

15/98

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

ECOLE NATIONAL POLYTECHNIQUE

Mémoire De Fin D'étude
Pour L'obtention D'un Diplôme D'ingénieur D'état
en
Génie Chimique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Thème :

**Modelisation De L'écoulement
Du Verre Dans Un Four A Bassin**

Proposée par :

Mme F. YAGOUB

Présenté par :

M^R K.HADJOUT

Promotion : 1998

DÉDICACE

A TOI MON PERE A TOI MA MERE ,JE DEDIE
CE TRAVAIL QUE VOUS ATTENDIEZ CI
LONGTEMPS ET A QUI JE DOIS TOUTE MA
RÉUSSITE .

AUSSI A MES FRERES ET SEURS AINSI QUE
MON BEAU FRERE, MA BELLE SEUR ET MES
NOEVEUX :AMINE, HOCINE, SARA ET KARIM

SANS OUBLIER MES AMIS :
CHIKHAOUI ALI, KASMI SAMIR, ZIAD
NOUREDDINE, BELAIFA SALIM,
BOUTAFANOUCAT RIAD, AMMARI MED MEKI

SOMMAIRE



Introduction générale.

Chapitre I : Généralités sur le verre.

Introduction

I.1-Définition du verre

I.2-Composition.

I.2.1- Les oxydes formateurs

- a- Le sable
- b- L'acide borique et le borax
- c- L'acide phosphorique

I.2.2- Les oxydes modificateurs

- a- Les fondants
- b- Les stabilisants.

I.2.3- Les oxydes secondaires.

I.3- Propriétés du verre.

I.3.1- Propriétés rhéologiques.

- a- Viscosité du verre.
- b- Tension superficielle.
- c- Masse volumique.

I.3.2- Propriétés mécaniques

- a- Propriété élastique.
- b- Dureté du verre.
- c- Résistance mécanique.

I-3.3- Propriétés thermiques.

- a- Chaleur massique.
- b- Conductivité thermique.
- c- Dilatation thermique.

I.3.4- Propriétés chimiques.

I.3.5- Propriétés optiques.

- a- Réfraction.
- b- Transparence.
 - Facteur de transmission
 - Facteur d'absorption
 - Facteur de réflexion.

Chapitre II : L'élaboration du verre.

Introduction

II.1- Préparation de la composition.

II.2- L'élaboration du verre.

- a- Dissolution de la matière première.
- b- Formation du verre.
- c- Affinage et homogénéisation.
- d- Le refroidissement.

II.3- Les fours.

Chapitre III : Présentation des équations fondamentales de la mécanique des fluides

Introduction.

III.1- Hypothèse de travail.

III.2- Equation fondamentales de la mécanique des fluides.

III.2.1- Principe de la conservation de masse.

III.2.2- Principe de conservation des quantités de mouvement.

III.2.3- Principe de conservation de l'énergie.

III.3- Etude des écoulements laminaires.

a- Equation du mouvement.

Chapitre IV : Application des équations fondamentales à un four à fusion.

Introduction.

IV.1- Description du domaine d'étude.

IV.2- Etablissement des équations thermodynamiques de l'écoulement.

IV.2.1- Equations gouvernantes.

IV.2.2- Conditions aux limites.

- a- Distribution de vitesse.
- b- Distribution des températures.

IV.2.3- Passage aux variables adimensionnelles.

- a- Distribution des vitesses.
- b- Distribution de température.

Conclusion.



Chapitre V : Présentation de la méthode des éléments finis.

Introduction .

V.1- Méthode des éléments finis.

V.2- Formulation des équations.

a- Distribution des vitesses.

b- Distribution des températures .

V.3- Formulation variationnelle du problème.

V.4- Discrétisation du domaine d'étude.

V.5- Approximation par éléments finis de \otimes

V.6- Minimisation de la fonctionnelle.

V.7- Construction du système d'équations algébriques.

V.8- Extension et assemblage des matrices et vecteurs élémentaires.

V.9- Introductions des conditions aux limites.

1- Condition de DIRICHELET.

2- Condition de NEVMANE.

V.10- Résolution du système d'équations issu de la discrétisation.

Conclusion.

Chapitre VI :

VI.1 – Introduction

VI.2 – Résultats et discussion

a – Profils de vitesse

b – Profils de température

* Conclusion Générale *

INTRODUCTION

Lorsqu'un verrier parle de fusion du verre c'est la survivance d'une vieille expression absolument incorrecte, ceci n'a rien de fusion au vrai sens du mot, elle consiste un ensemble complexe de phénomène de déshydratation, de dissociation, de réaction, de fusion, de volatilisation et de dissolution qui s'enchevêtre et finissent par transformer le mélange de matières premières en un liquide visqueux. Nous parlerons donc plus exactement de "formation de verre".

