UNIVERSITE DES SCIENCES
ET
TECHNOLOGIQUES D'ALGER

DEPARTEMENT ELECTRICITE

FILIERE D'INGENIEURS EN ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

Effets de Feed-Back par la Methode des Variables d'Etat

Proposé par :

Mr M. KEBIR
Professeur à l'E.N.P.A.

Etudié par :

Mr. YAHMEDI Said
Mr. KHEMAISSIA Seddik

Promotion Janvier 1979

A la memoire de mon pere

A mes amis d'enfance

Yahmedi - Saïd

A mon pere et ma mere
qui m'ont tout donné

Khémaissia Saddik

Remerciements

Nous désirons remercier tous ceux qui nous ont aidés, directement ou indirectement, dans la préparation de notre projet.

Notre reconnaissance s'adresse plus particulièrement à Monsieur Kébir- pour le choix du sujet et les conseils qu'il n'apas hésité à nous donner pour l'élaboration de ce modeste travail.

Khémaissia - Yahmedi

- PLAN -

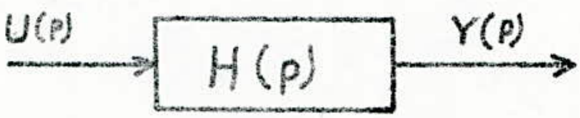
Introduction

Etudier un système, c'est faire son analyse et sa synthèse.
les procédés utilisés pour cette étude sont :
— la méthode classique des fonctions de transfert qui sert à définir le rapport entre la grandeur de sortie et celle de l'entrée du système donc c'est une théorie exterieure car elle ne nous renseigne pas sur ce qui se passe à l'intérieur du système.
Cette méthode est commode pour l'étude des systèmes linéaires et invariants, mais elle s'adapte mal à l'étude des systèmes linéaires variants et des systèmes non linéaires.
— Pour remedier à ces inconvénients, on a fait appel à une nouvelle methode qui utilise la théorie des variables d'état.
Cette méthode généralise la méthode traditionnelle des variables de phase et permet l'étude intérieure des systèmes (sensibilité, stabilité, contrôle, optimalité...)
la methode des variables d'état a l'avantage d'être programmable donc la résolution des problèmes qui concerne l'analyse et la synthèse est rapide par l'emploi des ordinateurs.
La méthode des variables d'état dont l'emploi est né avec l'abord des systèmes multidimensionnels est maintenant généralisée.
Une théorie est interessante dans la mesure où l'on perçoit d'une part ses fondements, d'autre part ses applications.
Les trois premiers chapitres éclairent les fondemets, le dernier chapitre les applications.
Notre projet consiste à étudier et dégager les effets de Feed-Back des variables d'état. Nous nous sommes interessés exclusivement aux systèmes linéaires, invariants et continus ; il se termine par une annexe importante.

premier chapitre
rappels sur les fonctions de transfert.

I. Fonction de transfert des systèmes scalaires.

1.1. définition : la fonction de transfert d'un systéme scalaire, linéaire et invariant est le rapport de la transformée de la réponse du système par la transformée du signal d'entrée corréspondant.
les conditions initiales étants nulles ou le système est initialement au repos.



$$Y(p) = H(p).U(p) \Longrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

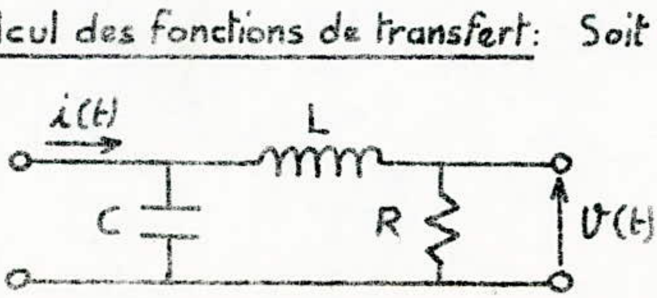
où : $U(p)$: est la transformée de Laplace de la grandeur d'entrée $u(t)$. $\quad U(p) = \mathcal{L}\{u(t)\}$

$Y(p)$: est la transformée de Laplace de la grandeur de sortie $y(t)$. $\quad Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

$H(p)$: est la transformée de Laplace de la fonction de trans-fert d'un système dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$

$$H(p) = \quad H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

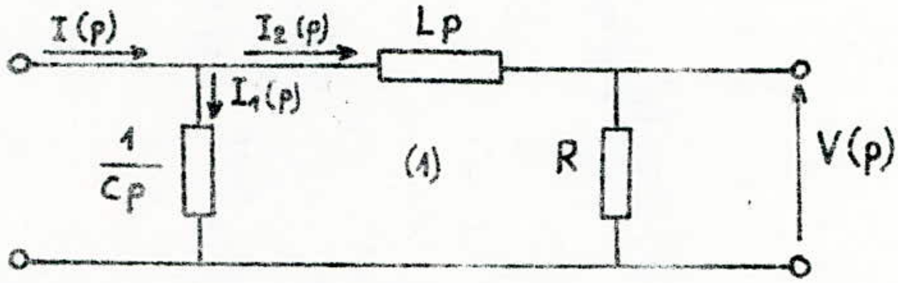
1.2. Calcul des fonctions de transfert : Soit le circuit suivant



la grandeur d'entrée est $i(t)$ dont la transformée de Laplace est $I(p)$
$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(p)$.

la grandeur de sortie est $u(t)$ dont la transformée de Laplace est $U(p)$
$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(p)$.

le schema symbolique du circuit précédent est



$$I(p) = I_1(p) + I_2(p)$$

dans la maille (1) on a : $\dfrac{I_1(p)}{Cp} = I_2(p)\,[Lp + R]$

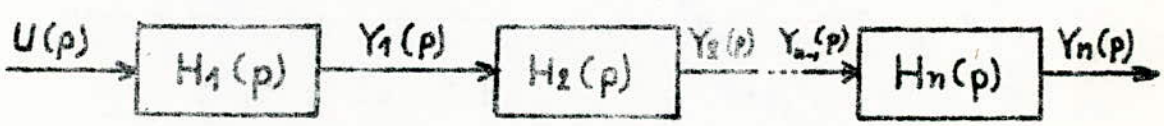
or $V(p) = R\,I_2(p) \Longrightarrow I_2(p) = \dfrac{V(p)}{R}$

d'où $I_1(p) = Cp\,[R + Lp]\,I_2(p) = Cp\,[R + Lp]\,\dfrac{V(p)}{R}$

et $I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \dfrac{V(p)}{R}\left[1 + RCp + LCp^2\right]$

alors $\boxed{H(p) = \dfrac{V(p)}{I(p)} = \dfrac{R}{1 + RCp + LCp^2}}$

1-3- <u>Fonction de transfert de systèmes scalaires associés en chaine.</u>



en appliquant la définition de la fonction de transfert à chaque étage.

$Y_1(p) = H_1(p) \cdot U(p)$

$Y_2(p) = H_2(p) \cdot Y_1(p) = H_2(p) \cdot H_1(p) \cdot U(p)$

$\vdots$

$Y_n(p) = H_n(p) \cdot Y_{n-1}(p)$

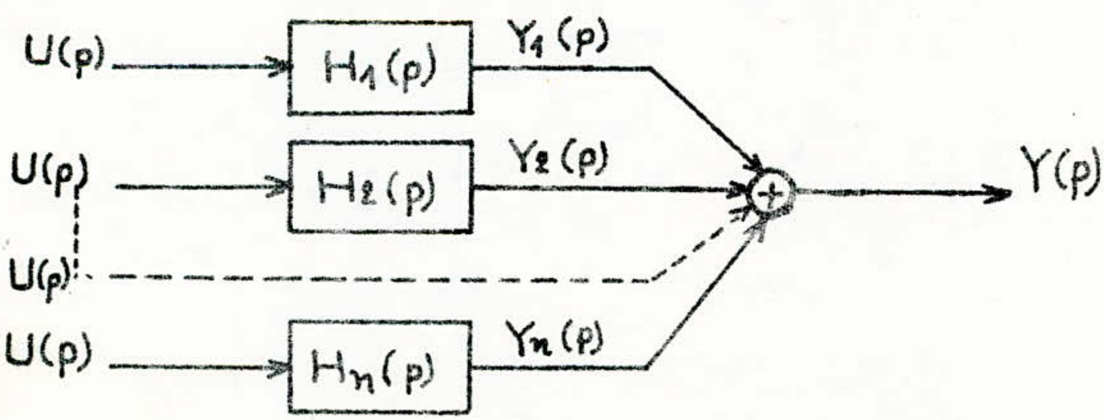
d'où : $Y_n(p) = \left[H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot \ldots \ldots H_n(p) \right] U_2(p)$

d'une façon générale :

$$\boxed{H(p) = \prod_{i=1}^{n} H_i(p)}$$

donc la fonction de transfert d'une chaine de systèmes scalaires, linéaires et invariants est égale au produit des fonctions de transfert des systèmes associés.

1-4. Fonction de transfert de systèmes scalaires associés en parallèle.



on a $Y_1(p) = H_1(p) \cdot U(p)$

$Y_2(p) = H_2(p) \cdot U(p)$

$\vdots$

$Y_n(p) = H_n(p) \cdot U(p)$

d'où $$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) + \cdots\cdots + Y_n(p) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(p)$$

ou $$Y(p) = H_1(p).U(p) + H_2(p).U(p) + \cdots\cdots + H_n(p).U(p)$$

d'une façon générale :

$$\boxed{H(p) = \sum_{i=1}^{n} H_i(p)}$$

donc la fonction de transfert d'une association en parallèle de systèmes scalaires, linéaires et invariants est égale à la somme des fonctions de transfert individuelles.

II _ Fonctions de transfert des systèmes multivariables

2.1. Matrice de transfert. Comme un système multivariable possède $(m \times n)$ réponses impulsionnelles, il possède nécessairement un nombre égal de fonctions de transfert qui sont reparties de la manière suivante :

2.1.1. pour une sortie de rang i à laquelle m réponses impulsionnelles $h_{ij}(t)$ sont associées $(j = 1, 2, \ldots, m)$, on doit donc prévoir m fonctions de transfert $H_{ij}(p)$.

$$H_{i1}(p) = \mathcal{L}\{h_{i1}(t)\}$$
$$H_{i2}(p) = \mathcal{L}\{h_{i2}(t)\}$$
$$\vdots$$
$$H_{im}(p) = \mathcal{L}\{h_{im}(t)\}$$

2.1.2. pour i allant de 1 à n nous aurons n combinaisons de fonctions de transfert analogues aux précédentes d'où : $i=1 \Rightarrow \quad H_{11}(p)\ ;\ H_{12}(p)\ ;\ \ldots\ldots ;\ H_{1m}(p)$

$i=2 \Rightarrow \quad H_{21}(p)\ ;\ H_{22}(p)\ ;\ \ldots\ldots ;\ H_{2m}(p)$

$i=n \Rightarrow \quad H_{n1}(p)\ ;\ H_{n2}(p)\ ;\ \ldots\ldots ;\ H_{nm}(p)$

les $(m \times n)$ fonctions de transfert constituent les éléments d'une matrice appelée : matrice de transfert formée de n lignes et m colonnes.

$$H(p) = \begin{bmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) & \ldots\ldots & H_{1m}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) & \ldots\ldots & H_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{n1}(p) & H_{n2}(p) & \ldots\ldots & H_{nm}(p) \end{bmatrix}$$

la matrice de transfert est donc lieé à la matrice des réponses impulsionnelles $[h(t)]$ par la relation: $[H(p)] = \mathcal{L}\{[h(t)]\}$
on constate que cette relation généralise celle des systèmes scalaires

2.2. Propriété de la matrice de transfert

2.2.1. on sait que la réponse de rang i d'un système multivariable, linéaire, invariant est donnée par la relation.

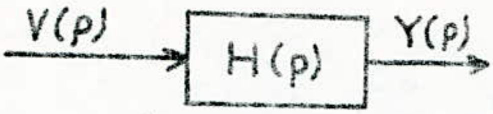
$$Y_i(p) = H_{i1}(p).U_1(p) + H_{i2}(p).U_2(p) + \cdots + H_{1m}(p).U_m(p)$$

2.2.2. lorsque i varie de 1 à n on aura des relations analogues

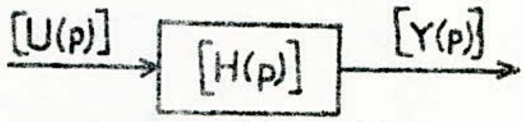
$$Y_1(p) = H_{11}(p).U_1(p) + H_{12}(p).U_2(p) + \cdots + H_{1m}(p).U_m(p)$$
$$Y_2(p) = H_{21}(p).U_1(p) + H_{22}(p).U_2(p) + \cdots + H_{2m}(p).U_m(p)$$
$$\vdots$$
$$Y_n(p) = H_{n1}(p).U_1(p) + H_{n2}(p).U_2(p) + \cdots + H_{nm}(p).U_m(p)$$

d'où $$[Y(p)] = [H(p)] \cdot [U(p)]$$

cette relation généralise celle des systèmes scalaires.

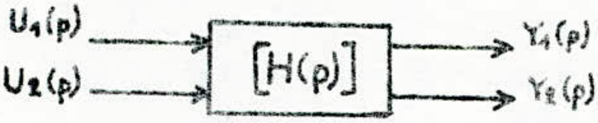


système scalaire



système multivariable.

2.3. Exemple Soit un système à deux entrées et deux sorties représenté par le schéma symbolique



le système est supposé initialement au repos et décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 + y_2 = \dot{u}_1 + u_2 \\ \dot{y}_2 + y_1 = 2u_2 - u_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} pY_1(p) + Y_2(p) = pU_1(p) + U_2(p) \\ Y_1(p) + pY_2(p) = -U_1(p) + 2U_2(p) \end{cases}$$

aprés résolution du système d'équations en $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$, on trouve

$$\begin{cases} Y_1(p) = \dfrac{p^2+1}{p^2-1} U_1(p) + \dfrac{p-2}{p^2-1} U_2(p) \\ Y_2(p) = \dfrac{-2p}{p^2-1} U_1(p) + \dfrac{2p-1}{p^2-1} U_2(p) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{p^2+1}{p^2-1} & \dfrac{p-2}{p^2-1} \\ \dfrac{-2p}{p^2-1} & \dfrac{2p-1}{p^2-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix}$$

on a : $$[Y(p)] = [H(p)]\,[U(p)]$$

avec :

$$[Y(p)] = \begin{bmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{bmatrix} \; ; \; [U(p)] = \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix} \; ; \; [H(p)] = \begin{bmatrix} \frac{p^2+1}{p^2-1} & \frac{p-2}{p^2-1} \\ \frac{-2p}{p^2-1} & \frac{2p-1}{p^2-1} \end{bmatrix}$$

III - Pôles et zéros des fonctions de transfert

nous savons que nous pouvons toujours ramener une fonction de transfert d'un système à la forme suivante.

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \cdots\cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots\cdots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

3-1. Par définition les racines du dénominateur $D(p)$ sont les pôles de la fonction de transfert. Soient $p_1 ; p_2 ; \cdots ; p_n$ les racines de $D(p) = 0$, alors :

$$\boxed{D(p) = (p-p_1)(p-p_2)\cdots\cdots(p-p_n)\cdot a_n}$$

3-2. Par définition les racines du numérateur $N(p)$ sont les zéros de la fonction de transfert. Soient $z_1 ; z_2 ; \cdots ; z_m$ les racines de $N(p) = 0$ alors

$$\boxed{N(p) = (p-z_1)(p-z_2)\cdots\cdots(p-z_m)\cdot b_m}$$

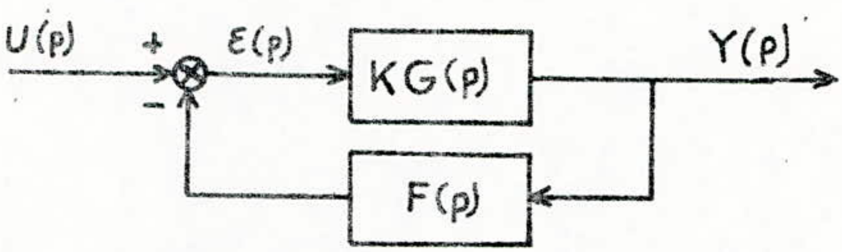
3-3. compte-tenu de ces deux définitions la fonction de transfert sera :

$$\boxed{H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = k\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(p-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(p-p_j)}} \qquad \text{avec } k = \frac{b_m}{a_n}$$

IV. Systèmes à retour ou systèmes bouclés.

4.1. Généralités

Généralement la relation entre l'entrée et la sortie est modifiée par des entrées secondaires (perturbations) qui sont toujours présentent, lorsqu'on affiche certaines valeurs de la commande, on n'est pas sûre en pratique que la sortie aura la valeur désirée. Pour remedier à cet inconvénient on boucle le système de manière à ramener la grandeur en surplus de ce que l'on désire.



$U(p)$: est la transformée de Laplace de la grandeur d'entrée $u(t)$

$Y(p)$: est la transformée de Laplace de la grandeur de sortie $y(t)$

$KG(p)$: est la fonction de transfert de la chaine directe

$F(p)$: est la fonction de transfert de la chaine de retour

$\varepsilon(p)$: est l'écart entre la grandeur d'entrée et la grandeur ramenée.
plus l'écart est minimum plus le système est bon.

4.2. Calcul de la fonction de transfert du système bouclé.

D'aprés le schéma ci-dessus la fonction de transfert est:

on a : $\begin{cases} Y(p) = K\,G(p)\,.\,\varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) = U(p) - Y(p).\,F(p) \end{cases} \Longrightarrow Y(p) = K\,G(p)\,.\,U(p)$

d'où :

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{KG(p)}{1 + KG(p).F(p)}}$$

V - Stabilité.

5-1- Notion de stabilité.

on dit qu'un système est stable quand il tend à revenir à son état initial aprés une perturbation. Il est instable quand il tend à s'en éloigner davantage.

Parmi les méthodes d'étude de la stabilité d'un système, nous allons citer deux méthodes: la méthode des pôles et la méthode du diagramme de Bôde.

5-2- Etude de la stabilité par la méthode des pôles

D'aprés le chapitre -III- nous avons ramené la fonction de transfert sous la forme:

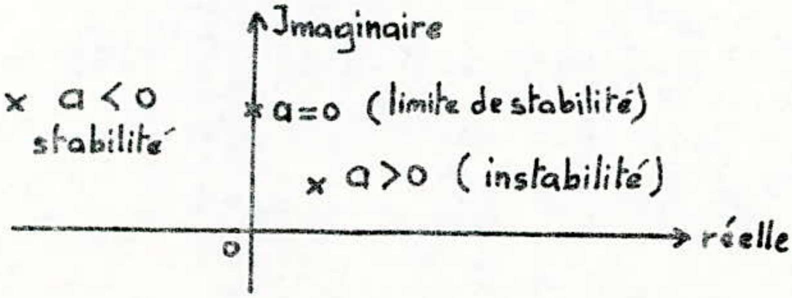
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = k \; \frac{\prod_{i=1}^{m} (p - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (p - p_j)}$$

Pour qu'un système soit stable il faut qu'on ait: $\prod_{j=1}^{n} (p - p_j) = 0$ admet des racines à partie reélle négative.

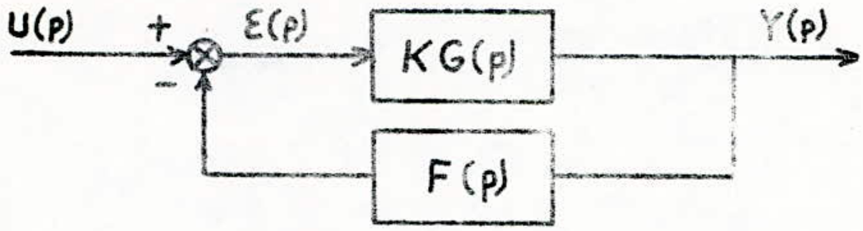
Si la partie réelle est nulle on est à la limite de la stabilité.

$$p - p_j = 0 \implies p = p_j = a + jb$$

$a > 0$	le système est instable
$a = 0$	limite de stabilité
$a < 0$	le système est stable.



