

1/79

rea

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRICITE

FILIERE ELECTRONIQUE

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية  
 المكتبة  
**PROJET DE FIN D'ETUDES**  
 ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
 BIBLIOTHÈQUE

SUJET: Commande " pas à pas " des processus  
 industriels à caractéristique extrême

CAS PRATIQUE: Moteur à courant continu

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية  
 — المكتبة —  
 ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
 BIBLIOTHÈQUE

Proposé par : **S. ZALENE**

Docteur - Ingénieur

Etudié par MM.

**A. BENHALLA**

**M. BENTAHAR**



## REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre profonde gratitude envers tous les professeurs qui ont contribué à notre formation. Nous remercions également notre promoteur, monsieur ZALENÉ pour sa collaboration efficace et l'aide qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de l'élaboration de ce projet.

Nos remerciements vont aussi aux cadres de la S.N.L.B dont messieurs : TOUNSI, ZERGUINI et BENKHABCHACHE qui nous ont aidé à faire le tirage, ainsi qu'à monsieur ZITOUNI M<sup>ed</sup>.

Nous remercions aussi, très sincèrement, mademoiselle YUCEF.TOUMI pour la documentation qu'elle a bien voulu nous prêter.

Nous remercions enfin toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste ouvrage.

## DEDICACES

*À mon père, ma mère, mes frères,  
Particulièrement à mon frère, Seddik.*

M. BENTAHAR

*À mes parents.*

A. BENCHALLA

# SOMMAIRE

INTRODUCTION	Page	1
CHAPITRE I. Présentation des systèmes extrémaux	"	4
1. Systèmes extrémaux avec mesure directe des dérivées	"	6
2. Systèmes extrémaux utilisant une perturbation	"	9
3. Systèmes extrémaux pas à pas	"	12
CHAPITRE II. Présentation des méthodes d'étude des systèmes extrémaux	"	21
A. Méthode de l'approximation du premier harmonique	"	22
B. Méthode du plan de phase	"	32
CHAPITRE III. Commande du moteur	"	51
A. But de la commande. Principe du maximum	"	52
B. Application au moteur : calcul de la commande optimale	"	58
C. Synthèse de la rampe	"	68
D. Synthèse de la commande	"	82
CONCLUSION	"	97
ANNEXE	"	A1
Moteur à courant continu	"	A2
Amplificateur opérationnel	"	A7
BIBLIOGRAPHIE	"	A15

# INTRODUCTION

Actuellement, une attention particulière est accordée à la synthèse d'une classe particulière de systèmes automatiques. Ces systèmes automatiques se caractérisent essentiellement par leur faculté d'auto-adaptation aux conditions internes et externes de telle manière qu'on obtienne constamment les meilleures performances possibles. Ce résultat étant apprécié par un certain critère de performance. Ces systèmes possèdent une propriété supplémentaire : celle de recevoir l'information nécessaire au cours de leur fonctionnement.

Le problème fondamental de l'auto-adaptation est d'assurer les propriétés dynamiques optimales d'un système pour des conditions internes et externes variant de façon aléatoire.

Un deuxième problème important de l'auto-adaptation est la conservation d'un état extrémal.

On appelle système extrémal un système automatique qui possède la propriété de modifier au cours de son fonctionnement l'action du régulateur dans le sens de la conservation du critère de perfection du système. Ce critère liant les variables de sortie aux variables d'entrée possède un extrémum.

En général, dans les processus industriels, cette caractéristique n'est pas directement accessible à la mesure (un rendement par exemple). En outre, le processus peut fonctionner selon plusieurs régimes, chaque régime étant caractérisé par un critère de fonctionnement statique présentant un extrémum. L'utilisation des systèmes automatiques ordinaires ne permet pas de résoudre ces problèmes car : d'une part un système automatique, avec des moyens de régulation fixes, n'est pas toujours capable d'assurer les caractéristiques dynamiques exigées

pour certains signaux d'entrée ou certaines actions extérieures ;  
d'autre part, parallèlement à la variation des conditions ambiantes, les caracté-  
ristiques quantitatives des perturbations ont acquis actuellement une valeur  
déterminante.

De plus, un système automatique ordinaire, ne permet pas de résoudre le  
problème posé par la précision disponible et la précision requise des  
appareillages et des systèmes.

On étayera les considérations ci-dessus par un exemple :

Les avions ayant de très grandes vitesses, pouvant varier brusquement, couvrant  
ainsi en un temps relativement court de grandes distances, sont soumis à l'influence  
des grandes altitudes (coucants d'air et températures variables, traînée d'air, ...) ne  
peuvent pas être commandés par des régulateurs classiques à réglage rigide.  
Dans notre étude, nous avons abordé le problème des systèmes extrêmes  
présentant une caractéristique sortie-entrée indépendante du temps.



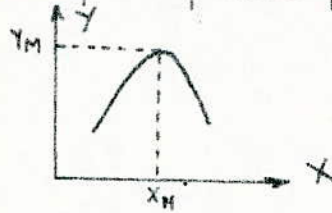
# PRESENTATION DES SYSTEMES EXTREMAUX

- systèmes extrémaux utilisant la mesure directe des dérivées
- systèmes extrémaux utilisant la méthode des perturbations
- systèmes extrémaux pas à pas.

## Présentation des systèmes extrémaux

Soit un objet dont l'entrée  $X$  et la sortie  $Y$  sont liés par une relation non linéaire.

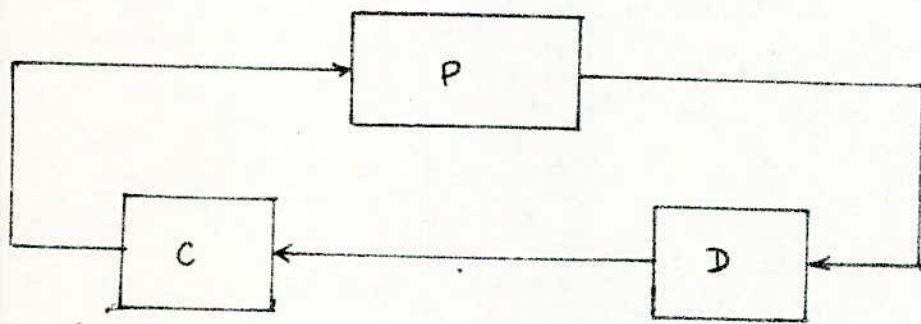
Supposons que la caractéristique  $Y = f(X)$  est indépendante du temps : c'est donc une caractéristique statique. Supposons de plus qu'elle présente par exemple un maximum.



L'objectif qu'on se propose est de mettre le processus dans un état qui place  $Y$  à sa valeur extrême  $Y_M$  par recherche de la valeur optimale de l'entrée  $X_M$ .

Pour atteindre cet objectif, il faut pouvoir estimer la position du point de fonctionnement par rapport au maximum, à un instant donné, et de commander le système de manière à rapprocher ce point du maximum. La recherche de l'état de fonctionnement optimal se fait de manière automatique.

On peut représenter le schéma fonctionnel d'un système extrémal de la manière suivante :



P : Processus à réguler

D : dispositif de localisation du point de fonctionnement

C : organe de commande.

Une fois la position du point de fonctionnement localisée par rapport au maximum, on sait dans quel sens doit évoluer l'entrée pour atteindre ce maximum. Le dispositif D envoie des informations à l'organe de commande qui élabore une action telle que le processus réglé se rapproche toujours de son état extrême.

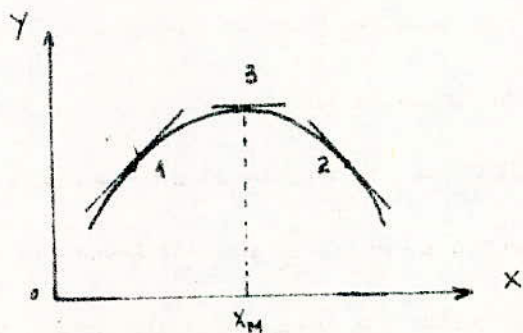
La localisation de l'état du processus peut se faire de plusieurs manières. Chaque procédé définit un algorithme de recherche et par conséquent impose la structure du schéma fonctionnel et la nature des différents éléments à utiliser.

On présentera 3 algorithmes de recherche de l'extrémum et les schémas fonctionnels correspondants :

- système avec mesure directe des dérivées
- système utilisant une perturbation
- systèmes pas à pas.

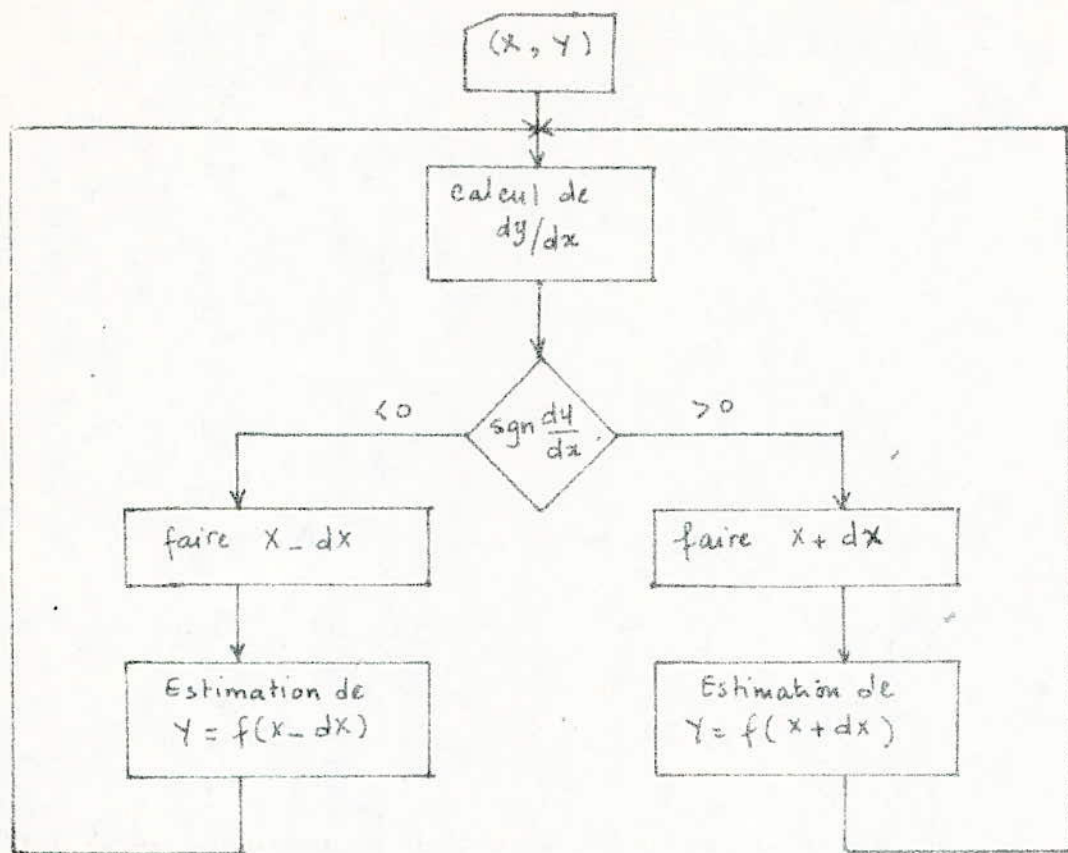
### 1. Systèmes extrémaux avec mesure directe des dérivées.

Dans ces systèmes, la localisation du point de fonctionnement par rapport à l'extrémum est donnée par le signe de la dérivée  $\frac{dy}{dx}$ .



- Au point 1  $\frac{dy}{dx} > 0$  on se trouve à gauche de l'extrémum  
 Au point 2  $\frac{dy}{dx} < 0$  et le point de fonctionnement est à droite de l'extrémum  
 Au point 3  $\frac{dy}{dx} = 0$  on se trouve au maximum

Pour le fonctionnement global du système on a l'algorithme suivant :



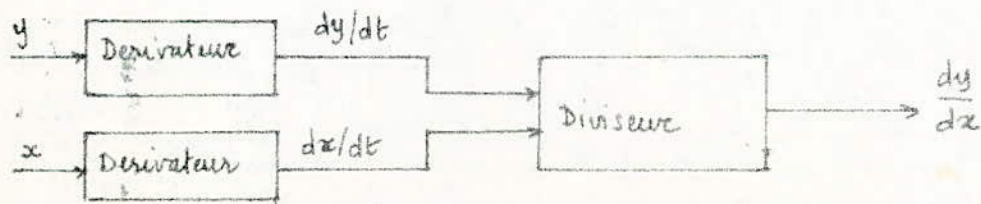
Examinons la nature des éléments réalisant chacune des phases de l'organigramme ci dessus.

a) calcul de  $dy/dx$ .

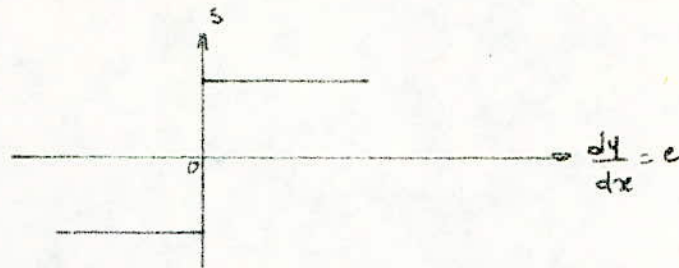
En pratique on ne dispose pas de circuit permettant de faire le calcul direct de  $\frac{dy}{dx}$ .

On décompose ce calcul de la manière suivante :

On calcule séparément  $\frac{dy}{dt}$  et  $\frac{dx}{dt}$ , ensuite à l'aide d'un diviseur on réalise l'opération  $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$ .

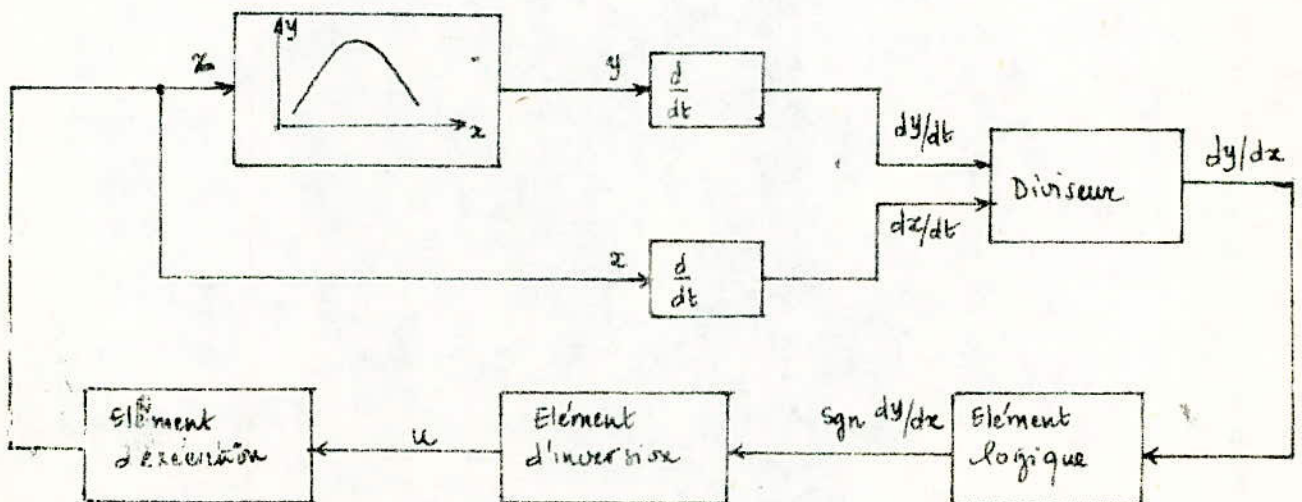


b) A la sortie du diviseur on entre dans un dispositif qui fournit un signal fonction du signe de la dérivée. La caractéristique sortie entrée de ce dispositif est la suivante :



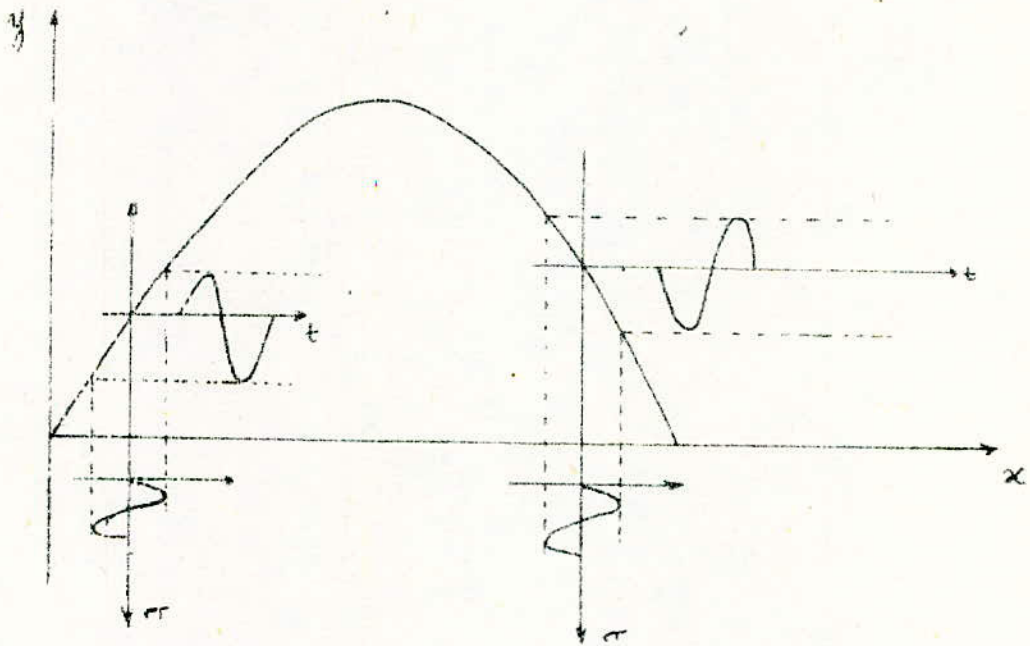
Cette fonction peut être réalisée par un relais idéal. Le dispositif réalisant cette fonction est appelé élément logique.

Le signe de la dérivée  $dy/dx$  étant connu, la position du point de fonctionnement est localisée par rapport à l'extrémum. Suivant que l'on se trouve à gauche ou à droite de l'extrémum, on augmentera ou on diminuera l'entrée  $x$ . Cette opération est réalisée par un élément d'exécution qui est généralement un moteur. Le sens d'évolution de l'élément d'exécution étant imposé par un élément d'inversion commandé par l'élément logique. On aboutit alors au schéma fonctionnel suivant :



## 2. Systèmes extrêmes utilisant une perturbation

Une 2<sup>ème</sup> méthode, pour localiser la position du point de fonctionnement par rapport au maximum, consiste en l'utilisation d'un signal extérieur au système extrême. On recueille à la sortie du processus un signal dont l'amplitude et la phase sont fonctions du point où a lieu la perturbation.



Si le système se trouve à gauche du maximum, à la sortie du processus on obtient un signal  $y(t)$  dont la phase est positive. Dans le cas contraire, c'est à dire lorsque le point de fonctionnement se trouve à droite du maximum la phase du signal de sortie est négative.

Donc en tenant compte du sens d'évolution de la commande, on peut évaluer l'imposition apportée par l'analyse de la phase du signal de sortie, on peut dire de quel côté du maximum se trouve le système.

On peut également exploiter le balayage de  $x$  et de  $y$  provoqué par le signal de perturbation pour estimer la dérivée  $\frac{dy}{dx}$ , et on peut donc savoir de quel côté du maximum a lieu le fonctionnement du système.

Pour cela on peut utiliser un détecteur synchrone à la sortie du processus.

Le détecteur fournit à sa sortie un signal proportionnel à  $\frac{dy}{dx}$ .

Soit  $y = y(x)$  caractérisant les propriétés du système - c'est l'équation de la caractéristique statique du système

On appliquant à l'entrée du système un signal de perturbation

$$x_0 \sin \omega t$$

À la sortie du processus on a donc :

$$y = y(x + x_0 \sin \omega t) \quad (1)$$

$x_0$  est petit et on peut développer cette fonction en série de Taylor :

$$y = y(x) + \left(\frac{dy}{dx}\right) x_0 \sin \omega t + \text{termes d'ordres supérieurs.} \quad (2)$$

On applique à l'entrée du détecteur, le signal de sortie du processus et le signal  $x_0 \sin \omega t$ . Le détecteur multiplie le signal de sortie du processus par le signal de perturbation et fait la moyenne de ce produit dans le temps.

Multiplications (2) par  $x_0 \sin \omega t$  en négligeant les termes d'ordre supérieurs à 1, on obtient :

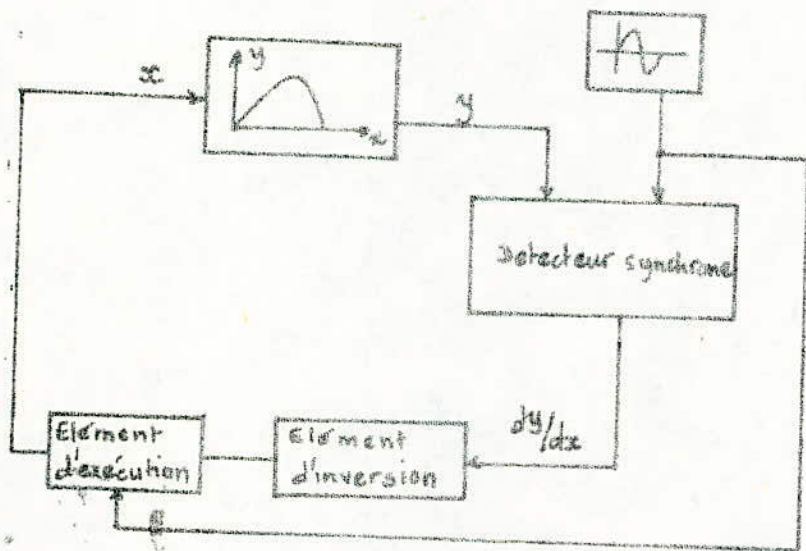
$$y(x + x_0 \sin \omega t) \cdot x_0 \sin \omega t = x_0 \sin \omega t \cdot y(x) + \left(\frac{dy}{dx}\right) x_0^2 \sin^2 \omega t \quad (3)$$

fait la moyenne de (3) sur une période  $T$  du signal de perturbation, on obtient le signal de sortie du détecteur  $u_s$  :

$$\begin{aligned}
 v_s &\approx \frac{1}{T} \int_0^T y(x) \cdot x_0 \sin \omega t \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dy}{dx} x_0^2 \sin^2 \omega t \, dt \\
 &\approx x_0 \frac{y(x)}{T} \int_0^T \sin \omega t \, dt + \frac{1}{T} \frac{dy}{dx} x_0^2 \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt \\
 &\approx -\frac{x_0}{T} y(x) \left[ \frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^T + \frac{1}{T} \frac{dy}{dx} x_0^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \, dt \\
 &\approx \frac{1}{T} \frac{dy}{dx} x_0^2 \int_0^T \frac{1}{2} \, dt = \frac{1}{2} x_0^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)
 \end{aligned}$$

$$v_s \approx \frac{1}{2} x_0^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)$$

Ayant la dérivée  $\frac{dy}{dx}$ , on peut utiliser ce signal pour commander le mouvement de l'élément d'exécution.





### 3. Systèmes extrêmes pas à pas.

Les systèmes extrêmes que nous venons de voir présentent des défauts pouvant avoir une influence néfaste sur le fonctionnement global du système.

- Les systèmes extrêmes utilisant la mesure directe de la dérivée  $dy/dx$  présentent un défaut important surtout au niveau du maximum. En effet les dérivateurs amplifient le bruit ; au niveau du maximum  $\frac{dy}{dx}$  est très faible et le bruit risque de l'emporter sur le signal utile. Donc au voisinage du maximum on risque d'avoir un fonctionnement aberrant l'organe de commande recevant des signaux aléatoires et devient donc inefficace.

- La méthode des perturbation ne peut pas être appliquée à tous les systèmes ou effet si la fréquence du signal de perturbation est égale à la fréquence de résonance du système, cela peut provoquer des régimes inhabituels qui peuvent mener à la destruction du système.

Ces 2 systèmes sont d'autre part peu efficaces si le processus présente une inertie importante.

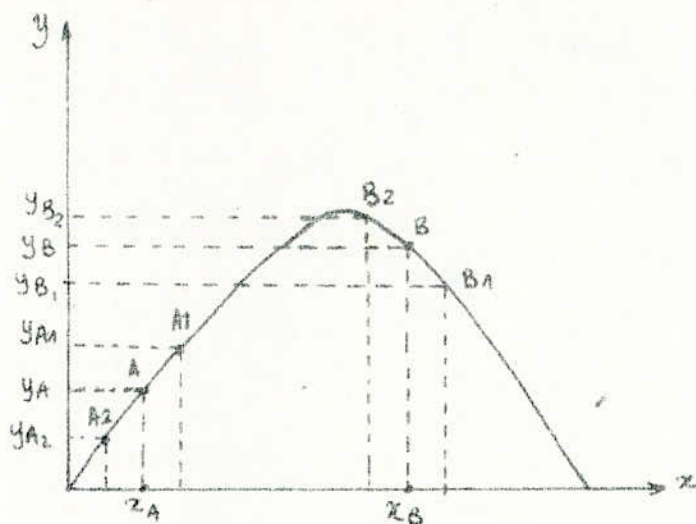
Pour éviter ces problèmes, on utilise la méthode pas à pas de recherche du maximum.

#### Principe de la méthode.

Soit un processus à réguler dont la caractéristique statique liant la variable de sortie à la variable d'entrée, présente un maximum.

Supposons qu'on se trouve en un point A de la caractéristique et augmentons  $x$  d'une quantité  $\Delta x$  dans le sens positif une première fois, dans le sens

négatif une seconde fois. On obtient ainsi sur la caractéristique 2 points  $A_1$  et  $B_2$  fig-1.



a) Dans le premier cas  $y_{A1} - y_A > 0$  et on est à gauche du maximum

b) Dans le 2<sup>ème</sup> cas  $y_{A2} - y_A < 0$  et on se trouve aussi à gauche du maximum

Supposons qu'on se trouve maintenant qu'on se trouve sur le point B de la caractéristique. Donnons à  $x$  un accroissement dans le sens positif une première fois et un accroissement négatif une seconde fois, à partir du point B. fig-1.

c) dans le premier cas  $y_{B1} - y_B < 0$  on se trouve à droite du maximum

d) dans le 2<sup>ème</sup> cas  $y_{B2} - y_B > 0$  on se trouve à droite du maximum

Dans les cas (b) et (c) il faut inverser le sens de variation de  $x$  pour se rapprocher du maximum.

Dans les cas (a) et (d) on se dirige vers le maximum et il faut donc garder le sens de variation de  $x$

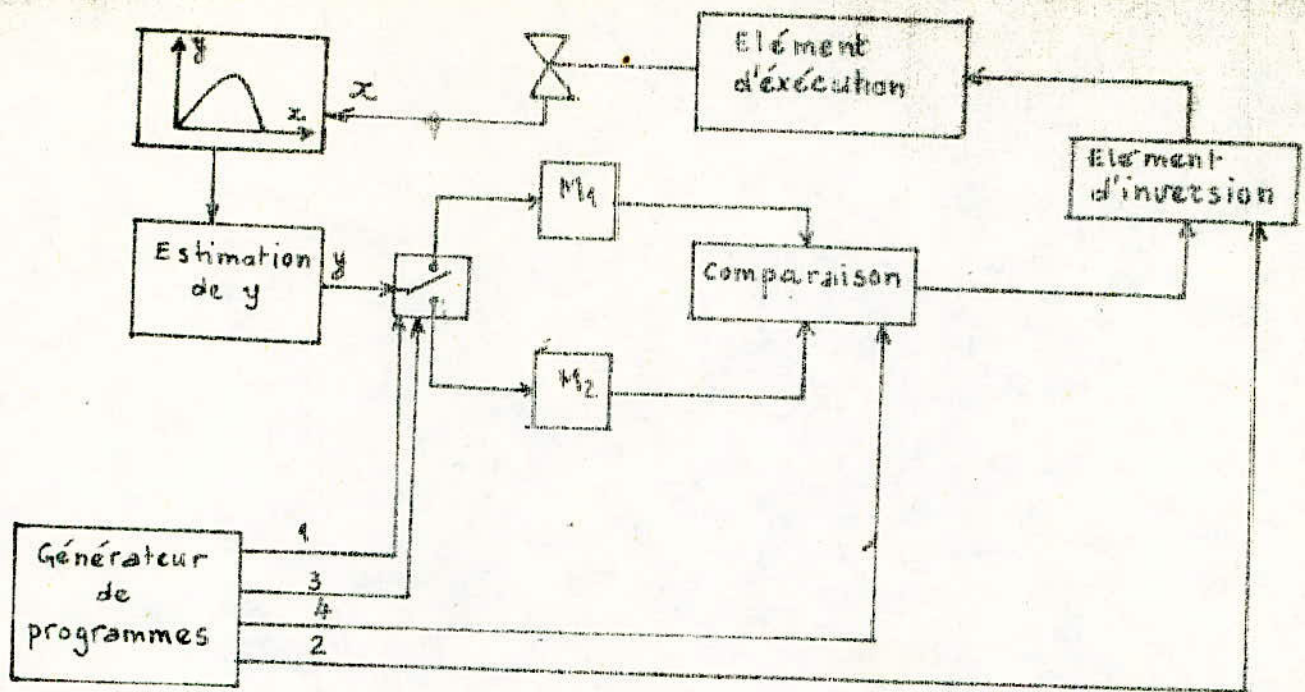
Donc à partir d'un point de la caractéristique, en faisant varier  $x$

d'un pas nous avons localisé le point de fonctionnement du processus par rapport au maximum et nous en avons déduit la sens de la prochaine variation de l'entrée  $x$  pour atteindre le maximum

Un régulateur extrémal du type pas à pas doit faire ce travail. Ce régulateur travaillera de manière séquentielle pour analyser les informations qu'il reçoit entre 2 pas successifs et déterminer en conséquence l'action qui doit rapprocher le système de son point de fonctionnement optimal.