La détermination des profils de température et de vitesse dans four en général et au verre fondu revêt une très grande importance dans l'amélioration du contrôle et de la conduite du processus de ces profils permet de réaliser un bilan énergétique local lors des différentes opérations d'homogénéisation et de formage du verre.

Pour mesurer la température, le verrier a le plus souvent recours aux méthodes de mesure par thermocouples. Le verre fondu étant un matériau semi-transparent. Ces méthodes de mesure par contact sont inadaptées à cause de phénomène radiatif.

L'étude de cette étape de formation a été la préoccupation de la majorité des chercheurs afin de trouver des explications à l'évolution du mélange vitrifiable. Le but de notre travail c'est d'essayer d'établir un programme qui nous permet de calculer les profils des vitesses et de températures dans un four à fusion.

Dans les deux premier chapitre I, II on a cité les différentes propriétés et caractéristiques du verre, ainsi que les différentes étapes de l'élaboration du verre.

Le troisième et le quatrième chapitre sont consacrés à l'établissement des équations fondamentales de la mécanique des fluides et leurs applications à un four à fusion.

Le chapitre V est consacré à la description de la méthode des éléments finis.

GENERALITES SUR LE VERRE

L'art de fabrication de verre est vieux plus de 5 000 ans, mais l'utilisation du verre naturel pour la fabrication d'outils est plus ancienne. L'histoire du verre a fait savoir que c'est seulement le hasard qui, la première fois, a mis dans la main de l'homme un verre de formation spontanée. [1]

Le verre est une substance qui théoriquement, présente un nombre illimité de possibilités de compositions, c'est pourquoi ses propriétés sont également très diverses, ce qui lui a ouvert de nombreux domaines d'utilisation et lui en offre tous les jours de nouveaux. [2]

I.1 Définition du verre

On ne peut pas définir le verre avec précision, c'est ainsi que dans le langage courant ce terme sert à désigner un matériau fragile et transparent bien comme depuis l'antiquité, parmi ces différentes définitions celle de HASS [3] :

" On désigne par un verre un liquide surfondu figé ".

Il faut seulement préciser le domaine dans lequel cette définition doit se placer et l'on obtient :

" D'un point de vue physico-chimique, le verre est un liquide surfondu figé ".

I.2 Composition

La plupart des verres industriels sont à la base d'oxydes. On distingue trois groupes qui conditionnent par leurs genres et leurs qualités, les propriétés caractéristiques du verre .

I.2.1 LES OXYDES FORMATEURS

Ce sont les oxydes principaux qui forment le squelette du réseau dont les plus importants sont l'oxyde de silicium, l'oxyde de bore et l'oxyde de phosphore dont les matières sont présentées succinctement. [4]

a - le sable

On l'appelle aussi acide silicique. C'est le constituant le plus utilisé pour les verres industriels, avec une proportion telle que la teneur en fer admissible dépend de la qualité du verre à obtenir , la plus grande teneur de Fe_2O_3 est présente dans le verre creux ; elle est de 0,5 à 4 %.

La présence de SiO_2 diminue le coefficient de dilatation thermique et améliore de ce fait la tenue mécanique .

b- L'acide borique et le borax

Pour obtenir le B_2O_3 on utilise l'acide borique H_3BO_3 ou le borax ($\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$) ou encore sous forme de minéraux naturels tel que : la rosorite et la pendermite.

Le B_2O_3 facilite la fusion, augmente la résistance thermique, chimique et diminue la tension superficielle.

c - L'acide phosphorique

Il est sous forme de P_2O_5 et, on l'utilise pour les verres optiques et pour les verres spéciaux à forte transparence mais avec une faible résistance chimique .

1.2.2 LES OXYDES MODIFICATEURS

a - les fondants

Ils interviennent pour faciliter la fusion des vitrifiants. En s'insérant dans le réseau, ils le modifient, d'où leur nom de modificateurs. Ce sont les oxydes d'alcalins: Na_2O , K_2O , Li_2O .

Ces oxydes sont obtenus à partir de matières premières telles que les carbonates, nitrates ou sulfates des éléments correspondants.

La décomposition du carbonate de sodium dans le four de fusion donne l'oxyde de sodium qui se retrouve dans le verre final.

Le Na_2O abaisse la viscosité, augmente le coefficient de dilatation thermique et la conductivité électrique; par contre il diminue la résistance chimique .

b - Les oxydes stabilisants

Ces oxydes ont une action marquée sur les propriétés du verre telle que la résistance chimique, l'indice de réfraction Parmi eux nous pouvons citer : CaO , BaO , PbO , A titre d'exemple, la chaux est nécessaire pour solidifier le verre et améliorer sa résistance chimique.