5-3. <u>Etude de la stabilité par le diagramme de Bôde</u>. on a le système.



Pour étudier la stabilité de ce système par cette méthode, on doit étudier la fonction de transfert en boucle ouverte. La fonction de transfert de ce système en boucle ouverte est: $H_o(p) = KG(p).F(p)$

on tracera le diagramme de Bôde en amplitude et en phase.

Pour que le système soit stable, il faut que pour la fréquence $\omega_{(-\pi)}$ pour laquelle le déphasage est $(-\pi)$, le module de $H_o(p)$ en décibels soit né-gatif c'est-à-dire

$$20 \operatorname{Log} |H_o(p)| < 0$$

deuxième chapitre
théorie des variables d'état

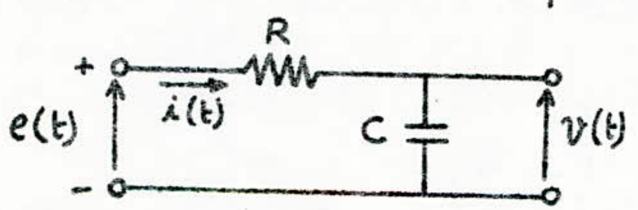
I. Notion d'état :

la théorie moderne des systèmes repose sur la notion d'état, on va montrer qu'il est indispen-sable d'attribuer un état à tout système.

1.1. Attribution d'un état à un système.

L'attribution d'un état à un sys-tème est intuitive. Considérons par exemple scalaire dont on lui appli-que un signal d'entrée $u(t)$. Ce signal nous donne une reponse $y(t)$
Le signal d'entrée et la réponse de sortie seront liés par une relation $y = f(u)$. Nous savons que la connaissance de cette relation et du signal d'entrée ne nous permet pas de déterminer complètement la réponse du système, on aura bésoin des conditions initiales afin de déterminer les constantes d'intégration de la réponse.

Exemple. Soit le circuit électrique suivant:



posons: $\begin{cases} v(t) = y(t) \\ e(t) = u(t) \end{cases}$

$$e(t) = R.\,i(t) + \frac{1}{c}\int i(t)\,dt \Longrightarrow \boxed{y + \dot{y} = u} \quad \text{si: } RC = 1$$

Résolvons cette équation. La solution de l'équation sans 2° membre est:

$$y + \dot{y} = 0 \Longrightarrow \frac{\dot{y}}{y} = -1 \Rightarrow \ln y = -t + \ln k \Rightarrow y = k e^{-t}$$

la solution générale par la variation de la constante est de la forme:

$$y = c\,e^{-t} \Longrightarrow c e^{-t} - c e^{-t} + \dot{c}\,e^{-t} = u \Longrightarrow C' = u e^{t}$$

Si on avait $e(t) = u(t) = e^{-t}$ on aura $\dot{c} = 1 \Rightarrow c = t + a$
et $y(t) = t e^{-t} + a e^{-t} = (t + a) e^{-t}$

on constate que pour déterminer complètement $y(t)$ il nous faut une donnée supplémentaire pour la détermination de - a.

prenons $y(0)=1$ on aura $a=1$ et la réponse : $y_1(t)=e^{-t}+t.e^{-t}$

si $y(0)=4$ on aura $a=4$ et la réponse : $y_2(t)=4e^{-t}+te^{-t}$

Par conséquent, ce système bien que sollicité par le même signal $e(t)=e^{-t}$ fournit autant de réponses que $y(0)$ peut prendre de valeurs. Donc la détermination définitive de l'une de ces réponses exige la connaissance de :

- l'équation qui décrit le système
- Signal qui le sollicite
- la valeur initiale de sa réponse. Cette dernière donnée définit l'état initial du système.

Un système décrit par une équation différentielle d'ordre -1- possède un état initial défini dans un espace à une dimension

1.2. état initial d'un système.

Soit un système scalaire régit par l'équation differentielle :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 \, u(t)$$

où les coefficients a_n et b_0 sont constants.

Il est évident que la solution de l'équation sans second membre ait n constantes $C_1 ; C_2 ; \dots ; C_n$. La solution particulière ne contient pas de constantes donc la solution générale contiendra n constantes. Pour les déterminer on doit avoir n conditions initiales. Choisissons les valeurs initiales de $y(t)$ et de ses $(n-1)$ dérivées : $y(0) ; \dot{y}(0) ; \dots ; y^{(n-1)}(0)$

Remarquons que si ces données sont modifiées sans que le signal d'entrée $u(t)$ le soit, les n constantes seront modifiées d'où la modification de la réponse $y(t)$.

les n nombres algébriques $y(0)$; $\dot{y}(0)$; ... ; $y^{(n-1)}(0)$ sont donc caractéristi-
-ques du système à l'instant $t=0$, on dit qu'ils définissent son état initial
on peut alors le représenter par un vecteur qu'on appellera vecteur d'état
initial du système et qui aura la forme suivante

$$\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \quad \text{si } t_0 \neq 0 \text{ on aura : } \vec{X}(t_0) = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}$$

1.3. Etat d'un système à un instant donné

d'une façon générale, on peut formuler le vecteur d'état à un instant quelconque - t - par :

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

– cette représentation est dite vecteur de phase, car l'état est exprimé en fonc-
-tion de la reponse et ses dérivées.

on posons :

$$\begin{cases} y(t) = x_1(t) \\ \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) = x_n(t) \end{cases} \Longrightarrow \vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

on constate que la notion d'état implique que le vecteur d'état est fonction du temps. Ce vecteur évolue à partir de sa valeur initiale, cette progres-
-sion n'est dûe qu'à l'action du signal appliqué au système. Donc le signal d'entreé possède deux propriétés :

– Il commande la réponse du système
– Il commande l'évolution de leur état.

1-4. Postulat de la théorie des états.

La détermination à chaque inst-ant de l'état d'un système et de sa réponse nous met devant double problème. Pour remédier à ces problèmes et trouver la solution, un certain nombre de données est necessaire. Ces données sont fournies par le postulat suivant :
Postulat fondamental : L'état et la réponse d'un système peuvent être déterminés à tout instant - t - à condition de connaitre.

a). l'équation qui le décrit.

b). l'état dans lequel il se trouve à un instant donné - t_0 -

c). le signal qui lui est appliqué de l'instant - t_0 - à l'instant - t -

1-5. Formules fondamentales.

1-5-1. Vécteur d'entrée ; vécteur de sortie

$u_1(t)$; $u_2(t)$; ... ; $u_m(t)$ étant des signaux appliquées à l'entrée d'un sys-tème et peuvent donc être considérés comme les composantes d'un vecteur que l'on appellera vecteur d'entrée $U(t)$.
De même si $y_1(t)$; $y_2(t)$; ..., $y_n(t)$ sont les réponses du systéme, le vecteur de sortie sera $Y(t)$.
d'où :

vécteur d'entrée $= \vec{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ et vécteur de sortie $= \vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$

1-5-2. expression du vécteur d'état d'un systeme.

Du postulat fondamental de la théorie des états on en déduit que le vécteur d'état aura la forme :

$$\vec{X}(t) = \vec{F}\{\vec{X}(t_0) ; \vec{U}(t_0,t) ; t\}$$

dont les composantes seront :

$$x_i = F_i\{\vec{X}(t_0) ; \vec{U}(t_0,t) ; t\} \quad i = 1,2,\dots,n$$

1.5.3. expression du vecteur de sortie d'un système

De la même manière que précédemment et à partir du postulat fonda-mental, le vecteur de sortie aura la forme :

$$\vec{Y}(t) = \vec{G}\{\vec{X}(t_0); \vec{U}(t_0,t); t\}$$

dont les composantes seront :

$$y_j = G_j\{\vec{X}(t_0); \vec{U}(t_0,t); t\}$$

II. Vécteur d'état

la théorie moderne des systèmes est basée sur le rôle important que joue le vecteur d'état, la connaissance de ce véc-teur est indispensable pour la détermination de la réponse, l'étude de sa stabilité, l'amélioration de ses pérformances; ....etc.

Les composantes de ce vecteur sont appelées variables d'état et sa détérmination est dûe aux équations d'état.

2.1. Variables d'état

L'étude de l'analyse et de la synthèse des sys-tèmes imposent le choix de variables d'état.

La méthode des états est caractérisée par une grande souplesse c'est-à-dire que le choix des variables d'état n'est pas limitatif.

2.1.1. Variables de phase

les variables de phase sont constituées par une fonction et ses dérivées successives. le vecteur de phase aura pour composantes :

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

les variables de phase ne sont pas toujours observables ou mesurables

2.1.2. les variables « douées de mémoire ».

on appelle variables « douées de mémoire », les variables qui représentent l'état des composants d'un système qui sont capables d'emmagasiner de l'énergie.

Exemple : – L'énergie emmagasinée par une self est : $W_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{L}$

– L'énergie emmagasinée par une capacité est : $W_C = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

Remarquons que la réponse d'un système est indépendante du choix de ses variables d'état.

2-2- Equations d'état.

2-2-1- définition de l'équation d'état.

la valeur initiale $X(t_0)$ du vecteur représentatif $X(t)$ de cet état et du signal d'entrée $U(t)$ doit nous déterminer l'état du système. Parmi les méthodes qui nous permettent d'obtenir ce resultat, la plus simple consiste à former et à resoudre un système d'équations differentielles d'ordre-un- de forme générale.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n ; u_1, u_2, \dots, u_m ; t) \quad ; x_1(0) \text{ connu}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n ; u_1, u_2, \dots, u_m ; t) \quad ; x_2(0) \text{ connu}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n ; u_1, u_2, \dots, u_m ; t) \quad ; x_n(0) \text{ connu}$$

ou bien : $\dot{x}_i = f_i(X ; U ; t)$ avec : $i = 1, 2, \dots, n$; $x_i(0)$ connu

soit encore :

$$\boxed{\vec{\dot{X}}(t) = \vec{F}\left[\vec{X}(t) ; \vec{U}(t) ; t\right] ; \vec{X}(t_0) \text{ connu.}}$$

la relation précédente est appelée : EQUATION D'ETAT.
son traitement par les machines a été facilité grâce au choix de sa forme qui est une équation differentielle vectorielle d'ordre l'unité.

2.2.2. Formulation des équations d'état

comme les systèmes auxquels nous nous interressons sont linéaires, ils doivent alors vérifier le principe de supperposition qui est le suivant :

si $y_1(t)$; $y_2(t)$; ......; $y_n(t)$ sont les réponses d'un système aux signaux d'entrée $u_1(t)$; $u_2(t)$; ..., $u_m(t)$ agissant séparément, la réponse de ce système à toute combinaison linéaire de ces signaux d'entrée $\sum_i a_i u_i(t)$ est la même que la combinaison linéaire des signaux de sortie $\sum_i a_i y_i(t)$

De ce fait on peut les représenter par les équations générales :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{X}}(t) &= A(t).\vec{X}(t) + B(t).\vec{U}(t) \\ \vec{Y}(t) &= C(t).\vec{X}(t) + D(t).\vec{U}(t) \end{aligned}}$$

où A, B, C, D sont des matrices de dimensions respectives $(m \times n)$; $(n \times e)$; $(s \times n)$; $(s \times e)$.

- si le système est invariant dans le temps (stationnaire), les quatres matrices sont constantes c'est-à-dire indépendantes du temps.

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{X}}(t) &= A\vec{X}(t) + B\vec{U}(t) \\ \vec{Y}(t) &= C\vec{X}(t) + D\vec{U}(t) \end{aligned}}$$

- Si le système est autonome c'est-à-dire abondonnée à lui-même sans commande ($\vec{U} = \vec{O}_{s,1}$) , les équations deviennent :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{X}} &= \vec{F}[\vec{X}(t), t] \\ \vec{Y} &= \vec{G}[\vec{X}(t), t] \end{aligned}}$$

- si de plus, il est linéaire :

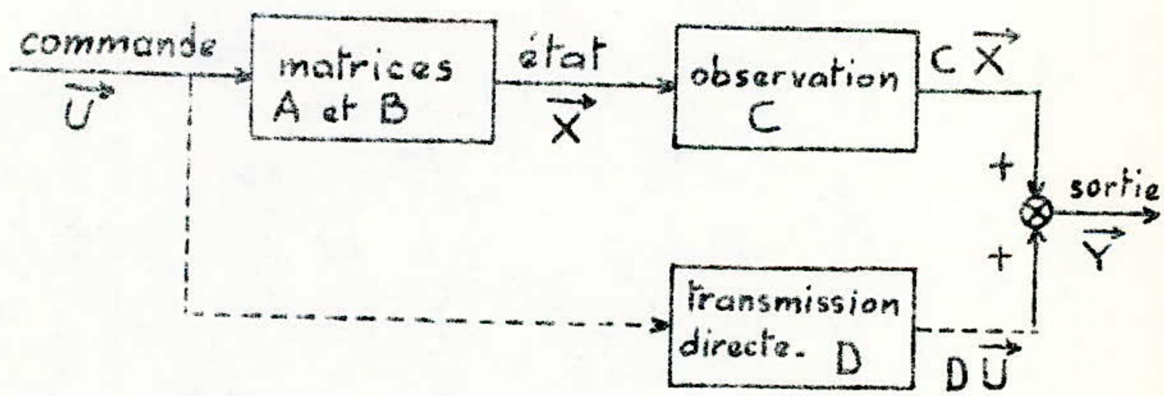
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{X}} &= A(t) . \vec{X}(t) \\ \vec{Y} &= C(t) . \vec{X}(t) \end{aligned}}$$

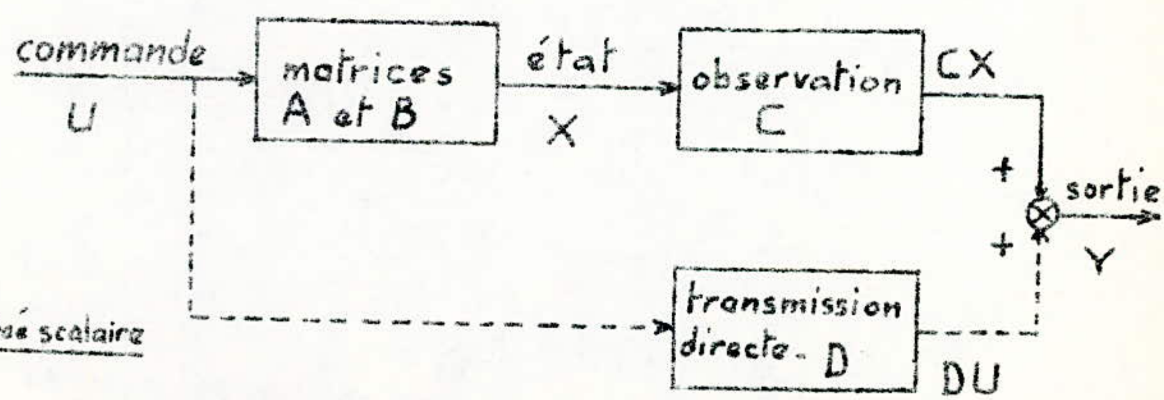
A : matrice d'évolution

B : matrice d'application de la commande

C : matrice d'observation

D : matrice de transmission directe.





entrée scalaire

2.2.3. Matrice de transfert

à partir de la transformation de Laplace aux équations d'état et d'observation, on peut déterminer la matrice de transfert

$$\begin{cases} \dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t) + B\vec{U}(t) \\ \vec{Y}(t) = C\vec{X}(t) + D\vec{U}(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p\vec{X}(p) - \vec{X}_0 = A\vec{X}(p) + B\vec{U}(p) \\ \vec{Y}(p) = C\vec{X}(p) + D\vec{U}(p) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \vec{X}(p) = [pI_n - A]^{-1}\vec{X}_0 + [pI_n - A]^{-1} B\vec{U}(p) \\ \vec{Y}(p) = C[pI_n - A]^{-1}\vec{X}_0 + C[pI_n - A]^{-1} B\vec{U}(p) + D\vec{U}(p) \end{cases}$$

supposons que les conditions initiales sont nulles.

d'où :

$$\begin{cases} \vec{X}(p) = [pI_n - A]^{-1} B\vec{U}(p) \\ \vec{Y}(p) = C[pI_n - A]^{-1} B\vec{U}(p) + D\vec{U}(p) \end{cases}$$

la matrice de transfert est la généralisation de la fonction de trans-fert $H = \frac{Y}{U}$ d'un système monovariable. les dimensions (s, e) de la matrice de transfert sont celles du système

$$\boxed{Z(p) = C[pI_n - A]^{-1} B + D}$$

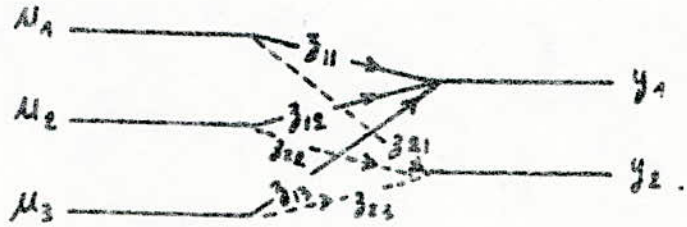
les éléments de la matrice de transfert sont des fonctions de transfert entre une composante de l'entrée et une composante de sortie

$$z_{ij} = \frac{y_i}{u_j}(p)$$

d'où :

$$Z(p) = \begin{bmatrix} z_{11}(p) & \cdots & z_{1j}(p) & \cdots & z_{1l}(p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{i1}(p) & \cdots & z_{ij}(p) & \cdots & z_{il}(p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{s1}(p) & \cdots & z_{sj}(p) & \cdots & z_{sl}(p) \end{bmatrix}$$

Pour un système à 3 entrées et 2 sorties on aura le graphe.



<u>Remarque</u> : Il n'y a pas toujours équivalence entre la représentation par les équations d'état et par la matrice de transfert, du fait que la matrice de transfert ne décrit qu'une partie d'une système. on dit alors que la représentation d'état n'est pas minimale ; nous verrons que ceci peut se produire lorsque le système n'est pas complètement "gouvernable" ou pas complètement " observable ". La matrice de transfert néglige les parties ingouvernables et les parties inobservables du système et n'en représente que les parties à la fois gouvernables et observables.

