

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE SUJET :  
المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Rétrospective sur le traitement d'images

Proposé par :

D. BERKANI

R. SADOUN

Etudié par :

Saïd ABBED

Abdenour MEZERREG

Dirigé par :

D. BERKANI

R. SADOUN

4-27-1986

PROMOTION : JUIN 1986



## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET :

# Rétrospective sur le traitement d'images

Proposé par :

D. BERKANI  
R. SADOUN

Etudié par :

Said ABBED  
Abdenour MEZERREG

Dirigé par :

D. BERKANI  
R. SADOUN

PROMOTION : JUIN 1986

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

A mon père et à ma mère.

A tous les membres de la famille et surtout à BRAHIM pour ses sacrifices et son courage.

A tous les amis.

Je dédie ce modeste travail.

ABDENOUR.

A mon père et à ma mère.

A mes soeurs et frères, surtout HOUSSAME-EDDINE RAOUF.

A toute ma famille.

A mes amis sincères.

Je dédie ce modeste travail.

SAID



## REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Nous remercions Mr D.BERKANI d'avoir proposé ce sujet, et lui formulons l'expression de notre profonde reconnaissance pour son aide précieuse durant la réalisation de ce travail.

Nous adressons également à Mr R.SADDUN nos vifs remerciements pour ses conseils judicieux.

Nos remerciements vont aussi aux membres du jury, pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger notre modeste travail.

Enfin, nous exprimons toute notre gratitude à l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.



INTRODUCTION

CHAPITRE I: DISCRETISATION ET RECONSTITUTION DE L'IMAGE CONTINUE

- 1.Echantillonnage et reconstitution.....
  - 1.1.Echantillonnage deterministe.....
  - 1.2.Echantillonnage à distribution aléatoire..
  - 1.3.Reconstitution de l'image.....
  - 1.4.Erreurs de recouvrement.....
- 2.Prefiltrage.....
- 3.Quantification.....

CHAPITRE II: CARACTERISATION MATHEMATIQUE DE L'IMAGE DISCRETE

- 1.Representation vectorielle de l'image.....
- 2.Characterisation statistique de l'image discrete
  - 2.1.Representation matricielle.....
  - 2.2.Representation vectorielle.....

CHAPITRE III: OPERATEURS LINEAIRES ET OPERATEURS DE SUPERPOSITION

- 1.Operateurs lineaires.....
  - 1.1.Operateurs linéaires généralisés.....
  - 1.2.Representation statistique des operateurs lineaires.....
  - 1.3.Operateurs pseudo-inverses.....
    - 1.3.a.Inverse généralisé.....
    - 1.3.b.Inverse des moindres carrés.....
    - 1.3.c.Inverse conditionnel.....

- 1.4.Solutions pour les systemes linéaires.....
- 1.5.Solutions des systemes linéaire consistants
- 2.Operateurs de superposition à étendue finie.....



CHAPITRE IV: TRANSFORMATIONS UNITAIRES A DEUX DIMENSIONS

- 1.Operateurs des transformations unitaires.....
- 2.Transformation de FOURIER.....
- 3.Transformation de HADAMARD.....
- 4.Transformation de HAAR.....
- 5.Transformation de KARHUNEN-LOEVE.....
- 6.Algorithmes de calcul.....
- 7.Filtrage linéaire généralisé.....

CHAPITRE V: REHAUSSEMENT DES IMAGES

- 1.Rehaussement par modification de l'échelle des gris.....
- 2.Rehaussement par modification d'histogramme....
- 3.Atténuation du bruit.....
- 4.Rehaussement de bords.....
- 5.Traitement des transformées.....
  - 5.1.Enracinement des coefficients.....
  - 5.2.Cepstre généralisé.....

CHAPITRE VI: RESTAURATION DES IMAGES

- 1.Techniques algebriques de la restauration.....
  - 1.1.Techniques de filtrage spatial de l'image continue.....
    - 1.1.a.Filtrage inverse.....
    - 1.1.b.Filtre de WIENER-Bruit additif.....
    - 1.1.c.Filtre de WIENER-Image stochastique.....



- 1.1.d.Filtre de WIENER-Brouillage stochastique.....
- 1.1.e.Application aux images discrete.....
- 1.2.Restauration spatiale pseudo-inverse.....
- 1.3.Restauration spatiale régressive.....
- 2.Techniques de la restauration de l'image.....
- 2.1.Restauration des erreurs de recouvrement.....
- 2.2.Corrrection de l'erreur d'interpolation.....
- 2.3.Restauration homomorphique.....
- 2.4.Restauration d'un espace variant.....
- 2.5.Restauration recursive.....
  - a.Formulation bidimensionnelle.....
  - b.Formulation unidimensionnelle.....
- CHAPITRE VII: EXTRACTION DES CARACTERISTIQUES DE L'IMAGE
- 1.Characteristiques des histogrammes.....
  - 1.1.Histogramme du premier ordre.....
  - 1.2.Histogramme du second ordre.....
- 2.Détection des contours de luminance.....
  - 2.1.Methodes linéaires.....
    - a.Différenciation discrète.....
    - b.Convolution.....
  - 2.2.Methodes non-linéaires.....
    - a.Methode de ROBERTS.....
    - b.Methode de SOBEL.....
    - c.Methode de KIRSCH.....
    - d.Methode de WALLIS.....
- 3.Ajustement des contours.....
- CONCLUSION
- BIBLIOGRAPHIE

## INTRODUCTION

Le traitement numérique des images s'est considérablement développé pendant les dernières années à cause de l'utilisation de plus en plus large de l'image dans d'innombrables applications. Ce développement est lié à l'amélioration de la vitesse et le rapport qualité/prix des calculateurs numériques, ainsi que le développement des méthodes de traitement du signal et la mise au point d'algorithmes rapides pour le calcul.

Le traitement numérique des images connaît plusieurs applications dans les domaines scientifique et technique: industrie, génie biomedical, espace, ... Il est utilisé pour l'amélioration des images transmises à travers l'espace en compensant les erreurs de sensibilité et de transmission. Il est aussi utilisé dans la classification des terrains et la détection des ressources terrestres à partir des photos prises par satellites. La formation et le réhaussement des images biomédicales incluant la radiographie et le scanner, ainsi que l'amélioration de la résolution des images obtenues par le microscope électronique, constituent d'autres applications du traitement numériques des images. Dans le domaine industriel, les applications sont nombreuses; le traitement des images permet de doter des automates de "yeux" leurs permettant d'analyser des scènes et de reconnaître les objets qu'ils manipulent.

Le but de notre étude, consiste à donner les concepts fondamentaux permettant de représenter une image réelle sous une forme numérique apte à subir un traitement par ordinateur. Après l'introduction de certains concepts mathématiques indispensables



au traitement, nous présentons des modèles mathématiques des différentes dégradations que peut subir une image lors de sa formation, de sa transmission ou de sa réception, ainsi que les moyens d'y remédier. Des méthodes d'extraction de caractéristiques et d'informations contenues dans une image, sont aussi présentées.

I.1) Echantillonnage et reconstitution de l'image.

Dans la conception et l'analyse des systèmes d'échantillonnage et de reconstitution, les images sont considérées comme étant des phénomènes déterministes. Mais, dans certaines situations, il est plus avantageux de considérer l'image entrante d'un système de traitement (principalement le bruit d'entrée) comme étant le résultat de l'échantillonnage d'un processus aléatoire bidimensionnel.

I.1.1) Echantillonnage déterministe.

Soit  $F_i(x,y)$  la fonction continue représentant une caractéristique (intensité, densité photographique, ...) de l'image à traiter. Un échantillonnage spatial parfait de celle-ci consiste à multiplier  $F_i(x,y)$  par la fonction de Dirac bidimensionnelle définie par:

$$S(x,y) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \delta(x-j_1 \Delta x, y-j_2 \Delta y) \quad (I.1)$$

L'image échantillonnée spatialement est donc représentée par:

$$\begin{aligned} F_p(x,y) &= F_i(x,y) S(x,y) \\ &= \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} F_i(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y) \delta(x-j_1 \Delta x, y-j_2 \Delta y) \end{aligned} \quad (I.2)$$

On considère la représentation  $\mathcal{F}_p(w_x, w_y)$  du domaine des fréquences spatiales de l'image échantillonnée, obtenue en prenant la transformée de Fourier continue bidimensionnelle de  $F_p(x,y)$ :

$$\mathcal{F}_p(w_x, w_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F_p(x,y) \exp[-i(xw_x + yw_y)] dx dy \quad (I.3)$$

D'après le théorème de convolution de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}_p(w_x, w_y) = \mathcal{F}_I(w_x, w_y) * \mathcal{S}(w_x, w_y) \quad (1.4)$$

où  $\mathcal{F}_I(w_x, w_y)$  et  $\mathcal{S}(w_x, w_y)$  sont respectivement les transformées de Fourier bidimensionnelle de  $F_i(x, y)$  et  $S(x, y)$ .  $\mathcal{S}(w_x, w_y)$  est donnée par :

$$\mathcal{S}(w_x, w_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \delta(w_x - j_1 w_{xs}, w_y - j_2 w_{ys}) \quad (1.5)$$

$$\text{où } w_{xs} = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad \text{et } w_{ys} = \frac{2\pi}{\Delta y}$$

représentent les fréquences d'échantillonnage du domaine de Fourier respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ . Admettons que le spectre de l'image initiale est limité, donc :

$$\mathcal{F}_I(w_x, w_y) = 0 \quad \text{pour } |w_x| > w_{xc} \quad \text{et } |w_y| > w_{yc}$$

$w_{xc}$  et  $w_{yc}$  étant les fréquences de coupures.

En effectuant la convolution de (1.4) on obtient :

$$\mathcal{F}_p(w_x, w_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_I(w_x - j_1 w_{xs}, w_y - j_2 w_{ys}) \quad (1.6)$$

D'après cette dernière relation on voit que le spectre de l'image échantillonnée est composée du spectre de l'image idéale répété indéfiniment dans un plan de fréquences suivant une grille de pas  $\frac{2\pi}{\Delta x}$  et  $\frac{2\pi}{\Delta y}$ . Ce fait est illustré par la figure (1.1).

### 1.1.2) Echantillonnage à distribution aléatoire.

Soit  $F_i(x, y)$  un processus continu aléatoire stationnaire bidimensionnel, connaissant sa moyenne  $\mu_{F_i}$  et sa fonction d'autocorrélation définie par :

$$\mathcal{R}_{F_i}(\tau_x, \tau_y) = E[F_i(x_1, y_1) F_i^*(x_2, y_2)] \quad (1.7)$$



ou  $\tau_x = x_1 - x_2$  et  $\tau_y = y_1 - y_2$

Ce processus est échantillonné spatialement par une fonction de Dirac:

$$F_p(x, y) = F_i(x, y) S(x, y) = F_i(x, y) \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y) \quad (I.8)$$

La fonction d'autocorrélation du processus échantillonné est:

$$R_{F_p}(x_1, x_2; y_1, y_2) = E[F_p(x_1, y_1) F_p^*(x_2, y_2)] \quad (I.9)$$

$$\text{ou : } R_{F_p}(x_1, x_2; y_1, y_2) = E[F_i(x_1, y_1) F_i^*(x_2, y_2)] S(x_1, y_1) S(x_2, y_2) \quad (I.10)$$

Le premier terme du membre de droite de (I.10) est la fonction d'autocorrélation de l'image originale. Le produit de deux fonctions de Dirac est lui-même une fonction de DIRAC de la forme:

$$S(x_1, y_1) \cdot S(x_2, y_2) = S(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = S(\tau_x, \tau_y) \quad (I.11)$$

Donc la distribution du processus échantillonné est stationnaire avec une fonction d'autocorrélation définie par:

$$R_{F_p}(\tau_x, \tau_y) = R_{F_i}(\tau_x, \tau_y) S(\tau_x, \tau_y) \quad (I.12)$$

En prenant la transformée de Fourier bidimensionnelle de (I.12) on obtient:

$$\mathcal{H}_{F_p}(w_x, w_y) = \mathcal{H}_{F_i}(w_x, w_y) * \mathcal{H}(w_x, w_y) \quad (I.13)$$

et d'après (I.6):

$$\mathcal{H}_{F_p}(w_x, w_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{F_i}(w_x - j_1 w_{xs}, w_y - j_2 w_{ys}) \quad (I.14)$$

Donc le spectre de puissance de l'image échantillonnée est composé de reproductions du spectre de l'image continue dans le domaine des fréquences spatiales, aux points multiples des

fréquences  $\frac{2\pi}{\Delta x}$  et  $\frac{2\pi}{\Delta y}$ .

Si le spectre de puissance de l'image originale est limité, ie:

$$\mathcal{F}_i(w_x, w_y) = 0 \quad \text{pour } |w_x| > w_{xc} \text{ et } |w_y| > w_{yc}.$$

ou  $w_{xc}$  et  $w_{yc}$  sont les fréquences de coupures. Alors les spectres individuels de (I.14) ne vont pas se chevaucher, si les périodes d'échantillonnages spatiales sont choisies telles que:

$$\Delta x \leq \frac{\pi}{\omega_{xc}} \quad \text{et} \quad \Delta y \leq \frac{\pi}{\omega_{yc}}.$$

### I.1.3) Reconstitution de l'image.

On a montré précédemment que l'image échantillonnée possède un spectre infini (répétition à l'infini d'un spectre fini). De ce fait pour reconstituer l'image originale, il faudrait éliminer tous les spectres secondaires et ne garder que celui correspondant à  $j_1 = j_2 = 0$ . Ceci est réalisé à l'aide d'un filtrage spatial linéaire. Soit  $R(x, y)$  la réponse impulsionnelle du filtre, et  $\mathcal{H}(w_x, w_y)$  sa transformée de Fourier bidimensionnelle. L'image reconstituée  $F_r(x, y)$  est décrite par :

$$F_r(x, y) = F_p(x, y) * R(x, y) \quad (I.15)$$

et d'après (I.2) on peut écrire:

$$F_r(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} F_i(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y) R(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y) \quad (I.16)$$

Le spectre de l'image reconstituée est donné par:

$$\mathcal{F}_R(w_x, w_y) = \mathcal{F}_p(w_x, w_y) \mathcal{H}(w_x, w_y) \quad (I.17)$$

et d'après (I.6):

$$\mathcal{F}_R(w_x, w_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \mathcal{H}(w_x, w_y) \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_i(w_x - j_1 w_{xs}, w_y - j_2 w_{ys}) \quad (I.18)$$



Il est clair d'après (I.18) que s'il n'y a pas de recouvrement et si  $\mathcal{F}(w_x, w_y)$  élimine tous les spectres pour  $j_1, j_2 \neq 0$  alors le spectre de l'image reconstituée est égal à celui de l'image originale.

D'après la figure (1.2) la première condition est réalisée si :

$$w_{xc} \leq \frac{\omega_{xs}}{2} \text{ d'où } \Delta x \leq \frac{\pi}{\omega_{xc}} \quad (\text{I.19a})$$

$$w_{yc} \leq \frac{\omega_{ys}}{2} \text{ d'où } \Delta y \leq \frac{\pi}{\omega_{yc}} \quad (\text{I.19b})$$

Donc les pas d'échantillonnage doivent être inférieurs ou égaux à la demi période du plus petit détail contenu dans l'image. Cette condition équivaut à celle du théorème d'échantillonnage pour les signaux temporels.

Si les égalités sont réalisées dans les relations (I.19), alors l'image est dite échantillonnée à son niveau de Nyquist. Si  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont plus petites que le niveau de Nyquist alors l'image est dite sur-échantillonnée. À l'opposé l'image est dite sous-échantillonnée. Si l'image originale est échantillonnée à un niveau spatial suffisant pour empêcher le recouvrement spectral, la reconstitution exacte de l'image peut être achevée à l'aide du filtre suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(w_x, w_y) &= K = C \frac{t_e}{2} && \text{pour } |w_x| \leq w_{xL} \text{ et } |w_y| \leq w_{yL} . \\ \mathcal{F}(w_x, w_y) &= 0 && \text{ailleurs} \end{aligned}$$

Ce filtre satisfait les conditions exactes de reconstitution, si  $w_{xL} > w_{xc}$  et  $w_{yL} > w_{yc}$ , comme on peut le voir sur la figure (1.2).