Le fonctionnement étant séquentiel, l'entrée  $x$  varie par pas, pour pouvoir élaborer la différence  $\Delta y$ , il est nécessaire d'utiliser des mémoires qui gardent 2 valeurs successives de  $y$ , celle de l'état précédent  $y_1$  et celle de l'état présent  $y_2$ . Un dispositif de comparaison calculera  $\Delta y = y_2 - y_1$  et selon que  $\Delta y > 0$  ou  $\Delta y < 0$  un élément d'inversion orientera un élément d'exécution dans un sens ou dans l'autre sens en tenant compte de la variation de l'entrée précédente.

Pour coordonner les différentes phases de fonctionnement du régulateur extrémal, un générateur de programme séquentiel est nécessaire. On obtient alors le schéma fonctionnel suivant :



Le dispositif d'estimation de  $y$  est un organe qui délivre à sa sortie une tension proportionnelle à la valeur réelle  $y$ .

Le fonctionnement du système est imposé par le générateur de programmes

- Première commande du générateur :

Le commutateur est branché sur la mémoire  $M_1$  qui s'ouvre et la valeur présente s'y inscrit.

- Deuxième commande du générateur :

L'élément d'exécution fait varier l'entrée d'un pas, une valeur  $y_2$  est disponible

- Troisième commande du générateur :

Le commutateur ouvre la mémoire  $M_2$  et la valeur  $y_2$  s'y inscrit

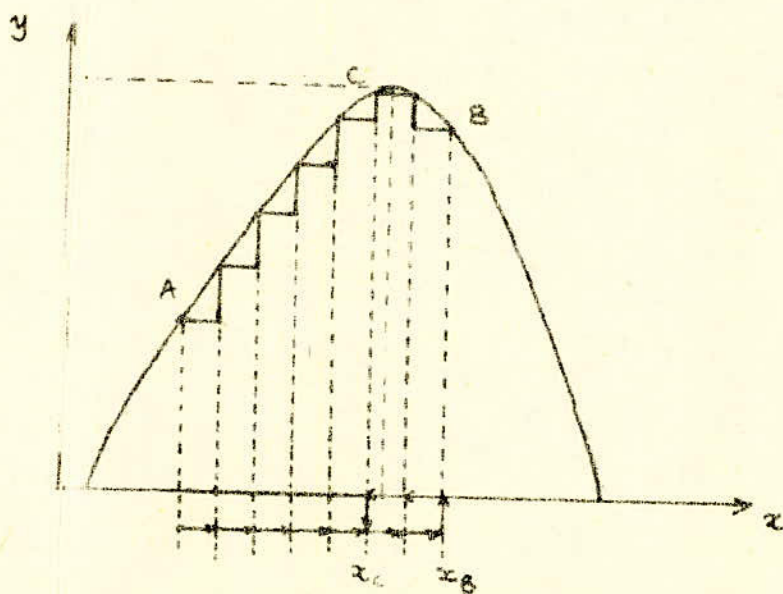
- Quatrième commande du générateur :

La comparaison se fait et on obtient le signal  $\text{sgn } y = \text{sgn } (y_2 - y_1)$ . A ce moment, l'élément d'inversion :

- garde son état si  $\text{sgn } \Delta y$  est le même que dans le cycle précédent, l'entrée évolue alors dans le même sens
- change son état si  $\text{sgn } \Delta y$  est au  $\text{sgn } \Delta y$  du cycle précédent, l'entrée évolue alors dans le sens inverse par rapport à l'entrée dans le cycle précédent

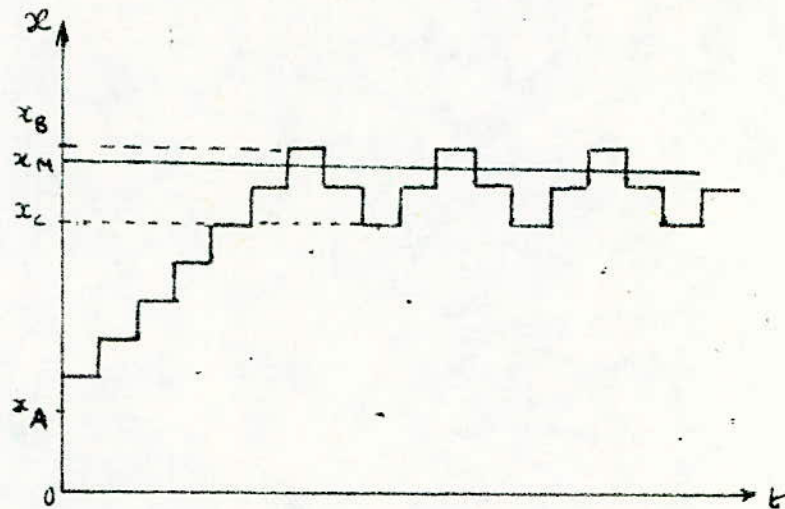
A la fin de cette quatrième séquence on a à l'entrée une nouvelle valeur  $y_3$  de  $y$ . On l'inscrit en mémoire  $M_1$ , on fait un pas d'où une nouvelle valeur  $y_4$ , la 3<sup>ème</sup> séquence fait la comparaison et ainsi de suite...

Lorsque le point de fonctionnement est amené au voisinage du maximum, le régulateur n'arrête pas de fonctionner, on obtient une oscillation autour du maximum. Cette oscillation est une caractéristique des systèmes extrémaux.

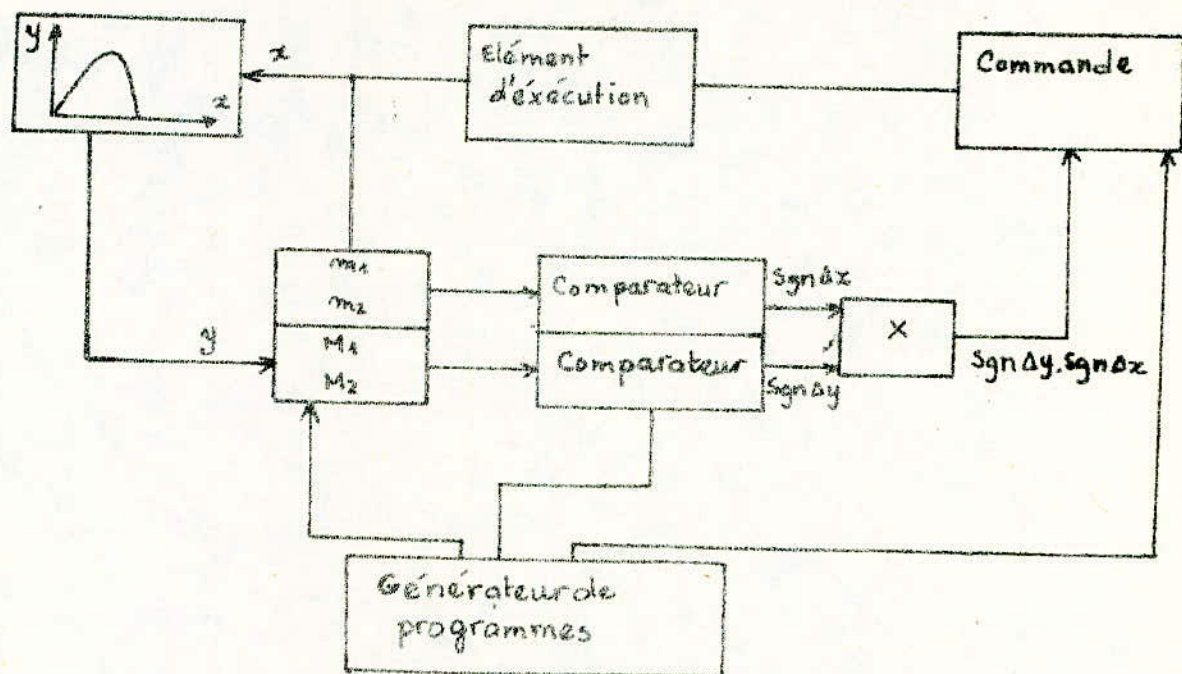


Supposons qu'initialement on démarre du point A. Par pas successifs, le système arrive en B. On B le maximum est dépassé et l'évolution du système

se fait dans le sens inverse du mouvement précédent. Le système arrive alors au point C et la commande inverse le sens de variation de  $x$ . Le système oscille de part et d'autre du maximum. L'évolution de  $x$  dans le temps est donnée par le diagramme suivant



On peut proposer une autre variante du système présenté précédemment. Le schéma fonctionnel proposé est donné ci-dessous.



Dans ce schéma fonctionnel, nous avons ajouté 2 mémoires  $m_1$  et  $m_2$  pour tenir du sens de l'action précédente de la commande.

Les mémoires  $M_1$  et  $M_2$ , stockent comme précédemment 2 valeurs de  $y$ .

On compare donc 2 valeurs de  $y$  et 2 valeurs de  $x$ . A la sortie des comparateurs on obtient  $Sgn(x_2 - x_1) = Sgn \Delta x$  et  $Sgn(y_2 - y_1) = Sgn \Delta y$ . L'élément logique placé après les 2 comparateurs donne à sa sortie un signal égal à  $Sgn \Delta y \cdot Sgn \Delta x$ .

En fonction du signal  $Sgn \Delta y \cdot Sgn \Delta x$  la commande doit agir de façon que le système se rapproche du maximum.

Quatre cas peuvent se présenter :

1<sup>er</sup> cas :

$\Delta y > 0$ ,  $\Delta x > 0$  on se trouve à gauche du maximum. La commande doit agir dans le sens de l'augmentation de l'entrée  $x$ .

2<sup>e</sup> cas :  $\Delta y < 0$ ,  $\Delta x < 0$  le point de fonctionnement se trouve à gauche du maximum et la commande agit dans le même sens que précédemment.

3<sup>e</sup> cas :  $\Delta y > 0$ ,  $\Delta x < 0$ , le point de fonctionnement est à droite du maximum, la commande agit dans le sens de la diminution de  $x$ .

4<sup>e</sup> cas :  $\Delta y < 0$ ,  $\Delta x > 0$ , le point de fonctionnement est à droite du maximum la commande agit dans le même sens que précédemment.

Le fonctionnement se fait de manière séquentielle grâce au générateur de programmes.

1<sup>ère</sup> séquence :

La 1<sup>ère</sup> commande du générateur de programmes ouvre les mémoires  $m_1$  et  $M_1$ ,  $y_1$  et  $x_1$  s'y inscrivent.

2<sup>ème</sup> séquence :

La 2<sup>ème</sup> commande agit sur la commande, l'élément d'exécution fait un pas et on a une nouvelle valeur de  $x$  et  $y$  soit  $x_2, y_2$ .

3<sup>e</sup> séquence :

La 3<sup>ème</sup> commande du générateur ouvre les mémoires  $m_2$  et  $M_2$  et  $x_2$  et  $y_2$  s'y inscrivent.

4<sup>ème</sup> séquence :

L'élément de comparaison élabore le signal  $\text{Sgn } \Delta y, \text{Sgn } \Delta x$  et en fonction de  $\text{Sgn } \Delta y, \text{Sgn } \Delta x$  la commande fera un pas dans le sens voulu.



On obtient ainsi une nouvelle valeur de  $y$  et le cycle se répète.

Le  $\text{sgn } \dot{y}$ ,  $\text{sgn } \dot{x}$  étant gardé constant, dans ce deuxième cycle, lors de la seconde séquence le moteur fera un pas dans le même sens que celui de la séquence précédente, c'est à dire la séquence n° 4 du cycle précédent.

Ses cycles se succéderont jusqu'à ce que le système atteigne le maximum.

Il oscillera autour de ce maximum.

CHAPITRE  
PRESENTATION DES METHODES D'ETUDE  
DES SYSTEMES EXTREMAUX

- A. Méthode de l'approximation du premier harmonique .
- B. Methode du plan de phase

## • Méthode de l'approximation du premier harmonique

On supposera que les systèmes étudiés sont filtrés et séparables.

Un système non linéaire filtré est un système dans lequel les harmoniques engendrés par la non linéarité peuvent être négligés.

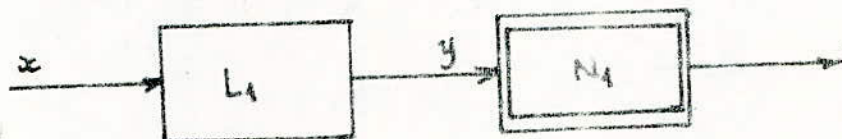
Un système séparable est un système dans lequel on peut distinguer une partie linéaire définie par sa transmittance et une partie non linéaire définie par une relation indépendante du temps entre ses grandeurs d'entrée et de sortie.

Notons que la majorité des systèmes non linéaires d'ordre supérieur à 2, dans le domaine de l'automatisme relèvent de la méthode de l'approximation du premier

harmonique

### 1. Principe

Considérons la chaîne suivante :



où  $x$  est l'entrée sinusoïdale :  $x = X_0 \sin \omega t$ .

$L_1(p)$  est la fonction de transfert de l'élément linéaire

$$L_1(p) = U_1(\omega) + jV_1(\omega)$$

À la sortie de l'élément linéaire on a :

$$y = L_1(p)x = (U_1(\omega) + jV_1(\omega)) X_0 \sin \omega t$$

$$y = X_0 \sqrt{U_1^2 + V_1^2} \sin \omega t e^{-j\varphi}$$

$$y = Y_0 \sin \omega t e^{-j\varphi}$$

$\varphi$  est le déphasage introduit par l'élément linéaire

À la sortie de l'élément non linéaire, le signal garde sa périodicité mais une distorsion. Le signal  $S(t)$  peut être développé en série de Fourier :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$        $\varphi_n = -\text{Arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$a_n$  et  $b_n$  sont les coefficients de Fourier :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega t \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega t \cdot dt$$

La méthode du premier harmonique consiste à assimiler la sortie de l'élément non linéaire au premier harmonique de son développement en série de Fourier :

$$s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \varphi_1 = -\text{Arctg}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

## 2. Gain complexe équivalent

Si on assimile  $s(t)$  à son premier harmonique  $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  alors la fonction

$$N(X_0) = \frac{A_1}{X_0} e^{j\varphi_1}$$

peut être considérée comme la fonction de transfert généralisée de l'organe non linéaire  $N$ .

Cette fonction de transfert a

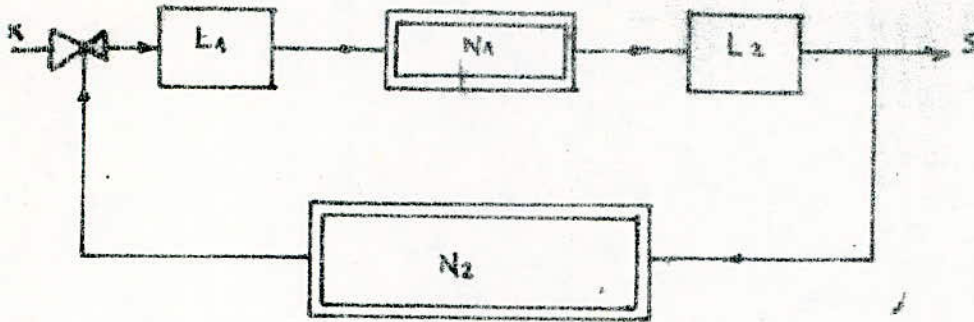
un module  $B(X_0) = \frac{A_1}{X_0}$

et une phase  $\varphi_1(X_0)$

Comme  $N(X_0)$  ne dépend pas de  $\omega$  on peut tracer un lieu de transfert gradué en  $X_0$

### 3. Application au cas de systèmes extrêmes.

Dans le cas des systèmes extrêmes on pourra trouver une fonction de transfert équivalente pour le processus et le régulateur extrême qui sont schématisés de la manière suivante :



Fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G = N_1(A_1) \cdot N_2(A_2) \cdot L_1(p) \cdot L_2(p)$$

Fonction de transfert en boucle fermée :

$$H' = \frac{N_1(A_1) \cdot \cancel{N_2(A_2)} \cdot L_1(p) \cdot L_2(p)}{1 + N_1(A_1) \cdot N_2(A_2) \cdot L_1(p) \cdot L_2(p)}$$

Pour simplifier on suppose qu'on peut identifier le système de fonction de transfert

$H'$  à un système de fonction de transfert  $H$  :

$$H = \frac{N(A) \cdot L(p)}{1 + L(p) \cdot N(A)}$$

$N(A)$  est la fonction de transfert de la partie non linéaire équivalente

$L(p)$  la transmittance de la partie linéaire équivalente.

L'équation caractéristique de  $H$  est

$$1 + N(A) \cdot L(p) = 0$$

soit  $L(p) = -\frac{1}{N(A)} = C(A)$

La connaissance des lieux  $L(p)$  et  $C(A)$  permet de faire l'étude du système.

Le lieu  $C(A)$  est appelé lieu critique.

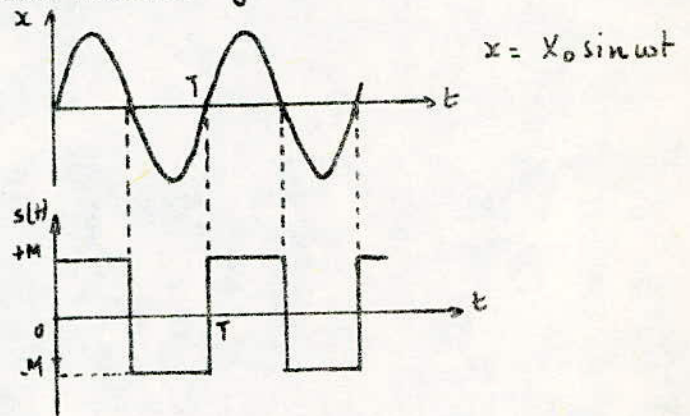
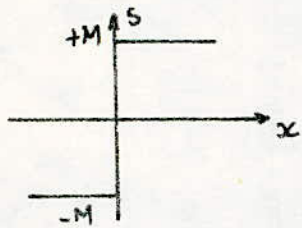
$$C(A) = -\frac{1}{N(A)}$$

module de  $C(A)$  :  $\frac{1}{|B(A)|}$

Phase de  $C(A) = \pi - \varphi(A)$

#### 4- Exemples de calcul du gain complexe équivalent.

4.1. Cas d'un élément plus ou moins sans seuil ni hystérésis.



$$\text{on a } s(t) = \begin{cases} +M & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -M & -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$

La transformée de Fourier s'obtient en calculant  $a_0, a_1, b_1$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 0 \quad b_1 = \frac{4M}{\pi} \quad \varphi_1 = -\arctg \frac{b_1}{a_1} = -\pi/2$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

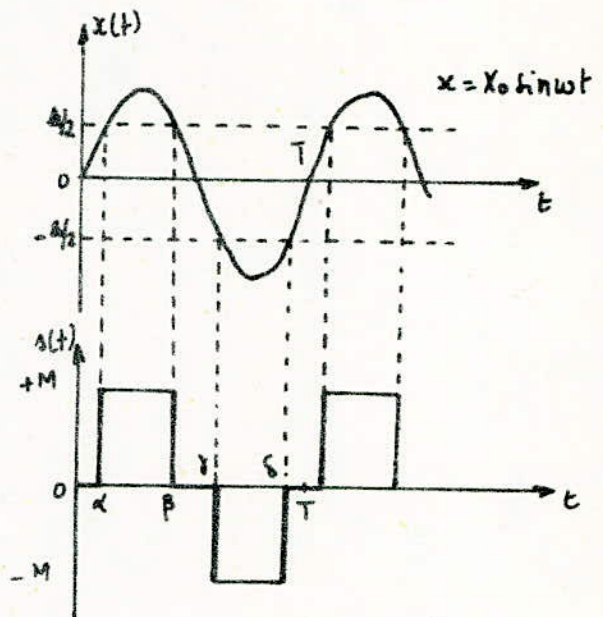
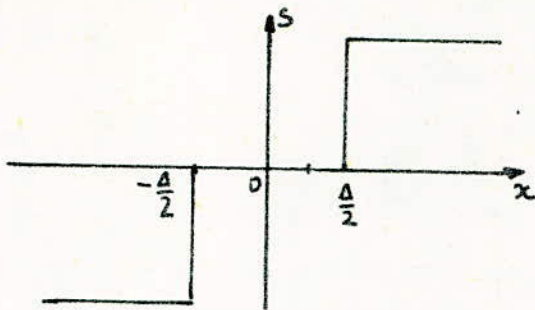
$$s(t) = \frac{4M}{\pi} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{4M}{\pi} \sin \omega t$$

on constate qu'il n'y a pas de déphase entre l'entrée et la sortie

$$N(X_0) = \frac{4M}{\pi X_0} \quad \varphi(X_0) = 0$$

$$C(X_0) = -\frac{\bar{E} X_0}{4M}$$

4.2. Cas d'un élément plus ou moins avec seuil



On calcule la première harmonique de  $s(t)$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 0 \quad b_1 = \frac{4K}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{2X_0}\right)^2}$$

La sortie  $x(t)$  est en phase avec l'entrée et le gain équivalent est réel

$$N(X_0) = \frac{4K}{\pi X_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{2X_0}\right)^2}$$

### 5. Etude de la stabilité

En gardant le modèle du système à retour unitaire, la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$\frac{S}{X} = N(X_0) \cdot L(p) = H(X_0, p)$$

La fonction de transfert en boucle fermée est

$$F(X_0, p) = \frac{N(X_0) \cdot L(p)}{1 + N(X_0) \cdot L(p)}$$

L'étude de la stabilité se fera par la connaissance du lieu de transfert  $L(p)$  et du lieu critique  $C(X_0) = -\frac{1}{N(X_0)}$

Dans le plan complexe  $L(p)$  est gradué en fréquence et le lieu critique en amplitudes. Pour les systèmes non linéaires la stabilité dépend non seulement du gain statique de la partie linéaire mais aussi de l'amplitude de l'entrée. Ainsi un même système pourra être stable pour certaines valeurs de l'amplitude de l'entrée et instable pour d'autres.

### 5-1 Critère du revers.

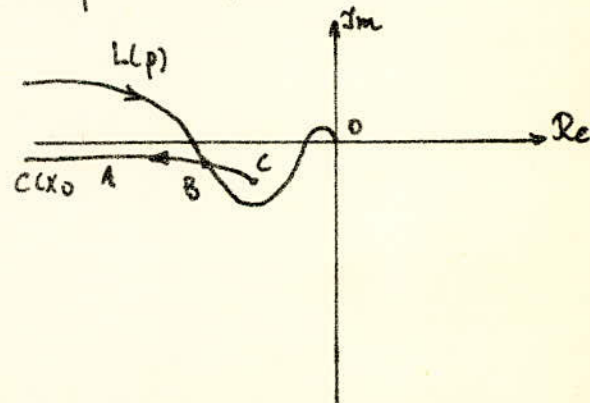
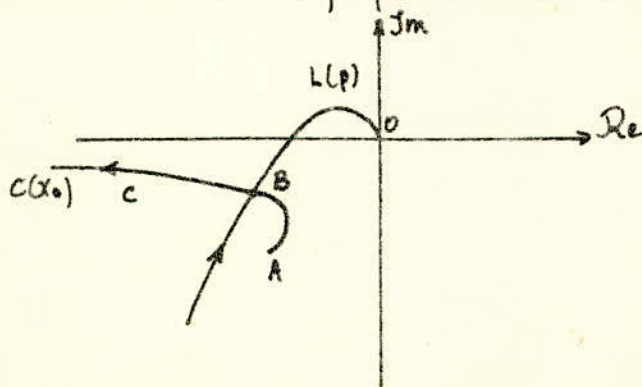
Le critère du revers pour les systèmes linéaires a été généralisé aux systèmes non linéaires.

Soit un système non linéaire dont l'équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$1 + N(x_0) \cdot L(p) = 0$$

- Le système est stable pour des amplitudes de l'entrée telles que le lieu  $L(p)$ , décrit dans le sens des fréquences croissantes, laisse le lieu critique  $C(x_0) = -\frac{1}{N(x_0)}$  à sa gauche.

- Le système est instable pour des amplitudes de l'entrée telles que le lieu  $L(p)$ , décrit dans le sens des fréquences croissantes laisse le lieu critique  $C(x_0)$  à sa droite.



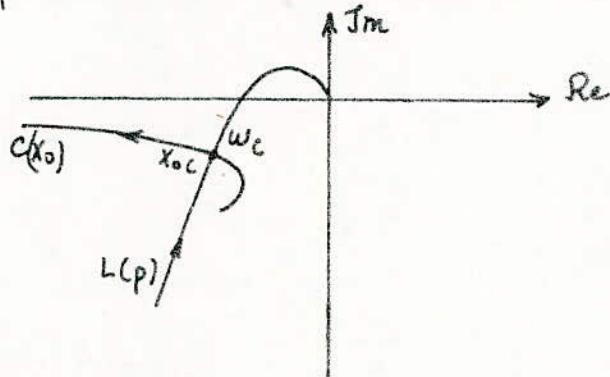
La portion des lieux critiques AB correspond aux amplitudes d'instabilité, la portion BC aux amplitudes de stabilité.



## 5-2 Oscillations limites

Entre les domaines de stabilité et d'instabilité, il existe un état limite défini par l'intersection des lieux  $L(p)$  et  $C(x_0)$ . Ce point définit la limite de stabilité caractérisée par une fréquence critique  $\omega_c$  lue sur le lieu  $L(p)$  et par une amplitude dite critique  $x_{0c}$  lue sur le lieu critique.

En ce point le système oscille de lui-même à la fréquence critique  $\omega_c$  avec une amplitude  $x_{0c}$ ; ces oscillations sont appelées oscillations limite. Ces oscillations peuvent être stables ou instables.



## 5-3. Stabilité des oscillations limites.

### Critère de Loeb

L'équation caractéristique de la fonction de transfert d'un système non linéaire

$L(p).N(x_0)=1$  peut s'écrire :

$$Z(\omega, x_0) + jY(\omega, x_0) = 0$$

Au point d'intersection  $(x_{0c}, \omega_c)$  des lieux  $L(p)$  et  $C(x_0)$  on a une oscillation

$$x = x_{0c} e^{j\omega_c t}$$

Si une perturbation intervient, elle fait varier  $\omega_c$  et  $x_{0c}$  de  $\Delta\omega_c$  et  $\Delta x_{0c}$ .

Si on suppose de plus que l'oscillation évolue vers le régime permanent avec un amortissement  $\delta$  on peut écrire :

$$X = (X_{0c} + \Delta X_{0c}) e^{j(\omega_c + \Delta\omega_c + j\delta)t}$$

On développant en série de Taylor

$$Z(\omega + (\Delta\omega + j\delta), X_0 + \Delta X_0) + jY(\omega + (\Delta\omega + j\delta), X_0 + \Delta X_0)$$

on peut estimer  $\Delta\omega, \Delta X_0, \delta$ .

On a en régime permanent, c'est à dire quand les variations  $\Delta\omega$  et  $\Delta X_0$  disparaissent

$$Z(\omega + (\Delta\omega + j\delta), X_0 + \Delta X_0) + jY(\omega + (\Delta\omega + j\delta), X_0 + \Delta X_0) - [Z(\omega, X_0) + jY(\omega, X_0)] = 0$$

soit en prenant le premier terme du développement :

$$(\Delta\omega + j\delta) \frac{\partial}{\partial \omega} (Z + jY) + \Delta X_0 \frac{\partial}{\partial X_0} (Z + jY) = 0$$

$$\left[ \Delta\omega \frac{\partial Z}{\partial \omega} + \Delta X_0 \frac{\partial Z}{\partial X_0} - \delta \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right] + j \left[ \Delta\omega \frac{\partial Y}{\partial \omega} + \Delta X_0 \frac{\partial Y}{\partial X_0} + \delta \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right] = 0$$

On tire de cette équation :

$$\Delta\omega \frac{\partial Z}{\partial \omega} + \Delta X_0 \frac{\partial Z}{\partial X_0} - \delta \frac{\partial Y}{\partial \omega} = 0$$

$$\Delta\omega \frac{\partial Y}{\partial \omega} + \Delta X_0 \frac{\partial Y}{\partial X_0} + \delta \frac{\partial Z}{\partial \omega} = 0$$

On éliminant  $\Delta\omega$  on obtient :

$$\left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^2 \right] \delta = \left[ \frac{\partial Z}{\partial X_0} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial X_0} \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right] \Delta X_0$$

Pour que les oscillations limites soient stables il est nécessaire que lorsque  $\Delta X_0$  est positif l'amortissement  $\delta$  soit positif et lorsque  $\Delta X_0$  négatif il soit négatif. L'amortissement  $\delta$  doit prendre un signe tel qu'il s'oppose à la variation  $\Delta X_0$  il faut qu'il soit donc de même signe que  $\Delta X_0$ . On a alors :

$$\frac{\partial Z}{\partial X_0} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial X_0} \frac{\partial Z}{\partial \omega} > 0$$

Pour faire apparaître séparément les parties linéaire et non linéaire on pose :

$$L(p) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$C(x_0) = -\frac{1}{N(x_0)} = P(x_0) + jQ(x_0)$$

alors :

$$Z = U(\omega) - P(x_0)$$

$$Y = V(\omega) - Q(x_0)$$

sachant que  $\frac{\partial Z}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \omega} > 0$

on obtient en remplaçant Z et Y par leurs nouvelles valeurs :

$$\frac{\partial Q}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\partial P}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} > 0 \quad \text{qui peut s'écrire :}$$

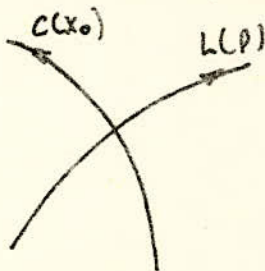
$$\left( \frac{d}{d\omega} L(p) \wedge \frac{d}{dx_0} C(x_0) \right) > 0$$

ou résumé le critère de Loeb peut s'énoncer comme suit :

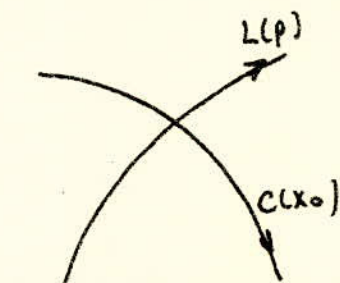
l'oscillation limite, pour un système donné, est stable si le produit

$$\frac{dL(p)}{d\omega} \wedge \frac{dC(x_0)}{dx_0} \text{ est positif}$$

instable dans le cas contraire



oscillation limite stable



oscillation limite instable

### Application.

Soient les lieux de transfert de 2 systèmes non linéaires fig.1. et fig.2

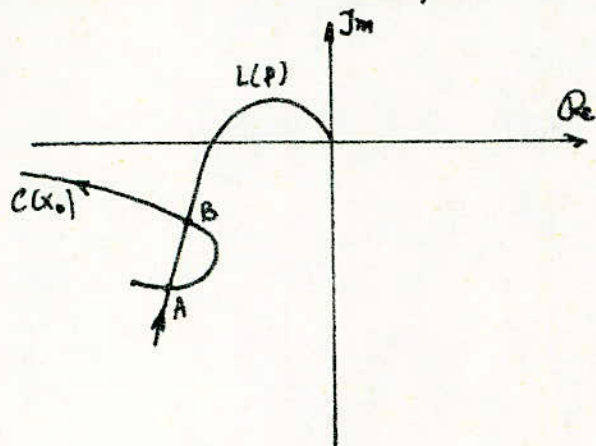


fig.1.

