

U.S.T.A

2 ex

24
22/79
24
ECOLE NATIONALE
POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT ELECTRICITE
FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

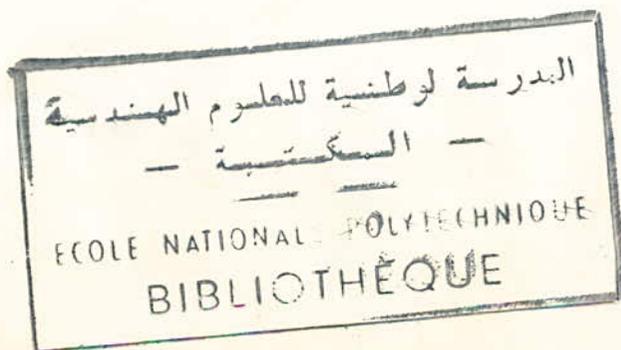


SYNTHESE DES SYSTEMES

ASSERVIS PAR

LES POLES ET LES ZEROS

PROPOSE PAR:
MR TRAN-TIENTIEN



ETUDIE PAR:
TERRA ZIDANE
NOUI SALAH

PROMOTION JUIN 1979

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي

مَنْ عَمِلَ الصَّالِحَاتِ



DEPARTEMENT ELECTRICITE
FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES



SYNTHESE DES SYSTEMES

ASSERVIS PAR

LES POLES ET LES ZEROS

PROPOSE PAR:
MR TRAN-TIENTIEN

ETUDIE PAR:
TERRA ZIDANE
NOUI SALAH

PROMOTION JUIN 1979

6 -A ma mère et mon pere

Qui ont veillé à mon education et mes études

- A mes frères et soeur

- A ma tante

Qui fut notre mère

- A mes frères de la mosquée,

Salah NOUI

- A mes parents qui m'ont tous donné.

- A mes soeurs et mes cousins plus particulièrement Abdesslam et Hocine, qui n'ont pas hésité de m'encourager et de m'aider.

- A tous mes frères de la mosquée qui m'ont été d'un support en toutes circonstances.

- A Mes frères de classe A. Hechiche et R. Kherief.

Zidane TERRA

. T A B L E D E S M A T I E R E S .

Introduction.....	1
<u>Chapitre I : Notions fondamentales.....</u>	2
I-1 Performances d'un système de commande.....	2
I-1-1 Réponse à des entrées typiques.....	2
I-1-2 Réponse en régime définitif.....	2
I-1-3 Régime transitoire.....	3
I-2 Fonctions de transfert.....	6
I-2-1 Définition.....	6
I-2-2 Poles et zéros de la fonction de transfert.....	6
I-2-3 Expression des constantes d'erreur en fonction des poles et des zéros.....	7
I-2-3-1 DEFINITIONS.....	7
I-2-4 Systèmes du premier ordre.....	8
I-2-5 Systèmes du second ordre.....	9
I-2-5-1 Caractéristiques importantes.....	10
I-2-5-2 Effet d'un zéro réel négatif.....	10
I-2-5-3 Effet d'un pole réel négatif.....	11
I-2-5-4 Effet de deux poles complexes conjugués.....	11
I-2-5-5 Effet conjugué d'un zéro et d'un pole réels négatifs.....	12
I-2-6 Conclusion.....	13
I-3 STABILITE.....	16
I-3-1 Définition.....	16
I-3-2 Stabilité des systèmes lineaires dans le plan de Laplace.....	16
I-3-3 Marge de stabilité.....	17
I-3-3-1 Marge de stabilité absolue.....	17
I-3-3-2 Marge de stabilité relative.....	18
I-4 Etude de la fonction de transfert par les poles et les zéros.....	18
I-4-1 Introduction.....	18
I-4-2 Etude de la fonction de transfert dan le plan des 'S'.....	18
I-4-3 Application au régime transitoire.....	19
I-4-4 Applications.....	20

Chapitre II : Etude des systèmes asservis linéaires
par la méthode du lieu d'Evans..... 22

II-1 Introduction..... 22

II-2 Définition..... 22

II-3 Construction du lieu d'Evans..... 22

II-4 Tracé du lieu- applications..... 24

II-5 Correction dans le plan des 'S'..... 28

 II-5-1 Correcteur à avance de phase..... 28

 II-5-2 Correcteur à retard de phase..... 29

 II-5-3 Applications..... 30

II-6 Conclusion..... 37

Chapitre III : Synthèse des systèmes asservis par la
méthode de Truxal-Guillemain..... 38

III-1 Introduction..... 38

III-2 DETERMINATION de la fonction de transfert en boucle
fermée à partir des clauses techniques..... 39

 III-2-1 REcherche de la fonction de transfert en
boucle fermée sous forme d'une fonction de 2^o ORDRE
ordre..... 39

 III-2-2 Recherche de la fonction de transfert en boucle
fermée par retouche..... 39

 III-2-2-a Adjonction d'un zéro..... 40

 III-2-2-b Adjonction d'un dipole..... 40

 III-2-2-c Généralisation..... 41

III-3 DETERMINATION de la fonction de transfert en boucle
ouverte à partir de la boucle fermée..... 41

 III-3-1 Cas où la F.T ne possède pas de dipole..... 42

 III-3-2 Cas où la F.T en B.F possède un dipole..... 43

III-4 Détermination de la F.T du correcteur..... 45

III-5 Applications..... 46

III-6 Conclusion..... 55

^{CH}Chapitre IV : Synthèse des systèmes asservis par la méthode
de V.W. Weber..... 56

IV-1 Introduction..... 56

IV-2 Détermination des paramètres du réseau correcteur..... 56

IV-3 Compensation des zéros..... 64

IV-4 Fonction de transfert en B.F pour diverses dispositions
des poles..... 64

IV-5 Applications..... 74

IV-6 Conclusion..... 77

CONCLUSION..... 78

ANNEXE..... 79

BIBLIOGRAPHIE..... 81

INTRODUCTION

Les asservissements occupent une place importante dans le monde moderne en raison des performances de plus en plus élevées que l'on exige des commandes automatiques. Le projet d'un asservissement est une opération compliquée en raison des nombreux paramètres qui entrent en jeu. En effet, on doit utiliser des correcteurs destinés à améliorer les performances.

On distingue deux grandes méthodes: la méthode harmonique, et la méthode des pôles et des zéros, qui se complète parfaitement. En effet alors que la première a l'avantage de permettre l'étude expérimentale des systèmes, elle présente en revanche l'inconvénient de ne pas donner, comme la seconde, une connaissance directe et précise du régime transitoire, cette dernière information étant particulièrement utile, car un asservissement travaille constamment en régime transitoire.

Notre travail consiste à se pencher plus particulièrement sur la deuxième méthode. Celle-ci comprend quatre grandes parties:

- Une première partie est consacrée aux rappels sur l'étude des asservissements linéaires: régime transitoire et définitif, fonctions de transfert etc...

- compensation par le lieu d'Evans.

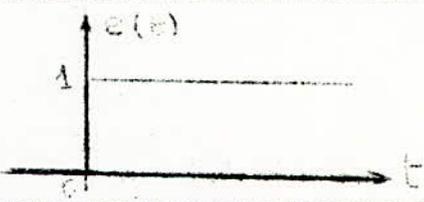
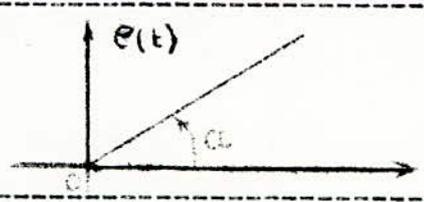
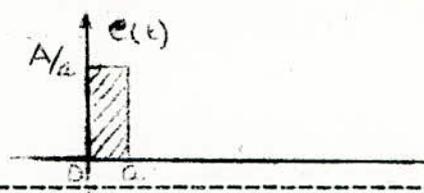
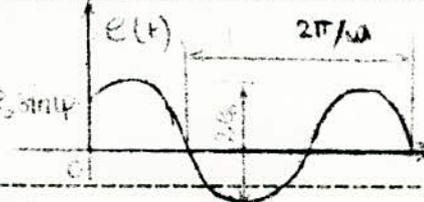
- Compensation par la méthode de Truxal-Guillemain

- Enfin, synthèse des systèmes asservis par la méthode de Weber.

En s'appuyant plus particulièrement sur le côté théorique des systèmes asservis linéaires sans perturbations.

Chapitre INotions FondamentalesI-1 Performances d'un système de commande :I-1-1 Réponse à des entrées typiques.

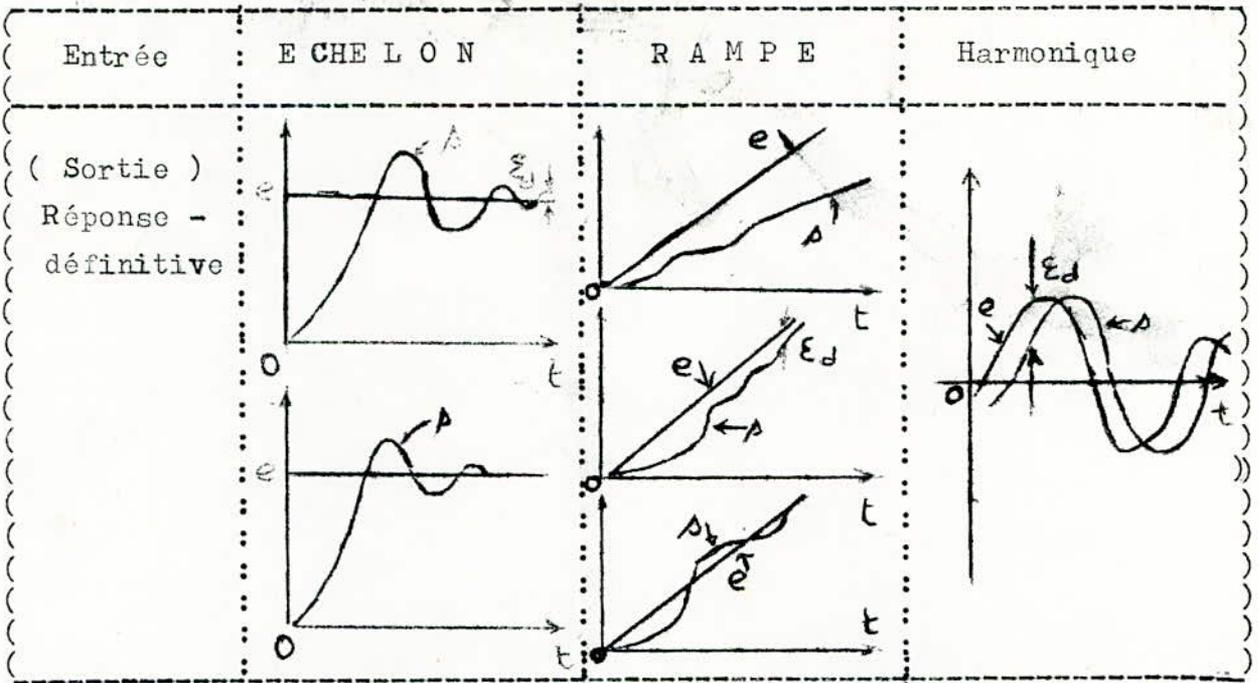
On caractérise les performances d'un système asservis par la manière dont il répond à un certain nombre d'entrées typiques qui sont : Echelon, rampe, impulsion et fonction harmonique.

<p>- <u>Echelon</u></p> $e(t) = u(t) \cdot \begin{cases} u(t)=0 & t < 0 \\ u(t)=1 & t > 0 \end{cases}$	
<p>- <u>Rampe</u></p> $e(t) = at u(t) \quad a: \text{pente}$	
<p>- <u>Impulsion</u></p> $e(t) = A \delta(t) \cdot \begin{cases} \delta(t)=0 & t < 0 \\ \delta(t)=0 & t > 0 \end{cases}$	
<p>- <u>Fonction harmonique</u></p> $e(t) = e_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$	

I-1-2 Réponse. en régime définitif :

En appliquant les types d'entrée énumérées ci-dessous à ce système, celui-ci présente finalement une ~~Sortie~~ sortie appartenant aussi à un de ces types, on dit donc qu'il a atteint son régime définitif ou permanent. Si la sortie diffère de l'entrée en régime permanent on dit qu'il ya une erreur (ou écart) permanente.

$$\xi_d(t) = e(t) - s_d(t).$$

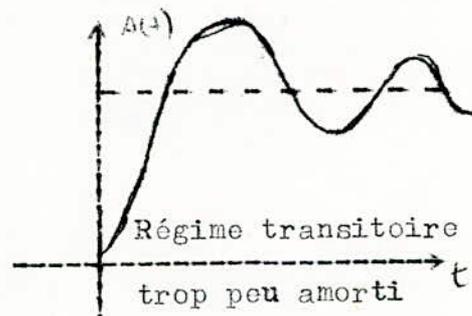
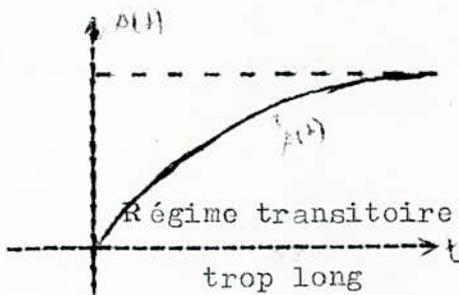


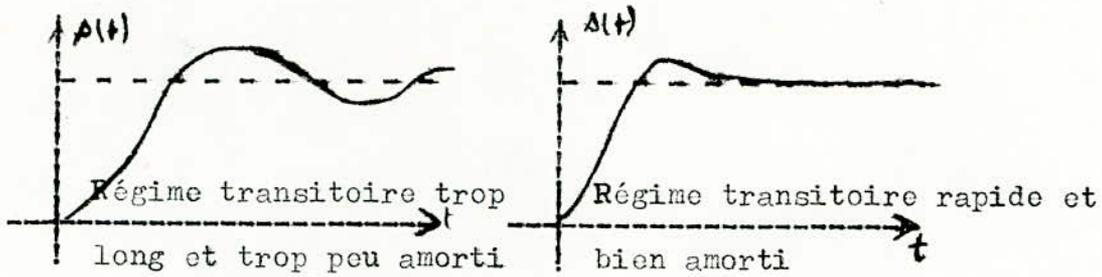
I-1-3 Régime transitoire :

Soumis à l'un des essais définis ci-dessus, l'intervalle de temps mis par le système pour atteindre son régime permanent, est le régime transitoire.

On s'intéresse plus particulièrement à ce régime parceque :

- Trop, peu amorti, donc gênant car l'écart ($e = e - s$) prend des valeurs instantanées importants.
- Trop long, il met trop de temps à être adapter à sa nouvelle entrée.
- Au cours de celui-ci peuvent apparaître (s'il est du type oscillatoire) des valeurs de pointes dangereuses des variables.

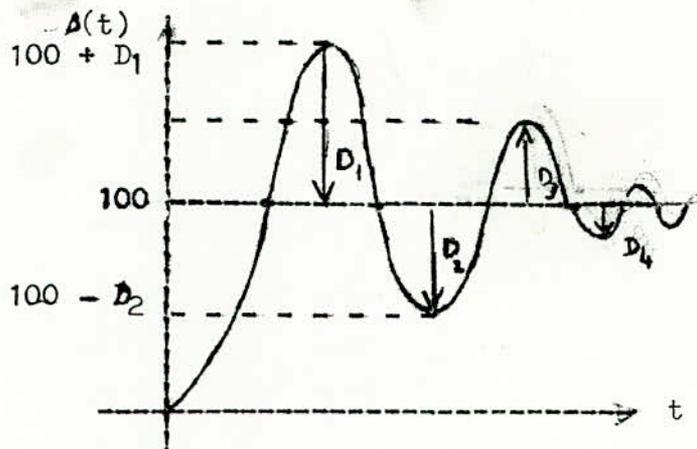




Le régime transitoire est plus important que le régime statique du point de vue performances car un système asservi est soumis à des entrées aléatoires, il sera toujours en régime transitoire.

A/ Amortissement :

Les dépassements successifs $D_1, D_2, \text{etc...}$ de la réponse unitaire caractérise le degré d'amortissement d'un transitoire $\Delta(t)$.

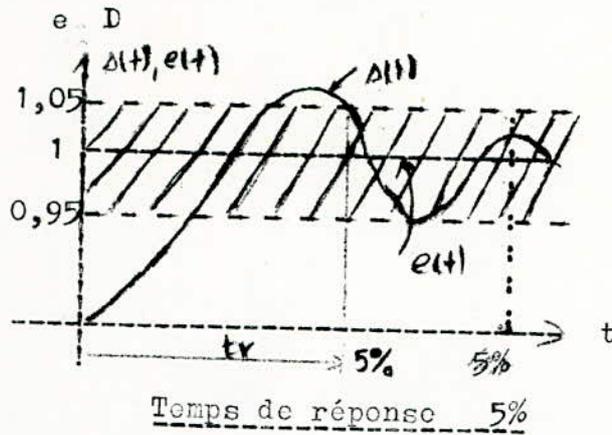


On considère surtout le premier dépassement D_1 , La condition pour qu'un système soit suffisamment amorti est que le dépassement de sa réponse unitaire n'exède pas un certain pourcentage prescrit à l'avance.

B/ Rapidité :

La condition que le système soit suffisamment rapide est qu'on exige un temps de réponse suffisamment court.

Un temps de réponse est défini comme temps au bout duquel la réponse du système atteint à 5% près sa valeur finale pour une excitation unitaire. .../...



Quand un phénomène transitoire est oscillant sa durée peut aussi être caractérisée par la période des oscillations à condition que l'on connaisse leur amortissement ou taux de décroissance en amplitude. La fréquence des oscillations transitoires est appelée fréquence propre du système.

C) Conclusion

Les performances d'un système de commande se jugent par la qualité de leur régime transitoire (rapide amortissement) et de leur régime définitif (erreur de position et de traînage, propriétés de réponse en fréquence).

Le tableau suivant résume les conditions imposées qui apparaissent aussi comme des critères de performance.

Type d'entrée	Conditions généralement imposées à la réponse	
	Régime Transitoire	Régime Permanent
Echelon $e_0 \cdot u(t)$	Amorti	Erreur de position nulle
Echelon de vitesse $a \cdot u(t)$	dépassement faible Rapide. Temps de réponse faible	Erreur de traînage faible.
Impulsion $A \delta(t)$	(Fréquence propre élevée)	
Harmonique. $e_0 \sin(\omega t + \varphi) \cdot u(t)$		Etude de réponse en fréquence

I-2 Fonctions de transfert

I-2-1 Définition :

On appelle fonction de transfert $H(s)$ d'un système linéaire, le facteur qui multiplie la transformée $X(s)$ du signal d'entrée dans l'équation donnant la réponse $Y(s)$.

Elle se met sous la forme d'un quotient de deux polynomes.

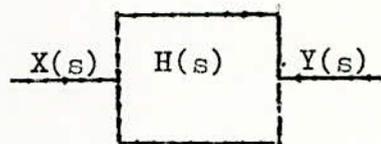
$$H(s) = K \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

avec $n > m$ pour les systèmes réels

$K = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)$: gain statique

On a donc pour un système linéaire

$$\underline{Y(s) = H(s) X(s)}$$



I-2-2 Pôles et zéros de la fonction de transfert

Représentation dans le plan de Laplace

$H(s)$ peut donc se mettre sous la forme.

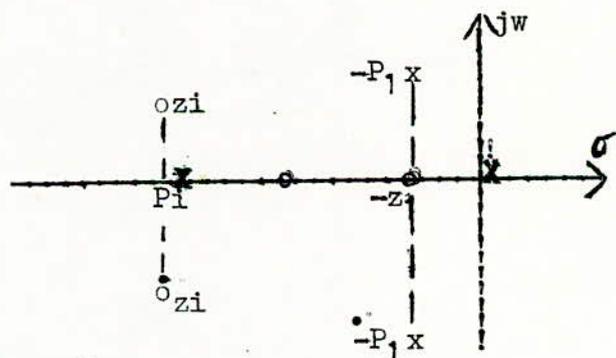
$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

avec $k = \frac{a_m}{b_n}$

où $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ sont les zéros de $N(s)$

qui peuvent être réels ou complexes conjugués.

p_1, p_2, \dots, p_n sont les pôles de $H(s)$ qui peuvent être réels ou complexes conjugués.



x : pole

o : zero

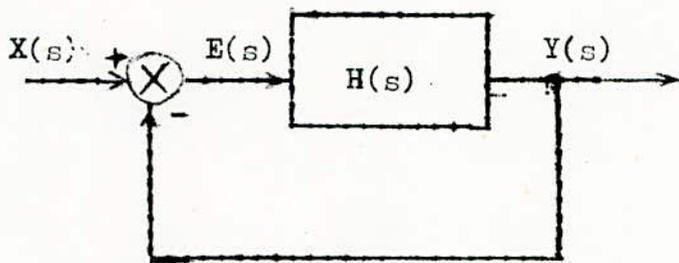
.../...

I-2-3 Expression des constantes d'erreur de H(s) en fonction des poles et des zéros

I-2-3-1 Définitions

- Erreurs statiques : On appelle erreur définitive statique la différence entre $X(s)$ et $Y(s)$ quand le régime définitif est atteint

$$\xi_{\lambda}(t) = x(t) - y(t) \text{ qd } t \rightarrow \infty$$



- Erreurs dynamiques:

On définit également une erreur instantanée ou dynamique, à l'instant t , par la différence :

$$\xi_d(t) = x(t) - y(t)$$

on voit que :

$$\xi_s(t) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_d(t)$$

on a :

$$E(s) = \frac{1}{1+H(s)} X(s)$$

En faisant un développement limité en série de Maclaurin de $\frac{E(s)}{X(s)}$ on obtient

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+H(s)} = \frac{1}{1+K_p} + \frac{1}{K_v} s + \frac{1}{K_a} s^2 + \dots$$

comme :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = 1 - \frac{E(s)}{X(s)} = 1 - \frac{1}{1+K_p} - \frac{1}{K_v} s - \frac{1}{K_a} s^2 + \dots$$

Si $\frac{Y(s)}{X(s)} = F(s)$ est mise sous la forme :

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)}$$

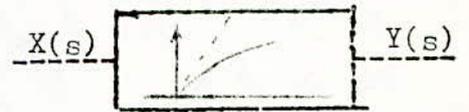
D'où le tableau regroupant les résultats importants :

Constantes d'erreur	Définition	Relation entre Ffs) et les c ^{tes} d'erreur	Relation entre les constantes d'erreurs) et les poles et zeros
De position	$K_{FP} = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)$	$F(0) = \frac{K_p}{1 + K_p}$	$K_p = K \frac{\prod_{i=1}^m (z_i)}{\prod_{j=1}^n (P_j) - K \prod_{i=1}^m (z_i)}$
De vitesse ou trainate	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)$	$\frac{1}{K_v} = - \frac{d}{ds} \left\{ \ln(F(s)) \right\}_{s=0}$	$\frac{1}{K_v} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{P_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i}$ $J=1 \quad J=1$
D'accélération	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)$	$\frac{2}{K_a} = \frac{d^2}{ds^2} \left(\ln F(s) \right) + \frac{1}{K_v}$ $s=0$	$-\frac{2}{K_a} = -\frac{1}{K_v^2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{P_j^2} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i^2}$ $J=1 \quad J=1$

I-2-4 Systemes du premier ordre

Sa fonction de transfert normalisée est :

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + sT}$$

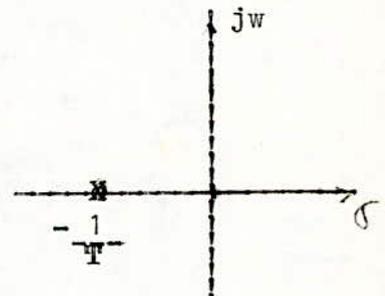


ayant pour pole : $-\frac{1}{T}$ est un zero à l'infini

$K_p = 1 = K$. pas d'erreur statique

Le constante de trainage est

$$K_v = \frac{1}{T} = \omega_n$$



Les systèmes est d'autant plus parfait que

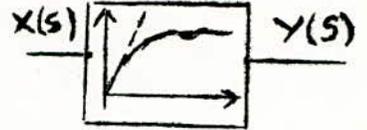
$$K_v \rightarrow \infty \text{ cad } T = 0$$

I-2-5 Système du second ordre:

Système absolument fondamental en raison du fait que pour bien des ensembles on décèle un comportement similaire. Il permet une étude plus aisée des fonction de transfert de degré plus élevé. Dans bien des cas on peut mettre en évidence dans celle-ci un système du second ordre dominant définissant dans les grandes lignes le comportement général du processus impliqué.

Se F.T normalisée est:

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + s^2 T^2}$$



Les poles de la F.T:

$$s_{1,2} = -\omega_n \xi \pm j\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

- $\xi > 1 \implies$ 2 poles réels négatifs
- $\xi = 1 \implies$ 2 poles doubles négatifs réels : $s_{1,2} = -\omega_n$
- $0 < \xi < 1 \implies$ 2 poles complexes conjugués à partie réelle négative

$$s_{1,2} = -\omega_n \xi \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$
- $\xi = 0 \implies$ 2 poles purement imaginaires conjugués $s_{1,2} = \pm j\omega_n$
- $\xi < 0 \implies$ 2 poles complexes conjugués à partie réelle positive

Dans le cas qui nous intéresse $0 < \xi < 1$ représentant un système du second ordre sous amorti dans on a le cas de la figure 1

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n - \alpha$$

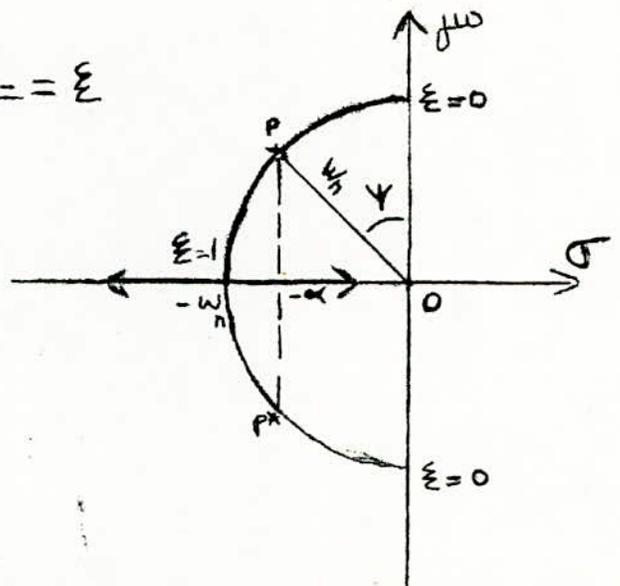
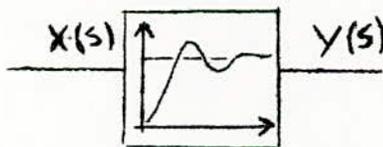
avec $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$: fréquence propre

$$\frac{1}{T} = \xi \omega_n = \alpha : \text{cte de temps du système}$$

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2}$$

et enfin

$$\sin \psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2}} = \xi$$



I-2-5-1 Caractéristiques importantes:

Reponse indicielle:

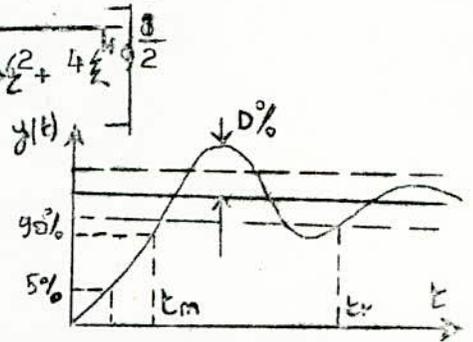
$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \cos \left[\omega_d t - \text{Arctg} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]$$

• Depassement: $D\% = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

• bande passante: $BP = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$

• constante de trainage: $K_v = \frac{v}{2\xi}$

• constante d'accélération: $K_a = \frac{\omega_n^2}{1+\xi^2}$



La théorie de l'optimisation des systèmes asservis nous permet en outre de choisir le meilleur système du second ordre; si on s'intéresse au critère d'optimisation de l'erreur instantanée

(t), le critère ITAE (integral of time multiplied absolute value of error):

$$\int_0^{\infty} t |\xi(t)| dt$$

nous conduit au régime optimal pour

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'ou } I_1(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} s T + s^2 T^2}$$

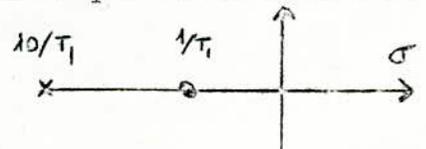
D'où les caractéristiques en régime optimal:

$$K_{v0} = \frac{\omega_n}{\sqrt{2}} ; \xi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} ; BP_0 = \omega_n ; D\% = 4,3 ; t_{0n}(63\%) = \frac{1,8}{\omega_n}$$

I-2-5-2 Effet d'un zéro réel négatif (action dérivée):

Ajouter un zéro réel, revient à multiplier la F.T par $1 + sT_1$
 -Physiquement non réalisable, on l'approxime par un circuit dérivateur

$$\frac{1 + sT_1}{1 + 0,1sT_1}$$



Décrivant assez bien le comportement du zéro réel négatif puisque le dénominateur n'intervient qu'à des fréquences relativement élevées ou l'on se trouve en dehors de la bande passante utile. Il n'en résulte pas d'inconvénient majeur à écrire la fonction de transfert sous forme normalisée:

$$H_1(s) = \frac{1 + sT_1}{1 + 2\xi a s T + s^2 T^2} = \frac{1 + 2\xi a s T}{1 + 2\xi T s + s^2 T^2} ; T_1 = 2\xi a T$$

$$K_v = \frac{\omega_n}{2\xi(1-a)} = \frac{1}{K_{v0}} = \frac{2\xi}{\omega_n} - \frac{2\xi a}{\omega_n} = \frac{1}{K_{v0}} (1-a)$$

On voit que l'introduction d'un zéro a pour effet d'augmenter t_n

En régime optimal on a:

$a=1$; $\xi = 0,85$; $K_v = \infty$; $BP = 2,15 \omega_n$; $D\% = 16,7$; $t_n = 0,4 \frac{1}{\omega_n} < t_{mp}$

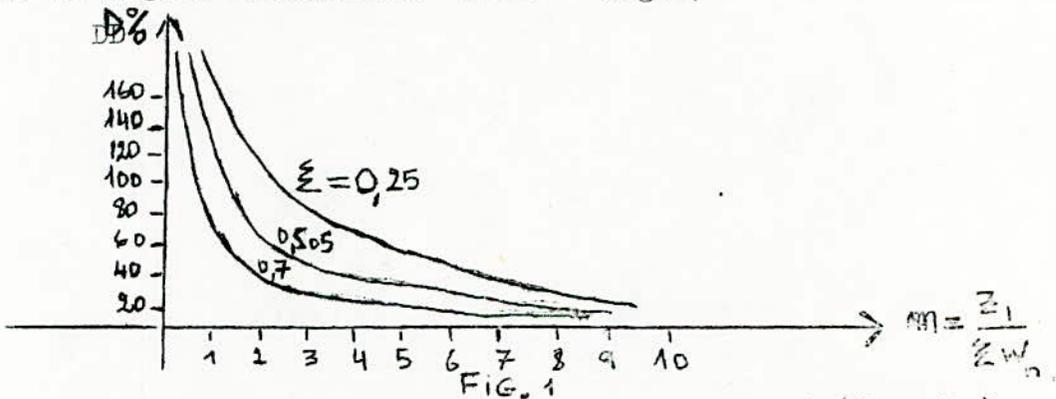
et

$$H_1(s) = \frac{1 + 1,3T_1 s}{1 + 1,7ST + s^2 T^2}$$

On caractérise l'influence du zéro sur la réponse indicielle par le coefficient d'éloignement

$$n = \frac{T}{(\xi/T_1)}$$

Si $n \gg 5$ et $0,3 \leq \xi \leq 0,9 \implies$ l'influence du zéro est négligeable sur le régime transitoire (voir Fig. 1)



I-2-5-3 Effet d'un pôle négatif réel (action intégrale):

La fonction de transfert normalisée est:

$$H_1(s) = \frac{1}{(1 + sT_2)(1 + 2\xi ST + s^2 T^2)}$$

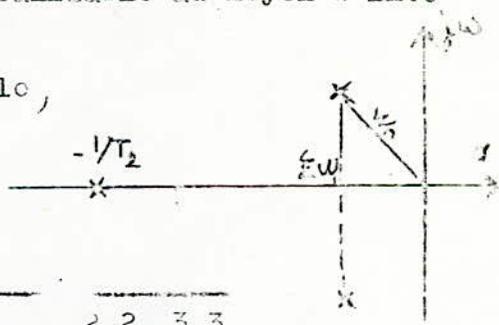
La F.T. : $\frac{1}{1 + sT}$; physiquement réalisable au moyen d'intégrateur.