Un processus continu  $F(x, y)$  peut être reconstitué à partir des échantillons du processus idéal par la formule d'interpolation suivante :

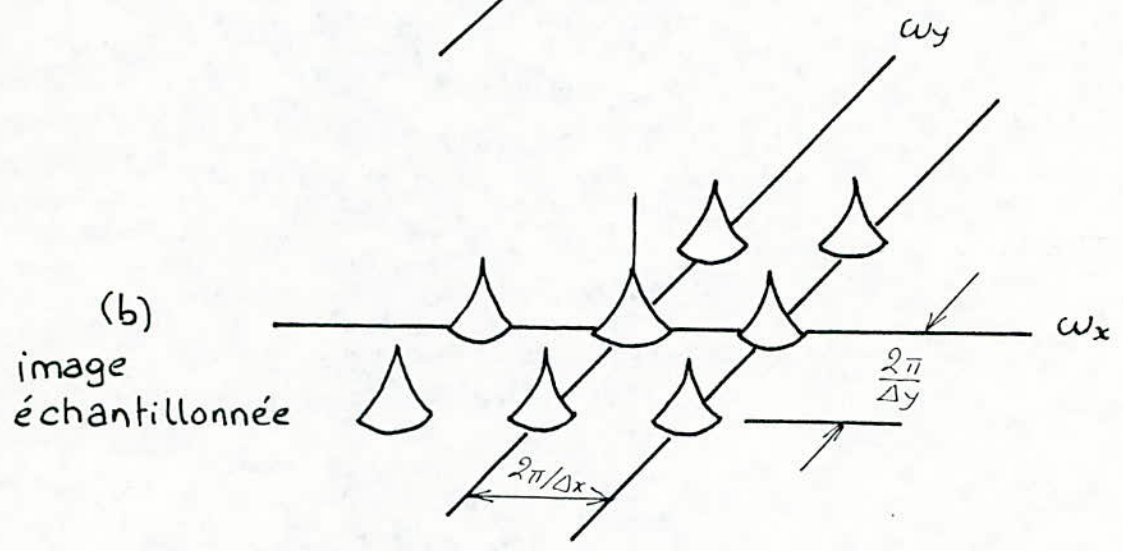
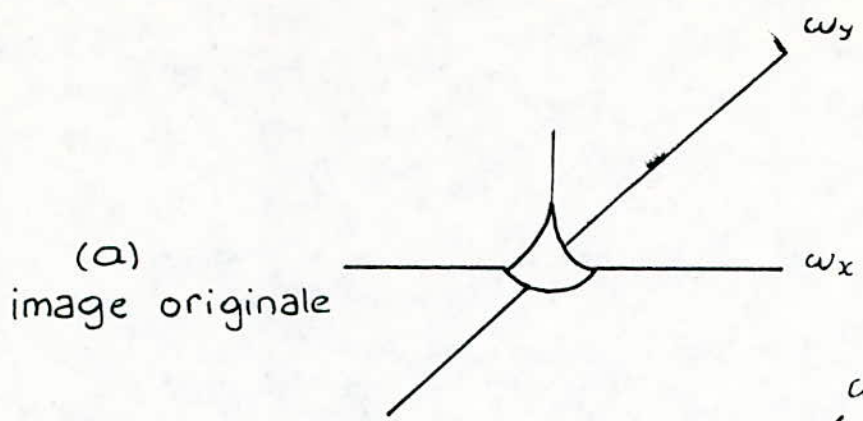


Figure 1.1

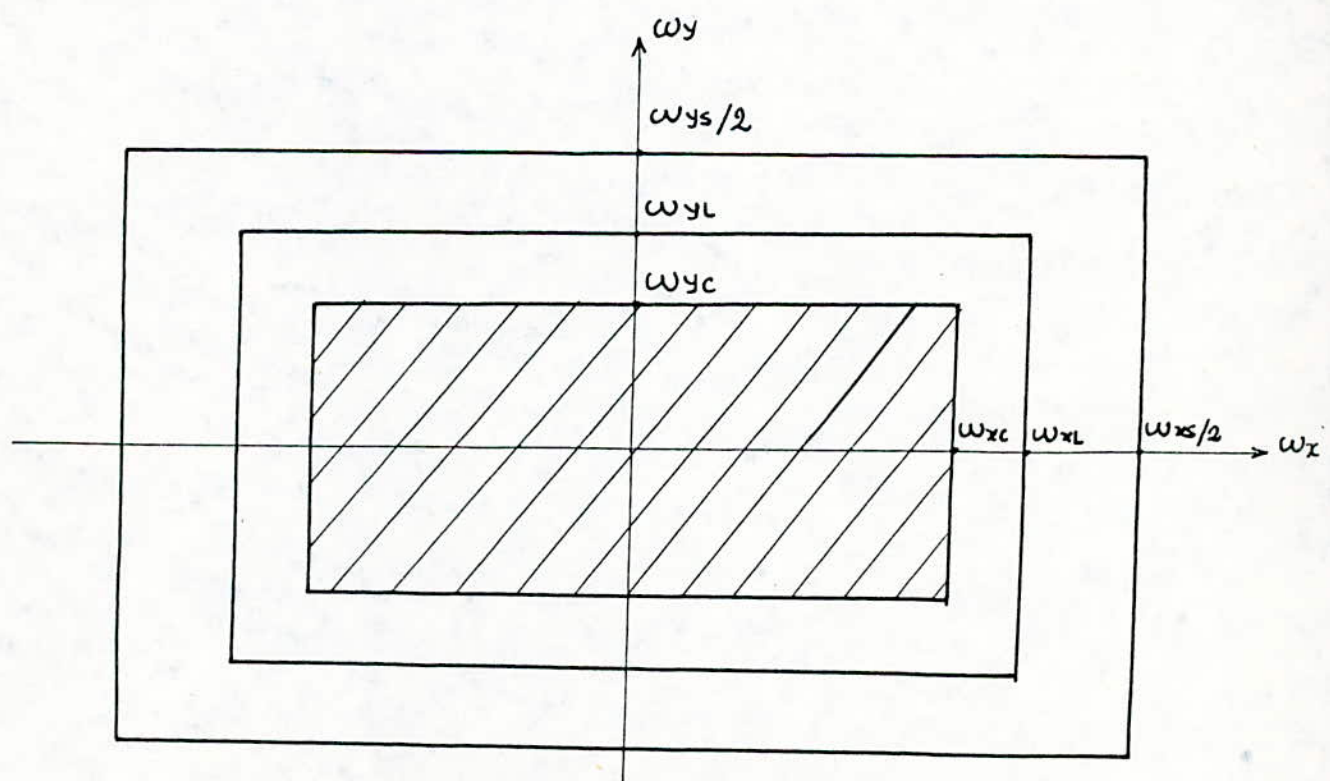


Figure 1.2

$$Fr(x,y) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} Fi(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y) R(x-j_1 \Delta x, y-j_2 \Delta y) \quad (I.20)$$

ou  $R(x,y)$  est une fonction d'interpolation déterministe. L'image reconstituée et l'image originale peuvent être égalisées au sens du carré de la moyenne

#### I.1.4) Erreurs de recouvrement.

Dans le but de reconstituer l'image initiale, il est nécessaire de limiter la bande de l'image à échantillonner et spécialement échantillonner à un niveau de Niquist ou plus, et interpoler correctement les échantillons obtenus. Les erreurs de recouvrement sont le fait d'un recouvrement spectral résultant d'un sous-échantillonnage comme indiqué par les régions hachurées sur la figure (13).

Le sous-échantillonnage de l'image crée des composantes de basses fréquences spatiales dans la reconstitution. D'après (I.6) le spectre d'une image échantillonnée peut être écrit sous la forme suivante:

$$\mathcal{F}_p(w_x, w_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \left[ \mathcal{F}_I(w_x, w_y) + \mathcal{F}_Q(w_x, w_y) \right] \quad (I.21)$$

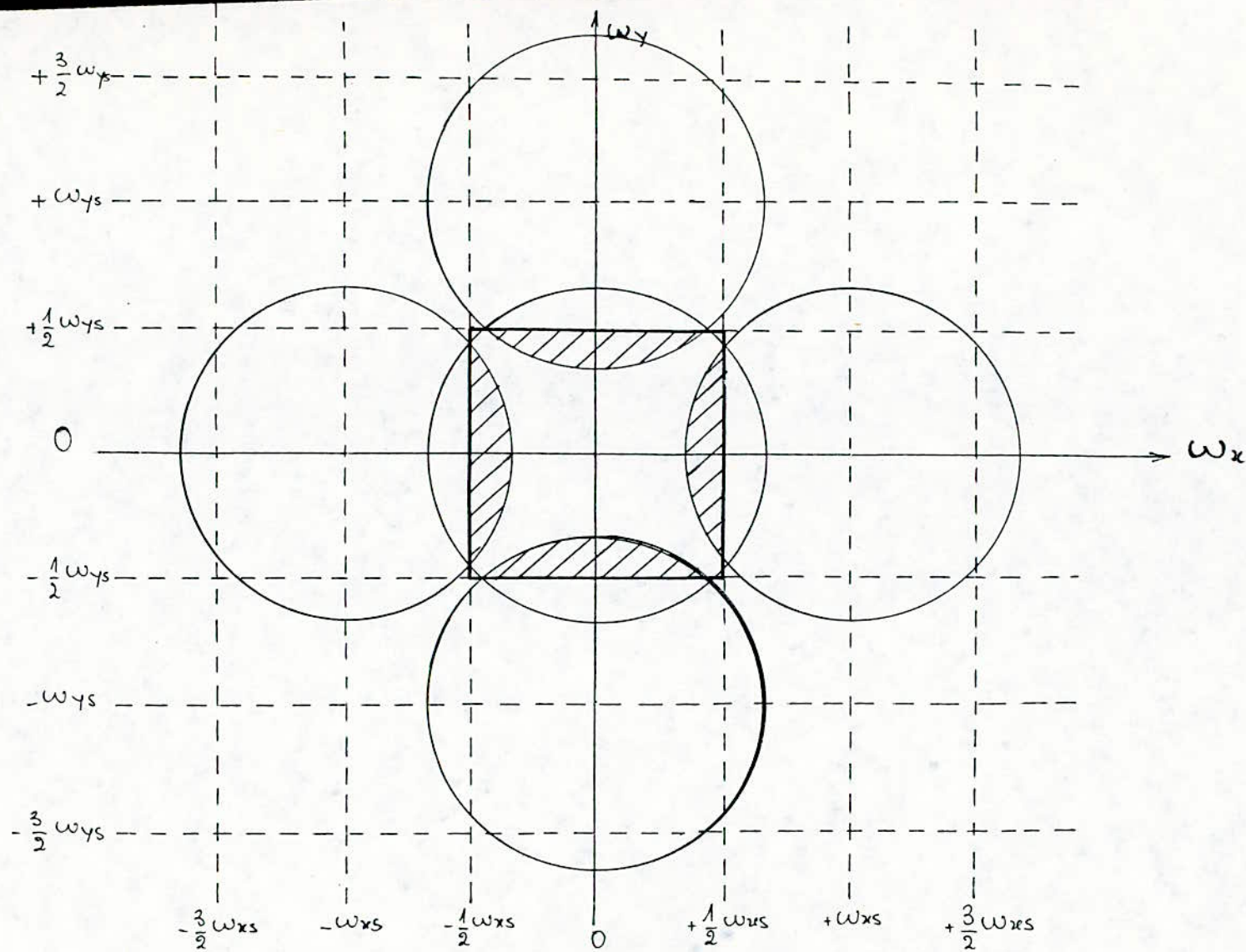
ou le terme: 
$$\mathcal{F}_Q(w_x, w_y) = \sum_{\substack{j_1=-\infty \\ j_1 \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{j_2=-\infty \\ j_2 \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{F}_I(w_x - j_1 w_{xs}, w_y - j_2 w_{ys}) \quad (I.22)$$

décrit le spectre de la composante de plus haut ordre de l'image échantillonnée répété avec des fréquences  $w_{xs} = \frac{2\pi}{\Delta x}$  et  $w_{ys} = \frac{2\pi}{\Delta y}$ .

A cause de ce terme, la reconstitution de l'image par un filtre donne:

$$Fr(x,y) = Fi(x,y) + A(x,y) \quad (I.23)$$





Spectre d'une fonction bidimensionnelle Sous-échantillonné

Figure 1.3

$$\text{ou: } A(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\frac{\omega_x}{2}}^{+\frac{\omega_x}{2}} \int_{-\frac{\omega_y}{2}}^{+\frac{\omega_y}{2}} \mathcal{F}_Q(\omega_x, \omega_y) \exp[-i(\omega_x x + \omega_y y)] d\omega_x d\omega_y \quad (1.24)$$

represente la quantité due aux erreurs de recouvrement.

## 1.2) Prefiltrage.

Un système échantillonneur analyse une image donnée  $F_i(x,y)$  à l'aide d'un faisceau concentré sur un point de l'image. La quantité de lumière réfléchie ou transmise est une mesure de la luminance du point considéré. A cause des imperfections du système optique, ce faisceau n'est pas ponctuel. La luminance représente alors une valeur moyenne sur une petite région autour du point visé. Soit  $Y_i(x,y)$  la fonction représentant la forme de l'ouverture du faisceau. La luminance mesurée effectivement au point  $(x_0, y_0)$  est donnée par:

$$P_A(x_0, y_0) = \iint_{(\Sigma)} F_i(\alpha, \beta) Y_i(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) d\alpha d\beta \quad (1.25)$$

ou  $(\Sigma)$  représente l'étendue suffisamment petite de la fonction  $Y_i(x,y)$ . A ce produit de convolution correspond, dans le domaine fréquentiel, le produit simple suivant:

$$P_A(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F}_i(\omega_x, \omega_y) Y_i(\omega_x, \omega_y) \quad (1.26)$$

La luminance réelle est donc filtrée par un filtre dont les caractéristiques sont décrites par  $Y_i(\omega_x, \omega_y)$ . Si la forme de  $Y_i(\omega_x, \omega_y)$  est connue, et si le filtrage précédent est gênant, on peut corriger le défaut par filtrage inverse. La réponse fréquentielle de ce filtre correcteur est simplement l'inverse de  $Y_i(\omega_x, \omega_y)$ .



### I.3) Quantification de la luminance.

Pour un traitement numérique, les échantillons de l'image doivent être quantifiés. En principe ceci est réalisé en divisant la gamme dynamique de la luminance d'une image en un nombre fini d'intervalles, et en attribuant à toutes les valeurs d'un intervalle une seule valeur de luminance. Le choix du nombre d'intervalles et de leur repartition dépend de deux facteurs principaux. Le premier est l'oeil de l'observateur (facteur subjectif), le second est le support physique sur lequel on désire reproduire l'image quantifiée (facteur objectif). Principalement il existe deux sortes de quantifications de la luminance; linéaire et non-linéaire.

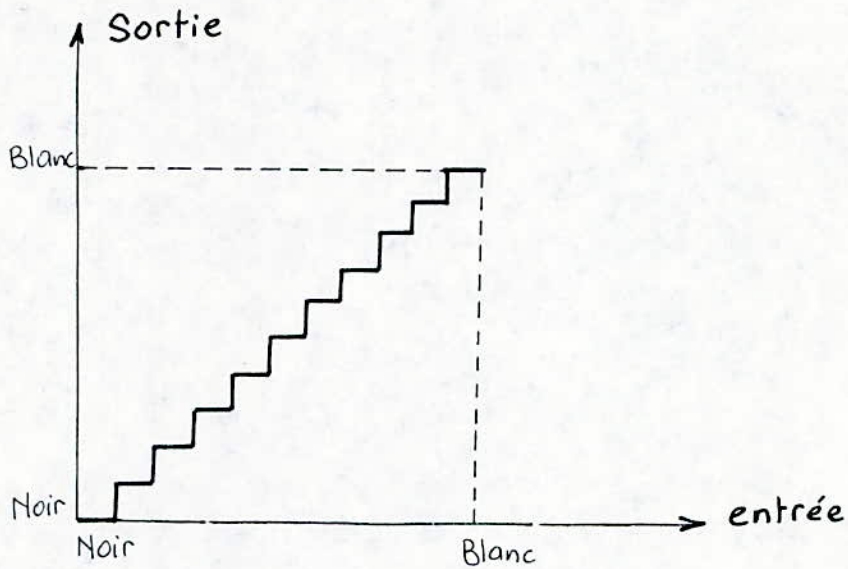
#### I.3.1) Quantification linéaire.

Lorsque la distribution des intervalles de quantification est uniforme, la loi entre la luminance originale et celle quantifiée est une loi linéaire, constante par intervalle. Dans ce cas la même importance est accordée à toutes les régions de la gamme dynamique (figure 1.4.a)

#### I.3.2) Quantification non-linéaire.

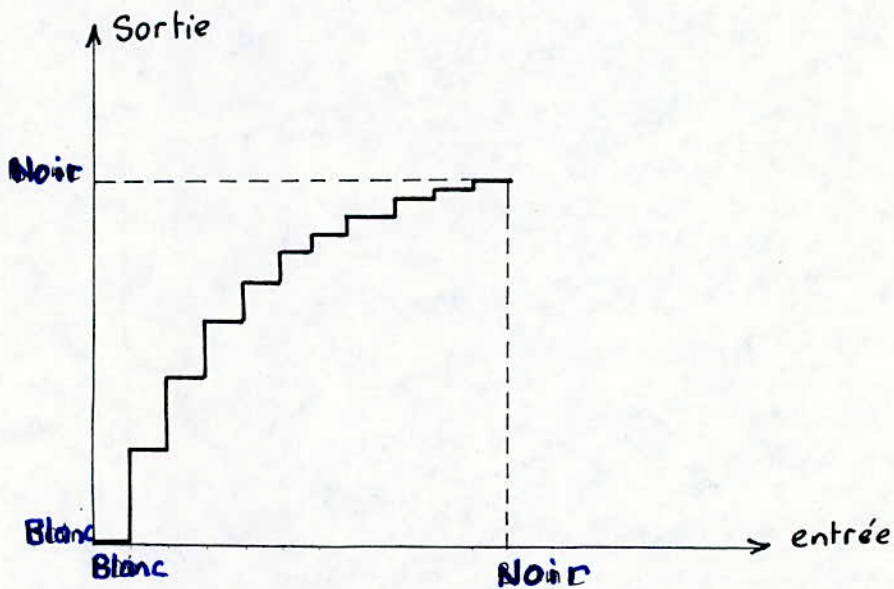
L'image quantifiée étant généralement destinée à un observateur, on peut utiliser une loi mieux adaptée aux propriétés de l'oeil. Ceci est motivé par des raisons économiques. Le but de la quantification non-linéaire est de diminuer le nombre de bits par échantillon. L'oeil étant très sensible dans l'obscurité (vision nocturne par batonnets), on peut alors utiliser une loi de quantification avec des niveaux plus serrés vers le noir, et des

niveaux plus espacés vers le blanc (figure 1.4.b). La loi non-linéaire la plus utilisée est la loi logarithmique.



(a) Quantification linéaire

Figure 1.4



(b) Quantification logarithmique

## CHAPITRE II: CARACTERISATION MATHÉMATIQUE DE L'IMAGE DISCRETE

Dans le chapitre précédant nous avons présenté une caractérisation mathématique de l'image continue. Dans ce chapitre nous allons développer un formalisme pour présenter l'image discrète du point de vue déterministe et statistique.

Definition:

Le produit direct à gauche ou produit de Kronecker d'une matrice  $\underline{A}(P \times Q)$  et d'une matrice  $\underline{B}(M \times N)$  est une matrice  $\underline{C}(PM \times QN)$  définie par:

$$\underline{C} = \underline{A} \otimes \underline{B} = \begin{bmatrix} B(1,1) \cdot \underline{A} & \dots & B(1,N) \cdot \underline{A} \\ \vdots & & \vdots \\ B(M,1) \cdot \underline{A} & \dots & B(M,N) \cdot \underline{A} \end{bmatrix}$$

$\otimes$  est le symbole du produit direct.

On peut définir d'une manière complémentaire le produit direct à droite. Dans la suite seul le produit direct à gauche sera considéré.

### II.1) Représentation vectorielle de l'image.

Pour pouvoir appliquer facilement les résultats obtenus dans le traitement des signaux unidimensionnels au traitement de l'image qui est un signal bidimensionnel, il suffit de représenter l'image sous forme d'un vecteur. De plus la représentation de l'image sous forme de vecteur est plus compacte et plus souple à manier dans les calculs que la représentation sous forme matricielle.

