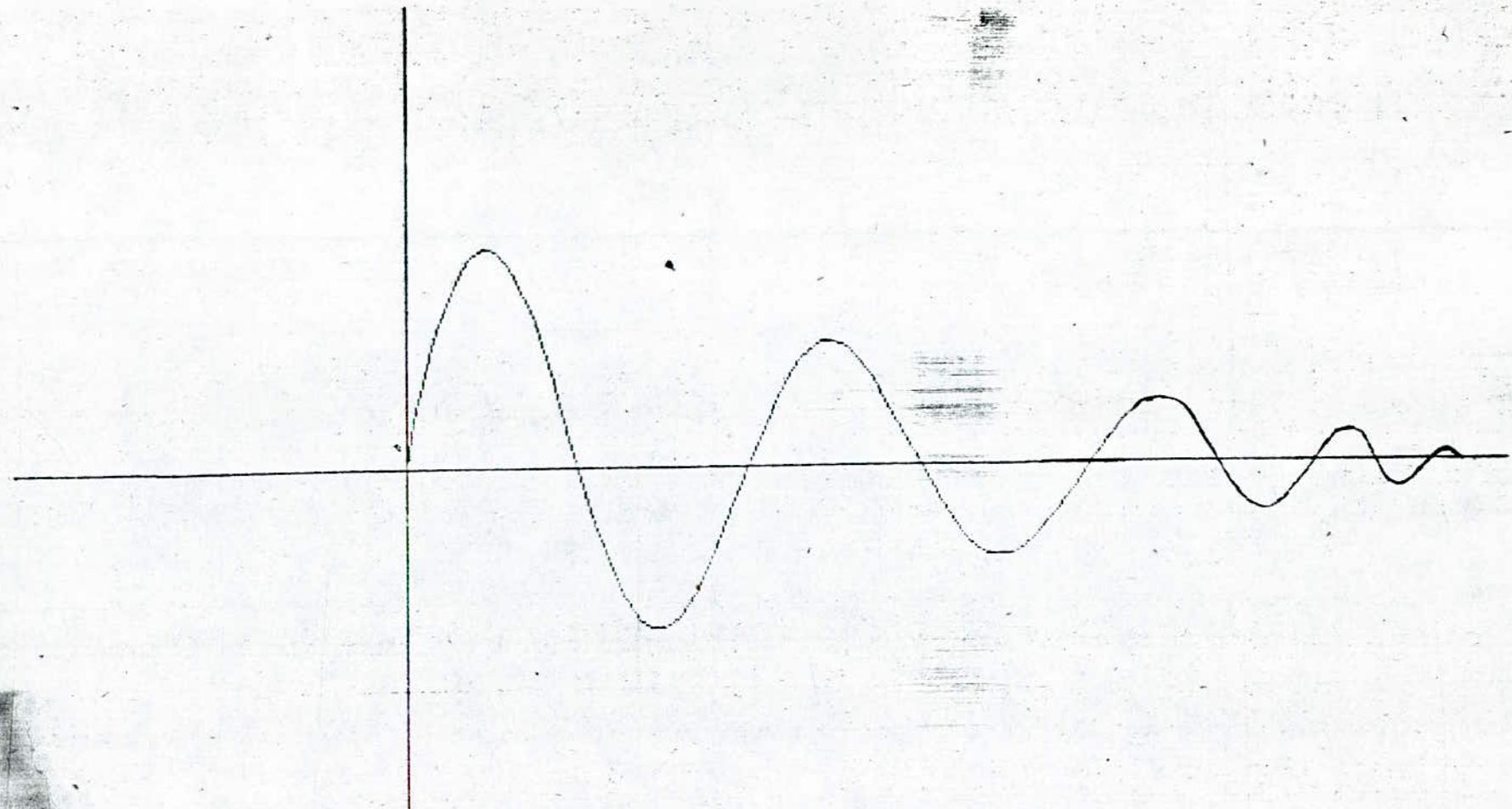
LA VALEUR DU RETARD T EST: 0

LA DUREE DU CALCUL EST: 99

FONCTION DE SORTIE

S( 0 ) = 1	S( 35 ) = -3.430389	S( 70 ) = .5830841
S( 1 ) = 1.58986	S( 36 ) = -3.383334	S( 71 ) = .292034
S( 2 ) = 2.146808	S( 37 ) = -3.281665	S( 72 ) = 2.905686E-03.
S( 3 ) = 2.663014	S( 38 ) = -3.12832	S( 73 ) = -.279585
S( 4 ) = 3.129464	S( 39 ) = -2.927016	S( 74 ) = -.5509408
S( 5 ) = 3.540224	S( 40 ) = -2.682177	S( 75 ) = -.8069515
S( 6 ) = 3.887846	S( 41 ) = -2.398841	S( 76 ) = -1.043757
S( 7 ) = 4.168327	S( 42 ) = -2.082563	S( 77 ) = -1.257903
S( 8 ) = 4.377321	S( 43 ) = -1.739312	S( 78 ) = -1.446388
S( 9 ) = 4.511798	S( 44 ) = -1.375362	S( 79 ) = -1.606701
S( 10 ) = 4.569638	S( 45 ) = -.9971838	S( 80 ) = -1.736856
S( 11 ) = 4.548588	S( 46 ) = -.6113331	S( 81 ) = -1.835406
S( 12 ) = 4.454125	S( 47 ) = -.2243395	S( 82 ) = -1.90146
S( 13 ) = 4.288712	S( 48 ) = .1573991	S( 83 ) = -1.934681
S( 14 ) = 4.056654	S( 49 ) = .5277196	S( 84 ) = -1.935283
S( 15 ) = 3.763271	S( 50 ) = .8807891	S( 85 ) = -1.904008
S( 16 ) = 3.414769	S( 51 ) = 1.211194	S( 86 ) = -1.84211
S( 17 ) = 3.018138	S( 52 ) = 1.514018	S( 87 ) = -1.751316
S( 18 ) = 2.580996	S( 53 ) = 1.784914	S( 88 ) = -1.633787
S( 19 ) = 2.111469	S( 54 ) = 2.02016	S( 89 ) = -1.492078
S( 20 ) = 1.618033	S( 55 ) = 2.216707	S( 90 ) = -1.329081