$K_v = \frac{1}{\frac{2\xi}{\omega_n} + T_2}$ diminué \implies 10 , par le pôle

systeme à une réponse ralentie

En régime optimal

$\xi = 0,7$ et $H_1(s) = \frac{1}{1 + 2,19TS + 1,75S^2T^2 + S^3T^3}$



$K_v = \frac{\omega_n}{2,15} < K_{v0}$; $BP = 1,05\omega_n > BP_0$; $D\% : < D\%$; $t_n = \frac{2,4}{\omega_n} > t_{n0}$

$n \geq 5$ l'influence du pôle sur la réponse indicielle est très faible

I-2-5-4 Effet de deux pôles réels négatifs:

$$H_1(s) = \frac{1}{(1 + 2\xi TS + s^2 T^2)(1 + 2\xi_1 T_1 s + s^2 T_1^2)}$$

$$K_v = \frac{1}{\frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{2\xi'}{\omega_n'}} \ll K_v$$

donc réponse ralenti

En régime optimal

$$\xi = \xi' = 0,675 \quad (T=T')$$

et

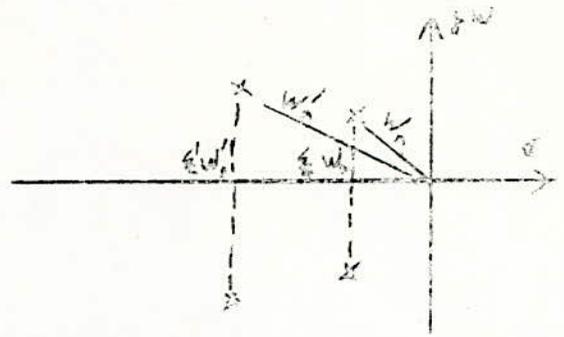
$$H_1(s) = \frac{1}{(1+2,7sT+3,4s^2T^2+2,1s^3T^3+s^4T^4)}$$

$$K_v = \frac{\omega_n}{2,5} \ll K_{v0}; \quad BP \neq 0,9\omega_n \ll BP_0; \quad t_n = 3,2/\omega_n > t_{n0}; \quad D\% = 2\% \ll D_0$$

Si

$$n = \frac{\omega_n'}{\omega_n} \gg 3 \text{ et } 0,3 \ll \xi \ll 0,7; \quad 4,3 \ll D\% \ll 35$$

alors l'influence des poles additionnels sur la réponse indicielle est faible.

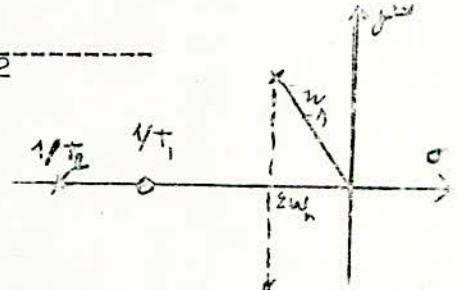


I-2-5-5 Effet conjugué d'un zéro et d'un pole réels négatifs:

$$H_1(s) = \frac{1+sT_1}{1+sT_2} \cdot \frac{1}{1+2\xi sT+s^2T^2}$$

Avec

$$K_v = \frac{1}{\frac{2\xi}{\omega_n} + (T_1 - T_2)}$$



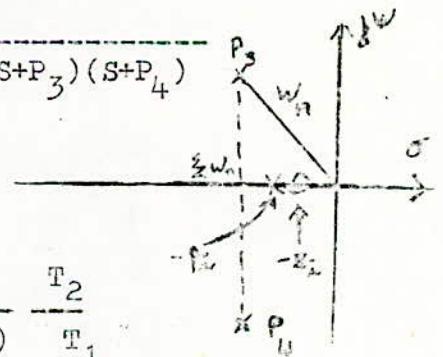
On voit ici qu'il est possible d'agir sur K_v et l'on peut même obtenir des performances intéressantes en rendant $1/K_v$ voisin de zéro. Le régime transitoire est altéré par le pole qui introduit un terme de la forme $A \exp(-t/T_2)$. Si l'on met $H_1(s)$ sous la forme factorisée; la réponse indicielle est:

$$y(s) = \frac{1}{s} \cdot H_1(s) = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s+Z_1}{(s+P_2)(s+P_3)(s+P_4)}$$

$$y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+P_2} + \frac{A_3}{s+P_3} + \frac{A_4}{s+P_4}$$

Avec

$$A_2 = \frac{(P_2 - Z_1)}{P_2(P_2 - P_3)(P_2 - P_4)} \cdot \frac{T_2}{T_1}$$



A_2 étant donc proportionnel à $(P_2 - Z_1)$; si l'on veut que l'influence du pole soit négligeable sur le régime transitoire on a intérêt à rendre A_2 aussi petit que possible, donc Z_1 très voisin de P_2 (appelé dipole). Comme c'est justement dans le domaine des faibles

Z_1 et P_2 que l'effet sur K_v est plus marqué, il présente là un bon moyen de réglage de K_v .

I-2-6 Conclusion:

On voit que l'influence d'un zéro, d'un pôle ou d'un dipôle affecte en général les paramètres du système, d'où l'intérêt de connaître leurs influences sur chaque paramètre du système pour ainsi améliorer ou corriger les performances par leur adjonction à la F.T du second ordre; d'où le tableau

REGIME OPTIMAL	...T DU 2 ^e ORDRE	$W_n/\sqrt{2}$	$\xi/2$	$1,8/W_n$	4,3	W_n	
	Effet d'1 zéro	∞	0,85	$0,5/W_n$	16,7	$2,25W_n$	peu affecté
	Effet d'1 pôle	$W_n/2,15$	0,7	$2,4/W_n$	1	$1,05W_n$	"
	Effet d'1 dipôle	\nearrow	0,7	\searrow	-	-	peu affecté
	////////////////	K_n	ξ	t_n (63%)	D%	BP	$m \geq 5$
	////////////////	////	////	////////	///	////	////

Figure 4

Temps de montée t_m et temps d'établissement à 5% t_e en régime indiciel, en fonction du coefficient d'amortissement.

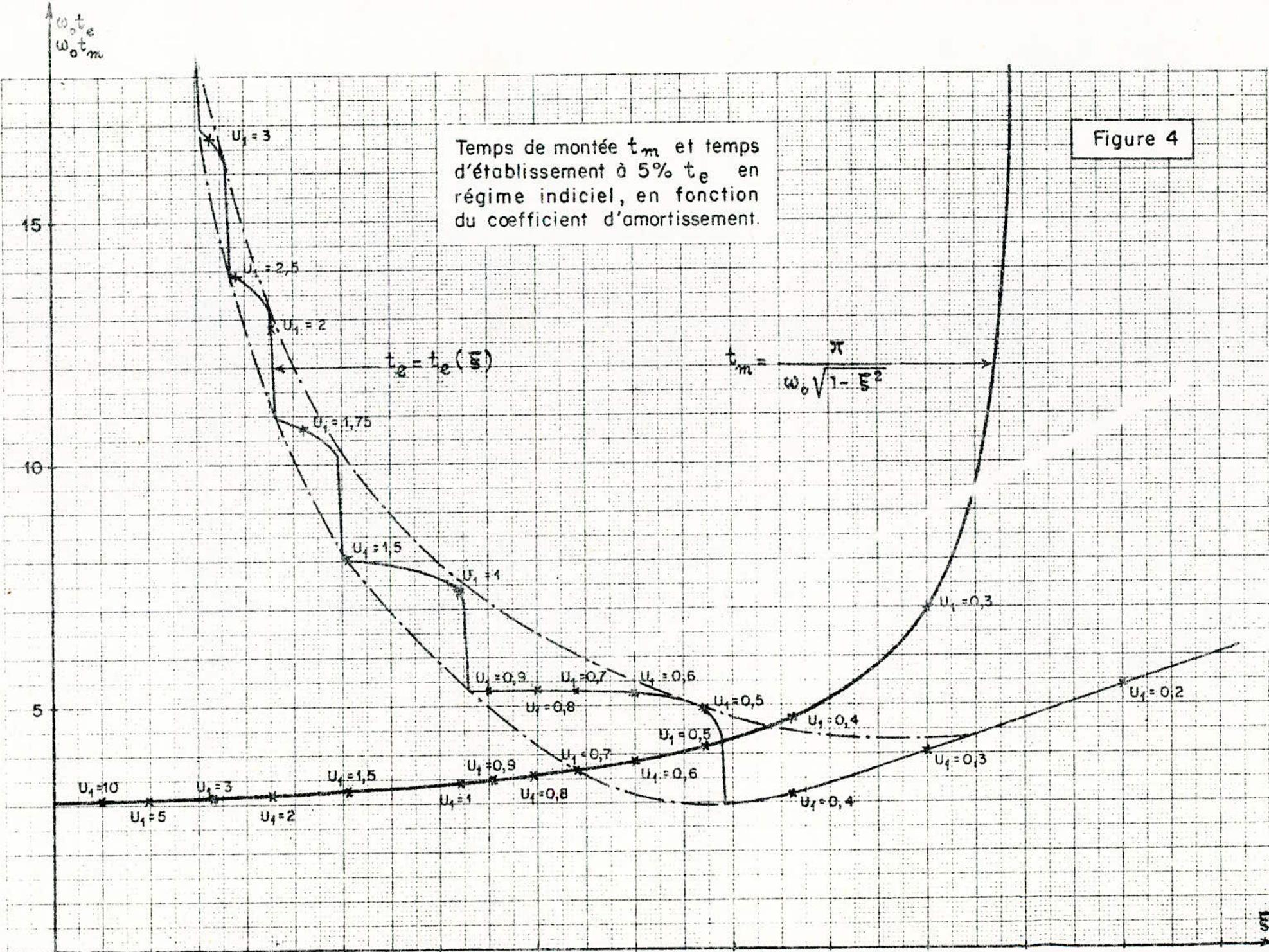
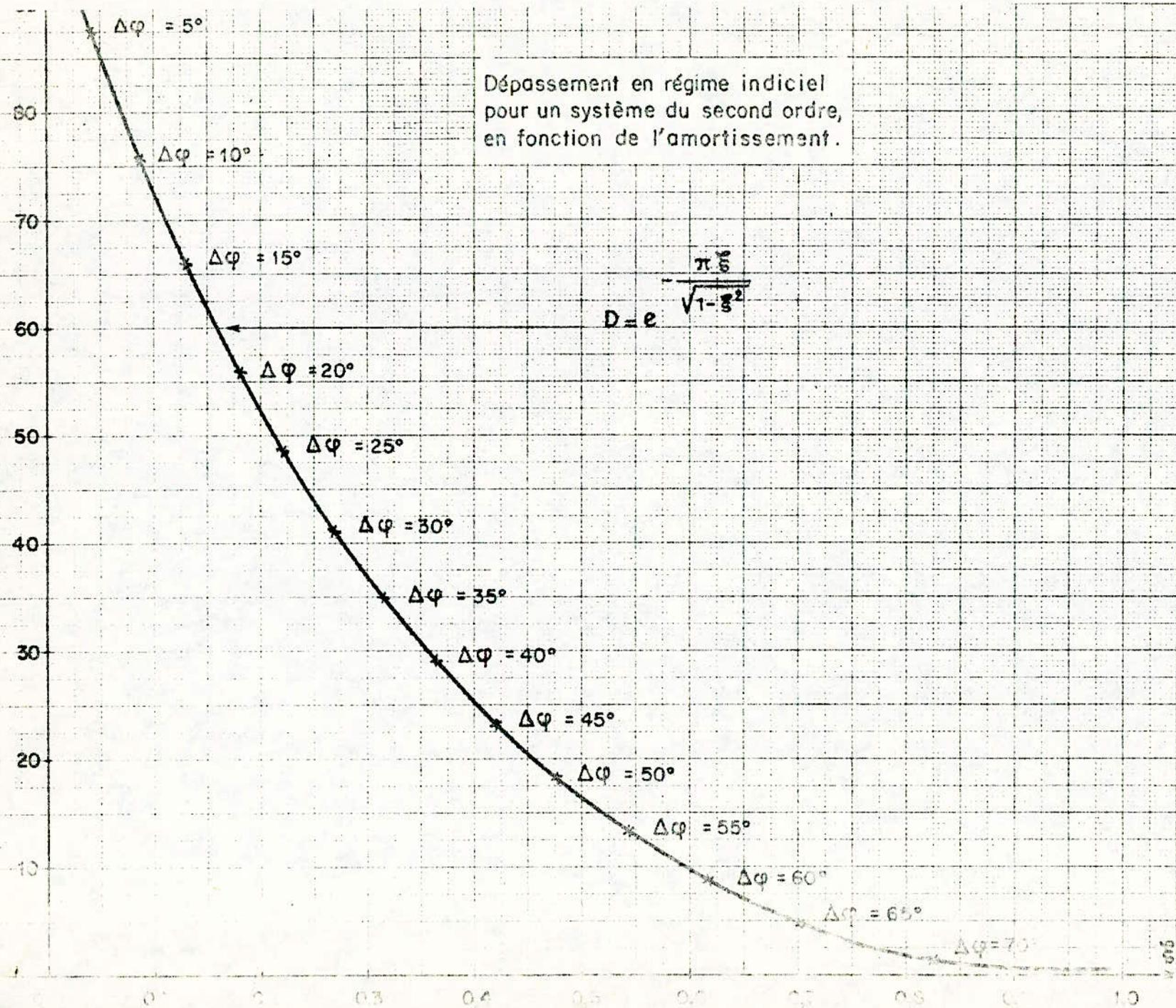


Figure 3

Dépassement en régime indiciel pour un système du second ordre, en fonction de l'amortissement.

$$D = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



II-3 STABILITE:

II-3-1 Definition:

Un systeme est stable quand il tend à revenir à son état permanent après une perturbation. Il est instable quand il tend à s'éloigner d'avantage.

II-3-2 Stabilité des systemes linéaires dans le plan de Laplace.

La condition fondamentale de stabilité d'un systeme est que les poles de sa F.T aient leur partie réelle négative

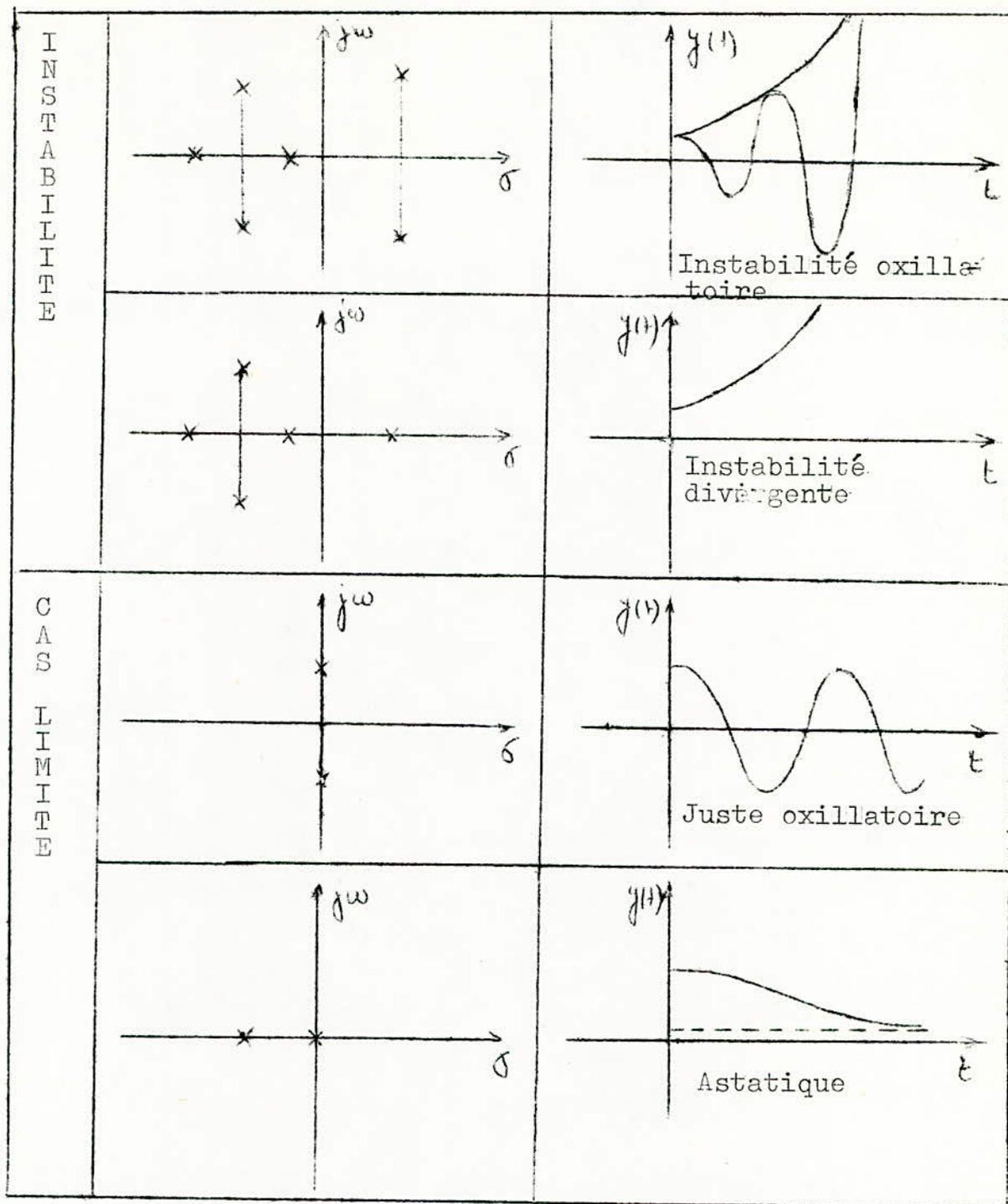
Soit $H(S)$ la F.T d'un systeme lineaire:

$$H(S) = \frac{N(S)}{Q(S)}$$

On peut donc résumer la stabilité d'un système lineaire par le tableau suivant:

Nature	Pole de $H(S)$	Reponse temporelle	représentation ds le plan de Laplace
Réelle	$S = a$	e^{-at}	
		e^{at}	
Complexe	$S = a \pm jb$	$e^{at} (bt + \dots)$	
		$e^{-at} (bt + \dots)$	
Imaginaire pur	$S = \pm jw$	$A \sin(bt + \varphi)$	

<p>STABILITE</p>		<p>Stabilité asymptotique retour à l'origine.</p>
		<p>Stabilité asymptotique retour à l'origine.</p>

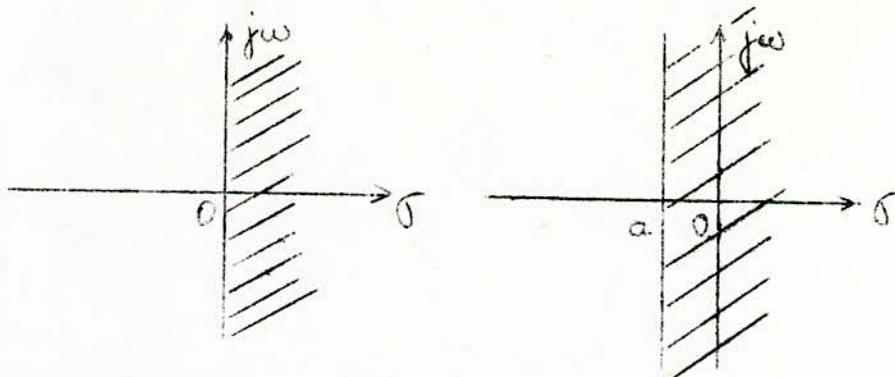


E-3-3 Marge de stabilité:

En pratique pour assurer une stabilité convenable, on est amené à interdire aux poles de la F.T non seulement le demi plan de droite, mais une zone du plan complexe plus vaste. Cela se fait de deux facons:

1) Marge de stabilité absolue:

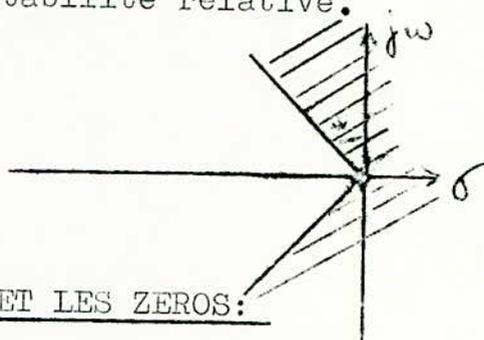
Pour empêcher^{que} la réponse transitoire ne soit pas trop lente, on interdit une région du plan complexe limité par une parallèle de l'axe imaginaire. C'est ce qu'on appelle: marge de stabilité absolue.



2) Marge de stabilité relative:

Pour assurer une réponse transitoire bien amortie, on interdit la zone du plan complexe situé entre l'axe imaginaire et deux droites passant par l'origine, et faisant un angle ψ avec l'axe imaginaire. C'est ce qu'on appelle: marge de stabilité relative.

$\xi = \sin \psi$: facteur d'amortissement



I-4 ETUDE DE LA F.T PAR LES POLES ET LES ZEROS:

I-4-1 Introduction:

La connaissance de la disposition dans le plan des S de la F.T nous renseigne non seulement sur la stabilité ou l'instabilité, mais donne quelques indications sur le comportement du système.

I-4-2 Etude de la F.T dans la carte des poles et des zeros

Considérons la F.T $H(S)$ ayant m zeros (z_1, z_2, \dots, z_m) et n poles (p_1, p_2, \dots, p_n).

$$H(S) = \frac{(S+z_1)(S+z_2)\dots(S+z_m)}{(S+p_1)(S+p_2)\dots(S+p_n)} \cdot k$$

Sachant que k est relié au gain statique K par:

$$K = k \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i}$$

On désigne par: $z_1, z_2, \dots, p_1, p_2, \dots$, les points représentatifs dans la carte des poles et des zeros de la F.T, et considérons un point M d'affixe $S = \alpha + j\omega$, la F.T EN ce point M a pour valeur:

$$H_1(S) = k \cdot \frac{z_{1M} \cdot z_{2M} \cdot \dots \cdot z_{mM}}{p_{1M} \cdot p_{2M} \cdot \dots \cdot p_{nM}}$$

Donc pour module:

$$|H(s)| = k \cdot \frac{|Z_1^M| \cdot |Z_2^M| \dots}{|P_1^M| \cdot |P_2^M| \dots}$$

Et pour argument:

$$\arg(H(s)) = \arg Z_1^M + \arg Z_2^M + \dots - \arg P_1^M - \arg P_2^M - \dots$$

$$\arg H(s) = \sum_{i=1}^m \arg Z_i^M - \sum_{i=1}^n \arg P_i^M$$

Par cette methode, on peut donc determiner geometriquement la valeur de la F.T POUR toutes valeurs complexes de S.

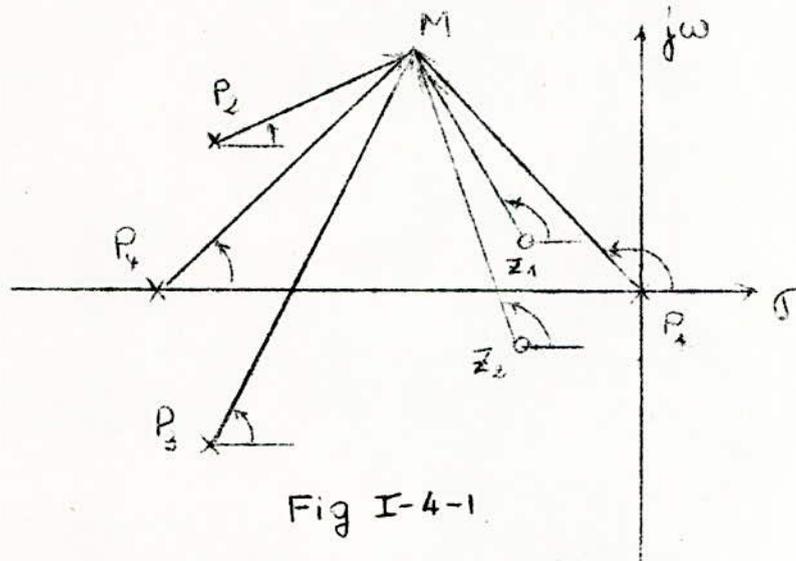


Fig I-4-1

Représentation géométrique de H(S) à partir des poles et zeros.

I-4-3 Application au régime transitoire:

Soit un système de fonction de transfert H(S), soumis à une entrée en échelon, la réponse sera:

$$Y(S) = \frac{1}{S} \cdot H(S) = \frac{1}{S} \cdot \frac{(S+Z_1)(S+Z_2)\dots}{(S+P_1)(S+P_2)\dots}$$

Où

$$y(t) = A + A_1 e^{-P_1 t} + A_2 e^{-P_2 t} + \dots$$

Dont les A_i sont les résidus de la décomposition de Y(S) EN Élements simples.

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{(S+Z_1)(S+Z_2)\dots}{(S+P_1)(S+P_2)\dots} = \frac{A}{S} + \frac{A_1}{S+P_1} + \frac{A_2}{S+P_2} + \dots$$

Le résidu A_i s'obtient en multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par (S+P_i); ce qui donne:

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{(S+Z_1)\dots(S+Z_i)\dots(S+Z_m)}{(S+P_1)\dots(S+P_i)(S+P_{i+1})\dots} = \frac{A(S+P_i)}{S} + \frac{A_1(S+P_i)}{S+P_1} + \dots + A_i + \dots + \frac{A_{i+1}(S+P_i)}{S+P_{i+1}} + \dots$$

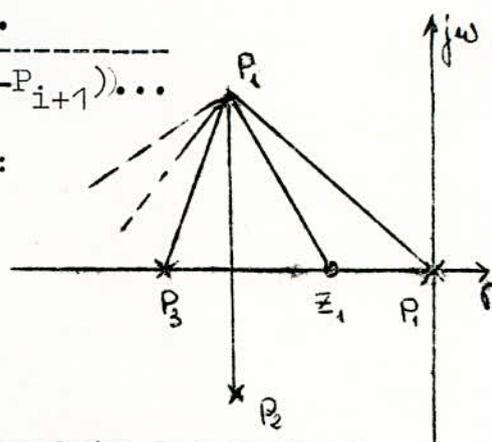
$$= (s+P_i) \left(\frac{A}{s} + \frac{A_1}{s+P_1} + \dots + \frac{A_{i-1}}{s+P_{i-1}} \right) + A_i + (s+P_i) \left(\frac{A_{i+1}}{s+P_{i+1}} + \dots \right)$$

Puis en faisant $s=P_i$ on obtient la valeur du résidu A_i :

$$A_i = \frac{1}{P_i} \frac{(P_i+Z_1)(P_i+Z_2)\dots\dots}{(P_i-P_1)\dots(P_i-P_{i-1})(P_i-P_{i+1})\dots}$$

Dont l'interprétation géométrique est:

$$A_i = \frac{1}{OP_i} \frac{Z_1 P_i \cdot Z_2 P_i \dots\dots}{P_1 P_i \cdot P_2 P_i \dots\dots}$$



Le résidu correspondant à un pole P_i est le produit des vecteurs joignant à P_i les zeros de $Y(S)$ divisé par le produit des vecteurs joignant à P_i les autres poles de $Y(S)$.

On peut donc facilement obtenir les résidus et par suite tracer la réponse indicielle à partir de la configuration des poles et des zeros.