Le passage de l'une à l'autre des deux représentations peut être réalisé en utilisant le vecteur opérationnel  $\underline{v}_N(N \times 1)$  et la



matrice  $\underline{N}_n (N_1 N_2 \times N_1)$  définis par :

$$\underline{v}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-1 \\ n \text{ (II.1)} \\ n+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ N_2 \end{matrix}$$

$$\underline{N}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-1 \\ n \\ n+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ N_2 \end{matrix} \quad (\text{II.2})$$

La représentation vecteur de la matrice de  $\underline{F}$  est donnée par l'opération :

$$\underline{f} = \sum_{n=1}^{N_2} \underline{N}_n \underline{E} \underline{v}_n \quad (\text{II.3})$$

Le passage inverse est donné par :

$$\underline{F} = \sum_{n=1}^{N_2} \underline{N}_n^T \underline{f} \underline{v}_n^T \quad (\text{II.4})$$

Donc, si une image est représentée sous forme discrète par une matrice  $\underline{F}$ , nous pouvons passer à sa représentation vectorielle  $\underline{f}$ , faire les opérations nécessaires en unidimensionnel, puis revenir à la représentation matricielle.

## II.2) Caractérisation statistique de l'image discrète.

Les descripteurs statistiques des images continues peuvent être appliqués directement pour caractériser les images discrètes.

La valeur moyenne de l'image discrète est une matrice de la forme :

$$E[\underline{F}] = \{ E[F(n_1, n_2)] \} \quad (\text{II.5})$$

La moyenne du vecteur image est le vecteur :

$$\underline{n} = E[\underline{f}] = \sum_{n=1}^{N_2} \underline{N}_n E[\underline{F}] \underline{v}_n \quad (\text{II.6})$$

### II.2.1) Représentation matricielle:

La fonction de corrélation de l'image est donnée par :

$$R(n_1, n_2; n_3, n_4) = E[F(n_1, n_2) \cdot F^*(n_3, n_4)] \quad (\text{II.7})$$

ou  $n_j$  représente un point de l'image.

La fonction de covariance est définie par:

$$K(n_1, n_2; n_3, n_4) = E \left\{ \left[ F(n_1, n_2) - E[F(n_1, n_2)] \right] \left[ F^*(n_3, n_4) - E[F^*(n_3, n_4)] \right] \right\} \quad (II.8)$$

Finalement la fonction de variance est donnée par:

$$\sigma^2(n_1, n_2) = K(n_1, n_2; n_3, n_4) \quad (II.9)$$

### II.2.2) Représentation vectorielle.

Le passage qui donne  $f$  en fonction de  $F$  nous permet d'établir des formules relatives à la représentation vectorielle de l'image. Ainsi, nous pouvons écrire la matrice de corrélation de  $f$  en fonction de la corrélation des éléments de  $F$ :

$$\underline{R}_f = E[f \cdot f^{*T}] = E \left\{ \left[ \sum_{m=1}^{N_2} \underline{N}_m F \underline{v}_m \right] \left[ \sum_{n=1}^{N_2} \underline{v}_n^T F^{*T} \underline{N}_n^T \right] \right\} \quad (II.10.a)$$

Où:

$$\underline{R}_f = \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^{N_2} \underline{N}_m E \left[ \underline{F} \underline{v}_m \underline{v}_n^T F^{*T} \right] \underline{N}_n^T \quad (II.10.b)$$

Le terme:

$$E \left[ \underline{F} \underline{v}_m \underline{v}_n^T F^{*T} \right] = \underline{R}_{m,n} \quad (II.11)$$

est la matrice de corrélation ( $N_1 \times N_2$ ) des  $m^{i\text{ème}}$  et  $n^{i\text{ème}}$  colonnes de  $F$ .

Donc nous pouvons exprimer  $\underline{R}_f$  sous la forme partitionnée suivante:

$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} \underline{R}_{1,1} & \underline{R}_{1,2} & \dots & \underline{R}_{1,N_2} \\ \underline{R}_{2,1} & \underline{R}_{2,2} & \dots & \underline{R}_{2,N_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{R}_{N_2,1} & \underline{R}_{N_2,2} & \dots & \underline{R}_{N_2,N_2} \end{bmatrix} \quad (II.12)$$

La matrice de covariance de  $f$  peut être exprimée par la relation:



$$\underline{K}_f = \underline{R}_f - \underline{\eta}_f \underline{\eta}_f^{*T} \quad (II.13)$$

Si l'étendue de l'image est stationnaire au sens large nous pouvons exprimer la fonction de corrélation sous la forme séparable suivante:

$$R(n_1, n_2; n_3, n_4) = R(n_1 - n_3; n_2 - n_4) \quad (II.14)$$

Si la corrélation entre les éléments est séparable en le produit des fonctions de corrélation des lignes et des colonnes, alors nous pouvons exprimer la matrice de corrélation du vecteur  $\underline{f}$  par le produit direct des matrices de corrélation des lignes et des colonnes:

$$\underline{R}_f = \underline{R}_c \otimes \underline{R}_R = \begin{bmatrix} R_R(1,1) \cdot \underline{R}_c & \dots & R_R(1, N_2) \cdot \underline{R}_c \\ \vdots & & \vdots \\ R_R(N_2, 1) \cdot \underline{R}_c & \dots & R_R(N_2, N_2) \cdot \underline{R}_c \end{bmatrix} \quad (II.15)$$

Où  $\underline{R}_c$  est la matrice de corrélation  $N_1 \times N_1$  de chaque colonne de  $\underline{F}$ , et  $\underline{R}_R$  est la matrice de corrélation  $N_2 \times N_2$  de chaque ligne de  $\underline{F}$ .

III.1) Opérateurs linéaires.

Une grande classe d'opérateurs de traitement des images sont linéaires de nature; l'image de sortie est formée de combinaisons linéaire des pixels de l'image d'entrée. De telles opérations sont la convolution, la superposition, les transformations unitaires, et le filtrage linéaire discret.

III.1.1) Opérateurs linéaires généralisés.

Considérons les  $N_1 \times N_2$  éléments de l'image d'entrée  $F(n_1, n_2)$ . Une opération linéaire généralisée sur cette image, résulte en une matrice  $P(m_1, m_2)$  d'ordre  $M_1 \times M_2$  de l'image de sortie définie par:

$$P(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) \cdot O(n_1, n_2; m_1, m_2) \quad (\text{III.1})$$

où le noyau  $O(n_1, n_2; m_1, m_2)$  de l'opérateur représente une constante de pondération qui est en général une fonction des coordonnées des images d'entrée et de sortie.

Nous représentons, dans la suite, l'étendue de l'image d'entrée par la matrice  $\underline{F}$  ou par le vecteur  $\underline{f}$ , et l'étendue de l'image de sortie par la matrice  $\underline{P}$  ou par le vecteur  $\underline{p}$ . Afin d'avoir des notations plus simples nous supposons que  $N_1 = N_2 = N$  et que  $M_1 = M_2 = M$ . Soit  $\underline{T}$  la matrice  $M \times N^2$  qui donne  $\underline{p}$  à partir de  $\underline{f}$ :

$$\underline{p} = \underline{T} \cdot \underline{f} \quad (\text{III.2})$$

En utilisant les équations (II.3) et (II.4) la matrice  $\underline{T}$  peut être partitionnée en  $M \times N$  sous-matrices  $\underline{T}_{m,n}$  d'ordre  $M \times N$ :

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1N} \\ I_{21} & I_{22} & \dots & I_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ I_{M1} & I_{M2} & \dots & I_{MN} \end{bmatrix} \quad (III.3)$$

En effet nous avons:

$$P = I \cdot f = I \sum_{n=1}^N N_n \cdot F \cdot v_n = \sum_{n=1}^N I \cdot N_n \cdot F \cdot v_n \quad (III.4)$$

$$P = \sum_{m=1}^M M_m^T \cdot P \cdot u_m^T \quad (III.5)$$

des relations (III.4) et (III.5) nous obtenons:

$$P = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (M_m^T \cdot I \cdot N_n) \cdot F \cdot (v_n \cdot u_m^T) \quad (III.6)$$

ou l'on peut voir que les operateurs  $M_m$  et  $N_n$  extraient la partition  $I_{m,n}$  de  $I$ .

donc:

$$P = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_{m,n} \cdot F \cdot (v_n \cdot u_m^T) \quad (III.7)$$

Si la transformation lineaire est separable, alors:

$$I = I_c \otimes I_R \quad (III.8)$$

ou  $I_R$  et  $I_c$  sont les operateurs des lignes et des colonnes sur  $F$  alors:

$$I_{m,n} = T_R(m,n) \cdot I_c \quad (III.9)$$

et par consequent:

$$P = I_c \cdot F \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N T_R(m,n) \cdot v_n \cdot u_m^T = I_c \cdot F \cdot I_R^T \quad (III.10)$$

Ainsi l'image de sortie  $P$  peut etre produite par des operations sequentielles des lignes et des colonnes. Dans plusieurs applications du traitement des images, l'operateur de transformation lineaire  $I$  est hautement structure, et des simplifications de calcul sont possibles.



Nous allons citer quelques cas spéciaux intéressants. Les images d'entrée et de sortie sont supposées avoir les mêmes dimensions  $M=N$ :

a) Traitement des colonnes de  $\underline{F}$ :  

$$\underline{I} = \text{diag} [I_{C1}, I_{C2}, \dots, I_{CN}] \quad (\text{III.11})$$

b) Traitements des colonnes identiques de  $\underline{F}$ :  

$$\underline{T} = \text{diag} [I_c, I_c, \dots, I_c] \quad (\text{III.12})$$

c) Traitement des lignes de  $\underline{F}$ :  

$$\underline{I}_{m,n} = \text{diag} [T_{R1}(m,n), \dots, T_{RN}(m,n)] \quad (\text{III.13})$$

où  $\underline{T}_{Rj}$  est la matrice de transformation pour la  $j$ ème ligne.

d) Traitement des lignes identiques de  $\underline{F}$ :  

$$\underline{I}_{m,n} = \text{diag} [T_R(m,n), T_R(m,n), \dots, T_R(m,n)] \quad (\text{III.14})$$

e) Traitement des lignes identiques et des colonnes identiques de  $\underline{F}$ :

$$\underline{I} = \underline{T}_c \otimes \underline{I}_N + \underline{I}_N \otimes \underline{T}_R \quad (\text{III.15})$$

Le tableau suivant nous indique le nombre d'opérations de calcul pour chaque cas:

cas	opérations (multiplication et additions)
General	$N^4$
Traitement de colonnes	$N^3$
Traitement de lignes	$N^3$
Traitement de lignes et de colonnes	$2N^3 - N^2$
Traitement de lignes et de colonnes séparables	$2N^3$

L'équation (III.10) montre que les transformations linéaires bidimensionnelles séparables peuvent être calculées par des

opérations séquentielles à une dimension des lignes et des colonnes, comme indiqué par le tableau ci-dessus, Une économie considérable dans les calculs est possible pour de telles transformations. Dans le cas général, le calcul par l'équation (III.2) exige  $M^2 N^2$  opérations tandis que l'équation (III.10), quand elle est applicable, exige  $MN^2 + M^2 N$  opérations seulement. De plus,  $F$  peut être stockée dans une mémoire série tel qu'un disque ou un tambour et cherchée ligne par ligne; de ce fait nous remédions à l'exigence de stocker  $F$  dans une RAM, qui est généralement plus chère qu'une mémoire série.

### III.1.2) Représentation statistique des opérateurs linéaires.

Quand l'étendue de l'image d'entrée est considérée comme un échantillon d'un processus aléatoire dont les moments du premier et second ordre sont connus, alors les moments d'ordre 1 et 2 de l'image de sortie peuvent être déterminés pour une transformation linéaire donnée.

- Moyenne de l'image de sortie:

$$E[P(m_1, m_2)] = E \left[ \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) o(n_1, n_2; m_1, m_2) \right] \quad (\text{III.16.a})$$

ou d'après la linéarité de l'espérance:

$$E[P(m_1, m_2)] = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} E[F(n_1, n_2)] o(n_1, n_2; m_1, m_2) \quad (\text{III.16.b})$$

- Fonction de corrélation de l'image de sortie:

$$R_p(m_1, m_2; m_3, m_4) = E \left[ P(m_1, m_2) P^*(m_3, m_4) \right] \\ = E \left[ \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) o(n_1, n_2; m_1, m_2) \sum_{n_3=1}^{N_1} \sum_{n_4=1}^{N_2} F^*(n_3, n_4; m_3, m_4) \right] \quad (\text{III.17.a})$$

$$R_p(m_1, m_2; m_3, m_4) =$$

$$R_F(n_1, n_2; n_3, n_4) o(n_1, n_2; m_1, m_2) \delta^*(n_3, n_4; m_3, m_4) \quad (\text{III.17.b})$$

ou  $R_F(n_1, n_2; n_3, n_4)$  représente la fonction de corrélation de l'image d'entrée.

- Fonction de covariance.

$$K(m_1, m_2; m_3, m_4) =$$

$$\sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_3=1}^{N_1} \sum_{n_4=1}^{N_2} K_F(n_1, n_2; n_3, n_4) o(n_1, n_2; m_1, m_2) \delta^*(n_3, n_4; m_3, m_4) \quad (\text{III.18})$$

Si les images d'entrée et de sortie sont exprimées sous forme de vecteurs, la formulation devient plus compacte.

- Moyenne de  $\underline{p}$ :

$$\underline{\mu}_p = E[\underline{p}] = E[\underline{I} \underline{f}] = \underline{I} E[\underline{f}] = \underline{I} \underline{\mu}_f \quad (\text{III.19})$$

- Matrice de corrélation de  $\underline{p}$ :

$$\underline{R}_p = E[\underline{p} \underline{p}^{*T}] = E[\underline{I} \underline{f} \underline{f}^{*T} \underline{I}^{*T}] = \underline{I} \underline{R}_f \underline{I}^{*T} \quad (\text{III.20})$$

- Matrice de covariance de  $\underline{p}$ :

$$\underline{K}_p = \underline{I} \underline{K}_f \underline{I}^{*T} \quad (\text{III.21})$$

### III.1.3) Les opérateurs pseudo-inverses.

Une tâche courante dans le traitement des signaux linéaires est l'inversion de l'équation de transformation (III.2) pour obtenir la valeur du vecteur d'entrée  $\underline{f}$  ( $Q \times 1$ ) ou une estimation  $\hat{\underline{f}}$  en fonction du vecteur de sortie  $\underline{p}$  ( $P \times 1$ ). Lorsque  $\underline{I}$  est une matrice carrée, nous avons évidemment:

$$\underline{f} = (\underline{I})^{-1} \underline{p} \quad (\text{III.22})$$

pourvu que  $\underline{I}^{-1}$  existe. Si  $\underline{I}$  n'est pas une matrice carrée, un opérateur pseudo-inverse  $\underline{I}^+$  de la matrice  $\underline{I}$  ( $Q \times P$ ) peut être utilisé pour déterminer une solution par l'opération:

$$\underline{f} = \underline{I}^+ \underline{p} \quad (\text{III.23})$$



S'il existe une solution unique, l'opérateur pseudo-inverse propre doit nous donner une estimation parfaite dans le sens de l'égalité  $\hat{f} = f$ . De ceci, il est possible d'extraire le vecteur  $f$  à partir de l'observation  $p$  sans erreur. S'il existe plusieurs solutions, un opérateur pseudo-inverse peut être utilisé pour minimiser le nombre de solutions parmi lesquelles on fait le choix. Et finalement, s'il n'y a pas de solutions exactes, un opérateur pseudo-inverse peut nous donner une meilleure solution approximée. Dans ce qui suit, nous allons définir les trois opérateurs pseudo-inverse.

a) Inverse généralisé  $I^-$ .

Il satisfait les relations suivantes:

$$II^- = (II^-)^T \quad (\text{III.24.a})$$

$$I^-I = (I^-I)^T \quad (\text{III.24.b})$$

$$II^-I = I \quad (\text{III.24.c})$$

$$I^-II^- = I^- \quad (\text{III.24.d})$$

L'inverse généralisé est unique, et peut être exprimé sous certaines circonstances. Si  $P > Q$  le système d'équations (III.1) est dit sur-déterminé. Dans ce cas, si  $I$  est de rang  $Q$ , l'inverse généralisé peut être exprimé par:

$$I^- = (I^T I)^{-1} I^T \quad (\text{III.25})$$

Dans le cas où  $P < Q$ , le système (III.1) est dit sous-déterminé, et si  $I$  est de rang  $P$ , alors l'inverse généralisé sera donné par:

$$I^- = I^T (II^T)^{-1} \quad (\text{III.26})$$

Si  $I$  est séparable en produit direct, alors:

$$I^- = I_C^- \otimes I_R^- \quad (\text{III.27})$$

b) Inverse des moindres carrés  $\underline{I}^\dagger$

Il satisfait les relations de définition:

$$\underline{I} \underline{I}^\dagger \underline{I} = \underline{I} \quad (\text{III.28.a})$$

$$\underline{I} \underline{I}^\dagger = (\underline{I} \underline{I}^\dagger)^T \quad (\text{III.28.b})$$

c) Inverse conditionnel  $\underline{I}^\#$

Il est défini par la relation :

$$\underline{I} \underline{I}^\# \underline{I} = \underline{I} \quad (\text{III.29})$$

En examinant les relations de définitions des trois opérateurs, on remarque que l'inverse généralisé est aussi un inverse des moindres carrés qui est lui-même un inverse conditionnel.  $\underline{I}^\dagger$  et  $\underline{I}^\#$  existent pour un opérateur linéaire donné  $\underline{T}$ , cependant, ils peuvent ne pas être uniques.

#### III.1.4) Solutions pour les systèmes linéaires.

Le système général des équations spécifié par (III.2), où  $\underline{I}$  est une matrice  $P \times Q$  peut être considéré comme un système de  $P$  équations à  $Q$  inconnues. Trois possibilités peuvent exister:

-Le système d'équations a une solution unique  $\hat{\underline{f}}$  pour laquelle  $\underline{I} \hat{\underline{f}} = \underline{p}$ .

-Le système d'équations est satisfait par plusieurs solutions.

-Le système d'équations n'a pas de solution exacte.

Quand le système d'équation possède au moins une solution, il est dit consistant; Sinon il est inconsistant. Dans la restauration des images  $\underline{f}$  représente souvent le vecteur de l'image idéale,  $\underline{p}$  représente le vecteur de l'image brouillée et  $\underline{I}$  modèle l'effet de superposition discret causant le brouillage.

Une solution existe pour  $p = \underline{I}f$  si et seulement si il y a un inverse conditionnel  $\underline{I}^\#$  de  $\underline{I}$  pour lequel  $\underline{I}\underline{I}^\#p = p$ .

### III.1.5) Solutions pour les systèmes linéaires consistants.

S'il existe une solution pour le système d'équations (III.2), elle serait de la forme :

$$\hat{f} = \underline{I}^\# p + (\underline{I} - \underline{I}^\# \underline{I}) \underline{v} \quad (\text{III.30})$$

ou  $\underline{I}^\#$  est l'inverse conditionnel de  $\underline{I}$  et  $\underline{v}$  un vecteur arbitraire ( $Q \times 1$ ).