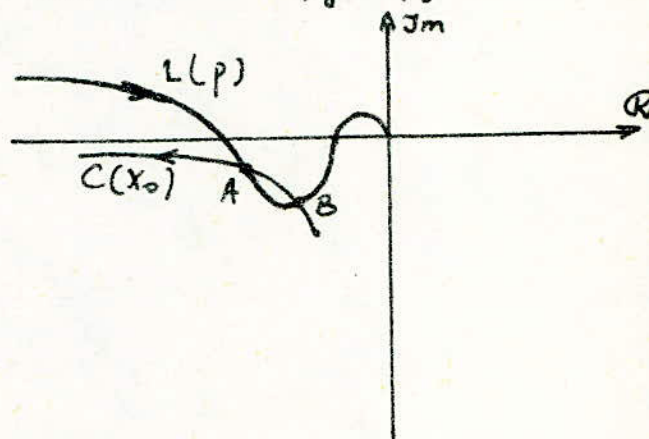
Le critère de Loeb montre que :

Dans le cas de la fig.1. : en A l'oscillation limite est stable

en B elle est instable

Dans le cas de la fig.2. : en A l'oscillation limite est instable

en B elle est stable.



## B. Méthode du plan de phase

Cette méthode ne s'applique qu'aux systèmes qui sont décrits par une équation différentielle du second ordre. Elle se restreint à l'étude des régimes transitoires qui peuvent être définis par des conditions initiales. Mais l'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'étudier des systèmes présentant des non-linéarités quelconques.

### 1. Principe de la méthode.

Soit un système autonome régi par une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \phi\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \psi\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cdot x = 0 \quad (1)$$

On peut représenter géométriquement l'état du système à un instant  $t$ , par un point de coordonnées  $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  dans un plan de coordonnées rectangulaires. Ce plan est appelé plan de phase.

Posons :

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (2)$$

d'où

$$\frac{dy}{dt} = -\phi(x, y) \cdot y - \psi(x, y) \cdot x \quad (3)$$

éliminons le temps en divisant les relations (2) et (3); on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi(x, y) \cdot y + \psi(x, y) \cdot x}{y} \quad (4)$$

Dans le plan de phase, l'intégrale de cette équation représente une courbe appelée trajectoire de phase.

Le système est décrit à partir des conditions initiales quelconques  $(x_0, y_0)$  par la famille des trajectoires. L'état initial du système est représenté

En partant de  $P_0(x_0, y_0)$ , sa son évolution ultérieure s'obtient en suivant la trajectoire, passant par le point  $P_0$ , dans le sens des temps croissants.

Les trajectoires sont graduées en temps et ceci grâce à l'équation (2) :

Le sens de parcours d'une trajectoire se déduit du signe des dérivées de  $x$  et de  $y$  :

— si  $\frac{dx}{dt} > 0$  :  $x(t)$  est croissant,

— si  $\frac{dy}{dt} > 0$  :  $y(t)$  est croissant,

Évidemment, les trajectoires de phase peuvent se construire par une méthode graphique. La plus simple et la plus utilisée est la méthode des isoclines.

### 2. Méthode des isoclines

Elle consiste à construire les lieux le long desquels la pente des trajectoires a une valeur constante  $\lambda$ .

Ces lieux sont obtenus en écrivant que :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda = \text{cte}$$

on obtient ainsi l'équation générale des courbes isoclines :

$$\lambda = - \frac{\phi(x, y) \cdot y + \psi(x, y) \cdot x}{y}$$

d'où

$$\lambda y = - \left[ \phi(x, y) \cdot y + \psi(x, y) \cdot x \right] \quad (5)$$

## 2.1 Exemple d'application.

Soit un système décrit par l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Posons

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - x = -(y+x)$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+x}{y}$$

Soit  $\lambda = dt^c$  une pente des trajectoires. L'équation des courbes isoclines est donc :

$$\lambda = -\frac{y+x}{y} \quad \Rightarrow$$

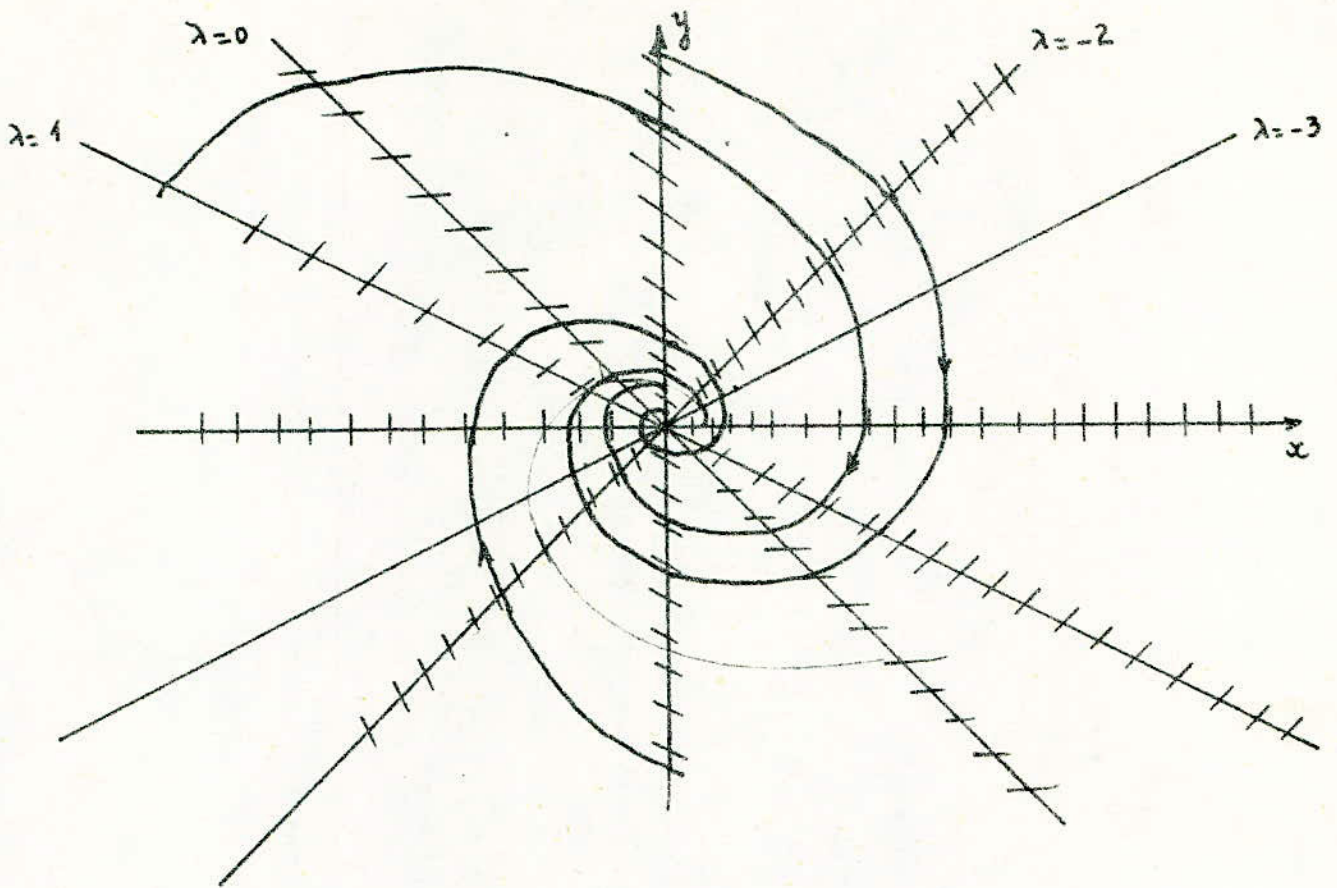
$$y = -\frac{x}{1+\lambda}$$

Les courbes isoclines sont donc des droites de pente  $-\frac{1}{1+\lambda}$ .

Le tableau suivant donne les équations des courbes isoclines pour certaines valeurs de  $\lambda$ .

$\lambda$	0	-1	-2	-3	1	2	3	$\infty$
y	-x	$\infty$	x	$\frac{x}{2}$	$-\frac{x}{2}$	$-\frac{x}{3}$	$-\frac{x}{4}$	0

On trace les courbes isoclines pour différentes valeurs de  $\lambda$ . Sur ces isoclines on représente des petits segments de droite représentant les tangentes aux trajectoires de phase qui coupent les isoclines. On obtient les trajectoires sui vantes:



Reprenons l'équation (4)

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\phi(x,y) \cdot y + \psi(x,y) \cdot x}{y} \quad (4)$$

on constate que pour  $\frac{dx}{dt} = 0$  et  $\frac{dy}{dt} = 0$  alors

$$\frac{dy}{dx} \text{ est indéterminé}$$

Dans ce cas, on a un point singulier. Ce point est défini par :

$$y = - \left( \phi(x,y) \cdot y + \psi(x,y) \cdot x \right) = 0 \quad (6)$$

## 2.2. Points Singuliers.

Donnons au système décrit par les équations (2) et (3) une forme plus générale :



$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (8)$$

Si les fonctions  $P$  et  $Q$  sont analytiques (c'est le cas de la très grande majorité des équations qui représentent des systèmes physiques) alors en chaque point  $(x, y)$  il passe une trajectoire et une seule sauf au point singulier.

On appelle points singuliers du système, les points  $(x, y)$  pour lesquels on a simultanément :

$$P(x, y) = 0 \quad (9)$$

$$Q(x, y) = 0 \quad (10)$$

En ce point on a  $\frac{dx}{dt} = 0$   $\frac{dy}{dt} = 0$

Ce point est une position d'équilibre qui peut être stable ou instable.

### 3. Différentes sortes de Points singuliers.

#### 3.1. Cas non linéaire.

Dans le cas d'un système non linéaire, il existe en général plusieurs intersections des courbes  $P(x, y) = 0$   $Q(x, y) = 0$

On démontre par l'étude des trajectoires au voisinage des points singuliers que ces points, dans le cas non linéaire, se ramènent aux mêmes types de singularités que dans le cas linéaire.

Soit  $(x_0, y_0)$  la solution du système d'équations (9) et (10).

On peut faire une approximation du système en opérant une linéarisation autour du point  $(x_0, y_0)$ . Pour cela, on fait un développement de Taylor, limité au premier terme autour de  $(x_0, y_0)$ . On a ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) \quad (12)$$

Preons  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Ceci se justifie par le fait qu'on peut par une translation, ramener le point  $(x_0, y_0)$  à l'origine des coordonnées.

On obtient ainsi les équations :

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 x + b_2 y \quad (14)$$

Le système non linéaire a été linéarisé autour du point singulier  $(x_0, y_0)$ . On se ramène ainsi à l'étude des points singuliers d'un système linéaire.

### 3-2. Recherche des points singuliers.

Essayons de transformer le système d'équations (13) et (14), par une transformation linéaire, en un système de la forme :

$$\frac{du}{dt} = r_1 u \quad (15)$$

$$\frac{dv}{dt} = r_2 v \quad (16)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont des constantes réelles ou complexes

$$\text{Soit} \quad x = \alpha_1 u + \beta_1 v \quad (17)$$

$$y = \alpha_2 u + \beta_2 v \quad (18)$$

avec  $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$

En substituant (17) et (18) dans (15) et (16) on obtient :

$$\alpha_1 \frac{du}{dt} + \beta_1 \frac{dv}{dt} = a_1 (\alpha_1 u + \beta_1 v) + a_2 (\alpha_2 u + \beta_2 v) \quad (19)$$

$$\alpha_2 \frac{du}{dt} + \beta_2 \frac{dv}{dt} = b_1 (\alpha_1 u + \beta_1 v) + b_2 (\alpha_2 u + \beta_2 v) \quad (20)$$

On transforme (19) et (20) pour revenir à la forme des équations (15) et (16) et après

identification on obtient les systèmes d'équations suivants :

$$d_1 r_1 = d_1 a_1 + a_2 a_2 \quad (21)$$

$$d_2 r_1 = d_1 b_1 + d_2 b_2 \quad (22)$$

$$\beta_1 r_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 \quad (23)$$

$$\beta_2 r_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \quad (24)$$

Pour que ces 4 équations aient une solution non nulle, il faut que

$$\begin{vmatrix} a_1 - r & a_2 \\ b_1 & b_2 - r \end{vmatrix} = 0$$

Donc :

$$(a_1 - r)(b_2 - r) - a_2 b_1 = 0$$

$$r^2 - (a_1 + b_2)r + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \quad (25)$$

C'est l'équation caractéristique du système

Finalement la solution du système d'équations (15) et (16) s'écrit :

$$u = u_0 e^{r_1 t}$$

$$v = v_0 e^{r_2 t}$$

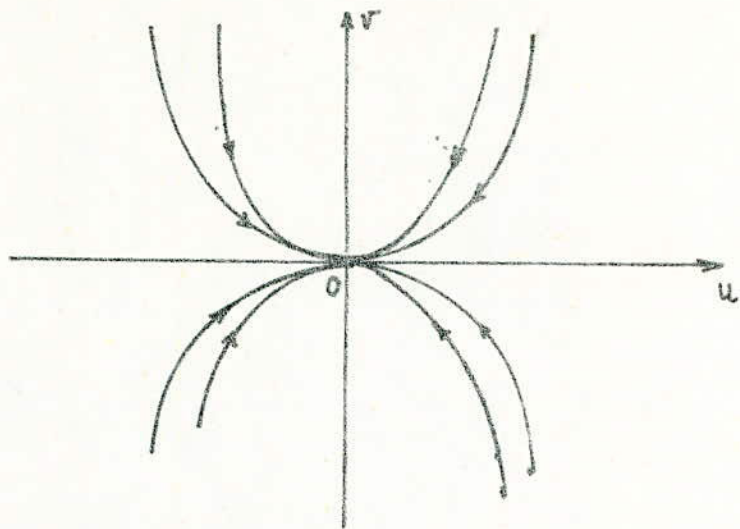
où  $u_0$  et  $v_0$  donnés par les conditions initiales et  $r_1, r_2$  solutions de l'équation (25). On conçoit que selon les solutions de (25),  $u$  et  $v$  auront des allures différentes.

### 3.2. 1. Nœud

a)  $r_1$  et  $r_2$  sont négatives  $r_2 < r_1 < 0$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (0, 0)$$

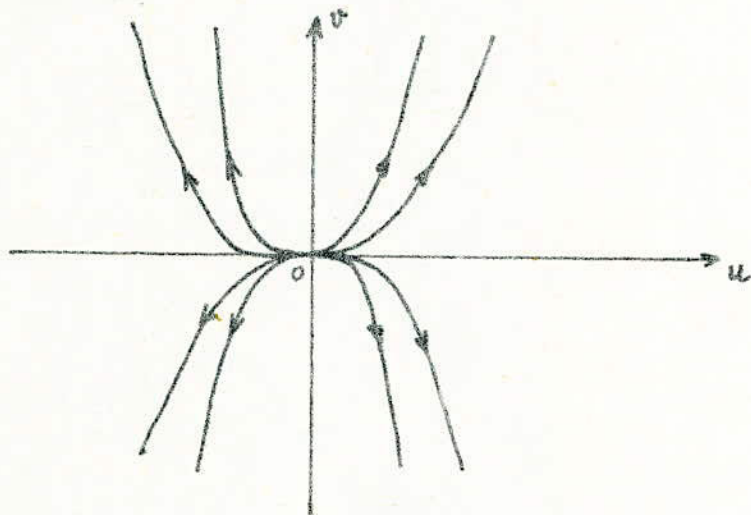
Les trajectoires tendent vers l'origine, quelles que soient les conditions initiales. Se nœud est donc stable.



b)  $r_1$  et  $r_2$  réelles et positives  $r_2 > r_1 > 0$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (\infty, \infty)$$

Donc le nœud  $(0, 0)$  est instable.

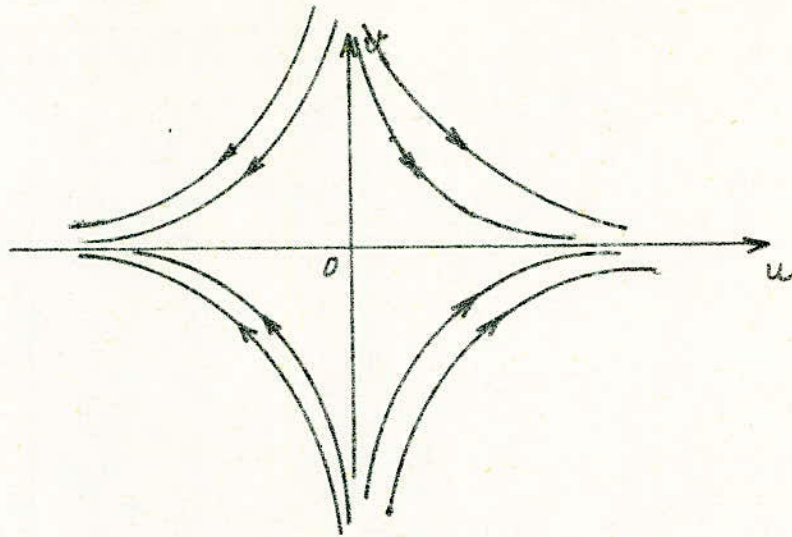


### 3.2.2. Col.

$r_1$  et  $r_2$  réelles mais de signes opposés  $r_2 < 0 < r_1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v) = (\infty, 0)$$

Le col  $(0, 0)$  est instable.



### 3-2-3 Sommet.

$r_1$  et  $r_2$  imaginaires pures  $r_1 = +j\beta$  ,  $r_2 = -j\beta$ .

Donc  $u = A \sin(pt + \varphi)$

$v = A\beta \cos(pt + \varphi)$

où  $A$  et  $\varphi$  donnés par les conditions initiales. Ces 2 relations nous donnent :

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\beta^2} = 1$$

Les trajectoires sont donc des ellipses centrées à l'origine. On a un régime oscillatoire non amorti c'est à dire que l'amplitude des oscillations reste constante.

Le point  $(0,0)$  est un point d'équilibre stable.

### 3-2-4. Foyer.

$r_1$  et  $r_2$  racines complexes conjuguées avec une partie réelle différente de zéro.

$$r_1 = \alpha + j\beta$$

$$r_2 = \alpha - j\beta$$

Le point singulier est alors un foyer.

La solution générale du système des équations (15) et (16) s'écrit

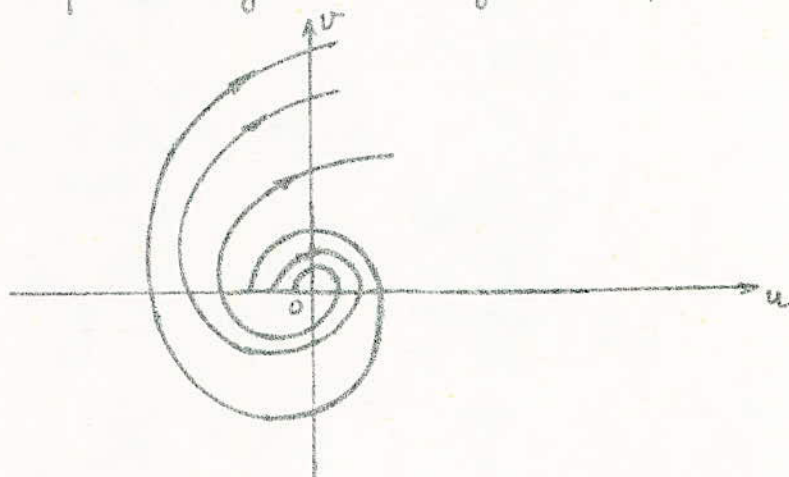
$$u = A e^{\alpha t} \sin(pt + \varphi)$$

$$v = \alpha A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + \beta A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

$A, \varphi$  constantes données par les conditions initiales.

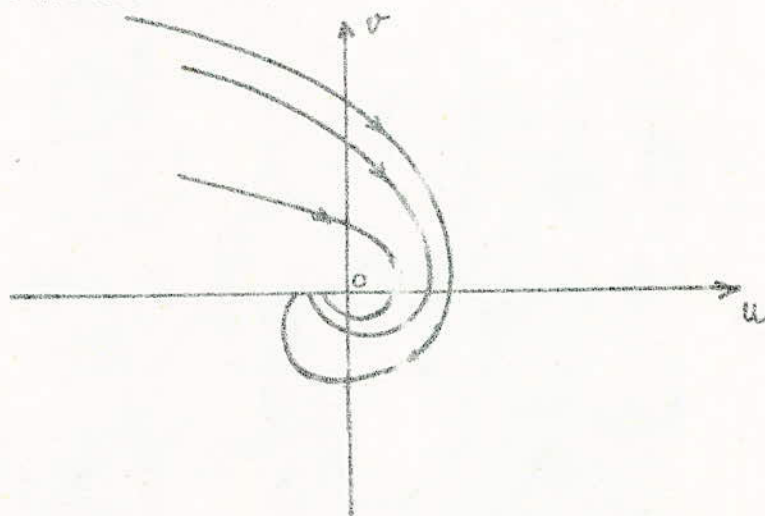
Cas où  $\alpha > 0$ .

Les termes en sinus et en cosinus décrivent alors une oscillation dont l'enveloppe croît en fonction du temps. Les trajectoires divergent et le point  $(0,0)$  est instable.



Cas où  $\alpha < 0$ .

On obtient une spirale qui converge vers le foyer quelles que soient les conditions initiales. Le foyer est donc stable.



On vient d'étudier les différents points singuliers dans le plan  $(u, v)$  grâce à la transformation décrite par les équations (17) et (18). Les relations (17) et (18) établissent

donc une transformation géométrique qui a transformé le plan  $(x, y)$  en un autre plan  $(u, v)$

Dans le cas où la transformation est une rotation établissons la correspondance entre les axes  $x$  et  $u$ ,  $y$  et  $v$ .

De l'équation (24) on tire :

$$r_1 = a_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 \Rightarrow q_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{r_1 - a_1}{a_2} \quad (26)$$

De (25) on tire 
$$r_2 = a_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} a_2 \Rightarrow q_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{r_2 - a_1}{a_2} \quad (27)$$

Donc 
$$x = \alpha_1 u + \beta_1 v$$

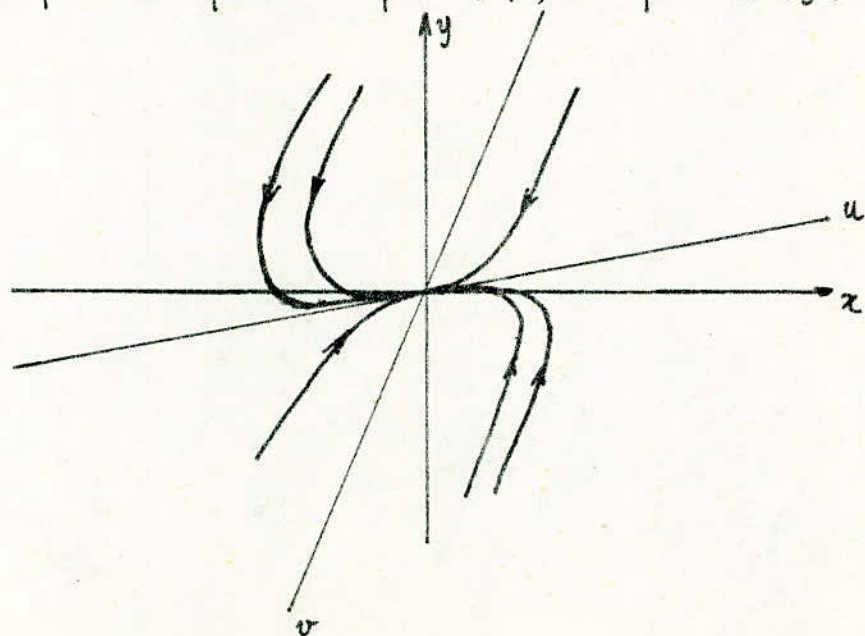
$$y = q_1 \alpha_1 u + q_2 \beta_1 v$$

$q_1$  et  $q_2$  étant donnés par (26) et (27).

Donc  $(u=0) \Rightarrow y = q_2 x$  correspond à l'axe  $v$

$(v=0) \Rightarrow y = q_1 x$  correspond à l'axe  $u$

on peut donc facilement passer du plan  $(u, v)$  au plan  $(x, y)$ .



En résumé

Ce sont les racines de l'équation caractéristique qui déterminent la nature du point singulier. Si les racines sont :

- réelles de même signe on a un nœud.
- réelles de signe opposé on a un col.
- imaginaires pures on a un sommet.
- complexes conjugués on a un foyer.

#### 4. Cycles limite.

En plus des points singuliers qui décrivent le système pour un domaine donné des variables de phase, il faut signaler l'existence de trajectoires fermées appelées cycles limite. Ces cycles correspondent aux oscillations limite du système qui sont des solutions périodiques vers lesquelles tendent les trajectoires de phase pour toutes conditions initiales situées dans une certaine région du plan de phase.

Il est à noter qu'on ne connaît pas de théorie générale permettant de prévoir l'existence de ces cycles limite. Cependant dans un domaine donné du plan de phase on peut savoir s'ils existent ou non.