S( 21 ) = 1.109371	S( 56 ) = 2.372214	S( 91 ) = -1.147971
S( 22 ) = .5942158	S( 57 ) = 2.48507	S( 92 ) = -.9521492
S( 23 ) = 8.118977E-02	S( 58 ) = 2.554403	S( 93 ) = -.7451795
S( 24 ) = -.4213093	S( 59 ) = 2.580078	S( 94 ) = -.5307269
S( 25 ) = -.9052524	S( 60 ) = 2.562682	S( 95 ) = -.3124953
S( 26 ) = -1.363102	S( 61 ) = 2.503497	S( 96 ) = -9.416507E-02
S( 27 ) = -1.787923	S( 62 ) = 2.404464	S( 97 ) = .1206671
S( 28 ) = -2.173484	S( 63 ) = 2.268134	S( 98 ) = .3285452
S( 29 ) = -2.514347	S( 64 ) = 2.097614	S( 99 ) = .5262076
S( 30 ) = -2.805933	S( 65 ) = 1.896503	
S( 31 ) = -3.044581	S( 66 ) = 1.668818	
S( 32 ) = -3.227585	S( 67 ) = 1.418923	
S( 33 ) = -3.35322	S( 68 ) = 1.151446	
S( 34 ) = -3.420744	S( 69 ) = .8711966	

COURBE DE LA FONCTION DE SORTIE



REPONSE IMPULSIONNELLE

# EXÉCUTION: 4

SYSTEME DISCRETS

LES VALEURS DE K ET N SONT: 0

12

LE COEFFICIENT A( 0 ) = 1  
LE COEFFICIENT A( 1 ) = -1.507348  
LE COEFFICIENT A( 2 ) = .3611633  
LE COEFFICIENT A( 3 ) = .1505029  
LE COEFFICIENT A( 4 ) = 6.261841E-02  
LE COEFFICIENT A( 5 ) = 2.624085E-02  
LE COEFFICIENT A( 6 ) = 1.078461E-02  
LE COEFFICIENT A( 7 ) = 4.389918E-03  
LE COEFFICIENT A( 8 ) = 1.550983E-03  
LE COEFFICIENT A( 9 ) = -2.704017E-04  
LE COEFFICIENT A( 10 ) = -1.898193E-03  
LE COEFFICIENT A( 11 ) = -5.626243E-03  
LE COEFFICIENT A( 12 ) = 6.453155E-03