I-4-4 Applications:

Exemple-1

Cherchons à titre d'application la réponse indicielle d'une chaîne de transmittance:

$$H(S) = -2,5 \frac{S-1}{(S+1)(S+2,5)}$$

Pour obtenir la réponse indicielle, on applique à l'entrée un échelon unité. La sortie est donc:

$$Y(S) = \frac{1}{s} H(S) = 2,5 \frac{1}{s} \frac{S-1}{(S+1)(S+2,5)}$$

$$= 2,5 \frac{A}{s} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2,5}$$

Calcul de A, A_1, A_2 :

$$A = \frac{Z_0}{P_1 \cdot P_2} = \frac{1}{1 \times 2,5} = \frac{1}{2,5}$$

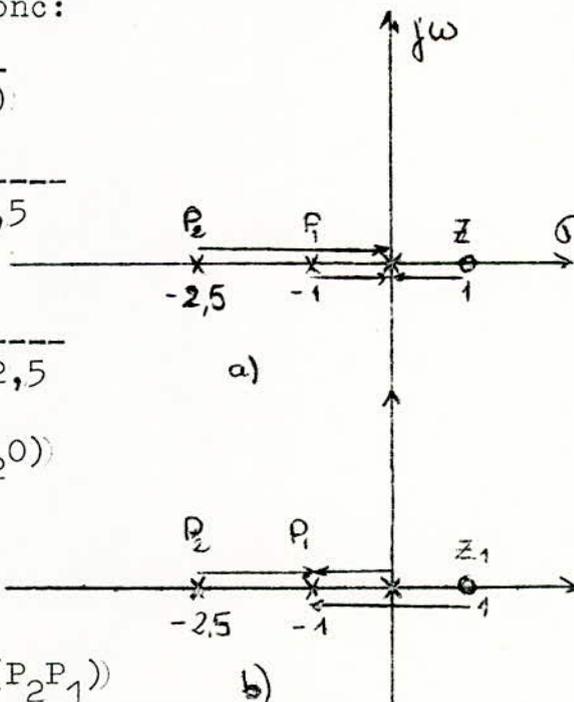
$$\text{Arg}(A) = \arg(Z_1 \cdot 0) - \arg(P_1 \cdot 0) - \arg(P_2 \cdot 0)$$

$$= \pi$$

$$A_1 = \frac{Z P_1}{OP_1 \cdot P_2} = \frac{2}{1 \times 1,5} = \frac{4}{3}$$

$$\arg(A_1) = \arg(Z P_1) - \arg(OP_1) - \arg(P_2 P_1)$$

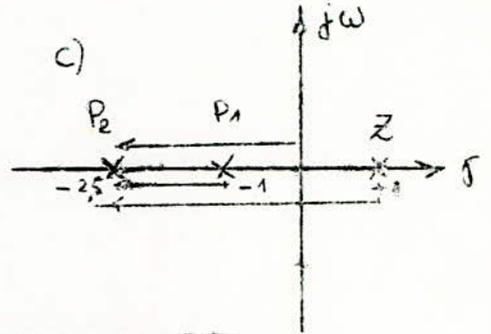
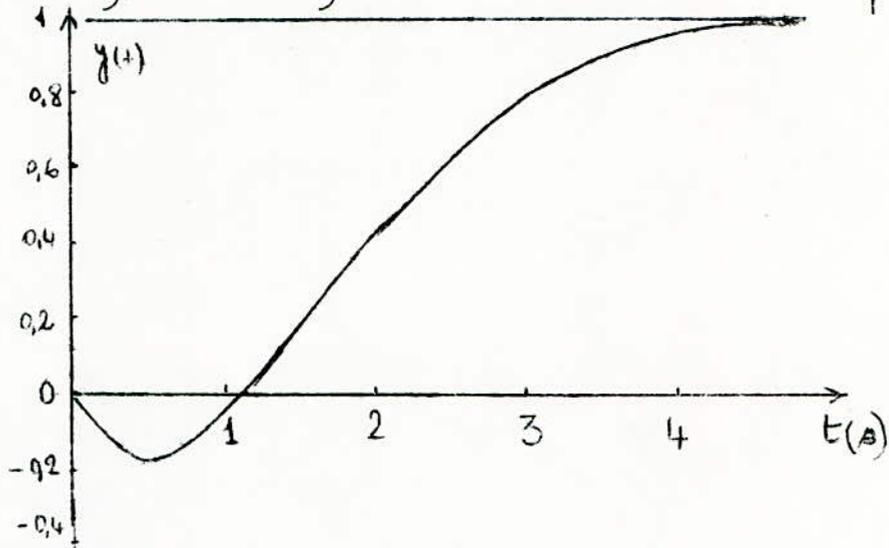
$$= \pi - \pi + 0 = 0$$



$$A_2 = \frac{ZP_2}{OP_1 \cdot P_1 P_2} = \frac{3,5}{2,5 \times 1,5} = \frac{3,5}{3,75}$$

$$\arg(A_2) = \arg(ZP_2) - \arg(OP_1) - \arg(P_1 P_2) = \pi - \pi - \pi = -\pi$$

$$y(t) = 1 + \frac{7}{3} e^{-2,5t} - \frac{10}{3} e^{-t}$$



Exemple-2

On se propose de trouver la réponse indicielle $y(t)$ d'un système défini par:

$$H(s) = \frac{10(s+0,6)}{(s+0,5)(s^2+2s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} H(s) = \frac{10(s+0,6)}{s(s+0,5)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{A_1}{s+0,5} + \frac{A_2}{s^2+2s+5}$$

Calculons les résidus A, A_1, A_2 .

$$A = 2,4 \quad \left| \begin{matrix} 0^\circ \\ \end{matrix} \right. ; \quad A_1 = 0,47 \quad \left| \begin{matrix} 180^\circ \\ \end{matrix} \right. ; \quad A_2 = 2,18 \quad \left| \begin{matrix} -209,2^\circ \\ \end{matrix} \right.$$

$$y(t) = 2,4 - 0,47e^{-0,5t} + 2,18e^{-t} \cos(2t - 209,24^\circ)$$

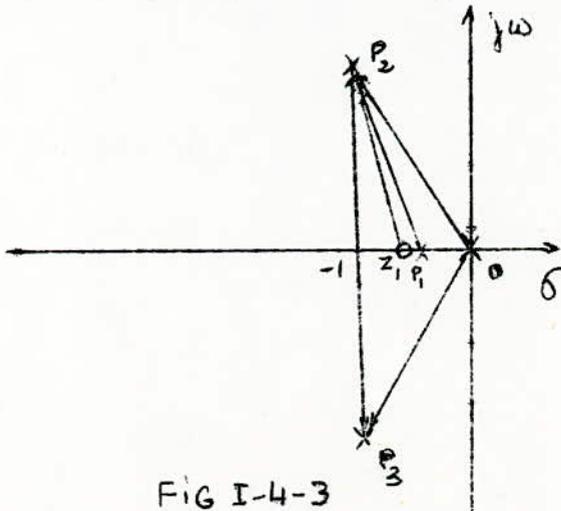


FIG I-4-3

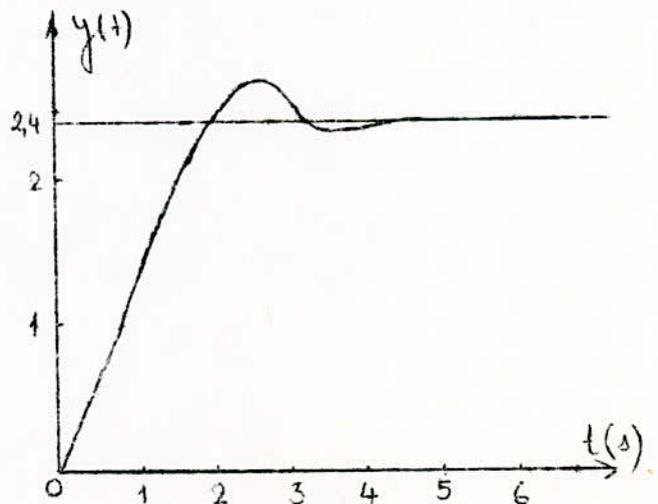


FIG I-4-4

CHAPITRE IIETUDE D'UN SYSTEME ASSERVI LINEAIRE PAR LA METHODE DU LIEU D'EVANSII. 1 Introduction :

Il existe plusieurs méthodes de représentation de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi linéaire (Bode, Nyquist, Nichols, et lieu des racines). Les trois premières méthodes s'appliquent au domaine des fréquences par contre la dernière étudie le modèle physique par la disposition des pôles et zéros de sa fonction de transfert en boucle fermée. Cette dernière a été déjà étudiée, voir (IV). On se bornera donc pour notre part à rappeler brièvement la méthode.

Soit la fonction de transfert en boucle fermée : fig.II.1

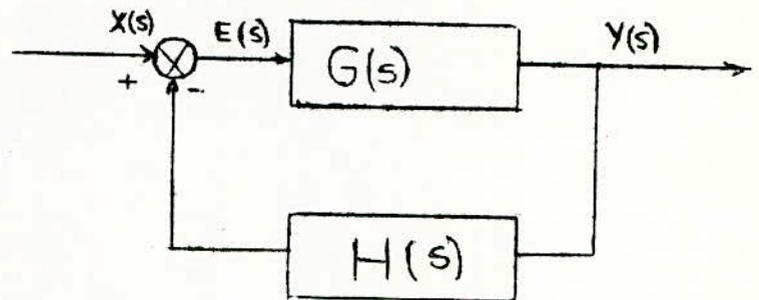


Fig.II.1

$$F(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s).H(s)}$$

avec $G(s).H(s) = K \frac{N(s)}{D(s)}$, fonction de transfert en boucle ouverte. Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les racines de l'équation caractéristique.

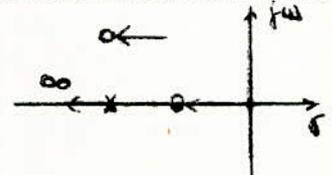
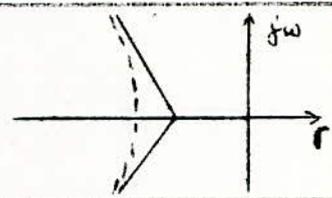
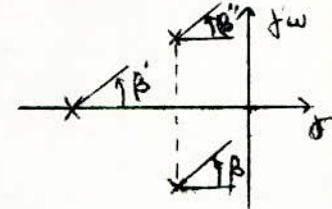
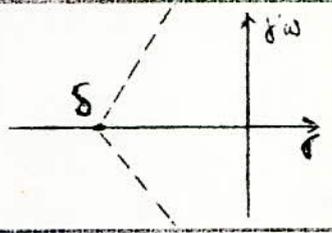
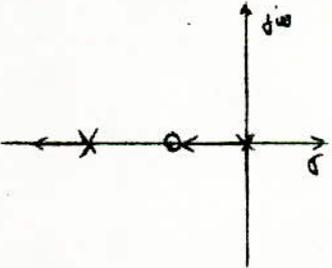
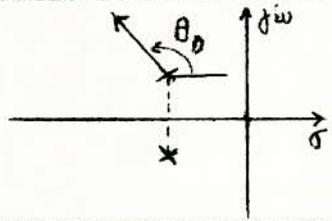
$1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0$, le degré de $N(s)$ est égal à m et le degré de $D(s)$ est égal à n , avec $m \leq n$.

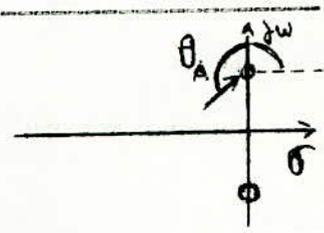
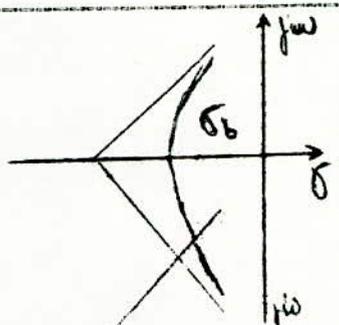
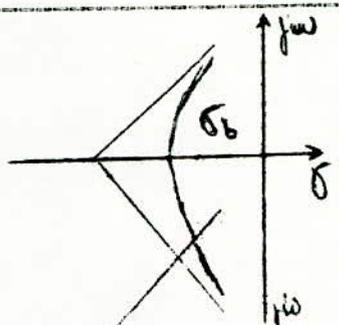
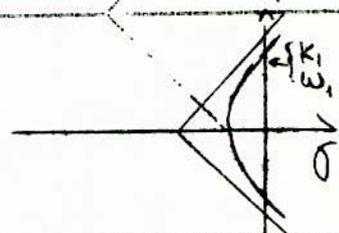
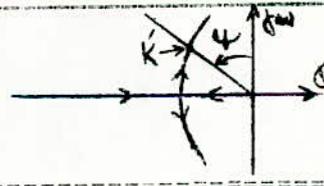
II. 2 Définition :

Le lieu d'Evans est le lieu des pôles de $F(s)$ obtenu quand K varie de zéro à l'infinie.

II. 3 Construction du lieu d'Evans :

! Critère :	$\arg G(s_1)H(s_1) = \pi + 2n\pi = (2p+1)\pi$:	p entier	!
!	:	:	!
! d'angle :	$\arg\left(\frac{N(s)}{D(s)}\right) = \pm(2p+1)\pi$	$s_1 \in$ au lieu	!
!	:	:	!

critère d'amplitude:	$ K = \left \frac{D(s_1)}{N(s_1)} \right $	
nombre de branche du lieu :	est égal au nombre de pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte.	$n \text{ pôles} \Rightarrow n \text{ branches}$
Départ des branches :	les points de départ des branches sont donc les n pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte	
Arrivée des branches :	Les points d'arrivée des branches sont donc les m zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte et $(n-m)$ rejetés à l'infini	
Asymptotes :	$(n-m)$ points d'arrivée rejetés à l'infini $\Rightarrow (n-m)$ asymptotes.	
Direction asymptotique :	Angle que font les asymptotes avec l'axe réel : $\beta = \pm (2p+1)\pi / (n-m)$ pour $K > 0$ $\beta = \pm 2p\pi / (n-m)$ pour $K < 0$, $p = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1)$	
points d'intersection des asymptotes avec l'axe réel :	Ils sont définis par : $\sigma = \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) / (n-m)$	
Lieux situés sur l'axe réel :	On détermine les parties du lieu situées sur l'axe réel en comptant le nombre total de pôles et de zéros finis de GH situés à droite des points en question. Le lieu se trouve à droite d'un nombre impair de pôles et de zéros finis.	
Angle de départ du lieu des racines d'un pôle complexe :	$\theta_D = \pi + \arg GH'$ où $\arg GH'$ est la phase de GH, calculée au pôle complexe sans tenir compte de la contribution de ce pôle particulier.	

Angle d'arrivée :	$\theta_A = \pi - \arg GH''$ où $\arg GH''$ est la phase de GH , calculée au zéro complexe sans tenir compte de l'effet de ce zéro complexe.	
points de branchement :	On calcule le point de branchement en résolvant l'équation suivante en σ_b :	
branchement :	$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma_b + p_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_b + z_i}$ p_i et z_i sont les pôles et les zéros de la fonction de transfert en $b_0 \cdot 0$.	
Intersection du lieu avec l'axe imaginaire :	$1 + G(s) \cdot H(s) \Big _{s=j\omega} = 0$ $\begin{cases} \text{Im}(\dots) = 0 \Rightarrow \omega_1 \\ \text{Re}(\dots) = 0 \Rightarrow k_1 \end{cases}$ On peut aussi utiliser la méthode de Routh.	
Marge de phase :	Recherche du point $j\omega_1$ de l'axe $j\omega$ tel que $ GH(j\omega_1) = 1$ pour la valeur de k de conception c'est-à-dire $ D(j\omega_1)/N(j\omega_1) = k \text{ const.}$	$\Phi_{MP} = \pi + \text{Arg } GH(j\omega)$
Marge de gain :	$M_G = \frac{\text{valeur de } k \text{ à l'intersection de } j\omega}{\text{valeur de } k \text{ de conception du système}}$	
Coefficient d'amortissement :	étant donné $k' = k$, on trace la droite issue de l'origine et passant par k' d'où $\xi = \sin \psi$	

II.4 TRACE DES LIEUX. APPLICATIONS

II.4.1 Lieu de $F_s(s) = \frac{(1 - sT_1)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ avec $T_1 = 1s$
 $= \frac{-(2,5)(s-1)}{(s+1)(s+2,5)}$ $T_2 = 0,4s$

La fonction de transfert en boucle fermée a pour équation caractéristique :

$1 + KF_s(s) = 1 + F_0(s)$
 $F_0(s) = \frac{K(s-1)(-2,5)}{(s+1)(s+2,5)} = \frac{k(s-1)}{(s+1)(s+2,5)}$ avec $k = -2,5 K$

A.

A. Construction du lieu d'Evans :- Le lieu comporte 2 branches ($n = 2$)points de départ ($k = 0$) : les deux pôles de $F_0(s)$. $m = 1$, le lieu comporte une direction asymptotique.

- branches de l'axe réel :

. demi-droite située à droite de $S = 1$. le segment ($s = -\frac{1}{T_1}$, $s = -\frac{1}{T_2}$)

- Intersection avec l'axe imaginaire :

$$(1+jw)(2,5+jw)+k(jw-1) = 0$$

$$\begin{cases} w = +2,44 \text{ rad/s} \\ k = -3,5 \Rightarrow k = 1,4 \end{cases}$$

- Point de branchement :

$$\frac{1}{\sigma_{b1}+1} + \frac{1}{\sigma_{b1}+2,5} = \frac{1}{\sigma_{b1}-1}$$

$$\begin{cases} \sigma_{b1} = -1,64 \\ \sigma_{b2} = 3,64 \end{cases}$$

L'existence de ces points de branchement nécessite des racines complexes. Soit M un point du lieu, en appliquant la condition des angles, on aura :

$$\alpha - \beta_0 - \beta_1 = 0 \quad (1)$$

d'après le graphe voir figure II.2

$$(\pi - \alpha) + \varphi + \beta_1 = \pi$$

$$\Rightarrow -\alpha + \varphi + \beta_1 = 0 \quad (2)$$

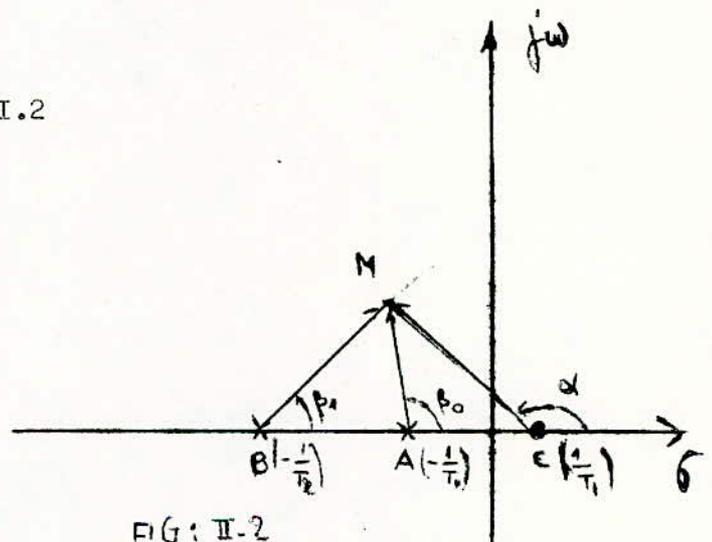


FIG: II-2

substituons (2) dans (1) :

$$\beta_0 + (\alpha - \varphi) - \alpha = 0 \Rightarrow \beta_0 = \varphi$$

On en déduit que les triangles CMB et CMA sont semblables d'où :

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CB}{CM} = \frac{MB}{AM} \quad CM^2 = (CA) \cdot (CB)$$

d'où l'on déduit que le lieu est un cercle de centre C et de rayon :

$$CM = \sqrt{CA \cdot CB} = 2,64$$

voir le lieu dans la figure II.3.a.

B. Application :Soient r_1 et r_2 les deux pôles de $F(s)$, ils sont :- Réels négatifs pour $k < 0,08$

- complexes conjugués à partie réelle négative pour $0,08 < K < 1,4$
- complexes conjugués à partie réelle positive pour $1,4 < k < 4,3$
- réels positifs pour $k > 4,3$

1° Choix de k :

Lorsque K augmente le lieu se rapproche de l'axe imaginaire (le degré de stabilité ξ diminue) puis le franchit (système instable). Pour que la stabilité relative soit assurée, on porte la droite Δ ($\psi=25^\circ$) puis on détermine graphiquement k au point d'intersection de la droite Δ et du lieu.

$$K = 0,68 \text{ pour } \xi = 0,42$$

2° Réponse en régime transitoire :

a) Fonction de transfert en boucle fermée : Après avoir, construit les lieux des racines, on porte la droite Δ ($\psi = 25^\circ$) puis on détermine graphiquement la partie réelle du mode oscillatoire ($\alpha = -0,85$) puis on calcule les autres valeurs importantes.

$$w_d = 0,85 \operatorname{Cotg} 25^\circ = 1,82 \text{ rad/s} \Rightarrow w_n = \sqrt{\alpha^2 + w_d^2} \simeq 2 \text{ rad/s}$$

Dans ces conditions la F.T en B.F est :

$$F(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{-1,7(s-1)}{(s+0,85 + j1,82)(s+0,85 - j1,82)}$$

b) Réponse indicielle : voir fig. II.4.2

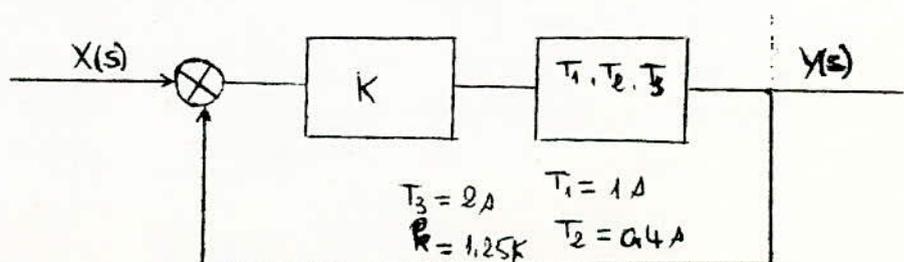
$$y(t) = 0,42 - 1,19 e^{-0,85t} \cos(1,82t - 69^\circ)$$

c) Performances obtenues :

Coefficient d'amortissement	temps de montée	temps de réponse	dépassement	gain
$\xi = 0,42$	$t_m = 1,5s$	$t_r \simeq 4,4s$	$D \simeq 38\%$	$K = 0,42$

II.4.2 Lieu de $F_o(s) = kF_s(s) = \frac{K}{(s+T_1)(s+T_2)(s+T_3)}$

$$= \frac{K}{(s+0,5)(s+1)(s+2,5)}$$



A. Construction du lieu :

- le lieu comporte trois branches ($n=3$)
point de départ ($k=0$) : les trois pôles de $F_0(s)$.
 $m=0$, le lieu comporte trois directions asymptotiques.
- Branches infinies
direction asymptotiques : $\beta = \frac{(2p+1)\pi}{(n-m)} = \pi/3, \pi, -\pi/3$
Intersection avec l'axe réel : $\delta = -1,33$
- Branches de l'axe réel : demi-droite située à gauche de $S = -2,5$ et le segment $(-0,5, -1)$
- Point de branchement : $\frac{1}{\sigma_b+1} + \frac{1}{\sigma_b+2,5} + \frac{1}{\sigma_b+0,5} = 0$
 $\implies \sigma_b = -0,7$
- Intersection avec l'axe imaginaire :
 $(0,5+jw)(1+jw)(2,5+jw)+k = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 2,06 \text{ rad/s} \\ k = 15,75 \end{array} \right.$

voir figure II.5.a

B. Application : Régime transitoire :

- a) Fonction de transfert en boucle fermée : soient r_1 , r_2 et r_3 les pôles de $F(s)$, pour $\xi = 0,42 \Rightarrow \alpha = -0,46$
 $w_d = 0,46 \cotg 25^\circ = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow w_n = 1,1 \text{ rad/s}$
Connaissant le mode oscillatoire ($r_1 = -0,46 + j$ et $r_2 = -0,46 - j$)
il est possible d'obtenir par identification la troisième racine (r_3)
on a :

$$(s+0,5)(s+1)(s+2,5) + k = (s-r_1)(s-r_2)(s-r_3)$$

$$s^3 + 4s^2 + 4,25s + (1,25 + k) = s^3 - (r_1 + r_2 + r_3)s^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)s - r_1r_2r_3$$

$$\begin{cases} r_3 = -4 - (r_1 + r_2) = -4,92 \\ k = -r_1r_2r_3 - 1,25 = 4,76 \Rightarrow K = 3,76 \end{cases}$$

A partir de ces résultats :

$$F(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{4,76}{(s+4,92)(s+0,46+j)(s+0,46-j)}$$

b) réponse indicielle : voir fig. II.6.1

$$y(s) = F(s).X(s)$$

$$y(t) = 0,79 - 0,01 e^{-4,92t} + 0,95 e^{-0,46t} \cos(t-217^\circ)$$

l'influence du pôle $r_3 = -4,92$ sur le régime transitoire est faible à cause de son éloignement sur l'axe imaginaire, on peut donc le négliger en assimilant la réponse à celle d'un système du second ordre.

$$F'(s) = \frac{0,967}{(s + 0,46 + j)(s + 0,46 - j)}$$

La réponse indicielle correspondante est :

$$y(t) = 0,79 + 0,88 e^{-0,46t} \cos(t - 205^\circ)$$

c) Performances obtenues :

$\xi = 0,42$	$t_m = 1,4 \text{ s}$	$t_r = 6,8 \text{ s}$	$D \approx 21,9 \%$	$K = 0,80$
--------------	-----------------------	-----------------------	---------------------	------------

II.5 CORRECTION DANS LE PLAN DES S :

De même que pour l'étude d'un asservissement dans le plan de Bode et de Black, il y a plusieurs manières d'envisager sa correction dans la Carte des pôles et zéros. On se limitera ici au cas des correcteurs classiques à avance de phase placé en cascade dans la chaîne d'action et on montrera les modifications qu'apportent de tels correcteurs au lieu d'évans d'un système.

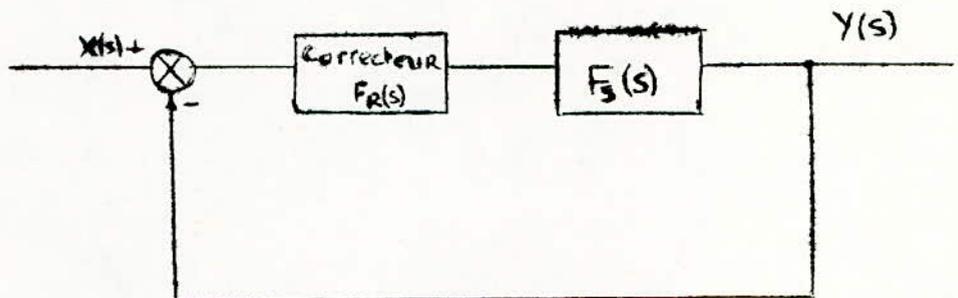


Fig. II.7

II.5.1 Correcteur à avance de phase :

La fonction de transfert d'un tel correcteur est :

$$F_R(s) = \frac{1}{\lambda} \frac{1 + \lambda TS}{1 + TS} \text{ qu'on peut écrire sous la forme :}$$

$$F_R(s) = \frac{s + z_a}{s + p_b} \text{ avec } z_a = \frac{1}{\lambda T}, \quad p_b = \frac{1}{T}, \quad \lambda > 1$$

Dans la fonction de transfert ainsi corrigée, s'ajoutent un pôle et un zéro réels négatifs, avec le zéro plus proche de l'origine de la carte des pôles et zéros traduisant une diminution du temps de réponse.

Le pôle n'est introduit que pour des raisons technologiques et on s'arrange toujours que son influence soit négligeable.

La direction asymptotique β reste inchangée par contre son point d'intersection avec l'axe réel a augmenté, soit :

$$\delta' = \delta - \frac{(\lambda - 1)z_a}{(n-m)} = \delta + \frac{(1 - \lambda)a}{(n-m)}$$

donc la précision dynamique se trouve augmentée. Cette correction est d'autant plus efficace que $|P_b| - |z_a| = (\lambda - 1) |z_a|$ est grande, c'est-à-dire que a possède une valeur élevée.

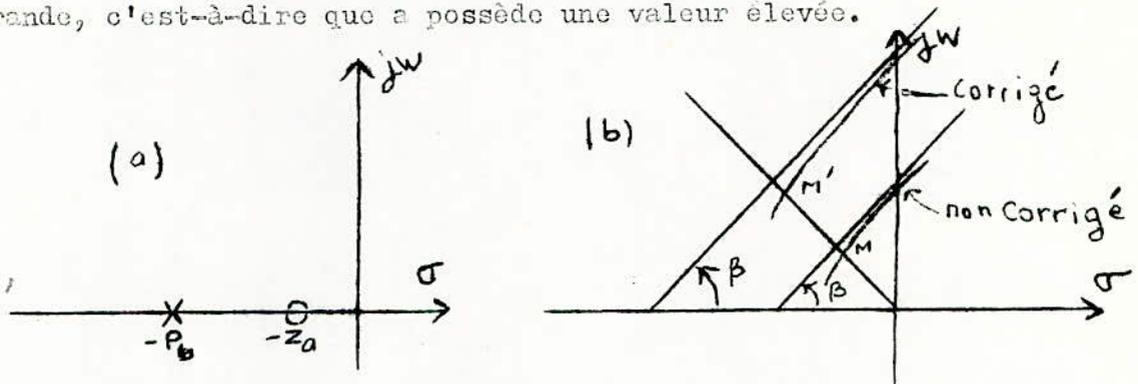


Fig.II.8

II.5.2 Correcteur à retard de phase :

Sa fonction de transfert est : $F_R(s) = \frac{\lambda(1 + TS)}{1 + \lambda TS}$

avec $\lambda > 1$ qu'on peut mettre sous la forme :

$$F_R(s) = \frac{s + z_b}{s + P_a} \quad \text{avec} \quad z_b = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad P_a = \frac{1}{\lambda T} \quad \text{voir fig.II.2.a}$$

Dans le cas de correction, le pôle est plus proche de l'origine que le zéro. On exige de cette correction que K ne doit pas varier (M doit être proche de M' , voir figure II.9.b). Pour cela il faut que z_b et P_a soient très proches l'un de l'autre relativement à la distance les séparant du point M . Cette correction est d'autant plus efficace que λ est grand. On voit donc qu'on a un compromis entre z_b grand et $|P_a - z_b|$; pour satisfaire alors ces deux exigences, contradictoires, on rapproche le pôle P_a le plus possible de l'origine. Cette correction multiplie le gain statique par λ . ($K' = \lambda K$)

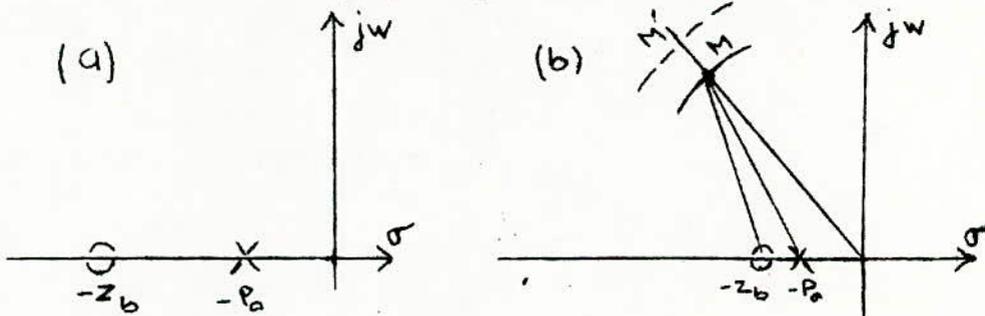


Fig. II.9

II.5.3 Applications :

EXEMPLE 1 : a) sans correction : $F_o(s) = \frac{k(s-1)}{(s+1)(s+2,5)}$

Ce problème a déjà été traité précédemment

b) correction par avance de phase : on neutralise le pôle le plus proche de l'origine soit $s = -1$ et on crée en même temps un pôle $s = -10$ d'où le correcteur : $F_R(s) = \frac{s+1}{s+10}$

Correcteur	$F_R(s) = \frac{s+1}{s+10}$	sa constante de temps $T = 0,1 \text{ s}$
Fonction de transfert en boucle ouverte ou verte du système corrigé	$F_o(s) = F_R \cdot F_S = \frac{k(s-1)}{(s+2,5)(s+10)}$	Construction du lieu, fig. II.3.b
Fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé pour $\xi = 0,42$	$F(s) = \frac{-7,7(s-1)}{(s+2,4 + j5,14)(s+2,4 - j5,14)}$	
Réponse indicielle	$y(t) = 0,23 - 1,62 e^{-2,4t} \cos(5,14t - 81^\circ)$	voir figure II.4.b
Performances du système	$\xi = 0,42$, $t_m = 0,56 \text{ s}$, $t_r = 2,50 \text{ s}$, $D = 91\%$, $K = 0,23$	

Dans le cas où on neutralise le pôle $P = -2,5$ par zéro $z = -2,5$, les caractéristiques du système sont données par le tableau suivant :

Correcteur	$F_R(s) = \frac{s+2,5}{s+25}$	sa constante de temps $T = 0,4 \text{ s}$
Fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé	$F_o(s) = \frac{k(s-1)}{(s+1)(s+25)}$	Construction du lieu voir fig. II.3.c
Fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé pour $\xi = 0,42$	$F(s) = \frac{-20,15(s-1)}{(s+2,84 + j6,09)(s+2,84 - j6,09)}$	
Réponse indicielle	$y(t) = 0,45 - 3,02 e^{-2,84t} \cos(6,09t - 82^\circ)$	voir fig. II.4.c

Performances du système	$\xi = 0,42$, $t_m = 0,49$ s , $t_r = 1,46$ s , $D=80\%$, $K=0,45$
-------------------------	--

c) correction par retard de phase :

Correcteur	$F_R(s) = \frac{s+1}{s+0,1}$	$T = 1$ s
Fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé	$F_O(s) = \frac{k(s-1)}{(s+0,1)(s+2,5)}$	Construction du lieu voir fig.II.3d
Fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé pour $\xi = 0,42$	$F(s) = \frac{-5,85(s-1)}{(s+0,57+j1,2)(s+0,57-j1,2)}$	
Réponse indicielle	$y(t) = 3,2 - 7,11 e^{-0,57t} \cos(1,2t - 63^\circ)$	voir fig.II.4.d
Performances du système	$\xi = 0,42$, $t_m = 2,05$ s , $t_r = 6,5$ s , $D = 32\%$, $K = 3,2$	

EXEMPLE 2 : a) sans correction : $K^T_S(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2,5)(s+0,5)}$

ce problème a été traité précédemment.

b) Correction par avance de phase :

1^{er} correcteur : neutralisation du pôle ($p = -1$) pour le zéro ($z = -1$).