#### 4.1. Théorème d'existence d'un cycle limite.

Soient dans un plan de phase, 2 courbes fermées  $C$  et  $C'$ ,  $C'$  entourant  $C$ . Soient

$$P = \frac{dx}{dt}$$

$$Q = \frac{dy}{dt}$$

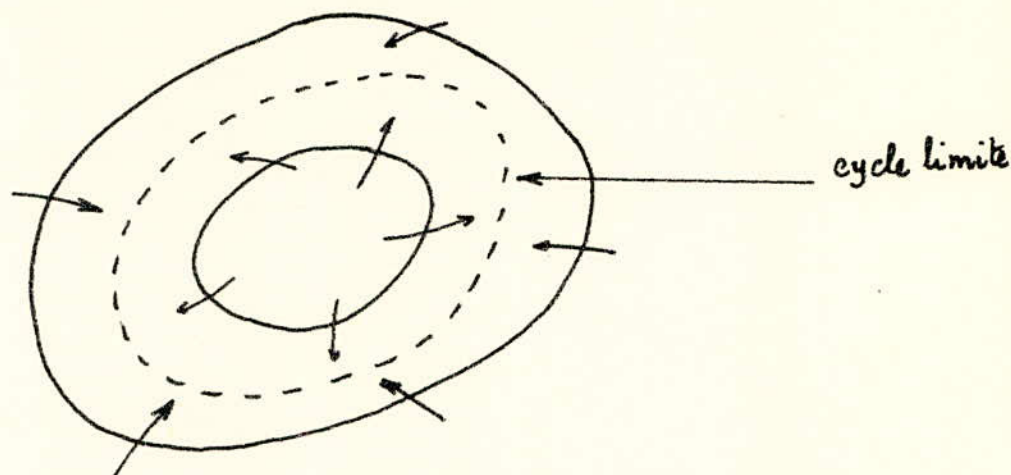
les composantes du vecteur vitesse dans le plan de phase alors :

si en chaque point de  $C$  le vecteur vitesse de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur et si en chaque point de  $C'$  il est dirigé vers l'intérieur on



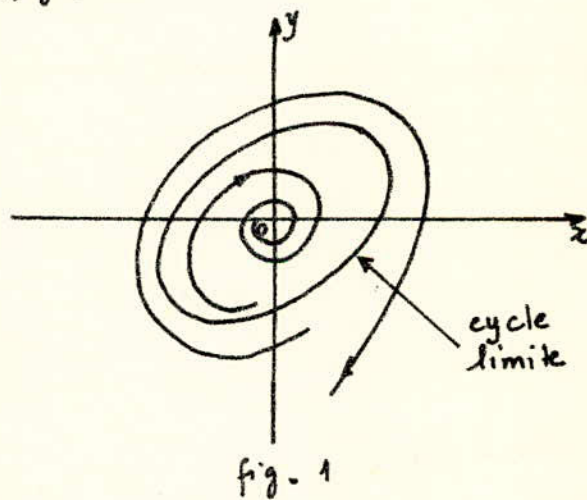
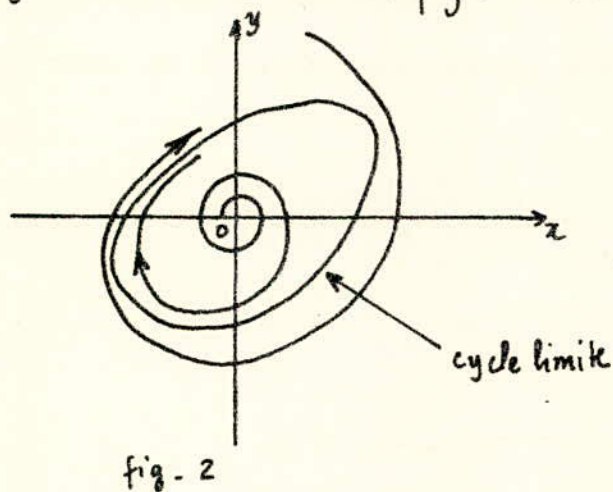
peut affirmer qu'il existe au moins un cycle limite compris entre les courbes  $C$  et  $C'$

On a ainsi la configuration suivante :



#### 4-2 Exemple de cycle limite

a) cycle limite entourant un foyer stable (fig 1)



si le système se trouve dans un état tel que son point représentatif se trouve à l'intérieur du cycle, il va évoluer vers le foyer; si par contre le point représentatif se trouve à l'extérieur du cycle le système va diverger. Le cycle limite est donc instable.

b) cycle limite entourant un foyer instable (fig 2)

Les trajectoires venant à partir d'un point éloigné du plan de phase convergent vers le cycle limite. Les trajectoires divergeant du foyer instable convergent aussi vers le cycle limite. On a une oscillation limite et le cycle limite est stable.

#### 4.3 Théorème de non existence du cycle limite (Critère de BENDIXON).

Ce théorème s'énonce comme suit :

Si dans un domaine du plan de phase la quantité

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)$$

garde un signe constant, il ne peut y avoir de trajectoire fermée, donc de cycle limite, dans ce domaine.

#### 4.4. Stabilité orbitale d'un cycle limite.

Soit un cycle limite  $C$  et  $\Gamma$  une trajectoire qui tend vers  $C$ .

Soit  $d$  la distance, comptée normalement à  $C$ , de la trajectoire au cycle. Lorsque le point  $M(x, y)$  a fait sur  $\Gamma$  un tour complet autour de  $C$ ,  $d$  a changé



On montre que

$$d = d_0 e^{hs}$$

$s$  étant l'abscisse curviligne de  $M$  sur  $\Gamma$  et  $h$  une constante appelée exposant caractéristique du cycle.

$$h = \int_C \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dt$$

L'intégrale curviligne est prise le long du cycle de longueur unité pendant un tour.

On voit que si :

$h > 0$  on a affaire à un cycle limite instable. Physiquement on ne constate pas d'oscillation limite.

$h < 0$  le cycle limite est stable et les trajectoires voisines tendent vers C.

## 5. Stabilité des systèmes non linéaires.

Il existe plusieurs définitions de la stabilité pour les systèmes non linéaires. Celle qui est la plus généralement utilisée est celle donnée par LJAPUNOV.

En pratique, le problème de la stabilité est souvent difficile à traiter car un système non linéaire peut être soit stable soit instable, tout dépend de la région de l'espace de phase où ce système est étudié.

On a vu que lorsque le système possède un foyer stable et entourant ce dernier il y a un cycle limite instable, le point constitué par le foyer est un point d'équilibre stable, mais si on part de conditions initiales extérieures au cycle, les trajectoires de phase divergent.

### 5.1. Stabilité locale : Première méthode de LJAPUNOV.

Cette méthode donne des informations sur la stabilité locale mais ne permet pas de définir le domaine où la stabilité est assurée.

Soit le système physique décrit par le système d'équations :

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y + P(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1 x + b_2 y + Q(x, y)$$

$P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  sont des fonctions de  $x$  et  $y$  de degré  $\geq 2$ .

La première méthode consiste à linéariser le système autour d'un point singulier on limite le développement de Taylor, autour du point singulier, au premier terme ce qui revient à négliger  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$ . On obtient ainsi le système linéarisé :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + a_2 y \\ \frac{dy}{dt} &= b_1 x + b_2 y \end{aligned}$$

Théorème de LJAPUNOV :

- si le système linéarisé est asymptotiquement stable, il y a stabilité asymptotique
- si le système linéarisé est instable, il y a instabilité
- si le système linéarisé est stable sans l'être asymptotiquement, on ne peut rien dire

## 5.2. Méthode directe de LJAPUNOV.

Soit un plan de phase  $(x, y)$  dans lequel on délimite un domaine  $D(x, y)$  entourant l'origine.

Théorème : s'il est possible de trouver une fonction  $V(x, y)$  telle que dans le domaine  $D(x, y)$  elle vérifie les conditions suivantes :

1°)  $V(x, y)$  est partout positive (à l'origine elle peut être nulle) ,

2°)  $\frac{dV}{dt}$  n'est jamais positive ;

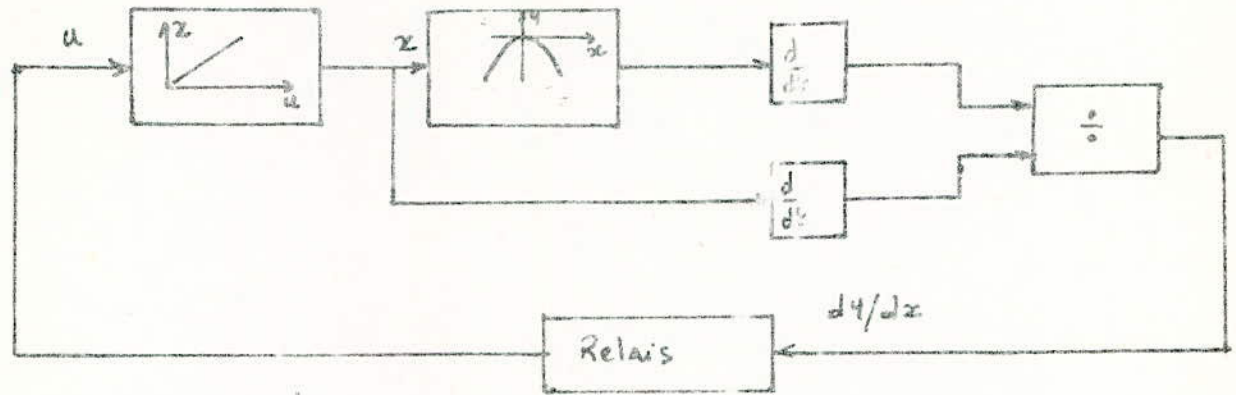
alors on peut affirmer que l'équilibre est stable dans le domaine  $D$ . Si en outre  $\frac{dV}{dt}$  n'est jamais nulle (sauf peut être à l'origine) la stabilité est asymptotique.

Donc si on trouve une fonction de LJAPUNOV  $V$  satisfaisant aux conditions de ce théorème, on peut affirmer en plus de la stabilité locale, la stabilité dans le domaine  $D$  où  $V$  existe. Cette méthode permet donc d'affirmer la stabilité globale. Mais si on ne trouve pas de fonction de LJAPUNOV, elle ne permet pas de conclure : elle donne donc des conditions suffisantes.

Notons qu'il n'y a pas de méthodes systématiques pour trouver  $V$ .

## Exemple d'application

Dans le cas d'un système extrémal fondé sur l'étude du signe de la dérivée on peut utiliser simplement comme organe de commande un relais polarisé à 2 positions.



L'organe d'exécution possède 2 enroulements dans le circuit de l'inducteur :

lorsque  $d4/dz > 0$  le relais branche un enroulement et le moteur tourne dans un sens, lorsque  $d4/dz < 0$ , le 2<sup>e</sup> enroulement est excité et le moteur tourne en sens inverse.

Supposons que la caractéristique statique du processus soit de la forme :

$$y = -a_0 z^2 \quad a_0 > 0$$

supposons que la fonction de transfert de l'élément d'inertance est :

$$\frac{z(p)}{u(p)} = \frac{k}{pT(1 + pT_0)}$$

$z$  est la position angulaire,  $u$  la tension appliquée à l'induit. On a supposé que le couple résistant est négligeable.

Le moteur est commandé par une tension :

$$u = \text{sgn} \frac{dz}{dt} \cdot \text{sgn} \frac{d4}{dt}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle décrivant le fonctionnement du système :

$$T T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + T \frac{dx}{dt} = K u(t)$$

$$u = \operatorname{sgn} \frac{dx}{dt} \cdot \operatorname{sgn} \frac{dy}{dt} = \operatorname{sgn} \frac{dx}{dt} \cdot \operatorname{sgn} \left( -2a_0 x \frac{dx}{dt} \right)$$

$$u = - \operatorname{sgn} x$$

d'où

$$T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \frac{k}{T} \operatorname{sgn} x = 0$$

équation du second ordre qu'on peut étudier dans le plan de phase.

Lorsque :  $x > 0$  on a

$$T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \frac{k}{T} = 0 \quad (1)$$

$$x < 0 \quad T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - \frac{k}{T} = 0 \quad (2)$$

Resolvons l'équation (1)

$$\text{Posons } \frac{dx}{dt} = y \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{T_0} - \frac{k}{T T_0}$$

$$\text{Posons } Y = -\frac{1}{T_0} \left( y + \frac{k}{T} \right) \Rightarrow -T_0 \frac{dY}{dt} = Y \Rightarrow Y = \alpha e^{-t/T_0}$$

$$\text{d'où } y = -T_0 \alpha e^{-t/T_0} - \frac{k}{T}$$

$$\text{pour } t=0 \quad y = y_0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{T_0} \left( y_0 + \frac{k}{T} \right)$$

$$y = + \left( y_0 + \frac{k}{T} \right) e^{-t/T_0} - \frac{k}{T} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = y \Rightarrow x = -T_0 \left( y_0 + \frac{k}{T} \right) e^{-t/T_0} - \frac{k}{T} t + \beta$$

$$t=0 \quad x=x_0 \Rightarrow \beta = x_0 + T_0 \left( y_0 + \frac{K}{T} \right)$$

$$x = -T_0 \left( y_0 + \frac{K}{T} \right) e^{-t/T_0} - \frac{K}{T} t + x_0 + T_0 \left( y_0 + \frac{K}{T} \right) \quad (4)$$

De l'équation (3) on tire  $t$  :

$$t = -T_0 \log \frac{y + K/T}{y_0 + K/T} \quad (5)$$

on injecte (5) dans (4) :

$$x = -T_0 \left( y + \frac{K}{T} \right) + \frac{KT_0}{T} \log \frac{y + K/T}{y_0 + K/T} + x_0 + T_0 \left( y_0 + \frac{K}{T} \right)$$

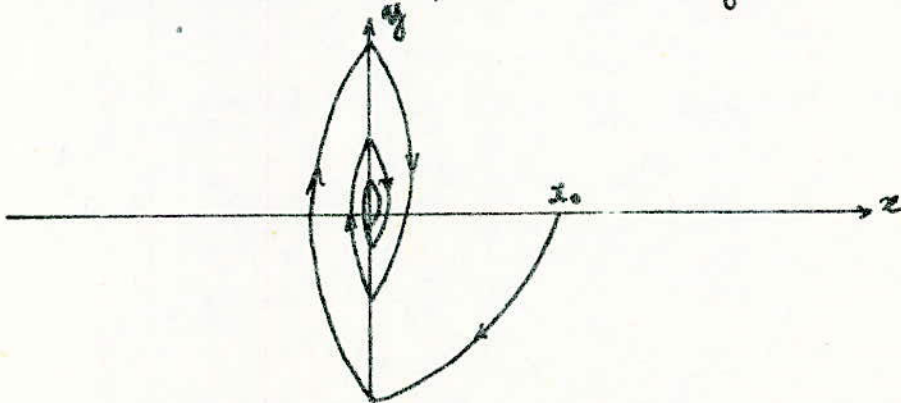
finalement :

$$x = x_0 - T_0 (y - y_0) + \frac{KT_0}{T} \log \frac{y + K/T}{y_0 + K/T} \quad (6)$$

La résolution de l'équation (2) donne un résultat similaire aux signes près :

$$x = x_0 - T_0 (y - y_0) - \frac{KT_0}{T} \log \frac{y - K/T}{y_0 - K/T} \quad (7)$$

Les relations (6) et (7) définissent les trajectoires de phase



On obtient donc des oscillations qui s'amortissent. Ceci est un exemple idéalise'. Son fait tout relais possède une hystérésis, en outre avec des retards le système oscillera de façon permanente autour de l'extrémum.

## COMMANDE DU MOTEUR

- A - Principe du Maximum .
- B - Application au Moteur : Calcul de la commande optimale



## A. But de la Commande.

On désire commander un moteur à courant continu devant fonctionner dans des conditions telles que tout en fournissant un travail maximal il ne doit pas être exposé à des risques de détérioration par suite de la dissipation d'énergie. Ceci revient à dire que tout en laissant au moteur la possibilité d'un fonctionnement rentable sur le plan de la puissance mécanique recueillie sur l'arbre, on désire que les pertes par effet Joule soient minimales.

Comme on l'a vu, l'organe d'exécution d'un système de régulation extrême est un moteur. L'optimisation du fonctionnement du moteur étant ici une optimisation partielle. Il s'agit donc de lui trouver une commande appropriée c'est à dire la caractéristique du signal d'entrée : sa forme et sa période s'il est périodique. Pour résoudre ce problème nous avons appliqué le principe du Maximum énoncé par L. PONTRIAGUINE que nous présentons ici.

Cette optimisation partielle doit être compatible avec l'optimisation globale du système. Elle porte sur une ou plusieurs parties du système. Elle devra en outre respecter les contraintes propres du système. Dans notre cas on devra optimiser le fonctionnement du moteur qui devra tourner pas pas.

## 1. Énoncé du problème de l'optimisation.

Considérons un système physique décrit par le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \quad i=1, \dots, n$$

En notation vectorielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$   $u = (u_1, u_2, \dots, u_r) \in U$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

On suppose que les composantes de  $f$  et leurs dérivées  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  ( $i=1, n, j=1, n$ ) sont définies et continues dans l'ensemble  $X \times U$

Le vecteur  $u$  est défini dans un certain domaine de commande  $U$  qui est délimité par les contraintes imposées à la commande. Ces contraintes sont liées au type de processus à commander

### 1.1. Commandes admissibles

On suppose que le mouvement du système peut être commandé par le vecteur  $u$  appartenant à un espace  $U$  inclus dans un espace euclidien  $E_r$  de dimension  $r$

On désignera par commande toute fonction  $u(t)$  définie sur un intervalle  $t_0 \leq t \leq t_1$  et à valeurs dans  $U$

Une commande  $u(t)$  est admissible si elle satisfait aux conditions suivantes :

a) pour  $t_0 \leq t \leq t_1$   $u(t)$  est mesurable et bornée,

b)  $u(t)$  étant une commande admissible, et un point arbitraire de  $U$ , la

commande  $u_1(t)$  pour  $t_0 \leq t \leq t_1$  définie par

$$u_1(t) = \begin{cases} v & t' < t \leq t'' \\ u(t) & t_0 \leq t \leq t' \end{cases} \quad t'' < t \leq t_1$$

est également admissible.

c) Si l'intervalle  $t_0 \leq t \leq t_1$  est divisé en un nombre fini de sous intervalles dans lesquels  $u(t)$  est admissible, alors  $u(t)$  est admissible sur l'intervalle  $t_0 \leq t \leq t_1$  tout entier.

d)  $u(t)$  à valeurs dans  $V$  est continue par morceaux c'est à dire que chaque composante de  $u(t)$  est définie dans  $V$  et qu'elle est continue pour toute valeur de  $t$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) sauf peut être en un nombre fini de points qui sont des discontinuités de première espèce.

## 1.2 Critère d'optimalité.

Étant donné que nous voulons optimiser un processus physique, c'est à dire qu'on impose un mode de fonctionnement, il s'agit donc de déterminer le but de la commande qui assurera le fonctionnement optimal du processus.

On peut considérer que le but de la commande est d'obtenir l'extrémum d'une certaine grandeur  $Q$  appelée critère d'optimalité. Suivant le cas étudié, il s'agit de minimiser ou maximiser la grandeur  $Q$ . Dans le cas général le critère d'optimalité est une fonction des vecteurs  $x$ ,  $u$ , et du temps

$$Q = Q(x, u, t)$$

Dans le cas général  $Q$  est une fonctionnelle qu'on peut mettre sous la forme:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u) \cdot dt$$

ou  $G$  est une fonction scalaire finie et généralement positive de  $x$  et  $u$ .

## 1.3 Énoncé du problème fondamental.

Le problème de la recherche des commandes optimales se peut s'énoncer de la façon suivante :

Étant donné dans l'espace  $X$  deux points  $x^0$  et  $x^1$ , parmi les commandes admissibles  $u = u(t)$  transférant le point représentatif de  $x^0$  en  $x^1$  (si elles existent) trouver celle qui minimise la fonctionnelle :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) \cdot dt$$

$$x(t_0) = x^0$$

si  $u(t)$  est trouvée alors pour  $x(t_0) = x^0$  la solution du système

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$$

est unique dans l'intervalle  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

## 2. Principe du Maximum.

Le modèle mathématique du système est donc :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (1)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u) \cdot dt \quad (2)$$

On introduit une variable supplémentaire  $x_0$  liée au critère d'optimalité par la relation :

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t f_0(x, u) \cdot dt \quad (3)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u) \quad (4)$$

Le système d'équations différentielles décrivant le processus s'écrit donc :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u) \quad (5) \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Considérons un autre système d'équations par rapport aux variables auxiliaires

$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$  :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \psi_j \quad (6) \quad i=0,1,\dots,n$$

$\psi$  étant défini sur l'intervalle  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Les composantes  $\psi_i$  peuvent présenter des discontinuités de première espèce en nombre fini.

Si on fait le choix d'une commande admissible  $u(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) et si  $x(t)$  est la solution correspondante du système (1) avec  $x(t_0) = x^0$  alors le système (6) s'écrit :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(x(t), u(t))}{\partial x_i} \psi_j \quad (7) \quad i=0,1,\dots,n$$

Étant linéaire et homogène le système (7) admet une solution unique

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$$

sur l'intervalle  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Les systèmes (5) et (6) peuvent être groupés sous une seule écriture. Pour cela on définit une nouvelle fonction

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(\psi, f(x, u))$$

telle que :

$$\mathcal{H}_0(\psi, f(x, u)) = \sum_{j=0}^n \psi_j f_j(x, u) \quad (8)$$

On vérifie ainsi que les systèmes (5) et (6) peuvent prendre à l'aide de  $\mathcal{H}_0$  la forme suivante :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \psi_i} \quad (9) \quad i=0,1,\dots,n$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial x_i} \quad (10) \quad i=0,1,\dots,n$$

Si on prend une commande admissible quelconque  $u(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) du domaine de commande  $U$  avec la condition initiale  $x(t_0) = x^0$  on peut trouver  $x(t)$  correspondant par le système (5). Une fois  $x(t)$  trouvé, on peut identifier le vecteur  $\psi$ .

si maintenant  $x$  et  $\Psi$  sont fixes, alors la fonction  $\mathcal{H}_0$  ne dépend plus que du seul paramètre  $u \in U$ . Posons

$$\mathcal{M}(\Psi, x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}_0(\Psi, x, u).$$

si  $\mathcal{H}_0$  atteint son supremum en un point du domaine  $U$  alors  $\mathcal{M}(\Psi, x)$  représente le maximum de  $\mathcal{H}_0$  pour  $\Psi$  et  $x$  fixes.

Ainsi on obtient une condition nécessaire d'optimalité qui s'exprime essentiellement par l'égalité (11) du théorème qui va suivre:

Enoncé du principe du maximum. Théorème :

Soit  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , une commande admissible telle que la trajectoire correspondante  $x(t)$  issue du point  $x^0$  à l'instant  $t_0$ , passe à l'instant  $t_1$  par un point de la droite  $\Pi$ . Pour que la commande  $u(t)$  et la trajectoire  $x(t)$  soient optimales, il est nécessaire qu'il existe un vecteur fonction  $\Psi(t) = (\Psi_0(t), \dots, \Psi_n(t))$  continue et non nul, correspondant aux fonctions  $u(t)$  et  $x(t)$  tel que :

1°) quel que soit  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , la fonction  $\mathcal{H}_0(\Psi(t), x(t), u)$  de la variable  $u \in U$  atteigne au point  $u = u(t)$  son maximum :

$$\mathcal{H}_0(\Psi(t), x(t), u(t)) = \mathcal{M}(\Psi(t), x(t)) \quad (11)$$

2°) à l'instant final  $t_1$  soient vérifiées les relations

$$\Psi_0(t_1) \leq 0, \quad \mathcal{M}(\Psi(t_1), x(t_1)) = 0 \quad (12)$$

si par ailleurs, les grandeurs  $\Psi(t)$ ,  $x(t)$  et  $u(t)$  satisfont aux systèmes (9) et (10) et à la condition 1°), les fonctions  $\Psi_0(t)$  et  $\mathcal{M}(\Psi(t), x(t))$  de la variable  $t$  sont constantes, de sorte qu'on peut modifier la relation (12) pas forcément à l'instant  $t_1$  mais à un instant quelconque  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

La démonstration de ce théorème est longue et trop mathématique, on ne la présentera pas ici.

## B. Calcul de la commande optimale du moteur.

### 1. Choix du moteur.

Les moteurs à faible inertie et à grande sensibilité angulaire se prêtent bien à des mouvements de rotation de faible amplitude avec arrêts fréquents ou en pas à pas. Il suffit de leur associer une commande appropriée. Les caractéristiques de ces moteurs leur permettent d'effectuer une grande variété de mouvements de faible amplitude angulaire à fréquence constante ou non. Les performances obtenues dépendent de la commande et du moteur lui-même.

Le moteur à excitation séparée permet un réglage de la vitesse à couple constant dans une grande gamme de vitesses. Cette propriété jointe à la possibilité d'inverser facilement le sens de marche (inversion du courant d'induit) procure au moteur à excitation séparée un domaine d'emploi très varié (la minoirs, extraction commande de dispositifs de régulation automatique...)

### 2. Modèle mathématique correspondant au fonctionnement du moteur.

- soit  $\theta$  la position angulaire et  $\Omega$  la vitesse angulaire de l'arbre

on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega \quad (1)$$

- Equation de l'équilibre des couples

Le moteur entraîne un treuil qui lui-même entraîne une charge qu'on suppose constante :

on a

$$\Gamma_m = \Gamma_j + \Gamma_r$$

Le moteur est commandé par le courant d'induit  $I_a$

$$\Gamma_m = K_1 I_a$$

$$K_1 I_a = J \frac{d\Omega}{dt} + \Gamma_{rn}$$

d'où 
$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{K_1 I_a - \Gamma_{rn}}{J} \quad (2)$$

Les équations décrivant notre système sont donc

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega \quad (1)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{K_1 I_a - \Gamma_{rn}}{J} \quad (2)$$

Posons  $\theta = x_1$        $u = I_a$        $|I_a| \leq I_{an} \Rightarrow |u| \leq U_n$   
 $\Omega = x_2$

Le système devient :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = K u - K' \quad (4) \quad \text{où } K = \frac{K_1}{J} \quad K' = \frac{\Gamma_{rn}}{J}$$

### 3. Critère de performance.

Comme on l'a dit précédemment, le but de la commande est d'assurer un fonctionnement pas à pas du moteur de telle manière que la puissance par effet Joule, perdue dans les conducteurs, et transformée en chaleur soit minimale. Le critère qu'il s'agit de minimiser est donc

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T R_a I_a^2 dt$$

T étant la durée du pas.

$$J = \int_0^T \alpha u^2 dt \quad (5) \quad \text{où } \alpha = \frac{R_a}{T}$$

### 4. Application du critère du maximum.



Nous avons donc les équations suivantes :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = Ku - K' \quad (4)$$

$$J = \int_0^T \alpha u^2 dt \quad (5)$$

Les conditions initiales et finales sont :

$$x_1(0) = 0 \quad x_1(T) = \theta_0$$

$$x_2(0) = 0 \quad x_2(T) = 0$$

On introduit la variable  $x_0$  telle que :

$$\frac{dx_0}{dt} = \alpha u^2$$

On a donc  $f_0(x, u) = \alpha u^2$

$$f_1(x, u) = x_2$$

$$f_2(x, u) = Ku - K'$$

$$x = (x_0, x_1, x_2)$$

On forme l'Hamiltonien (relation (8) paragraphe 2)

$$\mathcal{H}_0 = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 \quad (6)$$

$$\mathcal{H}_0 = \alpha \psi_0 u^2 + \psi_1 x_2 + K \psi_2 u - K' \psi_2 \quad (7)$$

$\mathcal{H}_0$  est maximum pour  $K \psi_2 u > 0$

donc  $u = \text{sgn } K \psi_2$  . Comme  $K > 0 \Rightarrow$

$$u = \text{sgn } \psi_2 \quad (8)$$

Calculons maintenant les fonctions  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  . En se référant à la relation (10) du paragraphe 2 on obtient :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = a_0 \quad (9)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = a_1 \quad (10)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = -a_1 t + a_2 \quad (11)$$

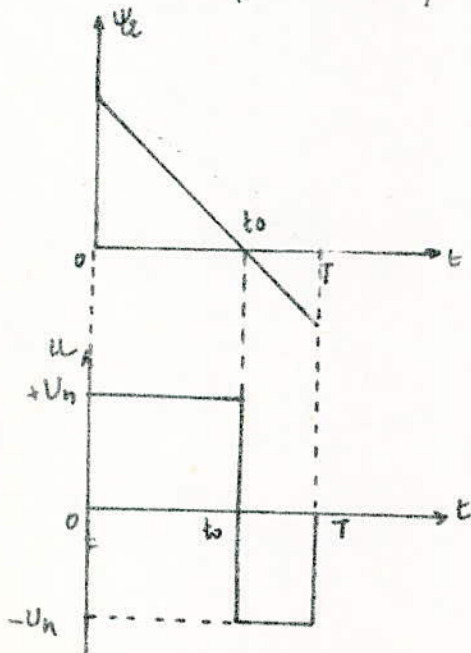
Donc d'après (8) on obtient :

$$u = \text{sgn}(-a_1 t + a_2) \quad (12)$$

si  $-a_1 t + a_2 > 0$       $u = +U_n$

si  $-a_1 t + a_2 < 0$       $u = -U_n$

On obtient pour  $u$  la forme suivante :



$$t_0 = t \Rightarrow \psi_2 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{a_2}{a_1}$$

On peut maintenant trouver  $x_1$  et  $x_2$  grâce au système d'équations (3) et (4)

$$\frac{dx_2}{dt} = Ku - K' \quad (4)$$

pour  $0 \leq t < t_0$       $u = +U_n$

Dans cet intervalle de temps  $\Gamma_m$  est positif et le couple résistant est négatif donc

$$\frac{dx_2}{dt} = KU_n - K'$$

d'où  $x_2(t) = (KU_n - K')t + A_0$

pour  $t=0$   $x_2(0) = 0 \Rightarrow A_0 = 0$  d'où

$$x_2(t) = (KU_n - K')t \quad (13)$$

on trouve  $x_1(t)$  en intégrant (3)

$$x_1(t) = (KU_n - K') \frac{t^2}{2} + A_1$$

pour  $t=0$   $x_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow$

$$x_1(t) = (KU_n - K') \frac{t^2}{2} \quad (14)$$

Pour  $t_0 \leq t \leq T$   $U = -U_n$  il y a freinage du moteur par contre courant,  $\Gamma_m$  devient négatif et le couple résistant  $\Gamma_r$  devient en conséquence positif : l'équation différentielle (4) devient donc

$$\frac{dx_2}{dt} = -KU_n + K'$$

en intégrant on obtient :

$$x_2(t) = -(KU_n - K')t + A'_0$$

pour  $t=T$   $x_2(T) = 0 \Rightarrow A'_0 = (KU_n - K')T$  d'où

$$x_2(t) = (KU_n - K')(T - t) \quad (15)$$

on intégrant l'équation (3) on obtient :

$$x_1(t) = -(KU_n - K') \frac{t^2}{2} + (KU_n - K')Tt + A'_1$$

pour  $t=T$   $x_1(T) = \theta_0 \Rightarrow A'_1 = \theta_0 - (KU_n - K') \frac{T^2}{2}$

d'où

$$x_1(t) = -(KU_n - K') \frac{t^2}{2} + (KU_n - K')Tt + \theta_0 - (KU_n - K') \frac{T^2}{2} \quad (16)$$

Détermination du temps de commutation  $t_0$

La condition de continuité en  $t=t_0$  impose l'égalité des relations (13) et (15) ainsi que celle des relations (14) et (16)

$$(13) \equiv (15) \text{ pour } t=t_0 \Rightarrow$$

$$(K U_n - K') t_0 = (K U_n - K') (T - t_0) \Rightarrow$$

$$2(K U_n - K') t_0 = (K U_n - K') T \text{ d'où}$$

$$t_0 = \frac{T}{2} \quad (17)$$

Le temps de commutation est donc égal à la moitié de la valeur du pas

$$(14) \equiv (16) \text{ pour } t=t_0 \Rightarrow$$

$$(K U_n - K') \frac{t_0^2}{2} = -(K U_n - K') \frac{t_0^2}{2} + (K U_n - K') T t_0 + \theta_0 - (K U_n - K') \frac{T^2}{2}$$

En tenant compte de (17) on obtient :

$$\theta_0 = (K U_n - K') t_0^2 \text{ ou bien}$$

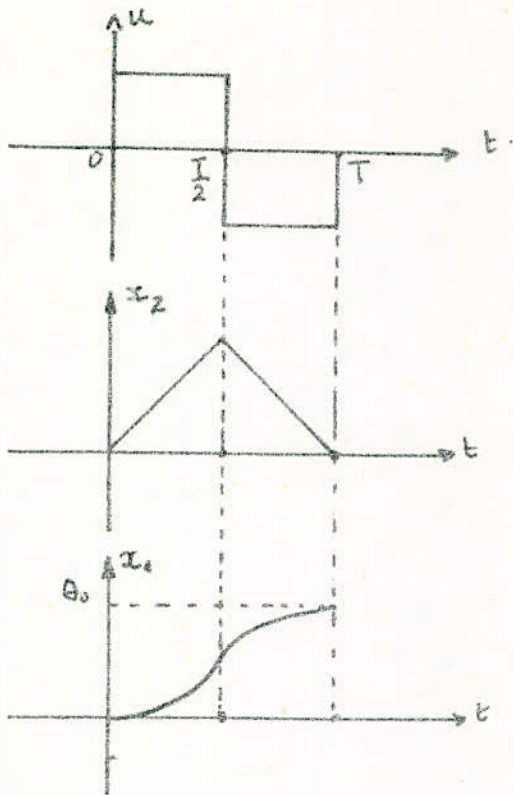
$$4 \theta_0 = (K U_n - K') T^2 \text{ soit}$$

$$T = 2 \sqrt{\frac{\theta_0}{K U_n - K'}} \quad (18)$$

La durée du pas est donc liée à son amplitude qui elle-même dépend du processus à réguler.  $T$  dépend aussi des caractéristiques du moteur et du frein.