LE COEFFICIENT B( 0 ) = 1

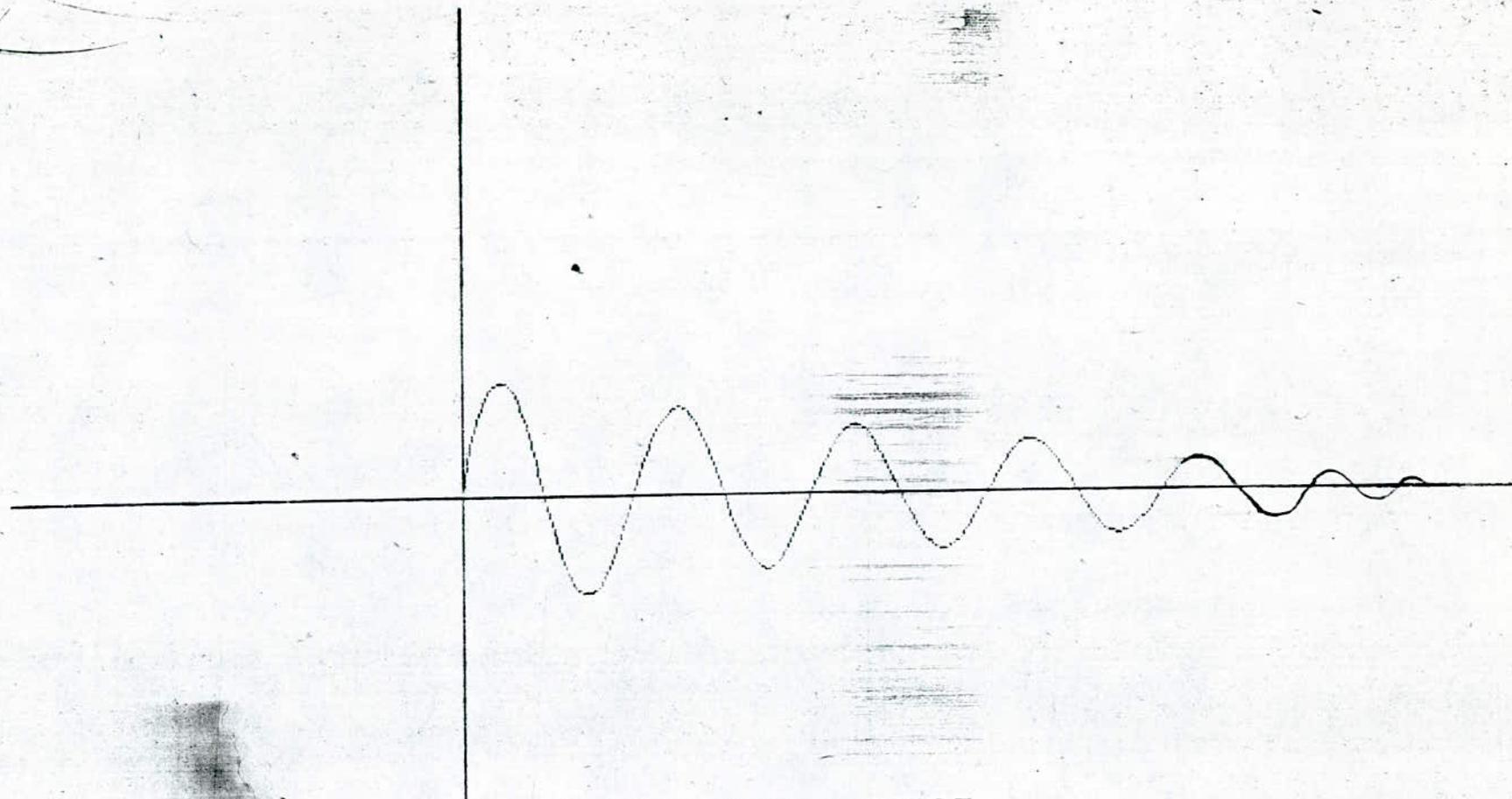
FONCTION ENTREE: IMPULSION DE DIRAC

LA VALEUR DU RETARD T EST: 0

LA DUREE DU CALCUL EST: 99

FONCTION DE SORTIE

S( 0 ) = 1	S( 35 ) = 2.171538E-02	S( 70 ) = -.4945982
S( 1 ) = 1.507348	S( 36 ) = -.3988427	S( 71 ) = -.2164217
S( 2 ) = 1.910935	S( 37 ) = -.7843061	S( 72 ) = 6.974338E-02
S( 3 ) = 2.185542	S( 38 ) = -1.110397	S( 73 ) = .3451299
S( 4 ) = 2.314734	S( 39 ) = -1.357224	S( 74 ) = .5920809
S( 5 ) = 2.291542	S( 40 ) = -1.510482	S( 75 ) = .7951723
S( 6 ) = 2.119225	S( 41 ) = -1.562255	S( 76 ) = .9421661
S( 7 ) = 1.810768	S( 42 ) = -1.511396	S( 77 ) = 1.024737
S( 8 ) = 1.388116	S( 43 ) = -1.363448	S( 78 ) = 1.038926
S( 9 ) = .881181	S( 44 ) = -1.130144	S( 79 ) = .9853045
S( 10 ) = .3263336	S( 45 ) = -.8285065	S( 80 ) = .8688363
S( 11 ) = -.2335255	S( 46 ) = -.4796239	S( 81 ) = .6984609
S( 12 ) = -.7671809	S( 47 ) = -.1071956	S( 82 ) = .4864246
S( 13 ) = -1.239372	S( 48 ) = .2640669	S( 83 ) = .2474132
S( 14 ) = -1.620727	S( 49 ) = .6100678	S( 84 ) = -2.455259E-03
S( 15 ) = -1.888424	S( 50 ) = .9088779	S( 85 ) = -.2467094
S( 16 ) = -2.027541	S( 51 ) = 1.142114	S( 86 ) = -.4696022