2.2.4. <u>Relation avec la matrice de transfert</u>

on sait que la sortie y du système est lié à l'état et à l'entrée par $y = Cx + Du$

cette relation se compose d'un terme libre et d'un terme forcée

$$y_l = C\,e^{A(t-t_0)}.x(t_0) = C\,\Phi(t-t_0).x(t_0)$$

$$y_f = C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau)\,d\tau + D.u(t)$$

ou bien $$y_f = C\int_{t_0}^{t} H(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau + D\,u(t)$$

dont les transformées de Laplace sont données par :

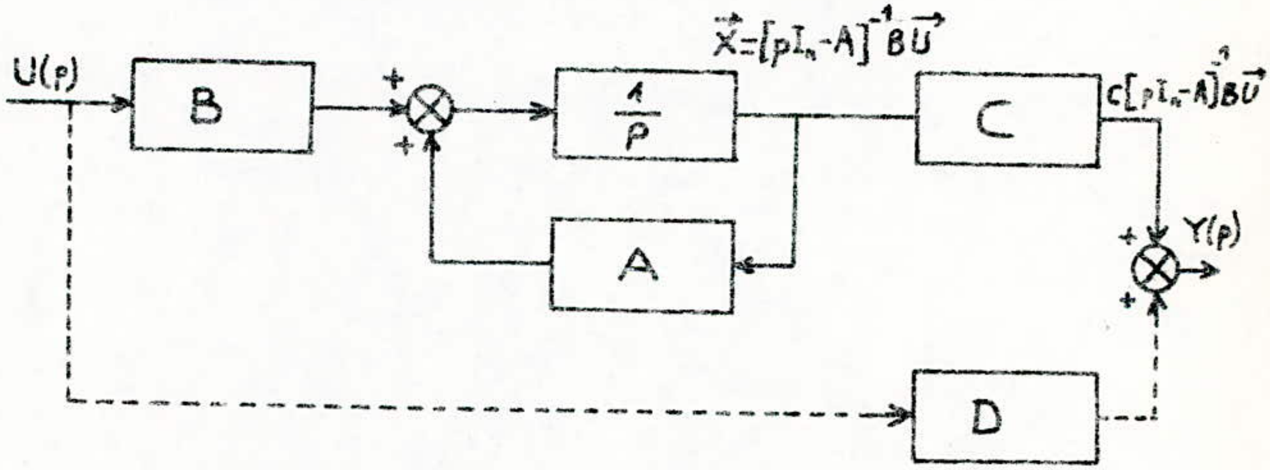
$$Y(p) = C\left[pI_n - A\right]^{-1}X_0 + C\left[pI_n - A\right]^{-1}BU(p) + DU(p)$$

si $X_0 = 0$ on aura :

$$Y(p) = C\left[pI_n - A\right]^{-1}BU(p) + DU(p)$$

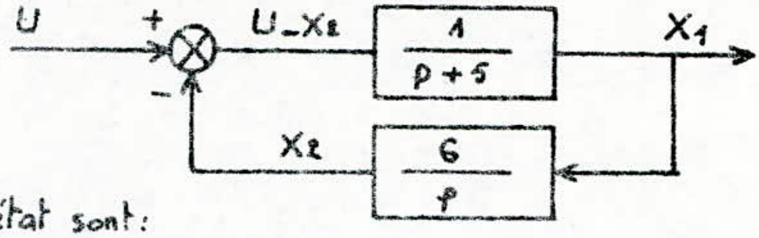
la figure suivante détaille la figure précédente, le rôle des différentes matrices est bien spécifié d'où leurs appellations réspectives (A, B, C, D)
la matrice de transfert est :

$$\boxed{Z(p) = C\left[pI_n - A\right]^{-1}.B + D}$$



la matrice de transmission directe **D** est souvent nulle, on dit alors que la matrice de transfert constitue une representation propre.
c'est le même cas lorsqu'aux fonctions de transfert du systeme $z_{ij} = \frac{y_i}{u_j}$ le degré du dénominateur est superieur à celui du numérateur.

2.2.5. <u>Exemple</u> soit le système à retour suivant :



ses équations d'état sont :

$\dot{X}_1 + 5X_1 = U - X_2$

$\dot{X}_2 = 6X_1$

ou sous forme matricielle:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

2.2.5.1. <u>Réponse libre</u>: la matrice de transition e^{At} de l'instant zéro à t aura la forme.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 6e^{-2t} - 6e^{-3t} & 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

la réponse libre du système autonome à partir de l'état initial $[x_{10} \quad x_{20}]^T$ sera :

$$x_{l1}(t) = (-2e^{-2t} + 3e^{-3t})x_{10} + (-e^{-2t} + e^{-3t})x_{20}$$

$$x_{l2}(t) = (6e^{-2t} - 6e^{-3t})x + (3e^{-2t} - 2e^{-3t})x$$

la réponse libre à la sortie est:

$$y_l(t) = x_{l1}(t)$$

2.2.5.2. Réponse forcée à l'entrée. $\mathcal{U}(t)$

en utilisant la transformée de Laplace la fonction de transition sera :

$$[pI_2 - A]^{-1} = \frac{\text{adj.} \begin{bmatrix} p+5 & 1 \\ -6 & p \end{bmatrix}}{\text{dét.} \begin{bmatrix} p+5 & 1 \\ -6 & p \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} p & -1 \\ 6 & p+5 \end{bmatrix}}{p^2+5p+6}$$

la fonction de transfert est :

$$C[pI_2 - A]^{-1} B = [1 \quad 0] \, \frac{\begin{bmatrix} p & -1 \\ 6 & p+5 \end{bmatrix}}{p^2+5p+6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{p}{p^2+5p+6}$$

enfin la réponse forcée à la sortie aura pour transformée

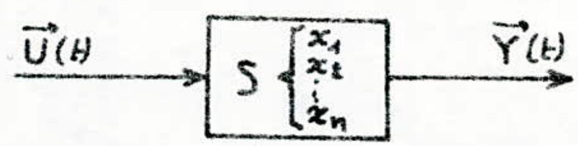
$$\boxed{\vec{Y}_f(p) = \frac{p}{p^2+5p+6} \, \vec{U}(p)}$$

2.3 - Réalisation des équations differentielles

les équations d'état ne sont pas toujours données sous une forme standard. les équations d'état standard nous sont indispensables, c'est pourquoi nous devons apprendre à convertir les équations differentielles en équations d'état standard cette conversion est appelée réalisation.

2.3.1. réalisation des équations differentielles :- Premier cas -

soit le système :



on a : $$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0\, u(t)$$

et un système scalaire et invariant. Prenons les variables de phase comme variables d'état :

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Puisque l'équation differentielle est linéaire, alors l'équation d'état qui lui sera associeé sera :

$$\vec{\dot{X}} = A\vec{X} + B\vec{U}$$
$$\vec{Y} = C\vec{X} + D\vec{U}$$

qui est une forme standard.

avec :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\dot{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

Pour parvenir à une forme standard, il faut dériver les relations $x_i = y^{(i-1)}$ et de remarquer que les $(n-1)$ premières dérivées s'écriront en fonction des variables d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{(n-1)} &= y^{(n-1)} = x_n \end{aligned}$$

et la dérivée d'ordre (n) se déduit de l'équation différentielle.

$$\begin{aligned} \dot{x}_n = y^{(n)} &= b_0\, u - a_{n-1}\, y^{(n-1)} - \cdots\cdots - a_1 \dot{y} - a_0 y \\ &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots\cdots - a_{n-1} x_n + b_0 u \end{aligned}$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 0x_1 + x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n + 0u \\
\dot{x}_2 &= 0x_1 + 0x_2 + x_3 + \cdots + 0x_n + 0u \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= 0 \quad - a_1 x_2 - a_2 x_3 - \cdots - a_{n-1} x_n + b_0 u
\end{aligned}
$$

ou sous forme matricielle :

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \vec{U}
$$

ou bien :

$$\vec{\dot{X}} = A\vec{X} + B\vec{U}$$

de plus : $x_1 = y$ s'écrit : $y = x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n + 0u$

soit encore :

$$
\vec{Y} = [1\ 0\ 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [0\ 0 \cdots 0]\, \vec{U}
$$

ou bien :

$$\vec{Y} = C\vec{X} + D\vec{U}$$

nous avons donc converti l'équation differentielle sous la forme standard.

<u>Intérprétation</u> : on peut retrouver le même resultat à partir de la construction des graphes de fluence.

- on porte sur une même ligne les variables d'état et leurs dérivées premières, en intercalant entre deux variables d'état consécutives la dérivée de celle dont l'indice est le plus faible.
- On relie chaque dérivée avec sa variable d'état correspondante

qui est sa primitive. Chaque liaison symbolise un intégrateur (I) puisque le sens de la liaison se fait de $\dot{x}_j$ vers x_j

$$\dot{x}_j \xrightarrow{I} x_j$$

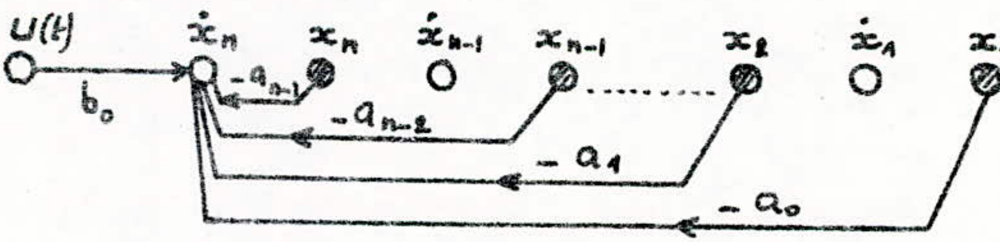
- on relie chaque dérivée $\dot{x}_j$ à la variable d'état x_{j+1} immédiatement à gauche. Le sens de la liaison se fait de x_{j+1} vers $\dot{x}_j$.
le de liaison seront munies d'une transmittance égale à l'unité ce qui symbolise des amplificateurs de gain l'unité.

$$x_{j+1} \xrightarrow{1} \dot{x}_j \qquad x_j$$

$$\dot{x}_j = x_{j+1} \qquad \text{d'où :} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \end{cases}$$

- Nous plaçons à gauche de notre graphe la fonction d'entrée $u(t)$ et nous relions la dérivée $\dot{x}_n$ à toutes les variables d'état $x_1 ; x_2, \dots$ $\dots, x_n$ ainsi qu'à l'entrée $u(t)$.

toutes les branches de liaison sont orientées vers $\dot{x}_n$ et seront munies des transmittances réspectives $-a_0 ; -a_1 ; \dots\dots ; -a_{n-1} ; -a_n$ et b_0 qui symbolisent les $(n+1)$ amplificateurs.

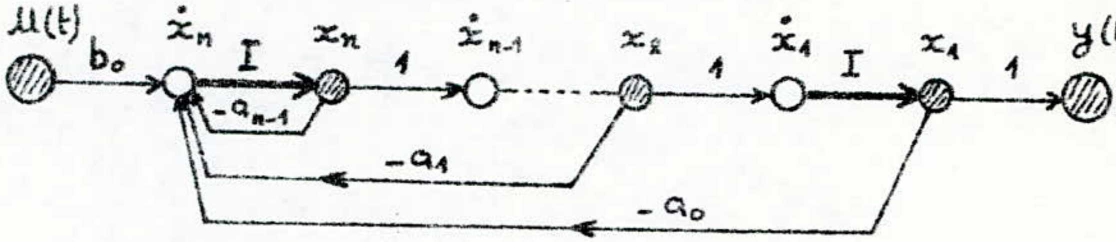


on remarque que ce graphe traduit le relation

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots\dots\dots - a_{n-1} x_n + b_0 u$$

- Nous plaçons à droite de ce graphe la réponse du système $y(t)$ et nous et nous relions $y(t)$ à la variable d'état x_1 par une branche orientée vers $y(t)$ et de transmittance égale à l'unité c'est-à-dire : $y = x_1$

— Nous obtenons alors le graphe complet :



nous avons tracé sans peine le diagramme d'état à partir de l'équation différentielle, on va maintenant déduire les équations d'état associées.

— En voyant le diagramme de la droite vers la gauche on aura :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots\cdots + b_0 u$$

— le signal de sortie est donné par la relation : $y = x_1$

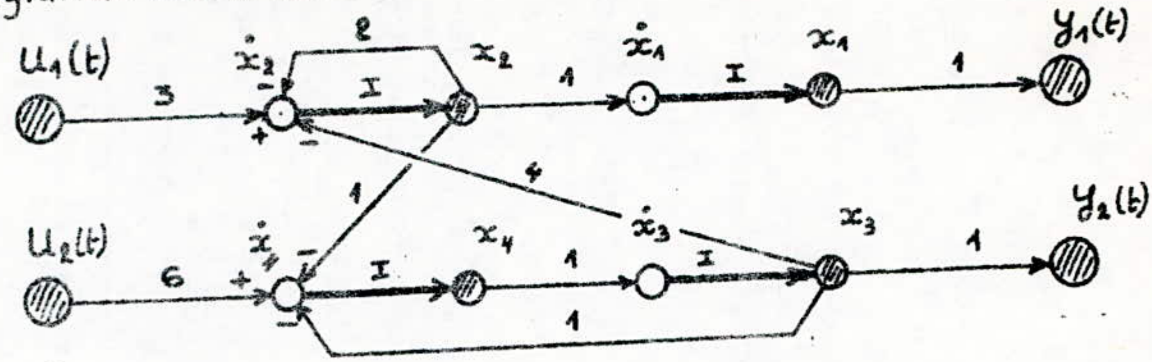
nous remarquons alors que :

- les variables d'état sont les sorties des intégrateurs.
- le nombre des variables d'état est égal à l'ordre de l'équation différentielle.
- toute équation différentielle d'ordre -n- est réalisée par -n- équations d'état scalaires d'ordre -1-

<u>EXEMPLE</u>: soit un système à deux entrées et deux sorties.

$$\ddot{y}_1 + 2\,\dot{y}_1 = 3\,u_1 - 4\,y_2$$
$$\ddot{y}_2 + y_2 = 6\,u_2 - \dot{y}_1$$

la première équation est décrite par deux variables d'état : x_1 ; x_2
la deuxième équation est décrite aussi par deux variables d'état : x_3 ; x_4
le diagramme sera le suivant :



du diagramme on peut déduire les équations d'état du système.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

de la forme : $\quad \vec{\dot{X}} = A\vec{X} + B\vec{U}$

et

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

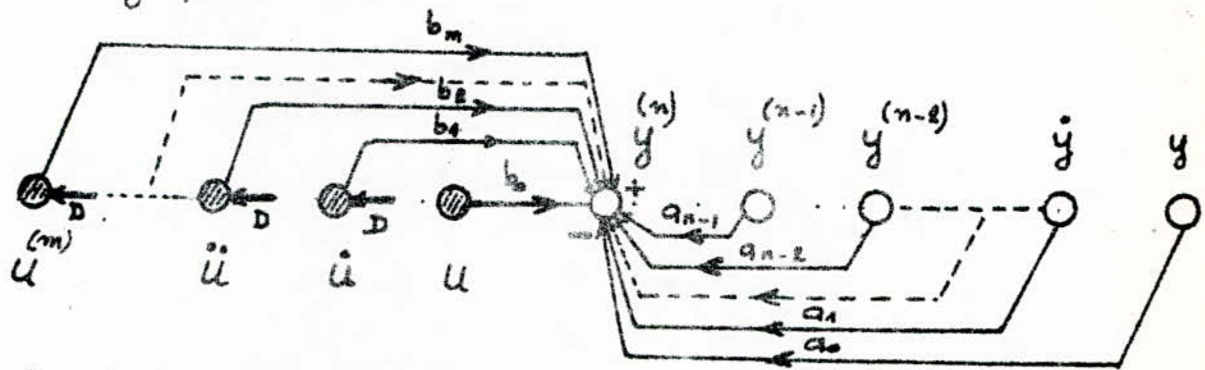
de la forme : $\quad \vec{Y} = C\vec{X} + D\vec{U}$

2.3.2. Réalisation des équations differentielles _ deuxième cas.

soit le système :

$$\overset{(n)}{y} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{y} + a_{n-2}\overset{(n-2)}{y} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m\overset{(m)}{u} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

D'où le graphe de fluence.

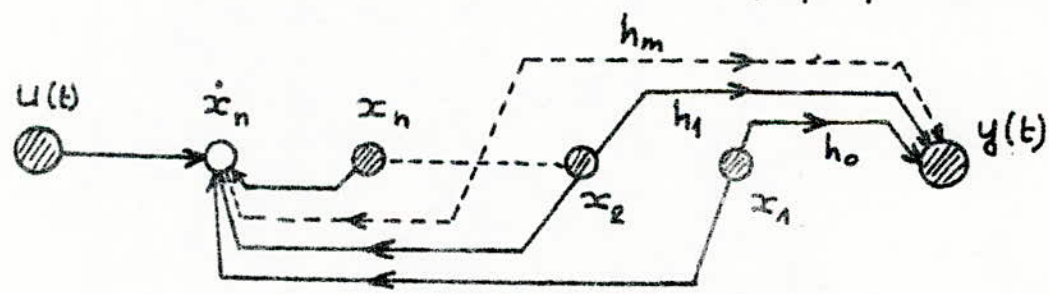


D = désignation de dérivateur.

nous devons éliminer les dérivateurs _ D _ puisqu'ils ne sont jamais utilisés en simulation. Deux cas peuvent se présenter : $m < n$ ou $m \leq n$

2.3.2.1. Premier cas : $m < n$

en modifiant le graphe précédent nous obtenons



choisissons une variable d'état _ x_1 _ qui vérifie une équation differen- _tielle de la même forme que celle du paragraphe précédent qui ne contient aucune dérivée de $u(t)$.

soit :

$$\overset{(n)}{x_1} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{x_1} + \cdots\cdots + a_1\dot{x}_1 + a_0 x_1 = u(t) \qquad (1)$$

Prenons les variables de phase comme variables d'état d'où :

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \dot{x}_1 \\
x_3 &= \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 \\
&\;\vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{x_1} = \dot{x}_{n-1}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

de l'équation (1) on peut déterminer la dérivée de x_n.

$$
\dot{x}_n = \overset{(n)}{x_1} = -a_0 x_1 - a_1 \dot{x}_1 - \ldots - a_{n-1} \overset{(n-1)}{x} + u \qquad (3)
$$

$$
\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n + u
$$

ou sous forme matricielle on aura :

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [U]
$$

soit

$$
\vec{\dot{X}} = A \vec{X} + B \vec{U}
$$

Pour déterminer l'équation de sortie, il faut faire apparaitre les m premières dérivées de $U(t)$ à partir de (1) et les remplacer dans l'équation de départ

La première dérivation donne :

$$
\dot{\overset{(n)}{x_1}} + a_{n-1} \dot{\overset{(n-1)}{x_1}} + \cdots + a_1 \ddot{x}_1 + a_0 \dot{x}_1 = \dot{u}
$$

mais $\dot{x}_1 = x_2$ d'où :

$$
\overset{(n)}{x_2} + a_{n-1} \overset{(n-1)}{x_2} + \cdots + a_1 \dot{x}_2 + a_0 x_2 = \dot{u}
$$

La deuxième dérivation donne en tenant compte que $\dot{x}_2 = x_3$

$$
\overset{(n)}{x_3} + a_{n-1} \overset{(n-1)}{x_3} + \cdots + a_1 \dot{x}_3 + a_0 x_3 = \ddot{u}
$$

à la $m^{\text{ième}}$ dérivation on aura:

$$\overset{(n)}{x}_{m+1} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{x}_{m+1} + \cdots + a_1 \dot{x}_{m+1} + a_0 x_{m+1} = u^{(m)}$$

en portant toutes les dérivées dans l'équation de départ, nous obtenons:

$$\overset{(n)}{y} + a_{n-1}\overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m \overset{(m)}{u} + b_{m-1}\overset{(m-1)}{u} + \cdots + b_0 u$$

son second membre se présente sous la forme:

$$\begin{aligned}
& b_m \left[\overset{(n)}{x}_{m+1} + \cdots + a_0\, x_{m+1}\right] + \\
+\ & b_{m-1}\left[\overset{(n)}{x}_{m} + \cdots + a_0\, x_{m}\right] + \\
+\ & - - - - - - - - - - - - - - - - + \\
+\ & b_1 \left[\overset{(n)}{x}_{2} + \cdots + a_0\, x_{2}\right] + \\
+\ & b_0 \left[\overset{(n)}{x}_{1} + \cdots + a_0\, x_{1}\right]
\end{aligned}$$

Pour déterminer $y(t)$ on égalise les termes en a_0 situés dans le premier et le deuxième terme, d'où la reponse:

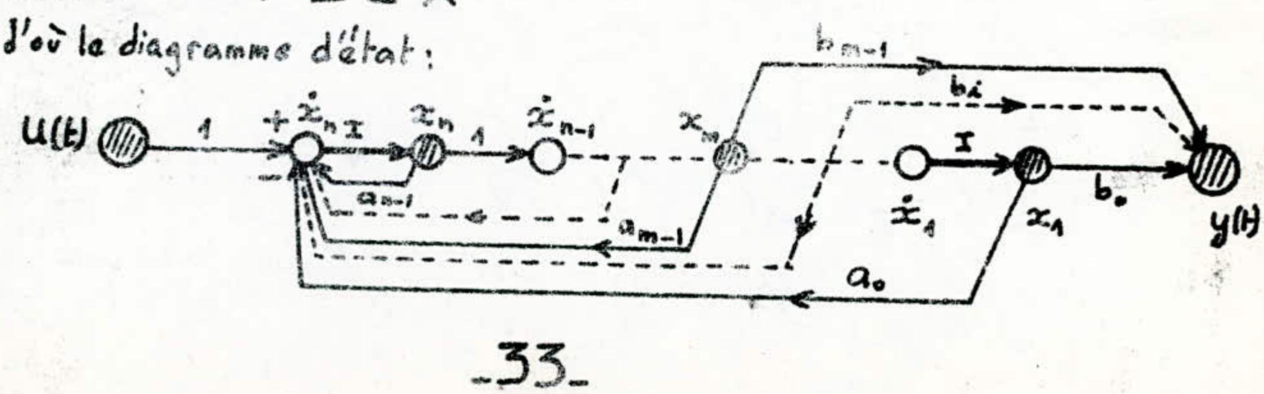
$$y = b_m x_{m+1} + b_{m-1} x_m + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

ou sous forme matricielle

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

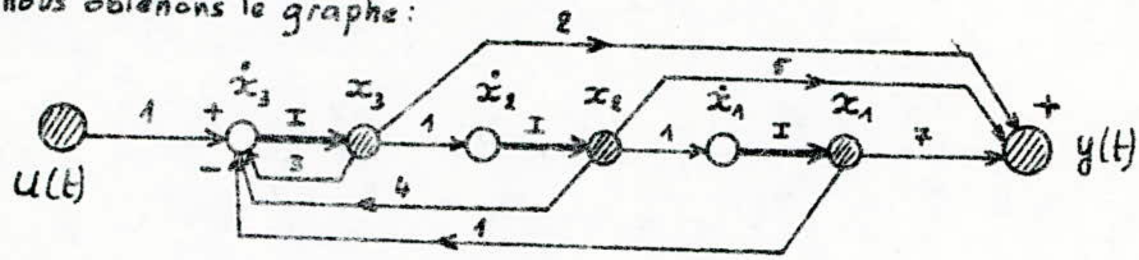
ou bien $\vec{Y} = C\,\vec{X}$

d'où le diagramme d'état:



EXEMPLE soit le système : $\overset{(3)}{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 2\ddot{u} + 5\dot{u} + 7u$

Puisqu'il est du troisième ordre, il existe alors trois variables d'état : $x_1 ; x_2 ; x_3$ nous obtenons le graphe :



d'où l'équation d'état déduite à vue :

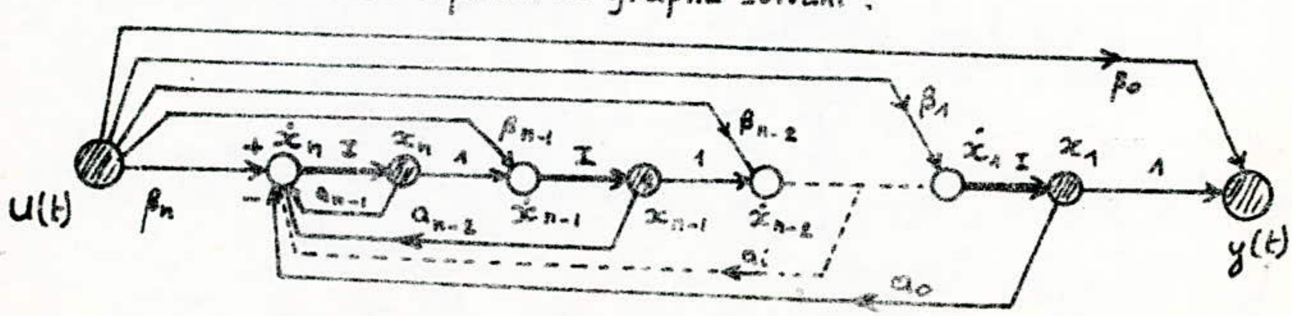
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0][u]$$

$\begin{matrix} n=3 \\ m=2 \end{matrix} \Rightarrow \quad m \leq n-1$ limite superieure de validité.

2.3.2.2 deuxième cas - $m \leq n$

cette méthode est moins simple que la précédente. Cette méthode montre la souplesse de la téchnique des états. Son idée est de réaliser l'équation differentielle (1) à partir du graphe suivant :



les branches inférieures et supérieures sont orientées en sens inverse, pour obtenir ce resultat.

Posons

$$(2)\quad y = x_1 + \beta_0 u$$
$$(3)\quad \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$
$$(4)\quad \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$$
$$\vdots$$
$$(5)\quad \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_2 x_2 - \cdots\cdots - a_{n-1} x_n + \beta_n u$$

faisons apparaitre les dérivées de $u(t)$ en dérivant -n- fois $y(t)$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \beta_0 \dot{u}$$
$$\ddot{y} = \dot{x}_2 + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 \ddot{u}$$
$$y^{(3)} = \dot{x}_3 + \beta_2 \dot{u} + \beta_1 \ddot{u} + \beta_0 u^{(3)}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)} = x_n + \beta_{n-1} u + \beta_{n-2} \dot{u} + \cdots\cdots + \beta_1 u^{(n-2)} + \beta_0 u^{(n-1)}$$
$$y^{(n)} = \dot{x}_n + \beta_{n-1} \dot{u} + \beta_{n-2} \ddot{u} + \cdots\cdots + \beta_1 u^{(n-1)} + \beta_0 u^{(n)}$$

De (5) on aura :

$$y^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots\cdots - a_{n-1} x_n + \beta_n u + \beta_{n-1} \dot{u} + \cdots\cdots + \beta_0 u^{(n)}$$

en remplaçant toutes les dérivées de y dans l'équation (1) on peut en déduire par identification du premier membre de (1) (qui est une combinaison linéaire de u et de ses dérivées dont les coefficients sont formés avec les - a_i - et les - β_i -) et du second membres de (1) qui est une com-binaison linéaire de u et de ses derivées dont les coefficients sont - b_i -

Identification des coefficients de $u^{(n)}$: $\quad b_n = \beta_0$

——	——	$u^{(n-1)}$:	$b_{n-1} = \beta_1 + a_{n-1}\beta_0$
——	——	$u^{(n-2)}$:	$b_{n-2} = \beta_2 + a_{n-2}\beta_0 + a_{n-1}\beta_1$
⋮			
——	——	u :	$b_0 = \beta_n + a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + \cdots + a_{n-1}\beta_{n-1}$

ou sous forme matricielle :

$$(6)\qquad \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

L'inversion de (6) qui est une matrice de transformation triangulaire nous fournit les coefficients – β_i –

$$(7)\qquad \begin{aligned} \beta_0 &= b_n \\ \beta_1 &= b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 &= b_{n-2} - a_{n-2}\beta_0 - a_{n-1}\beta_1 \\ &\vdots \\ \beta_n &= b_0 - a_0\beta_0 - a_1\beta_1 - a_2\beta_2 - \cdots - a_{n-1}\beta_{n-1} \end{aligned}$$

En conclusion les équations d'états fournies par {(3), (4), ... (5)} et (2) sont :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

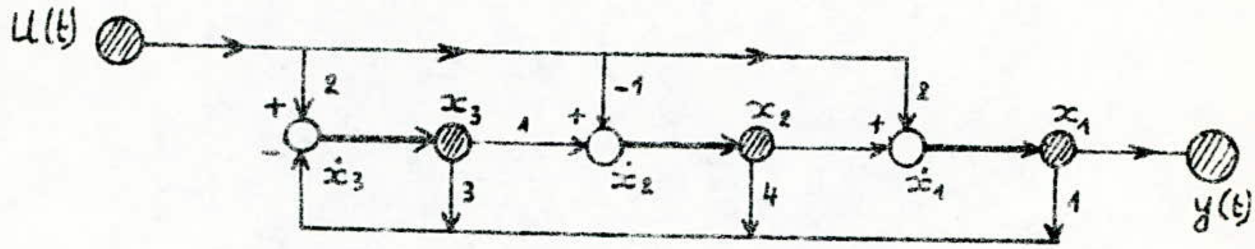
EXEMPLE On reprend le même exemple que précédemment

$$\overset{(3)}{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 2\ddot{u} + 5\dot{u} + 7u$$

les coefficients - β_i - sont : d'aprés (7)

$$\beta_0 = b_n = 0$$
$$\beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 = 2$$
$$\beta_2 = b_{n-2} - a_{n-2}\beta_0 - a_{n-1}\beta_1 = -1$$
$$\beta_3 = b_{n-3} - a_{n-3}\beta_0 - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_2 = 2$$

D'où le graphe correspondant :



les équations d'état seront :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]\, u(t)$$

on remarque que ce diagramme et celui du paragraphe précédent constituent deux représentations d'états différentes du même système .

2. 4. Réalisation des fonctions de transfert.

les fonctions de transfert sont préparées aux équations différentielles on doit donc étudier la conversion des fonctions de transfert en équations d'états. Suivant que les pôles des fonctions de transfert sont simples ou multiples on distingue deux cas.

2-4-1. Réalisation des fonctions de transfert : 1er cas - (pôles simples)

Parmi les plusieurs méthodes utilisables, on choisit celle qui consiste à décomposer les fonctions de transfert en éléments simples. Prenons un exemp-le scalaire d'ordre - n - dont la fonction de transfert n'a que des pôles simples : $\lambda_1 ; \lambda_2 ; \ldots , \lambda_n$. Son expression générale est:

$$(1) \qquad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{N(p)}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\ldots(p-\lambda_n)}$$

La décomposition en éléments simples donne:

$$(2) \qquad H(p) = \frac{A_1}{p-\lambda_1} + \frac{A_2}{p-\lambda_2} + \cdots + \frac{A_n}{p-\lambda_n} \quad \text{avec } A_i = (p-\lambda_i).H(p) \text{ tel que } p = \lambda_i$$

$$(3) \qquad Y(p) = H(p).U(p) = Y_1(p) + Y_2(p) + \cdots + Y_n(p)$$

avec : $Y_1(p) = \frac{A_1 . U(p)}{p-\lambda_1}$; $Y_2(p) = \frac{A_2 . U(p)}{p-\lambda_2}$; ...... ; $Y_n(p) = \frac{A_n . U(p)}{p-\lambda_n}$

mais on sait que $\mathcal{L}\{f'(t)\} = p.\mathcal{L}\{f(t)\}$

d'où :

$$(5) \qquad \begin{aligned} (p-\lambda_1)Y_1(p) &= pY_1(p) - \lambda_1 Y_1(p) = A_1.U(p) \Rightarrow \dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t) + A_1 U(t) \\ (p-\lambda_2)Y_2(p) &= pY_2(p) - \lambda_2 Y_2(p) = A_2 U(p) \Rightarrow \dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t) + A_2 U(t) \\ &\text{-----------------------------------} \\ (p-\lambda_n)Y_n(p) &= pY_n(p) - \lambda_n Y_n(p) = A_n U(p) \Longrightarrow \dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t) + A_n U(t) \end{aligned}$$

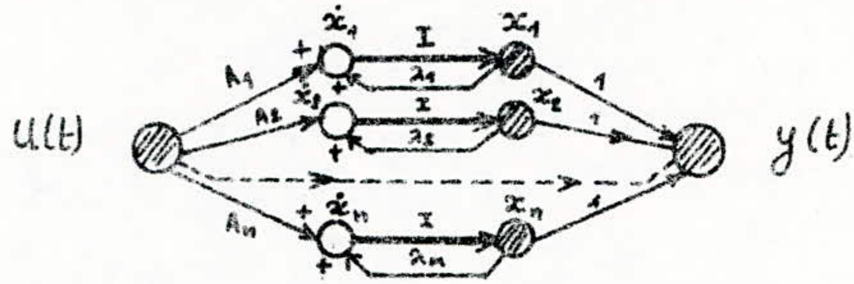
et la relation (3) donne:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \cdots + y_n(t)$$

Prenons pour variables d'état les grandeurs $y_1 ; y_2 ; \dots y_n$

et soient : $x_1 = y_1$; $x_2 = y_2$; .... ; $x_n = y_n$

on aura immédiatement le diagramme d'état et les équations du système.



(6) $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} u(t)$$

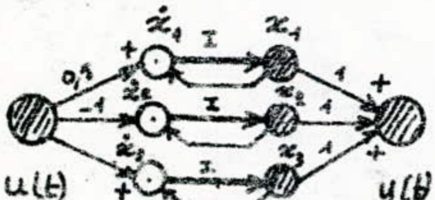
(7) $$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

EXEMPLE

Soit la fonction de transfert d'un système.

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{0,5}{p+1} - \frac{1}{p+2} + \frac{0,5}{p+3}$$

d'où le diagramme et les équations (8) et (9)



(8) $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t)$$

(9) $$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

on remarque que la matrice $[A]$ est obtenue sous forme diagonale et ses éléments non nuls sont ses valeurs propres et coincident avec les pôles de la fonction de transfert.

4.2.2 - Réalisation des fonctions de transfert - 2ème cas

Prenons un système scalaire d'ordre -n- qui a une fonction de transfert ayant -m- pôles multiples : $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$ et $(n-m)$ pôles simples: $\lambda_{m+1}; \lambda_{m+2}; \ldots; \lambda_n$

son expression générale est :

$$(1) \quad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{N(p)}{(p-\lambda_1)^m (p-\lambda_{m+1}) \cdots\cdots (p-\lambda_n)}$$

la décomposition en éléments simples donne:

$$(2) \quad H(p) = \frac{A_{11}}{(p-\lambda_1)^m} + \frac{A_{12}}{(p-\lambda_1)^{m-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{1m}}{(p-\lambda_1)} + \frac{A_{m+1}}{p-\lambda_{m+1}} + \cdots + \frac{A_n}{p-\lambda_n}$$

(2) peut se mettre sous la forme .(3)

$$(3) \quad Y(p) = \underbrace{\frac{A_{11}.U(p)}{(p-\lambda_1)^m} + \frac{A_{12}\,U(p)}{(p-\lambda_1)^{m-1}} + \cdots\cdots}_{\text{groupe - I -}} + \underbrace{\frac{A_{1m}\,U(p)}{p-\lambda_1} + \frac{A_{m+1}U(p)}{p-\lambda_{m+1}} + \cdots + \frac{A_n\,U(p)}{p-\lambda_n}}_{\text{groupe - II -}}$$

4.2.2.1 - Traitons le groupe - I - de « fonctions simples »

soit :

$$(4) \quad X_1(p) = \frac{U(p)}{(p-\lambda_1)^m} \; ; \; X_2(p) = \frac{U(p)}{(p-\lambda_1)^{m-1}} \; ; \ldots\ldots, X_m(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda_1}$$

on voit qu'il y a des relations de dépendances entre les X_i

$$(5) \quad X_1 = \frac{X_2}{p-\lambda_1} \quad ; \quad X_2 = \frac{X_3}{p-\lambda_1} \; ; \ldots\ldots ; \; X_{m-1} = \frac{X_m}{p-\lambda_1}$$

En supposant toujours que les conditions initiales sont nulles, on trouve.

$$(6)\qquad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_1 x_2(t) + x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{m-1}(t) = \lambda_1 x_{m-1}(t) + x_m(t) \end{cases}$$

4.2.2.2. <u>traitons le groupe -II- de « fractions simples »</u>

soit : $X_m(p) = \dfrac{U(p)}{p-\lambda_1}$; $X_{m+1}(p) = \dfrac{U(p)}{p-\lambda_{m+1}}$; ..... ; $X_n(p) = \dfrac{U(p)}{p-\lambda_n}$ (7)

d'où en inversant :

$$(8)\qquad \begin{cases} \dot{x}_m(t) = \lambda_1 x_m(t) + u(t) \\ \dot{x}_{m+1}(t) = \lambda_{m+1} x_{m+1}(t) + u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + u(t) \end{cases}$$

L'inversion de (3) donne en plus :

$$(9)\qquad y(t) = \sum_{i=1}^{m} A_{1i} x_i(t) + \sum_{j=m+1}^{n} A_j x_j(t)$$

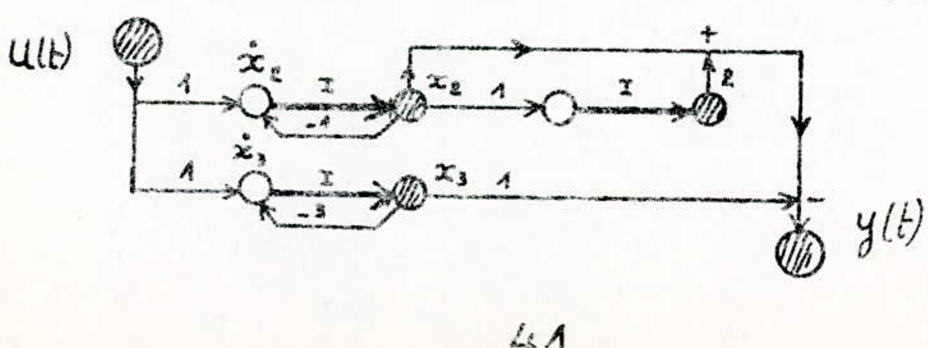
soit :

$$Y = \left[A_{11}\ A_{12} \dots A_{1m} \,\vdots\, A_{m+1} \dots A_n \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \hline x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \left[0 \right] u .$$

<u>EXEMPLE</u> : Soit la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{4}{(p+1)^2(p+3)} = \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3}$$

d'où le graphe et les fonctions d'état.



les fonctions d'état sont :

$$(12)\qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$(13)\qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

on remarque que la matrice [A] est sous la forme de Jordan et ne se présente sous forme diagonale qu'après l'avoir partagée an sous-matrices (pointillés)

troisième chapitre
Gouvernabilité _ Observabilité _ Stabilité

I _ Gouvérnabilité :

un systéme est dit gouvernable, si par une comman-
-de convenable on peut l'amener en un temps fini d'un état à un autre.
— une partie seulement du systéme est dite gouvernable si certaines composantes seulement du vecteur d'état peuvent être ramenées en un temps fini d'un état à un autre.

D'une façon intuitive, on dit qu'une variable est gouvernable si elle subit une action de la commande d'entrée $U(t)$, sinon elle est dite ingouvernable. et ceci dans le cas où les sous-systèmes sont découplés, ce qui se traduit mathématiquement par la matrice d'évolution .A. diagonale.

1.1. Critères de gouvernabilité :

nous savons que tout système linéaire qu'il soit défini par sa fonction de transfert ou par ses équations dif-
-ferentielles ou par ses équations d'état peut être ramené sous la forme suivante.

$$\dot{X} = A_1 X + B_1 U$$
$$Y = C_1 X + D_1 U$$

la matrice A_1 n'est pas forcément diagonale, mais on peut toujours ramener le système précédent au système suivant

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

où la matrice A est diagonale et la matrice .B. unicolonne.

1-1-1. la matrice diagonale -A- a ses valeurs propres distinctes

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} U$$

le critere de gouvernabilité sera alors :

— une variable x_i est dite gouvernable si l'élément - b_i - de la matrice B est different de zéro. $b_i \neq 0$ $(i = 1; 2; \ldots; m)$

elle est dite ingouvernable si $b_i = 0$.

— le système est dit complètement gouvernable si tous les éléments - b_i - sont differents de zéro.

— le systéme est dit partiellement gouvernable (une partie seulement du systéme est gouvernable) si quelques èléments de la matrice B- sont differents de zéro.

1-1-2. la matrice diagonale - A - a des valeurs propres multiples.