On obtient les variations de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  en fonction de  $u(t)$ . Dans le premier intervalle  $0 \leq t < t_0$   $x_1(t)$  est donné par (14)  $x_2(t)$  par (13) et pour  $t_0 \leq t < T$

$x_1(t)$  est donné par (16) et  $x_2(t)$  par (15). La vitesse angulaire varie linéairement la position angulaire a une allure parabolique.



5. Calcul de la commande dans le cas où il n'y a pas de contraintes.

Dans le calcul précédent on avait imposé une contrainte  $|u| \leq U_m$ . si  $u$  n'est pas assujéti à une contrainte, on reprend les calculs précédents avec  $u$  commande admissible dans  $0 \leq t \leq T$ .

Reprenons l'équation (7)

$$J_0 = \alpha \psi_0 u^2 + \psi_1 x_2 + k \psi_2 u - k' \psi_2 \quad (7)$$

$J_0$  est maximum lorsque  $\frac{\partial J_0}{\partial u} = 0$

$$\text{Donc} \quad 2\alpha \psi_0 u + k \psi_2 = 0 \Rightarrow u = -\frac{k}{2\alpha} \frac{\psi_2}{\psi_0} \quad (19)$$

on calcule  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  par la relation (10) paragraphe 2

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0 \Rightarrow \psi_0 = a'_0 \quad (20)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0 \Rightarrow \psi_1 = a'_1 \quad (21)$$

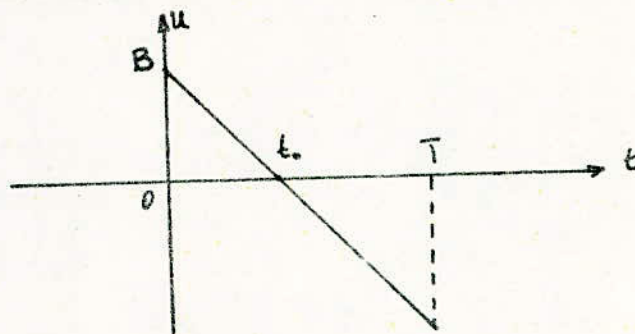
$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 \Rightarrow \psi_2 = -a'_1 t + a'_2 \quad (22)$$

D'après (19) et (22) on trouve  $u$  :

$$u = -\frac{K}{2\alpha} \left( -\frac{a'_1}{a'_0} t + \frac{a'_2}{a'_0} \right)$$

$$u = \frac{K}{2\alpha} \cdot \frac{a'_1}{a'_0} t - \frac{K}{2\alpha} \cdot \frac{a'_2}{a'_0} \quad (23)$$

Maintenant la commande optimale est une rampe. Comme elle est linéaire elle a au maximum un point de commutation dans l'intervalle  $0 \leq t \leq T$ .



Soit donc que  $u = At + B \quad (23)'$

$0 \leq t < t_0$

d'après l'équation (4) on a :

$$\frac{dx_2}{dt} = KA t + (KB - K')$$

$$x_2(t) = \frac{KA t^2}{2} + (KB - K')t \quad (24) \quad x_2(0) = 0$$

d'après l'équation

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \Rightarrow x_1(t) = \frac{KA t^3}{6} + (KB - K') \frac{t^2}{2} \quad (25) \quad x_1(0) = 0$$

$t_0 \leq t \leq T$

$$\frac{dx_2}{dt} = KA t + (KB + K')$$

$$x_2(t) = \frac{KA t^2}{2} + (KB + K')t - \frac{KA T^2}{2} - (KB + K')T \quad (26) \quad (x_2(T) = 0)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t) \Rightarrow x_1(t) = \frac{KA t^3}{6} + (KB + K') \frac{t^2}{2} - \left[ KA \frac{T^2}{2} + (KB + K')T \right] t + C$$

$$t=T \quad x_1(T) = \theta_0 \Rightarrow C = \theta_0 + \frac{KAT^3}{3} + (KB + K') \frac{T^2}{2}$$

$$x_1(t) = \frac{KA t^3}{6} + (KB + K') \frac{t^2}{2} - \left[ KA \frac{T^2}{2} + (KB + K')T \right] t + \theta_0 + \frac{KAT^3}{3} + (KB + K') \frac{T^2}{2} \quad (27)$$

Pour  $t = t_0$  les 2 relations (24) et (26) doivent être égales à cause de la continuité de  $x_2(t)$  :

$$(KB - K')t_0 = (KB + K')t_0 - KA \frac{T^2}{2} - (KB + K')T$$

$$-K't_0 = K't_0 - KA \frac{T^2}{2} - KB T - K'T$$

$$K'(T - 2t_0) = -KT \left( \frac{AT}{2} + B \right)$$

d'après (23) on a  $u=0$  pour  $t=t_0 \Rightarrow t_0 = -\frac{B}{A}$

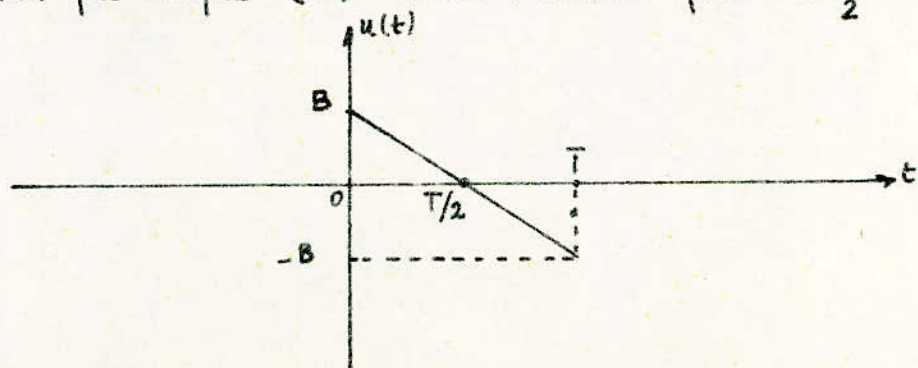
$$\text{d'où} \quad K'(T - 2t_0) = -KT \left( \frac{AT}{2} - A t_0 \right)$$

$$K'(T - 2t_0) = -\frac{KTA}{2} (T - 2t_0)$$

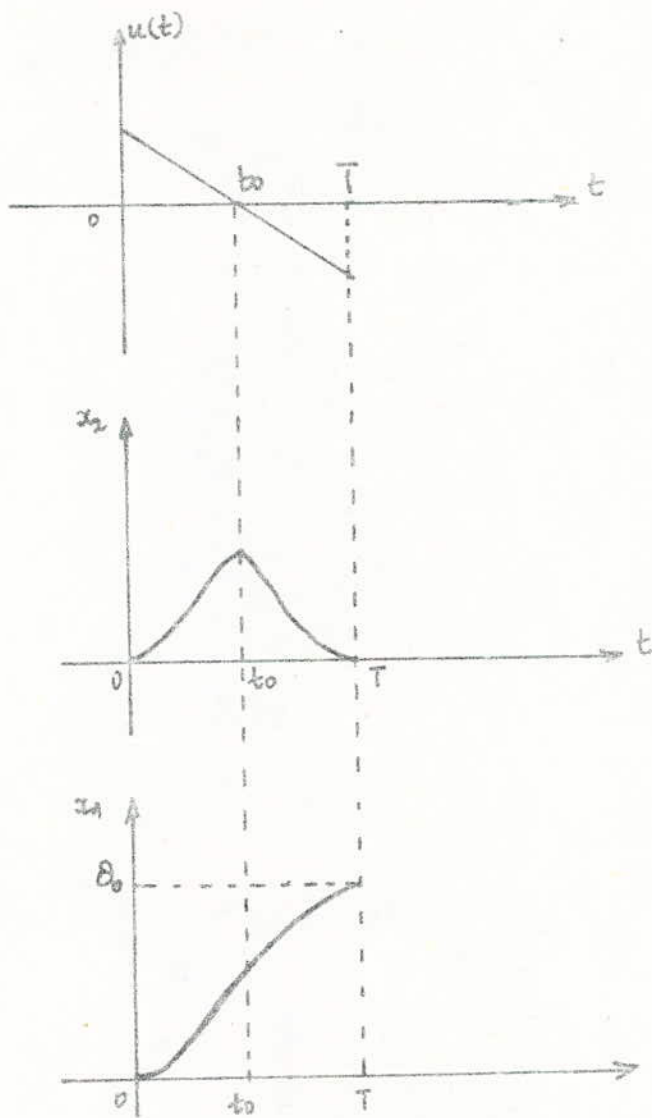
$$(T - 2t_0) \left( K' + \frac{KTA}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$T - 2t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{T}{2} \quad (28)$$

On voit ainsi que d'après (28)  $u(t)$  s'annule pour  $t = \frac{T}{2}$



Finalement on peut tracer les allures de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .



La commande en rampe est la commande la plus optimale qu'on puisse faire  
 que la puissance dissipée dans les conducteurs de l'induit soit minimale.

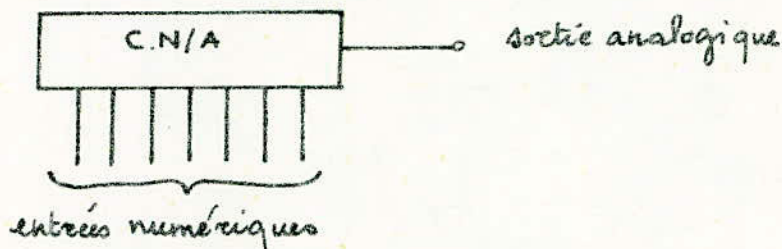


## Synthèse de la rampe

On fera une synthèse numérique de la rampe pour pouvoir ajuster sa pente à la valeur voulue et pour éviter les problèmes de non linéarité posés par des circuits analogiques. Dans cette synthèse on utilisera donc des circuits intégrés.

### Principe de la synthèse

La rampe est obtenue en commandant les entrées d'un convertisseur par une grandeur numérique.



Le convertisseur numérique analogique (C.N/A) transforme l'information numérique en un signal analogique. L'information numérique se présente en 1 ou 0. Le principe de la conversion est indiqué par le schéma suivant (fig-1.)

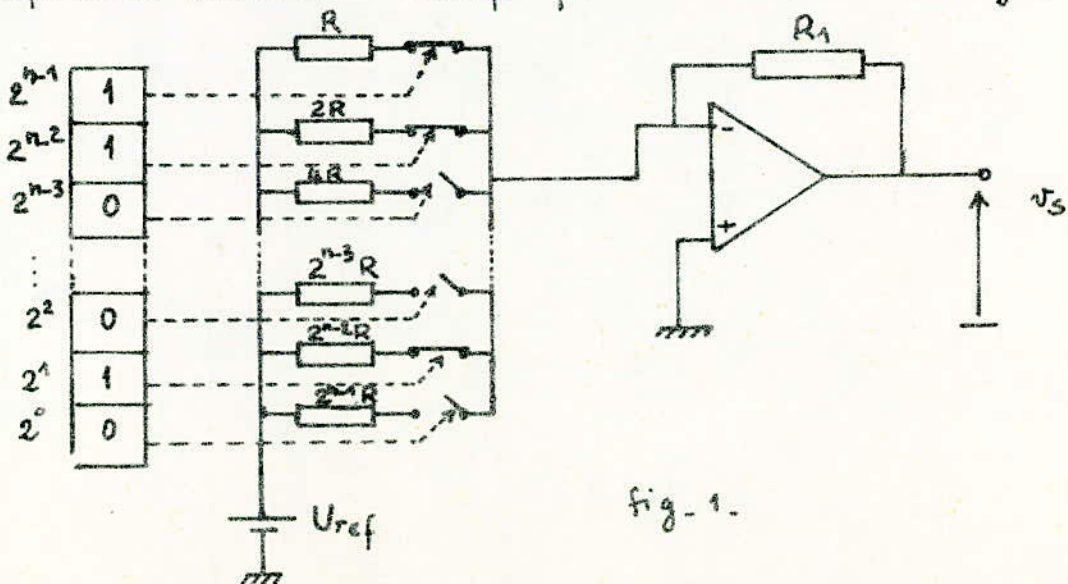


fig-1.

On a en sortie :

$$V_s = U_{ref} \left( \frac{b_0}{2^{n-1}} + \frac{b_1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{b_{n-2}}{2} + b_{n-1} \right) \frac{R_1}{R}$$

ou  $b_i = 0$  ou  $1$   $i = 0, \dots, n-1$

Le rapport  $\frac{R_1}{R}$  est imposé par le type de convertisseur utilisé. En prenant

un convertisseur  $R/2R$ , on a donc  $\frac{R_1}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$V_s = U_{ref} \left( \frac{b_0}{2^n} + \frac{b_1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{b_{n-2}}{2^2} + b_{n-1} \right)$$

La tension  $V_s$  est maximale lorsque les  $b_i$  sont tous égaux à 1 donc

$$V_{smax} = U_{ref} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$V_{smax} = U_{ref} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

La valeur analogique qui correspond au plus faible poids s'appelle quantum, il est noté  $q$ .

Donc  $q = U_{ref} \left( \frac{1}{2^n} \right)$  tous les  $b_i$  sont nuls sauf  $b_0 = 1$

d'où  $V_{smax} = (2^n - 1) q$

On remarque que le quantum est d'autant plus petit que  $n$  est élevé et alors  $V_{smax}$  se rapproche de  $U_{ref}$ .

Quelques caractéristiques d'un convertisseur.

Résolution d'un convertisseur.

Elle est définie comme étant le rapport de la plus petite amplitude de sortie possible à l'amplitude maximale

$$r = \frac{q}{V_{smax}}$$

à pleine échelle

$$V_{smax} = U_{ref} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{U_{ref}}{2^n} (2^n - 1) = q (2^n - 1)$$

$$r = \frac{1}{2^n - 1}$$

si  $n = 8$        $r = \frac{1}{255} \approx 39 \cdot 10^{-3}$

### Temps de conversion

C'est le temps qui s'écoule entre l'entrée d'un mot binaire et l'instant où la tension de sortie se stabilise. Ce temps dépend de la tension de référence et on définit alors comme temps de conversion le temps maximum correspondant au passage simultané de toutes les entrées numériques de 0 à 1.

Lors d'une conversion N/A, la fréquence de conversion doit être grande devant la fréquence de variation de l'entrée numérique.

### Présentation du convertisseur utilisé

Le convertisseur N/A utilisé est le DAC02 X2. C'est un circuit intégré dont les caractéristiques sont :

- 8 bits d'entrée dont le 9<sup>ème</sup> est utilisé comme bit de signe
- Les entrées sont compatibles avec la TTL, la DTL et le CMOS
- temps de conversion 1,5V/µs
- vitesse de conversion 1,5V/µs
- non linéarité  $\pm 1$ LSB
- Puissance dissipée 500mW au maximum

- tension d'alimentation  $\pm 18V$
- Impédance d'entrée  $200M\Omega$
- Puissance consommée  $300mW$  au maximum
- bit d'entrée à 1 : tension minimale  $2V$
- bit d'entrée à 0 : tension maximale  $0,8V$
- courant d'un bit d'entrée  $1\mu A$ .

✓ Son fonctionnement est décrit par le tableau suivant :

	bit sgn	MSB $2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	LSB $2^0$	
+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	pleine échelle ( $+V_{smax}$ ).
+	1	1	0	0	0	0	0	0	0	moitié échelle ( $+\frac{V_{smax}}{2}$ ).
+	1	0	0	0	0	0	0	0	0	zéro de l'échelle.
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	zéro de l'échelle.
-	0	1	0	0	0	0	0	0	0	moitié échelle ( $-\frac{V_{smax}}{2}$ ).
-	0	1	1	1	1	1	1	1	1	pleine échelle ( $-V_{smax}$ ).

Représentation graphique du fonctionnement

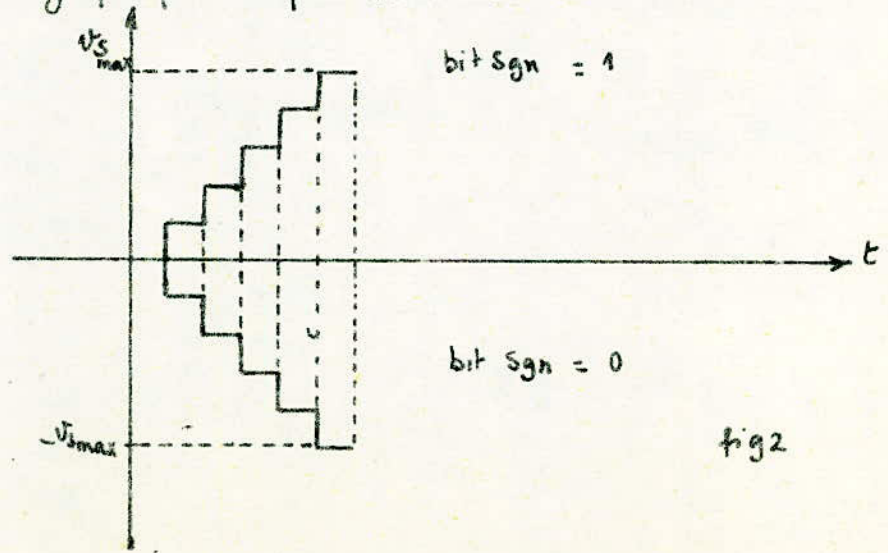


fig2

La sortie représentée dans la figure 2 est obtenue lorsque l'entrée croît de façon linéaire (0, 1, 2, 3, ...) : c'est une rampe, qui varie par bonds, dont la pente est positive.

Dans le cas où on a une décroissance linéaire de l'entrée (1, -2, -3, -4, ...) la rampe obtenue a une pente négative dont l'amplitude varie de 0 à  $-V_{smax}$ . Dans le cas où l'entrée varie de 1111...1 jusqu'à 0000...00 on obtient à la sortie les tensions de la figure 3.

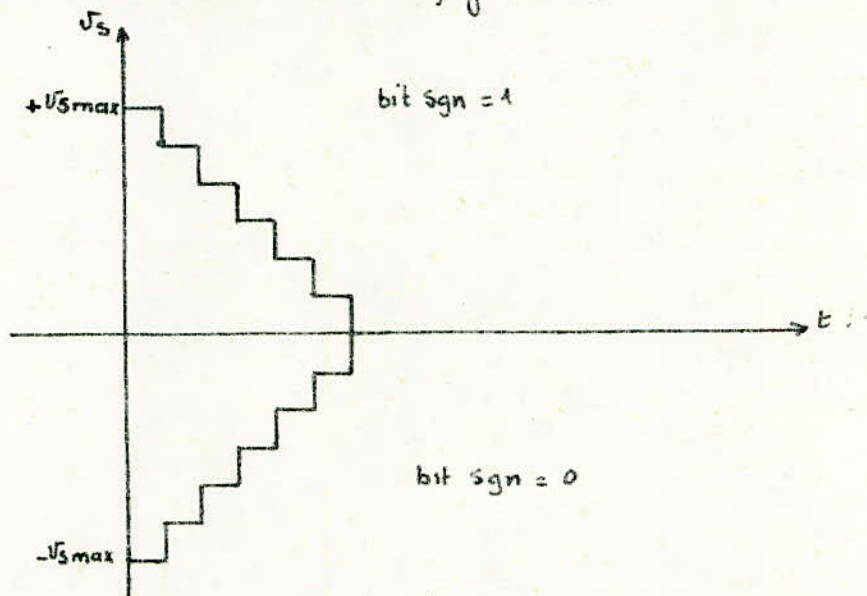


fig. 3

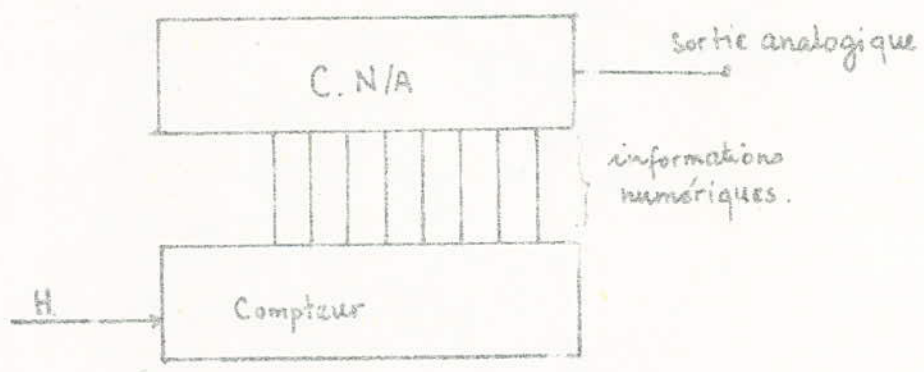
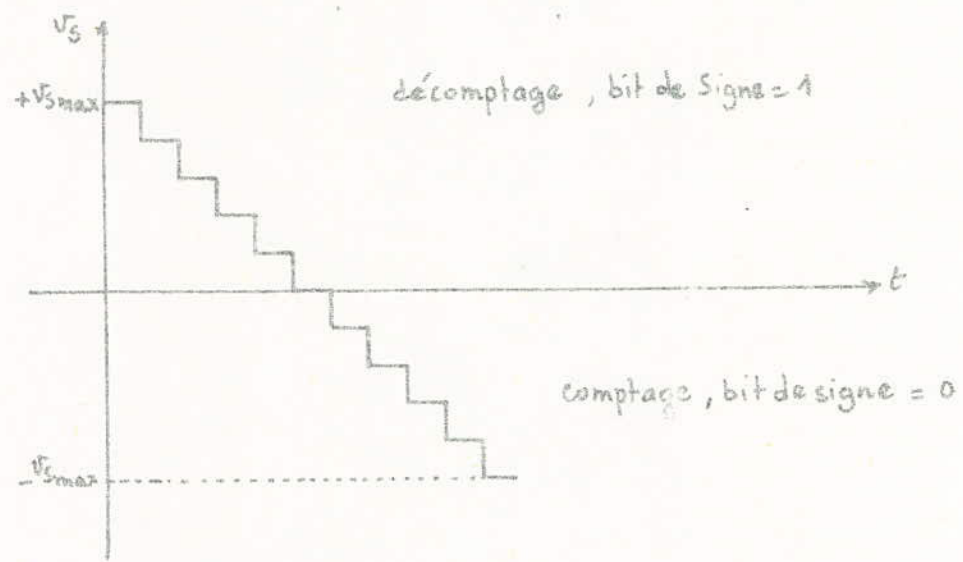
Dans le fonctionnement décrit par la figure 2, les informations à l'entrée du C.N/A sont issues d'un compteur linéaire comptant de 0 jusqu'à son contenu maximal.

Dans le fonctionnement décrit par la figure 3, les informations qui arrivent sur les entrées du C.N/A sont issues d'un décompteur linéaire décomptant à partir de son contenu maximal jusqu'à l'état 0.

### Synthèse de la rampe.

On combine les actions d'un décompteur et d'un compteur avec respectivement

les valeurs 1 et 0 du bit de signe du C.N/A. on obtient en sortie la rampe suivante



## Synthèse du compteur-décompteur modulo 256

Pour synthétiser ce compteur-décompteur on synthétisera d'abord un compteur-décompteur modulo 16, ensuite on généralisera les résultats obtenus au compteur-décompteur modulo 256.

On utilisera pour réaliser le compteur-décompteur modulo 16, 4 bascules JK. On introduira une variable supplémentaire qui commandera le comptage et le décomptage. On appellera cette variable Mode, elle sera notée M.

La table de vérité de la bascule JK est la suivante :

$Q_t$	$Q_{t+1}$	J	K
0	0	0	$\phi$
1	0	$\phi$	1
0	1	1	$\phi$
1	1	$\phi$	0

J et K sont les entrées de la bascule

$Q_t$  état présent de la bascule et  $Q_{t+1}$  état prochain

La table de vérité décrivant le fonctionnement du compteur-décompteur est donnée en fig-1.

M = 0 le compteur-décompteur fonctionne en décompteur,

M = 1 le compteur-décompteur fonctionne en compteur.

	M	D	C	B	A	J <sub>A</sub>	K <sub>A</sub>	J <sub>B</sub>	K <sub>B</sub>	J <sub>C</sub>	K <sub>C</sub>	J <sub>D</sub>	K <sub>D</sub>
15	0	1	1	1	1	φ	1	φ	0	φ	0	φ	0
14	0	1	1	1	0	1	φ	φ	1	φ	0	φ	0
13	0	1	1	0	1	φ	1	0	φ	φ	1	φ	0
12	0	1	1	0	0	1	φ	1	φ	φ	1	φ	0
11	0	1	0	1	1	φ	1	φ	0	0	φ	φ	0
10	0	1	0	1	0	1	φ	φ	1	0	φ	φ	0
9	0	1	0	0	1	φ	1	0	φ	0	φ	φ	0
8	0	1	0	0	0	1	φ	1	φ	1	φ	φ	1
7	0	0	1	1	1	φ	1	φ	0	φ	0	0	φ
6	0	0	1	1	0	1	φ	φ	1	φ	0	0	φ
5	0	0	1	0	1	φ	1	0	φ	φ	0	0	φ
4	0	0	1	0	0	1	φ	1	0	φ	1	0	φ
3	0	0	0	1	1	φ	1	φ	0	0	φ	0	φ
2	0	0	0	1	0	1	φ	φ	1	0	φ	0	φ
1	0	0	0	0	1	φ	1	0	φ	0	φ	0	φ
0	0	0	0	0	0	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
0	1	0	0	0	0	1	φ	0	φ	0	φ	0	φ
1	1	0	0	0	1	φ	1	1	φ	0	φ	0	φ
2	1	0	0	1	0	1	φ	φ	0	0	φ	0	φ
3	1	0	0	1	1	φ	1	0	1	1	φ	0	φ
4	1	0	1	0	0	1	φ	0	φ	φ	0	0	φ
5	1	0	1	0	1	φ	1	1	φ	φ	0	0	φ
6	1	0	1	1	0	1	φ	0	0	φ	0	0	φ
7	1	0	1	1	1	φ	1	φ	1	φ	1	1	φ
8	1	1	0	0	0	1	φ	0	φ	0	φ	φ	0
9	1	1	0	0	1	φ	1	1	φ	0	φ	φ	0
10	1	1	0	1	0	1	φ	φ	0	0	φ	φ	0
11	1	1	0	1	1	φ	1	φ	1	1	φ	φ	0
12	1	1	1	0	0	1	φ	0	φ	φ	0	φ	0
13	1	1	1	0	1	φ	1	1	φ	φ	0	φ	0
14	1	1	1	1	0	1	φ	φ	0	φ	0	φ	0
15	1	1	1	1	1	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ

fig. 1-

La figure - 2. donne les tableaux de KARNAUGH pour chaque variable J et K  
 On remarque dans les colonnes correspondant à chacune des variables des couples (J, K)  
 il ya en face de chaque 1 (ou 0) un φ donc on a

$$J_A = K_A \quad J_B = K_B$$

$$J_C = K_C \quad J_D = K_D$$

De plus dans les colonnes J<sub>A</sub>, K<sub>A</sub> il ya que des 1 et des φ ⇒ J<sub>A</sub> = K<sub>A</sub> = 1



$\begin{matrix} M & B & A \\ J & C & A \end{matrix}$	00	01	11	10
000	$\phi$	0	$\phi$	$\phi$
001	1	0	$\phi$	$\phi$
011	1	0	$\phi$	$\phi$
010	1	0	$\phi$	$\phi$
110	0	1	$\phi$	$\phi$
111	0	1	$\phi$	$\phi$
101	0	1	$\phi$	$\phi$
100	0	1	$\phi$	$\phi$

$J_B$

$\begin{matrix} M & B & A \\ J & C & A \end{matrix}$	00	01	11	10
000	$\phi$	0	0	0
001	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
011	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
010	1	0	0	0
110	0	0	1	0
111	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
101	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
100	0	0	1	0

$J_C$

$\begin{matrix} M & B & A \\ J & C & A \end{matrix}$	00	01	11	10
000	$\phi$	0	0	0
001	0	0	0	0
011	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
010	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
110	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
111	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
101	0	0	1	0
100	0	0	0	0

$J_D$

$$J_B = K_B = MA + \bar{M}\bar{A}$$

$$J_C = K_C = MAB + \bar{M}\bar{A}\bar{B}$$

$$J_D = K_D = MABC + \bar{M}\bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$J_A = K_A = 1$$

fig-2-

Ainsi pour un compteur modulo 16 on a obtenu

$$J_A = K_A = 1, \quad J_B = K_B = MA + \bar{M}\bar{A}, \quad J_C = K_C = MAB + \bar{M}\bar{A}\bar{B}, \quad J_D = K_D = MABC + \bar{M}\bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

On peut généraliser ces résultats à un compteur modulo  $n$ . Pour le compteur modulo 256 on utilisera 8 bascules JK A, B, C, D, E, F, G, H, dont les entrées seront

$$J_A = K_A = 1, \quad J_B = K_B = MA + \bar{M}\bar{A}, \quad J_C = K_C = MAB + \bar{M}\bar{A}\bar{B}, \quad J_D = K_D = MABC + \bar{M}\bar{A}\bar{B}\bar{C},$$

$$J_E = K_E = MABCD + \bar{M}\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \quad J_F = K_F = MABCDE + \bar{M}\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E},$$

$$J_G = K_G = MABCDEF + \bar{M}\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}, \quad J_H = K_H = MABCDEFG + \bar{M}\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}\bar{G}.$$

D'autre part, la génération d'une rampe à pente négative nécessite l'initialisation du compteur à son contenu maximal (256) avant le fonctionnement. Lors de la mise en marche, les sorties Q des bascules sont à 1 et le mode M est à 0, le compteur commence alors le décomptage jusqu'à 0, à ce moment le mode M prend la valeur 1 et le compteur compte alors jusqu'à son contenu maximal. Arrivé à cet état, le mode M reprend la valeur 0 et le processus comptage décomptage se répète.