Correcteur	$F_R(s) = \frac{s+1}{s+10}$	$T = 0,1$ s
Fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé	$K F_O(s) = \frac{k}{(s+0,5)(s+2,5)(s+10)}$	voir figure II.5.b
Fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé pour $\xi = 0,42$	$F(s) = \frac{61,9}{(s+10,76)(s+1,12+j2,35)(s+1,12-j2,35)}$	
Réponse indicielle	$y(t) = 0,85 - 0,05 e^{-10,76t} + 1,07 e^{-1,12t} \cos(2,35t - 218^\circ)$: fig.II.6.2

Performances du système	$\xi = 0,42$, $t_m = 0,65s$, $t_r = 2,1s$, $D = 13\%$, $K=0,85$
-------------------------	---

2^{ème} correcteur :

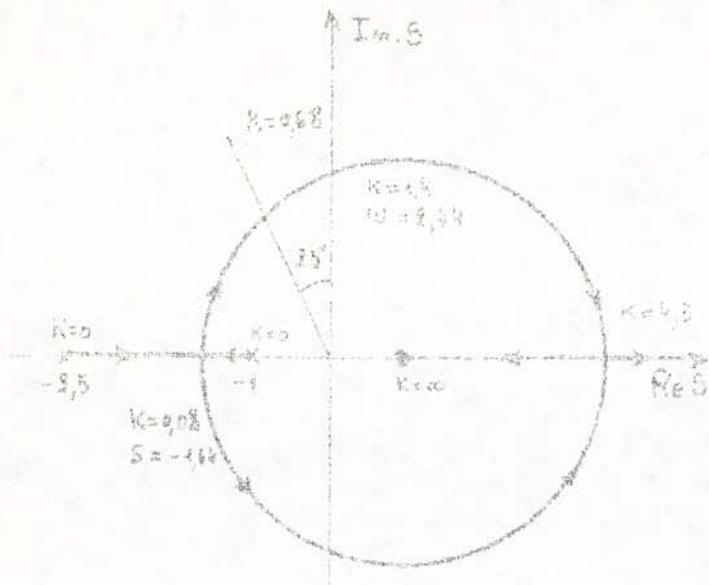
Correcteur	$R_R = \frac{s + 1,25}{s + 12,5}$	$T=0,8s$
F. T. du système en B. Ouverte	$K F_o(s) = \frac{k(s+1,25)}{(s+0,5)(s+1)(s+12,5)(s+2,5)}$	fig.II.5.c
F. de T; du système en b. f. pour $\xi = 0,42$	$F(s) = \frac{84,81(s+1,25)}{(s+1,27)(s+12,91)(s+1,15 + j2,46)(s+1,15 - j2,46)}$	
Reponse indicielle	$y(t) = 0,88 + 1,02 e^{-1,15t} \cos(2,46t - 205^\circ)$	voir fig.II.6.3
Performances	$\xi = 0,42$, $t_m = 0,5s$, $t_r = 1,65s$, $D = 19,3\%$, $K = 0,88$	

c)

Correcteur	$F_R(s) = \frac{s + 0,1}{s + 0,01}$	$T=0,8s$
F. de t; du système en b. ouverte	$K F_o(s) = \frac{k(s+0,1)}{(s+0,01)(s+1)(s+0,5)(s+2,5)}$	fig.II.5.d
F. de T; du système en b. fermée pour $\xi = 0,42$	$F(s) = \frac{2,7(s+0,1)}{(s+0,079)(s+2,98)((s+0,47)^2 + (1,02)^2)}$	
Reponse indicielle	$y(t) = 0,91 + e^{-0,47t} \cos(1,02t - 205^\circ)$	voir fig.II.6.4
Performances	$\xi = 0,42$, $t_m = 1,47s$, $t_r = 6,65s$, $D = 23\%$, $K = 0,91$	

Regroupons les résultats obtenus dans les deux tableaux, ci-dessous respectivement pour le premier et le deuxième exemple.

système	T.(s)	ω_n (rad/s)	t_m (s)	t_r (s)	ξ	D(%)	gain K
NON CORRIGE	—	2	1,50	4,40	0,42	38	0,42
Corrigé par avance de phase	0,1	5,67	0,56	2,50	0,42	91	0,23
	0,4	6,71	0,49	1,46	0,42	88	0,45



SYSTEME NON CORRIGE

FIG: II-3 a

SYSTEME CORRIGE
(PAR AVANCE DE PHASE)

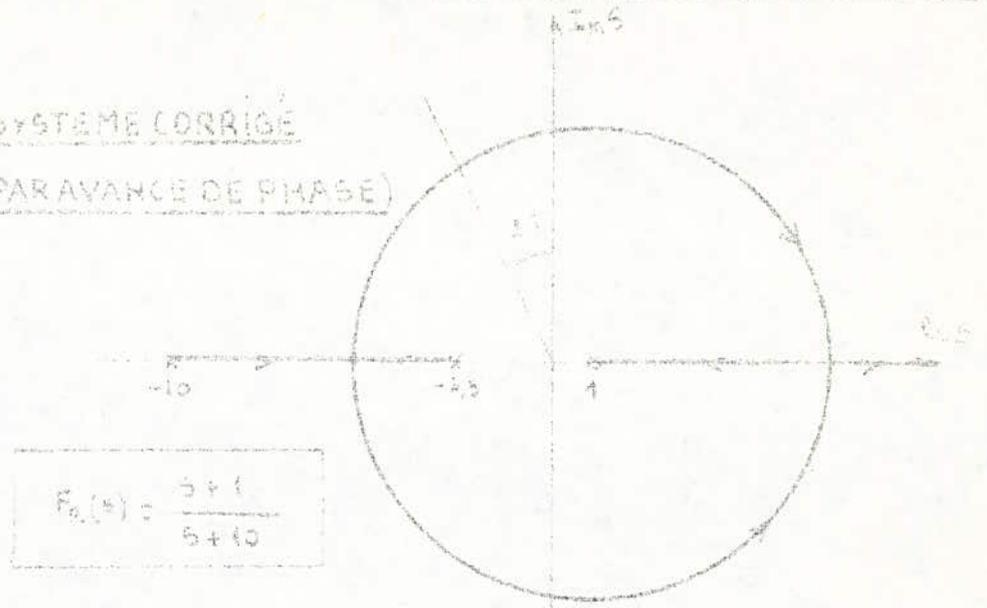
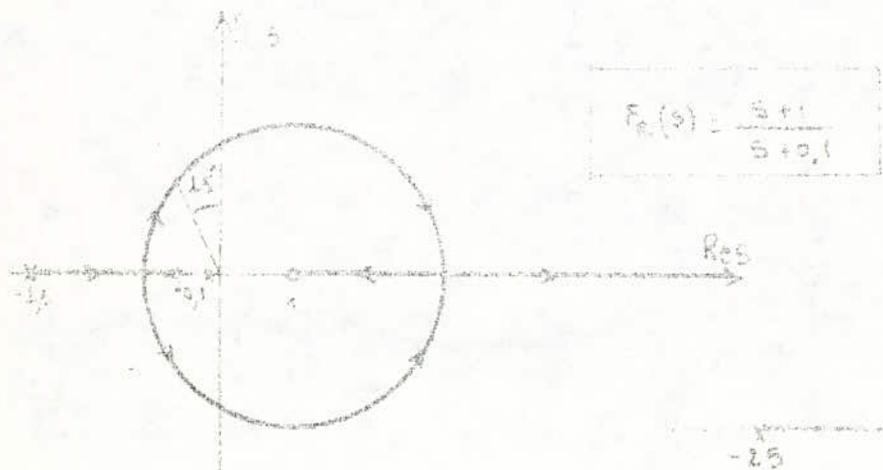


FIG: II-3 b

SYSTEME CORRIGE
(AVANCE DE PHASE)



SYSTEME CORRIGE

(RETARDO DE PHASE)

FIG: II-3. d.

SYSTEME CORRIGE
(AVANCE DE PHASE)

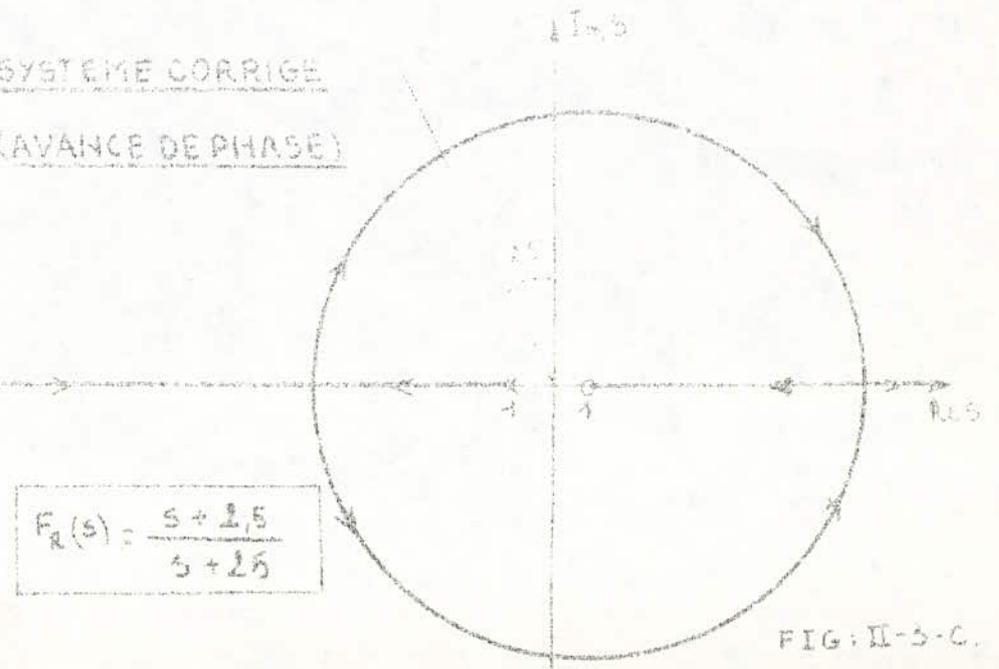
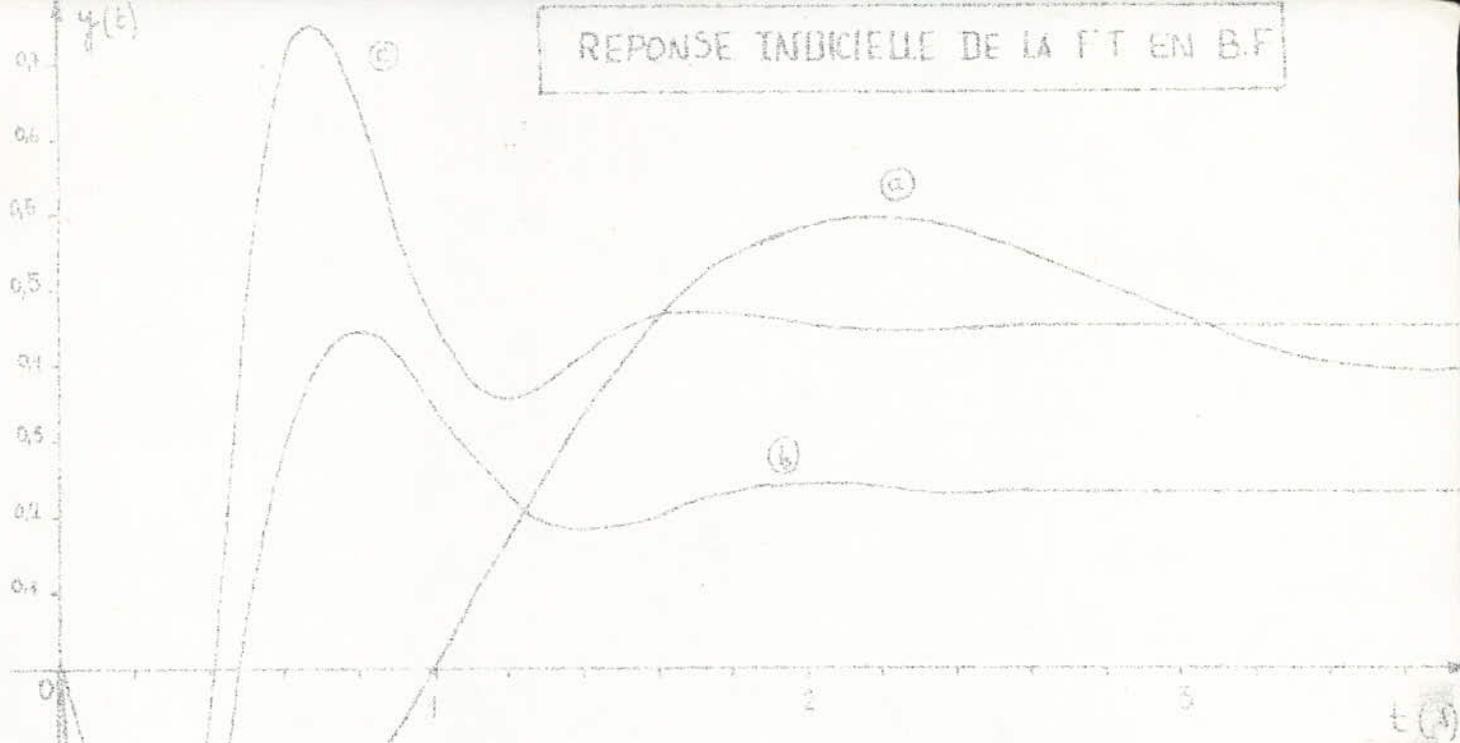


FIG: II-3-c.

REPONSE INDICIELLE DE LA FT EN B.F



- (a) Système non corrigé
- (b) Système corrigé par avance de phase
- (c) Système corrigé par avance de phase
- (d) Système corrigé par retard de phase

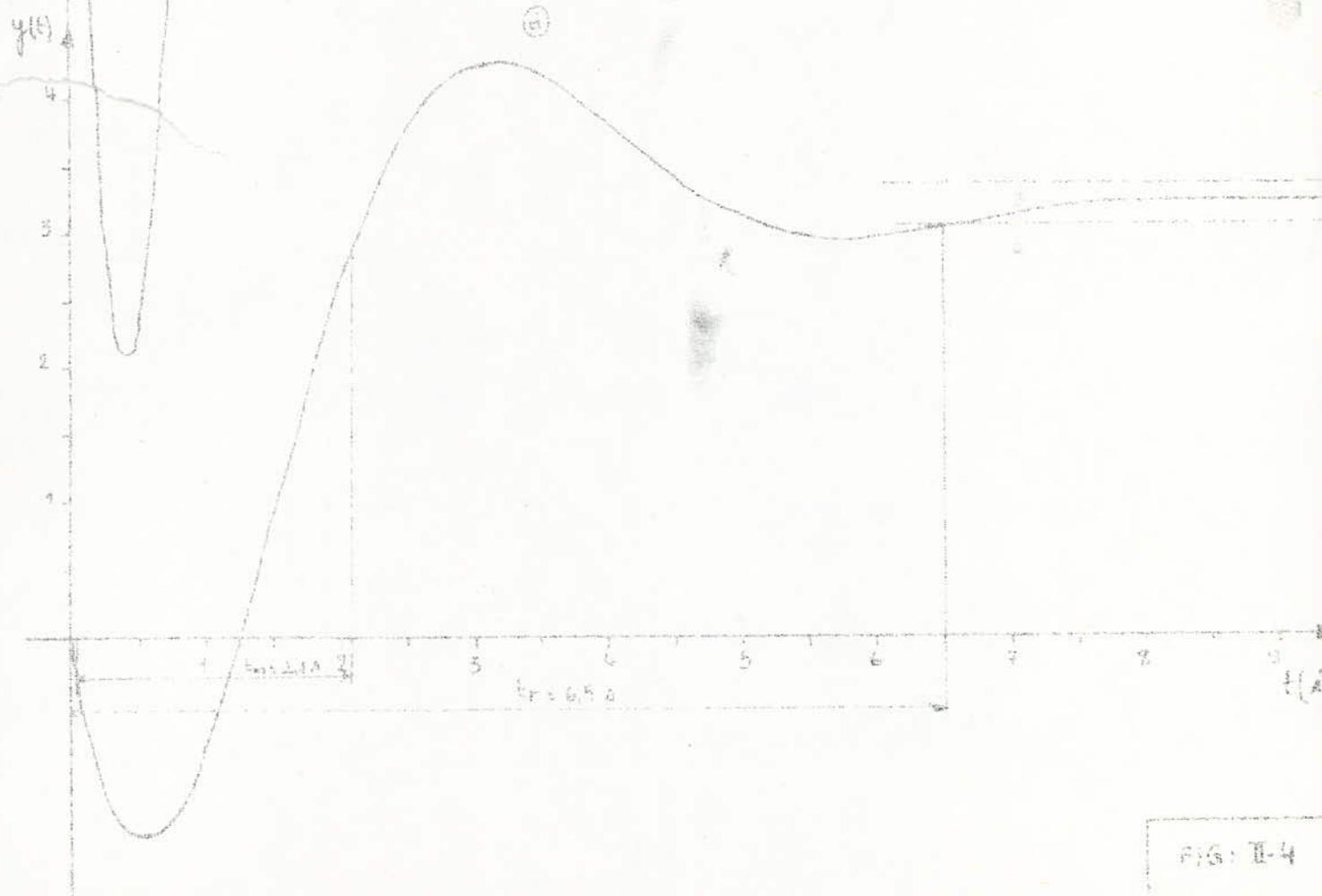
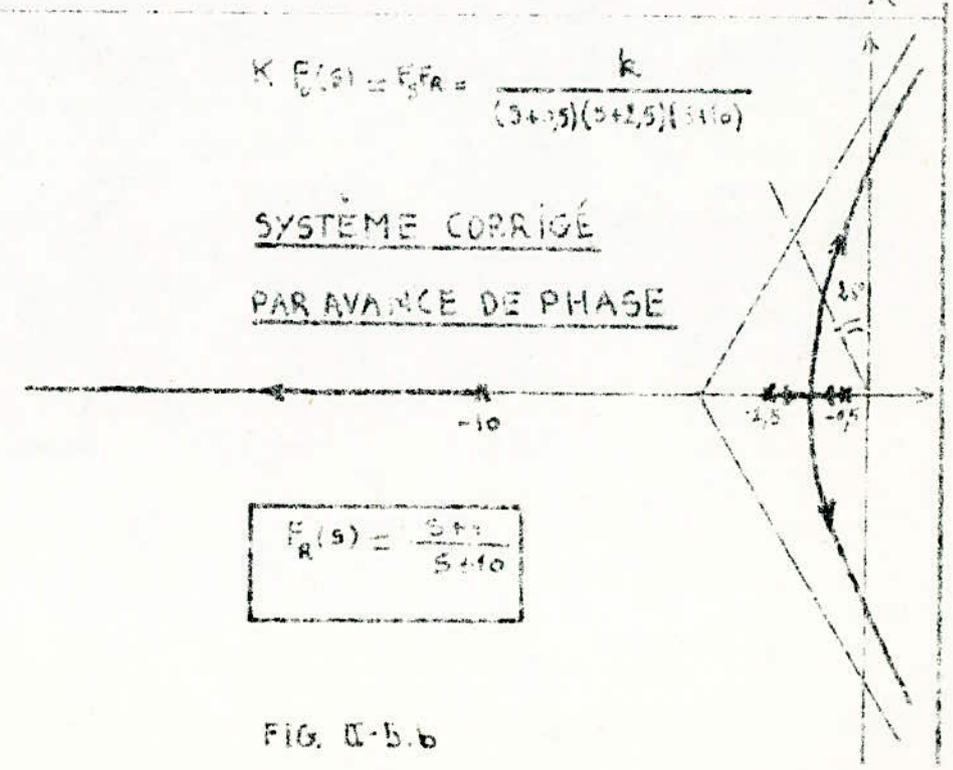
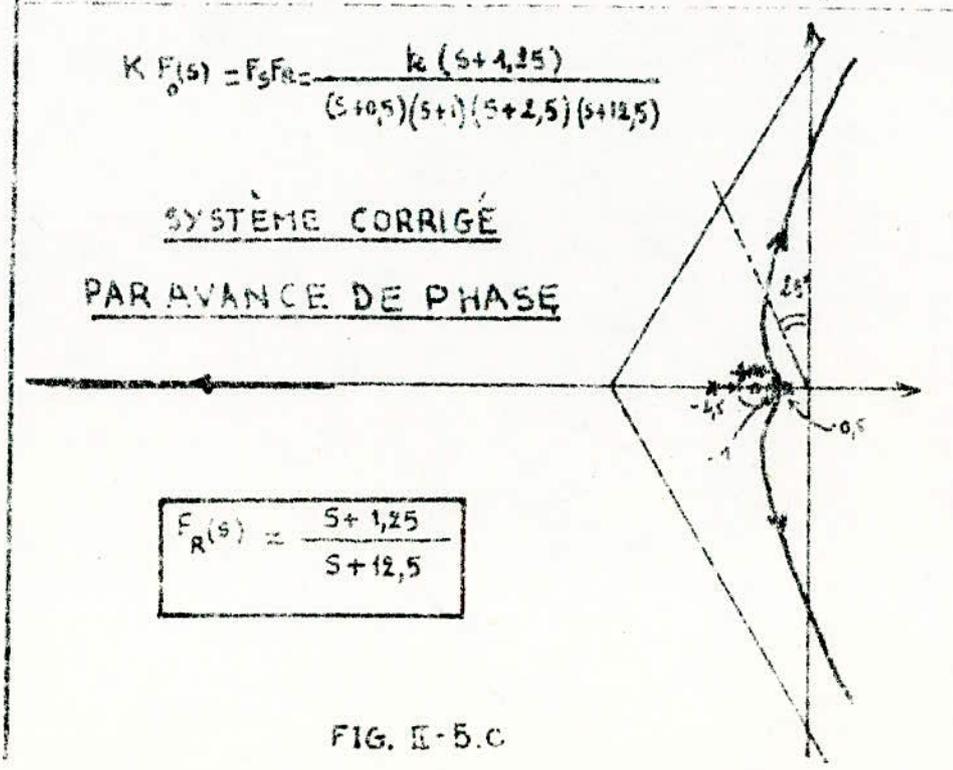
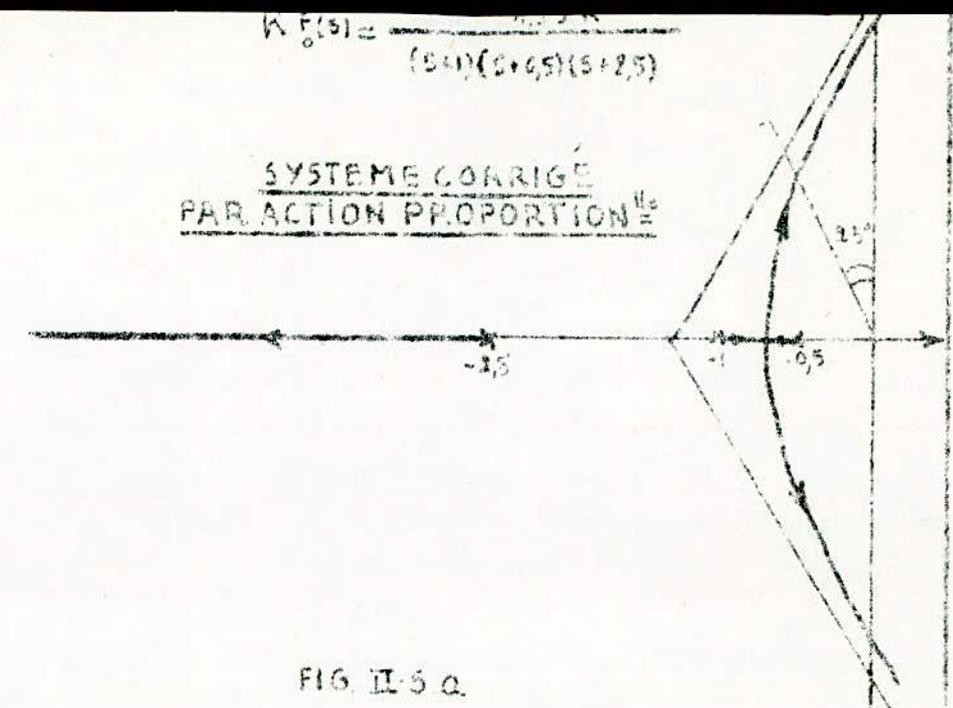
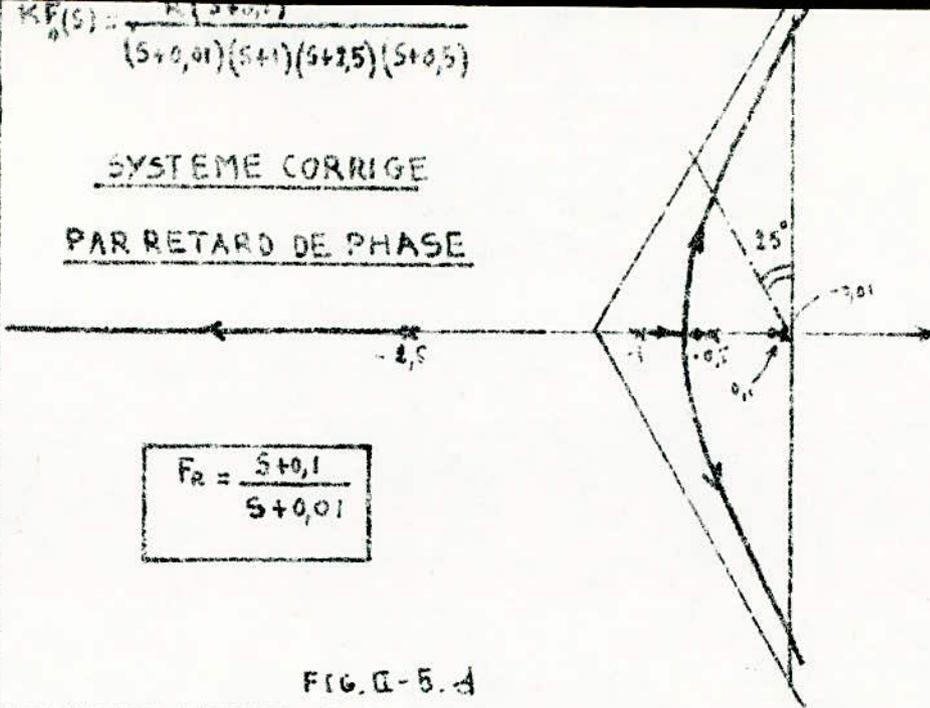
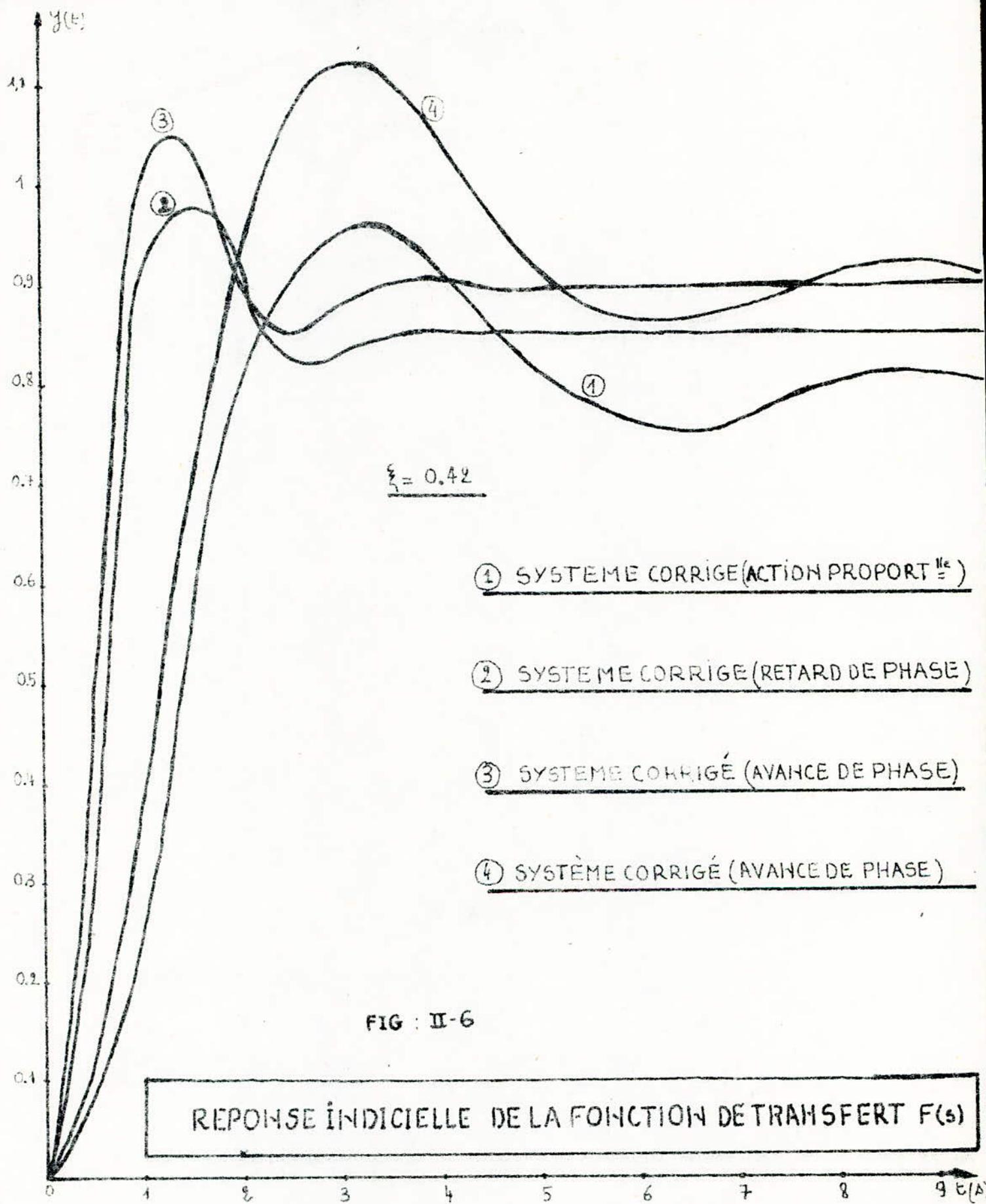


FIG: II-4





! Corrigé par :	:	:	:	:	:	:	:	!
! retard de :	1	1,33	2,05	6,50	0,42	32	3,20	!
! phase :	:	:	:	:	:	:	:	!