S'il éxiste au moins une valeur propre multiple, la matrice -A- est seulement quasi - diagonale, la valeur propre multiple donne naissance ã - p - blocs de Jordan, p étant la dégénéréscence de cette valeur propre notons que certains de ces blocs peuvent se rêduire à un élément; la valeur propre en question, généralement tous lorsqu'il ya dégénérescence compléte, c'est-à-dire égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre. Prenons léxemple suivant :

soit la matrice d'évolution -A- de dimensions (10, 10) et possède une va-leur propre multiple $\lambda = a$ d'ordre 8 avec dégénerescence quadruple $(p=4)$ et les valeurs propres simples $\lambda = b$; $\lambda = c$.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|ccc}
a & 1 & 0 & & & & & & & \\
0 & a & 1 & & & & & & & \\
0 & 0 & a & & & & & & & \\
\hline
 & & & a & 1 & & & & & \\
 & & & 0 & a & & & & & \\
\hline
 & & & & & a & 1 & & & \\
 & & & & & 0 & a & & & \\
\hline
 & & & & & & & a & & \\
 & & & & & & & & b & \\
 & & & & & & & & & c
\end{array}\right] \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \end{bmatrix}$$

les conditions necessaires et suffisantes de gouvernabilité sont :

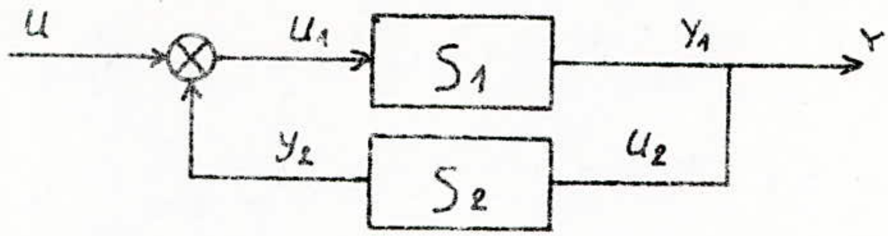
— Pour les modes simples : que les lignes correspondantes de la matrice d'application de la commande ne soient pas nulles. dans notre exemple il faut que : $b_9 \neq 0$ et $b_{10} \neq 0$

— Pour chaque mode multiple : que les -p- lignes de -B- qui sont en regard des dernières lignes des -p- blocs de Jordan qui lui corre-spondent soient linéairement indépendantes c'est-à-dire que la matrice qu'elles forment ait un rang égal au nombre de ces blocs, à l'ordre -p- de dégénérescence du mode. Dans notre exemple :

$$\text{rang de} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_5 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = 4$$

1.2. Gouvernabilité des systèmes bouclés

Soit le système suivant :



le système est gouvernable si et seulement si la cascade $(S_1 S_2)$ est gouvernable (entrée u_1 ; sortie y_2).
ce théorème n'est valable que si $\det(I + D_1 D_2) \neq 0$
où -D_1- et -D_2- sont les matrices de couplage entrée-sortie des systèmes.

II. Observabilité.

un système est dit observable si de l'observation de la sortie pendant un temps fini, on peut déduire l'état initial.

— une partie seulement du système est dite observable, si de l'observation de certaines grandeurs seulement de la sortie, on peut déduire l'état initial correspondant.

— D'une façon intuitive, on dit qu'une variable est observable si de l'observation de sa sortie pendant un temps fini, on peut déduire son état initial. Sinon elle sera dite inobservable. Ceci dans le cas où les modes sont découplés, ce qui se traduit par la matrice -A- diagonale.

2.1. Critère d'observabilité

nous savons que tout système linéaire qu'il soit défini par sa fonction transfert, ses équations différentielles ou par ses équations d'état, peut-être mis sous la forme.

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

où la matrice .A. est diagonale et la matrice .C. d'observation est une matrice ligne. Deux cas peuvent se présenter.

2-1-1. matrice diagonale -A- a ses valeurs propres distinctes.

le critère d'observabilité sera :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{bmatrix} X + D.U$$

— Une variable x_j est dite observable si et seulement si l'élément c_j de la matrice .C. est different de zéro. $c_j \neq 0 \quad (j=1,2,\ldots,n)$
elle est dite inobservable si $c_j = 0$

— le système est dit complètement observable si tous les éléments c_j de la matrice .C. sont differents de zéro. Il est dit partiellement observable si quelques éléments c_j seulement sont différents de zéro.

2-1-2. matrice diagonale -A- a des valeurs propres multiples

S'il éxiste au moins une valeur propre multiple, la matrice .A. est seulement quasi-diagonale; la valeur propre multiple donne naissance à .p. blocs de Jordan ; p étant sa dégénerescence de cette valeur propre.
Notons que certains de ces blocs peuvent se réduire à un élément; la valeur propre en question, généralement tous lorsqu'il y a dégénerescence complète, c'est-à-dire égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre.
Reprenons l'example précédent.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & a & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & a & & & & & & & \\ & & & a & 1 & & & & & \\ & & & 0 & a & & & & & \\ & & & & & a & 1 & & & \\ & & & & & 0 & a & & & \\ & & & & & & & a & & \\ & & & & & & & & b & \\ & & & & & & & & & c \end{bmatrix}$$

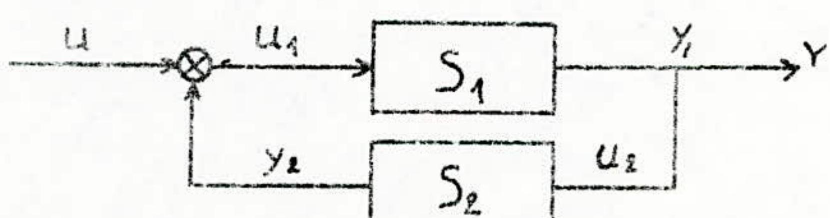
$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} \end{bmatrix}$$

les conditions necessaires et suffisantes d'observabilité sont :

— Pour les modes simples : que les colonnes correspondantes de la matrice d'observation ne soient pas nulles. $c_9 \neq 0$; $c_{10} \neq 0$

— Pour chaque mode multiple : que les -p- colonnes de -C- qui sont en regard des premieres colonnes des p blocs de Jordan lui correspondants soient linéairement indépendantes, c'ést-à-dire que la matrice qu'elles forment ait un rang égal au nombre de ces blocs (ordre de dégénerescence -p- du mode). Dans notre cas $[c_1\ c_4\ c_6\ c_8] = 4$

2. 2. observabilité d'un système bouclé.

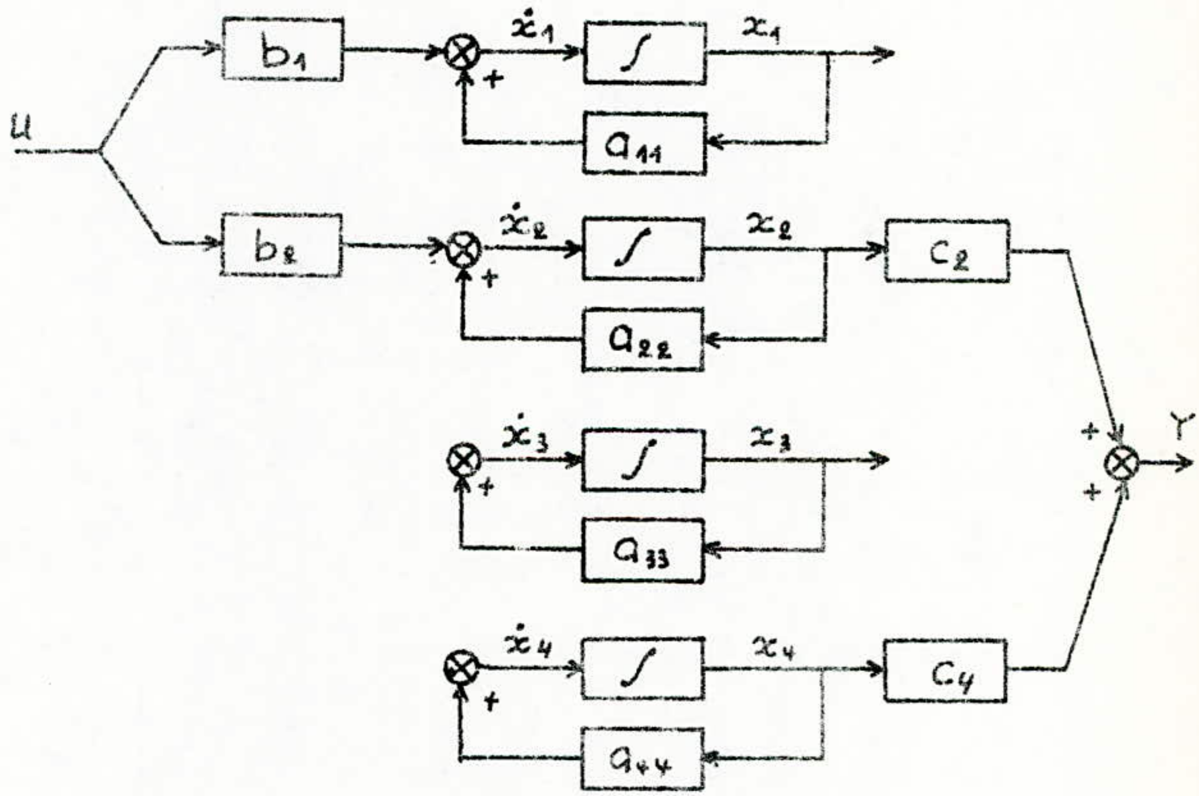


le système est observable si et seulement si la cascade $(S_2 S_1)$ est observable. (entrée u_2 ; sortie y_1). Ce théorème n'est valable que si $\det(I + D_1 D_2) \neq 0$ où D_1 et D_2 sont les matrices de couplage entrée-sortie des systèmes (S_1) et (S_2).

III - Schématisation et interprétation physique de la gouvernabilité et de l'observabilité

2.1. Schématisation de la gouvernabilité et de l'observabilité.

on sait que la plupart des systèmes sont considérés comme des ensembles de quatre sous-systèmes suivants :



ses équations d'état $\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$ seront :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & 0 & c_4 \end{bmatrix} X$$

— les variables d'état x_1 et x_2 sont gouvernables et les variables d'état x_3 et x_4 ne le sont pas. En effet la commande -U- n'a aucun moyen d'agir sur elles, comme l'expriment sur la figure l'absence de liaison de -U- vers x_3 et x_4 - et sur les équations la nullité des coefficients b_3 et b_4 de la matrice colonne -B- d'application de la commande.

— les variables d'état x_2 et x_4 sont observables.

les variables d'état x_1 et x_3 ne le sont pas. On voit en effet sur la figure qu'elles ne débouchent point sur la sortie -Y-, ce qu'exprime sur les équations la nullité des coefficients c_1 et c_3 de la matrice ligne d'observation -C-

donc : * la variable d'état x_1 est gouvernable mais non observable.

* la variable d'état x_2 est gouvernable et observable.

* la variable d'état x_3 n'est ni gouvernable, ni observable.

* la variable d'état x_4 n'est pas gouvernable, mais est observable.

3-2- Interprétation physique de la gouvernabilité et de l'observabilité.

les propriétés de gouvernabilité et d'observabilité que nous avons définies sont des propriétés de la représentation d'un système.

Nous savons qu'une representation d'état pouvait être gouvernable ou non, observable ou non, et qu'une représentation par une matrice de transfert était par contre toujours gouvernable et observable, ou plus exactement qu'un tel modèle ne representait que la partie complètement gouvernable et observable du système.

Nous savons aussi que la connexion de systèmes complètement gouvernables et observables conduit à un système global n'ayant plus ces propriétés, donc une question se pose : Que faire de ces procédés de représentations lorsqu'on est en face de procédés réels?
Physiquement un système non gouvernable est un système dont certains états ne sont pas reliés directement ou indirectement, par l'intermidiaire d'autres états, à une entrée, ou encore un système qui n'a pas suffisamment d'entrée
De la même manière, un système physiquement "non observable" est un système sur lequel on ne fait pas toutes les mesures necessaires pour observer son «état», certains de ces états ne sont pas reliés directement ou indirectement aux sorties ; ou encore l'organisation interne du système est telle qu'on ne peut séparer deux états.
Il est évident que la commande et la regulation de tout procédé physique imposent que l'on soit maître du procédé et que l'on sache dans quel état il se trouve. Pour cela, il nous faut choisir correctement les entrées et les sorties. Enfin il faudra veiller à ce que l'association du procédé et de sa commande ne rende pas le tout non gouvernable et eventuellement non observable.
On montrera dans le cas monovariable qu'on pourra faire apparaitre dans une representation par fonction de transfert, les pertes de gouvernabilité ou d'observabilité par des simplifications de pôles et de zéros, mais ceci est plus difficile dans le cas multivariable et justifie l'intérêt de la représentation d'état (indépendamment du fait que son utilisation est très souple dans toute étude par calculateur numérique)

IV. Intérêt de la gouvernabilité et de l'observabilité pour la commande.

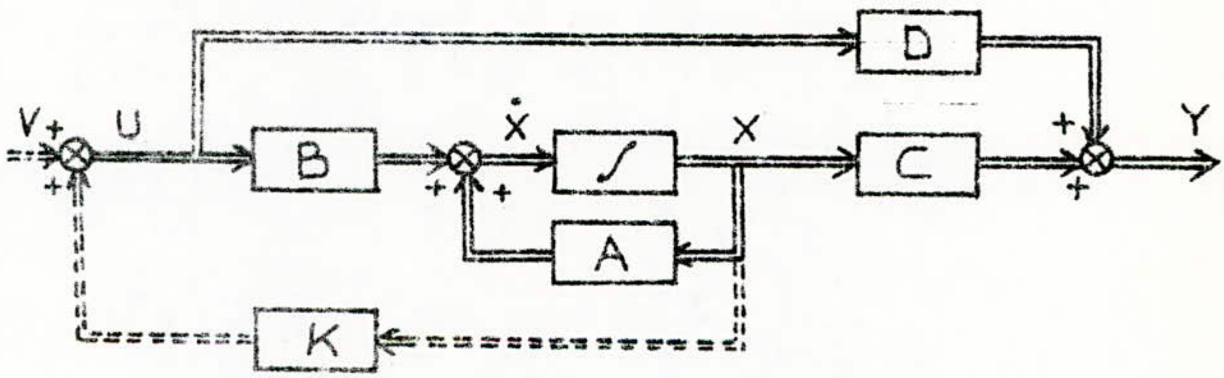
4-1. Etude de la compensation par retour d'état

on a le système :

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

où : X, U et Y sont des vecteurs de dimensions réspectives n, e et s
les matrices A, B, C et D sont donc respectivement de dimensions (n, n) ; (n, e) ; (s, n) et (s, e).
la matrice de transfert de U et Y s'écrit : $C\left[pI_n - A\right]^{-1}B + D$
les modes sont donc les racines de l'équation caractéristique :

$\det\left[pI_n - A\right] = 0$ d'où le schema suivant :



le principe d'une compensation consiste à définir la loi de commande

$\boxed{U = V + KX}$ où K est la matrice de réation de dimension (e,n) associée à l'entrée V de dimensions (e)

on a alors :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + B(V+KX)\\ Y &= CX + D(V+KX)\end{aligned} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\dot{X} &= (A+BK)X + BV\\ Y &= (C+DK)X + DV\end{aligned}}$$

la matrice de transfert de V à Y de ce système en boucle fermée sera :

$$(C+DK)\left[pI_n - A - BK\right]^{-1} B + D$$

les modes étant les racines de l'équation caractéristique: $\text{dét}\left[pI_n - A - BK\right] = 0$ donc il est possible par le choix de K d'imposer les modes du système en boucle fermée, agissant ainsi sur la stabilité et la dynamique du système.
On ne peut fixer arbitrairement tous les modes que si le système en boucle ouverte est gouvernable. Si ce n'est pas le cas on ne pourra agir que sur les modes gouvernables, on voit donc le danger que presentent des modes instables ou non gouvernables.
Si le système en boucle ouverte est gouvernable, il le reste quand on le boucle par K.

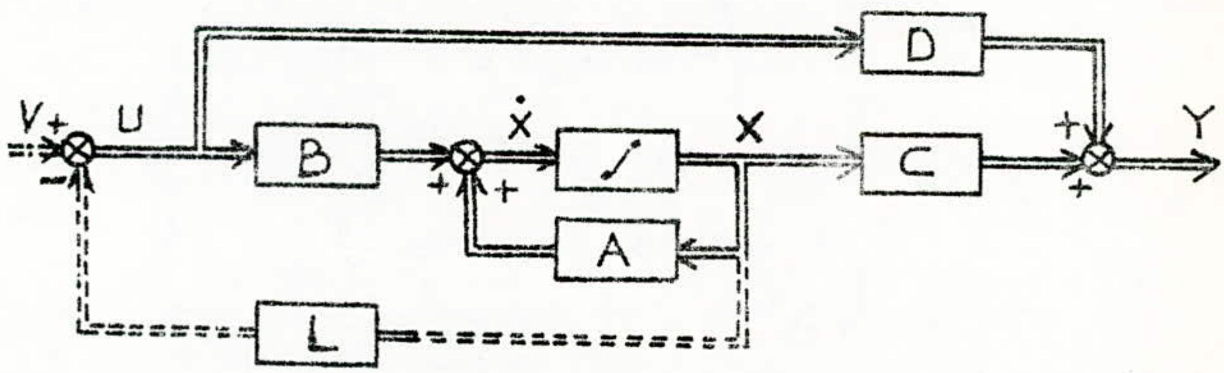
3.2. Commande par retour d'état

soit le système :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \qquad (1)$$

on parle de commande par retour d'état lorsque la loi d'action est de la forme
$U = V - LX$ où L est une matrice constante ou variable
ce type de loi d'action suppose que le vecteur d'état X est accessible.
L'équation d'état du système avec la loi d'action s'écrit.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (A - BL)X + BV \\ Y &= (C - DL)X + DV \end{aligned} \qquad (2)$$



on montre que si le système (1) est commandable par U, le système (2) est toujours commandable par V quelque soit L, mais peut quelque fois ne pas être observable.

les valeurs propres du système (1) sont les n racines de l'équation caracteris.-tique

$$\text{dét}\ (\lambda I - A) = 0$$

celles du système bouclé (2) sont les n racines de l'équation :

$$\text{dét}\ (\lambda I - A + BL) = 0$$

on voit que les valeurs propres du système bouclé sont directement liées au choix de la matrice - L - d'où le théorème suivant:

Si le système est commandable avec un retour d'état de la forme $U = V - LX$, les valeurs propres du système bouclé (2) peuvent être fixées arbitrairement, cela signifie que l'on est maitre de la dynamique du système (temps de réponse, forme de la réponse, ...)

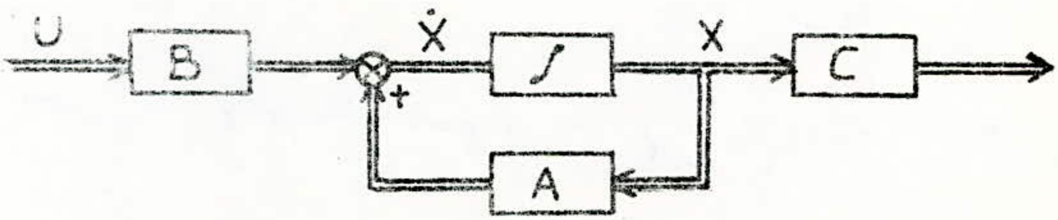
on qualifiè la commande resultante de commande modale.

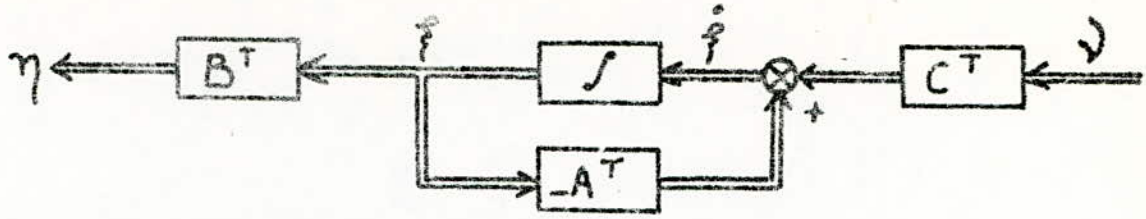
3-3. Dualité des notions de gouvernabilité et d'observabilité.

Il éxiste une relation de dualité qui unit ces deux notions. On appelle système duel du système S $\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$

le système régi par :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -A^T\xi + C^T \\ \eta = B^T\xi \end{cases}$$





la condition necessaire et suffisante pourque :

- le système S est gouvernable si et seulement si le système duel Sd est observable
- le système S est observable si et seulement si le système duel Sd est gouvernable.

Ce principe unifie les théories de la gouvernabilité et de l'observabilité et permet par exemple l'étude des propriétés d'observabilité d'un système par l'étude de la gouvernabilité de son duel

IV - Stabilité.

la stabilité est un impératif de tout système conçu par un ingénieur, et l'une des premières qualités que l'on réclame à une régulation ou une commande.