### Synthèse du mode :

Suivant le fonctionnement complet ou décompteur le mode M doit prendre automatiquement la valeur 1 ou 0 et doit garder cette valeur le long de la phase de comptage ou de décomptage : il s'inversera lorsqu'on passe d'un fonctionnement à un autre.

Pour cela, on utilise une bascule JK supplémentaire dont les entrées J et K sont commandées par les sorties du compteur. Le fonctionnement de cette bascule est décrit par le tableau de la figure-3.

nb	D	C	B	A	$J_E$	$K_E$	$Q_t$	$Q_{t+1}$
15	1	1	1	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0	0	1	1
13	1	1	0	1	0	0	1	1
12	1	1	0	0	0	0	1	1
11	1	0	1	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	0	0	1	1
8	1	0	0	0	0	0	1	1
7	0	1	1	1	0	0	1	1
6	0	1	1	0	0	0	1	1
5	0	1	0	1	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0
10	1	0	1	0	0	0	0	0
11	1	0	1	1	0	0	0	0
12	1	1	0	0	0	0	0	0
13	1	1	0	1	0	0	0	0
14	1	1	1	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	0	0	1

fig. 3.

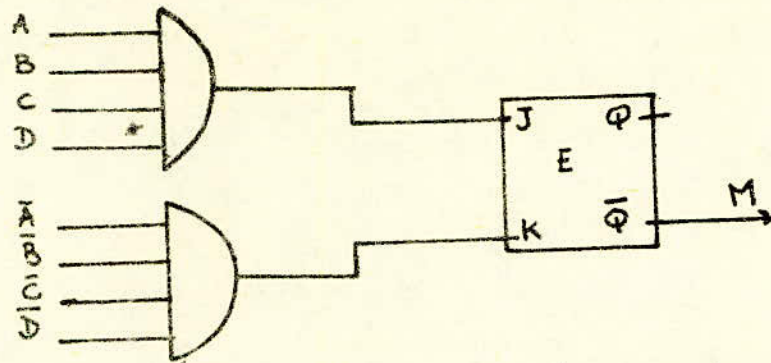
La sortie de la bascule E étant initialisée à 1, elle gardera cet état pendant tout le décomptage et prendra l'état 0 pendant le comptage.

On prendra  $M = \bar{Q}_E$

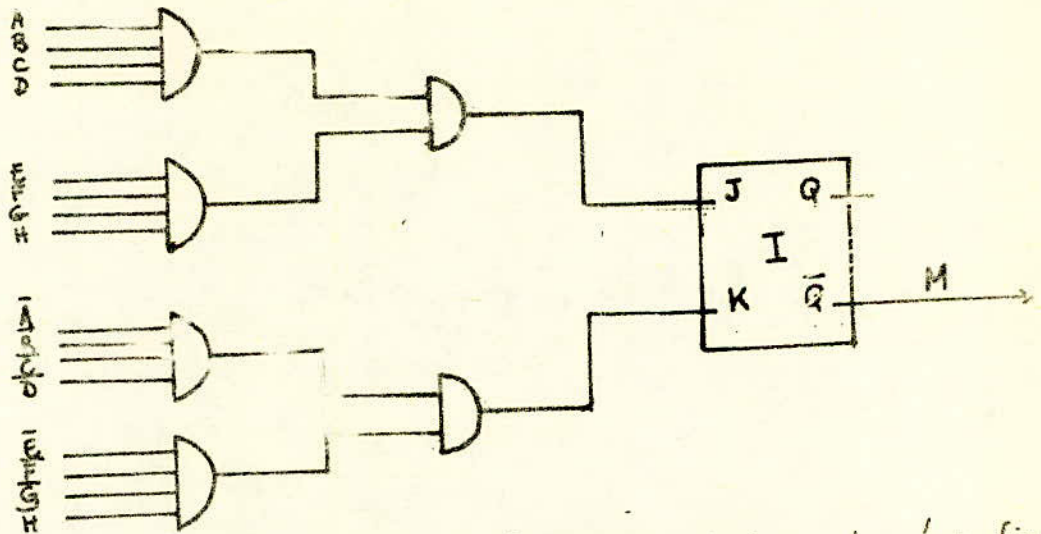
On obtient donc

$$J_E = ABCD, \quad K_E = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

d'où le schéma



On généralise cette structure au cas d'un compteurs-décompteur modulo 8.  $A, B, C, D, E, F, G, H$  étant les sorties des 8 bascules utilisées et  $I$  la bascule du mode on obtient le schéma suivant



Le schéma global du compteurs-décompteur est donc donné en fig-4-

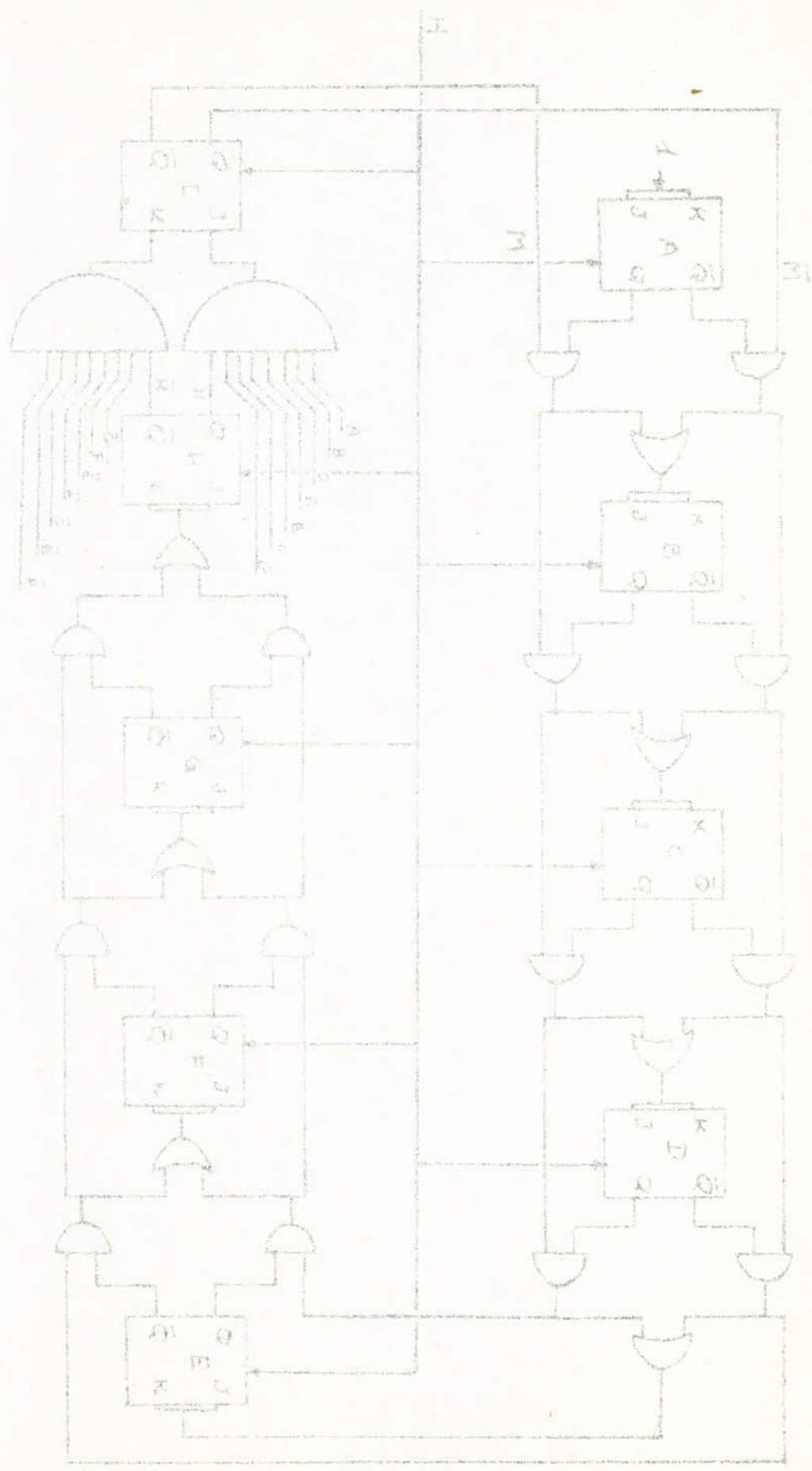


Fig. 4

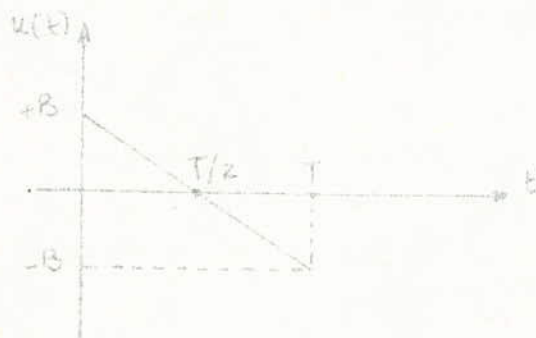
Dans le schéma qui génère la rampe, il faut lier le fonctionnement du compteur en décompteur ou compteur avec la valeur du bit de signe du C.N/A.

Quand  $M = 0$  (décomptage) signe du C.N/A = 1

Quand  $M = 1$  (Comptage) signe du C.N/A = 0

On a donc  $\text{Sgn C.N/A} = \bar{M}$ . C'est la sortie Q de la bascule I donnant le mode M.

Dans le calcul de la commande optimale du moteur on avait trouvé l'allure suivante du signal de commande :



En prenant un compteur modulo  $2^n$  (utilisant  $n$  bascules JK), on a entre 0 et  $\frac{T}{2}$   $2^n$  états du compteur, la fréquence de succession des états du compteur, ou la fréquence d'horloge, est donnée par la formule :

$$f_H = \frac{2^n}{T/2}$$

On prend un compteur modulo 256 utilisant 8 bascules JK

Si  $T = 0,25$ ,  $B \approx 10V$  on a

$$f_H = 2560 \text{ Hz}$$

$$U_{ref} \approx 10V$$

## Synthèse de la commande

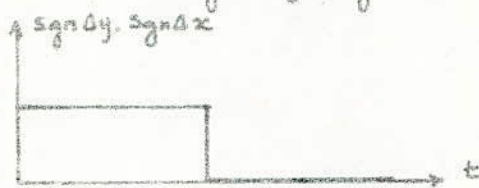
On désire synthétiser un schéma de commande de l'élément d'exécution d'un système extrémal fonctionnant en pas à pas.

L'élément d'exécution (le moteur) fera un pas dans un sens (positif) si à la sortie de l'élément de comparaison on a  $\text{sgn } \Delta y \cdot \text{sgn } \Delta x = +1$ , ou bien un pas dans le sens opposé (négatif) si  $\text{sgn } \Delta y \cdot \text{sgn } \Delta x = -1$

On représentera la sortie de l'élément de comparaison par un signal

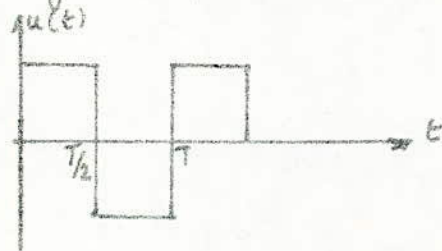
- échelon positif si  $\text{sgn } \Delta y \cdot \text{sgn } \Delta x = +1$

- nul si  $\text{sgn } \Delta y \cdot \text{sgn } \Delta x = -1$



D'autre part on utilisera une forme du signal de commande qui minimise la puissance dissipée dans le moteur. Ses calculs précédents ont montré que cette commande optimale avait la forme d'une rampe. Nous avons utilisé

comme signal de commande du moteur la commande sous optimale suivante:



$T$  est la durée du pas.

En introduisant le moteur dans la chaîne de régulation globale on doit tenir compte :

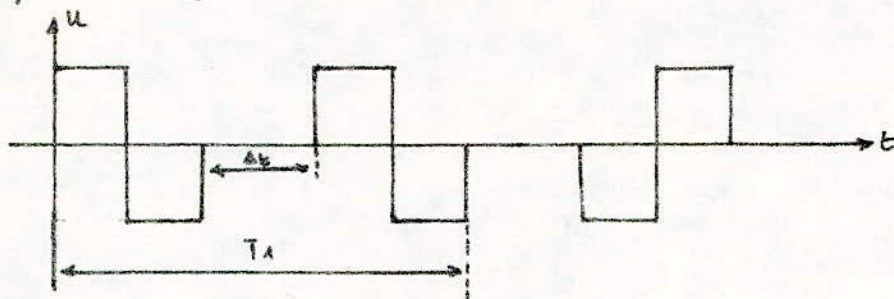
- de l'inertie du processus : Après le pas précédent, l'entrée du processus a subi une variation  $\Delta x$ , un temps  $\Delta t_1$  est nécessaire pour que le processus

prendre la nouvelle valeur  $y$ ,

- de l'inertie des éléments de mémorisation, de comparaison. Un temps  $\Delta t_2$  est nécessaire à ces différents éléments pour réaliser leurs fonctions.

Donc entre deux pas successifs, le moteur doit s'arrêter pendant un temps

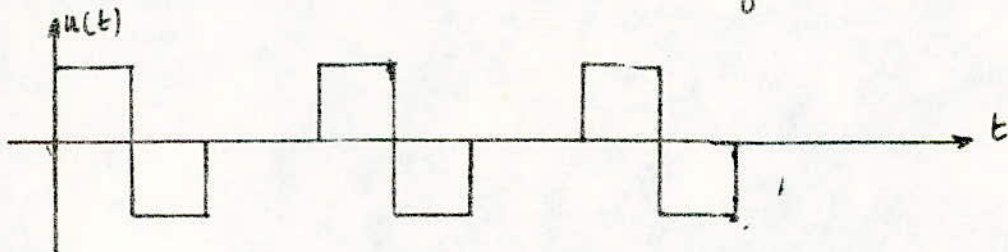
$$\Delta t \gg \Delta t_1 + \Delta t_2$$



Pendant  $T_1$  le moteur a fait par exemple 2 pas dans le sens positif, ensuite il a reçu l'ordre de faire un pas dans le sens inverse (ce qui a lieu lorsqu'on dépasse le maximum)

#### 1. Obtention du signal de commande pour des pas dans le sens positif.

on doit obtenir à l'entrée du moteur le signal suivant :



Ce signal est obtenu par 2 monostables et d'un ampli différentiel opérant la différence des tensions de sortie de chaque monostable. Le basculement de chaque monostable se fait grâce à des impulsions brèves d'amplitude suffisante.

schéma proposé : fig 1



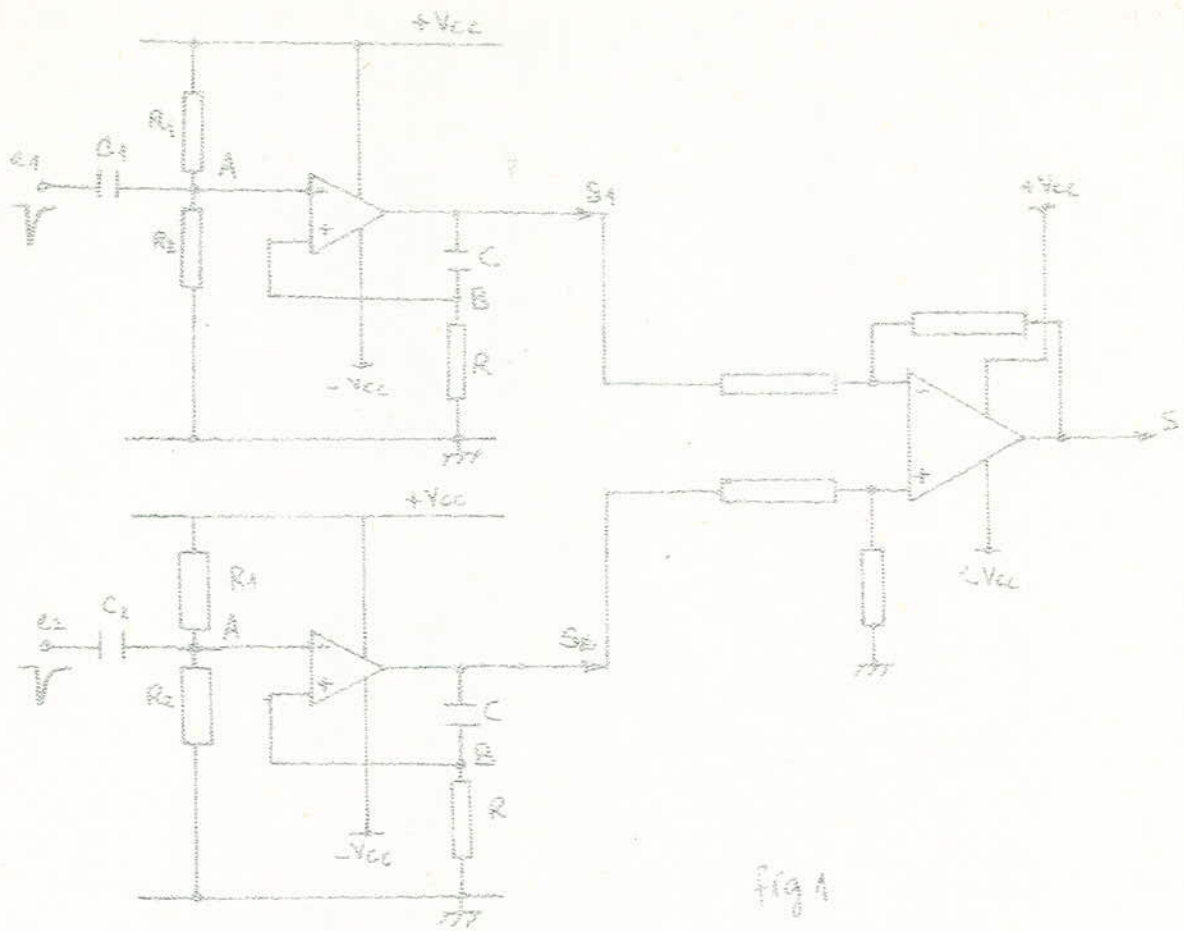


fig 1

Le fonctionnement du montage est donné par les chronogrammes suivants :

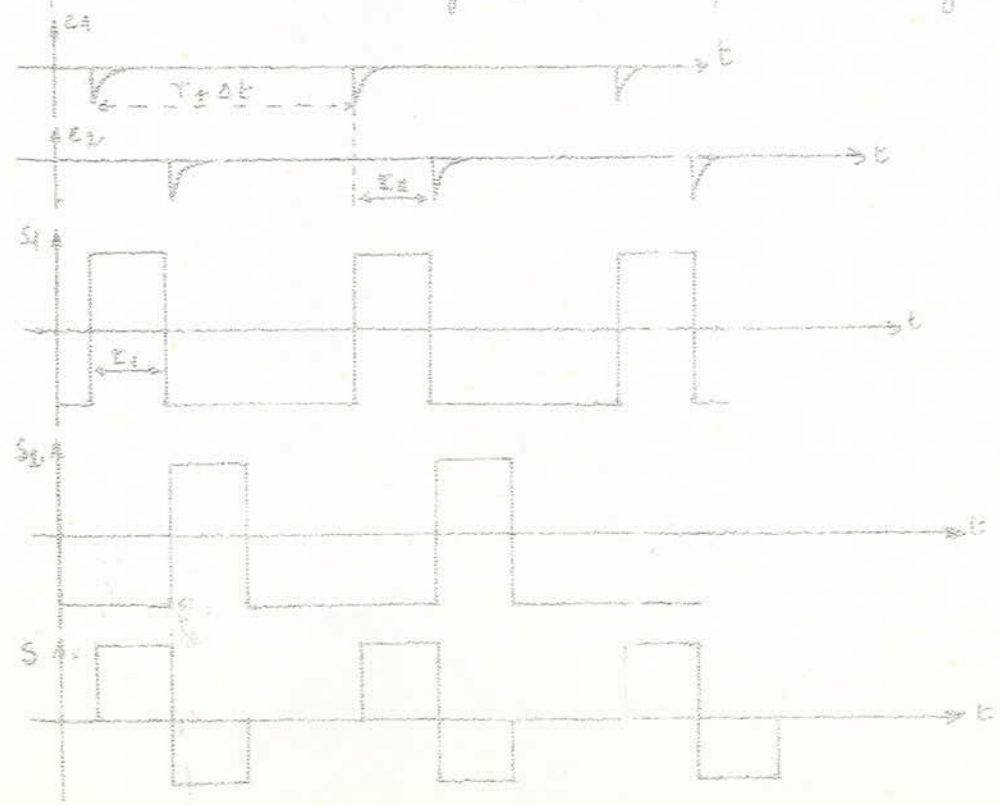


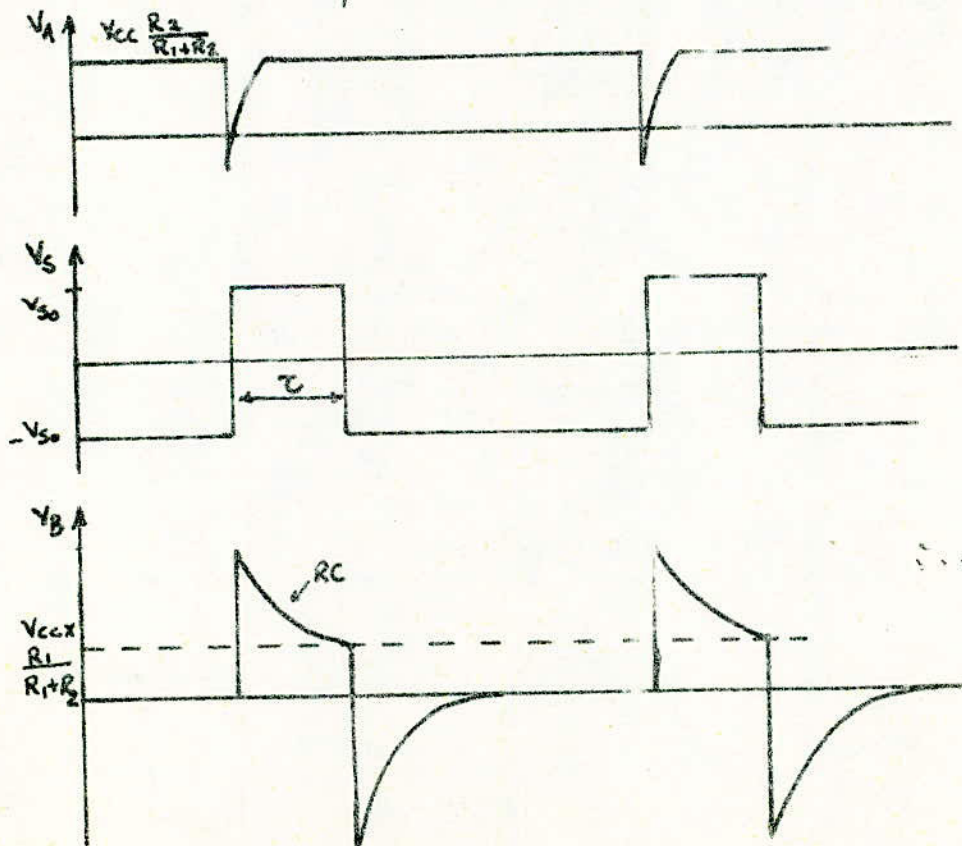
fig 2

On remarque qu'il est nécessaire que le temps  $\tau_2$  qui sépare deux impulsions arrivant sur les entrées  $e_1$  et  $e_2$  doit être égal au temps  $\tau_1$  pendant lequel les monostables sont dans leurs états instables

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{T}{2} \quad T = \text{durée du pas.}$$

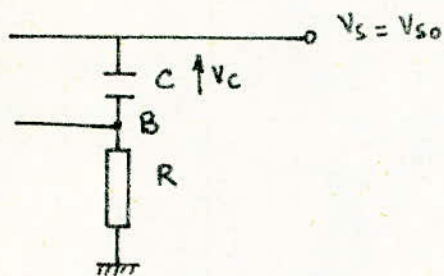
### 1.1 Calcul de $\tau_1$

L'ampli. op. est verrouillé sur la tension négative de saturation. L'arrivée d'une impulsion négative fait basculer le monostable vers sa tension de saturation positive. La capacité  $C$  se décharge à travers la résistance  $R$  jusqu'à ce que l'entrée (+) soit à une tension inférieure à celle de l'entrée (-), la sortie du monostable reprend alors la valeur de saturation négative



Au moment où l'impulsion arrive, la capacité  $C$  est chargée à  $-V_{S0}$  et aucun courant ne circule dans  $R$  donc  $V_B \approx 0$

Lorsque le monostable bascule la capacité se décharge à travers R. on a donc le schéma équivalent suivant :



$$\text{à } t=0 \quad v_c = -V_{s0}$$

équation de la décharge de C :

$$v_c = -2V_{s0} e^{-t/RC} + V_{s0}$$

$$v_B = V_{s0} - v_c = V_{s0} + 2V_{s0} e^{-t/RC} - V_{s0}$$

$$v_B = 2V_{s0} e^{-t/RC}$$

Au moment où  $v_A = v_B$  le monostable revient à l'état stable :

$$\tau \quad v_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} \quad \text{donc}$$

$$2V_{s0} e^{-\tau/RC} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC} \Rightarrow -\frac{\tau}{RC} = \log \frac{1}{2} \frac{V_{CC}}{V_{s0}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

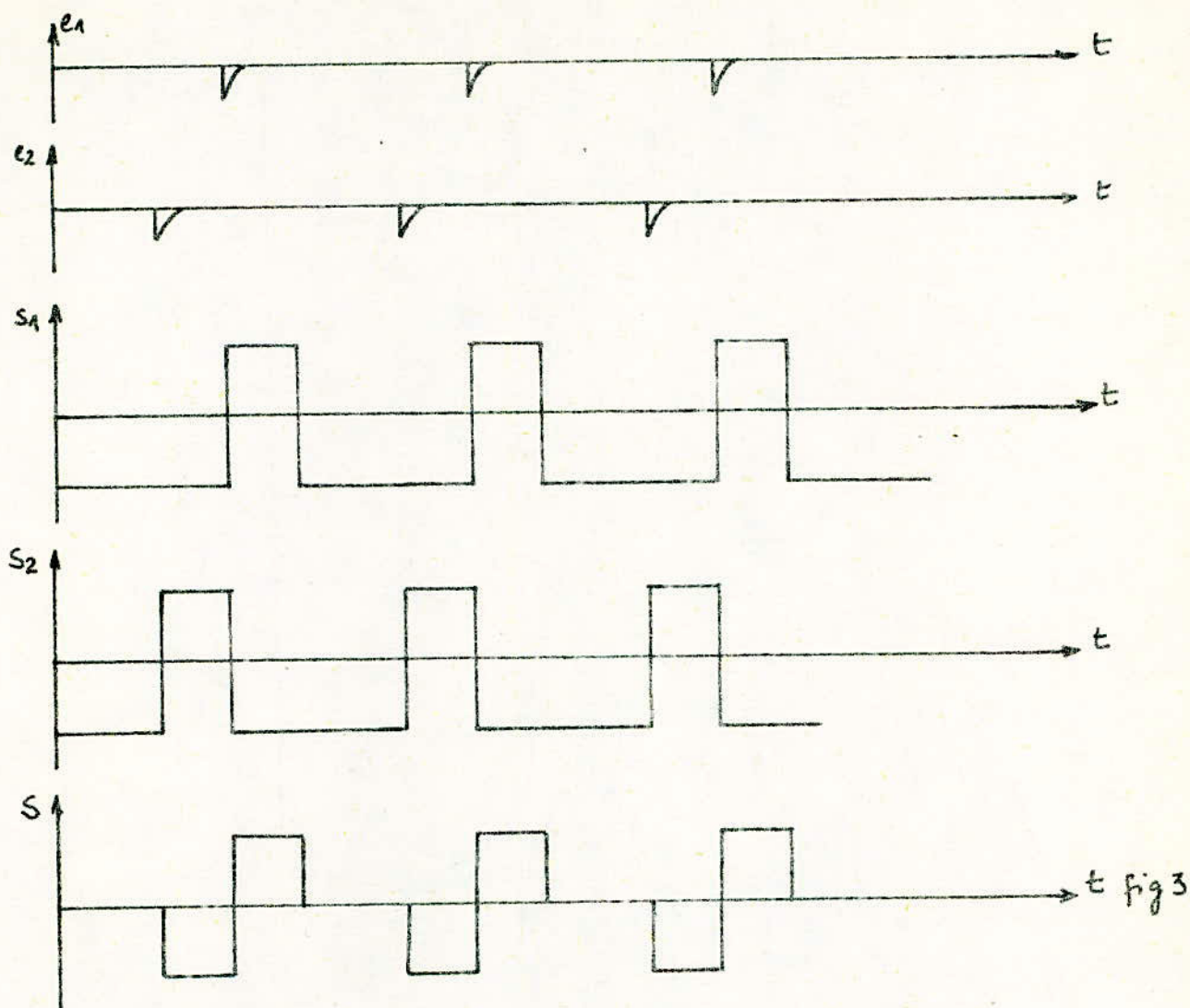
$$\tau = RC \log \left[ 2 \frac{V_{s0}}{V_{CC}} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right]$$

## 2- Obtention du signal de commande pour des pas dans le sens négatif

On utilise le même schéma de montage que précédemment (fig. 1.). Seulement cette fois c'est le monostable 2 qui bascule le premier, l'impulsion arrivant sur l'entrée  $e_2$  précède l'impulsion arrivant sur l'entrée  $e_1$ .