1.2.3 LES OXYDES SECONDAIRES

En général, ils ne dépassent pas 1% en masse et sont ajoutés pour modifier la teinte et les conditions d'élaboration ou bien comme agent affinant.

1.3 PROPRIETES DU VERRE :

Les propriétés du verre sont de deux types principaux: celles qui sont liées à la structure et celles qui dépendent seulement de la composition. [5]

Parmi celles sensibles à la structure, nous pouvons citer en particulier les propriétés de transport (conductivité thermique, conductivité électrique).

Les propriétés non liées à la structure sont celles qui dépendent en premier lieu de la nature des atomes et des interactions avec les voisins. Dans cette catégorie, nous pouvons ranger la densité, la constante d'élasticité et la chaleur spécifique

I.3.1 Propriétés rhéologiques

La rhéologie est la science des phénomènes de déformation et d'écoulement interne des matières (solides, fluides) sous l'action des forces mécaniques.

a - viscosité du verre

La viscosité du verre est une propriété essentielle pour la fabrication du verre. Elle dépend étroitement de la nature et de la structure du verre fondu. Elle peut être définie comme étant le frottement interne des fluides. [6]
Selon l'équation de Newton on a :

$$F = \mu (dv / dx)$$

F : force agissant sur la couche.
 μ : coefficient de viscosité dynamique.
 dv/dx : gradient de déplacement

Les viscosités, généralement désignées par (μ), sont exprimées en pascal seconde (Pa .s). A la température ambiante, μ est très élevée (environ 10^{19} Pa.s) autrement dit on se trouve en présence d'un corps fragile. Lorsque la température augmente, μ diminue tout d'abord peu puis plus rapidement et enfin plus lentement pour atteindre aux températures habituelles de fusion (1400 à 1500°C) une valeur encore relativement élevée (10^3 Pa .s).

Suivant la Fig1, Fig2 représentant la variation de la viscosité en fonction de la température , on peut caractériser le comportement visqueux par des points fixes. Par mis ces points on se limite à trois seulement à : [7]

- Température de transformation T_g : elle correspond à la viscosité $\mu = 10^2$ dPa .s, pour laquelle beaucoup de propriétés des verre étudiés en fonction de la température présentent une modification .
- Température de littleton : correspond au domaine de la viscosité entre $\log \mu = 6$ et $\log \mu = 9$, dans lequel il est possible de travailler le verre. Dans ce domaine nous définissons la température de ramollissement pour une valeur de $\log \mu = 7.9$ Ó laquelle on peut couffer les tubes au chalumeau .
- Température d'enfoncement : ce point se situe pratiquement au voisinage du domaine de fusion correspondant a la valeur de la viscosité entre $\log \mu = 3$ et $\log \mu = 4$.

Elle varie sensiblement avec la composition. A titre d'exemple, l'introduction d'oxydes alcalins diminue brusquement la viscosité à cause du volume des ions (Li^+ , Na^+ , K^+ ,...) qui sont petits et ainsi plus mobiles .

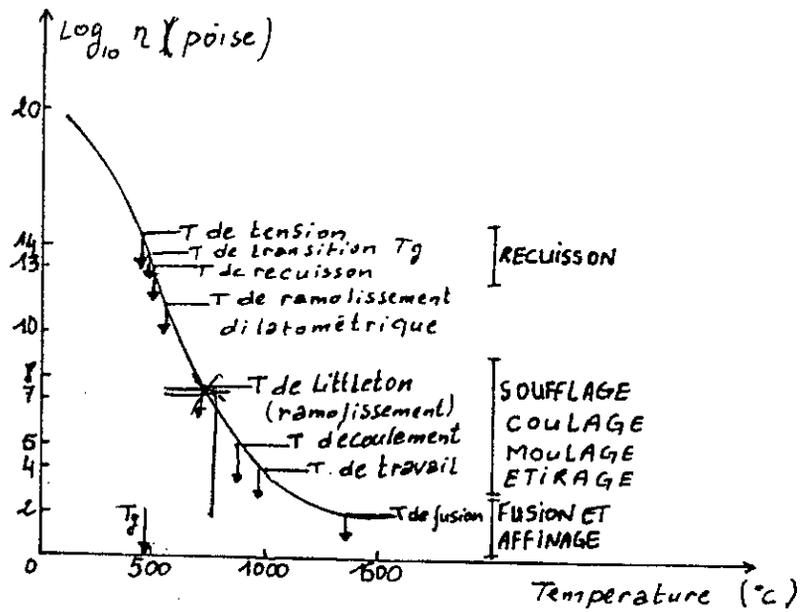


Figure.5. variation de la viscosité d'un verre silico. sodo-calcique industriel en fonction de la température
 On a indiqué la position des points fixes et les différents domaines des opérations techniques [5]