S( 17 ) = -2.031849	S( 52 ) = 1.296052	S( 87 ) = -.6571181
S( 18 ) = -1.904029	S( 53 ) = 1.362424	S( 88 ) = -.7978465
S( 19 ) = -1.655292	S( 54 ) = 1.338827	S( 89 ) = -.8836649
S( 20 ) = -1.304456	S( 55 ) = 1.228759	S( 90 ) = -.9101966
S( 21 ) = -.8765388	S( 56 ) = 1.041259	S( 91 ) = -.8770117
S( 22 ) = -.4009976	S( 57 ) = .7902001	S( 92 ) = -.7875703
S( 23 ) = 9.021242E-02	S( 58 ) = .4932812	S( 93 ) = -.6489115
S( 24 ) = .5648372	S( 59 ) = .1707948	S( 94 ) = -.4711186
S( 25 ) = .9924017	S( 60 ) = -.1557484	S( 95 ) = -.2665978
S( 26 ) = 1.346154	S( 61 ) = -.4650436	S( 96 ) = -4.922034E-02
S( 27 ) = 1.604721	S( 62 ) = -.737372	S( 97 ) = .1666095
S( 28 ) = 1.753382	S( 63 ) = -.9558468	S( 98 ) = .3669028
S( 29 ) = 1.784877	S( 64 ) = -1.107449	S( 99 ) = .5389852
S( 30 ) = 1.699718	S( 65 ) = -1.183788	
S( 31 ) = 1.505984	S( 66 ) = -1.181549	
S( 32 ) = 1.218633	S( 67 ) = -1.10259	
S( 33 ) = .8583776	S( 68 ) = -.9537178	
S( 34 ) = .4502171	S( 69 ) = -.7461309	



REPONSE IMPULSIONNELLE

### COMMENTAIRE

Ce programme présente un avantage principal qui consiste à vérifier la stabilité des filtres récurrents, en donnant sa réponse impulsionnelle après lui avoir appliqué une impulsion de Dirac.