4-1- Critères de stabilité.

Ils éxistent diverses définitions mathématiques de la stabilité.

Pour les systèmes linéaires stationnaires (auxquels, nous nous sommes exclusivement interessés jusqu'à présent) toutes ces définitions sont pratiquement équivalenies et peuvent être ramenées à la définition suivante:

Le système est stable si pour une entrée nulle et des conditions initiales quelconques, l'état tend asymptotiquement vers zéro.

on aura deux resultats importants:

- Le système $\dot{X} = AX$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A ont un module inferieur à l'unité
  Ceci se démontre aisément lorsque la matrice A est diagonale alors

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0)$$

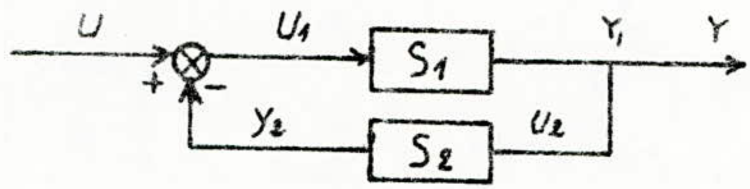
avec :

$$\Phi(t, t_0) = \mathrm{diag}\left[\lambda_j^{(t-t_0)}\right]$$

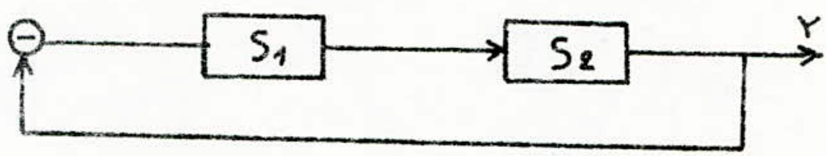
qui tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini si $|\lambda_j| < 1$

— le système $\dot{X} = AX + BU$ est stable (stabilité simple) si la matrice diagonale A a toutes ses valeurs propres négatives. Et ceci d'aprés le critère de Routh.

4.2. Stabilité d'un système bouclé soit le système bouclé suivant



Rappelons que même si les deux systèmes (S_1) et (S_2) sont séparément entièrement gouvernables et observables, le système global (S) peut ne pas l'être Pour l'étude de la stabilité de (S) le choix de l'entreē et de la sortie n'intervi-ent pas et nous allons faire l'étude sur le système suivant :



la cascade $(S_1 S_2)$ (système en boucle ouverte) pouvant representer des parties non gouvernables et (ou) non observables, son équation d'état peut être mise sous la forme canonique de Kalman.

Supposons que $D = 0$ pour simplifier l'écriture.

soit :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & 0 & c_4 \end{bmatrix} X$$

la matrice d'évolution du système en boucle fermée ($U = -Y$) est donc :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}-b_1c_2 & a_{13} & a_{14}-b_1c_4 \\ 0 & a_{22}-b_2c_2 & 0 & a_{24}-b_2c_4 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

dont les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristiques

$$\text{dét}\left[\lambda I - A\right] = (\lambda - a_{11})\left[\lambda - (a_{22}-b_2c_2)\right](\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

$$\text{dét}\left[\lambda I - A\right] = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}+b_2c_2)(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

on trouve ici un resultat auquel, on pouvait s'attendre : seules les valeurs propres de la partie entièrement gouvernable et observable de la cascade(S_1 S_2) sont modifiées par le bouclage $\left[\lambda - a_{22} + b_2c_2 = 0 \right]$ alors que celles des parties non gouvernables et (ou) non observables en boucle ouverte ne le sont pas. $\left[(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0 \right]$ d'où le théorème :

Pourque le système en boucle fermée soit stable, il est necessaire que ses parties non gouvernables et (ou) non observables en boucle ouverte soient stables.

Cela signifie que ces parties ne sont pas stabilisables, ce qui n'est pas le cas de la partie entièrement gouvernable et (ou) observable qui, si elle est instable en bou-cle ouverte (test sur les racines $(\lambda - a_{22}) = 0$) peut être éventuellement ren-due stable en boucle fermée par un choix convenable de b_2 et c_2 (test sur la valeur propre de $(a_{22} - b_2c_2)$).

cela justifie la difficulté que l'on prévoit de la synthèse d'asservissement multi-variable à partir de la représentation par matrice de transfert.

si dans le cas monovariable, l'apparition des modes ingouvernables et (ou) non observables est évidente lors de la mise en cascade ou en réaction de deux systèmes (simplification de pôles et de zéros) ce n'est plus le cas en multivariable.

quatrieme chapitre
exemples

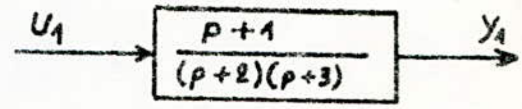
onva essayer de dégager les effets dela boucle de retour sur differents exemples en utilisant les variables d'état.

EXEMPLE _ I _

soit le systeme régi par la fonction de transfert

$$F(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)}$$

Son diagramme bloc est le suivant:

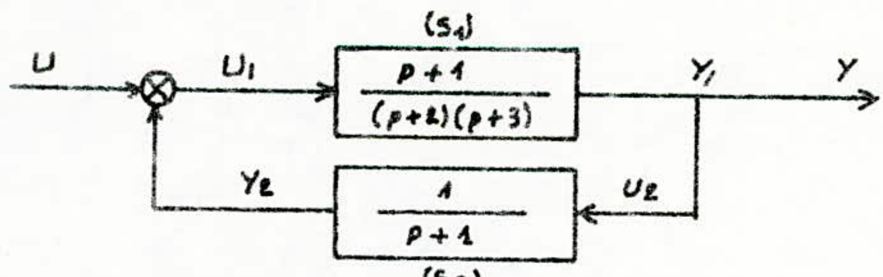


F(p) peut se mettre sous la forme :

$$F(p) = \frac{2}{p+3} - \frac{1}{p+2}$$

Appliquons une boucle de retour (S_2) et voyons son influence sur le sys-.tème (S_1) qui est lui gouvernable et observable.

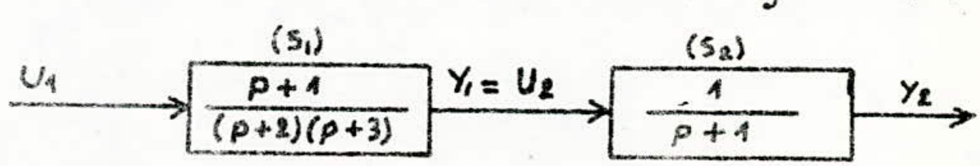
Soit : $\frac{1}{p+1}$ la transmittance de (S_2), on aura alors le bloc suivant



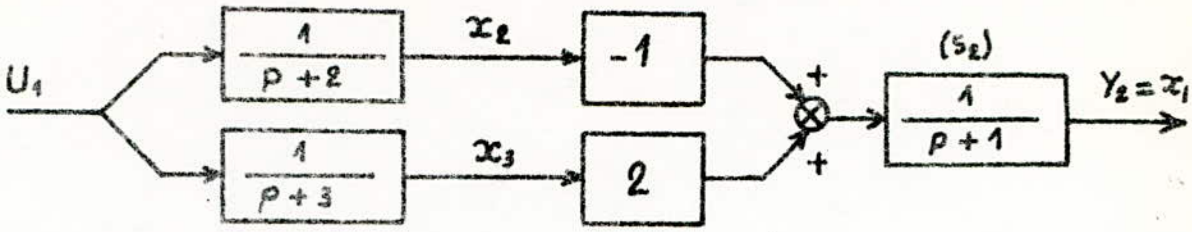
Etudions d'abord la gouvernabilité et l'observabilité de ce systéme bouclé

1.1. Gouvernabilité :

on sait que le syestème est gouvernable si et seule-.ment si la cascade (S_1 S_2) est gouvernable.



après décomposition de $F(p)$ on aura le diagramme synoptique suivant:



on aura les équations d'état de ce système.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u_1 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + u_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} U_1 \\ \\ Y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U_1 \end{cases}$$

Diagonalisons la matrice d'évolution -A-

on a $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A - \lambda I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}$

les valeurs propres de - A - sont les racines de l'équation caractéristique:

$$|A - \lambda I| = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

la matrice de ses cofacteurs est:

$$\begin{bmatrix} (\lambda+2)(\lambda+3) & -(\lambda+3) & 2(\lambda+2) \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda+3) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda+2) \end{bmatrix}$$

la transposée de la matrice des cofacteurs est:

$$\begin{bmatrix} (\lambda+2)(\lambda+3) & -(\lambda+3) & 2(\lambda+2) \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda+3) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda+2) \end{bmatrix}$$

Pour les differentes valeurs de λ ($\lambda_1=-1$; $\lambda_2=-2$; $\lambda_3=-3$) elle sera

$$\lambda_1=-1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \lambda_2=-2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \lambda_3=-3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

la matrice modale est :

$$M = \begin{bmatrix} 2C_1 & -C_2 & -2C_3 \\ 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2C_3 \end{bmatrix}$$

en prenant $C_1 = C_3 = \frac{1}{2}$ et $C_2 = -1$ on aura: $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Son déterminant est $|M| = 1$

la matrice des cofacteurs de M est (Δij) telle que: $\Delta ij = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

la matrice transposée de (Δij) est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{l'inverse de } M = M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\text{diag} A = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

la matrice d'évolution est diagonalisée on peut alors appliquer les critères de gouvernabilité.

si on fait le changement de variable $X = MZ$ on aura : $\dot{Z} = M^{-1}AM.Z + M^{-1}B.U$

d'autre part un système est gouvernable si la matrice de commande n'a pas de ligne nulle

$$M^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la première variable de la matrice de commande est nulle donc la première variable est ingouvernable d'où le système bouclé est ingouvernable

– vérifions l'observabilité : on a $Y = CX + DU = CM.Z + DU$

Pour qu'il soit observable il faut que la matrice CM ne contient pas une colonne nulle.

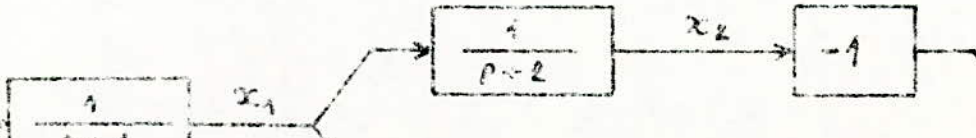
$$CM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

donc la cascade $(S_1 S_2)$ est observable.

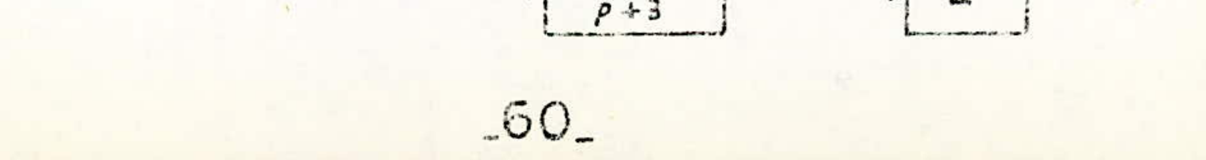
1.2. observabilité

d'après le même théorème, le système est observable si et seulement si la cascade $(S_2 S_1)$, (entrée U_2 ; sortie y_1) est observable.

on aura le diagramme bloc suivant :



après décomposition de la fonction de transfert de (S_1) on aura :



les équations d'état de ce système sont :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + x_1 \\ y_1 &= -x_2 + 2x_3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \\ Y_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u_2 \end{aligned}$$

Diagonalisons la matrice d'évolution - A -

on a :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -(1+\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & -(2+\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & -(3+\lambda) \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice d'évolution sont les racines de l'équation cara-ctéristique :

$$|A - \lambda I| = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

la matrice des cofacteurs de $A - \lambda I$ est :

$$\begin{bmatrix} (\lambda+2)(\lambda+3) & \lambda+3 & \lambda+2 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda+3) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

qui aura pour matrice transposée.

$$\begin{bmatrix} (\lambda+2)(\lambda+3) & 0 & 0 \\ \lambda+3 & (\lambda+1)(\lambda+3) & 0 \\ \lambda+2 & & (\lambda+2)(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

pour les différentes valeurs propres elle sera égale à :

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \lambda_3 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

la matrice modale sera alors : $M = \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 2c_1 & c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 2c_3 \end{bmatrix}$

d'où $M^{-1}AM = \text{diag}\,A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

En appliquant les critères d'observabilité à la matrice $CM = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ on remarque que la matrice d'observation contient une colonne nulle (la première) donc notre système est inobservable.

1.3. <u>Conclusion :</u> L'ordre dans lequel sont placés les deux sous-systèmes (S_1) et (S_2) n'est donc pas indifférent. En utilisant les fonctions de transfert on aura aucune différence selon que le système (S_1) ou (S_2) est placé à l'entrée du montage en cascade puisque la transmittance de (S_2) sera simplifiée avec le numérateur de (S_1). Ceci impliquera que l'étude par fonction de trans-fert ne tiendra pas compte de l'influence de (S_2) (du point de vue de l'obs-ervabilité et de la gouvernabilité).

la fonction de transfert du système en cascade est $H(p) = \dfrac{1}{(p+2)(p+3)}$

— la fonction de transfert laisse tomber les parties ingouvernables et les parties inobservables du système. Elle n'en represente que les parties qui sont à la fois gouvernables et observables.

— Alors que l'équation d'état ne constitue pas une représentation minimale.

On peut généraliser notre resultat :

une cascade de deux sous-systèmes ne peut être gouvernable et obser-vable que si les deux sous-systèmes le sont. Mais cette condition n'est pas suffisante : même si elle est remplie, lorsqu'il y a simplification dans la fonction de transfert, le système global n'est pas à la fois gouvernable et observable. Il s'agit d'une ingouvernabilité ou d'une observabilité selon le sens de la simplification ; c'est-à-dire selon que le pôle qui disparait est masqué vers l'entrée ou vers la sortie.

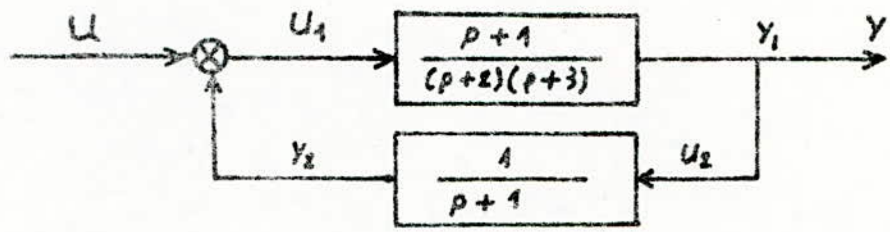
D'aprés notre étude :

* Si le pôle placé en aval est masqué par le zéro en amont on aura une ingouvernabilité du systéme en cascade et par conséquent une ingouver-nabilité du systéme bouclé.

* Si le pôle placé en amont est masqué par le zéro en aval on aura une inobservabilité du système en cascade et par conséquent une inobser-vabilité du système bouclé.

1-4- Etude de la stabilité.

on a le système suivant :



1-4-1- méthode des pôles :

la fonction de transfert du système bouclé est

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2+5p+7}$$

les pôles sont les racines de l'équation : $D(p) = p^2+5p+7 = 0$

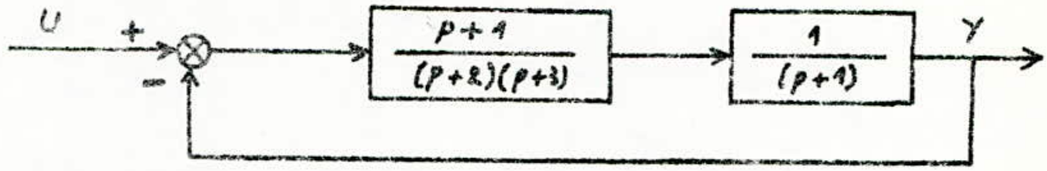
d'où
$$\begin{cases} p_1 = -\frac{5}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ p_2 = -\frac{5}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

les deux poles ont leurs parties reelles négatives donc notre système bouclé est stable.

1-4-2. critère de Routh :

le système $\dot{X} = AX + BU$ est stable si la matrice diagonale -A- à toutes ses valeurs propres à parties réelles négatives.

on sait que pour l'étude de la stabilité du système bouclé (S), le choix de l'entrée et de la sortie n'intervient pas. Nous allons faire l'étude sur le système en cascade $(S_1 S_2)$ suivant



la matrice d'évolution diagonalisée du système $(S_1 S_2)$ en boucle ouverte est

$$M^{-1}A_1M = \text{diag}\, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_3) = A$$

le système ci-dessus a pour équations d'état : $\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$

mais dans notre cas : $U = -Y = -CX$

les équations d'état deviennent : $\begin{cases} \dot{X} = (A - BC)X \\ Y = -U \end{cases}$

d'où : $$A - BC = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

cette matrice aura pour valeurs propres les racines de l'équation caractéristiques :

$$|A - BC| = (1+\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 7) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -\frac{5}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \lambda_3 = -\frac{5}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

les valeurs propres sont distinctes, elles seront alors les éléments de la matrice diagonale : $\mathcal{A} = \text{diag}(A - BC)$

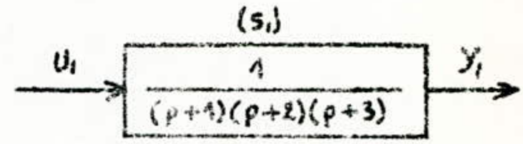
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

la matrice d'évolution de notre système bouclé a toutes ses valeurs propres à parties réelles négatives, on peut alors conclure et ceci d'aprés le critère de Routh que le système ast stable, et par conséquent le système de départ est stable.

EXEMPLE - II - Soit le système régi par la fonction de transfert

$$F(p) = \frac{1}{p^3+6p^2+11p+6}$$ qui peut se mettre sous la forme :

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} \Longrightarrow$$



les équations d'état correspondant à (S_1) sont :

$$\begin{cases} \dot{X} = A_1 X + B_1 U_1 \\ Y_1 = C_1 X + D_1 U_1 \end{cases}$$

mais $F(p)$ peut se mettre aussi sous la forme $F(p) = \frac{0,5}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} + \frac{0,5}{(p+3)}$

donc les équations d'état deviennent :

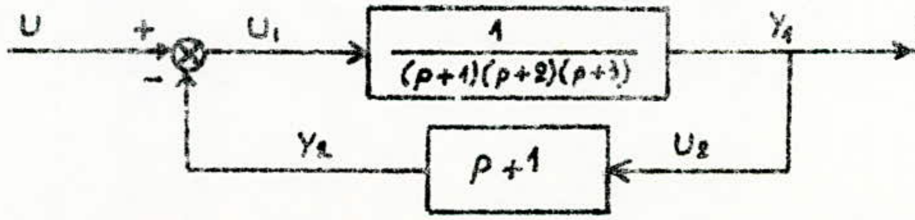
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{bmatrix} U_1$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U_1$$

la matrice d'évolution - A_1 - est diagonale, les matrices - B - et - C - respectivement de commande et d'observation ne contiennent aucun élément nul ; Notre système (S_1) est alors gouvernable et observable.

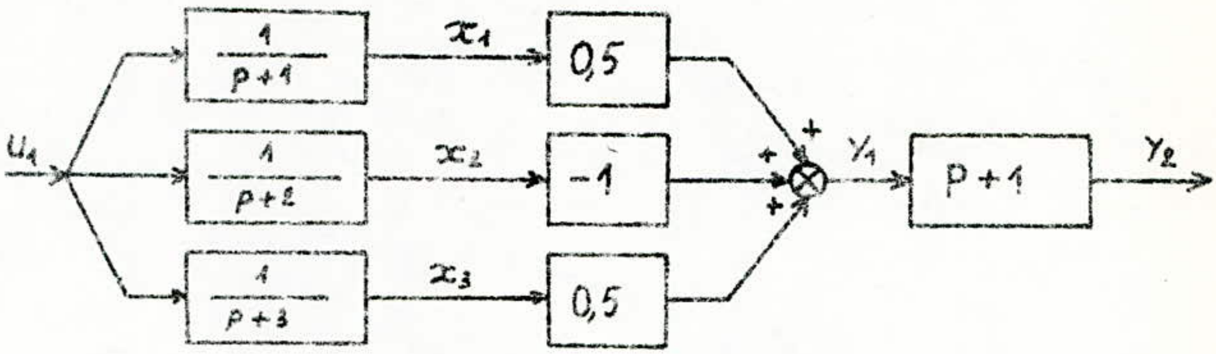
Ce resultat peut-être prévu, car tout système défini par sa fonction de transfert ne represente que les parties à la fois gouvernables et observables.