SYSTEME	T.(s)	ω_n (rad/s)	t_m (s)	t_r (s)	ζ	D(%)	gain K
Non corrigé	—	0,77	1,40	6,80	0,42	21,9	0,80
corrigé par avance de phase	0,1	2,6	0,65	2,10	0,42	13	0,85
	0,8	2,71	0,50	1,65	0,42	19,3	0,88
corrigé par retard de phase	10	1,26	1,47	6,65	0,42	23	0,91

Interprétations : On constate une diminution du temps de réponse dans le cas de la correction par avance de phase, donc amélioration de la rapidité du système ainsi corrigé. L'augmentation du dépassement est plutôt due à la nature même de la fonction de transfert du système qui est à déphasage non minimale. La correction par retard, en accord avec la théorie, améliore le gain qui passe, de 0,42 à 3,2. Pour le cas de la deuxième fonction de transfert les mêmes constatations sont à déduire du tableau pour le temps de réponse (**AVANCE** de phase), le gain statique (retard de phase). Contrairement au premier système on voit que le dépassement diminue pour l'avance de phase et augmente légèrement pour le retard de phase.

II.6 Conclusion :

La méthode du lieu des racines représente une procédure graphique pour la détermination des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée. Elle permet d'étudier de façon directe simultanément la fonction de transfert en boucle ouverte et la fonction de transfert en boucle fermée, et par conséquent permet de contrôler la réponse indicielle. C'est aussi un moyen de factorisation des polynômes. La seule difficulté réside dans la construction précise du lieu plus particulièrement si le lieu est assez complexe.

CHAPITRE III .

=====

SYNTHESE DES SYSTEMES ASSERVIS PAR LA METHODE DE TRUXAL-GUILLEMIN.

III- I - INTRODUCTION :

En general quand on veut commander un système asservi, on insère dans sa branche directe, un réseau correcteur afin d'améliorer ses performances. Pour déterminer ce correcteur, les techniques classiques consistent à travailler sur le lieu de transfert en boucle ouverte qu'on essaie de déformer systématiquement en s'aidant par l'abaque de Hall ou de Black qui permettent de déterminer les opérations effectuées sur la chaîne directe en langage de performances du système en boucle fermée .

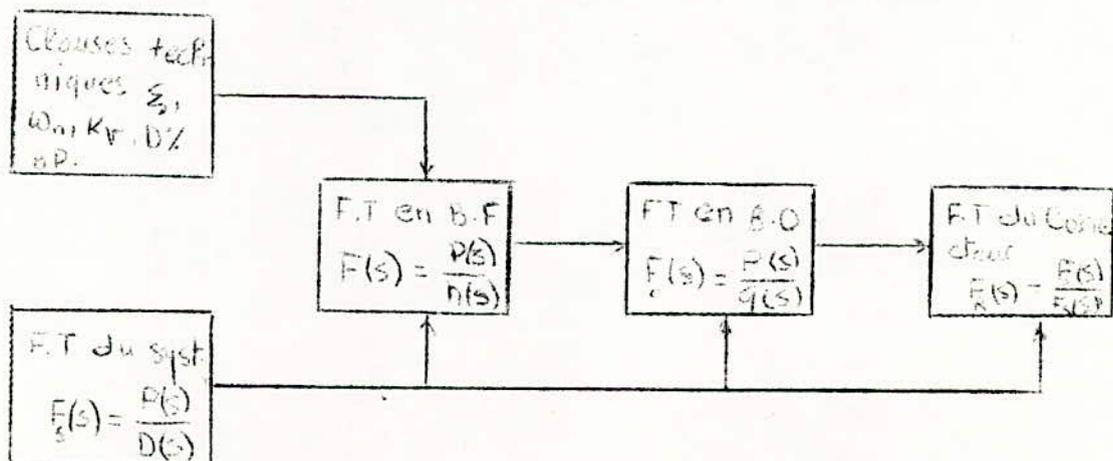
- Pour résoudre le même problème GUILLEMIN - TRUXAL propose une technique différente se distinguant des méthodes classiques par deux caractères principaux :

- Au lieu de raisonner sur la fonction de transfert en boucle ouverte $KF_o(s)$, elle considère d'emblée la fonction de transfert en boucle fermée $F(s)$, et en déduit ensuite par une technique spéciale, le réseau à insérer dans la chaîne directe .

- Au lieu de travailler sur les lieux de transfert, elle raisonne sur la disposition des pôles et des zéros .

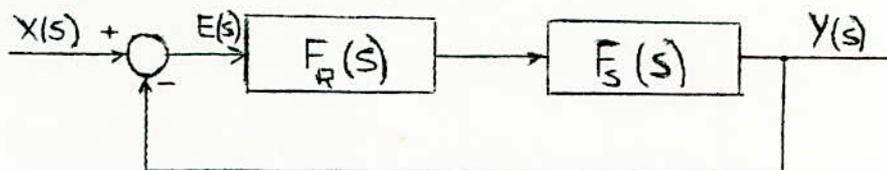
Cette méthode s'effectue en trois étapes :

- 1) Détermination de la fonction de transfert en boucle fermée à partir des clauses techniques .
- 2) Trouver la fonction de transfert en boucle ouverte à partir de la fonction de transfert en boucle fermée .
- 3) Synthétiser la F.T du correcteur approprié .



III-2. DETERMINATION DE LA F.T EN b.F DES SYSTEMES ASSERVIS A PARTIR DES CLAUSES TECHNIQUE .

La F.T en b.F sera déterminée à partir des clauses techniques, et sera donc facilement interprétée dans la carte des pôles et des zéros. La seule difficulté dans cette conception est la large variante de ces clauses techniques. Soit le schéma du système asservi suivant :



La F.T du système $F_S(s)$ nous fixe l'excès des pôles sur les zéros exigé par la F.T en b.F : $F(s)$.

$$(N_p - N_z)_{F(s)} \geq (N_p - N_z)_{F_S(s)} \text{ avec}$$

N_p : nombre de pôle

N_z : nombre de zéro

Tandis que les performances spécifiées déterminent l'emplacement convenable de ses pôles et ses zéros .

III-2 - 1 RECHERCHE DE LA F.T EN b.F SOUS FORME D'UNE FONCTION DU SECOND ORDRE

Les clauses techniques imposées à un système asservi concernent à la fois le régime définitif et le régime transitoire . Le régime définitif est caractérisé par les constantes d'erreurs auxquelles on prescrit des limites tandis que le régime transitoire est caractérisé par un bon amortissement et une rapidité assez bonne .

- Pour définir un système asservi, on part en première approximation avec un système du second ordre, caractérisé habituellement par trois constantes : ξ , ω_n et K (gain statique)

$$F_1(s) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Etant données des clauses techniques ^{imposées} par un système asservi, on peut grâce aux relations qui existent entre ces caractéristiques, chercher à déterminer un système du second ordre qui y satisfasse .

III-2 - 2 RECHERCHE DE LA F.T EN b.F ^{par} RETOUCHES DE $F_1(s)$:

Dans le cas où il n'est pas possible de satisfaire aux clauses techniques par un système du second ordre. La méthode consiste à multiplier $F_1(s)$ par une autre fonction complémentaire F_2 dont on choisit systématiquement les zéros z_i et les pôles p_i de façon que la F.T du système ainsi composé

$$F(s) = F_1(s) F_2(s) = F_1(s) \frac{(S+Z_1) (S + Z_2) \dots}{(S+P_1) (S+P_2) \dots}$$

Vérifier les clauses techniques imposées. Pour cela, deux idées générales peuvent servir de guide :

- L'adjonction d'un zéro
- L'adjonction d'un dipole

Correspondant dans la compensation par les techniques classiques respectivement à la compensation par avance de phase et par contrôle intégral.

III-2-2-a - COMPENSATION PAR ADJONCTION D'UN ZÉRO :

En principe, on prend $F_2(s) = S+Z_1$, la constante de vitesse de $F(s)$

devient : $\frac{1}{K_V} = \frac{2}{W_n} - \frac{1}{Z_1}$, donc Z_1 a pour effet d'augmenter K_V .

Un correcteur de telle forme n'est pas réalisable, parce que en haute fréquence devient infini.

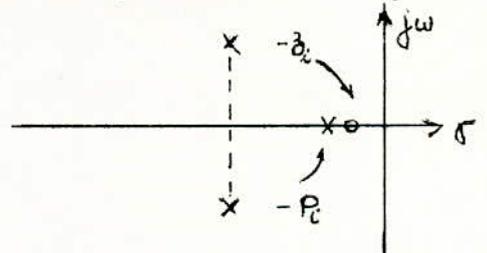
En pratique, $F_2(s)$ comporte aussi des pôles choisis assez grandes pour que leur influence sur le régime transitoire soit négligeable.

$$F_2 = \frac{S + Z_1}{S + P_1} \quad \text{où} \quad F_2(s) = \frac{S + Z_1}{(S+P_1) (S+P_2)}$$

III-2-2-b - COMPENSATION PAR ADJONCTION D'UN DIPOLE :

On peut aussi augmenter K_V sans modifier de façon sensible le régime transitoire, en introduisant un dipole :

$$F_2(s) = \frac{S + Z_i}{S + P_i}$$



d'où la fonction globale :

$$F(s) = F_1(s) F_2(s) = \frac{K W_n^2 P_i (S + Z_i)}{Z_i (S^2 + 2\xi W_n S + W_n^2) (S + P_i)}$$

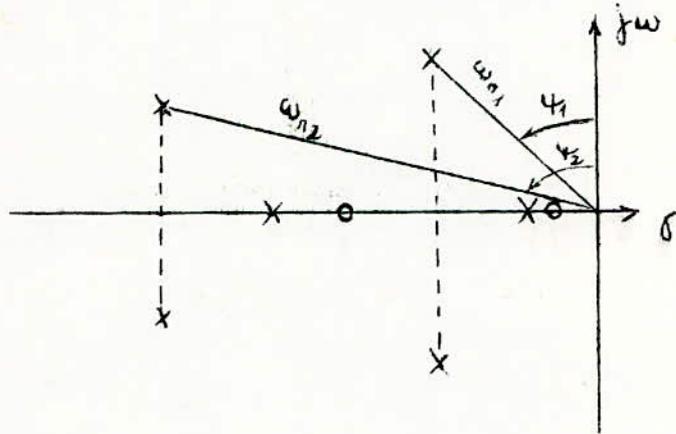
Le zéro (Z_i) et le pôle ($-P_i$) sont placés suffisamment proche l'un de l'autre et proche de l'origine sur l'axe réel négatif tel que le résidu de la F.T au pôle ($-P_i$) soit négligeable. Ceci est vrai puisque le résidu est proportionnel à la distance qui sépare le pôle et le zéro, Z_i et P_i sont presque égaux ($Z_i \approx 0,95P_i$) et peuvent avoir une contribution significative sur :

$$\frac{1}{K_V} = \frac{2\xi}{W_n} + \frac{1}{P_i} - \frac{1}{Z_i}$$

Parce que l'inverse des valeurs $\frac{1}{P_i}$ et $\frac{1}{Z_i}$ est grand par rapport aux autres termes de l'équation.

III-2 - 2 - c - GENERALISATION ;

Plus généralement, on introduira des F.T $F_2(s)$ possédant plusieurs pôles et zéros (notamment complexes) dans le demi-plan de gauche, la configuration à adopter dépend du problème à traiter et se choisit de manière à obtenir une réponse temporelle conforme aux clauses techniques imposés; au reste, plusieurs configurations peuvent donner des résultats à peu près équivalents. Ses idées d'adjonction d'un zéro ^{ou d'un} dipôle peuvent servir de guide, exactement comme dans les méthodes classiques, les notions d'avance de phase et d'action intégrale servent de guide dans la recherche de réseau correcteurs complexes.

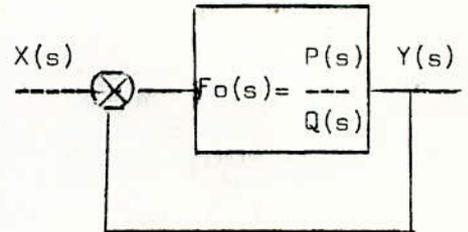


III. 3 DETERMINATION DE LA F.T EN b.O A PARTIR DE LA F.T EN b.F.

La deuxième étape consiste à déterminer la F.T en b.O à partir de la F.T en b.F répondant aux clauses techniques.

Partant donc de $F(s)$ on a :

$$F_o(s) = \frac{F(s)}{1-F(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)/N(s)}{1-P(s)/N(s)} = \frac{P(s)}{N(s)-P(s)}$$



Les zéros de $F_o(s)$ sont donc les zéros de $f(s)$

Les pôles de $F_o(s)$ sont les racines de l'équation

$$Q(s) = 0 \implies n(s) - P(s) = 0$$

On sait qu'en pratique presque tous les systèmes asservis possèdent une erreur de position nulle ($K_p = 1$) donc $F_o(s)$ possède toujours une intégration ($s=0$) ce qui abaisse le degré de $Q(s)$ qui est lui de $n(s)$. En outre, on impose aux racines qui restent d'être réelles négatives permettant ainsi une résolution purement graphique, et facilite la réalisation du réseau correcteur au moyen de circuits à résistance et capacités.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(s) = s(s + P_1)(s + P_2) \dots \dots \dots (s + P_{n-1}) \\ P_1, P_2, \dots \dots \dots, P_{n-1} \text{ réels négatifs} \end{array} \right.$$

Dans la plupart des cas $P(s)$ possède au plus deux racines. Si $F(s)$ n'a pas de zéro, la courbe $P(s)$ est une droite horizontale, si $F(s)$ a un zéro $P(s)$ est une droite inclinée, enfin si $F(s)$ possède deux zéros $P(s)$ est une parabole.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(s) = \prod_{i=1}^n (S + Z_i) \\ n \leq 2 \end{array} \right.$$

$n(s)$ est de degré supérieur, en pratique possède au plus quatre racines.

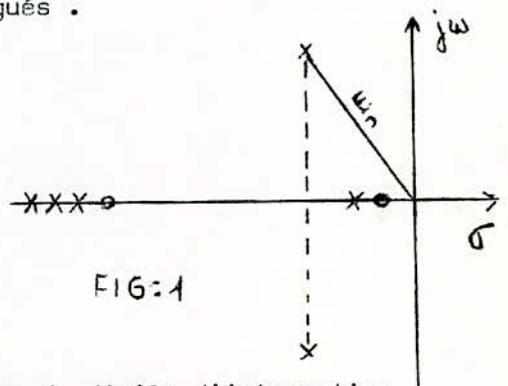
$$\left\{ \begin{array}{l} n(s) = \prod_{i=1}^n (S + P_i) \\ n \leq 4 \end{array} \right.$$

Supposons, pour se fixer les idées, une fonction de transfert en b.F répondant aux clauses techniques.

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (S + Z_i)}{\prod_{i=1}^n (S + P_i)}$$

Possédant au moins deux poles complexes conjugués.

Avec $m \leq 2$; $n \leq 4$
 $K_p = 1$; $K = \frac{w_n^2}{\prod_i Z_i} \cdot \left(\frac{\prod_j P_j}{\prod_i Z_i} \right)$



Avec la configuration de la fig. 1
 2 cas peuvent se présenter.

III- 3 - 1 Cas où la fx. de transfert ne possède pas de dipôle d'integration

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (S + Z_i)}{(S^2 + 2\xi W_n S + W_n^2) \prod_{j=1}^{n-2} (S + P_j)}$$

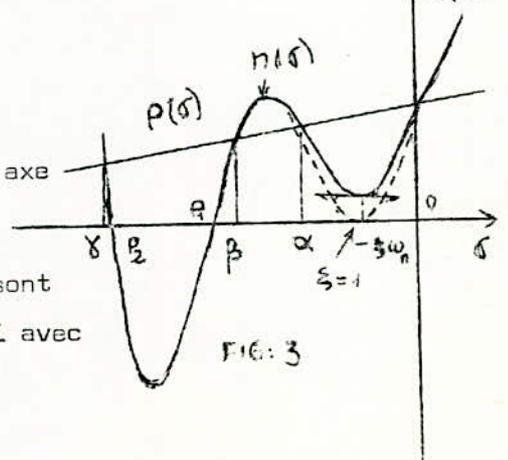
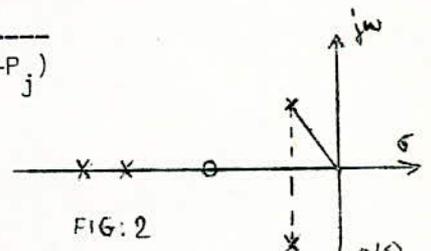
Avec $|P_i| \geq 5 \xi W_n$.

Avec cette condition, on voit que $n(s)$ accuse un 1^{er} minimum près de l'origine à $S \approx -\xi W_n$

$$n(s) = (S^2 + 2 \xi W_n S + W_n^2) \prod_{j=1}^{n-2} P_j$$

et si $\xi = 1$ ce premier minimum repose sur l'axe réel (racine double de $n(s)$).

Si $P(s)$ est une constante les pôles de $F(s)$ sont donc déterminés par l'intersection de celui-ci avec $n(s)$ fig. 3.

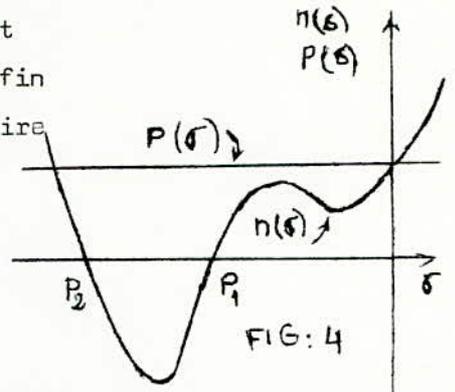


Si P_1 est trop petit on a le cas de la fig. 4 et $Q(s)$ possède une paire de pôles complexes.

Donc la condition pour que les pôles de $Q(s)$ soient réels négatifs est que P_1 et P_2 soient très grand afin qu'ils ne contribuent pas dans la réponse transitoire

Si $P(s)$ est de degré 1 on a le cas de la fig. 5

Si $P(s)$ " " " " " fig. 6



Dans le cas où α est trop près de l'origine on peut la déterminer analytiquement en s'aidant de la relation entre K_V et $F(s)$:

$$\frac{1}{K_V} = - \left(\frac{d}{ds} \left[F(s) \right] \right)_{s=0} = - \left(\frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{n(s)} \right] \right)_{s=0} = \frac{P'(0)n(0) - P(0)n'(0)}{n^2(0)}$$

Comme $F(0) = 1 \Rightarrow n(0) = P(0)$

d'où

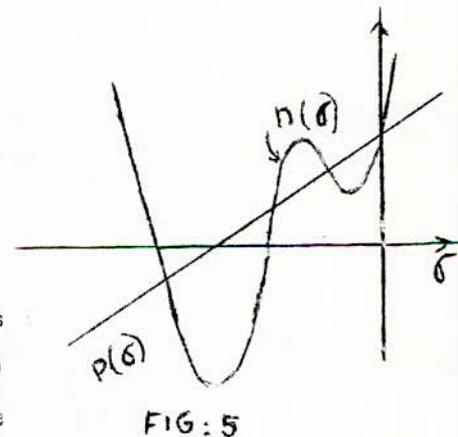
$$\frac{1}{K_V} = \frac{n'(0) - P'(0)}{n(0)} = \frac{2\xi}{W_n} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{P_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{Z_i} \quad (I)$$

Si $K_V = \infty \Rightarrow n'(0) = P'(0) \Rightarrow Q(s)$ possède une racine double à l'origine
 $\Rightarrow F_0(s)$ a 1 pole double à l'origine.

III- 3 - 2 - Cas où la transfert en b.F possède un dipole d'integration

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + Z_i)}{(s^2 + 2 \sum_{n=1}^p W_n s + W_n^2) \prod_{j=1}^q (s + P_j)}$$

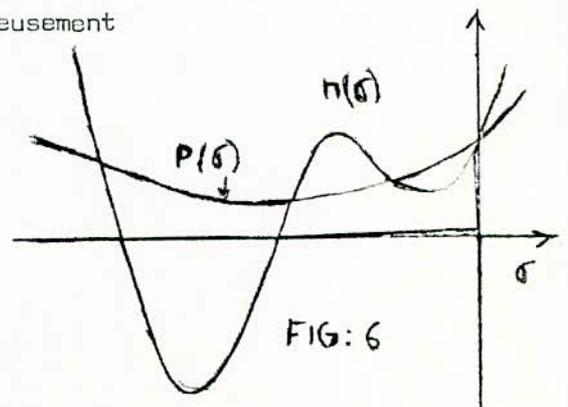
La fig. 7 montre la configuration correspondante dans ce cas la procédure graphique devient plus difficile. $F(s)$ possédant un dipole près de l'origine et $P(s)$ et $N(s)$ ont des racines pour des valeurs légèrement négatives de s . Les courbes de $N(s)$ et $P(s)$ prennent la forme de la fig. 8 avec des pentes presque égales près de l'origine. ($N'(0) \neq P'(0)$) et donne ainsi lieu à des erreurs de lecture? Fort heureusement on dispose la relation suivante :



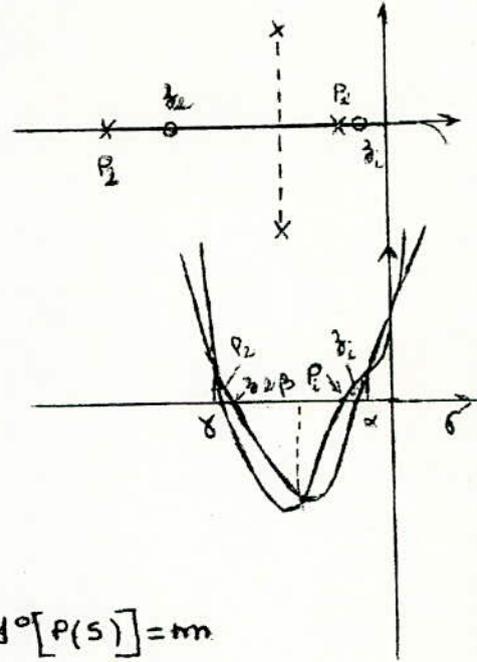
$$\frac{1}{K_V} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{P_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{Z_i} \quad (2)$$

On sait que pour la F.T en B.O on a :

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} \right] \quad (3)$$



Cette équation permet donc de déterminer le zéro α de $Q(s)$ ou pôle d'intégration de $F(s)$ connaissant $K_v, P(s)$ et γ . On peut tout aussi bien tracer $N(s)$ et $P(s)$ au voisinage de l'origine en agrandissant l'échelle et déterminer ainsi la région qui nous intéresse.



On peut utiliser en même temps les relations (1) et (2).

De même on a

$$N(s) = S^n + \left(\sum_{j=1}^m P_j \right) S^{n-1} + \dots + \prod_{j=1}^n P_j$$

d'où $(N(s))' = n$

$$P(s) = K \left[S^m + \left(\sum_{i=1}^m Z_i \right) S^{m-1} + \dots + \prod_{i=1}^m Z_i \right] \quad d'où [P(s)]' = m$$

En générale le degré de $N(s)$ est inférieur ou égale à 2.

donc :

$$Q(s) = N(s) - P(s) = S^n + \left(\sum_{j=1}^m P_j \right) S^{n-1} + \dots + \prod_{j=1}^n P_j - K \prod_{i=1}^m Z_i = S(S + \alpha)(S + \gamma)$$

Comme le deuxième terme $\left(\sum_{j=1}^m P_j \right)$ représente la somme des racines de $Q(s)$ donc on voit que la somme des zéros de $Q(s)$ est égale à la somme des pôles de $F(s)$.

$$\sum_{j=1}^n P_j = \alpha + \beta + \gamma + \dots \quad (4)$$

Relation qui peut être utilisée pour la détermination d'un zéro de $S(s)$ connaissant les autres zéros.

Les relations (2) et (3), (4) peuvent être utilisées ensemble pour trouver les 2 autres zéros de $Q(s)$.

La détermination des pôles loins de l'origine est particulièrement facile si $P(s)$ est une C^{te}. La figure 9 montre la forme de $N(s)$ et $P(s)$ si la réponse du système est gouvernée par une paire de pôles conjugués complexes et tous les autres pôles sont loins dans cercas :

$$F(s) = \frac{W_n^2 \cdot P_1 \cdot P_2}{(S^2 + 2W_n \xi S + W_n^2) (S + P_1) (S + P_2)}$$

Au voisinage de P_2 $N(s)$ est équivalent à :

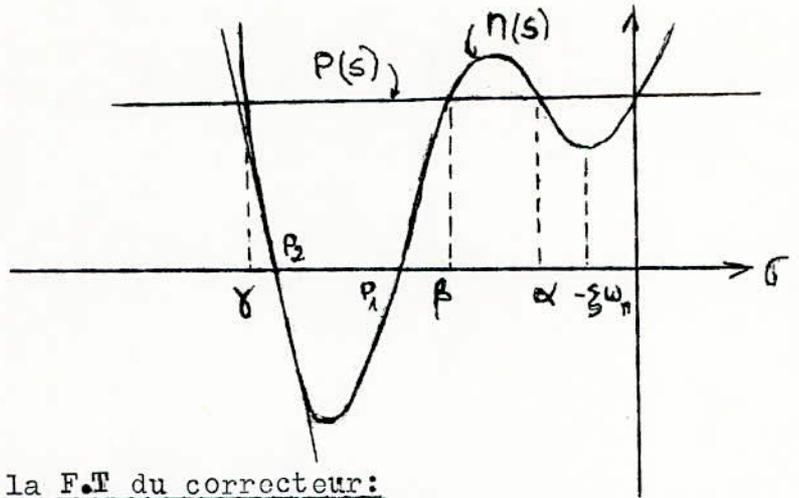
$$N(s) = -P_2^3 (S + P_2)$$

Si

$$P_2 \gg (\xi W_n, P_1)$$

La pente de $N(s)$ est de grande valeur; par conséquent on peut prendre $\gamma \approx P_2$ avec une erreur négligeable dans les spécification du système.

FIG: 9



III-4-Determination de la F.T du correcteur:

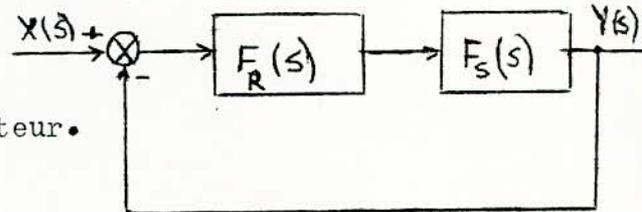
On connaît maintenant, pour la F.T en B.O, une expression de $F_o(s)$ qui permet de satisfaire aux clauses techniques.

Comme

$$F_R(s) \cdot F_S(s) = F_o(s)$$

On en déduit la F.T du réseau correcteur.

$$F_R(s) = F_o(s) \cdot \frac{1}{F_S(s)}$$



Il reste donc à réaliser ce réseau correcteur et à procéder à son adaptation d'impédance.

III-4-1. Remarque:

On a peut être l'impression, en lisant cette exposé que la méthode permet d'obtenir n'importe quelles performances à partir de n'importe quel système $F_S(s)$; en fait si les performances exigées sont trop dures par rapport au système d'où on part, la méthode conduit à des réseaux correcteurs dont les constantes sont trop élevées (par exemple constante d'avance de phase supérieur à 20 dB). La mise en équation du problème en exigeant les bruits n'est plus valable) Ou à des fréquences de résonance élevées.

III-5 APPLICATIONS

III-5-1 Cas où $F_0(S)$ ne possède pas de pôle d'intégration

$$F_S(S) = \frac{1,25}{(S+0,5)(S+1)(S+2,5)}$$

Fonction de transfert en B.F du système non corrigé

$$F(S) = \frac{1,25}{(S+2,75)(S+1,24S+0,81)}$$

Sa réponse indicielle est : Voir Fig: III-2.a

$$Y(t) = \text{rix} = 0,56 - 0,09\text{EXP}(-2,75t) - 0,95\text{EXP}(-0,63t) \sin(0,63t+30^\circ)$$

Qui donne les performances suivantes:

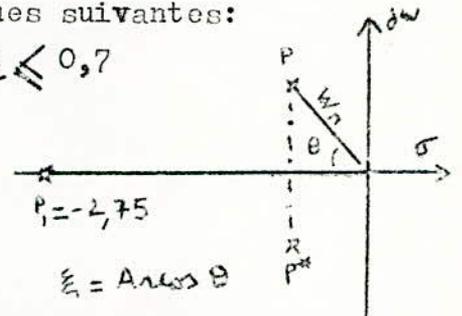
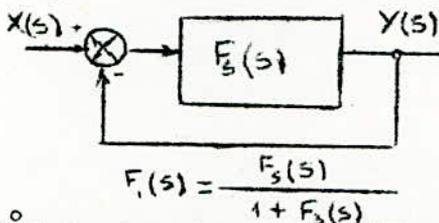
$$K_p = 0,55, \xi = 0,69, D\% = 1,8; t_n = 2,35s; t_r = 3,9s; K_v = 0,53s^{-1};$$

$$w_n = 0,69 \text{ rad/s}; BP = 2,65 \text{ rad/s}$$

Supposons qu'on veuille améliorer ces performances, plus particulièrement on nous intéresse à la constante de trainage K_v en nous basant sur la méthode de TRUXAL-GUILLEMIN.

Soit donc à réaliser les clauses techniques suivantes:

$$K_p = 1; K_v \geq 3s^{-1}; BP \leq 4 \text{ rad/s}; 0,6 \leq \xi \leq 0,7$$



1°) Recherche de la F.T en B.F corrigée répondant aux clauses techniques imposées: $F(S)$

a) sachant que: $(N_p - N_z) F(S) \geq (N_p - N_z) F_S(S)$
 $(N_p - N_z) \geq 3 \quad (1)$

b) Pour $F_1(s)$ du second ~~ou~~ ordre et $\xi = 0,7$ LES INÉGALITÉS sur les clauses techniques seraient:

$$K_v = \frac{w_n}{2\xi} \geq 3/s$$

$$w_n = BP \leq 4$$

$$K_v = 0,71 BP \quad (2)$$

avec ces conditions, l'inégalité (2) ne serait pas satisfaite. D'où la nécessité de faire des retouches à $F_1(s)$.