Cette dernière équation est équivalente à la suivante:

$$\hat{f} = \underline{I} p + (\underline{I} - \underline{I}^\# \underline{I}) \hat{f} \quad (\text{III.31})$$

Cette équation est la même que la précédente sauf que  $\underline{v}$  est remplacé par  $\hat{f}$ .

Puisque  $\underline{I}^-$  et  $\underline{I}^\$$  sont aussi des inverses conditionnels, la solution générale peut être donnée par:

$$f = \underline{I}^- p + (\underline{I} - \underline{I}^- \underline{I}) \underline{v} \quad (\text{III.32.a})$$

$$f = \underline{I}^\$ p + (\underline{I} - \underline{I}^\$ \underline{I}) \underline{v} \quad (\text{III.32.b})$$

Il est clair que si  $\underline{I}^\# \underline{I} = \underline{I}$ , la solution est unique. par l'examen du rang de  $\underline{I}^- \underline{I}$  il est prouvé que si une solution de (III.2) existe cette solution est unique si et seulement si le rang de la matrice  $\underline{I}$  ( $P \times Q$ ) est  $Q$ . Comme résultat nous pouvons immédiatement déduire que si une solution existe pour un système d'équations sous-déterminé, cette solution est à formes multiples. De plus, la seule solution qui puisse exister pour un système sur-déterminé est une solution unique.



### III.2) Opérateurs de superposition à étendue finie.

Les opérateurs de superposition discrets bidimensionnels à étendue finie sont définis comme un filtrage linéaire discret effectué sur une matrice de données.

Considérons la superposition discrète d'une matrice de données  $F(n_1, n_2)$  pour  $n_1, n_2 = 1, 2, \dots, N$  avec un opérateur de réponse impulsionnelle  $H(l_1, l_2, m_1, m_2)$  pour  $l_1, l_2 = 1, 2, \dots, L$ . L'opération de superposition est définie par:

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=1}^{m_2} F(n_1, n_2) H(m_1 - n_1 + 1, m_2 - n_2 + 1; m_1, m_2) \quad (\text{III.33})$$

$Q$  représente la matrice traitée et  $m_1, m_2 = 1, 2, \dots, M$ .  $H$  et  $F$  sont supposés nuls en dehors de leurs étendues d'indices.  $M = N + L - 1$ , Donc la matrice  $Q$  est d'ordre supérieur à  $F$ . Soient  $f(N^2 \times 1)$  et  $q(M^2 \times 1)$  les vecteurs correspondant à  $F$  et  $Q$  respectivement. A la relation matricielle (III.1) correspond la représentation vectorielle suivante:

$$q = Df \quad (\text{III.34})$$

où  $D$  est une matrice de dimension  $M^2 \times N^2$  contenant les éléments de la réponse impulsionnelle.  $D$  peut se mettre sous la forme partitionnée, de sous-matrices de dimensions  $N \times N$ , suivante:

$$D = \begin{bmatrix} D_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ D_{2,1} & D_{2,2} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ D_{L,1} & D_{L,2} & \dots & \dots & D_{L,N} \\ 0 & D_{L+1,2} & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D_{M,N} \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

Le terme général non nul de  $D$  s'écrit:

$$\underline{D}_{m_2, n_2}(m_1, n_1) = H(m_1 - n_1 + 1, m_2 - n_2 + 1; m_1, m_2) \quad (\text{III.36})$$

où :  $1 \ll n_i \ll N$  et  $n_i \ll m_i \ll n_i + L - 1$

Si la réponse impulsionnelle est invariante par translation, alors la structure de  $\underline{D}$  ne dépend pas explicitement de  $(m_1, m_2)$ :

$$\underline{D}_{m_2, n_2} = \underline{D}_{m_2+1, n_2+1} \quad (\text{III.37})$$

Dans ce cas les colonnes de  $\underline{D}$  sont obtenues en décalant sa première colonne. Dans ces conditions, l'opération de superposition à étendue finie se réduit à une opération de convolution.

D'après l'équation (III.7):

$$\underline{Q} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \underline{D}_{m,n} \underline{F}_n \underline{u}_m^T \quad (\text{III.38})$$

Si la réponse impulsionnelle est séparable tel que  $H = h_c h_R^T$ , alors:

$$\underline{D} = \underline{D}_c \otimes \underline{D}_R \quad (\text{III.39})$$

Les matrices  $\underline{D}_R$  et  $\underline{D}_c$  sont de dimensions  $M \times N$  et sont de la forme:

$$\underline{D}_R = \begin{bmatrix} h_R(1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_R(2) & h_R(1) & & & \cdot \\ h_R(3) & h_R(2) & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & h_R(1) \\ h_R(L) & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_R(1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

L'opération de convolution bidimensionnelle peut être calculée en deux convolutions unidimensionnelles séquentielles:

$$\underline{Q} = \underline{D}_c \underline{F} \underline{D}_R^T \quad (\text{III.41})$$

Sous forme vectorielle, l'opération de superposition à étendue finie ou convolution exige  $N^2 L$  opérations. L'équation séparable de (III.41) peut être calculée avec  $NL(M+N)$  opérations seulement.

Les transformations unitaires à deux dimensions ont trois applications principales dans le traitement des images. Elles sont utilisées pour extraire des caractéristiques de l'image. Comme exemple, dans la transformation de Fourier, la valeur moyenne est proportionnelle à la moyenne de la luminance de l'image, et les termes de hautes fréquences donnent une indication de l'amplitude et de l'orientation des contours dans une image. Une autre application est le codage de l'image transformée dans laquelle une réduction de largeur de bande est réalisée. La réduction des dimensions dans les calculs est une troisième application.

Etablis simplement, ces coefficients transformés qui ont des valeurs faibles peuvent être exclus des opérations de calcul tel que le filtrage sans grosses pertes pour les performances de calcul.

#### IV.1) Les operateurs de transformations unitaires.

Une transformation unitaire à deux dimensions est un type spécifique de transformation linéaire dans lesquelles l'opération linéaire élémentaire de l'équation (III.2) est exactement inversible, et le noyau satisfait certaines conditions d'orthogonalité. La transformation unitaire de l'image  $F(n_1, n_2)$  de dimension  $N_1 \times N_2$  est l'image transformée de dimension  $N_1 \times N_2$  définie par:

$$\mathcal{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) A(n_1, n_2; m_1, m_2) \quad (IV.1)$$



ou  $A(n_1, n_2; m_1, m_2)$  représente le noyau de la transformation unitaire directe. La transformation inverse est définie par:

$$F(n_1, n_2) = \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \mathcal{F}(m_1, m_2) B(n_1, n_2; m_1, m_2) \quad (IV.2)$$

ou  $B(n_1, n_2; m_1, m_2)$  représente le noyau de la transformation inverse.

La transformation est unitaire si toutes les conditions suivantes sont réunies:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} A(n_1, n_2; m_1, m_2) A^*(j_1, j_2; m_1, m_2) = \delta(n_1 - j_1; n_2 - j_2) \\ \text{b)} \quad & \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} B(n_1, n_2; m_1, m_2) B^*(j_1, j_2; m_1, m_2) = \delta(n_1 - j_1; n_2 - j_2) \\ \text{c)} \quad & \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} A(n_1, n_2; m_1, m_2) A^*(n_1, n_2; k_1, k_2) = \delta(m_1 - k_1; m_2 - k_2) \\ \text{d)} \quad & \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} B(n_1, n_2; m_1, m_2) B^*(n_1, n_2; k_1, k_2) = \delta(m_1 - k_1; m_2 - k_2) \end{aligned}$$

La transformation est dite séparable si ses noyaux peuvent être mis sous la forme suivante:

$$A(n_1, n_2; m_1, m_2) = A_C(n_1, m_1) A_R(n_2, m_2)$$

$$B(n_1, n_2; m_1, m_2) = B_C(n_1, m_1) B_R(n_2, m_2)$$

où les indices R et C indiquent des transformations sur les lignes et les colonnes respectivement.

Une transformation unitaire séparable peut être calculée en deux étapes:

1. Une transformation unidimensionnelle est effectuée sur chaque colonne de l'image donnant:

$$P(m_1, n_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} F(n_1, n_2) A_C(n_1, m_1)$$

2. une seconde transformation unidimensionnelle est

effectuée sur chaque ligne de  $P(m_1, n_2)$  tel que:

$$\mathcal{I}(m_1, m_2) = \sum_{n_2=1}^{N_2} P(m_1, n_2) A_R(n_2, m_2)$$

Les transformations unitaires peuvent être exprimées sous forme matricielle. Soient  $\underline{f}$  et  $\underline{F}$  la matrice et le vecteur représentant l'image originale, et soient  $\underline{f}$  et  $\underline{F}$  ceux de l'image transformée. La représentation matricielle est alors:

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{A} \underline{f} \\ \underline{f} &= \underline{B} \underline{F} \end{aligned}$$

avec  $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$

Pour une transformation unitaire, la matrice inverse est donnée par:  $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{*T}$ .  $\underline{A}$  est dite matrice unitaire.

Une matrice unitaire réelle est dite matrice orthogonale, et dans ce cas:  $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$

Si le noyau de la transformation est séparable:  $\underline{A} = \underline{A}_C \otimes \underline{A}_R$

où  $\underline{A}_R$  et  $\underline{A}_C$  sont les matrices des lignes et des colonnes, alors:

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{A}_C \underline{F} \underline{A}_R^T \\ \text{et} \\ \underline{F} &= \underline{B}_C \underline{F} \underline{B}_R \end{aligned}$$

où  $\underline{B}_C = \underline{A}_C^{-1}$  et  $\underline{B}_R = \underline{A}_R^{-1}$ .

Les transformations unitaires peuvent être exprimées dans une représentation hybride.

#### NOTATIONS:

Pour simplifier l'analyse des transformations unitaires à deux dimensions, nous considérerons que les matrices représentant les images sont carrées et d'ordre  $N$ . On notera l'image entrante par:  $F(j, k)$  pour  $j, k = 0, 1, \dots, N-1$

Avec ces notations les transformations unitaires directe et inverse deviennent:

$$\mathcal{F}(u,v) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j,k) A(j,k;u,v)$$

$$F(j,k) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathcal{F}(u,v) B(j,k;u,v)$$

#### IV.2) Transformation de FOURIER.

La transformation de Fourier bidimensionnelle discrète d'une image est définie sous forme de série par :

$$\mathcal{F}(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j,k) \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}(uj+vk)\right]$$

La transformation discrète inverse est donnée par :

$$F(j,k) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathcal{F}(u,v) \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(uj+vk)\right]$$

$u$  et  $v$  sont appelés fréquences spatiales par analogie à la transformation de Fourier continue.

Les noyaux étant séparables et symétriques la transformation de Fourier bidimensionnelle discrète peut être calculée en deux transformations unidimensionnelles. Les fonctions de base de la transformation sont des exponentielles complexes :

$$A(j,k,u,v) = \exp\left[-\frac{2\pi i}{N}(uj+vk)\right] = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(uj+vk)\right] - i \sin\left[\frac{2\pi}{N}(uj+vk)\right]$$

$$B(j,k,u,v) = \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(uj+vk)\right] = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(uj+vk)\right] + i \sin\left[\frac{2\pi}{N}(uj+vk)\right]$$

PROPRIETES.

Le plan de Fourier possède plusieurs propriétés structurales.

a) Le terme spectral à l'origine du domaine de Fourier

$$\mathcal{F}(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j,k)$$

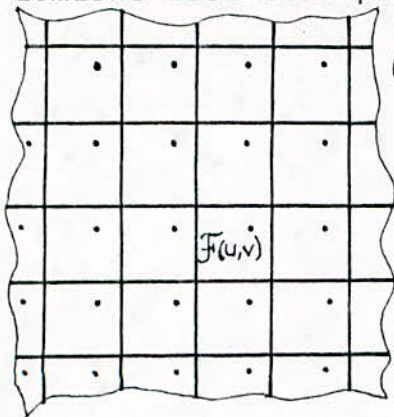
est égal à  $N$  fois la moyenne spatiale de l'image.

b) Périodicité :  $\mathcal{F}(u+mN, v+nN) = \mathcal{F}(u,v)$   $m$  et  $n$  étant des entiers naturels.

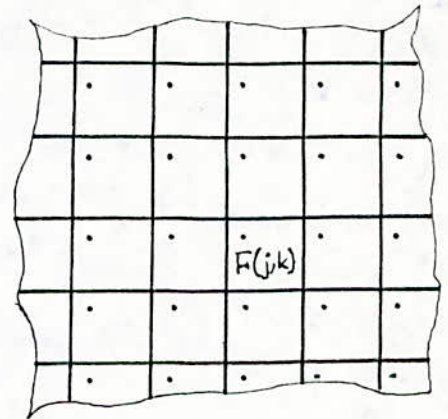
La transformée de Fourier d'une image étant essentiellement une représentation en série de Fourier d'un domaine à deux dimensions, pour que la représentation de Fourier soit valide le



domaine doit être périodique.



(a) Domaine de Fourier



(b) Domaine Spatial.

Comme montré sur la figure ci-dessus, l'image doit être considérée comme périodique horizontalement et verticalement. Les cotés gauche et droit sont adjacents, ainsi que le haut et le bas. Des fréquences spatiales apparaissent le long de ces transitions. Ces dernières ne sont pas gênantes; elles servent à reconstituer les bords de l'image.

c) Symétrie:  $\mathcal{F}(u,v) = \mathcal{F}^*(-u+mN, -v+nN)$

A cause de cette propriété la moitié des éléments sont redondants, c'est à dire peuvent être générés directement de l'autre moitié.

Notation matricielle:

Soit  $\underline{A}$  la matrice de la transformation de Fourier,  $\underline{f}$  et  $\underline{\mathcal{F}}$  les vecteurs colonnes représentant l'image et sa transformée. Le noyau étant séparable:

$$\underline{A} = \underline{A}_C \otimes \underline{A}_R \quad \text{avec:}$$

$$\underline{A}_R = \underline{A}_C = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Avec  $W = \exp(-\frac{2\pi i}{N})$

La transformation est définie sous forme matricielle par:

$$\underline{\mathcal{F}} = \underline{A}_C \underline{F} \underline{A}_R$$

$$\text{et } F = \mathcal{F}_c^* \mathcal{F} \hat{A}_R$$

Bien que la transformation de Fourier possède plusieurs propriétés avantageuses; les opérations se font sur des nombres complexes et le taux de convergence est faible.

#### IV.3) Transformation de HADAMARD

Cette transformation est basée sur la matrice de Hadamard qui est une matrice carrée formée de termes +1 et -1 et dont les lignes et les colonnes sont orthogonales. Une matrice normalisée de Hadamard de dimension  $N \times N$  satisfait la relation:

$$\underline{H} \underline{H}^T = I$$

La plus petite matrice de Hadamard est:  $\underline{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Si une matrice de Hadamard d'ordre  $N$  ( $N > 2$ ) existe, alors:

$N = 0 \pmod{4}$ . L'existence de la matrice de Hadamard pour n'importe quel ordre satisfaisant cette condition n'a pas encore été établie.

Si  $\underline{H}_N$  est une matrice de Hadamard d'ordre  $N$ , alors la matrice  $\underline{H}_{2N}$  définie par:

$$\underline{H}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \underline{H}_N & \underline{H}_N \\ \underline{H}_N & -\underline{H}_N \end{bmatrix}$$

est une matrice de Hadamard d'ordre  $N=2N$

La transformation de Hadamard est définie par:

$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) (-1)^{p(j, k, u, v)}$$

ou  $p(j, k, u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} (u_i j_i + v_i k_i)$ . Les termes  $u_i, v_i, j_i$  et  $k_i$  sont les bits de la représentation binaire de  $u, v, j$  et  $k$  respectivement.

Une autre représentation sous forme de série existe pour la

transformation de Hadamard:

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j,k) (-1)^{q(j,k,u,v)}$$

ou  $q(j,k,u,v) = \sum_{i=0}^{N-1} [g_i(u)j_i + g_i(v)k_i]$

avec:

$$\begin{aligned} g_0(u) &= U_{n-1} \\ g_1(u) &= U_{n-1} + U_{n-2} \\ &\dots \\ g_{n-1}(u) &= U_1 + U_0 \end{aligned}$$

La transformation de Hadamard peut être considérée comme étant l'échantillonnage avec une période  $1/N$  des fonctions de Hadamard. (figure 4.1.a)

#### IV.4) Transformation de HAAR.

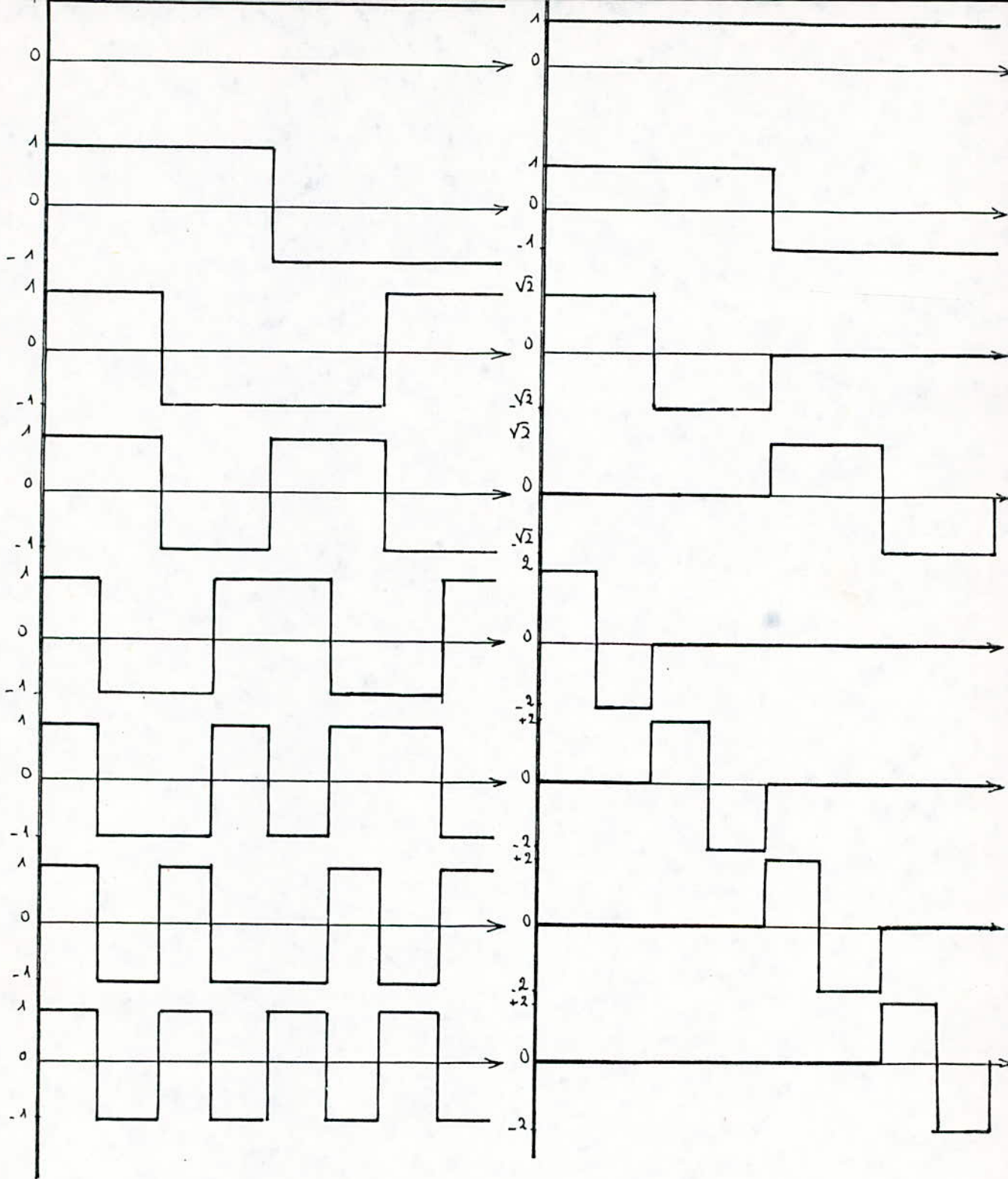
La matrice de la transformation de Haar discrète peut être obtenue en échantillonnant périodiquement les fonctions de Haar (figure 4.1). Les matrices de transformation d'ordre  $N=4$  et  $N=8$  sont données par:

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Les huit premières fonctions de Haar sont données sur la figure (4.1.b).