La période des impulsions est égale à  $T + \Delta t$  et le temps qui sépare deux impulsions successives arrivant sur l'entrée  $e_1$  et  $e_2$  est  $\frac{T}{2}$ .

On obtient ainsi les chronogrammes suivants : fig 3



Ainsi selon l'ordre d'arrivée des impulsions sur les entrées  $e_1$  et  $e_2$  le moteur tournera dans un sens ou dans l'autre et le signal de commande du moteur est optimal (il minimise la puissance dissipée dans le moteur).

### 3. Aiguillage des impulsions.

On a vu que la différence entre les deux fonctionnements précédents était due à l'ordre dans lequel arrivent les impulsions sur les monostables 1 et 2. Ainsi :

si les impulsions arrivent comme il est indiqué sur la fig. 4. le signal de commande du moteur sera celui de la fig. 2. : le moteur tourne dans le sens

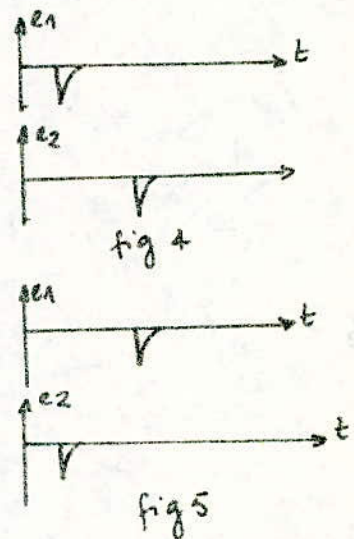
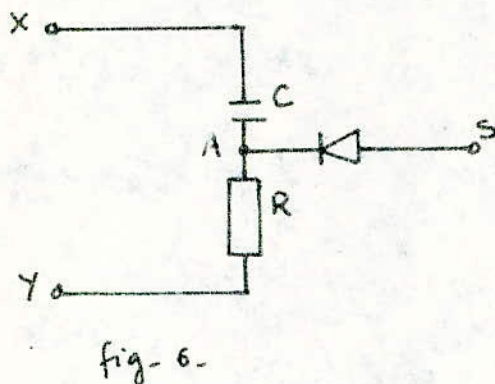
positif.

si les impulsions arrivent comme il est indiqué sur la fig-5. le signal de commande du moteur sera celui de la fig-3. : le moteur tourne dans le sens négatif.

Dans le cas de la recherche d'un maximum on associera :

- la configuration de la figure 4 au signe + du produit  $\Delta y \cdot \Delta x$
- la configuration de la figure 5 au signe moins du produit  $\Delta y \cdot \Delta x$

L'ordre d'arrivée des impulsions sur les entrées  $e_1$  et  $e_2$  dépendra du signe du produit  $\Delta y \cdot \Delta x$ . Pour réaliser cette fonction on utilise le schéma suivant fig-6.



Le fonctionnement du montage de la figure - 6 - est résumé par les diagrammes des tensions de la figure - 7 -

La sortie est une impulsion négative qui n'est présente que lorsque l'entrée Y est nulle. La cellule est sensible aux fronts descendants. On utilisera ce circuit en utilisant comme entrée X la tension fournie par un monostable comme entrée Y  $\text{sgn } \Delta x \cdot \Delta y$ , le monostable changeant d'état puis revenant à son état stable à chaque fois qu'une impulsion négative est appliquée au transistor saturé dans son état stable

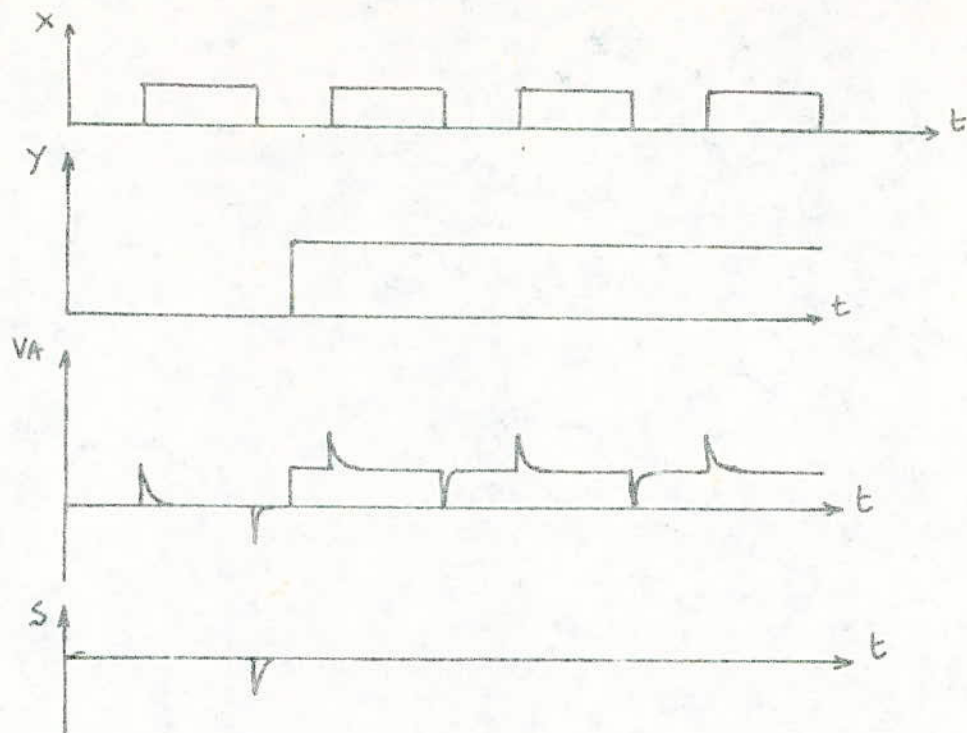
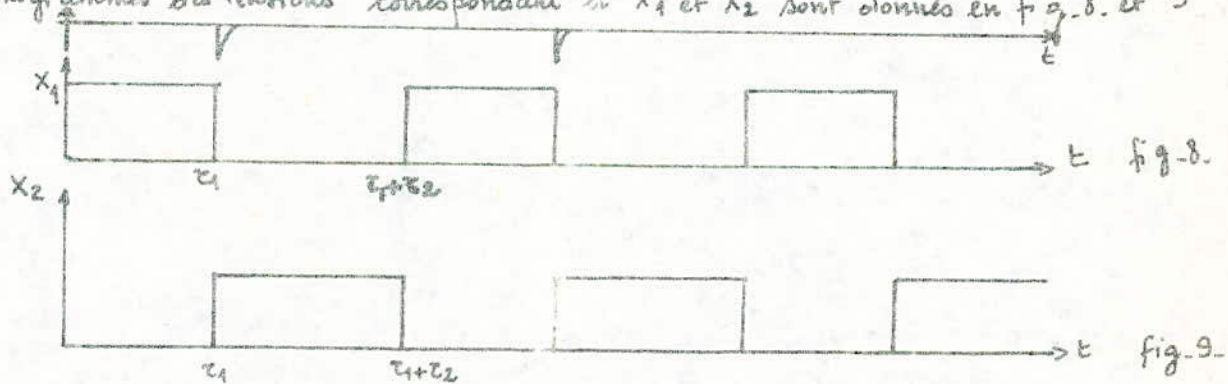


fig-7

Designons par  $X_1$  et  $X_2$  les sorties du monostable. A chaque basculement  $X_2 = \bar{X}_1$   
 Les chronogrammes des tensions correspondant à  $X_1$  et  $X_2$  sont obtenus en fig-8. et 9



Le fonctionnement du dispositif d'aiguillage des impulsions est donné par les tableaux suivants où  $B_1, B_2, B_3, B_4$  sont les sorties des 4 cellules utilisées (fig.10)  
 Les  $B_i$  prennent la valeur 1 au moment où une impulsion est présente.  
 Lorsque  $\text{sign } \Delta y \cdot \Delta x = -1$  il lui correspond une tension nulle, on obtient à l'instant  $\tau_1$  une impulsion sur  $B_1$  lors de la commutation  $X_1(\tau_1^-) = 1, X_1(\tau_1^+) = 0$   
 Lorsque  $\text{sign } \Delta y \cdot \Delta x = +1$  il <sup>lui</sup> correspond une tension positive donc  $\text{sign} = 0$ , on obtient

à l'instant  $\tau_1$ , une impulsion sur  $B_2$  lors de la commutation  $X_1(\tau_{1+}) = 1$ ,  
 $X_1(\tau_{1-}) = 0$

$\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x$	0	1
$\overline{\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x}$	1	0
$X_1(\tau_{1-})$	1	1
$X_1(\tau_{1+})$	0	0
$X_1(\tau_1 + \tau_2)$	0	0
$X_1(\tau_1 + \tau_{2+})$	1	1
$B_1$	1	0
$B_2$	0	1

$\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x$	0	1
$\overline{\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x}$	1	0
$X_2(\tau_{1-})$	0	0
$X_2(\tau_{1+})$	1	1
$X_2(\tau_1 + \tau_{2-})$	1	1
$X_2(\tau_1 + \tau_{2+})$	0	0
$B_3$	1	0
$B_4$	0	1

fig. 10.

Les entrées des cellules 1 et 2 sont alors :

$$X_{B_1} = X_1 \quad Y_{B_1} = \text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x$$

$$X_{B_2} = X_1 \quad Y_{B_2} = \overline{\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x}$$

La fig. 10. montre que lorsque  $\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x = 0$ , on obtient une impulsion sur  $B_3$  à l'instant  $\tau_1 + \tau_2$  lors de la commutation  $X_2(\tau_1 + \tau_{2-}) = 1$ ,  
 $X_2(\tau_1 + \tau_{2+}) = 0$ .

Lorsque  $\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x = 1 \Rightarrow \overline{\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x} = 0$ , on obtient une impulsion sur  $B_4$  à l'instant  $\tau_1 + \tau_2$  lors de la commutation  $X_2(\tau_1 + \tau_{2-}) = 1$ ,  
 $X_2(\tau_1 + \tau_{2+}) = 0$

Les connexions des cellules 3 et 4 sont alors :

$$X_{B_3} = X_2 \quad Y_{B_3} = \text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x$$

$$X_{B_4} = X_2 \quad Y_{B_4} = \overline{\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x}$$

On obtient ainsi le schéma suivant fig-11.

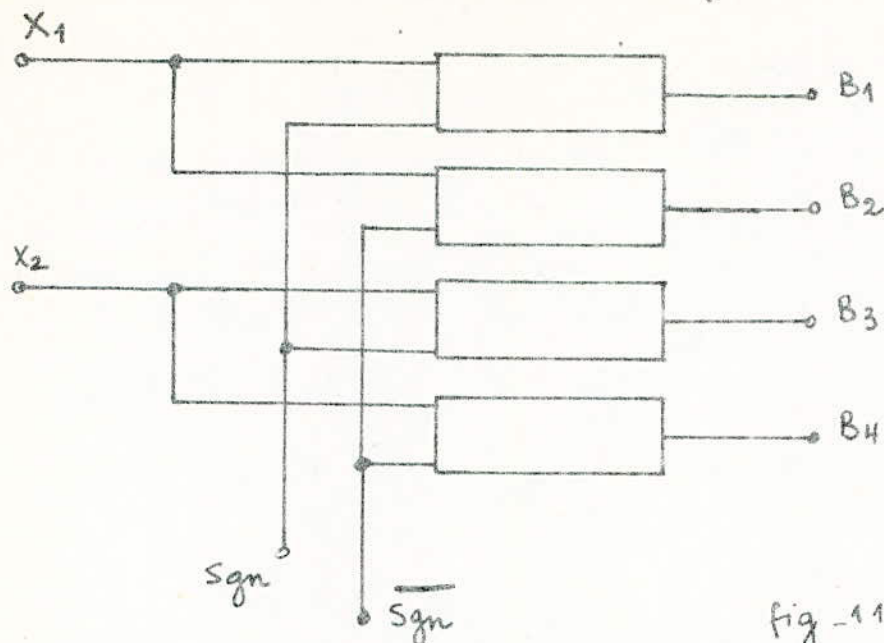


fig-11-

Ce schéma (fig-11-) réalise l'aiguillage suivant selon la valeur que prend

$Sgn \Delta y. \Delta x$  : fig-12-

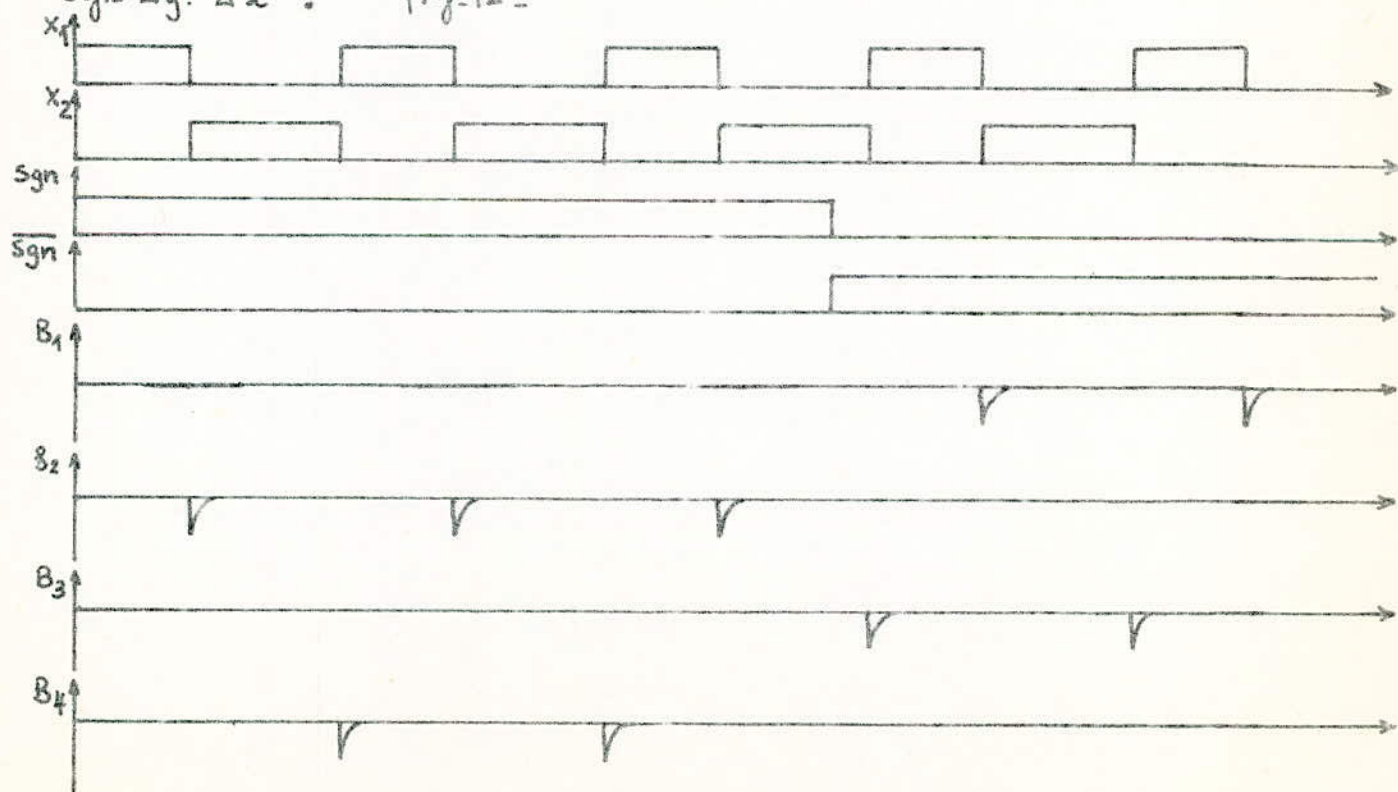


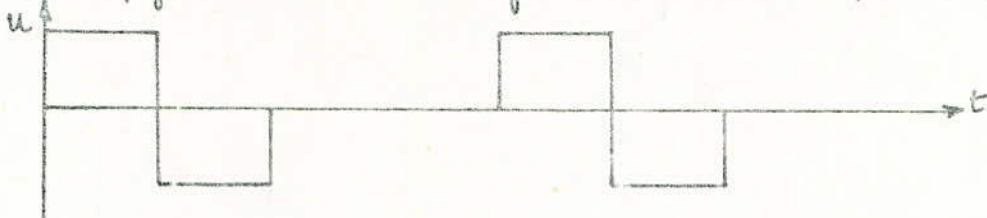
fig-12-



En associant les sorties  $B_1$  et  $B_4$  (entrée  $e_1$ ) pour exciter  $M_1$  et  $B_2$  et  $B_3$  (entrée  $e_2$ ) pour exciter  $M_2$  on voit que si  $\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x$  est positif ( $\text{sgn} = 1$ ) une impulsion sera présente à

- l'entrée  $e_1$  aux instants  $nT + \tau_1$
- l'entrée  $e_2$  aux instants  $nT + \tau_1 + \tau_2$

C'est donc  $M_1$  qui bascule le premier, l'ampli différentiel réalisant  $(M_1 - M_2)$  (fig-1-) donnera le signal de commande suivant :

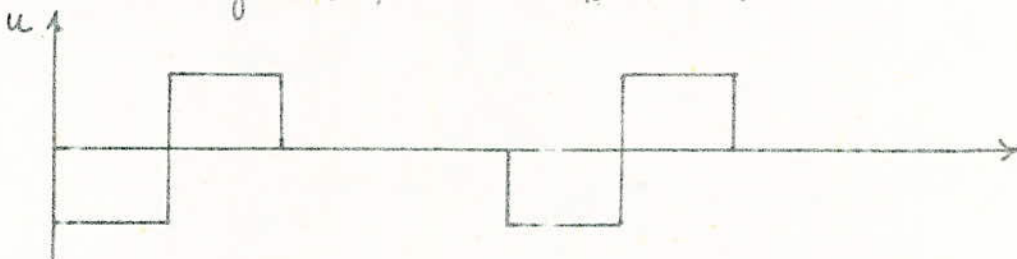


Le moteur tourne par pas vers l'avant (sens positif)

si  $\text{sgn } \Delta y \cdot \Delta x$  est négatif ( $\text{sgn} = -1$ ) une impulsion sera présente à :

- l'entrée  $e_1$  aux instants  $nT + \tau_1 + \tau_2$
- l'entrée  $e_2$  aux instants  $nT + \tau_1$

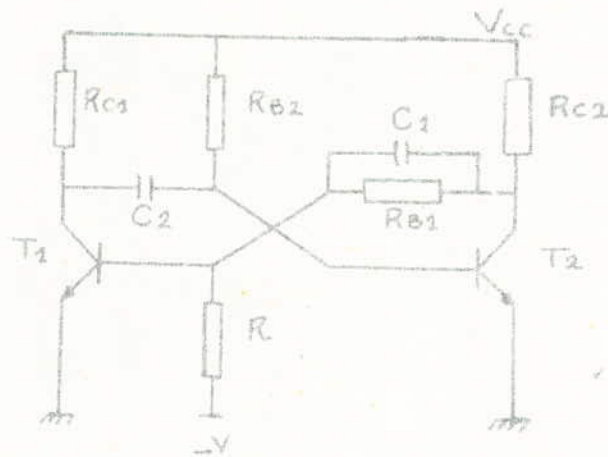
C'est donc  $M_2$  qui bascule le premier et l'ampli. différentiel (fig-1-) fournit alors le signal de commande suivant :



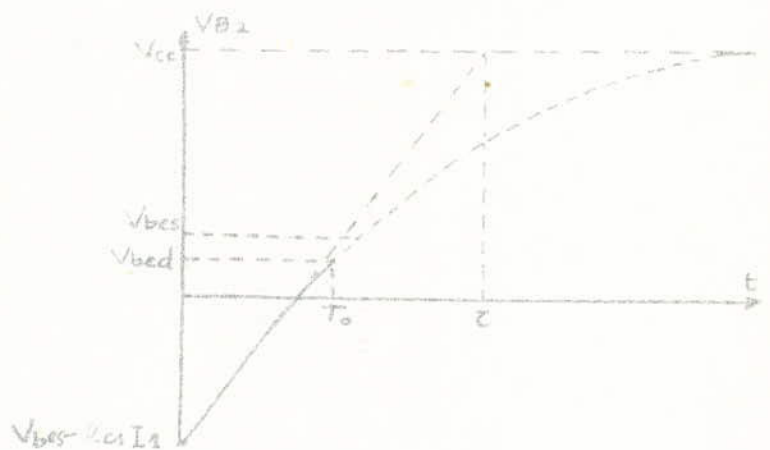
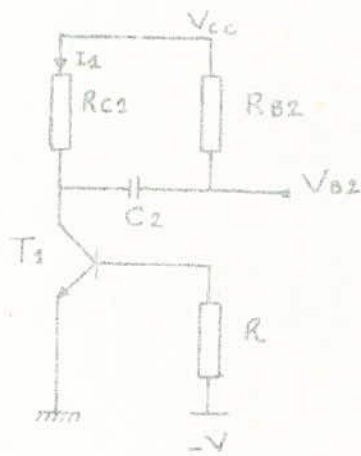
Le moteur tourne par pas dans le sens négatif (vers l'arrière).

On obtient finalement le schéma de principe global suivant : fig-13.

Evaluation de la durée de l'état instable du monostable.



Pendant l'état instable  $T_1$  est saturé et  $T_2$  bloqué. Le circuit de  $T_1$  est alors équivalent à :



On a 
$$V_{b2} = V_{cc} - (V_{cc} + R_{c1} I_a - V_{be(sat)}) e^{-t/\tau}$$

où 
$$\tau = (R_{B2} + R_e) C_2 \quad \text{avec}$$

$R_e$  = est la résistance d'entrée du générateur équivalent à  $T_1$

En général 
$$\tau \approx R_{B2} C_2$$

Comme  $R_{c1} I_a = V_{cc} - V_{ce(s)}$  on obtient

$$V_{b2} = V_{cc} - (2V_{cc} - V_{be(s)} - V_{ce(s)}) e^{-t/\tau}$$

L'état instable disparaît lorsque

$$V_{b2} = V_{bed}$$

$V_{bed}$  est la tension de base suffisante pour débloquer  $T_2$ .

donc

$$V_{cc} - (2V_{cc} - V_{bes} - V_{ces}) e^{-T_0/\tau} = V_{bed} \Rightarrow$$

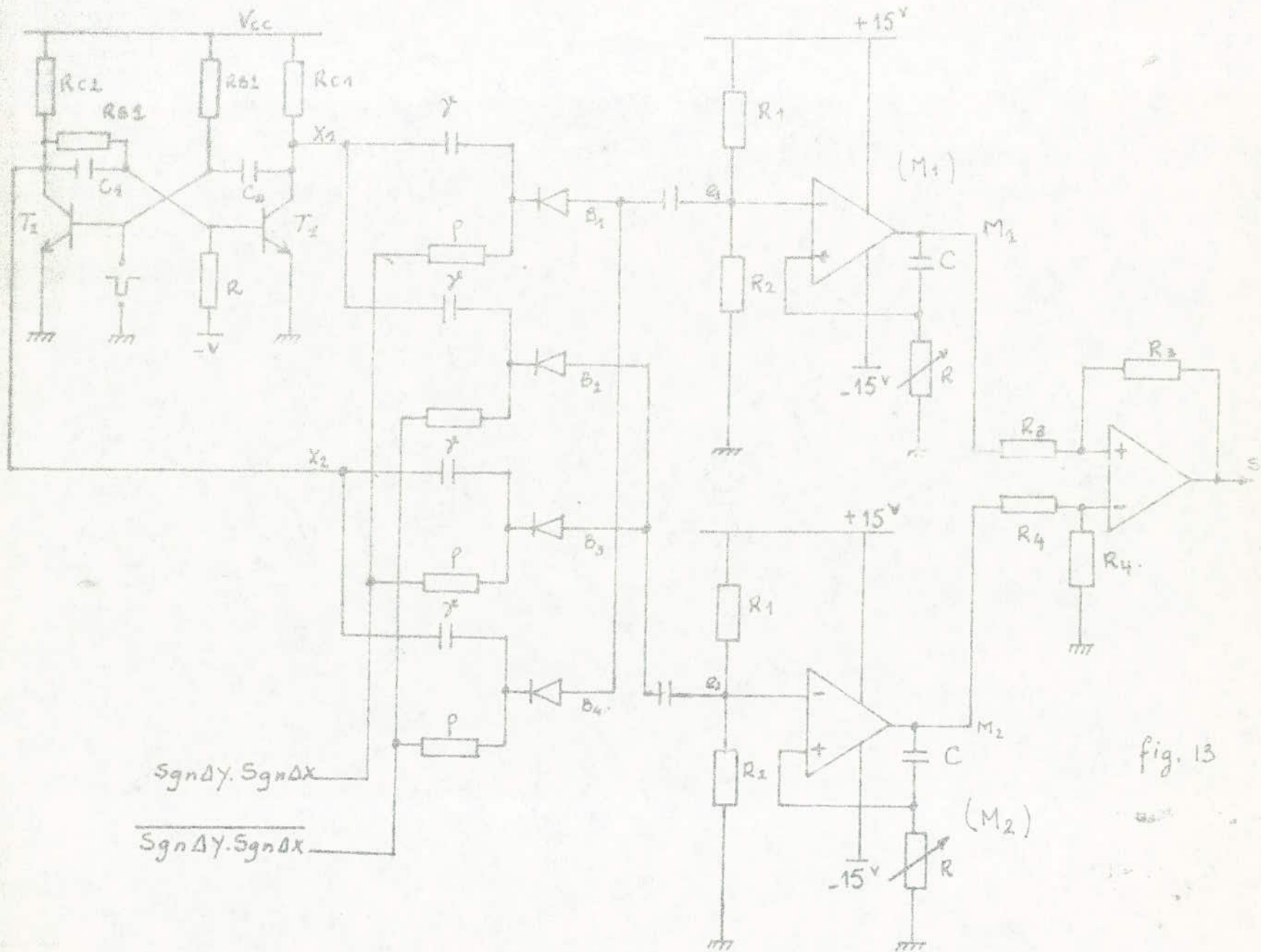
$$T_0 = \tau \operatorname{Log} \frac{2V_{cc} - V_{bes} - V_{ces}}{V_{cc} - V_{bed}}$$

En général  $V_{bes}$ ,  $V_{ces}$ ,  $V_{bed}$  sont du même ordre de grandeur et petits par rapport à  $V_{cc}$   $\Rightarrow$

$$T_0 \approx \tau \operatorname{Log} \frac{2V_{cc}}{V_{cc}} = \tau \operatorname{Log} 2 = R_{B2} C_2 \log 2$$

donc

$$T_0 = 0,69 R_{B2} C_2$$



$Sgn \Delta Y \cdot Sgn \Delta X$   
 $\frac{Sgn \Delta Y \cdot Sgn \Delta X}{}$

fig. 13

Générateur Programmé

X<sub>1</sub> Transistor Saturé

X<sub>2</sub> Tr. bloqué

Sgn ΔY, sgn ΔX

Sgn ΔY · sgn ΔX

B<sub>1</sub>

B<sub>2</sub>

B<sub>3</sub>

B<sub>4</sub>

E<sub>1</sub>

E<sub>2</sub>

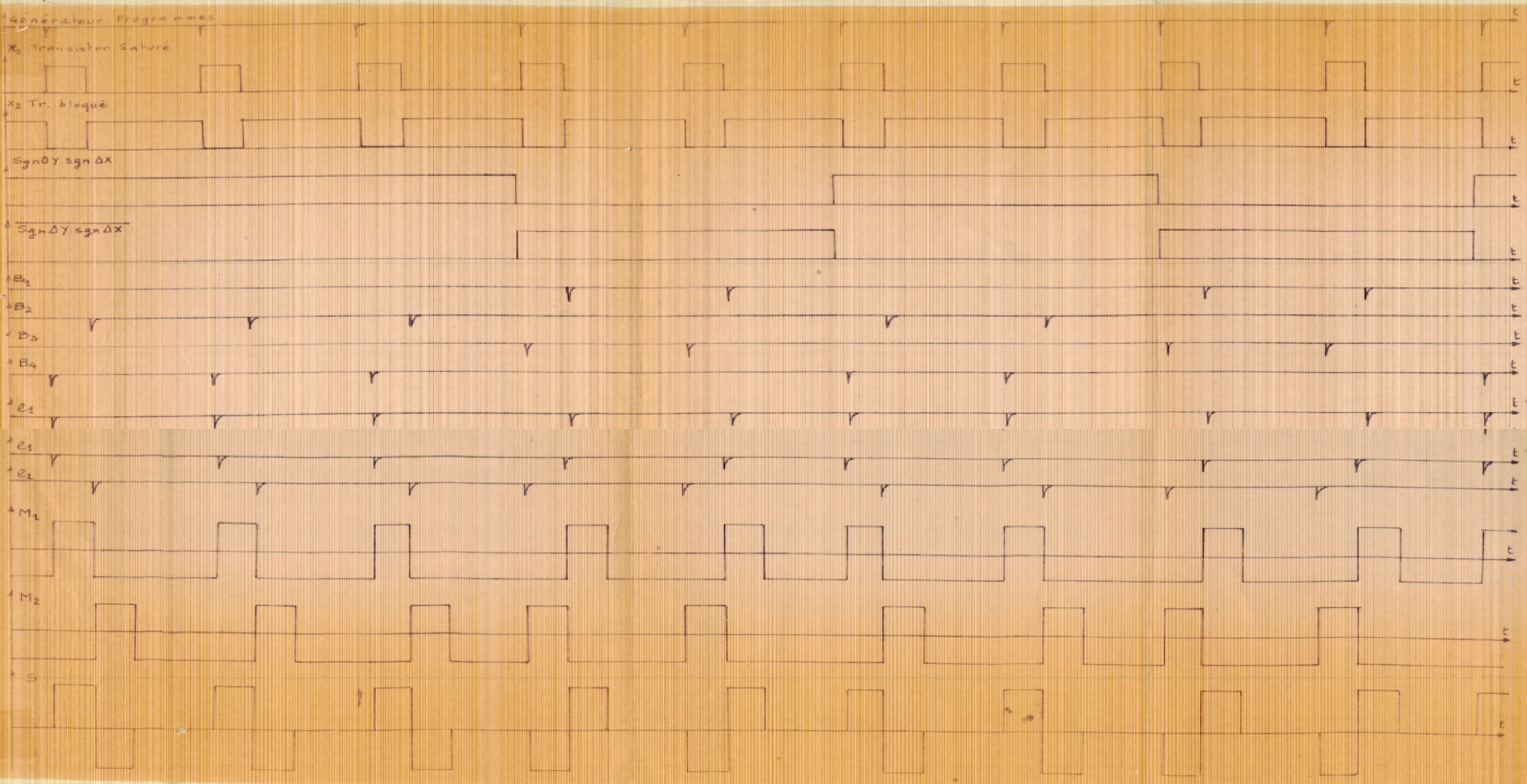
E<sub>3</sub>

E<sub>4</sub>

M<sub>1</sub>

M<sub>2</sub>

S



Pour ajuster la durée du pas à la valeur voulue  $\frac{T}{2}$ , il faut agir sur le potentiomètre  $R_{B2}$ , il faut également ajuster la durée de l'état instable des monostables à amplificateur opérationnel à la valeur  $\frac{T}{2}$  en jouant sur la résistance  $R$ .