Retouche de $F_1(s)$ par un zéro (avance de phase):

Afin de satisfaire en même temps les (~~autres~~) conditions (1) et (2), il faut au moins qu'un zéro puisse être utilisé dans $F_1(s)$. Sachant qu'un zéro n'est (~~pas~~) physiquement réalisable. D'où la fonction de transfert de retouche $F_2(s)$ serait:

$$F_2(S) = \frac{S+Z_1}{(S+P_3)(S+P_4)} \quad \text{Avec } |P_3| \text{ ET } |P_4| \geq \xi w_n, Z_1$$

D'où

$$F(S) = F_1(S) \cdot F_2(S) = \frac{w_n^2 P_3 P_4}{Z_1 (S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2) (S+P_3) (S+P_4)}$$

Afin de réaliser la condition $K_p=1$ et $F(0)=1$

L'addition d'un zéro à $F_1(s)$ nécessite une diminution de w_n pour avoir la même BP.

$$w_n = \frac{2}{\frac{1}{k_v} + \frac{1}{z_1}} \Rightarrow \frac{1}{w_n} = \frac{1}{2\xi K_v} + \frac{1}{2\xi z_1} = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{\Delta w} \Rightarrow w_n < w_0$$

Prenons $w_n = 1,8 \text{ rad/s}$

Détermination de Z_1 :

Sachant que

P_3 ET P_4 doivent être assez

grand pour que leurs influences sur K_v soit négligeable.

$$\frac{1}{k_v} = \frac{2\xi}{\omega_n} - \frac{1}{z_1} + \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_4} \approx \frac{2\xi}{\omega_n} - \frac{1}{z_1}$$

Si $K_v \geq 3/\rho \Rightarrow z_1 \leq 2,2$

Prenons $Z_1 = -1,5$ pour permettre une marge de sécurité sur K_v quand on tient compte de P_3 ET P_4 , d'où:

$$F(s) = 2,16 P_3 P_4 \cdot \frac{s+1,5}{(s^2+3,6\xi s+3,24)(s+P_3)(s+P_4)}$$

Détermination de P_3 et P_4 :

Le choix de P_3 et P_4 est arbitraire avec la condition que leur influence sur K_v soit négligeable et que P_3 diffère assez de P_4 pour avoir des racines réelles dans $Q(s) = N(s) - P(s)$. Prenons un coefficient d'éloignement $m \geq 10$.

$$m \geq 10 = \frac{P_3}{\xi \omega_n} \Rightarrow P_3 = -12,6$$

P_3 Diffère assez de P_4 par exemple: $P_4 \geq 2,5 P_3 \Rightarrow P_4 = -33,6$
Donc:

$$F(s) = 914,45 \cdot \frac{s+1,5}{(s^2+3,6\xi s+3,24)(s+12,6)(s+33,6)} = \frac{P(s)}{N(s)}$$

Il reste à ajuster ξ pour cela on peut faire apparaître l'une des racines de $Q(s)$ égale à $0,5$ existant comme pôle dans $F_s(s)$ et de cette façon on pourrait le simplifier lors du calcul du correcteur

Donc: $N(-0,5) = P(-0,5)$

On trouve: $\xi = 0,67$ Valeur acceptable puisque $0,6 \leq \xi \leq 0,7$

D'où la fonction de transfert en B.F corrigée;

$$F(s) = 914,45 \cdot \frac{s+1,5}{s^2+2,41s+3,24}(s+12,6)(s+33,6)$$

Sa réponse indicielle serait:

$$y(t) = 1 + 0,291 e^{-12,6t} - 0,04 e^{-33,6t} - 1,42 e^{-1,206t} \text{ Arr. } (1,33t+63,4^\circ)$$

Donnant les performances suivantes:

$$\xi = 0,67, \omega_n = 1,8 \text{ rad/s}; K_v = 5,38; K_p = 1, t_r = 2,85 \text{ s}; t_m = 1,1 \text{ s}$$

$$D = 7\%, BP \approx 1,1 \text{ s}$$

2°) Determination de la fonction de transfert en boucle ouverte:

On sait déjà qu'une des racines de $Q(s)$ est égale à $0,5$ SOIT $\alpha = -0,5$. Sachant en outre que dans la pratique $Q(s)$ comporte une intégration soit $S=0$ est la deuxième racine. D'où:

$$F_0(s) = 914,45 \cdot \frac{S+1,5}{S(S+0,5)(S+\beta)(S+\gamma)} = \frac{P(S)}{Q(S)}$$

Determination de β et γ :

La détermination de β et γ se fait par le tracé de $N(s)$ et $Q(s)$, (voir fig: III-3-a), on trouve:

$$\beta = 16 \quad \text{et} \quad \gamma = 32$$

Afin de vérifier cette détermination graphique, on dispose de deux relations, soit:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{P(s)}{Q(s)} \right) \quad (a) \quad \text{avec} \quad K_V = 5,35$$

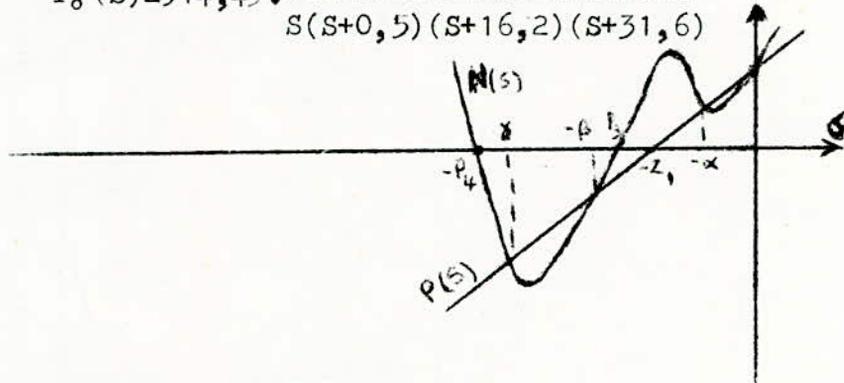
$$\sum (\text{poles de } F(s)) = \sum (\text{poles de } F_0(s)) \quad (b)$$

D'où:

$$\begin{cases} (a) \Rightarrow \beta\gamma = 512,7 \\ (b) \Rightarrow \beta + \gamma = 47,84 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \beta = -16,2 \\ \gamma = -31,6 \end{cases}$$

D'où la fonction de transfert en B.O:

$$F_0(s) = 914,45 \cdot \frac{S+1,5}{S(S+0,5)(S+16,2)(S+31,6)}$$



3°) Determination de la F.T du réseau correcteur: $F_r(s)$.

On sait que:

$$F_R(s) = \frac{F_0(s)}{F_s(s)} = \frac{(S+0,5)(S+1)(S+2,5) \cdot 914(S+1,5)}{1,25 S(S+0,5)(S+16,2)(S+31,6)}$$

D'où:

$$F_R(s) = 731,56 \cdot \frac{(S+1)(S+1,5)(S+2,5)}{S(S+16,2)(S+31,6)}$$

Supposons toujours les mêmes clauses techniques:

R EMOUCHE de $F_1(s)$ par un dipole:

Prenons $\omega_n = 3 \text{ rad/s}$ et supposons

qu'on veuille compenser $F_1(s)$ par un dipole. Tenant compte des conditions (1) et (2) de l'exemple précédent. La forme de

$F(S) = F_1(S) \cdot F_2(S)$ devient:

$$F(S) = \frac{0P_1 P_2 (S+Z_1)}{z_1 (S^2 + 6z_1 S + 9) (S+P_1) (S+P_3)}$$

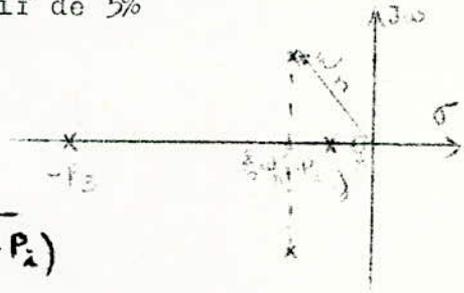
$$\text{Avec } m = \frac{P_3}{2W_n} \geq 10$$

-Supposons que le résidu au pôle $-P_i, k(P_i)$, introduit une variation sur l'amplitude du régime définitif de 5%

$$\left[\frac{1}{s} \cdot F(s) \right]_{(P_i)} = 0,05$$

Donc

$$k(-P_i) = \frac{9P_i Z_i}{Z_i} \cdot \frac{1}{(-P_i)(P_i^2 - 6P_i + 9)(P_i - P_3)}$$



P_i étant très petit devant P_3 , et les autres termes, on peut donc approximer $k(P_i)$ à :

$$k(-P_i) = -\frac{9P_i}{Z_i} \frac{Z_i - P_i}{9P_i} = -1 + \frac{P_i}{Z_i} \Rightarrow \frac{P_i}{Z_i} = 1,05$$

$$Z_i = 0,95P_i$$

Détermination de P_i , Z_i et P_3 :

On suppose $\xi = 0,707$ et $K_v = 5 s^{-1}$

$$\Rightarrow P_3 = 10 \xi W_n \approx 20$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K_v} = \frac{2\xi}{W_n} + \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_i} - \frac{1}{Z_i} \Rightarrow \frac{1}{Z_i} (1 - \frac{Z_i}{P_i}) = \frac{2\xi}{W_n} + \frac{1}{P_3} - \frac{1}{K_v}$$

On trouve $Z_i = 0,156$

$$\Rightarrow Z_i = 0,95P_i \Rightarrow P_i = 1,05 Z_i$$

D'où la F.T en B.F corrigée

$$F(s) = 189,2 \frac{s + 0,156}{(s^2 + 4,245s + 9)(s + 20)(s + 0,164)} = \frac{N(s)}{P(s)}$$

Sa réponse indicielle est : (en négligeant les résidus au pôle $S = -20$ et au dipôle)

$$y(t) = 1 - 1,34 e^{-0,12t} \sin(2,12t + 4,85) \quad \text{voir R Fig. III-2C}$$

Donnant les performances suivantes

$$\xi = 0,7 ; W_n = 3 \text{ rad/s} ; K_v = 5/s ; K_p = 1 ; t_r = 2,25 \text{ s}$$

$$t_m = 0,7 \text{ s} ; D\% \approx 9 ; BF = 0,65 \text{ s}$$

Détermination de la F.T en B.F :

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{189,2 (s + 0,156)}{s(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)}$$

$$\text{Avec } Q(s) = N(s) - P(s)$$

$$N(s) = (s^2 + 4,245s + 9)(s + 20)(s + 0,164)$$

$$P(s) = 189,2 (s + 0,156)$$

$$Q(s) = (s + 0,164)(s^2 + 4,245s + 9)(s + 20) - 189,2 (s + 0,156)$$

Afin de déterminer β et γ , on peut en première approximation

RECHERCHE DES ZÉROS DE $Q(s) = m(s) - P(s)$

FIG. III-3. b

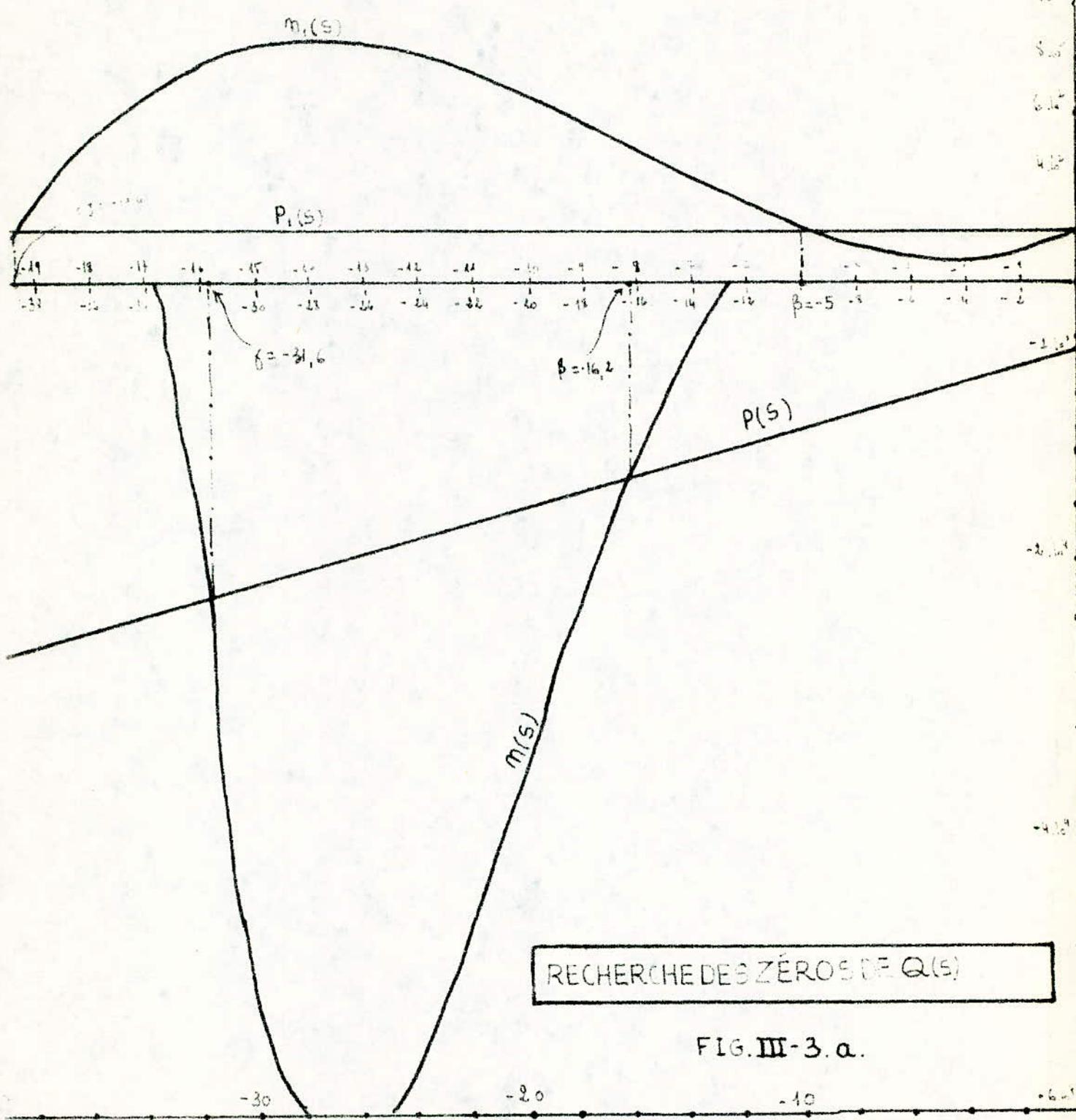


FIG. III-3. a.

REPOSE INDICIELLE DE LA FONCTION DE TRANSFERT EN. B.F

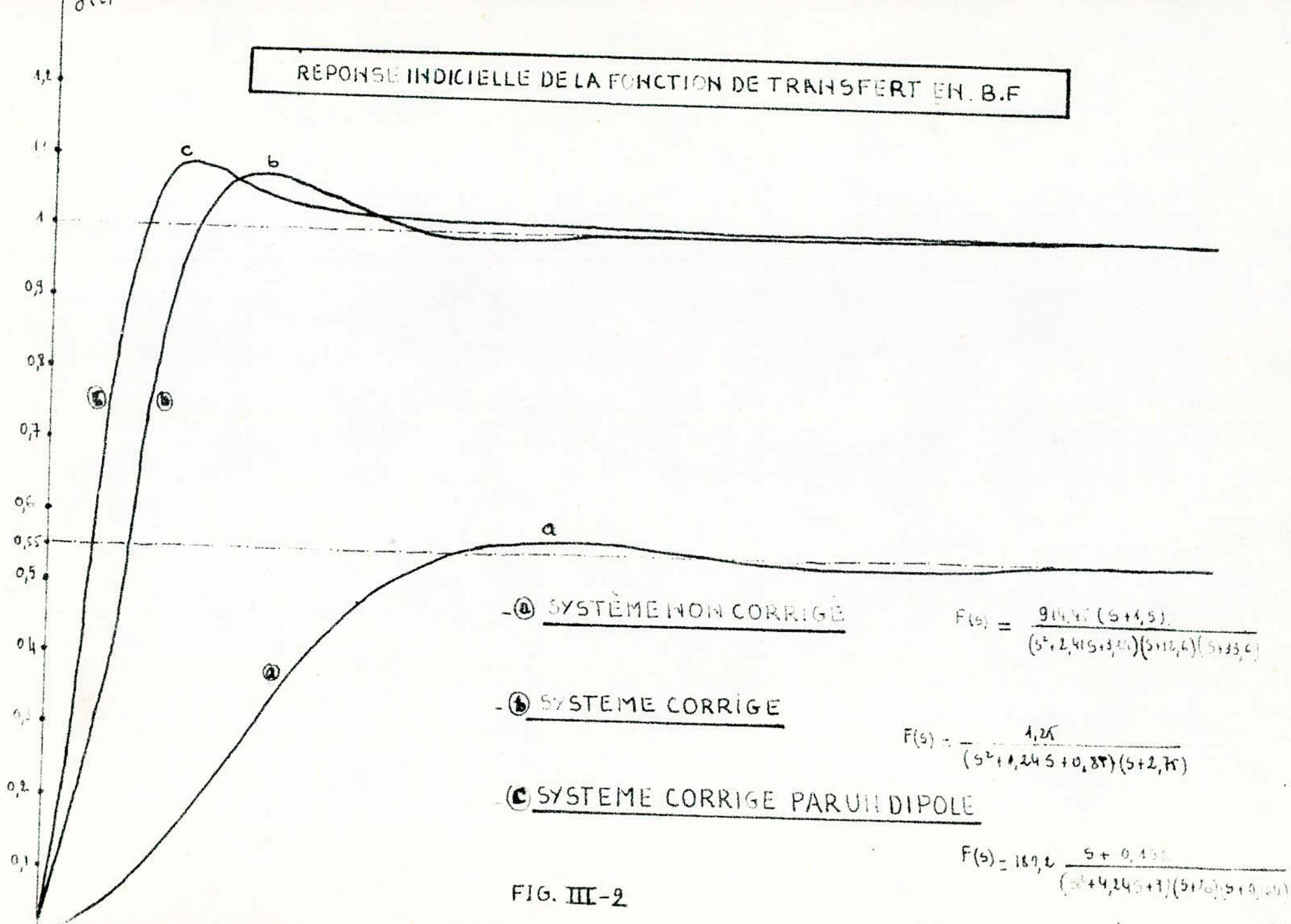


FIG. III-2

Afin de déterminer γ et β on peut en première approximation négliger 0,156 et 0,164 DEVANT S

$$Q(S) = (S + 0,164)(S^2 + 4,24S + 9,9(S+20) - 189,2(S+0,156))$$

devient:

$$Q(S) = S(S^2 + 4,24S + 9)(S+20) - 189,2 = N_1(S) - P_1(S)$$

$$\text{avec } N_1(S) = S^3 + 24,24S^2 + 93,8S + 180$$

$$P_1(S) = 189,2$$

voir Fig. III-3.b pour le tracé de $N_1(S)$ et $P_1(S)$, on trouve :

$$\beta = -5 ; \gamma = -19,4$$

La détermination de α se fait analytiquement par:

$$K_v \underset{S \rightarrow 0}{=} \lim \left[S \cdot F_0(S) \right] \Rightarrow 5 = \frac{189,2 \times 0,156}{\alpha \times 5 \times 19,2}$$

$$\text{d'où } \alpha = 0,061$$

Dou la F.T en B.O

$$F_0(S) = 189,2 \frac{S + 0,156}{S(S + 0,061)(S + 5)(S + 19,4)}$$

Détermination de la F.T du réseau correcteur:

$$F_R(S) = \frac{1}{F_S(S)} \cdot F_0(S) = \frac{(S + 0,5)(S + 1)(S + 2,5)}{1,25} \times F_0(S)$$

On trouve:

$$F_R(S) = 151,36 \cdot \frac{(S+0,156)(S+0,5)(S+1)(S+2,5)}{S(S+0,061)(S+5)(S+19,4)}$$

III-5-2-Cas où $F_g(S)$ est à déphasage non minimal:

Soit le système non corrigé dont la F.T est à déphasage non minimal:

systeme	$F_g(s) = -\frac{2,5(s-1)}{(s+1)(s+2,5)}$
F.T en B.F	$F(s) = \frac{-2,5(s-1)}{(s^2 + s + 5)}$
reponse indicelle	$y_u(t) = 0,5 - 1,3 e^{-0,5t} \cos(2,18t - 68,43^\circ)$
performances	$\xi = 0,22, \omega_n = 2,24 \text{ rad/s}, t_m = 1,2, t_r = 7,9s, D = 104\%$ $K_p = 0,5$

Supposons que veuille améliorer ces performances en réalisant les clauses techniques suivantes:

$$\xi = 0,7 ; \omega_n = 1,4 \text{ rad/s} ; K_p = 1 \text{ et } K_v = 0,9/s$$

1°/ Détermination de $F(S)$ à partir des clauses techniques:

En première approximation, on cherche $F(S)$ sous forme de second ordre:

$$W_n = 1,4 ; K_v = \frac{W_n}{2\xi}$$

$$W_n = 14 \text{ rad/s}; K_v = \frac{W_n}{2\xi} \implies W_n > 1,8\xi \text{ donc}$$

$$F_1(s) = \frac{W_n^2}{(s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2)}$$

Partons de $F_1(s)$, on voit que le pôle $s = +1$ apparaîtra dans la F.T du correcteur, d'où la nécessité de l'adjonction d'un zéro à $F_1(s)$ afin qu'il n'apparaisse pas dans la F.T du correcteur, d'où la fonction complémentaire suivante:

$$F_2(s) = \frac{s-1}{s+P_3}$$

La fonction globale $F(s)$ déduite est de la forme:

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{-W_n^2 \cdot P_3 (s-1)}{(s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2)(s+P_3)}$$

On détermine P_3 à partir de l'expression de K_v :

$$\frac{+1}{K_v} = \frac{2\xi}{W_n} + \frac{1}{P_3} \leq 1,1 \implies P_3 \geq 100$$

Pour que les racines de $F_o(s)$ soient réelles négatives, P_3 doit être ≥ 830 , si on prend $P_3 = 840$ la F.T en B.F du système corrigé est donc:

$$F(s) = \frac{-164640(s-1)}{(s^2 + 19,6s + 196)(s+840)}$$

Sa réponse indicielle serait, en négligeant le pôle P_3 ,

$$Y(t) = 1 - 20,93 e^{-9,9t} \cos(9,9t - 87,26^\circ)$$

Donnant les performances suivantes:

$$\xi = 0,7; W_n = 14 \text{ rad/s}; t_m = 0,3 \text{ s}; t_r = 0,56 \text{ s}; K_p = 1; D\% = 30; \text{ et}$$

$$K_v = 0,9/\text{s}$$

2° / Détermination de $F_o(s)$ à partir de $F(s)$:

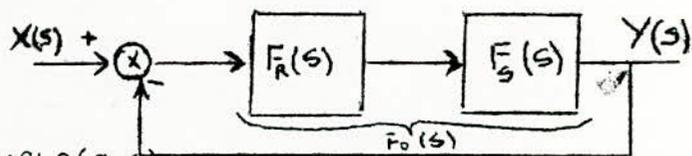
$$F_o(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{N(s) - P(s)}$$

$$P(s) = -(196)(840)(s-1)$$

$$Q(s) = (s^2 + 19,6 + 196)(s+840) + 840(s-1) \cdot 196$$

$$Q(\sigma) = \sigma^2 + 859,6\sigma + 1813009 = 0 \implies \alpha = -371,25 \text{ et } \beta = -488,35$$

$$\text{Donc: } F_o(s) = \frac{-164640(s-1)}{s(s+371,25)(s+488,35)}$$



REPONSE INDICIELLE DE LA FT EN B.F

ECHELLE :

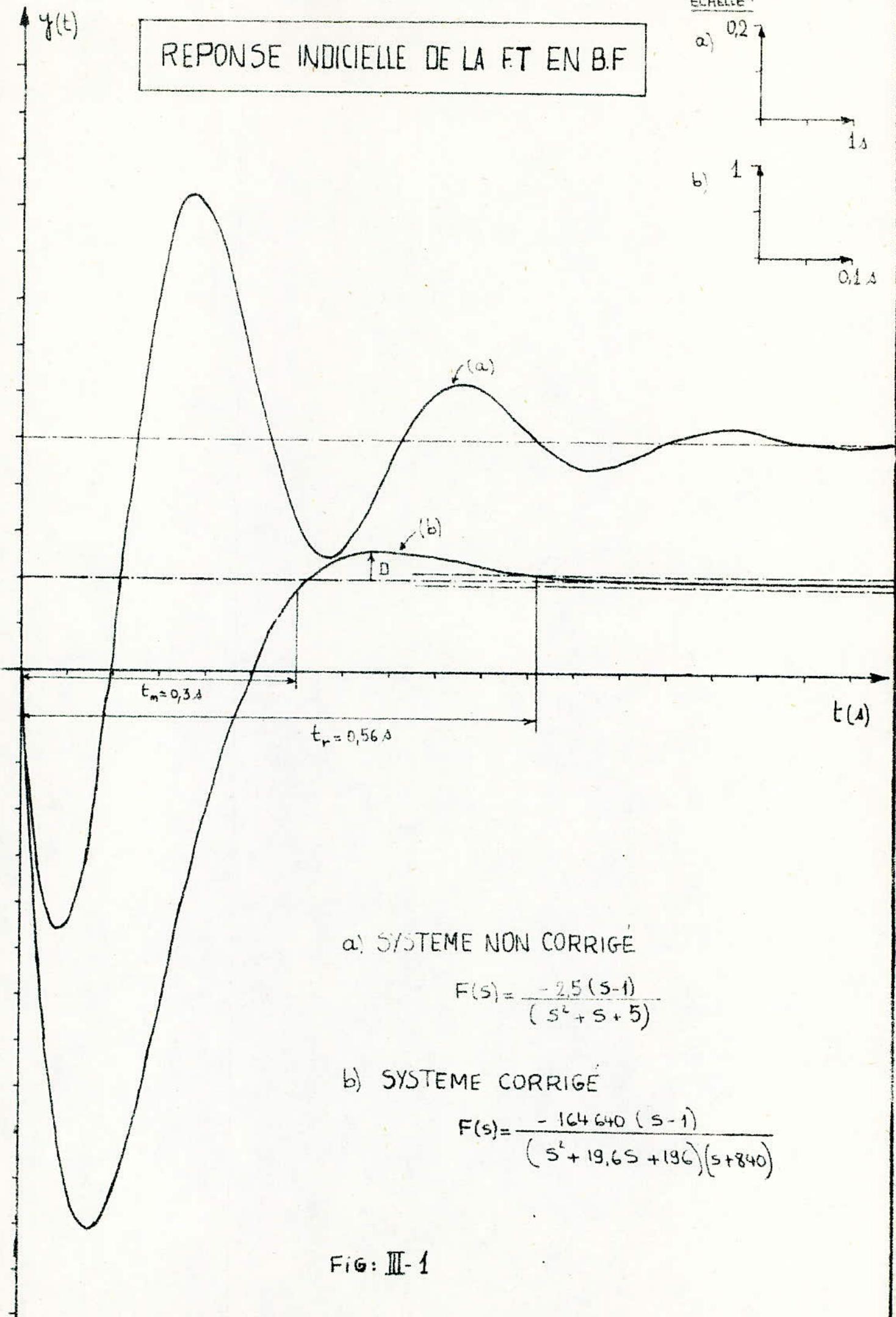
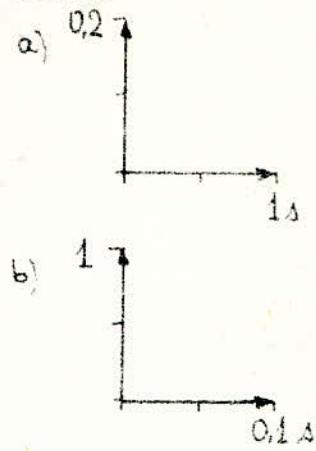


FIG: III-1

3^o) Determination du réseau correcteur:

$$F_o(s) = F_R(s) \cdot F_S(s) \qquad F_R(s) = F_o(s) / F_S(s)$$

D'où

$$F_R(s) = 65856 \cdot \frac{(s+1)(s+2,5)}{s(s+371,25)(s+488,35)}$$

+++++0+++++

III-6 CONCLUSION

Du point de vue théorique on oppose quelquefois la méthode de Truxal-Guillemain aux méthodes classiques de compensation, qui partent des éléments imposés du système asservi et cherchent à les améliorer, comme une méthode de synthèse qui part des performances à obtenir et oblige le système à s'y conformer. En fait, il y a une différence de présentation plus que de nature. La détermination d'un réseau correcteur, par la méthode de Truxal-Guillemain comme par les méthodes classiques comporte des essais et des retouches. Ce fait est, du reste, général en techniques, où l'application pratique des méthodes, mêmes les plus systématiques, comportent pratiquement, un processus d'approximation successives. Du point de vue pratiques, les avantages et limitations de cette méthode sont ceux des techniques qui utilisent les configurations dans la carte des pôles et des zéros d'une part, grâce aux relations très directes qui existent entre les réponses transitoires et la disposition des pôles et des zéros la méthode s'adapte de façon extrêmement souple aux clauses techniques exprimées en langage de réponse temporelle du système, mais d'autre part, elle cesse d'être applicable lorsque certains éléments sont caractérisés par des essais expérimentaux.

+++++00+++++

SYNTHESE DES SYSTEMES ASSERVIS PAR LA METHODE DE V.W.WEBER

VI-1-introduction:

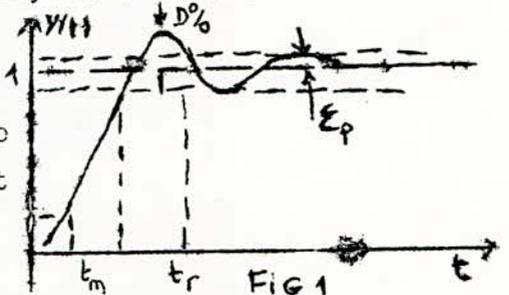
Comme toute méthode de compensation, elle vise l'amélioration des caractéristiques des systèmes asservis linéaires conformément à un cahier des charges (ex: $D\% = 10$; $t_r = 0,7$; t_r : très faible) Fig 1

Contrairement aux méthodes de compensation classiques celle-ci présente l'avantage d'être systématique.

Comme la méthode de Truxal-Guillemain, elle consiste en la recherche d'un correcteur qui puisse satisfaire les clauses techniques imposées donc une configuration préalablement choisie puisqu'elle travaille à l'aide des pôles et des zéros dans le plan de Laplace.

La méthode comprend les étapes suivantes:

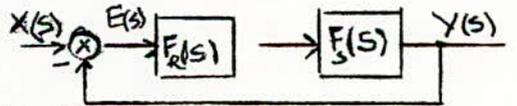
- Partant de la nature de $F_S(S)$ (avec ou sans intégration) on en déduit la forme de la F.T du correcteur dont on doit calculer les paramètres.
- A partir des clauses techniques et de $F_S(S)$, on en déduit la configuration qui y satisfasse, donc la F.T en B.F.
- Enfin, on calcule systématiquement les paramètres du correcteur.