(a) Les huit premières fonctions de HADAMARD.

(b) Les huit premières fonctions de HAAR.

Figure (4.1).

#### IV.5) Transformation de KARHUNEN-LOEVE.

La forme générale de cette transformation est:

$$\mathcal{F}(u,v) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j,k) A(j,k;u,v)$$

dans laquelle le noyau satisfait l'équation:

$$\lambda(u,v) A(j,k;u,v) = \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} K_F(j,k;j',k') A(j',k';u,v)$$

ou  $K_F(j,k;j',k')$  dénote la fonction de covariance de l'image et  $\lambda(u,v)$  est constant pour  $(u,v)$  fixé. L'ensemble des fonctions définies par le noyau sont les fonctions propres de la covariance et  $\lambda(u,v)$  représente les valeurs propres de la fonction de covariance. Il est souvent impossible d'exprimer le noyau sous une forme explicite. Si la fonction de covariance est séparable, il en est de même du noyau. Dans ce cas les lignes et les colonnes

satisfont:

$$\lambda_R(v) A_R(k,v) = \sum_{k'=0}^{N-1} K_R(k,k') A_R(k',v)$$

$$\lambda_C(u) A_C(j,u) = \sum_{j'=0}^{N-1} K_C(j,j') A_C(j',u)$$

#### IV.6) Algorithmes de calcul.

Une transformation de  $N \times N$  points d'une image exige en général  $N^4$  opérations (addition et multiplication). Pour  $N$  assez grand le nombre d'opérations devient excessivement grand. C'est pour cela que des algorithmes de calculs rapides ont été développés pour plusieurs transformations unitaires.

Le principe de ces algorithmes rapides est la possibilité de diviser le calcul en plusieurs étapes, tel que le résultat des étapes initiales peut être utilisé plus d'une fois dans les étapes suivantes.

Comme exemple nous considérons le calcul de la transformation de Hadamard d'ordre 4.

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ f(1) &= f(0) - f(1) + f(2) - f(3) \\ f(2) &= f(0) + f(1) - f(2) - f(3) \\ f(3) &= f(0) - f(1) - f(2) + f(3) \end{aligned}$$

Le système ci-dessus exige  $N(N-1)=12$  opérations.

On peut calculer ces mêmes coefficients en deux étapes:

$$\begin{aligned} 1) \quad a(0) &= f(0) + f(2) \\ a(1) &= f(0) - f(2) \\ a(2) &= f(1) + f(3) \\ a(3) &= f(1) - f(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(0) &= a(0) + a(2) \\ f(1) &= a(0) - a(2) \\ f(2) &= a(1) + a(3) \\ f(3) &= a(1) - a(3) \end{aligned}$$

Le calcul de  $H_4$  par les deux étapes précédentes exige un total de  $N \cdot \log(N) = 8$  opérations.

Une autre approche est celle de la factorisation de matrices dans laquelle  $H_4$  est mise sous forme de matrices 'clairsemées' (contenant beaucoup de zéros).

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Le nombre d'opérations nécessaires est égal à la moitié du nombre d'éléments non nuls dans les matrices facteurs.

Les principes décrits précédemment pour le calcul rapide de la transformation de Hadamard est généralisable à plusieurs autres transformations. Des algorithmes de calcul rapides ont été mis au point pour les transformations de Fourier, Hadamard, Haar, ...

#### IV.7) Filtrage linéaire généralisé.



La majorité des algorithmes de traitement des images sont linéaires de nature. L'emploi des techniques linéaires est dû au fait de leur simplicité relativement aux techniques non-linéaires. Cependant pour les opérations de traitement, les méthodes conventionnelles exigent des temps de calculs exorbitants à cause des grandes dimensions de l'image. D'où l'emploi de techniques indirectes de calcul, basées sur les transformations unitaires.

Une transformation linéaire est définie par :

$$P(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) T(n_1, n_2, m_1, m_2) \quad (1)$$

ou sous forme matricielle par :  $\underline{p} = \underline{T} \underline{f}$

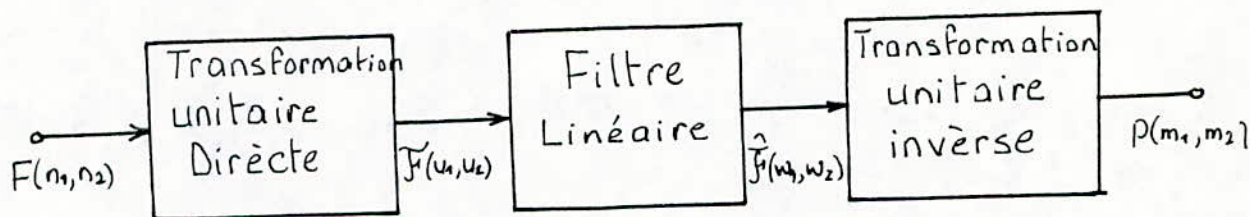


Figure (4.2)

la figure (4.2) schématise la méthode dite filtrage linéaire généralisé. Le principe consiste à appliquer une transformation unitaire bidimensionnelle à la matrice originale  $F(n_1, n_2)$ . Celle-ci devient une matrice  $F(u_1, u_2)$ . Ensuite une transformation linéaire est effectuée suivant la relation :

$$\hat{F}(w_1, w_2) = \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} F(u_1, u_2) \mathcal{T}(u_1, u_2, m_1, m_2)$$

$\mathcal{T}$  est le noyau de la transformation linéaire. En dernier lieu une transformation unitaire inverse est effectuée pour reconstituée

la matrice traitée  $P(m_1, m_0)$ .

Pour que cette procédure soit plus rapide que celle de (1), il est nécessaire que des algorithmes de calcul rapides existent pour la transformation unitaire et que le noyau contient beaucoup de zéros.

La représentation vectorielle de cette méthode est la suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (\underline{A}_{N^2}) \underline{f} \\ \hat{\mathcal{F}} &= \underline{\mathcal{C}} \mathcal{F} \\ \underline{p} &= (\underline{A}_{M^2})^{-1} \hat{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

ou:  $\underline{A}_{N^2}$  est la matrice  $N^2 \times N^2$  de la transformation unitaire.

$\underline{\mathcal{C}}$  opérateur de filtrage linéaire d'ordre  $M^2 \times N^2$

$\underline{A}_{M^2}$  matrice  $M^2 \times M^2$  de la transformation unitaire

Dans ce cas les vecteurs d'entrée et de sortie sont reliés par:

$$\underline{p} = (\underline{A}_{M^2})^{-1} \underline{\mathcal{C}} (\underline{A}_{N^2}) \underline{f}$$

de plus les relations entre  $\underline{\mathcal{C}}$  et  $\underline{I}$  sont:

$$\underline{I} = (\underline{A}_{M^2})^{-1} \underline{\mathcal{C}} (\underline{A}_{N^2})$$

$$\underline{\mathcal{C}} = (\underline{A}_{M^2}) \underline{I} (\underline{A}_{N^2})^{-1}$$

Si le calcul direct par (2) est employé, il exige  $k_d M^2 N^2$  opérations et  $k_d$  ( $0 \ll k_d \ll 1$ ) est le coefficient d'éparpillance de (nombre de zéros contenus dans la matrice) de  $\underline{I}$ .

Si nous utilisons le filtrage généralisé le nombre d'opérations nécessaire pour un opérateur donné sont:

-Transformation directe:  $N^4$  par calcul direct.

$2N^2 \log_2 N$  par transformation rapide.

-Filtre de multiplication:  $k_g M^2 N^2$ .

-Transformation inverse:  $M^4$  par calcul direct.

$2M^2 \log_2 M$  par transformation rapide.

$k_g$  est une mesure de l'éparpillance de  $\underline{\mathcal{C}}$ . Il est tel que  $0 \ll k_g \ll 1$

Si  $k_g = 1$  et que la transformation unitaire est calculée, il est évident que le filtrage généralisé n'est pas plus rapide que le calcul direct. Cependant si des algorithmes rapides, similaires en structure à la FFT sont employés, alors le filtrage linéaire est plus avantageux que le calcul direct à condition que l'indice d'éparpillance satisfait l'inégalité suivante:

$$k_g < k_d - \frac{2}{M^2} \log_2 N - \frac{2}{N^2} \log_2 M$$

Dans beaucoup d'applications,  $\mathcal{Z}$  est suffisamment éparpillée et l'inégalité précédente est satisfaite.



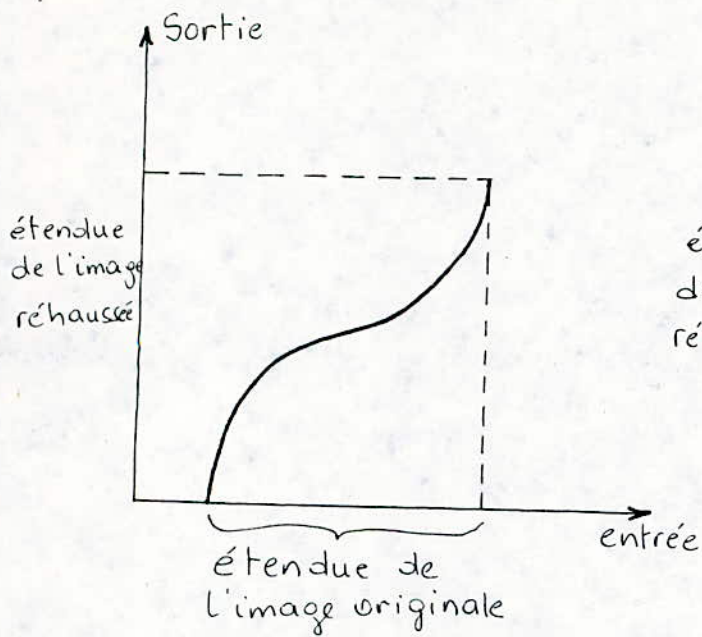
Le rehaussement d'images est l'ensemble des techniques qui consistent à modifier l'apparence d'une image et à la convertir en une meilleure forme, de manière à la rendre plus adaptée à un observateur ou une machine, afin qu'on puisse extraire facilement l'information désirée. Dans ce chapitre nous allons exposer quelques méthodes utilisées dans le rehaussement d'images.

#### V.1) Rehaussement par modification de l'échelle des gris.

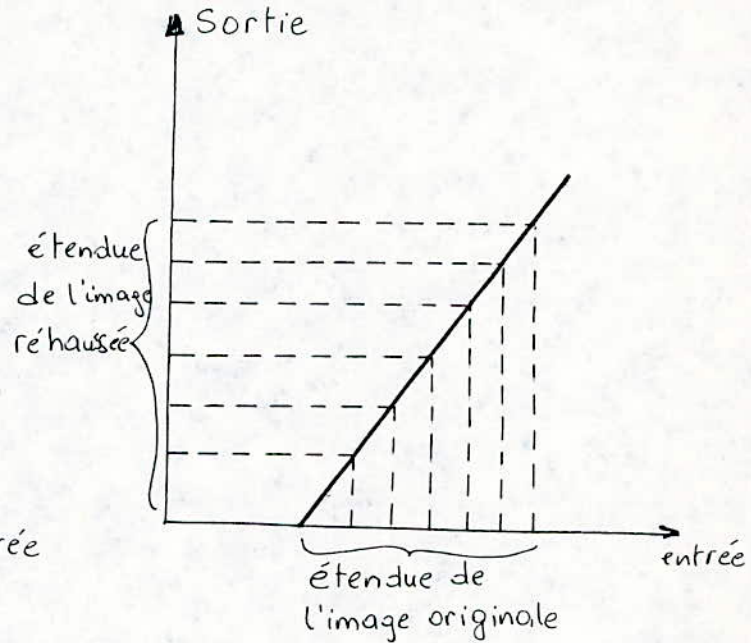
L'un des défauts courants dans les images électroniques et photographiques est le faible contraste résultant de la variation réduite, ou peut-être non-linéaire, de la brillance de l'image.

Le contraste d'une image peut être amélioré par modification de l'échelle des gris correspondante. La figure (5.1) illustre une fonction de transfert désirée pour le réhaussement du contraste d'une image continue typique à faible contraste. Pour les images continues, l'opérateur de la fonction de transfert peut être réalisé par les techniques photographiques, mais il est souvent difficile de réaliser exactement une fonction de transfert arbitraire. Pour les images digitales, il est relativement facile de réaliser une fonction de transfert. Cependant, il faut considérer les effets de la quantification de la brillance de la fonction de transfert.

Une image traitée numériquement peut occuper une étendue différente de celle de l'image originale; l'étendue numérique de l'image traitée peut comprendre des valeurs négatives qui ne peuvent pas être portées directement sur l'échelle d'intensité. La



(a) Image continue



(b) Image digitale

Figure 5.1: Rehaussement de contraste

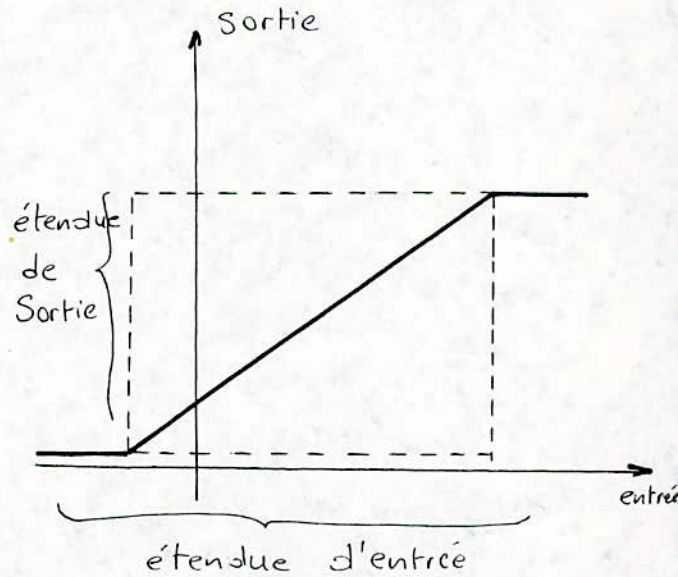
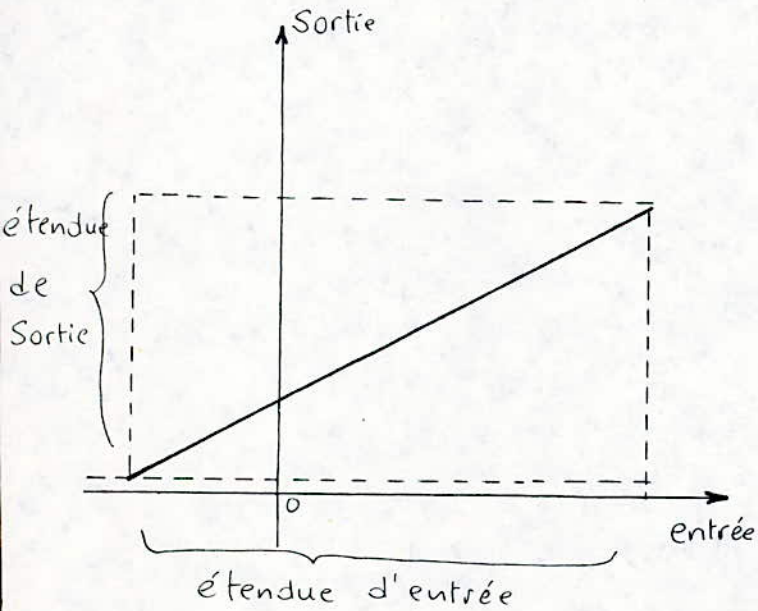


Figure 5.2



figure (5.2) illustre deux possibilités de graduation de l'image de sortie dans le domaine des valeurs occupées par l'image originale. La seconde technique est souvent subjectivement préférable, et spécialement pour les images pour lesquelles un nombre réduit de points atteignent les limites. Les fonctions de transfert employées sont monotones croissantes, on peut cependant utiliser des fonctions monotones décroissantes ou des fonctions non monotones selon le cas qui se présente.

#### U.2) Réhaussement par modification d'histogramme.

Supposons qu'on dispose d'une image numérique  $X(k,l)$  sous sa forme canonique, c'est-à-dire un ensemble de  $N \times N$  valeurs numériques, chacune quantifiée avec  $Q=2^{B_q}$  niveaux. Soit  $p_i$  le nombre d'échantillon possédant la valeur du niveau  $i$  ( $i=1, \dots, Q$ ). On appelle histogramme de l'image la représentation des  $p_i$  en fonction de l'indice  $i$ . L'histogramme de luminance d'une image naturelle typique quantifiée linéairement est souvent décalé vers les niveaux noirs, et la majorité des pixels possèdent alors une luminance qui est inférieure à la moyenne. Dans de telles images, les détails dans les régions noires sont souvent non perceptibles. L'un des moyens utilisés pour réhausser ce type d'images est la technique de modification d'histogramme dans laquelle l'image originale est regraduée de manière à ce que son histogramme suit une forme désirée.