Dans les exécutions 3 et 4, on a appliqué les douze coefficients prédicteurs obtenus dans le programme 3, ce qui nous a permis de constater que la réponse impulsionnelle tend vers zéro quand "n" tend vers l'infini d'où la stabilité du filtre de synthèse utilisé.

## CONCLUSION

Le but de ce projet est de mettre en évidence l'utilisation des filtres numériques dans le traitement automatique de la parole.

Dans ce cadre, nous avons été amenés à explorer une étude théorique sur les filtres numériques ( récursifs et non récursifs)

Pour parvenir à cette fin, nous avons traité successivement :

- Les filtres analogiques d'une manière succincte dans le but de faciliter les liaisons entre le domaine numérique et analogique.
- Les filtres numériques, divisés en deux classes différentes récursifs et non récursifs, Ces derniers ont fait l'objet d'une étude incluant entre autres les méthodes permettant leur synthèse et les différentes structures de réalisation envisageables pour chaque type de filtre.
- La partie application fondée sur la synthèse de la parole représentant l'outil de notre travail.

Cette dernière partie nous a permis de faire une étude sur le vocoder à base de prédiction linéaire (LPC) du fait qu'il est basé sur un modèle simple de production de la parole ( filtre récursif ).

Aussi, une étape d'analyse de la parole est faite au préalable ayant pour but de représenter le signal de la parole à l'aide d'un nombre de paramètres pertinents ( fréquence fondamentale et d'échantillonnage ). Parmi les différentes méthodes d'analyse répondent à ce but, la L.P.C. apparue comme la plus appropriée et la plus performante de par la simplicité de son modèle et des bons résultats qui en découlent.

L'étape de synthèse de la parole consiste à déterminer le modèle récuratif à partir de paramètres issus de l'analyse, d'où l'étude des différents aspects d'un synthétiseur à base de L.P.C.

Dans ce but, nous avons opté pour la méthode d'auto-corrélation révélée la plus pratique dans ce cadre d'application, car elle permet d'utiliser directement les paramètres calculés à la synthèse tels que les coefficients prédicteurs et de réflexion vérifiant ainsi la stabilité du filtre en treillis ou récuratif de synthèse.

Les applications des filtres numériques dans les techniques vocales ont amélioré plusieurs domaines : Les compositeurs téléphoniques vocaux ( Télécommunications ); une programmation vocale des machines ( Synthétiseur de voitures ), la réalisation d'une machine parlante offrant un intérêt considérable dans divers domaines notamment dans les applications médicalés où la synthèse de la parole apporte une aide précieuse aux handicapés.

La réalisation du vocoder peut-être envisagée à l'aide de la partie logicielle fait sur le synthétiseur du vocoder à L.P.C, déjà traitée ( Réalisation visant notamment l'amélioration de la qualité de la parole ).

## ANNEXE A

### Transformée de Fourier - Transformée en Z

Les transformées de Fourier et en Z sont des outils efficaces quant à leur facilité d'utilisation pour la résolution de nombreux problèmes. On peut les appliquer notamment aux simulations en temps différé, aux équations différentielles, intégrales et aux différences.

#### A.1 - Transformée de Fourier :

Si l'on note  $\longrightarrow$  la transformation de Fourier on observe les propriétés suivantes :

##### - Linéarité :

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

##### - Echelle de temps :

$$f(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \text{ réel.}$$

##### - Décalage temporel

$$f(t - t_0) \longrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega).$$

- Décalage fréquentiel :

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \longrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

$$f(t) \cos \omega_0 t \longrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

$$f(t) \sin \omega_0 t \longrightarrow \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

- Dérivation temporelle :