IV-2 Détermination des paramètres du réseau correcteur:

On considère un système dont la F.T est $F_S(S)$, supposons qu'on veut améliorer ses performances, c.a.d. qu'on exige certaines clauses techniques (t_r ; $D\%$; etc...)

la F.T en B.F du système corrigé est:



$$F(S) = \frac{F_0(S)}{1 + F_0(S)} \quad \text{avec } F_0(S) = F_r(S) \cdot F_S(S)$$

Où

$$F_S(S) = \frac{\sum_{i=0}^p z_i S^i}{\sum_{i=0}^q n_i S^i} = \frac{z_0 + z_1 S + \dots + z_p S^p}{n_0 + n_1 S + \dots + n_q S^q} = \frac{Z(S)}{N(S)} \quad (1)$$

$$F_r(S) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j S^j}{\sum_{j=0}^n a_j S^j} = \frac{b_0 + b_1 S + \dots + b_m S^m}{a_0 + a_1 S + \dots + a_{n-1} S^{n-1} + S^n} = \frac{P(S)}{Q(S)} \quad (2)$$

$1 \leq n$ a_j, b_j réels positifs et $a_n = 1$

L'équation caractéristique est:

$$E(S) = 1 + F_r(S) \cdot F_s(S) \quad (3)$$

Dont il faut déterminer les racines, $E(S) = 0$ qu'on écrit encore

$$E(S) = 1 + \frac{Z(S)}{N(S)} \cdot \frac{P(S)}{Q(S)} = 0 \implies N(S) \cdot Q(S) + Z(S) \cdot P(S) = 0$$

A partir des équations (1) et (2) on obtient:

$$\sum_{i=0}^p z_i S^i \cdot \sum_{j=0}^q b_j S^j + \sum_{i=0}^q n_i S^i \cdot \sum_{j=0}^m a_j S^j = 0 \quad (4)$$

Qu'on peut ramener à la forme suivante:

$$\sum_{r=0}^e L_r(a_j, b_j) S^r = 0 \quad (5)$$

$e = n + q$

Le terme du plus haut degré de (4) est:

$$n_q S^{q+m} = L_0 S^e$$

En développant l'équation (4) et en posant:

$$\begin{aligned} z_k &; n_k = 0 \text{ si } k < 0 \\ z_i &= 0 \text{ si } i > p \\ n_j &= 0 \text{ si } j > q \end{aligned}$$

On obtient:

$$\sum_{r=0}^e S^r (b_0 z_r + b_1 z_{r-1} + \dots + b_1 z_{r-1} + a_0 n_r + \dots + a_{n-1} n_{r-(n-1)} + n_{r-n}) = 0 \quad (6)$$

Donc : $L_r = b_0 z_r + \dots + b_1 z_{r-1} + a_0 n_r + \dots + a_{n-1} n_{r-(n-1)} + n_{r-n} \quad (7)$

Finalement en divisant le polynôme (6) par L_0 :

$$E(S) = S^e + \frac{L_{e-1}}{L_0} S^{e-1} + \dots + \frac{L_0}{L_0} = 0 \quad (8)$$

Il faut maintenant choisir une configuration dans le plan de Laplace conforme à la F.T en B.F les performances exigées; donc; ayant

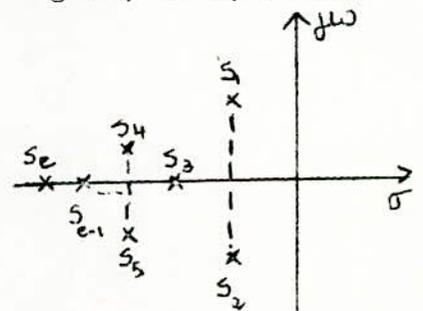
e poles: $s_1, s_2, s_3, \dots, s_e$

Ainsi son dénominateur s'écrit :

$$\prod_{i=1}^e (S - s_i) = D(S) \quad (9)$$

Il faut pour cela:

$$D(S) \equiv E(S)$$



Afin que le correcteur réalise cette configuration pour la F.T en B.F , on identifie D(S) et E(S); on aboutit au système d'équations linéaires dites de synthèse:

$$\begin{aligned}
 -\frac{L_{c-1}}{L_c} &= \sum_{i=1}^e s_i = S_{c-1} \\
 \frac{L_{c-2}}{L_c} &= \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^e s_{i_1} s_{i_2} = S_{c-2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 (-1)^r \frac{L_r}{L_c} &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{e-r}=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{e-r}}}^e s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} \dots s_{i_{e-r}} = S_r \\
 &\dots\dots\dots \\
 (-1)^c \frac{L_0}{L_c} &= \prod_{i=1}^e s_i = S_0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Ce système a :

$$c = q + m \text{ équations linéaires}$$

et $l + m + 1$ inconnues : $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_l$

A fin de le résoudre, deux cas sont à distinguer:

IV-2-1 Cas où $F_s(S)$ possède une intégration:

$$n_0=0 \text{ et } F_s(S) = \frac{z_0 + z_1 S + \dots + z_p S^p}{n_1 S + n_2 S^2 + \dots + n_q S^q}$$

Avec $p = 0, 1, \dots, q-1$

$$c = q + m$$

Le système (10) est compatible si :

$$l + m + 1 = q + m \implies l = q - 1$$

Comme $l \leq m \implies l = 0, 1, \dots, m$

on choisit le cas limite $l = m = q - 1$

A partir de ces conditions le système (10) devient :

$$\begin{aligned}
 L_c &= b_0 z_0 + a_0 n_0 = (-1)^c n_q \quad s_i = S_0 (-1)^c n_q \\
 L_1 &= b_0 z_1 + b_1 z_0 + a_0 n_1 + a_1 n_0 = (-1)^{c-1} n_q \quad s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{c-1}} = (-1)^{c-1} n_q S_1 \\
 &\dots\dots\dots \\
 L_r &= b_0 z_r + b_1 z_{r-1} + \dots + b_{q-1} z_{r-(q-1)} + a_0 n_r + \dots + a_{q-1} n_{r-(q-1)} = \\
 &= (-1)^{c-r} n_q \quad s_{i_1} \dots s_{i_{c-r}} = (-1)^{c-r} n_q S_r \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

(11)

$$L_{q-1} = b_0 z_{q-1} + b_1 z_{q-2} + \dots + b_{q-1} z_0 + a_0 n_{q-1} + \dots + a_{q-2} n_1 + n_0 =$$

$$(-1)^{c-(q-1)} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{c-(q-1)}} = (-1)^{n_q} s_{q-1}^{e-(q-1)}$$

$$L_q = b_1 z_{q-1} + \dots + b_{q-1} z_1 + a_0 n_q + \dots + a_{q-2} n_2 + n_1 = (-1)^{e-q} n_q s_q$$

.....

$$L_{c-2} = z_{q-1} b_{q-1} + n_q a_{q-2} + n_{q-1} = (-1) s_{2q-2}$$

Qu'on peut mettre sous forme matricielle : voir page suivante

IV-2-2 Cas où $F_s(S)$ ne possède pas d'intégration:

et $n_0 \neq 0$

$$F_s(S) = \frac{z_0 + z_1 S + \dots + z_p S^p}{n_0 + n_1 S + \dots + n_q S^q}$$

$$F_r(S) = \frac{b_0 + b_1 S + \dots + b_l S^l}{a_0 + a_1 S + \dots + a_{m-1} S^{m-1} + S^m}$$

On sait que ; quand $F_s(S)$ possède une intégration, l'erreur de position est nulle; (cas précédent). maintenant comme $F_s(S)$ ne possède pas d'intégration l'erreur de position dépend de la nature de $F_r(S)$; c'est à dire si le correcteur possède une intégration l'erreur de position est nulle, sinon elle existe ; (donc si on veut une erreur de position nulle, alors on cherchera un correcteur à intégration)

Partons de la F.T en B.F recherchée:

$$F(S) = \frac{K}{\prod_{i=1}^e (1 + S/s_i)}$$

L'erreur de position pour une entrée échelon unitaire

$$\Sigma_p = 1 - F(0) = 1 - K$$

La F.T en B.F à partir des expressions de $F_o(S) = F_s(S)$ est:

$$F(S) = \frac{F_o(S)}{1 + F_o(S)} = \frac{K}{\prod_{i=1}^e (1 + S/s_i)}$$

L'erreur de position en fonction de K ou a_0 , b_0 est:

$$\Sigma_p = 1 - F(0) = 1 - K = \frac{1}{1 + F_o(0)} = \frac{1}{1 + (z_0/n_0) \cdot (b_0/a_0)}$$

d'où on tire

$$b_0/a_0 = (n_0/z_0) \cdot \frac{K}{1-K} = (n_0/z_0) \cdot \frac{1 - \Sigma_p}{\Sigma_p}$$

On pose

$$C_r = (z_0/n_0) \cdot \frac{\Sigma_p}{1 - \Sigma_p} = (a_0/b_0) \quad (13)$$

On remarque aussi que $C_r = 1/F_r(0)$

Partant de $F(S)$ répondant aux clauses techniques, on s'impose une erreur de position Σ_p , déduisant ainsi C_r , d'où une relation entre a_0 et b_0

$$a_0 = C_r b_0 \quad (14)$$

L'expression de la F.T du correcteur devient:

$$F_r(S) = \frac{b_0 + b_1 S + \dots + b_l S^l}{C_r b_0 + a_1 S + \dots + a_{n-1} S^{n-1} + S^n} \quad (15)$$

EN outre la première équation du système (11) nous permet de calculer

$$b_0: \quad b_0 = \frac{n_q S_0}{z_0 + C_r n_0} \quad (16)$$

Il resterait (e-1) équations dans le système (11)

A partir de (15) on voit qu'on a: $l+n-1$ inconnues: $a_1, \dots, a_{n-1}; b_1, \dots, b_l$

Pour que le système soit compatible il faut que:

$$l+n-1 = e-1 = q+n-1 \implies l=q$$

$$\text{comme } l \leq n \implies n=l=q$$

LE système (11) devient:

$$z_0 b_1 + n_0 a_1 = -n_q S_1 - b_0 (z_1 + C_r n_1)$$

$$z_1 b_1 + z_0 b_2 + a_1 n_1 + a_2 n_0 = n_q S_2 - b_0 (z_2 + C_r n_2)$$

.....

$$z_{q-1} b_1 + z_{q-2} b_2 + \dots + z_1 b_{q-1} + z_0 b_q + n_{q-1} a_1 + n_{q-2} a_2 + \dots + n_1 a_{q-1} =$$

$$= n_q (-1)^q S_q - b_0 (C_r n_q) - n_0$$

$$z_{q-1} b_2 + \dots + z_1 b_q + n_q a_1 + \dots + n_2 a_{q-1} = n_q (-1)^{q-1} S_{q+1} - n_1$$

.....

$$z_{q-1} b_q + n_q a_{q-1} = n_q (-1)^{2q-1} S_{2q-1} - n_{q-1}$$

$$\text{avec } a_0 = C_r \cdot b_0 \quad \text{et } b_0 = \frac{n_q S_0}{z_0 + C_r n_0}$$

Système qu'on peut écrire sous forme matricielle

(12)

Si parmi les clauses techniques exigées, on veut que l'erreur de position soit nulle ($K_p=1$) on a à partir de l'équation (13)

$$C_r = 0 \implies a_0 = 0, b_0 = n_q \cdot (s_0/z_0)$$

La fonction de transfert du correcteur possède une intégration. Si au contraire, les clauses techniques nous contraignent à avoir une erreur de position, on cherchera à minimiser cette erreur; soit ξ_{pmin} d'où:

$$C_r = (z_0/n_0) \cdot \frac{\xi_{pmin}}{1 - \xi_{pmin}} \implies \begin{matrix} a_0 \neq 0 \\ b_0 \neq 0 \end{matrix}$$

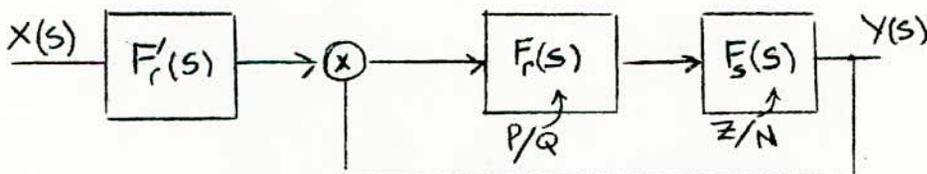
Le correcteur calculé sera donc sans intégration.

IV-3 Compensation des zéros:

La méthode consiste à travailler avec les poles seulement pour pouvoir utiliser les abaques disponibles des réponses indicielles de la F.T en B.F de la forme :

$$F(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^e (s + s_i)}$$

Pour $K_p = 1$ ($\xi_p = 0$) Voir abaques; pour cela on utilise une technique de compensation supplémentaire, en insérant un réseau correcteur à l'entrée suivant la figure:



IV-4 Fonction de transfert en boucle fermée pour divers dispositions des poles:

IV-4-1 Première configuration paramétrée choisie pour $f(s)$:

ON considère la configuration de la figure (4-1) dont la F.T en B.F est de la forme:

$$F(s) = \frac{K}{(1 + s/D)^e}$$

LES expressions de S_r sont:

$$S_r = (-1)^{e-r} C_{e-r} \cdot D^{e-r}$$

$$r = 0, 1, \dots, e-1$$

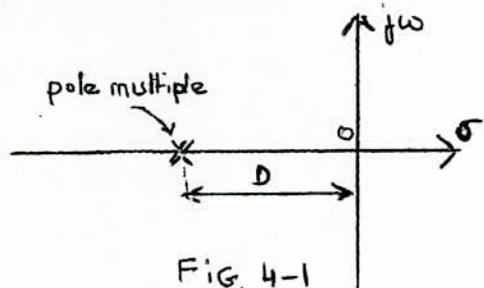


FIG. 4-1

Partant de la F.T du système $F_s(s)$ et des clauses techniques imposées et à l'aide des réponses indicielles paramétrées de $F(s)$, pour $K = 1$

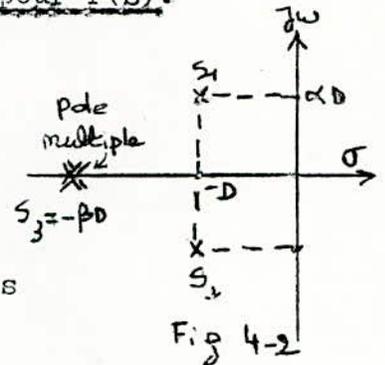
et diverses valeurs de e (voir abaque I), on en déduit le paramètre D ; et le calcul systématique des paramètres du correcteur.

IV-4-2 Deuxième configuration paramétrée choisie pour $F(S)$:

La configuration est celle de la figure (4-2)

La F.T en B.F correspondante est:

$$F(S) = \frac{K}{(S - s_1)(S - s_2)(S - s_3)^{c-2}}$$



Le choix de α , β et D dépend des clauses techniques exigées. On sait en outre que l'influence

du pôle s_3 sur la réponse indicielle

est négligeable si le coefficient d'éloignement

$$n = \frac{s_3}{\omega} = \beta \gg 5 \text{ le système se comportera}$$

alors comme un système du second ordre.

α : caractérise la stabilité relative et D la stabilité absolue (rapidité du système).

On a calculer les valeurs de S_r pour différentes valeurs de α , qu'on a groupé dans les tableaux I ; II ; III ; IV ; V.

→ → → → → ∞ ∞ ∞ ∞ → → → → →

Tableau : I

 $\alpha = 0,6$ et $\beta = 5$

ORDRE	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
2	$1,36D^2$	$2D$	1								
3	$6,8D^3$	$11,36D^2$	$7D$	1							
4	$34D^4$	$63,6D^3$	$46,36D^2$	$12D$	1						
5	$170D^5$	$352D^4$	$295,4D^3$	$106,36D^2$	$17D$	1					
6	$850D^6$	$1930D^5$	$1829D^4$	$827,2D^3$	$191,36D^2$	$22D$	1				
7	$4250D^7$	$10500D^6$	$11075D^5$	$5965D^4$	$1784D^3$	$301,36D^2$	$27D$	1			
8	$21250D^8$	$56750D^7$	$65875D^6$	$40900D^5$	$14885D^4$	$3290,8D^3$	$436,36D^2$	$32D$	1		
9	$106250D^9$	$305000D^8$	$386125D^7$	$270375D^6$	$115325D^5$	$31339D^4$	$5472,6D^3$	$596,36D^2$	$37D$	1	
10	$531250D^{10}$	$1631250D^9$	$2235625D^8$	$1738000D^7$	$847000D^6$	$272020D^5$	$602020D^4$	$8754,4D^3$	$781,36D^2$	$42D$	1

Tableau : II

 $\alpha = 1$ et $\beta = 5$

ORDRE	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
2.	$2D^2$	$2D$	1								
3	$10D^3$	$12D^2$	$7D$	1							
4	$50D^4$	$70D^3$	$47D^2$	$12D$	1						
5	$250D^5$	$400D^4$	$305D^3$	$107D^2$	$17D$	1					
6	$1250D^6$	$2250D^5$	$1925D^4$	$840D^3$	$192D^2$	$22D$	1				
7	$6250D^7$	$12000D^6$	$11875D^5$	$6125D^4$	$1800D^3$	$302D^2$	$27D$	1			
8	$31250D^8$	$68750D^7$	$71875D^6$	$42500D^5$	$15125D^4$	$3310D^3$	$437D^2$	$32D$	1		
9	$156250D^9$	$375000D^8$	$428125D^7$	$284375D^6$	$118125D^5$	$31675D^4$	$5495D^3$	$597D^2$	$37D$	1	
10	$781250D^{10}$	$2031250D^9$	$2515625D^8$	$1850000D^7$	$875000D^6$	$276500D^5$	$59150D^4$	$8480D^3$	$782D^2$	$42D$	1

Tableau : III

 $\alpha = 2$ et $\beta = 5$

ORDRE	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
2	$5D^2$	$2D$	1								
3	$25D^3$	$15D^2$	$7D$	1							
4	$125D^4$	$100D^3$	$50D^2$	$12D$	1						
5	$625D^5$	$625D^4$	$350D^3$	$110D^2$	$17D$	1					
6	$3125D^6$	$3750D^5$	$2375D^4$	$900D^3$	$195D^2$	$22D$	1				
7	$15625D^7$	$21875D^6$	$15625D^5$	$6875D^4$	$1875D^3$	$305D^2$	$27D$	1			
8	$78125D^8$	$125000D^7$	$100000D^6$	$50000D^5$	$16250D^4$	$3400D^3$	$440D^2$	$32D$	1		
9	$390625D^9$	$703125D^8$	$625000D^7$	$350000D^6$	$131250D^5$	$33250D^4$	$5600D^3$	$600D^2$	$37D$	1	
10	$1953125D^{10}$	$3406250D^9$	$3828125D^8$	$2375000D^7$	$1006250D^6$	$297500D^5$	$61250D^4$	$8600D^3$	$785D^2$	$42D$	1

Tableau : IV

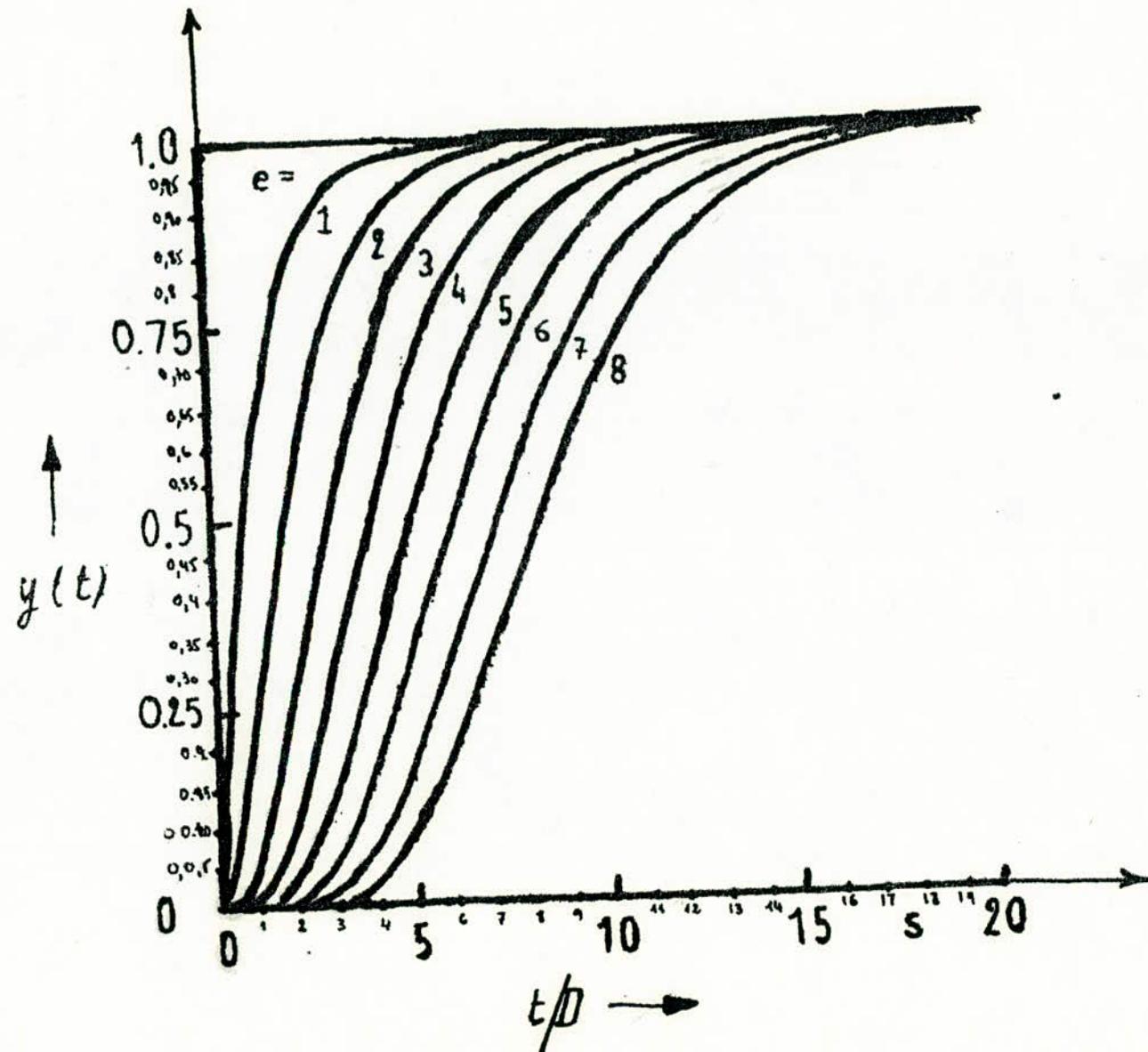
$\alpha = 1/3$ et $\beta = 5$

ORDRE	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
2	$10 D^2$	$2 D$	1								
3	$50 D^3$	$20 D^2$	$7 D$	1							
4	$250 D^4$	$150 D^3$	$55 D^2$	$12 D$	1						
5	$1250 D^5$	$1000 D^4$	$425 D^3$	$115 D^2$	$17 D$	1					
6	$6250 D^6$	$6250 D^5$	$3125 D^4$	$1000 D^3$	$200 D^2$	$22 D$	1				
7	$31250 D^7$	$37500 D^6$	$21875 D^5$	$8125 D^4$	$2000 D^3$	$310 D^2$	$27 D$	1			
8	$156250 D^8$	$218750 D^7$	$146875 D^6$	$62500 D^5$	$18125 D^4$	$3550 D^3$	$445 D^2$	$32 D$	1		
9	$781250 D^9$	$1250000 D^8$	$953125 D^7$	$459375 D^6$	$153125 D^5$	$35875 D^4$	$5775 D^3$	$605 D^2$	$37 D$	1	
10	$3906250 D^{10}$	$7031250 D^9$	$6015625 D^8$	$3250000 D^7$	$1225000 D^6$	$332500 D^5$	$64750 D^4$	$8800 D^3$	$790 D^2$	$42 D$	1

Tableau V

 $\alpha = 4$ et $\beta = 5$

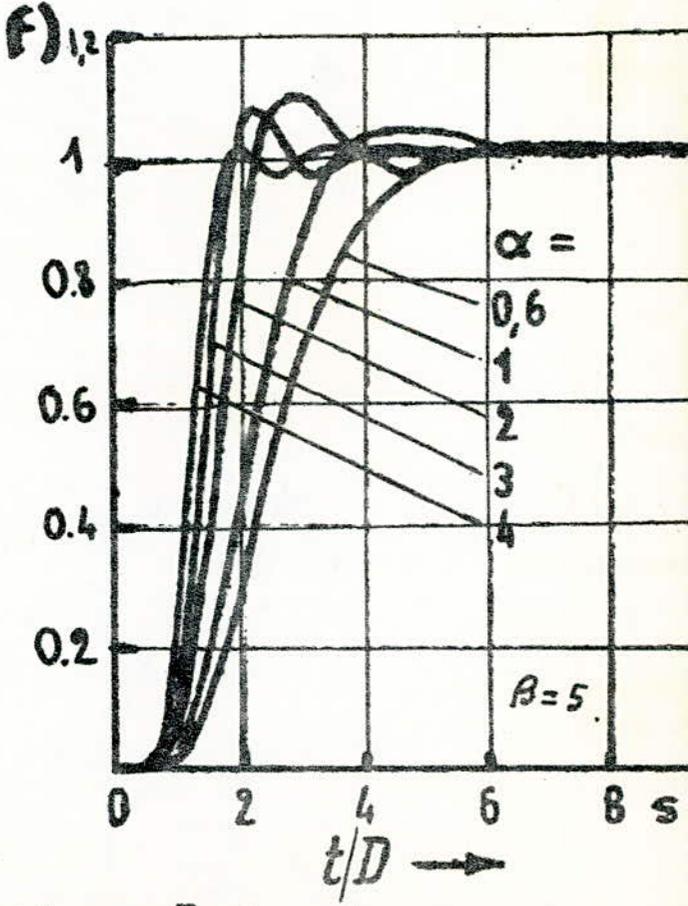
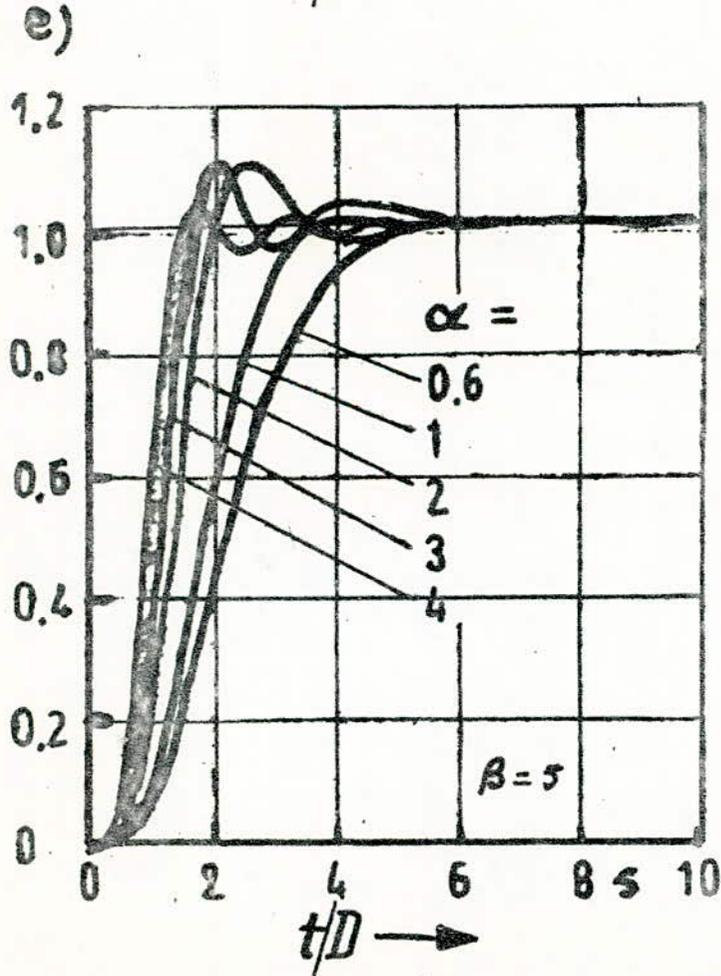
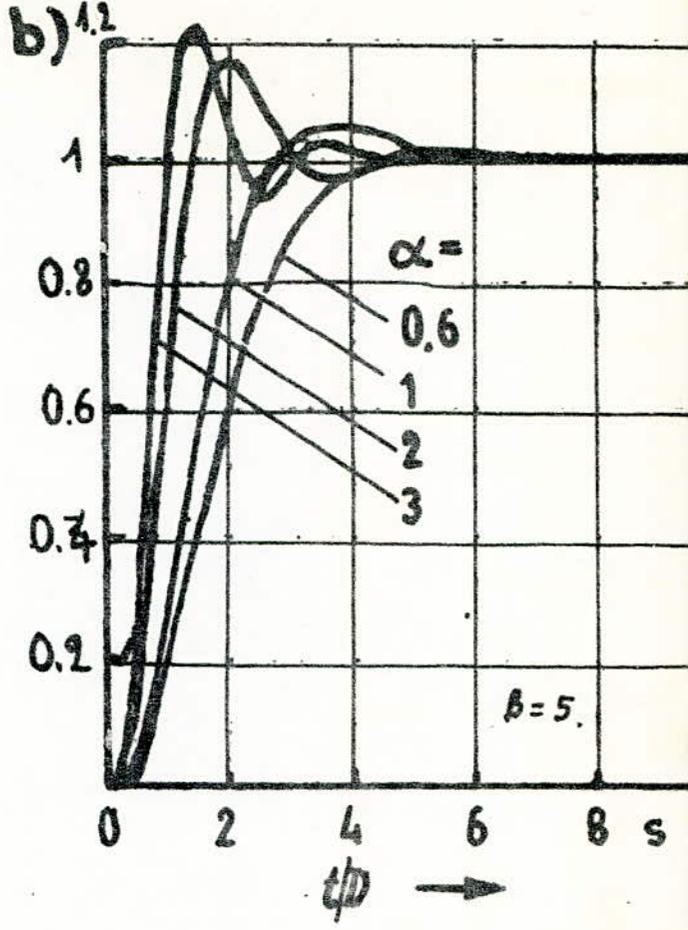
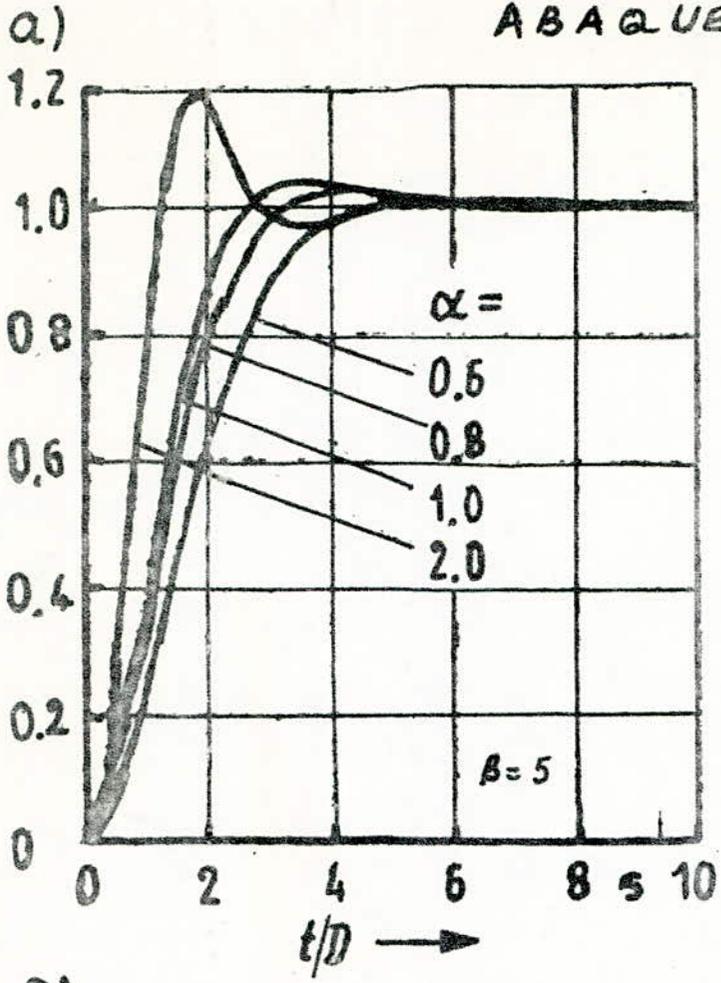
ORDRE	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
2	$17D^2$	$2D$	1								
3	$85D^3$	$27D^2$	$7D$	1							
4	$425D^4$	$220D^3$	$62D^2$	$12D$	1						
5	$2125D^5$	$1525D^4$	$530D^3$	$122D^2$	$17D$	1					
6	$10625D^6$	$9750D^5$	$3275D^4$	$1140D^3$	$207D^2$	$22D$	1				
7	$53125D^7$	$59375D^6$	$26125D^5$	$8975D^4$	$2175D^3$	$317D^2$	$27D$	1			
8	$265625D^8$	$350000D^7$	$190000D^6$	$71000D^5$	$19850D^4$	$3760D^3$	$452D^2$	$32D$	1		
9	$1328125D^9$	$2015625D^8$	$1300000D^7$	$545000D^6$	$170250D^5$	$38650D^4$	$6020D^3$	$612D^2$	$37D$	1	
10	$6640625D^{10}$	$11406265D^9$	$8515629D^8$	$4025000D^7$	$1396250D^6$	$363500D^5$	$68750D^4$	$9080D^3$	$797D^2$	$42D$	1