Le processus de modification de l'histogramme peut être considéré comme une transformation ponctuelle monotone  $g_k = T\{f_j\}$  pour laquelle la variable d'intensité d'entrée  $f_0 \leq f_j \leq f_J$  est convertie en une variable de sortie  $g_0 \leq g_k \leq g_K$  telle que la



distribution de probabilité de sortie  $\Pr\{g_k=b_k\}$  suit une forme désirée pour une distribution de probabilité d'entrée  $\Pr\{f_j=a_j\}$ , où  $a_j$  et  $b_j$  sont les probabilités d'occupation des niveaux  $j$  et  $k$ . Du fait que la transformation est monotone nous avons:

$$\sum_{n=0}^K \Pr(g_n=b_n) = \sum_{m=0}^J \Pr(f_m=a_m) \quad (5.1)$$

La transformation de modification de l'histogramme peut être obtenue sous une forme approximée en remplaçant les distributions de probabilité discrètes de l'équation (5.1) par des distributions de probabilité continues:

$$\int_{g_{\min}}^g P_g(g) dg = \int_{f_{\min}}^f P_f(f) df$$

ou  $P_f(f)$  et  $P_g(g)$  sont les densités de probabilité de  $f$  et  $g$  respectivement. L'intégrale du membre de droite est la fonction de distribution cumulée  $\mathcal{P}_f(f)$  de  $f$ , d'où:

$$\int_{g_{\min}}^g P_g(g) dg = \mathcal{P}_f(f)$$

Le tableau ci-dessous donne plusieurs histogrammes d'images et leurs fonctions de transfert corépondantes.

La distribution de probabilité cumulée  $\mathcal{P}_f(f)$  de l'image d'entrée est approximée par son histogramme cumulé:

$$\mathcal{P}_f(f) \approx \sum_{m=0}^J H(m)$$

Modèle de la densité de probabilité de sortie		Fonction de transfert
uniforme	$P_g(g) = \frac{1}{g_{\max} - g_{\min}}$ $g_{\min} \leq g \leq g_{\max}$	$g = [g_{\max} - g_{\min}] P_f(f) + g_{\min}$
exponentielle	$P_g(g) = \alpha \exp[-\alpha(g - g_{\min})]$ $g \geq g_{\min}$	$g = g_{\min} - \frac{1}{\alpha} \ln[1 - P_f(f)]$
Rayleigh	$P_g(g) = \left\{ \exp\left[-\frac{(g - g_{\min})^2}{2\alpha^2}\right] \right\}$ $g > g_{\min} \cdot \left\{ \frac{g - g_{\min}}{\alpha^2} \right\}$	$g = g_{\min} + 2\alpha^2 \ln\left(\frac{1}{1 - P_f(f)}\right)$
hyperbolique	$P_g(g) = \frac{1}{3} \frac{g^{-2/3}}{g_{\max}^{1/3} - g_{\min}^{1/3}}$	$g = \left( [g_{\max}^{1/3} - g_{\min}^{1/3}] [P_f(f)] + g_{\min}^{1/3} \right)^3$

### V.3) Atténuation du bruit.

Le bruit d'une image provenant d'un capteur bruyant ou des erreurs du canal de transmission apparaît souvent comme des variations discrètes de pixels isolés non corrélés spatialement. Les pixels qui sont affectés d'erreurs sont souvent remarquablement différents de leurs voisins. Cette observation est à la base de plusieurs algorithmes d'atténuation du bruit. La figure (5.3) décrit une simple méthode pour la diminution du bruit. Dans cette technique, chaque pixel est séquentiellement examiné, si la valeur d'un pixel est plus grande que la brillance moyenne de ses voisins immédiats avec un certain niveau de seuil, il est remplacé par la valeur moyenne de ces derniers.

Du fait de sa décorrélation, le bruit dans une image a généralement un spectre de fréquences spatiales plus élevées que les composantes normales de l'image. Donc un simple filtrage

spatial passe bas peut être effectif pour la suppression du bruit.

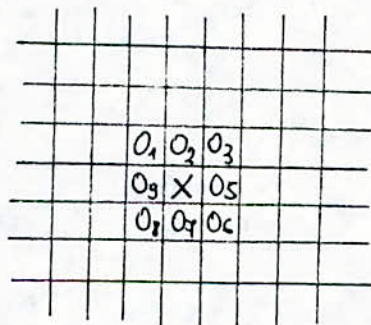
L'image de sortie  $Q(M \times M)$  est formée par le produit de convolution de l'image d'entrée  $F(N \times N)$  avec l'opérateur du filtre  $H(L \times L)$ ,

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N F(n_1, n_2) H(m_1 - n_1 + 1, m_2 - n_2 + 1)$$

Pour le lissage du bruit,  $H$  doit correspondre à un filtre passe-bas et toutes ses composantes doivent être positives.  $H$  peut être l'un des masques suivants:

$$H = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure(5.3)



$$\text{Si } \left[ X - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 O_i \right] > \epsilon,$$

$$\text{alors } X = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 O_i$$

#### U.4)Rehaussement de bords.

Les expériences psycho-physiques montrent qu'un signal visuel ou photographique avec des bords accentués est souvent subjectivement plus agréable qu'une reproduction photométrique. Il existe plusieurs techniques de rehaussement de bords. L'une d'elles consiste en l'exploration de l'image avec des ouvertures imbriquées, l'une à une résolution normale et l'autre à une faible résolution, produisant des images normale et à faible résolution  $F(j, k)$  et  $F_L(j, k)$  respectivement. L'image masquée donnée par:

$$F_M(j, k) = cF(j, k) - (1-c)F_L(j, k)$$



est alors formée électroniquement, où  $c$  est une constante comprise entre  $\frac{3}{5}$  et  $\frac{5}{6}$ .

Une autre technique consiste en un filtrage convolutionnel discret utilisant les masques passe-haut suivants:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

D'autres méthodes utilisent la différenciation statistique ou l'exploration électronique de l'image.

#### V.5) Traitement des transformées.

Les transformations unitaires telles que celles de Fourier et Hadamard donnent une décomposition spectrale de l'image en coefficients qui tend à isoler certaines caractéristiques de l'image. Par exemple, la composante spectrale continue est proportionnelle à la moyenne de la luminance de l'image, et les hautes fréquences spatiales donnent des informations sur l'existence de bords dans l'image. Cette propriété inhérente des transformations de l'image peut être exploitée pour le rehaussement. Soit  $\mathcal{F}(u,v)$  la transformation unitaire bidimensionnelle discrète de l'image échantillonnée  $F(j,k)$  donnée par:

$$\begin{aligned} (u,v) &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j,k) A(j,k;u,v) \\ F(j,k) &= \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} (u,v) B(j,k;u,v) \end{aligned}$$

ou  $A(j,k;u,v)$  et  $B(j,k;u,v)$  sont les noyaux des transformations directes et inverse respectivement.

##### V.5.1) Enracinement des coefficients.

Les coefficients modifiés de la transformation sont donnés par :

$$\mathcal{H}(u,v) = \frac{\mathcal{F}(u,v)}{|\mathcal{F}(u,v)|} \left| \mathcal{F}(u,v) \right|^\alpha = \mathcal{F}(u,v) \left| \mathcal{F}(u,v) \right|^{\alpha-1}$$

Dans le cas de la transformée de Fourier, le coefficient modifié devient :

$$\mathcal{H}(u,v) = [m(u,v)]^\alpha \exp[i\phi(u,v)]$$

Lorsque  $\alpha=0$ , le coefficient modifié de la transformation est simplement la composante de phase de l'image. Si le facteur d'enracinement est choisi inférieur à l'unité, l'opération d'enracinement des coefficients tend à réduire les valeurs des coefficients de la transformée qui ont des amplitudes élevées, et augmenter celles des coefficients qui ont des amplitudes réduites. Le résultat de cette distribution d'énergie dans le domaine de la transformée est la bonne utilisation de la gamme dynamique de l'image et la reproduction subjectivement agréable.

#### V.5.2) Cepstre généralisé.

Une autre méthode de rehaussement d'images par transformations non-linéaires consiste en la prise de logarithme de chaque coefficient de la transformée. Cette opération tend à réduire la gamme dynamique des échantillons dans le domaine de la transformée et l'augmenter dans le domaine de l'image lors de la reproduction.

La restauration des images est l'ensemble des méthodes développées pour compenser les dégradations, connues ou estimées, que subit l'image à cause d'un changement de support (reproduction, transmission, mémorisation, ...) ou d'un mauvais réglage de prise de vue.

Ce chapitre est divisé en deux grandes parties. Premièrement nous allons étudier les techniques algébriques de la restauration spatiale de l'image. dans la deuxième partie nous allons donner les techniques spécialisées de la restauration spatiale de l'image, c'est à dire qu'on va citer quelques applications des techniques étudiées dans la première partie.

#### VI.1) Techniques algébriques de la restauration spatiale des images.

L'une des tâches les plus fréquentes dans la restauration d'images est celle de la restauration spatiale pour éliminer les distorsions géométriques, compenser le brouillage de l'image et diminuer les effets du bruit. Dans cette partie nous analyserons quelques méthodes algébriques de restauration.

##### VI.1.1) Filtrage spatial de l'image continue.

Dans le cas où les dégradations spatiales peuvent être modélées par une réponse impulsionnelle invariante par translation linéaire, et le bruit est additif, la restauration des images continues peut être réalisée par les techniques de filtrage linéaire.



VI.1.1.a) Filtrage inverse.

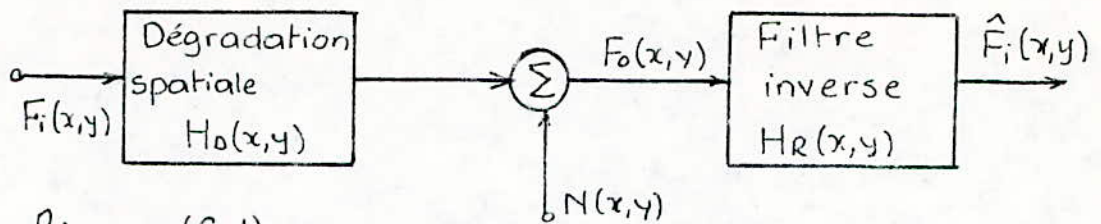


Figure (6.1)

Comme montré sur la figure (6.1), l'image idéale  $F_i(x,y)$  passe à travers un système dégradant linéaire dont la réponse impulsionnelle est  $H_D(x,y)$ , puis elle est combinée avec le bruit  $N(x,y)$  supposé non corrélé avec elle. L'image observée est représentée par l'opération de convolution suivante:

$$F_0(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F_i(\alpha,\beta) H_D(x-\alpha, y-\beta) d\alpha d\beta + N(x,y)$$

$$F_0(x,y) = F_i(x,y) * H_D(x,y) + N(x,y)$$

Le système de restauration consiste en un filtre invariant par translation linéaire décrit par sa réponse impulsionnelle  $H_R(x,y)$ . L'image reconstituée est donnée par:

$$\hat{F}_i(x,y) = [F_i(x,y) * H_D(x,y) + N(x,y)] * H_R(x,y)$$

En passant dans le domaine de Fourier la relation devient:

$$\hat{F}_i(\omega_x, \omega_y) = [F_i(\omega_x, \omega_y) H_D(\omega_x, \omega_y) + \eta(\omega_x, \omega_y)] H_R(\omega_x, \omega_y)$$

où  $F_i(\omega_x, \omega_y)$ ,  $\hat{F}_i(\omega_x, \omega_y)$ ,  $H_D(\omega_x, \omega_y)$ ,  $\eta(\omega_x, \omega_y)$  et  $H_R(\omega_x, \omega_y)$  sont les transformées de Fourier de  $F_i(x,y)$ ,  $\hat{F}_i(x,y)$ ,  $H_D(x,y)$ ,  $N(x,y)$  et  $H_R(x,y)$  respectivement. Si la fonction de transfert du filtre est choisie telle que:

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$$

le spectre de l'image reconstituée devient:

$$\hat{F}_i(\omega_x, \omega_y) = F_i(\omega_x, \omega_y) + \frac{\eta(\omega_x, \omega_y)}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$$

et l'image restaurée est obtenue à l'aide de la transformée de

Fourier inverse:

$$F_i(x,y) = F_i(x,y) + \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{n(\omega_x, \omega_y)}{H_b(\omega_x, \omega_y)} \exp[i(\omega_x x, \omega_y y)] d\omega_x d\omega_y$$

En l'absence du bruit nous obtenons une reconstitution parfaite de l'image, et si une source de bruit se présente il y aura une erreur additive de reconstitution dont la valeur devient élevée aux fréquences spatiales pour lesquelles  $H_b(\omega_x, \omega_y)$  est réduite. Typiquement,  $H_b(\omega_x, \omega_y)$  et  $H_I(\omega_x, \omega_y)$  sont toutes les deux réduites aux fréquences spatiales élevées, et par conséquent la qualité de l'image devient sévèrement dégradée dans les régions à haute résolution. De plus, le bruit peut affecter sévèrement l'unicité de l'estimation.

D'autres types de fonctions de transfert de filtre de restauration ont été proposées afin de faire un compromis entre la suppression du bruit et la perte dans les détails à hautes fréquences de l'image.

Une difficulté dans le filtrage inverse est le fait que la fonction de transfert de la dégradation peut avoir des zéros dans sa bande. Le filtre inverse n'est pas réalisable en de tels points.

#### VI.1.1.b) Filtre de Wiener\_Bruit additif.

L'amélioration de restauration de l'image en présence du bruit additif, peut être obtenue avec les techniques de filtrage de Wiener qui incorporent des connaissances statistiques à priori sur le bruit. Nous supposons que le bruit possède une moyenne nulle, est indépendant de l'image et sa densité spectrale de puissance  $J_W(\omega_x, \omega_y)$  est connue. La réponse impulsionnelle du filtre de restauration est choisie de façon à minimiser l'erreur

du carré de la moyenne.

$$\epsilon = E \{ [ F_i(x,y) - \hat{F}_i(x,y) ]^2 \}$$

La fonction de transfert du filtre de restauration est de la forme:

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + H_N(\omega_x, \omega_y)} \quad (a)$$

ou  $H_D(\omega_x, \omega_y)$  est la fonction de transfert de la dégradation spatiale.

A la limite, s'il n'y a pas de bruit, le filtre de Wiener se réduit au filtre inverse.

#### VI.1.1.c) Filtre de Wiener - Champ d'image stochastique.

Une amélioration considérable de la restauration peut être réalisée en incorporant des connaissances statistiques à priori de l'image. Dans cette extension du filtre de Wiener, l'image est considérée comme étant une représentation d'un processus stochastique bidimensionnel dont la densité spectrale de puissance  $H_{F_i}(\omega_x, \omega_y)$  est connue. Le processus de l'image est supposé avoir une moyenne nulle. Sous ces conditions la fonction de transfert du filtre de restauration pour minimiser l'erreur des moindres carrés devient:

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y) H_{F_i}(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 H_{F_i}(\omega_x, \omega_y) + H_N(\omega_x, \omega_y)} \quad (b)$$

Si le champ de l'image est décorrélé, la densité spectrale de puissance de l'image idéale est égale à 1 et l'équation (b) se réduit à l'équation (a).



#### VI.1.1.d) Filtre de Wiener, Brouillage stochastique.

Dans plusieurs systèmes de traitement d'image, la réponse impulsionnelle du brouillage peut ne pas être fixe, mais plutôt change de forme de manière aléatoire. Un exemple pratique de tels systèmes est le brouillage causé par les turbulences atmosphériques. Le filtre de Wiener peut donner un meilleur résultat s'il peut s'adapter dynamiquement aux changements de la réponse impulsionnelle du brouillage; sinon une amélioration dans ce filtre peut être obtenue en considérant la réponse impulsionnelle comme étant une représentation d'un processus stochastique bidimensionnel avec une forme moyenne connue et une perturbation aléatoire autour de la moyenne décrite par une densité de puissance connue.

#### VI.1.1.e) Application aux images discrètes.

Le filtrage inverse et le filtrage de Wiener développés pour les images continues, sont aussi applicables à la restauration des images discrètes. Pour cela, il suffit de remplacer chaque fonction spectrale continue par la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle équivalente.

Les techniques de restauration des images continues présentent l'avantage d'être simples et de rendre effectif l'usage du domaine de Fourier. Cependant, ces techniques connaissent plusieurs limitations importantes. Elles ne prévoient pas les effets des erreurs de recouvrement causées par le sous-échantillonnage de l'image observée. Elles permettent la restauration pour les dégradations invariantes dans l'espace seulement. Enfin, il est difficile d'analyser les effets des erreurs numériques sur le processus de

restauration et de développer des méthodes pour combattre de telles erreurs.

#### VI.1.2) Restauration spatiale pseudo-inverse.

La matrice pseudo-inverse définie au chapitre III peut être utilisée pour la restauration spatiale des images discrètes, et ceci dans le cas où il est possible de modéliser la dégradation spatiale par une opération vectorielle sur le vecteur de l'image idéale donnant un vecteur des échantillons physiques observés obtenus à partir de l'image dégradée.

#### VI.1.3) Restauration spatiale régressive de l'image.

Une limitation fondamentale des techniques de la restauration pseudo-inverse de l'image, est que le bruit peut mener à des instabilités numériques et rendre inutilisable l'estimateur de l'image. Ce problème peut être surmonté dans certaines applications à l'aide des méthodes de restauration régressive qui incorporent des connaissances statistiques a priori du bruit observé.

#### VI.2) Techniques spécialisées de la restauration spatiale de l'image.

Dans les paragraphes précédents, nous avons développé des techniques de base de la restauration spatiale des images. Cette partie présente des applications de ces méthodes.