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

- Dérivation fréquentielle :

$$(-jt)^n f(t) \longrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

- Fonction conjuguée:

$$\bar{f}(t) \longrightarrow \bar{F}(-\omega)$$

- La fonction impulsion DELTA:

De la correspondance  $\delta(t) \longrightarrow 1$ , il résulte les relations suivantes :

$$\delta(t + t_0) \rightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$1 \rightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

$$e^{j\omega t_0} \rightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\cos \omega t \rightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin \omega t \rightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

## A.2. Transformée en Z.

### A.2.1 - Propriétés générales :

#### a - Linéarité :

$$Z \overline{[X_1(t) + X_2(t)]} = Z \overline{X_1(t)} + Z \overline{X_2(t)}$$

$$Z \overline{[k X(t)]} = k Z \overline{X(t)}$$

$$Z \overline{[t X(t)]} = Z \overline{[nT X_n(T)]} = -T \frac{d}{dz} \overline{X(z)}$$

$$Z \overline{[t^k X(t)]} = -TZ \frac{d}{dz} X_1(z)$$

$$\text{avec : } X_1(z) = Z \overline{[t^{k-1} X(t)]}$$

#### b - Translation temporelle :

$$b.1. \text{ Cas du retard : } Z \overline{[X(t - kT)]} = z^{-k} X(z)$$

b.2. Cas de l'avance :

$$z \overline{\sum_{k=0}^{n-1} X(t+kT)} = z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} X(nT) z^{k-n}$$

c. Théorème de la valeur initiale:

$$\lim_{n \rightarrow 0} X(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = X(0).$$

d - Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z)$$

e - Théorème de la sommation :

$$z \overline{\sum_{k=0}^N X(kT)} = \frac{z}{z-1} X(z)$$

f - Théorème de la dérivation:

$$z \overline{\frac{d}{da} X(nT, a)} = \frac{d}{da} X(z, a)$$

g - Théorème de l'intégration :

$$z \overline{\int_{a_0}^a X(nT, a) da} = \int_{a_0}^a X(z, a) da$$

A.2.2. Principales transformées de LAPLACE et en Z:

$S(t)$	$t \rightarrow$	$S(p)$	$S(z)$
1		$1/p$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t		$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$e^{-at}$		$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT} z^{-1}}$
$e^{-at} \sin wt$		$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$	$\frac{e^{-aT} \sin wT z^{-1}}{1-2e^{-aT} \cos wT z^{-1}+e^{-2aT} z^{-2}}$
$e^{-at} \cos wt$		$\frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$	$\frac{1-e^{-aT} \cos wT z^{-1}}{1-2e^{-aT} \cos wT z^{-1}+e^{-2aT} z^{-2}}$
$e^{-at} S(t)$		$S(p+a)$	$S(e^{aT} z)$

## ANNEXE B

### Le fenêtrage

Dans tous les cas, la portion du signal traitée est définie sur une durée  $\theta$ . Cela revient à multiplier le signal par une fenêtre temporelle qui est égale à 1.

$$\text{Pour } \begin{cases} to - \theta/2 \leq t \leq to + \theta/2 \text{ où } -T_M \leq t \leq T_M \\ \text{et} \\ \text{nulle ailleurs} \end{cases}$$

Il lui correspond dans le domaine fréquentiel une fenêtre spectrale  $Q(f)$  qui dépend des durées  $\theta$  ou  $2T_M$  et des techniques adoptées.

Donc, multiplier un signal dans le domaine temporel par une fenêtre revient à convoluer dans l'autre domaine, fréquentiel par la fenêtre associée, soit :

$$x(t) \cdot f(t) \iff X(f) \cdot Q(f).$$

#### B-1. Fenêtre rectangulaire :

Ce type de fenêtre est défini par :

$$x_R(k) = 1 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-1$$

La transformée de Fourier est donnée par :

$$|x_R(f)| = \frac{\sin \pi \cdot f \cdot (N)}{\sin \pi f} \quad (\text{Fig B.1}).$$