La durée d'un cycle est fixée à l'aide du générateur de programmes dont la période doit être la somme

- du temps que dure un pas du moteur:  $T$
- du temps nécessaire aux différents organes pour élaborer une sortie stable soit  $\sum t_i$ ,  $t_i$  étant le temps nécessaire à l'organe  $i$  pour élaborer sa réponse,
- du temps de réponse du processus  $\tau_p$

Si on appelle  $T_0$  la période d'un cycle alors:

$$T_0 \geq T + \sum t_i + \tau$$

## CONCLUSION

Par rapport aux systèmes classiques, les systèmes extrémaux possèdent en plus un ensemble de dispositifs d'analyse logiques qui font que la commande n'agit pas par référence à une consigne extérieure mais par l'analyse d'informations qu'ils reçoivent au cours de leur fonctionnement. C'est ce type de fonctionnement qui impose l'utilisation d'éléments logiques dans la boucle de réaction. Cette présence d'éléments logiques devient alors une caractéristique des systèmes extrémaux. D'autres éléments plus complexes sont également introduits dans les systèmes extrémaux : ce sont les calculateurs. Ces derniers constituent le meilleur moyen pour réaliser une régulation extrême. En effet, ils permettent l'utilisation d'algorithmes complexes mais performants. Ainsi, suivant la spécificité du processus qu'on désire réguler, on peut choisir un algorithme ou un autre suivant sa précision, sa rapidité et le degré de perfectionnement recherché. On obtient par conséquent une meilleure rentabilité et une plus grande fiabilité. Il est à noter aussi que les calculateurs permettent une dépense minimale de puissance et un encombrement réduit.

Ainsi donc, sur les problèmes qu'ils résolvent, les systèmes extrémaux sont plus performants et plus complexes que les systèmes classiques. Il n'en reste pas moins que ces systèmes ne sont pas les plus optimaux d'une manière globale, et qu'il existe tout un ensemble de processus pour lesquels une régulation extrême telle qu'elle a été présentée, ne constitue pas la solution optimale. Ce sont les processus soumis



à des perturbations aléatoires qui modifient la caractéristique entrée-sortie du processus. Dans ce cas une régulation extrême peut perdre son efficacité. Ce problème introduit un mode de régulation nettement plus complexe que celui utilisé par les systèmes extrêmes non soumis aux perturbations. Dans ce type de problèmes l'utilisation d'un ordinateur est d'un grand secours, car il permet de déterminer très rapidement et avec une précision suffisante les paramètres et la structure du régulateur au cours du processus de fonctionnement.

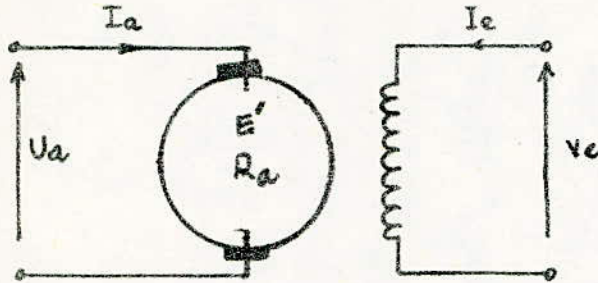
## ANNEXE

- Moteur à Courant Continu,
- Amplificateur Opérationnel.

## Moteur à Courant Continu à Excitation séparée.

### 1. Expression générale du Couple

Soit un moteur à excitation séparée. Si  $U_a$  et  $V_e$  désignent respectivement les tensions continues appliquées à l'induit et à l'inducteur (excitation) on a



$$U_a = E' + R_a I_a \quad (1)$$

$E'$  est la f.c.e.m de l'induit

$$E' = \frac{P}{2\pi a} n \Omega \phi \quad (2)$$

où :  $2p$  est le nombre total de pôles de l'in

$2a$  nombre de voies de l'enroulement de l'induit

$n$  nombre de brins actifs

$\phi$  flux utile par pôle

$\Omega$  vitesse de l'arbre du moteur; elle est exprimée en rad/s.

Multiplications (1) par  $I_a$ , on obtient :

$$U_a I_a = E' I_a + R_a I_a^2$$

Soient  $P_a = U_a I_a$

$$P_J = R_a I_a^2$$

respectivement la puissance absorbée par l'induit et les pertes Joule correspondantes.

Le terme

$$P_e = E' I_a = P_a - P_J$$

représente la puissance électrique transformée en puissance mécanique aux pertes par frottement près.  $P_e$  donne naissance à un couple électromagnétique  $\Gamma_e$

$$\Gamma_e = \frac{P_e}{\Omega} = \frac{E' I_a}{\Omega} = k I_a \phi$$

$$k = \frac{p n}{2\pi a}$$

couple utile disponible sur l'arbre du moteur est en pratique :

$$\Gamma_m = \Gamma_e - \Gamma_p$$

$\Gamma_p$  représente toutes les pertes (hystérésis, courants de Foucault, frottements, ...),  
 $\Gamma_p$  est très faible et on peut écrire :

$$\Gamma_m \approx \Gamma_e = k I_a \phi \quad (3)$$

ne le couple moteur est proportionnel au courant de l'induit et au flux de inducteur.

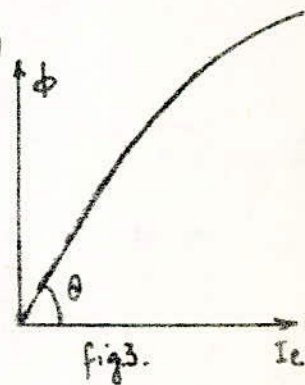
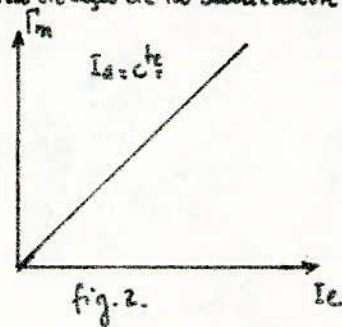
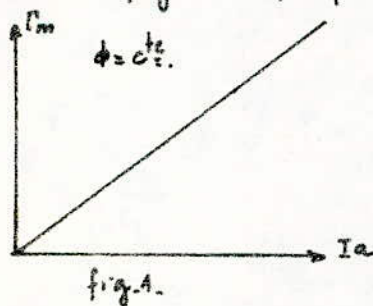
### Caracteristiques électromécaniques.

si  $\phi = c I_e$ , alors  $E' = K_1 \Omega$  où  $K_1 = k \phi$ .

alors  $\Gamma_m = K_1 I_a$  (4) d'après (3)

caractéristique couple moteur en fonction du courant d'induit à flux constant est linéaire.

obtient la figure (1), le flux étant maintenu en deçà de la saturation (fig 5)



si  $I_a = c I_e$  alors  $\Gamma_m = K_2 I_e$  (5) où

$$K_2 = \frac{p n}{2\pi a} I_a \tan \theta \quad \text{si on travaille dans la zone linéaire (fig. 3).}$$

obtient donc une caractéristique linéaire fig. 2.

### Caractéristique mécanique $\Gamma_m = f(\Omega)$ .

intéressons le courant d'excitation à une valeur cte  $I_{en}$  valeur nominale.

Reprenons les équations (1) et (4)

$$U_a = R_a I_a + E' \quad (1)$$

$$\Gamma_m = K_1 I_a \quad (4)$$

On tire  $I_a$  de (1) et on l'injecte dans (4) :

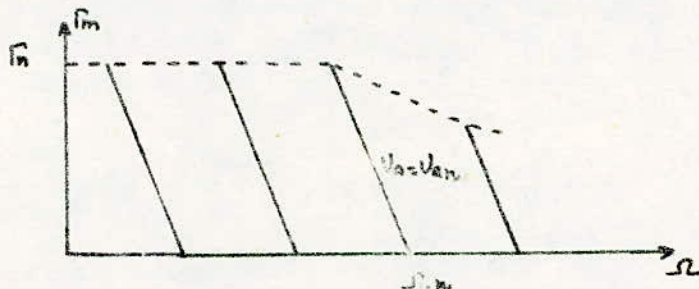
$$\Gamma_m = K_1 \left( \frac{U_a}{R_a} - \frac{E'}{R_a} \right)$$

or d'après (2)  $E' = K \Omega \phi = K_1 \Omega$

donc  $\Gamma_m = K_1 \frac{U_a}{R_a} - \frac{K_1^2}{R_a} \Omega \quad (6)$

La caractéristique  $\Gamma_m = f(\Omega)$  est donc une droite inclinée de pente  $-\frac{K_1^2}{R_a}$

Si on fait varier  $U_a$  on obtient donc un réseau de caractéristiques dont l'une est la suivante :



On constate qu'au delà de la vitesse nominale  $\Omega$  le couple chute. Pour des vitesses de rotation inférieures à  $\Omega_n$ , le couple est constant il est égal à  $\Gamma_{nominal}$ .  
 Donc si on ne desire pas une diminution du couple  $\Gamma_m$  on travaillera des vitesses  $\Omega$ .

#### 4) Equation des couples d'un moteur en régime variable.

Dans le cas général, sur l'arbre d'un moteur agissent les couples suivants :

a) Couple électromagnétique  $\Gamma_m$

b) Couple résistant statique  $\Gamma_r$  créé par les forces statiques de la machine entraînée

c) Couple dynamique  $\Gamma_j$  qui apparaît lors de toute variation de la vitesse du moteur

On a donc l'équation d'équilibre :

$$\Gamma_m = \Gamma_j + \Gamma_r \quad (7)$$

$\Gamma_j$  est conditionné par l'inertie  $J$  de la machine entraînée et du moteur

$$\Gamma_j = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (8)$$

La caractéristique mécanique des couples résistants est donnée par la formule suivante :

$$\Gamma_r = \Gamma_0 + (\Gamma_m - \Gamma_0) \left( \frac{\Omega}{\Omega_n} \right)^\alpha \quad (9) \text{ où}$$

$\Gamma_0$  est le couple résistant de frottement dans la partie mobile de la machine

$\Gamma_m$  est le couple résistant à la vitesse nominale  $\Omega_n$

$\alpha$  est un coefficient qui caractérise la variation du couple en fonction de la vitesse

Dans le cas où  $\alpha = 0$   $\Gamma_r = \Gamma_m(0)$  pour n'importe quelle valeur de  $\Omega$  : c'est la caractéristique que présentent parmi les engins de levage les grues, les treuils...

### 5. Notions sur la théorie de l'échauffement de la machine.

La durée de vie du moteur dépend dans une large mesure des processus thermiques qui prennent naissance pendant son fonctionnement. On peut considérer le moteur comme un corps solide parfait et calculer son échauffement

On part de l'équation fondamentale suivante :

$$p \, dt = S \cdot \lambda \cdot \theta \cdot dt + Mc \cdot d\theta \quad (11) \text{ où}$$

$S$  est l'aire de la surface du corps

$\lambda$  coefficient de transfert de la chaleur

$M$  masse du corps

$c$  capacité calorifique

$$\theta = \theta_b - \theta_a$$

$\theta_b$  : température des bobinages

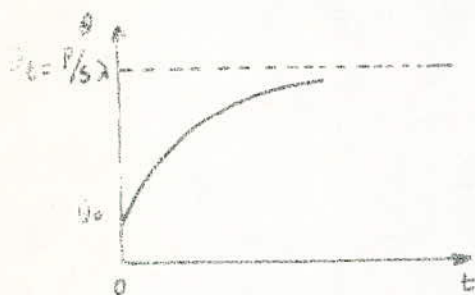
$\theta_a$  : température ambiante

$p$  quantité de chaleur dégagée pendant le temps  $dt$  elle correspond aux pertes Joule

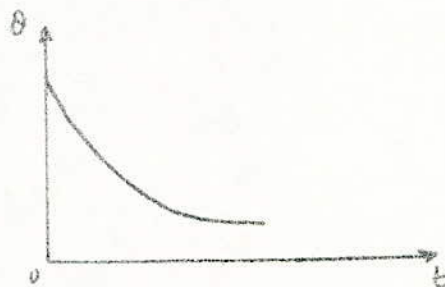
Intégrons l'équation (11) on obtient :

$$\theta = \frac{P}{s\lambda} \left( 1 - e^{-\frac{s\lambda}{Mc} t} \right) + \theta_0 e^{-\frac{s\lambda}{Mc} t}$$

$$\theta(t=0) = \theta_0$$



courbe d'échauffement



courbe de refroidissement

On remarque donc que la température limite dépend de la chaleur. Si on péé pendant le temps dt plus cette quantité est grande plus  $\theta_s$  est élevée. Or  $p$  correspond aux pertes par effet Joule transformées en chaleur donc si on ne veut pas que la température limite atteigne des valeurs élevées il faut minimiser les pertes par effet Joule. Cette remarque se justifie surtout si le régime du moteur est un régime intermittent variable.

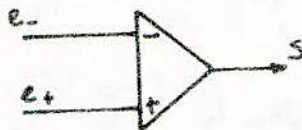
## L' amplificateur opérationnel.

L'utilisation de l'amplificateur opérationnel est avantageuse par le fait qu'il possède les caractéristiques suivantes :

- grande impédance d'entrée
- faible impédance de sortie.
- grand gain en tension
- grande stabilité

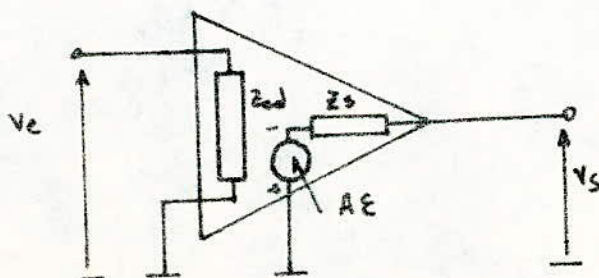
### 1. Généralités .

L'ampli. op. est schématisé de la manière suivante :



Il possède 2 entrées : l'une (-) appelée inverseuse car le signal de sortie est déphasé de  $\pi$  par rapport au signal d'entrée  $e_-$ , l'autre appelée non inverseuse (le signal de sortie n'est pas déphasé par rapport à l'entrée  $e_+$ ).

En prenant comme référence l'entrée +, l'ampli. op peut être schématisé comme suit :



$$V_s = -A V_e \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = -A$$

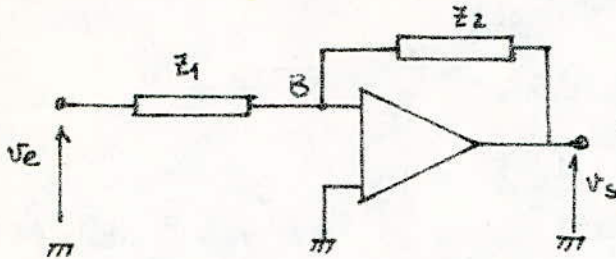
$Z_{ed}$  impédance différentielle d'entrée

$Z_s$  impédance de sortie



## 2. Montage fondamental

En pratique il est rare qu'un ampli. op. soit utilisé en boucle ouverte. Il est généralement utilisé avec une contre réaction selon le montage de base suivant:



Si l'amplificateur est idéal :  $A = \infty$   $Z_{ed} = \infty$  et le point B est une masse virtuelle:

$$\frac{V_e}{Z_1} = -\frac{V_s}{Z_2} \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Le gain en boucle fermée est donc indépendant des caractéristiques de l'amplificateur.

Ceci n'est vrai qu'approximativement puisque  $A$  et  $Z_{ed}$  ne sont pas infinis. Si on tient compte de  $A$  non infini et  $Z_{ed}$  non infini on a:

$$\frac{V_e - V_B}{Z_1} - \frac{V_B}{Z_{ed}} - \frac{V_B - V_s}{Z_2} = 0$$

$$\text{or } V_B = -A V_B \text{ donc}$$

$$\frac{V_e}{Z_1} + \frac{V_s}{AZ_1} + \frac{V_s}{AZ_{ed}} + \frac{V_s}{AZ_2} + \frac{V_s}{Z_2} = 0 \quad \text{on tire de cette relation:}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_{ed}} \right)}}_{\text{terme correctif}}$$

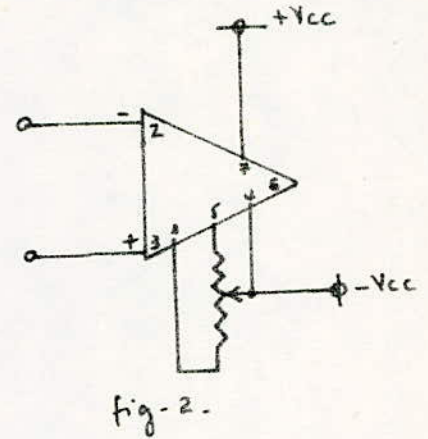
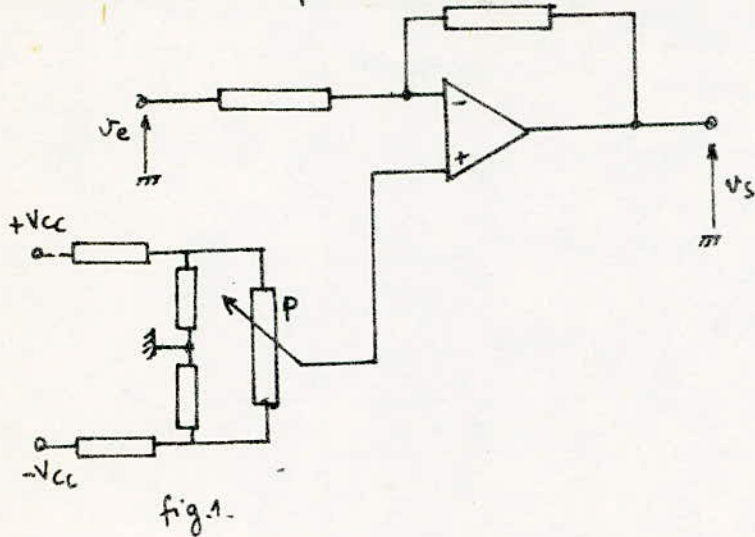
Pour se rapprocher du cas idéal il faut choisir un amplificateur dont le gain et l'impédance  $Z_{ed}$  soient grands.

Il faudra en outre, tenir compte des erreurs dues à la tension et au courant de décalage.

## 3. Compensation de la tension et du courant de décalage.

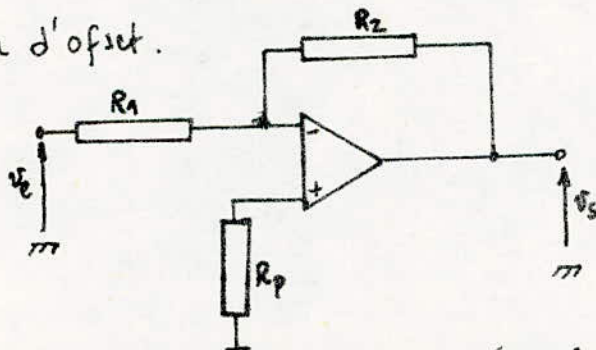
Pour cette compensation on utilise généralement 2 procédés :

a) on applique en serie avec l'entrée non utilisée, une tension ajustable, recueillie aux bornes d'un potentiomètre P (fig 1)



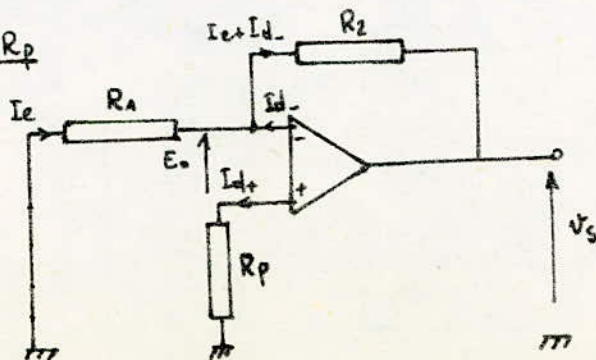
Pour le  $\mu A 741$  le constructeur a prévu des bornes spéciales pour la compensation de la tension de décalage grâce à un potentiomètre de  $10\text{K}\Omega$  fig 2.

b) on crée aux bornes d'une résistance  $R_p$  une chute de tension de valeur égale à la tension d'offset.



$R_p$  est branchée entre l'entrée non utilisée et la masse

- calcul de  $R_p$



Equation de la maille d'entree :

$$R_1 I_e + E_0 + R_p I_{d+} = 0 \Rightarrow I_e = -\frac{E_0}{R_1} - \frac{R_p}{R_1} I_{d+} \quad (1)$$

Equation de la maille de sortie :

$$V_s = R_2 (I_e + I_{d-}) + R_1 I_e \Rightarrow V_s = (R_2 + R_1) I_e + R_2 I_{d-} \quad (2)$$

On remplace  $I_e$  par sa valeur (1) dans (2)

$$V_s = -\frac{(R_2 + R_1) E_0}{R_1} - \frac{(R_1 + R_2) R_p}{R_1} I_{d+} + R_2 I_{d-}$$

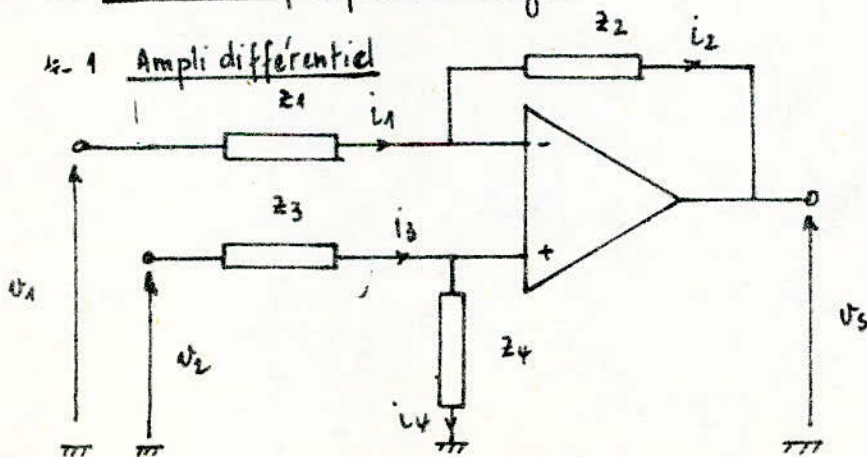
Supposons que  $I_{d+} = I_{d-} = I_d$ ,  $V_s = 0$ ,  $E_0 = 0 \Rightarrow$

$$-\frac{(R_1 + R_2) R_p}{R_1} I_d + R_2 I_d = 0$$

d'où

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

#### 4. Etude de quelques montages.



On supposera que l'amplificateur est parfait  $A = \infty$

$$(I) \begin{cases} V_s = -z_2 i_2 + z_4 i_3 \\ V_1 = z_1 i_1 + z_4 i_3 \\ V_2 = (z_3 + z_4) i_3 \\ i_1 = i_2 \quad \text{et} \quad i_3 = i_4 \end{cases}$$

so l'ampli. est compensé en tension et en courant on a :

$$z_4 \parallel z_3 = z_2 \parallel z_1 \Rightarrow$$

$$\frac{z_4 z_3}{z_4 + z_3} = \frac{z_2 z_1}{z_2 + z_1} \Rightarrow z_4 z_3 z_2 + z_4 z_3 z_1 = z_1 z_2 z_4 + z_2 z_1 z_3$$

$$\text{soit } z_3(z_4 z_1) + z_4(z_3 z_2) = z_3(z_1 z_2) + z_4(z_1 z_2)$$

Après identification on tire une possibilité pour le choix de  $z_1, z_2, z_3, z_4$

$$z_4 z_1 = z_1 z_2 = z_3 z_2 \Rightarrow$$

$$\frac{z_4}{z_3} = \frac{z_2}{z_1} \quad (\text{II})$$

Du système (I) on tire

$$v_s = - \frac{z_2}{z_1} v_1 + \frac{z_4}{z_3 + z_4} \cdot \frac{z_1 + z_2}{z_1} v_2$$

$$\text{tenant compte de II on obtient : } \frac{z_4}{z_3} + 1 = \frac{z_2}{z_1} + 1 \Rightarrow \frac{z_2 + z_1}{z_4 + z_3} = \frac{z_1}{z_3}$$

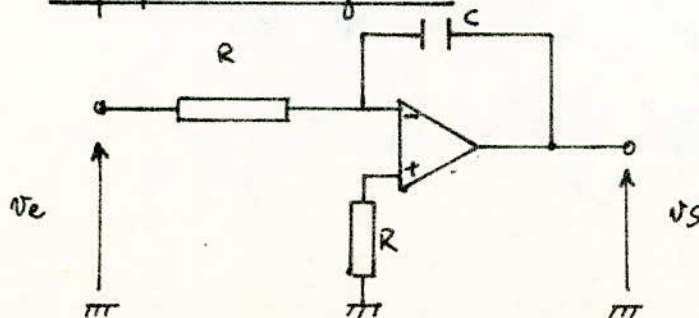
$$\text{d'où } v_s = - \frac{z_2}{z_1} v_1 + \frac{z_4}{z_1} \cdot \frac{z_1}{z_3} v_2$$

$$= - \frac{z_2}{z_1} v_1 + \frac{z_4}{z_1} v_2 = - \frac{z_2}{z_1} (v_2 - v_1)$$

$$v_s = - \frac{z_2}{z_1} (v_2 - v_1)$$

$$\text{si on choisit } z_1 = z_2 \quad v_s = -(v_2 - v_1)$$

#### 4-2. Amplificateur intégrateur



On suppose que l'amplificateur possède un gain infini et une impédance d'entrée infinie.

$$\frac{v_e}{R} = - \frac{C dv_s}{dt} \Rightarrow v_s = - \frac{1}{RC} \int_0^t v_e dt$$

La tension de sortie est égale à l'intégrale de la tension d'entrée