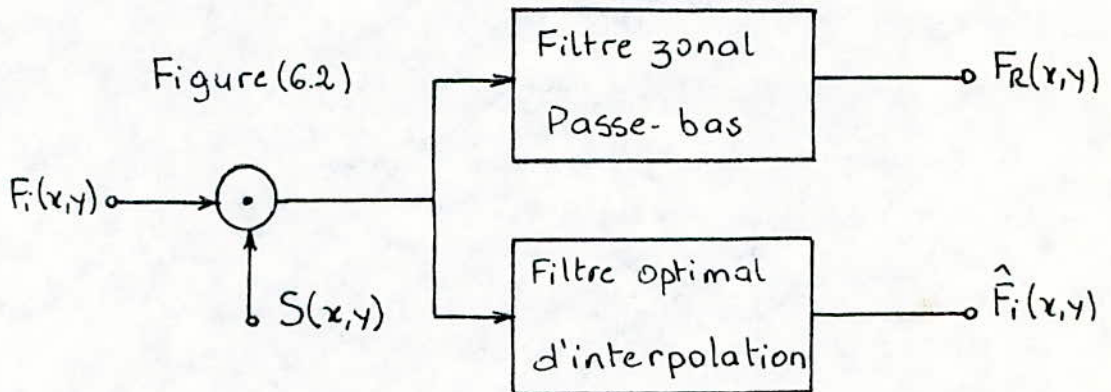
##### VI.2.1) Restauration des erreurs de recouvrement.

Comme nous l'avons exposé au chapitre I, les erreurs de



recouvrement proviennent d'un sous-échantillonnage de l'image continue. ces erreurs ont pour effets de rendre difficile la reconstitution exacte de l'image.

La figure (6.2) représente un système de restauration qui diminue les erreurs de recouvrement.



Si l'image est échantillonnée à son niveau de Niquist, un filtre passe-bas avec une bande passante  $\pm w_{xc}/2$  et  $\pm w_{yc}/2$  (où  $w_{xc}$  et  $w_{yc}$  sont les fréquences correspondantes au niveau de Niquist) nous permet d'avoir une reconstitution exacte de l'image. Si l'image est sous-échantillonnée un filtre passe-bas d'interpolation donne l'image suivante:

$$F_R(x,y) = F_i(x,y) + A(x,y)$$

où le terme  $A(x,y)$  est donné par l'équation (4.24). La relation précédente représente un modèle classique d'un signal plus interférence, et par conséquent les techniques de restauration vues dans (VI.1) peuvent être appliquées à ce problème.

Si l'image originale  $F_i(x,y)$  est considérée comme un processus aléatoire, alors  $A(x,y)$  va être un champ stochastique. Sous ces conditions, les techniques d'estimation de Wiener peuvent être utilisées pour déterminer la fonction de transfert du filtre d'interpolation pour minimiser l'erreur du carré de la moyenne



entre  $F_i$  et  $\hat{F}_i$ .

Pour les images continues, la fonction de transfert du filtre d'interpolation optimale dans la bande passante du filtre pass-bas est donnée par:

$$H_A(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_{F_i F_R}(\omega_x, \omega_y)}{H_{F_R}(\omega_x, \omega_y)}$$

où  $H_{F_i F_R}(\omega_x, \omega_y)$  est la densité spectrale de cross-power de  $F_i$  et de l'image interpolée  $F_R$ , et  $H_{F_R}(\omega_x, \omega_y)$  est la densité de puissance de  $F_R$ . Si nous supposons que  $F_i(x, y)$  et  $A(x, y)$  sont indépendants, la fonction de transfert devient:

$$H_A(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_{F_i}(\omega_x, \omega_y)}{H_{F_i}(\omega_x, \omega_y) + H_A(\omega_x, \omega_y)}$$

où  $H_A(\omega_x, \omega_y)$  est la densité spectrale de puissance de la composante des erreurs de recouvrement.

#### VI.2.2) Correction de l'erreur d'interpolation.

Il est difficile de concevoir et de contrôler précisément l'ouverture ou le spot du système de visualisation. Par conséquent ces systèmes fournissent rarement une interpolation optimale des échantillons de l'image digitale. Dans plusieurs cas, une compensation digitale peut être réalisée préalablement sur le plan de l'image pour corriger les erreurs d'une interpolation ultérieure. L'image continue interpolée peut être modélisée par:

$$F_R(x, y) = \sum_{k_1=-K}^K \sum_{k_2=-K}^K F_G(k_1, k_2) R(x - k_1 \Delta_s, y - k_2 \Delta_s)$$

où  $F_G(k_1, k_2)$  est le tableau des échantillons de l'image,  $\Delta_s$  étant la période d'échantillonnage et  $R(x, y)$  est la fonction d'interpolation de l'image supposée invariante dans l'espace. L'

image interpolée désirée et définie par :

$$F_D(x,y) = \sum_{k_1=-K}^K \sum_{k_2=-K}^K F_G(k_1, k_2) R_D(x-k_1\Delta s, y-k_2\Delta s)$$

où  $R_D(x,y)$  représente la fonction d'interpolation désirée.

La comparaison entre les images continues  $F_r$  et  $F_D$  peut être faite en évaluant les points correspondants sur leurs plans. Soient  $f_r$  et  $f_D$  les vecteurs représentant ces images.

$$f_r = R f_G$$

$$f_D = R_D f_G$$

$R$  et  $R_D$  sont des matrices contenant les éléments de  $R(x,y)$  et  $R_D(x,y)$  respectivement. La correction de la suite de la fonction d'interpolation  $R$  peut être réalisée par une transformation linéaire des échantillons de l'image  $f_G$  par un opérateur  $W$  préalable à l'interpolation. L'opérateur  $W$  qui minimise l'erreur des moindres carrés entre  $f_r$  et  $f_D$  est l'inverse généralisé  $W = R^+ R_D$  ou  $R^+$  est l'inverse généralisé de  $R$ .

### VI.2.3) Traitement homomorphique des images.



Figure (6.3)

Lorsque l'image observée est assujétée à des interférences ou des dégradations multiplicatives, le filtrage homomorphique illustré par le schéma ci-dessus est une technique utile pour la restauration.

Considérons l'image continue observée :

$$F_0(x,y) = F_i(x,y)E(x,y)$$

composée de l'image idéale  $F_i(x,y)$  multipliée par une fonction bidimensionnelle  $E(x,y)$  qui représente un bruit multiplicatif. L'objectif est d'estimer  $F_i(x,y)$  par traitement de l'observation. En prenant le logarithme de la relation précédente :

$$\ln[F_0(x,y)] = \ln[F_i(x,y)] + \ln[E(x,y)]$$

Cette dernière relation additive permet l'utilisation des techniques de filtrage linéaires conventionnelles pour estimer le logarithme de  $F_i(x,y)$ . Enfin, une exponentiation nous fournit une estimation de l'image idéale.

Un traitement homomorphique existe pour les systèmes convolutifs.

#### VI.2.4) Restauration d'un espace variant.

Si la source de dégradation est modélisée par un opérateur variable par translation linéaire, alors l'image dégradée devient :

$$F_0(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F_i(\alpha,\beta) H_D(x,y;\alpha,\beta) d\alpha d\beta$$

où  $H(x,y;\alpha,\beta)$  représente l'image de sortie à la position  $(x,y)$  comme le résultat d'une source ponctuelle à la position  $(\alpha,\beta)$ . Le problème de base de la restauration est d'estimer  $F_i(x,y)$  à partir des renseignements donnés, sur  $H_D(x,y;\alpha,\beta)$  et  $F_0(x,y)$ .

##### a) Mise en blocs de l'image.

une solution pour le traitement de telles images consiste à subdiviser l'image en petits blocs à travers lesquels la source



de dégradation est invariante par translation linéaire et la traiter avec les techniques déjà vues.

b) Distorsion des coordonnées.

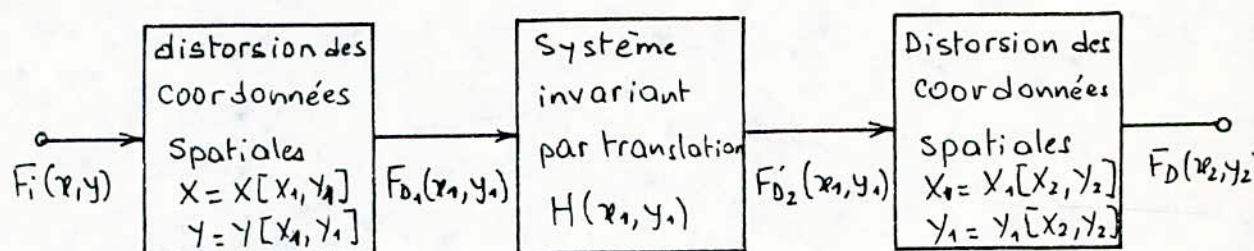


Figure (6.4)

Il existe une classe spéciale des problèmes de variation par translation linéaire dans lesquels la réponse impulsionnelle de la source de dégradation peut être considérée comme une cascade de distorsion des coordonnées spatiales de l'image, suivie par une dégradation invariante par translation linéaire, suivie d'une autre distorsion de coordonnées. Ce fait est illustré par la figure (6.4). Après avoir subi la première distorsion de coordonnées, l'image idéale prend la valeur :

$$F_{01}(x_1, y_1) = F_1 [x(x_1, y_1), y(x_1, y_1)]$$

À la sortie du système invariant elle devient :

$$F_{02}(x_1, y_1) = F_{01}(x_1, y_1) * H_D(x_1, y_1)$$

L'image finale dégradée est alors :

$$F_0(x_2, y_2) = F_{02} [x_1(x_2, y_2), y_1(x_2, y_2)]$$

Si les opérateurs de la distorsion des coordonnées spatiales ont des inverses uniques, alors le système variant par translation linéaire se réduit à un système invariant par translation auquel nous pouvons appliquer les techniques développées antérieurement.

### VI.2.5) réstauration récursive de l'image.

La restauration d'images basée sur l'estimation récursive n'est applicable que pour les signaux purement bidimensionnels et les signaux unidimensionnels obtenus à partir des signaux bidimensionnels à l'aide des techniques exposées dans le chapitre II.

#### a) Formulation bidimensionnelle.

Considérons une image caractérisée statistiquement par sa fonction d'autocorrélation de la forme:

$$R(\tau_1, \tau_2) = \sigma_s^2 \exp[-\sigma_1 |\tau_1| - \sigma_2 |\tau_2|]$$

où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les incréments dans les directions horizontale et verticale. A partir de cette corrélation, nous pouvons générer un champ aléatoire discret par la formule recursive suivante:

$$F(j+1, k+1) = \rho_1 F(j+1, k) + \rho_2 F(j, k+1) - \rho_1 \rho_2 F(j, k) + \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)} u(j, k)$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les corrélations horizontale et verticale des points adjacents de l'image et  $u(j, k)$  est un champ aléatoire non corrélé et qui a la même variance que les éléments de l'image.

Dans le cas où l'image observée  $F(j, k)$  est formée par la somme:

$$F_0(j, k) = F_i(j, k) + N(j, k)$$

de l'image idéale et d'un bruit additif, alors l'estimation récursive de l'image est donnée par la formule:

$$\begin{aligned} \hat{F}_i(j+1, k+1) = & K1(j, k) \hat{F}_i(j+1, k) + K2(j, k) \hat{F}_i(j, k+1) + K3(j, k) \hat{F}_i(j, k) \\ & + K4(j, k) F_0(j+1, k+1) \end{aligned}$$

où  $K_i$  représente un terme de pondération. Dans cette dernière équation, nous utilisons les estimations de trois points antérieurs de l'image et son observation bruyante pour trouver la

nouvelle estimation en chaque point de l'image.

Dans le cas où :

$$K1(j,k) = \rho_1$$

$$K2(j,k) = \rho_2$$

$$K3(j,k) = \rho_1 \rho_2 + K4(j,k)$$

ou  $K4(j,k)$  est une fonction de la covariance de l'erreur de l'estimation, nous obtenons une estimation minimum du carré de la moyenne. L'utilisation de la formule récursive précédente est limitée à la restauration des images décrites par des fonctions d'autocorrélation exponentielles.

#### b) Formulation unidimensionnelle.

L'image observée est composée de l'image idéale  $f_i(t)$  et le bruit additif  $\eta(t)$ :

$$f_o(t) = f_i(t) + \eta(t)$$

Si la fonction d'autocorrélation de l'image observée est exponentielle, alors nous pouvons déterminer celle de l'image idéale. Par analogie avec la formulation bidimensionnelle, nous pouvons établir la formule récursive de l'estimation du j<sup>ème</sup> échantillon de  $f_i(t)$ :

$$\hat{f}_i(j) = K1(j-1) \hat{f}_i(j) + K2(j-1) f_o(j-1)$$

ou  $K1(j)$  et  $K2(j)$  sont des termes de pondération dépendants de la fonction de corrélation de  $f_i(t)$ .



Une caractéristique de l'image est un attribut du champ de cette image. certaines caractéristiques sont naturelles dans le sens ou elles sont définies par l'apparence visuelle d'une image, tandis que d'autres, appelées caractéristiques artificielles résultent de manipulations spécifiques, ou mesures sur l'image. Les caractéristiques naturelles incluent la brillance d'une région de l'image, les contours d'objets, l'échelle des gris. L'histogramme des amplitudes de l'image et le spectre des fréquences spatiales sont des exemples de caractéristiques artificielles.

### VII.1) Caracteristiques des histogrammes.

#### VII.1.1) Histogramme du premier ordre.

Dans le chapitre I nous avons introduit la représentation d'un champ d'image discrète  $F(j,k)$  comme étant un échantillonnage à deux dimensions d'un processus stochastique décrit par un modèle de distribution de probabilité conjointe. Des techniques ont été développées pour estimer la distribution de probabilité de l'image en termes d'amplitudes mesurées dans l'image. Ainsi, la distribution de probabilité du premier ordre peut être définie par:

$$P(b) = \Pr [F(j,k) = b]$$

où  $0 \leq b \leq L-1$  dénote l'amplitude du niveau de quantification à L niveaux. L'estimateur du premier ordre de l'histogramme est simplement:

$$P(b) = N(b)/M$$

ou M représente le nombre total de pixels de l'image, et  $N(b)$  le nombre de pixels d'amplitude b.

L'estimateur du premier ordre permet de décrire les estimateurs de certaines caractéristiques de l'image

$$\begin{aligned} \text{Moyenne:} \quad & \bar{b} = \sum_{b=0}^{L-1} bP(b) \\ \text{Variance} \quad & \sigma_b^2 = \sum_{b=0}^{L-1} (b-\bar{b})^2 P(b) \\ \text{Energie} \quad & b_N = \sum_{b=0}^{L-1} [P(b)]^2 \\ \text{Entropie} \quad & b_E = \sum_{b=0}^{L-1} P(b) \log_2 [P(b)] \end{aligned}$$

### VII.1.2) Histogrammes du second ordre.

Les caractéristiques des histogrammes du second ordre sont basés sur la distribution de probabilité des paires de pixels définie par:

$$P(a,b) = \Pr[F(j,k)=a, F(m,n)=b]$$

ou a et b représentent les niveaux de quantification. L'estimateur du second ordre de l'histogramme est définie par:

$$P(a,b) = N(a,b)/M$$

ou N(a,b) dénote le nombre d'événement tel que F(j,k)=a et F(m,n)=b, M étant toujours le nombre total de pixels.

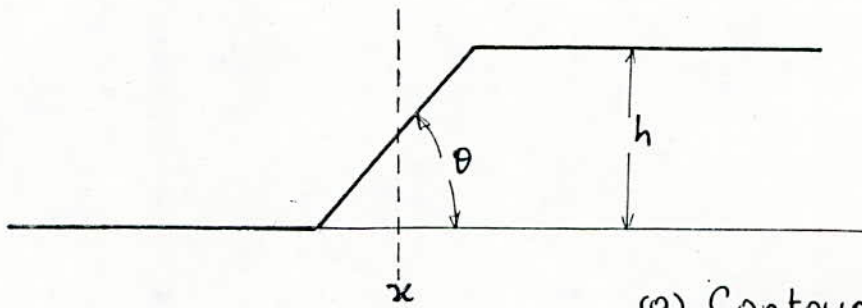
A partir de cette notion nous définissons:

$$\begin{aligned} \text{Autocorrélation:} \quad & B_A = \sum_{a=0}^{L-1} \sum_{b=0}^{L-1} abP(a,b) \\ \text{Covariance} \quad & : \quad B_C = \sum_{a=0}^{L-1} \sum_{b=0}^{L-1} (a-\bar{a})(b-\bar{b})P(a,b) \\ \text{Energie} \quad & : \quad B_N = \sum_{a=0}^{L-1} \sum_{b=0}^{L-1} [P(a,b)]^2 \\ \text{Entropie} \quad & : \quad B_E = \sum_{a=0}^{L-1} \sum_{b=0}^{L-1} P(a,b) \log_2 [P(a,b)] \end{aligned}$$

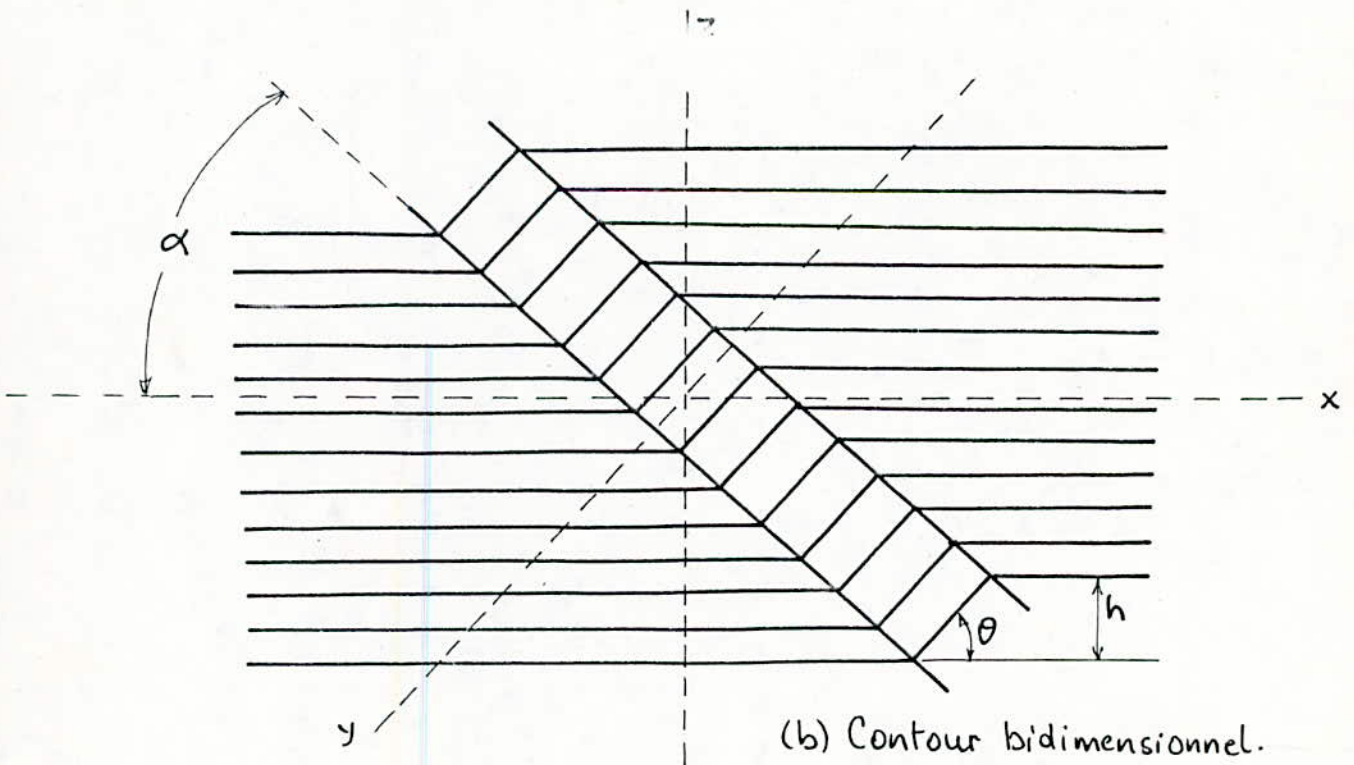
### VII.2) Detection des contours de luminance.