Réponse impulsionnelle

Réponse en fréquence

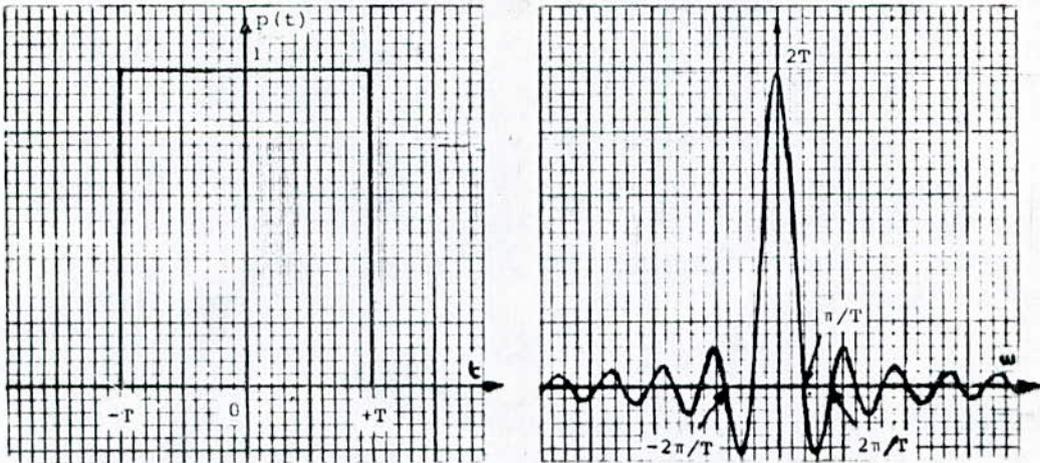


Fig B.1: La fenêtre rectangulaire présente un inconvénient qui est celui d'avoir trop de lobes secondaires, ce qui se traduit par une grande perte d'énergie, donc perte d'information.

### B-2. Fenêtre de HANNING :

Elle est définie dans le domaine temporel par

$$x_h(k) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi k}{N-1} \right) \right] \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1$$

La transformée de Fourier est donnée par :

$$x_h(f) = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi f N}{\pi f} + \frac{1}{4} \frac{\sin \pi N (f-1/N)}{\sin \pi (f-1/N)} + \frac{1}{4} \frac{\sin \pi N (f+1/N)}{\sin \pi (f+1/N)}$$

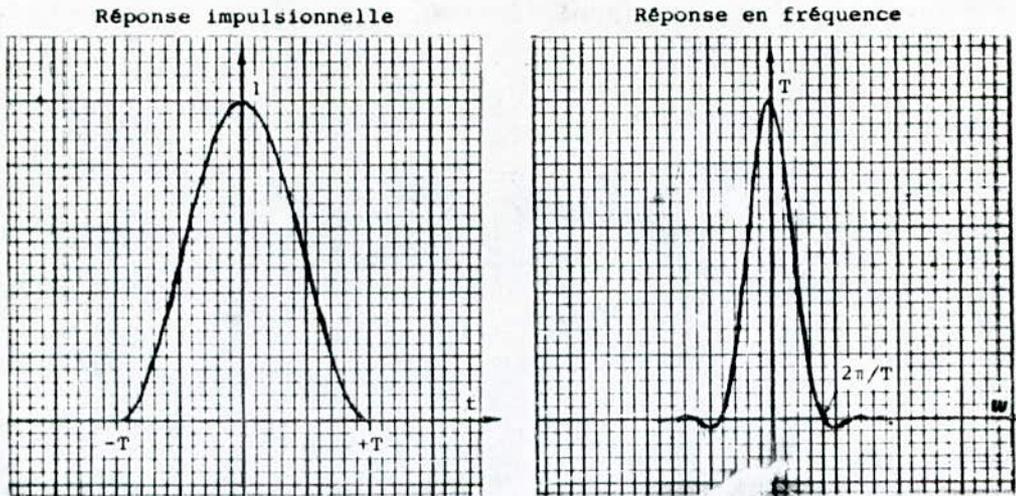


Fig. B.2 Fenêtre de HANNING

B.3 - Fenêtre de HAMMING :

Elle est définie dans le domaine temporel par :

$$x_h(k) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1$$

La transformée de Fourier est donnée par :

$$x_h(f) = 0,52 \frac{\sin \pi \cdot f \cdot N}{\sin \pi f} + 0,23 \frac{\sin \pi N (f - 1/N)}{\sin \pi (f - 1/N)} + 0,23 \frac{\sin \pi N (f + 1/N)}{\sin \pi (f + 1/N)}$$

La fenêtre de HAMMING permet d'atténuer les lobes secondaires ( Fig B.3 ) : Les pertes d'informations seront donc moindres.