Au système (S_1), on applique une boucle de retour (S_2) (système dérivateur) de la forme $(p+1)$. D'où le diagramme du système bouclé.



2.1. Gouvernabilité le système est gouvernable si et seulement si la cascade $(S_1 S_2)$ (entrée U_1 ; sortie y_2) est gouvernable.

le système peut se mettre sous la forme du diagramme synoptique suivant :



$$\begin{cases} y_1 = 0{,}5x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 \\ y_2 = \dot{y}_1 + y_1 \\ y_2 = 0{,}5\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 0{,}5\dot{x}_3 + 0{,}5x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2u_1 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 3u_1 \end{cases}$$

les équations d'état seront :

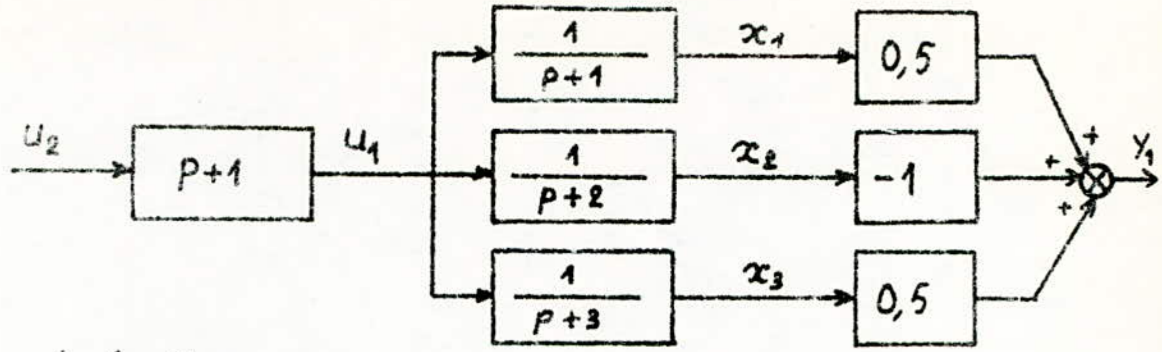
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} U_1$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U_1$$

la matrice d'évolution est diagonale et la matrice de commande n'a aucune ligne nulle donc le système en cascade $(S_1 S_2)$ est gouvernable et par conséquent le système bouclé est gouvernable. Remarquons que la cascade $(S_1 S_2)$ est inobservable du fait que la matrice d'observation est nulle.

2.2. Observabilité le système est observable si et seulement si la cascade $(S_2 S_1)$ (entrée U_2 ; sortie Y_1) est observable.

le schema synoptique est alors le suivant :



on aura les équations :

$$\begin{cases} u_1 = \dot{u}_2 + u_2 \\ u_1 = \dot{x}_1 + x_1 \\ \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2u_1 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 3u_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \dot{u}_2 + u_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2\dot{u}_2 + 2u_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 3\dot{u}_2 + 3u_2 \end{cases}$$

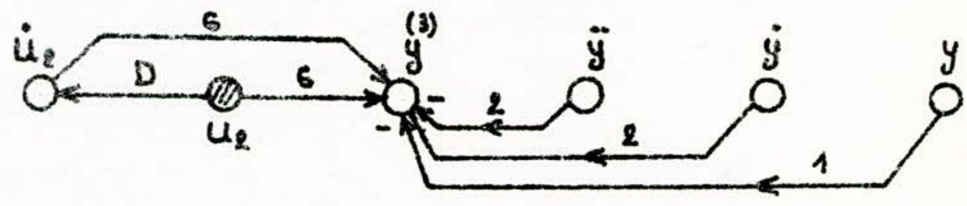
soient
$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} \\ \dot{x}_3 = y^{(3)} \end{cases}$$

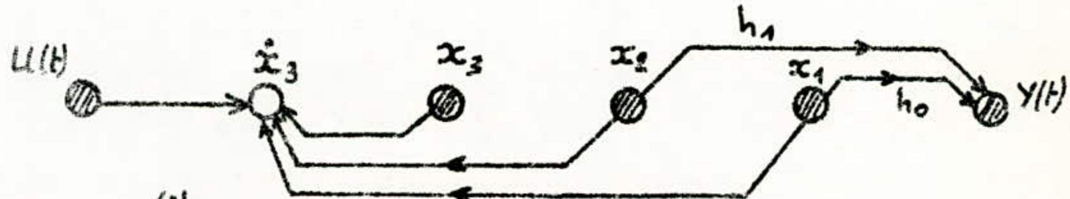
d'où :

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = -(x_1 + x_2 + x_3) + 6\dot{u}_2 + 6u_2$$

ou bien :
$$y^{(3)} + 2\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 6\dot{u}_2 + 6u_2$$

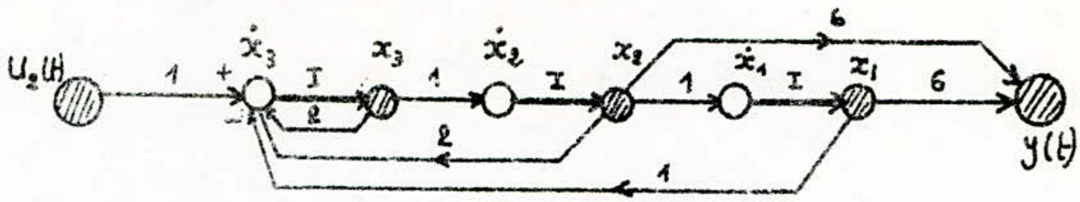
on remarque que $m < n$ donc on est dans le deuxième cas





$$x_1^{(3)} + a_2\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0 x_1 = u_2(t)$$

le digramme de fluence devient:



d'où:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_2$$

$$Y = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U_2.$$

donc la matrice d'evolution est:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice d'évolution sont les racines de l'équation:

$$\Delta = -\lambda(\lambda(\lambda+2)+2) - 1 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

les valeurs propres de la matrice A_1 sont distinctes:

$$\operatorname{diag} A_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_3) = A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

la matrice des cofacteurs de $A_1 - \lambda I$

$$\begin{bmatrix} 2(\lambda^2+\lambda+1) & -1 & -\lambda \\ 2(\lambda+1) & (\lambda+1)\cdot 2\lambda & -(2\lambda+1) \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

sa matrice transposée est alors :

$$\begin{bmatrix} 2(\lambda^2+\lambda+1) & 2(\lambda+1) & 1 \\ -1 & 2\lambda(\lambda+1) & \lambda \\ -\lambda & -(2\lambda+1) & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

pour: $\lambda_1=-1$ on aura : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

pour: $\lambda_2=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1+j\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -j\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

pour $\lambda_3=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1+j\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -j\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

la matrice modale est alors:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1-j\sqrt{3} & 1+j\sqrt{3} \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & j\sqrt{3} & -j\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{avec } C_1=C_2=C_3=1$$

Son déterminant est : $|M|=j6\sqrt{3}$

la matrice des cofacteurs de la matrice modale est ;

$$(\Delta ij)=\begin{bmatrix} j4\sqrt{3} & -2-j\sqrt{3} & 2-j\sqrt{3} \\ j2\sqrt{3} & -1-2j\sqrt{3} & 1-2j\sqrt{3} \\ j4\sqrt{3} & 1-j\sqrt{3} & -1-j\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

on a le produit C_1M qui deviendra.

$$C_1M = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-j\sqrt{3} & 1+j\sqrt{3} \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & j\sqrt{3} & -j\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6-6j\sqrt{3} & -6+6j\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

la matrice d'observation possède la première colonne nulle donc la premiè-re variable est inobservable alors le système en cascade (S_2S_1) est non observable et par conséquent le système bouclé est non observable.

2.3. Stabilité

2.3.1. méthode des pôles.

le système direct (S_1) a pour fonction de transfert

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

Pour que ce système soit stable il faut que le dénominateur de sa fonction de transfert ait des racines à parties réelles négatives.

$$(p+1)(p+2)(p+3) = 0 \implies \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \\ p_3 = -3 \end{cases}$$

toutes les racines sont négatives donc le système est stable.

En ajoutant la boucle de retour (S_2) qui a pour transmittance $K(p) = p+1$ le système en boucle fermée (S) aura pour fonction de transfert $H(p)$

$$H(p) = \frac{F(p)}{1 + K(p).F(p)} = \frac{1}{(p+1)(p^2+5p+7)}$$

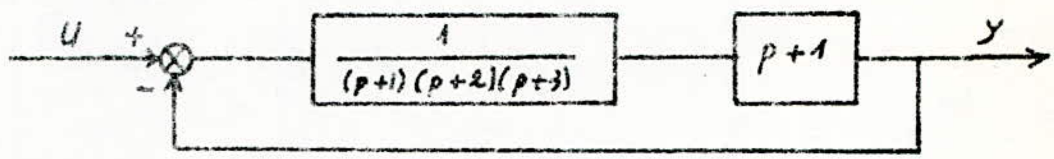
les racines du dénominateur de $H(p)$ sont :

$$\begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -\frac{5}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ p_3 = -\frac{5}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

toutes les racines sont à parties réelles négatives donc le système en boucle fermé est stable.

dans ce cas la boucle de retour n'a pas agit sur la stabilité de (S_1)

2.3.2. critère de Routh. on sait que pour l'étude de la stabilité d'un système bouclé le choix de l'entrée et de la sortie n'intervient pas.



les équations d'état du système $(S_1 S_2)$ en cascade (boucle ouverte)

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} U_1$$

$$Y = -U_1$$

$$\text{or} \quad Y = [0]\, X + [0]\, U_1 \quad \Longrightarrow \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

toutes les valeurs propres de la matrice diagonale d'évolution sont négative donc le système en boucle fermée est stable

tous les éléments ont un module égal à l'unité, on est alors à la limite de la stabilité asymptotique.

EXEMPLE _ II Soit un système (S_1) régi par la fonction de transfert $F(p)$.

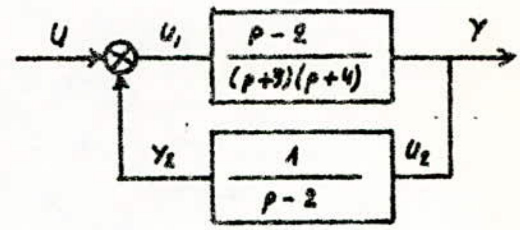
$$F(p) = \frac{p-2}{(p+3)(p+4)} = \frac{6}{p+4} - \frac{5}{p+3}$$

on applique à ce système une boucle de retour (S_2) de transmittance: $T(p)$

$$T(p) = \frac{1}{p-2}$$

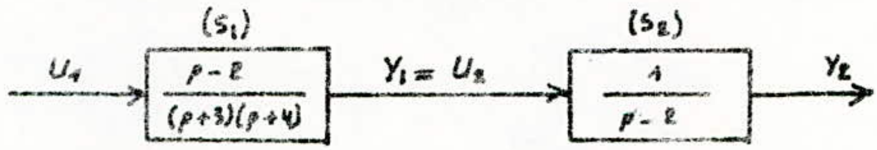
. Remarquons que le système (S_2) est irrégulier.

le système bouclé est le suivant:

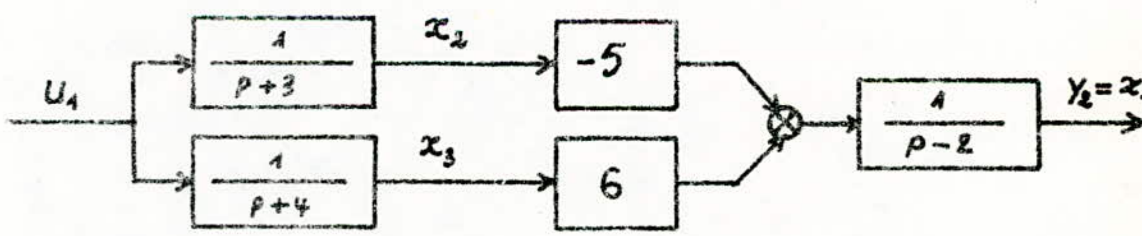


3-1- Gouvernabilité :

la cascade $(S_1 S_2)$ (entrée U_1 ; sortie Y_2) est :



D'aprés la décomposition de la fonction de transfert $F(p)$ de (S_1) le bloc synoptique du systeme en cascade $(S_1 S_2)$ deviendra :



les équations d'état sont :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + U_1 \\ \dot{x}_3 &= -4x_3 + U_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} U_1 \\ Y_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} U_1 \end{aligned}$$

la matrice d'évolution du système $(S_1 S_2)$ est

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -5 & -6 \\ 0 & -(3+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -(4+\lambda) \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice d'évolution $-A_1-$ sont les racines de l'équa-
-tion caractéristiques $|A_1 - \lambda I| = (2-\lambda)(3+\lambda)(4+\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_4 = -4 \end{cases}$

la matrice des cofacteurs de $A - \lambda I$ est :

$$\begin{bmatrix} (3+\lambda)(4+\lambda) & 0 & 0 \\ -5(4+\lambda) & -2(2-\lambda)(4+\lambda) & 0 \\ 6(3+\lambda) & 0 & -(2-\lambda)(3+\lambda) \end{bmatrix}$$

qui aura pour matrice transposée :

$$\begin{bmatrix} (3+\lambda)(4+\lambda) & -5(4+\lambda) & 6(3+\lambda) \\ 0 & -2(2-\lambda)(4+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -(2-\lambda)(3+\lambda) \end{bmatrix}$$

Pour les differentes valeurs de λ cette matrice sera égale à :

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 30 & -30 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \ \lambda_2 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \ \lambda_4 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

la matrice modale sera alors : (avec : $c_1 = \frac{1}{30}$; $c_2 = -\frac{1}{5}$; $c_3 = -\frac{1}{6}$)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

le déterminant de la matrice modale est $|M| = -1$

le cofacteur de la matrice modale est : Δ_{ij}

$$\Delta_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Son transposé} \quad (\Delta_{ij})^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice inverse de M est :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

le produit des deux matrices donne : $M^{-1}.B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

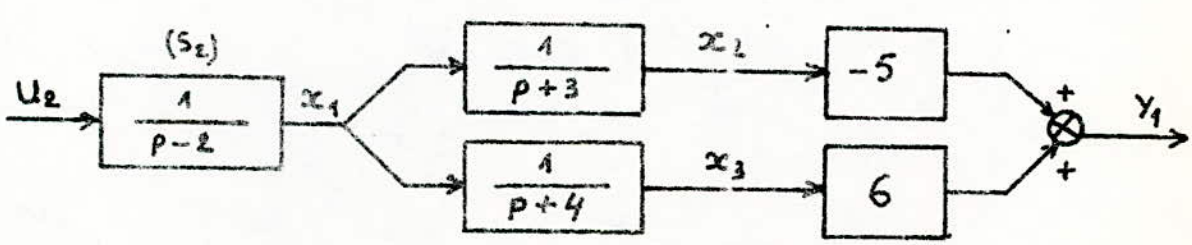
D'où les équations d'état :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} U_1$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

on voit que la première n'est pas gouvernable donc notre systéme en boucle fermé n'est pas gouvernable.

3-2- Observabilité : la cascade $(S_2 S_1)$ (entrée U_2 ; sortie Y_1) deviendra aprés décomposition de $F(p)$.



les équations d'état sont :

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + u_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_2\\ \dot{x}_3 &= x_1 - 4x_3\\ Y_1 &= -5x_2 + 6x_3\end{aligned}\right\} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix} X + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} u_2$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix}0 & -5 & 6\end{bmatrix} X + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} u_2$$

De la même manière que pour la gouvernabilité on trouvera la matrice modale M.

$$M = \begin{bmatrix}30 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{avec : } c_1 = 1 \,;\; c_2 = -\tfrac{1}{5} \,;\; c_3 = \tfrac{1}{6}$$

le produit de deux matrices - C - et - M - est :

$$C.M = \begin{bmatrix}0 & -5 & 6\end{bmatrix}$$

la matrice d'observation nous renseigne sur la non observabilité de la première variable (première colonne de C.M est nulle) donc le système en boucle fermée est inobservable.

3.3. Stabilité

3.3.1. méthode de Bôde :

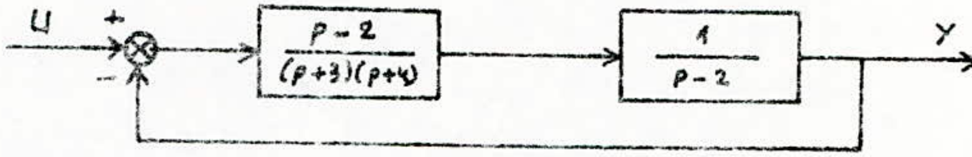
la fonction de transfert du système global en boucle ouverte est

$$H(p) = F(p).K(p) = \frac{1}{(p+3)(p+4)}$$

H(p) est une fonction de transfert du second ordre.

on sait qu'un système du second ordre est toujours stable.

3_3_2. <u>critère de Routh</u> on sait que pour l'étude de la stabilité, le choix de l'entreé et de la sortie n'intervient pas lors-
-qu'on a un systéme (S) en boucler fermé.



on a trouvé que la matrice diagonale d'évolution en boucle ouverte de la cascade $(S_1 S_2)$.

$$M^{-1}A_1M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = A$$

le systeme schématisé ci-dessus aura pour équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$$

mais: $Y = -U \implies \begin{cases} \dot{X} = (A - BC)X \\ Y = -U \end{cases}$

d'où $[A\_BC] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

les valeurs propres de cette nouvelle matrice d'évolution sont les raci-
-nes de l'équation caractéristique :

$$\det [A\_BC\_\lambda I] = (2\_\lambda)[(4+\lambda)(3+\lambda)+1] = 0$$

d'où $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -\frac{7}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{7}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

les valeurs propres sont distinctes, ils sont alors les éléments de la matrice d'évolution diagonalisée.

$$\mathrm{diag}\,(A-BC) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

la première variable de la matrice d'évolution diagonalisée à sa partie réelle positive ; d'aprés le critère de Routh cette variable n'est pas stable donc le système (S) en boucle fermée n'est pas stable.

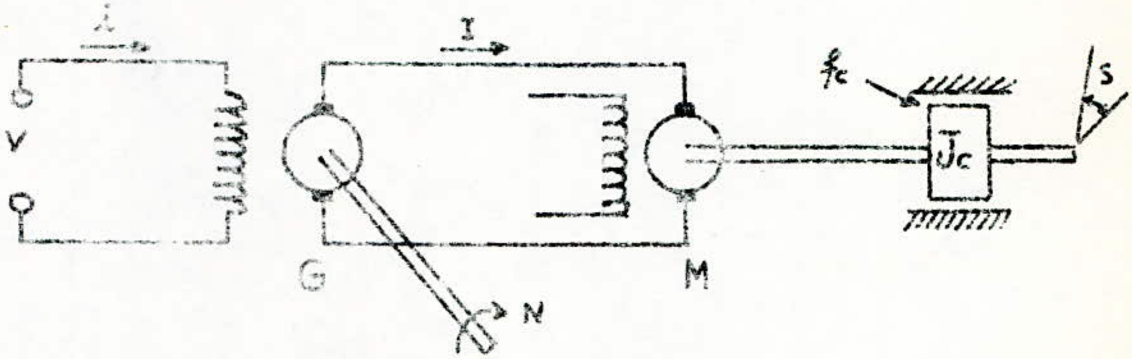
Rappelons que l'étude faite par la méthode de Bôde nous a donné un système stable (aprés simplification par la partie irrégulière $\frac{1}{p-2}$) donc l'étude par les variables d'état est plus complète.