ABBAQUE I

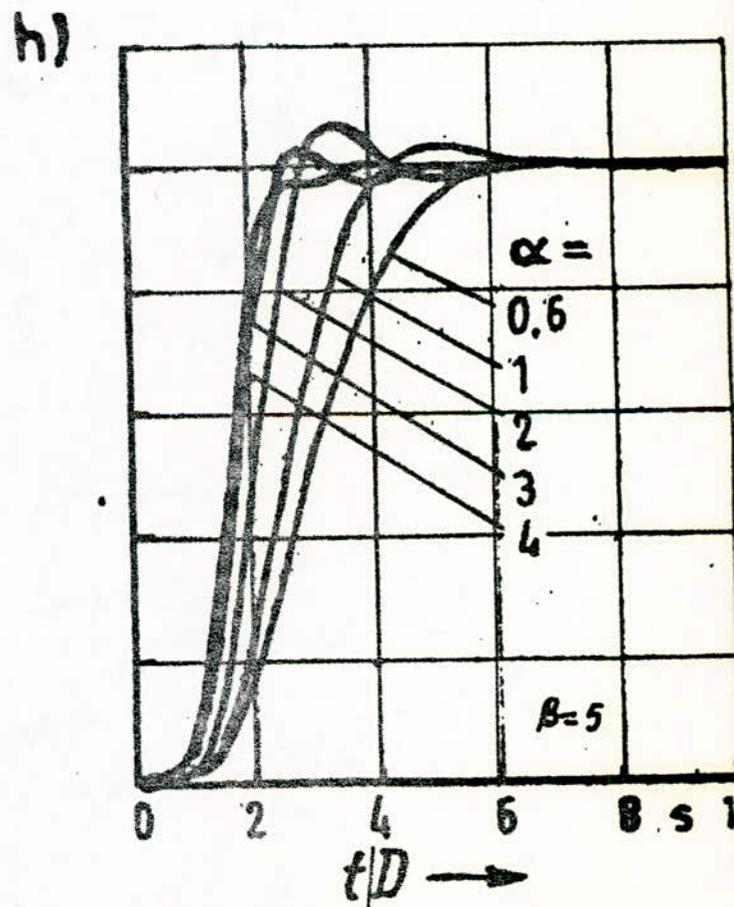
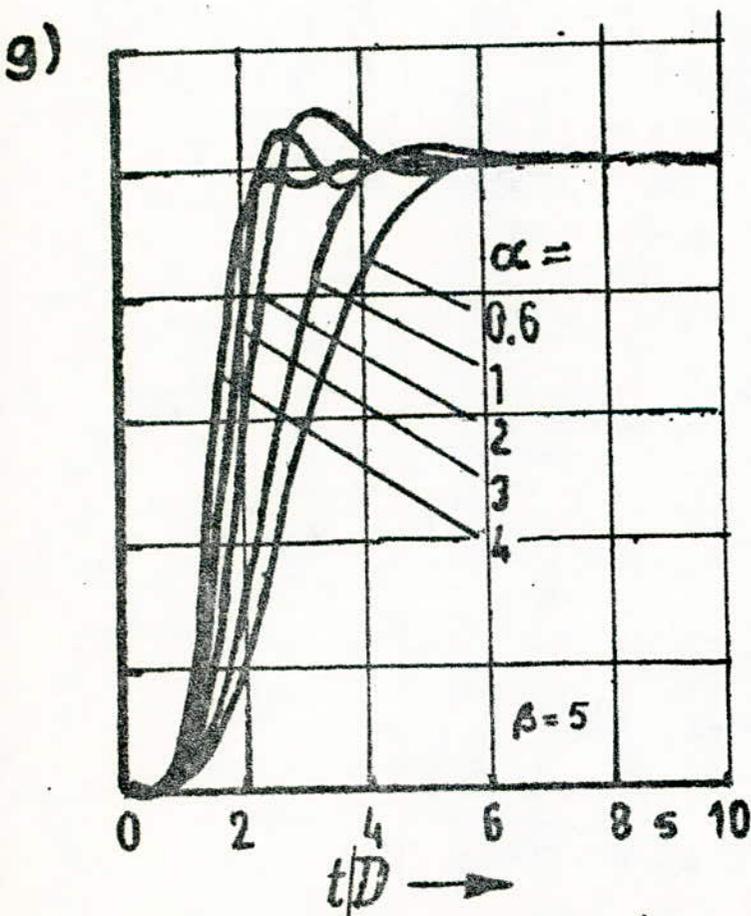
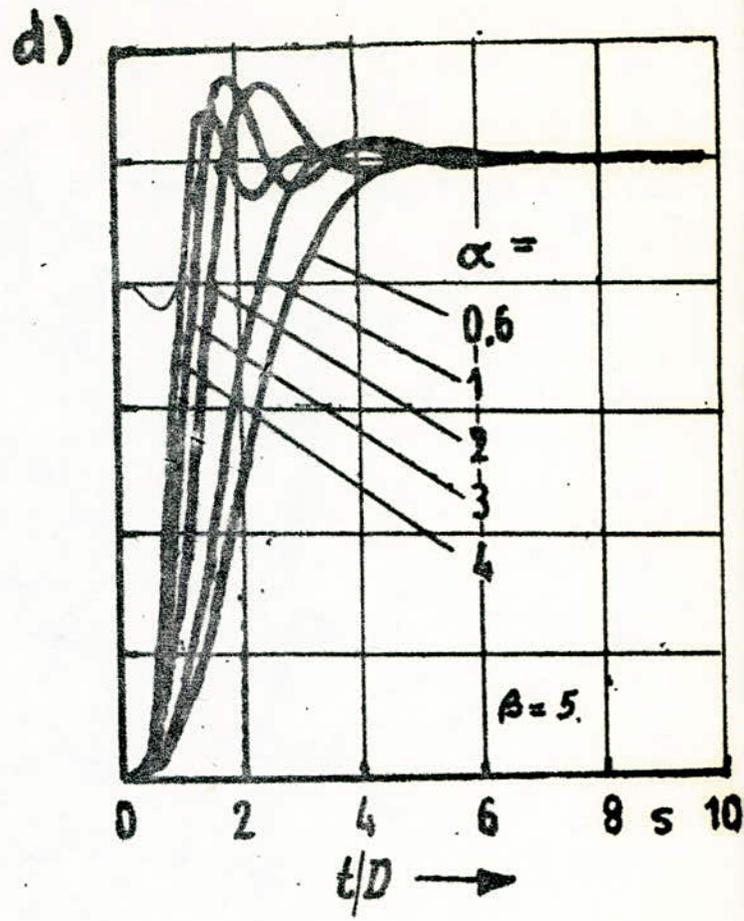
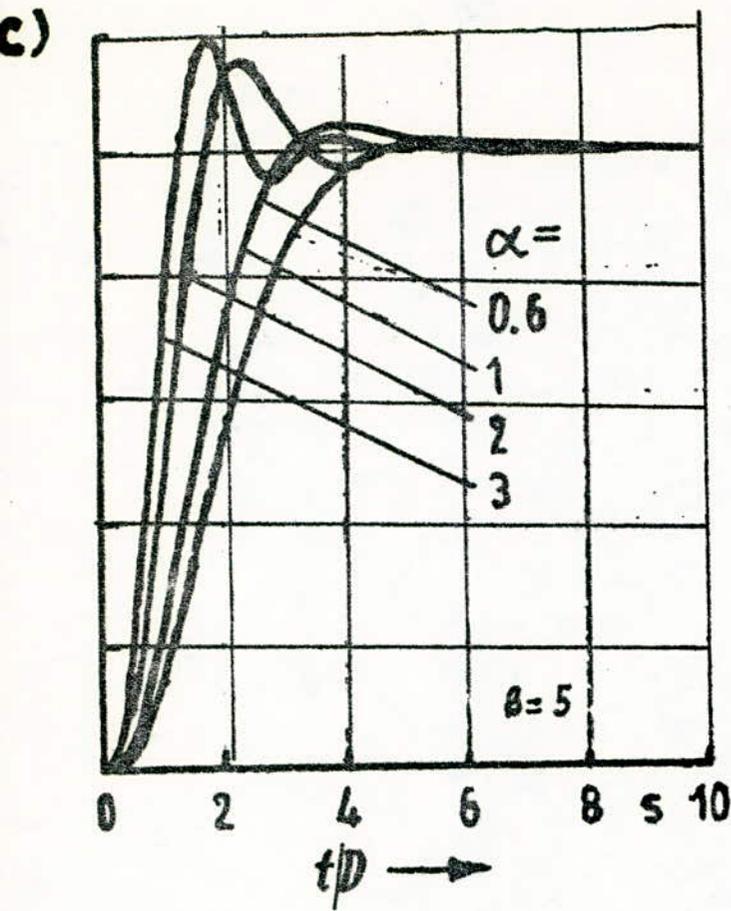
ABBAQUE I

ABOQUE II



a): $e = 1$; b): $e = 2$; e): $e = 5$; f): $e = 6$

ABOQUE II



c) $e = 3$; d) : $e = 4$; g) : $e = 7$; h) : $e = 8$

IV-5 Applications

IV- 5-1 $F_s(S)$ ne possède pas de pole d'intégration

$$F_s(S) = \frac{1,25}{(S + 19)(S + 0,5)(S + 2,5)} = \frac{1,25}{S^3 + 4S^2 + 4,25S + 1,25}$$

On voudrait améliorer les performances de ce système par exemple on exige pour sa F.T en B.F corrigée les clauses techniques suivantes:

$$K_p = 1 ; t_r = 1,25s ; \xi = 0,7 ; D\% \leq 10\%$$

$\alpha = 1$ déduite à partir de la deuxième configuration

$F_s(S)$ sans intégration, $K_p = 1$ exige un correcteur avec intégration ($a_0 = 0$), donc

$$l = n = q = 3 \implies e = 2q = 6$$

$\alpha = 1$ et $e = 6$ nous définit le choix de la réponse indicielle à partir de l'abaque:

On veut $t_r = 1,5s \implies D = 0,46$ à partir de l'abaque. En outre $K_p = 1 \implies \implies C_r = 0$.

L'expression de la F.T du correcteur s'écrit:

$$F_r(S) = \frac{b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + b_3 S^3}{a_1 S + a_2 S^2 + S^3}$$

Celle de la F.T en B.F est:

$$F(S) = \frac{K}{(S^2 + 0,92S + 0,42)(S + 2,3)}$$

En déduit les valeurs de S_r à partir du tableau pour $\alpha = 1$ et $e = 6$

$$S_0 = +11,84 ; S_1 = 46,34 ; S_2 = 86,19 ; S_3 = 81,76 ; S_4 = 40,63$$

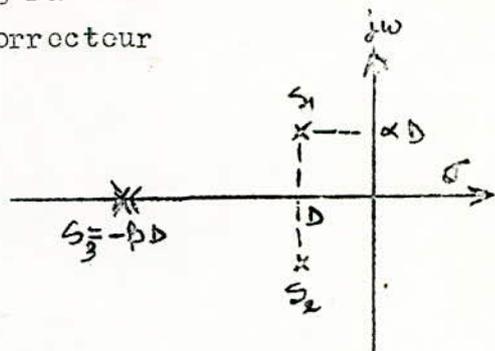
$$S_5 = 10,12$$

Calcul des paramètres du correcteur:

$$b_0 = \frac{S_0 \cdot n}{z_0} = 9,47$$

$$C_r = 0 ; a_0 = 0$$

D'où les matrices du système des équations de synthèse:



IV-5 ApplicationsIV- 5-1 $F_S(S)$ ne possède pas de pole d'intégration

$$F_S(S) = \frac{1,25}{(S + 1)(S + 0,5)(S + 2,5)} = \frac{1,25}{S^3 + 4S^2 + 4,25S + 1,25}$$

On voudrait améliorer les performances de ce système par exemple on exige pour sa F.T en B.F corrigée les clauses techniques suivantes:

$$K_p = 1 ; t_r = 1,25s ; \xi = 0,7 ; D\% \leq 10\%$$

-----0-----

$\alpha = 1$ déduite à partir de la deuxième configuration

$F_S(S)$ sans intégration, $K_p = 1$ exige un correcteur avec intégration ($a_0 = 0$), donc

$$l = n = q = 3 \implies e = 2q = 6$$

$\alpha = 1$ et $e = 6$ nous définit le choix de la réponse indicielle à partir de l'abaque:

On veut $t_r = 1,5s \implies D = 0,46$ à partir de l'abaque. En outre $K_p = 1 \implies \implies C_r = 0$.

L'expression de la F.T du correcteur s'écrit:

$$F_r(S) = \frac{b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + b_3 S^3}{a_1 S + a_2 S^2 + S^3}$$

Celle de la F.T en B.F est:

$$F(S) = \frac{K}{(S^2 + 0,92S + 0,42)(S + 2,3)}$$

En déduit les valeurs de S_r à partir du tableau pour $\alpha = 1$ et $e = 6$

$$S_0 = +11,84 ; S_1 = 46,34 ; S_2 = 86,19 ; S_3 = 81,76 ; S_4 = 40,63$$

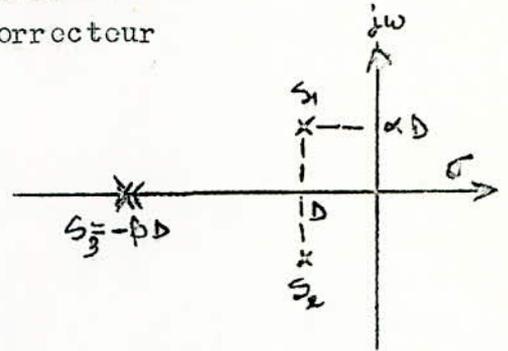
$$S_5 = 10,12$$

Calcul des paramètres du correcteur:

$$b_0 = \frac{S_0 \cdot n_q}{z_0} = 9,47$$

$$C_r = 0 ; a_0 = 0$$

D'où les matrices du système des équations de synthèse:



$$\begin{bmatrix} 1,25 & 0 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 & 4,25 & 1,25 \\ 0 & 0 & 1,25 & 4 & 4,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46,34 \\ 86,19 \\ 81,76 \\ 40,63 \\ 10,12 \end{bmatrix} - 9,47 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,25 \\ 4,25 \\ 4 \end{bmatrix}$$

On en déduit:

$$a_1 = 11,9$$

$$b_1 = 25,2$$

$$b_3 = 5,52$$

$$a_2 = 5,12$$

$$b_2 = 22,4$$

La F.T du correcteur s'écrit:

$$F_r(s) = \frac{9,47 + 25,2s + 22,4s^2 + 5,52s^3}{11,9s + 6,12s^2 + s^3}$$

Compensation des zéros :

On adjoint à la F.T en B.F un correcteur supplémentaire

de F.T :

$$F_r'(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{9,47 + 25,2s + 22,4s^2 + 5,52s^3}$$

La F.T en B.F GLOBALE devient:

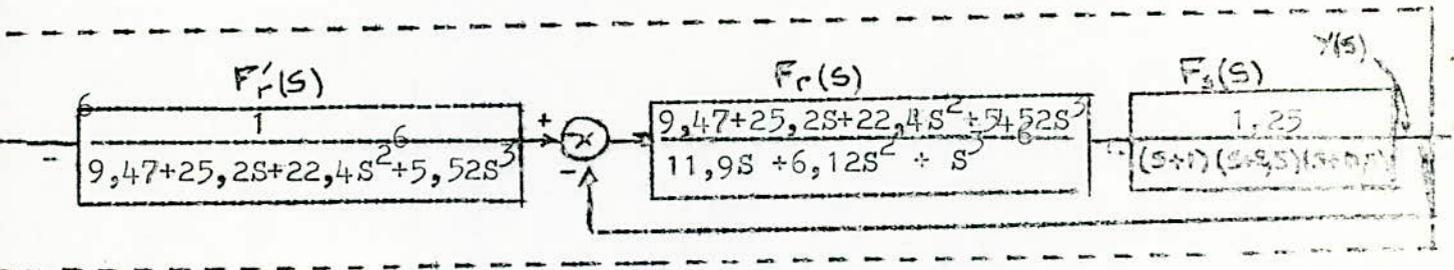
$$F(s) = \frac{1,25K'}{(s^2 + 0,92s + 0,42)(s + 2,3)^4}$$

POUR conserver l'erreur de position nulle, il faut que:

$$F(0) = 1 \implies K' = \frac{0,42 \times (2,3)^4}{1,25} = 9,4$$

D'OU la F.T globale :

$$F(s) = \frac{11,75}{(s^2 + 0,92s + 0,42)(s + 2,3)^4}$$



IV-5-2 Cas de la F.T à déphasage non minimal:

$$F(S) = -2,5 \frac{(S-1)}{(S-1)(S+2,5)} = \frac{-2,5S + 2,5}{S^2 + 3,5S + 2,5}$$

Supposons qu'on exige la première configuration, c'est à dire une fonction de transfert de la forme:

$$F(S) = \frac{K}{(1 + S/D)^e}$$

avec l'erreur de position nulle ($K_p=1$)

Calcul du correcteur:

$$F_r(S) = \frac{b_0 + b_1 S + b_2 S^2}{a_1 S + S^2}$$

Avec $q = 2$; $l = 1$; $m = p = q = 2 \implies e=4$

$$S_0 = D^4 ; S_1 = -4D^3 ; S_2 = 6D^2 ; S_3 = -4D ; S_4 = 1$$

$$\text{Comme } K_p = 1 \implies C_r = 0 \implies b_0 = 0,4D^4$$

D'où la matrice des équations de synthèse:

$$\begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 2,5 \\ -2,5 & 2,5 & 3,5 \\ 0 & 2,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^4 \\ 6D^2 \\ -4D \end{bmatrix} - b_0 \begin{bmatrix} -2,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 3,5 \end{bmatrix}$$

D'où l'on déduit les paramètres du correcteur en fonction de D :

$$a_1 = (1/5)(D^4 + 4D^3 - 4D + 1)$$

$$b_1 = 0,2D^4 + 0,8D^3 + 0,8D + 0,2$$

$$b_2 = (1/12,5)(-4D^3 - D^4 - 6D^2 + 24D - 18,5)$$

On a préféré calculer les paramètres du correcteur en fonction de D afin de voir dans quel domaine les paramètres seraient positifs ; les calculs montrent que b_2 reste négatif quel que soit D ON aboutit ainsi à un correcteur dont la F.T est de la forme

$$F_r(S) = \frac{b_0 + b_1 S - b_2' S^2}{-a_1 S + S^2}$$

D'où l'inconvénient de la méthode quand il s'agit des fonctions de transfert à déphasage non minimal.

Conclusion:

La méthode présente deux principaux avantages

- La détermination directe et systématique du correcteur.

- La disponibilité des abaques permettant de définir directement la réponse indicielle répondant aux clauses techniques exigées. Comme celle de Truxal-Guillemain, il semblait qu'on pouvait réaliser n'importe quelles performances, en fait si les clauses techniques sont trop dures, on aboutissait parfois à des correcteur instables ou physiquement irréalisables; d'ailleurs, on l'a vu dans le cas de la fonction de transfert à déphasage non minimal pour laquelle on a trouvé certains paramètres du correcteur négatifs; ce qui ne permet pas de simplifier les zéros de la fonction de transfert en boucle fermée globale; d'où l'inconvénient de la méthode.

ZF O N C L U S I O N

Les trois méthodes étudiées s'appuient sur le comportement des F.T dans le plan des S ; donc à partir des poles et des zéros.

La méthode du lieu d'Evans consiste à partir des performances et essaie de les améliorer par les correcteurs usuels (PI , PD , PID), elle constitue en fait une transition entre les méthodes classiques et les deux dernières méthodes. Par contre la méthode de Truxal-Guillemain ou celle de Weber, elle part des performances exigées, donc de la F.T en B.F désirée et déduit le correcteur convenable. La méthode de Truxal-Guillemain demande assez d'expériences dans le domaine des systèmes asservis. Celle de Weber est plutôt systématique ne pouvant s'appliquer aux systèmes à déphasage non minimal; par contre elle s'adapte bien aux systèmes asservis échantillonnés.

La méthode du lieu d'Evans peut servir pour le choix d'une des configurations exigées par celle de Truxal-Guillemain ou Weber.

Dans la pratique il conviendra de choisir parmi ces méthodes celle adaptée au problème que l'on se propose de résoudre.

A N N E X E

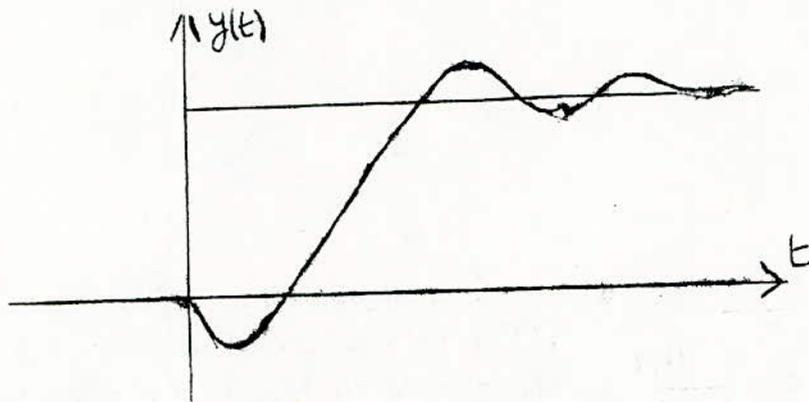
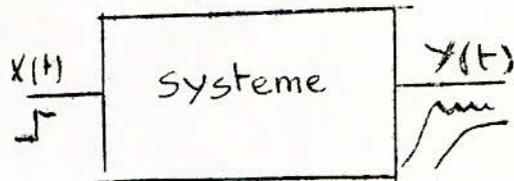
Quand un système est à déphasage est soumis à une entrée en échelon $u(t)$, son premier mouvement est de répondre dans le sens de la commande: la sortie est positive à l'instant 0^+ . Au contraire soit un système dont la F.T possède un zéro positif. On peut l'écrire:

$$F(S) = F_1(S)(1 - ST), \quad T > 0$$

Où $F_1(S)$ est une fonction à déphasage minimal. Dans ces conditions la réponse à un échelon sera:

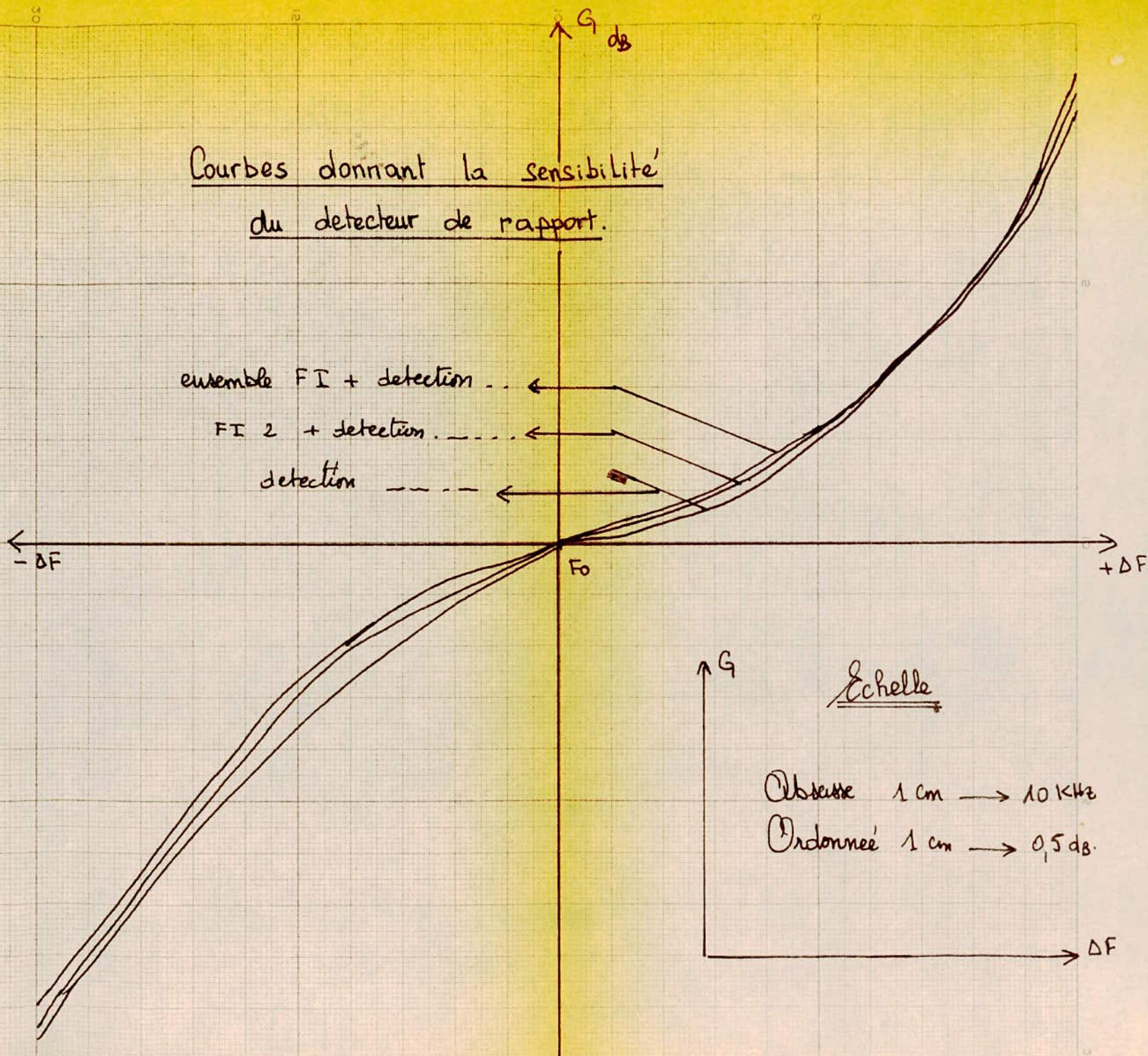
$$y(t) = y_1(t) - a(dy_1/dt).$$

Expression dans laquelle le terme $-a(dy_1/dt)$ joue le rôle prédominant aux premiers instants de la réponse. Il en résulte une réponse dont l'allure est représentée dans la figure suivante:



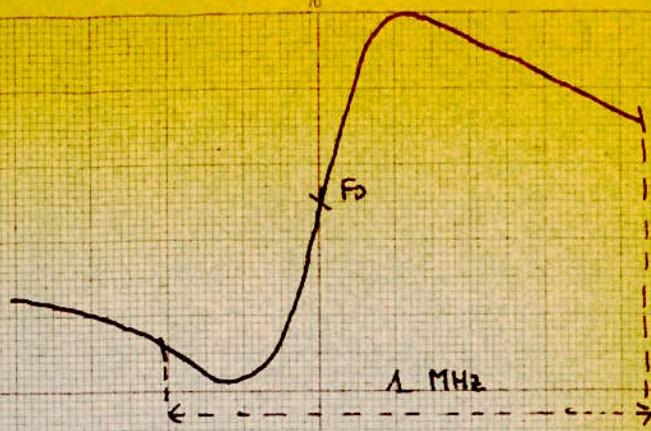


Courbes donnant la sensibilité
du detecteur de rapport.

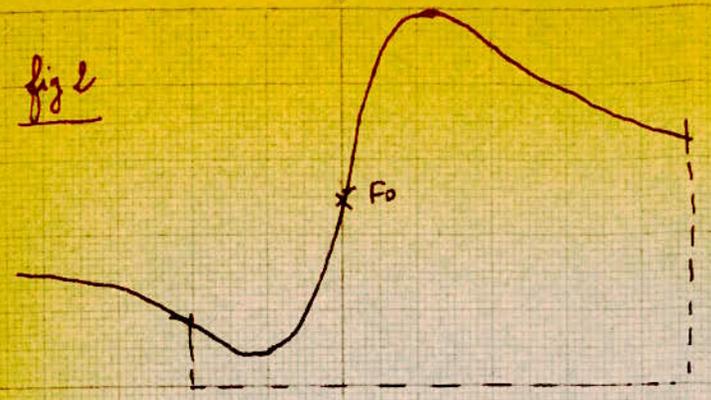


Echelle

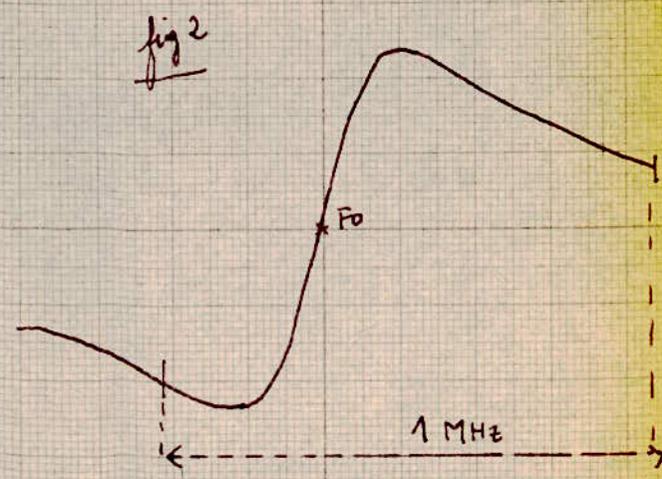
Abcisse 1 cm \rightarrow 10 KHz
Ordonnée 1 cm \rightarrow 0,5 dB.



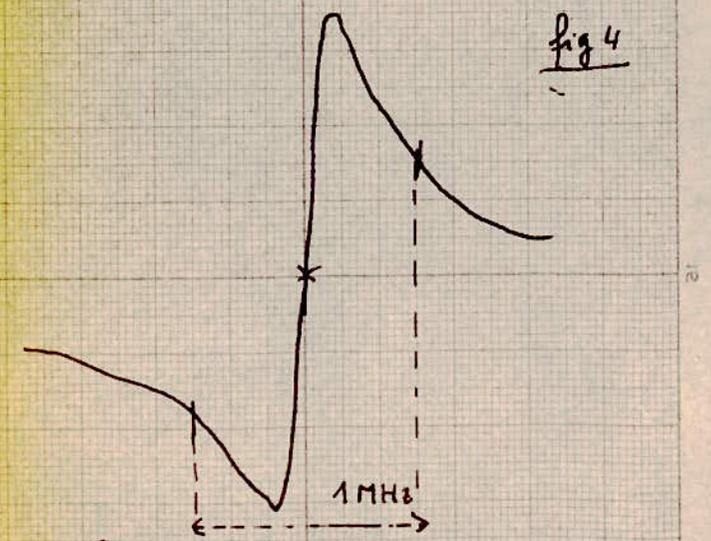
Courbe de réponse du D.D.R.
detection



Courbe de réponse du D.D.R.
F.I. 2 + detection



Courbe de réponse du D.D.R.
ensemble F.I + detection.



Courbe de réponse du
discriminateur à coïncidence

V_2 [mV]



Courbe donnant $V_2 = f(V_1)$ dans un détecteur de rapport.

V_2 [mV]

Echelle

Abcisse 1 cm \rightarrow 10 mV

Ordonnée 1 cm \rightarrow 0,1 V

V_1 [mV]

600

70

15

10

5

[mV]

V_1