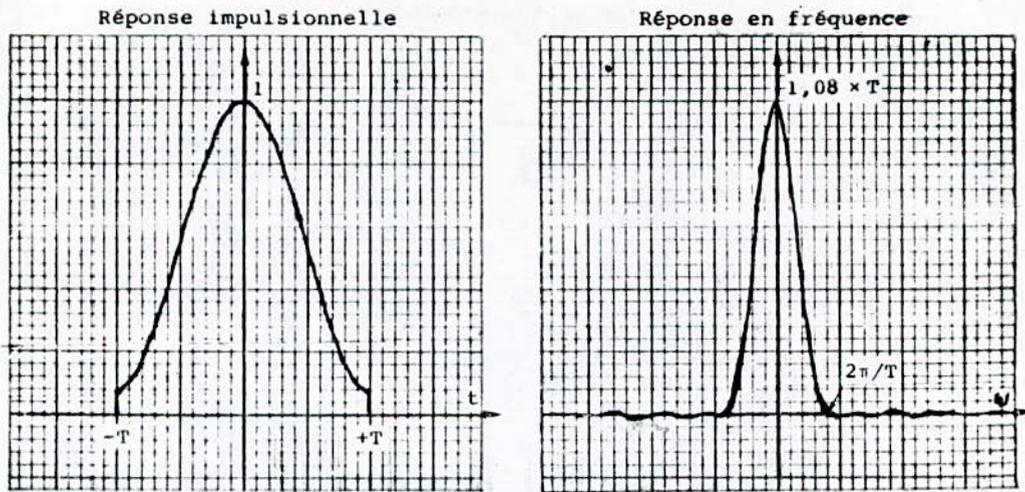


Fig B.3 Fenêtre de HAMMING

Le choix d'une fenêtre consiste donc à obtenir une forte atténuation des lobes secondaires, en conservant une largeur minimale pour le pic central.

## BIBLIOGRAPHIE

- AUVRAY.J (1979) " Electronique des signaux échantillonnés et numérique " DUNOD
- AUVRAY J.(1980) " Electronique des signaux analogiques " DUNOD
- BELLANGER M.(1984) " Traitement numérique du signal " MASSON
- BOITE R. et LEICH H. (1980) " Les filtres numériques " MASSON
- CINARE F. et FERRITI M.(1983) " Synthèse, reconnaissance de la parole " TESTS.
- DESCOUT R. (1982) " Les techniques de synthèse de la parole" Documentation bibliographique regroupée par RAYMOND. D. CNET LANNION DUNOD.
- FONDANECHÉ P. GILBERTAS.P (1981)" Filtres numériques:  
Principes et réalisations"  
MASSON.
- GUERTI M. (1983) " Contribution à la synthèse de la parole en Arabe standard " Thèse de Magister Université d'Alger.
- HASLER M. et NEIRYNCK J.(1981)" Filtres électriques " DUNOD.

LABARRERE M. KRIEF J.P et B. GIMONET ( 1982 )

" Le filtrage et ses applications " CEPADUES

LE GUYADER A. (1978) " Etude d'un vocoder à excitation vocale  
et à base de prédicteur linéaire " Thèse  
de Doctorat. 3<sup>ème</sup> Cycle Université de  
Rennes.

MARKEL J. et GRAY H. (1986) " Linéair prédiction of speech "  
SRINGER VERLAG

RADIX J.C ( 1970) " Introduction au filtrage numérique "  
EYROLLES

ROBERT MIQUEL (1985) " Le filtrage numérique par  
microprocesseurs " Tests.

SOLOTAREFF. S. MARC. " Le filtrage numérique " EYROLLES.