Remarquons que cette première variable instable est aussi inobserva-ble et ingouvernable. En boucle ouverte elle est aussi instable.

donc comme on l'a vu en théorie : la réaction d'état ne permettra d'agir que sur les modes gouvernables et observables du système et restera sans effet sur les autres. Le système bouclé ne pourra donc être stabilisé que dans la mesure où ces derniers modes sont initialement stables.

Groupe Ward-Léonard

Jusqu'à présent nous n'avons consideré que des exemples théoriques c'est-à-dire des exemples qui ne représentent pas une réalité physique.
Considérons l'asservissement par groupe-Ward-Léonard- qui est schématisé par la figure suivante.



Ce dispositif sert à commander la position angulaire -S- d'un arbre qui entraine une charge d'inertie Jc. Cet organe se compose d'une génératrice continue -G- et d'un moteur. M-continu placés en cascade.
La génératrice tourne à vitesse constante et elle est alimentée par le courant d'intensité -I- provenant de la tension de commande -V.
Le moteur à excitation constante fournit un couple -C- sensiblement proportionnel au courant -I- donc : $C = k_1 I$

on a : $L\dot{I} + RI = GV \qquad \frac{L\dot{I}}{R} + I = \frac{G}{R} V = k_2 V$

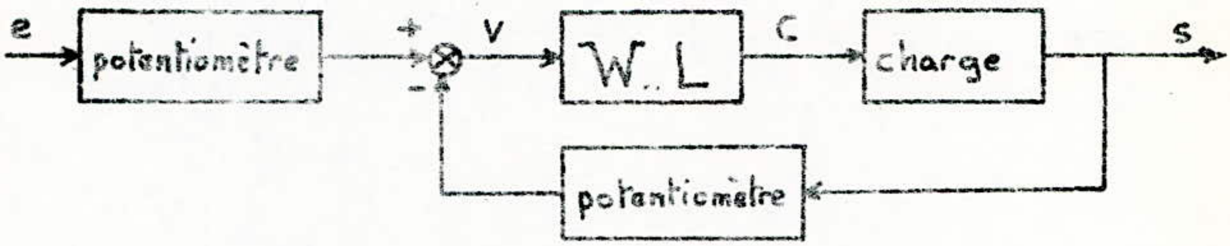
d'où : $\boxed{T_e \dot{I} + I = k_2 V}$ avec : $T_e = \frac{L}{R}$ et $k_2 = \frac{G}{R}$

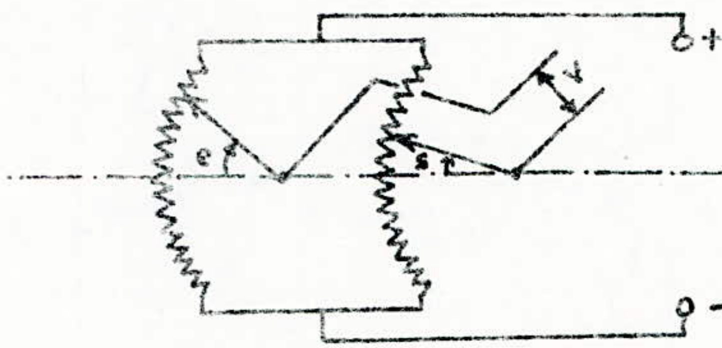
on supposera que la charge entrainée par le moteur est composée d'une inertie -Jc- avec frottement visqueux-f_c- de sorte que -s- désignant la position angulaire de l'arbre de sortie soit

$$J_c \frac{d^2 s}{dt^2} + f_c \frac{ds}{dt} = C$$

cela étant, on désir asservir la position - s - de l'arbre de sortie à une entrée - e.
Pour cela on prend comme tension - V - de commande du Ward - Léonard, une tension (tension d'erreur du servomécanisme) proportionnelle à (e - s) produite par un montage en pont.

$$V = k_3 (e - s)$$





Des deux équations précédantes on déduit par élimination des variables intermidiaires V, I et C la relation entre l'entrée et la sortie - s -

$$\begin{cases} J_c \dfrac{d^2 s}{dt^2} + f_c \dfrac{ds}{dt} = C = k_1 I \\ T_e \dot{I} + I = k_2 V \end{cases} \Longrightarrow I = \frac{k_2 V}{1 + T_e p}$$

d'où : $$J_c . p^2 s + f_c . ps = \frac{k_1 k_2 k_3 \ (e - s)}{1 + T_e p}$$

ou :

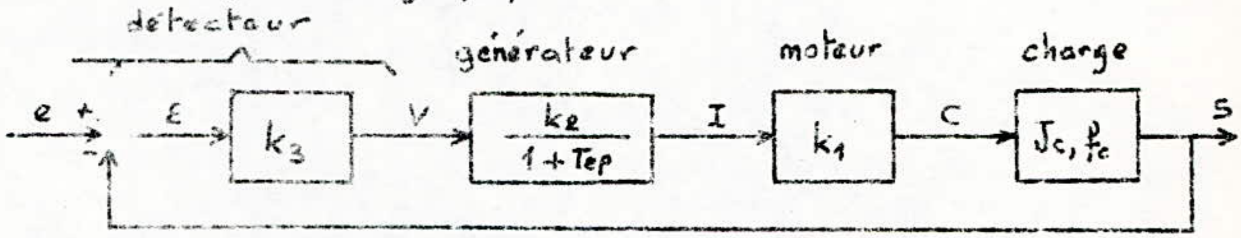
$$\boxed{\frac{s}{e - s} = \frac{K/f_c}{p(1 + T_e p)(1 + T_m p)}} \quad \text{avec} \begin{cases} K = k_1 k_2 k_3 \\ T_m = \dfrac{J_c}{f_c} \end{cases}$$

les équations liant la sortie s (ou l'écart ε) à l'entrée de commande e.

$$J_c \frac{d^2 s}{dt^2} + f_c \frac{ds}{dt} + n\, s(t) = n\, e(t)$$

$$J_c \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + f_c \frac{d\varepsilon}{dt} + n\, \varepsilon(t) = J \frac{d^2 e}{dt^2} + f_c \frac{de}{dt} \qquad \text{avec } n = k_1 k_2 k_3$$

on aura le diagramme synoptique suivant :



d'aprés ce diagramme-bloc, on aura :

$$\frac{s}{\varepsilon} = \frac{k_1 k_2 k_3}{J_c p^2 + f_c p} = \frac{n}{J_c p^2 + f_c p}$$

et : $$\frac{s}{e} = \frac{n}{J_c p^2 + f_c p + n}$$

Remarquons que ce système est du second ordre. En utilisant la méthode de Bode, on devrait étudier le système en boucle ouverte pour voir sa stabilité. en boucle ouverte on aura :

$$\frac{s}{e} = \frac{n/f_c}{p(1+T_m p)(1+T_e p)}$$

la stabilité du systéme dépend du rapport n/f_c, on peut obtenir la stabilité du systeme, en augmentant le rapport n/f_c

<u>étude du systême par les variables d'état</u>

on a les équations :

$$\begin{cases} T_e \cdot \dot{I} + I = k_2 V & (1) \\ J_c \ddot{s} + f_c \dot{s} = C & (2) \\ V = k_3 (v - s) & (3) \end{cases}$$

en mettant en évidence la vitesse du moteur $\vartheta = \dot{s}$ (3')

L'équation (2) devient :

$$T_m \dot{\vartheta} + \vartheta = \frac{1}{f_c} . C \quad (4) \quad \text{avec } T_m = \frac{J_c}{f_c}$$

mais : $C = k_1 I \Rightarrow \dot{I} = \frac{\dot{C}}{k_1}$ (5)

en remplaçant $\dot{I}$ et I dans l'équation (1) on aura :

$$T_e \dot{C} + C = k_1 k_2 k_3 (e - s) = r (e - s) \quad (6)$$

les relations (3) ; (4) et (6) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{s} = 0C + 0.S + \vartheta \\ \dot{\vartheta} = \frac{1}{T_m f_c} C + 0.s - \frac{1}{T_m} \vartheta \\ \dot{C} = -\frac{1}{T_e} C - \frac{r}{T_e} . s + \frac{r}{T_e} . e \end{cases}$$

d'où la matrice :

$$\begin{bmatrix} \dot{C} \\ \dot{s} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_e} & -\frac{r}{T_e} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{T_m f_c} & 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ s \\ \vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r}{T_e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . e$$

qui est sous la forme standard

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Be \\ Y &= CX + De \end{aligned} \quad \text{avec } X = \begin{bmatrix} C \\ s \\ \vartheta \end{bmatrix}$$

l'intérêt de cette méthode est que l'on peut étudier le système à partir des conditions initiales quelconques. Alors que la fonction de transfert n'est

utilisable que lorsque le système part du repos (conditions initiales nulles).
Comme on va s'interesser spécialement à la position angulaire de la charge, on prendra donc - s - comme sortie.

d'où
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

Gouvernabilité - observabilité - Stabilité

* Diagonalisons la matrice d'évolution. A -

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_e} & -\frac{r}{T_e} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{f_c \cdot T_m} & 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -(\lambda + \frac{1}{T_e}) & -\frac{r}{T_e} & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{f_c \cdot T_m} & 0 & -(\lambda + \frac{1}{T_m}) \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice d'évolution sont les racines de l'équation caracteristique:

$$|A - \lambda I| = -(\lambda + \frac{1}{T_e})(\lambda + \frac{1}{T_m}).\lambda + \frac{r}{f_c \cdot T_m T_e} = 0$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 - \frac{T_m + T_e}{T_m \cdot T_e} \lambda^2 - \frac{1}{T_m T_e} . \lambda + \frac{r}{f_c \cdot T_m . T_e} = 0$$

on ne peut pas resoudre cette équation d'une façon générale.
On prendra des cas particuliers : $T_m = T_e = 1$ et $\frac{r}{f_c} = 4$.

le déterminant devient : $-\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$

l'équation a pour racine évidente : $\lambda_1 = +1$
elle deviendra alors :

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 4) = 0$$

les deux autres racines sont :

$$\begin{cases} \lambda_2 = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Remarquons que ces valeurs propres sont distinctes.

* Recherche de la matrice modale :

la matrice des cofacteurs de $[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 1 & +\lambda \\ -4(\lambda+1) & (\lambda+1)^2 & -4 \\ -4 & \lambda+1 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix} = \tilde{A}$

sa matrice transposée est alors : $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & -4(\lambda+1) & -4 \\ 1 & (\lambda+1)^2 & (\lambda+1) \\ \lambda & -4 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$

Pour les différentes valeurs de λ cette matrice $\tilde{A}^T$ deviendra :

$\lambda_1 = 1$ on aura : $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2}$ on aura : $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} -1 + j\sqrt{7} & 2 + j2\sqrt{7} & -4 \\ 1 & \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2} \\ -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2} & -4 & -1 + j\sqrt{7} \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2}$ on aura :
$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} -1-j\sqrt{7} & 2-j2\sqrt{7} & -4 \\ 1 & \left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2} \\ -\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2} & -4 & -1-j\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

La matrice modale est alors avec : $c_1 = 1$; $c_2 = -1$; $c_3 = -1$.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1-j\sqrt{7} & 1+j\sqrt{7} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2} & \frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}$$

la matrice modale a pour déterminant : $|M| = j8\sqrt{7}$

la matrice des cofacteurs de M est : (Δ_{ij})

$$(\Delta_{ij}) = \begin{bmatrix} j\sqrt{7} & -\frac{5}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2} & \frac{5}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2} \\ j4\sqrt{7} & 2-j2\sqrt{7} & -2-j2\sqrt{7} \\ j2\sqrt{7} & 3+j\sqrt{7} & -3+j\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

la transposée de (Δ_{ij}) est (Δ_{ji}) :

$$(\Delta_{ji}) = \begin{bmatrix} j\sqrt{7} & j4\sqrt{7} & j2\sqrt{7} \\ -\frac{5}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2} & 2-j2\sqrt{7} & 3+j\sqrt{7} \\ \frac{5}{2}+j\frac{\sqrt{7}}{2} & -2-j2\sqrt{7} & -3+j\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

la matrice inverse de la matrice modale est : M^{-1}.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16}+j\frac{5\sqrt{7}}{112} & -\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{7}}{28} & \frac{1}{8}-j\frac{3\sqrt{7}}{56} \\ \frac{1}{16}-j\frac{5\sqrt{7}}{112} & -\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{7}}{28} & \frac{1}{8}+j\frac{3\sqrt{7}}{56} \end{bmatrix}$$

la matrice d'évolution étant diagonalisée on calcule la matrice de commande.

$$M^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + j\frac{5\sqrt{7}}{28} \\ \frac{1}{4} - j\frac{5\sqrt{7}}{28} \end{bmatrix}$$

cette matrice de commande ne possède aucune ligne nulle, le système est alors gouvernable.

* observabilité : on calcule la matrice d'observabilité . C.M.

$$C.M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

cette matrice ne possède aucune colonne nulle. Le système est alors
* observable.

* Stabilité :

$$\text{on avait, } \operatorname{diag} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}$$

la première variable possède une partie réelle positive.
donc le système est instable.

Conclusion : notre système : Groupe Ward. Léonard est gouvernable observable.

Dans notre cas particulier $\frac{n}{f_c} = 4$ le système est instable.
on peut le rendre stable en augmentant la valeur de n/f_c.

Conclusion générale :

la theorie des variables d'état montre qu'on peut étudier un système à partir des conditions initiales quelconques tandis que celle des fonctions de transfert exige des conditions initiales nulles.

Par la fonction de transfert d'un systeme, on traite les par-ties à la fois gouvernables et observables et on laisse tomber les parties ingouvernables et (ou) inobservables, tandis que par la theorie des variables d'état on traite toutes les parties, gouvernables ou non, observables ou non, donc c'est une representation qui n'est pas minimale. Il existe ainsi une hierarchie entre les deux repr-ésentations. La plus complète est la représentation d'état. la fonc-tion de transfert lui est inferieure en ce qu'elle néglige les parties ingouvernables et les parties inobservables du système.

On a vu aussi que dans l'étude par la fonction de trans-fert on peut avoir des simplifications de poles et de zéros, par contre, par les variables d'état on ne peut pas avoir ces simplifications donc il est possible d'avoir un système stable par l'étude des fonctions de transfert et instable par celle des var-iables d'état.

En ce qui concerne les effets du feedback par la metho-de moderne des variables d'état on peut dire que :

si une partie instable d'un système est ingouvernable ou inobservable il n'éxiste pas de feedback qui peut la stabiliser par contre si une partie instable d'un système est gouvernable ou observable il existe toujours un feedback qui peut la stabi-liser.

On nota aussi la difficulté confrontée lors de la mise en équation d'état du système qui présente un dérivateur à l'entrée et ceci resulte du fait qu'en simulation on n'utilise jamais de derivateur.

Finalement nous suggererons l'etude et la réalisation d'un régulateur adaptatif à variables d'état pour des processus industriels. Ce regulateur consistera à localiser à chaque instant les parametres d'un système variant et qui corrigera ses parametres de façon à reguler le système.

annexes

I _ Matrices.

1.1. Inversion d'une matrice : deux matrices sont inverses si leur produit est égal à la matrice unité (I).

1.1.1. condition : Pour qu'une matrice soit inversible il faut que son déterminant soit different de zéro.

1.1.2 - détermination : Pour déterminer l'inverse d'une matrice - A - on procède de la manière suivante.

* Remplacer chaque élément a_{ij} de A par son cofacteur Δ_{ij}. on obtient ainsi la matrice des cofacteurs (Δ_{ij}).
* Transposer la matrice des cofacteurs. on obtient ainsi la matrice (Δ_{ji})
* Diviser chacun des termes de cette matrice (Δ_{ji}) par le déterminant de la matrice à inverser - A - qui est $|A|$

on obtient ainsi la matrice inverse de - A -

$$A^{-1} = \frac{(\Delta_{ji})}{|A|}$$

1.1.3. Exemple :

$$\text{Soit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

* Son déterminant est : $|A| = 15$ donc il est different de zéro.
* Sa matrice des cofacteurs est :

$$\Delta_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 4 & -11 & 6 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

on rappelle que le cofacteur de a_{ij} est son mineur muni du signe $(-1)^{i+j}$

* la transposée de (Δ_{ij}) sera :

$$\Delta_{ji} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 10 & -11 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

* L'inverse de la matrice A est : $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{11}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

1.2. Valeurs propres d'une matrice

Soit une matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

les valeurs propres de cette matrice sont les racines de l'équation carac-téristique :

$$\det\left[A-\lambda I\right] = \left|A-\lambda I\right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

1.2.2. Exemple :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

alors : $\left[A-\lambda I\right] = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\left|A-\lambda I\right| = (1-\lambda)(2-\lambda)-6 = \lambda^2-3\lambda-4 = 0$$

d'où : $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$ λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice A.

Dans cet exemple λ_1 et λ_2 sont réelles distinctes. D'une façon générale, elles peuvent être réelles ou complexes, distinctes ou multiples.

1-3- Matrice des vecteurs propres ou matrice modale : M

1-3-1- définition :

c'est la matrice dont les colonnes sont constituées par les composantes des vecteurs propres de la matrice -A-.

on la désigne par M.

$$M = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

1-3-2. détermination rapide de la matrice modale

Il suffit de remplacer chaque élément de la matrice $[A - \lambda I]$ par son cofacteur, puis de transposer la matrice des cofacteurs ; on obtient donc une matrice notée : $[A - \lambda I]^+$ qu'on appelle matrice adjointe de A. La matrice modale M aura des colonnes proportion-nelles aux colonnes de $[A - \lambda I]^+$ non nulles dans laquelle on fait : $\lambda = \lambda_i$

1-3-3- Exemple :

on reprend l'exemple précédent

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ on avait trouvé $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$.

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

la matrice des cofacteurs est : $\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

d'où $[A - \lambda I]^+ = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

pour $\lambda_1 = -1$ on aura : $[A - \lambda_1 I]^+ = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

pour $\lambda_2 = 4$ on aura : $[A - \lambda_2 I]^+ = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

1.3.4. Propriété remarquable de la matrice modale :

le produit des trois matrices donne : $$M^{-1}.A.M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}A$$

où $(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \ldots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres de la matrice. A.

cette propriété n'est valable que dans les cas suivants:

— Pour toutes les matrices dont les valeurs propres sont distinctes.

— Pour une partie des autres (qui ont un spectre dégénéré).

Malgré cette réserve, la propriété $M^{-1}.A.M = \text{diag}(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \cdots \lambda_n)$ conserve un large champ d'application d'où le principe de la diagonalisation de la matrice _A .

1-4- Diagonalisation d'une matrice

Soit l'équation d'état standard :

$$\dot{X} = AX + BU$$

posons : $X = MZ$ d'où : $\dot{X} = M\dot{Z} = AMZ + BU$

En multipliant par : M^{-1} on aura :

$$\dot{Z} = M^{-1}AMZ + M^{-1}BU = \text{diag}(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \ldots, \lambda_n) Z + M^{-1}BU$$

Supposons que le produit $M^{-1}B$ donne une matrice colonne $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

d'où : $$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} U$$

<u>Remarque</u> : Quand une matrice a un spectre dégénéré (valeurs propres multi-ples), la relation $M^{-1}AM$ peut conduire à une forme de Jordan

caractérisée par trois sortes de termes :

* Des termes diagonaux constitués par des valeurs propres de la matrice.
* Des termes superdiagonaux situés immédiatement après les précédents et égaux à l'unité.
* Des termes nuls partout ailleurs.

Mais ces formes de Jordan n'ont pas beaucoup d'intérêt (devant les formes diagonales) pour notre étude.

BIBLIOGRAPHIE

— Systèmes linéaires – variables d'état
J – Lifermann

— la représentation d'état pour l'étude des systèmes dynamiques
Tome I – variables et équations d'état
Tome II – Commande et observation.
par : Jean Charles Gille et Marc clique.

— Commande et regulation pour calculateur numérique.
par : Claude Foulard
Sylviane Gentil
Jean-Paul Sandaz

— Eléments d'automatique.
par : Pierre Faurre et Michel Depeyrot.