Les changements ou les discontinuités de la luminance de

l'image sont des caractéristiques importantes de celle-ci du fait qu'ils donnent une indication de l'étendue physique des objets contenus dans l'image. La figure (7.1) représente des contours à une et à deux dimensions qui consistent en des rampes augmentant d'un niveau bas à un niveau haut.



(a) Contour unidimensionnel.



(b) Contour bidimensionnel.

Figure 7.1



Dans le cas unidimensionnel le contour est caractérisé par sa hauteur, sa pente et l'abscisse du point milieu de la pente. Un contour existe si la pente et la hauteur sont plus grandes que des valeurs critiques spécifiées. Dans le cas bidimensionnel, l'orientation par rapport à l'axe des x est aussi importante; elle indique la direction du contour.

Une détection idéale de contours doit produire une ligne définie par les points milieux de la rampe.

Une méthode couramment utilisée est celle illustrée par le schéma suivant:

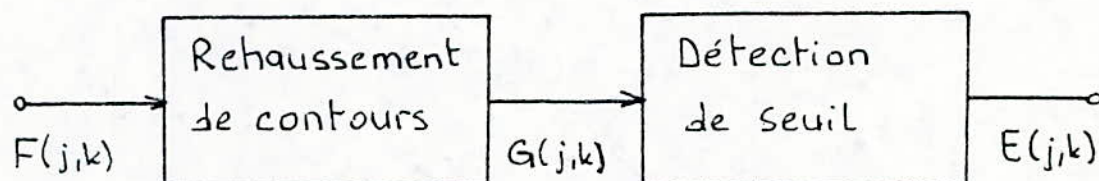


Figure 7.91

L'image originale monochrome  $F(j,k)$  subit un réhaussement de contours par un traitement linéaire ou non pour produire un champ  $G(j,k)$  dans lequel les transitions brusques sont accentuées. Puis on effectue le test suivant:

$$G(j,k)=0 \quad \text{si} \quad G(j,k) < T_L(j,k)$$

$$G(j,k)=1 \quad \text{si} \quad G(j,k) \gg T_U(j,k)$$

où  $T_L(j,k)$  et  $T_U(j,k)$  sont respectivement les valeurs des seuils inférieur et supérieur. Ces seuils doivent varier dans l'espace pour compenser les grands changements de luminance. Un seuil placé à un niveau haut ne permet pas de détecter des contours de faibles niveaux. Il en est de même pour un seuil placé trop bas

qui fait détecter des contours inexistant et crée ainsi du bruit.

Avec cette méthode, une image contenant la localisation des contours est ainsi générée.

#### VII.2.1) Méthodes linéaires de réhaussement de contours.

Une variété de techniques linéaires peuvent être utilisées pour accentuer les contours permettant ainsi une détection de seuil.

##### a) Différenciation discrète.

Un réhaussement de contour dans le sens horizontal est obtenu par:

$$G(j,k) = F(j,k) - F(j,k+1)$$

Dans le sens vertical, il est obtenu par:

$$G(j,k) = F(j,k) - F(j+1,k)$$

Une autre méthode consiste à faire la différence des variations de niveaux suivant une ligne par la relation:

$$G(j,k) = [F(j,k) - F(j,k-1)] - [F(j+1,k) - F(j,k)]$$

l'équivalent de cette expression pour le sens vertical est:

$$G(j,k) = [F(j,k) - F(j-1,k)] - [F(j+1,k) - F(j,k)]$$

##### b) Convolution.

Les différenciations discrètes à deux dimensions peuvent être obtenues en faisant la convolution de l'image originale avec les masques gradient suivants:

$$\text{Nord: } H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Nord-est: } H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Est: } H = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sud-est: } H = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sud: } H = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & & \\ 1 & & \end{vmatrix}$$

$$\text{Sud-ouest: } H = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Ouest: } H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Nord-ouest: } H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Le nom de chaque masque indique la direction dans laquelle il donne le maximum de réponse.

Un réhaussement de contours peut être réalisé sans prendre en considération la direction en faisant la convolution de l'image avec un masque laplacien.

Il existe plusieurs types de masques laplacien, parmi eux nous citons:

$$\text{Mask 1: } H = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Mask 2: } H = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Mask 3: } H = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

L'accentuation de contours peut être réalisée proprement à la corrélation statistique des pixels par le masque statistique suivant:

$$H = \begin{vmatrix} e_c e_r & -e_c (1 + e_r^2) & e_c e_r \\ -e_r (1 + e_c^2) & (1 + e_c^2)(1 + e_r^2) & -e_r (1 + e_c^2) \\ e_c e_r & -e_c (1 + e_r^2) & e_c e_r \end{vmatrix}$$

dans lequel  $e_r$  et  $e_c$  représentent les facteurs de corrélation des pixels adjacents des lignes et des colonnes. Si  $e_c = e_r = 0$ , il n'y a pas de corrélation et le masque n'a aucun effet.

Si  $e_c = e_r = 1$ , le masque statistique se réduit à un masque laplacien.



VII.2.2) Methodes non-linéaires de réhaussement de contours.

Les systèmes de détection non-linéaire de contours utilisent des combinaisons non linéaires des pixels comme un moyen de réhausser les contours, en prévision d'une détection de seuil.

a) Methode de ROBERTS:

L'opération non-linéaire de Roberts est définie par:

$$G_R(j,k) = \left\{ [F(j,k) - F(j+1,k+1)]^2 + [F(j,k+1) - F(j+1,k)]^2 \right\}^{1/2}$$

Une autre approche de différenciation dont le calcul est assez rapide est donnée par:

$$G_A(j,k) = |F(j,k) - F(j+1,k+1)| + |F(j,k+1) - F(j+1,k)|$$

b) Methode de SOBEL.

Dans cette méthode, le plan à contours accentués est donné par:

$$G(j,k) = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

avec :  $X = (A_2 + 2A_3 + A_4) - (A_0 + 2A_7 + A_6)$

et  $Y = (A_0 + 2A_1 + A_2) - (A_6 + 2A_5 + A_4)$

Les  $A_i$ ,  $i=0,7$  sont les voisins de chaque  $F(j,k)$  définis par la figure suivante:

$A_0$	$A_1$	$A_2$
$A_7$	$F(j,k)$	$A_3$
$A_6$	$A_5$	$A_4$

Figure 7.2

c) Methode de KIRSCH.

En se référant à la figure précédente, le réhaussement est donné par:

$$G(j,k) = \text{Max} \left\{ 1, \max_{i=1}^7 [ |5S_i - 3T_i| ] \right\}$$

$$S_i = A_i + A_{i+1} + A_{i+2} \quad [\text{mod } 8]$$

et  $T_i = A_{i+3} + A_{i+4} + A_{i+5} + A_{i+6} + A_{i+7} \quad [\text{mod } 8]$

d) Methode de WALLIS.

Cette méthode repose sur le traitement homomorphique des images. en nous basant sur ce principe, nous pouvons affirmer qu'un contour existe si la valeur du logarithme de la luminance en un pixel dépasse la valeur de la moyenne logarithmique des luminances de ses quatre proches voisins d'un certain seuil. En nous référant à la figure (7.2) l'image réhaussée est donnée par :

$$G(j,k) = \frac{1}{4} \log \left[ \frac{F(j,k)}{A_1 A_3 A_5 A_7} \right]$$

La comparaison de  $G(j,k)$  avec les seuils supérieur et inférieur est équivalente à la comparaison de la fraction entre crochets de l'équation précédente avec des seuils modifiés. De ce fait le calcul du logarithme n'est pas nécessaire.

### VII.3) Ajustement des contours.

Les contours idéaux d'une image doivent être vus comme des signaux rampes à deux dimensions tel qu'il est montré sur la figure (7.1.b). Les méthodes exposées précédemment ne donnent pas des contours idéaux, c'est pour cela qu'il est nécessaire de faire un ajustement pour approcher au mieux la forme idéale. La formulation de ce concept est donnée par :

$$S(x,y) = \begin{cases} b & \text{pour } x \cos \theta + y \sin \theta < \ell \\ b+h & \text{pour } x \cos \theta + y \sin \theta \geq \ell \end{cases}$$

ou  $S(x,y)$  représente l'image avec des contours idéaux et  $\ell, \theta$  représentent les distances polaires à partir du centre de la région circulaire de test jusqu'à un point du contour (figure (7.3)). L'erreur d'ajustement au sens des moindres carrés, dans

cette methode, est donnée par :

$$\delta = \iint_{(\text{cercle})} [G(x,y) - S(x,y)]^2 dx dy$$

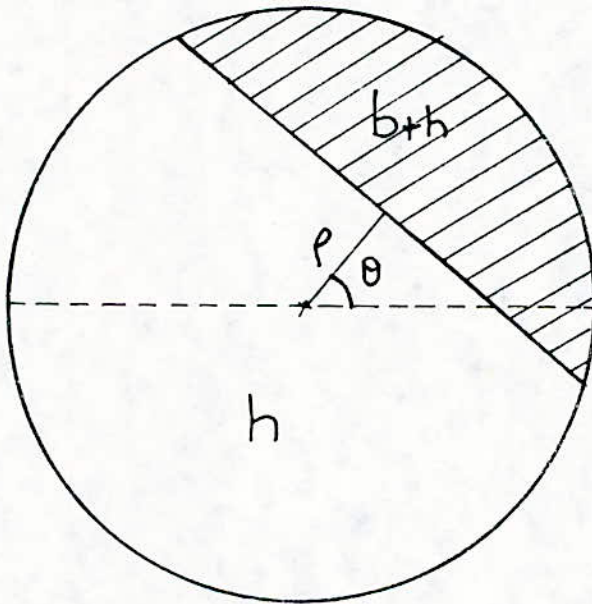


Figure 7.3



#### VII.4) Simulation du réhaussement de contours.

Pour vérifier l'efficacité des méthodes de réhaussement de contours citées, nous avons simulé une image représentant une barre à huit (8) niveaux par la matrice 16x64 donnée par la figure (7.4). Le programme mis au point (voir annexe), permet à partir d'un menu, de choisir la méthode désirée, entre trois possibles: Kirsch, Roberts, Sobel.

Le traitement effectué a montré que pour les trois méthodes, le contour est effectivement isolé; les régions où il n'y a pas de variation de luminance sont représentées par un même niveau de gris. Par contre, les régions de transitions donnant les contours sont représentées par des niveaux différents (figures 7.5, 7.6, 7.7). Cependant, nous avons noté des différences entre les résultats obtenus pour les trois méthodes. Ainsi, la méthode de Roberts donne des contours plus fins que les autres méthodes; son contour est représenté par des colonnes uniques dans la matrice de la figure (7.5). Pour les autres les colonnes obtenues sont doublées (figures 7.6, 7.7). De plus, l'accentuation du contour n'est pas identique. La méthode de Kirsch donne la valeur 7 qui est le blanc absolu pour les contours sur un fond de niveau 1, ceci donne un contour très contrasté. L'accentuation donnée par la méthode de Sobel est moyenne (contour de niveau 4 sur fond noir). La méthode de Roberts donne la plus faible accentuation (niveau 2 sur fond noir).

Pour le temps de calcul, nous avons pu relever que la méthode de Roberts est la plus rapide, suivie de celle de Kirsch. Le temps minimum pour la matrice considérée est de une minute.









## CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons présenté un formalisme mathématique qui nous permet de représenter une image continue sous une forme discrète, dans laquelle l'image est définie par une matrice de points (pixels). Cette représentation nous permet d'éviter l'emploi de techniques optiques dans la réalisation d'opérations exigeant un matériel optique de construction difficile et de coût élevé, et d'utiliser à leur place des opérateurs numériques simples à réaliser.

Malgré le grand nombre de pixels qu'on doit utiliser, et par conséquent le temps de traitement et l'occupation en mémoire qui en découlent, l'utilisation des techniques numériques est motivée par le développement des calculateurs, ainsi que la mise au point d'algorithmes rapides de calculs basés sur les transformations unitaires.

Nous avons présenté également, des méthodes de traitement qui servent à améliorer la qualité (réhaussement) de l'image et à remédier à ses dégradations. Les méthodes numériques de détection de contours présentées ont l'avantage de permettre à un processeur associé à un système électronique de reconnaître la forme des objets qu'il manipule, et de disposer ainsi d'un pouvoir de décision.

L'indisponibilité d'un matériel adéquat ne nous a pas permis de vérifier les méthodes de réhaussement et de restauration citées. Néanmoins, nous avons pu simuler un réhaussement de contours et de vérifier l'efficacité des méthodes décrites.

Nous espérons, enfin, que ce travail sera un outil précieux pour ceux qui aborderont ce sujet dans l'avenir.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1-A. BIJAOUI. Image et information, introduction au traitement numérique des images. Masson 1984.
- 2-W.K. PRATT. Digital image processing. John Wiley and sons 1978.
- 3-M. KUNT. Traitement numérique des signaux. Dunod 1984.
- 4-M. BELANGER. Traitement numérique du signal, théorie et pratique. Masson 1984.
- 5-J. MAX. Méthodes et techniques de traitement du signal, et applications aux mesure physiques. Masson 1981.
- 6-J. LIFERMANN. Les principes du traitement statistique du signal. 1981
- 7-J. S. LIM, CHAN. IEEE, Acoustics, speech and signal processing. One-dimensional processing for adaptive image restoration. Février 1985
- 8-D. CHEKROUN. Le NOUVEL AUTOMATISME. Janvier 1985.
- 9-D. CHEKROUN. Le NOUVEL AUTOMATISME. Février 1985.
- 10-G. Y. LIAO, T. A. NODES et N. C. GALLAGHER. IEEE, Acoustics, speech and signal processing. Output distributions of two-dimensional median filters. Octobre 1985.

\*\*\*\*\*  
\* ANNEXE \*  
\*\*\*\*\*

PROGRAMME DE SIMULATION D'UN REHAUSSEMENT DE CONTOURS

```
10 !*****
11 ! SIMULATION D'UN REHAUSSEMENT DE CONTOURS*
12 !*****
20 DIM A(16,64),F(16,64),A1(14)
30 J=1
40 L=0
50 FOR K=J TO J+7
60 FOR I=1 TO 16
70 A(I,K)=L
80 NEXT I
90 NEXT K
100 J=J+8
110 L=L+1
120 IF J+8<=65 THEN 50
130 INPUT"VOULEZ VOUS IMPRIMER LA MATRICE ORIGINALE O/N",B#
140 IF B#="N" THEN 260
150 !
160 !IMPRESSION DE LA MATRICE ORIGINALE
170 !
180 PRINTER IS 801
190 FOR I=1 TO 16
200 FOR J=1 TO 64
210 A#=VAL$(A(I,J))
220 PRINT A#;
230 NEXT J
240 PRINT
250 NEXT I
260 PRINTER IS 1
270 PRINT"QUELLE METHODE?"
280 PRINT"KIRSCH :TAPEZ K"
290 PRINT"ROBERTS :TAPEZ R"
291 PRINT"SOBEL :TAPEZ S"
300 INPUT M#
310 IF M# <>"K" AND M# <>"R" AND M# <>"S" THEN 300
320 IF M#="R" THEN 630
321 IF M#="S" THEN 720
330 !*****
340 ! METHODE DE KIRSCH *
350 !*****
370 FOR J=2 TO 15
380 FOR K=2 TO 63
390 A1(0)=A(J-1,K-1)
400 A1(1)=A(J-1,K)
410 A1(2)=A(J-1,K+1)
420 A1(3)=A(J,K+1)
430 A1(4)=A(J+1,K+1)
440 A1(5)=A(J+1,K)
```



```

450 A1(6)=A(J+1,K-1)
460 A1(7)=A(J,K-1)
470 FOR L=0 TO 6
480 A1(L+8)=A1(L)
490 NEXT L
500 FOR I=1 TO 7
510 S(I)=A1(I)+A1(I+1)+A1(I+2)
520 T(I)=A1(I+3)+A1(I+4)+A1(I+5)+A1(I+6)+A1(I+7)
530 X(I)=ABS(5*S(I)-3*T(I))
540 NEXT I
550 Max=MAX(X(*))
560 IF Max>=1 THEN 590
570 F(J,K)=1
580 GOTO 600
590 F(J,K)=7
600 NEXT K
610 NEXT J
620 GOTO 900
630 !*****
640 ! METHODE DE ROBERTS *
650 !*****
660 FOR I=1 TO 15
670 FOR J=1 TO 63
680 F(I,J)=ABS(A(I,J)-A(I+1,J+1))+ABS(A(I,J+1)-A(I+1,J))
690 NEXT J
700 NEXT I
710 GOTO 900
720 !*****
730 ! METHODE DE SOBEL *
740 !*****
760 FOR J=2 TO 15
770 FOR K=2 TO 63
861 M=A(J-1,K+1)+2*A(J,K+1)+A(J+1,K+1)-A(J-1,K-1)-2*A(J,K-1)
      -A(J+1,K-1)
871 Y=A(J-1,K-1)+2*A(J,K+1)+A(J-1,K+1)-A(J+1,K-1)-2*A(J+1,K)
      -A(J+1,K+1)
880 F(J,K)=SQR(M*M+Y*Y)
885 NEXT K
890 NEXT J
900 !*****
910 ! IMPRESSION *
920 !*****
930 PRINTER IS 801
940 FOR I=1 TO 16
950 FOR J=1 TO 64
960 F#=VAL$(F(I,J))
970 PRINT F#;
975 NEXT J
980 PRINT
985 NEXT I
990 PRINTER IS 801
995 END

```