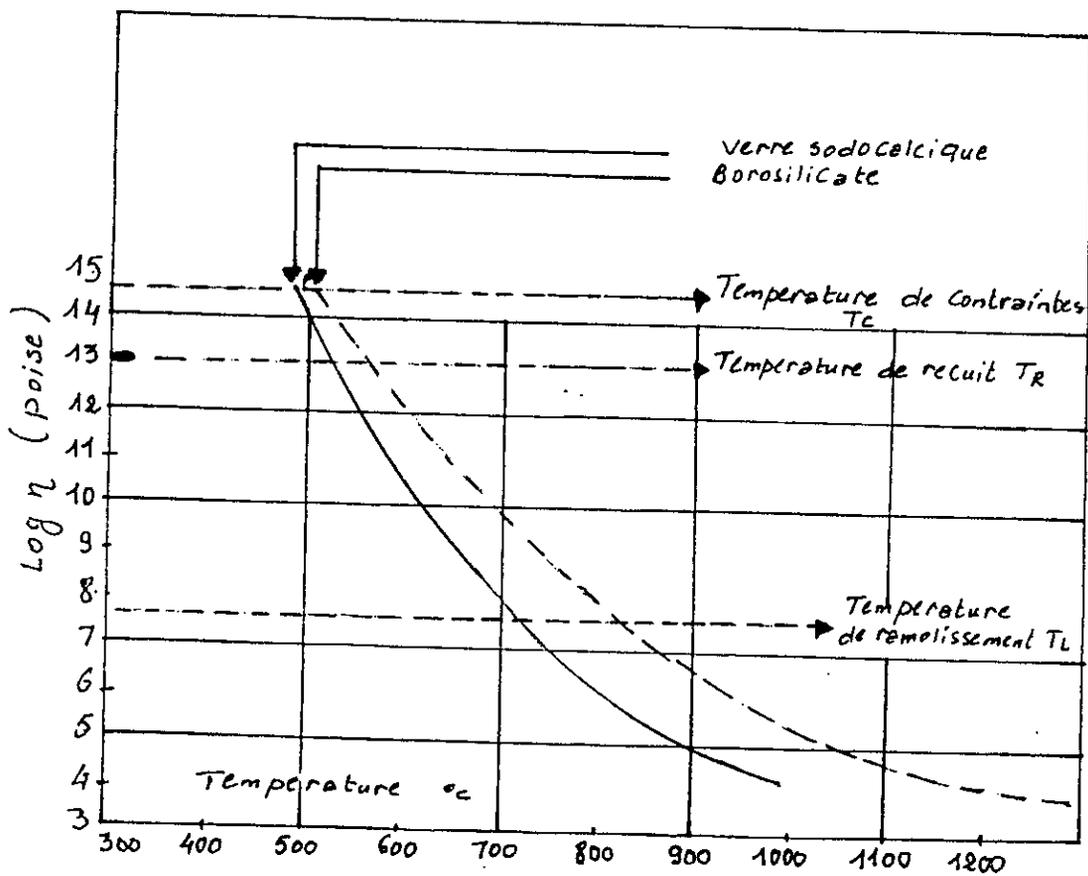


Figure .6. Courbes théoriques de la viscosité en fonction de la température [3]

b - tension superficielle

La tension superficielle des verres joue un rôle important lors de la fusion du verre et au cours des étapes de la fabrication. Elle caractérise l'action des forces internes sur les particules de la couche superficielle de la matière.

La tension superficielle (mesurée en N/m) sera d'autant plus faible que les forces d'attraction mutuelles seront plus faibles, et lorsque la température croît, les liaisons s'affaiblissent, ce qui agit dans le sens d'une diminution de la tension superficielle c'est à dire que " ds / dT " est négatif. En général, une augmentation de la température de 10K diminue la tension superficielle de $4 \text{ à } 10^{-2} \text{ N/m}$. [5]

c - masse volumique

Bien que la masse volumique du verre n'a pas une grande importance pratique pour les applications, elle est néanmoins nécessaire pour le calcul d'autres propriétés telle que l'indice de réfraction. Par définition, la masse volumique ρ est la masse par unité de volume (kg/m^3). [8]

I.3.2 Propriétés Mécaniques

Le verre est un corps qui n'admet pas de changement de forme notable provoqué par la pression, choc

a - Propriétés élastiques:

Elles caractérisent la capacité d'un solide à faire disparaître une déformation causé par action d'une force de déformation .
D'après la loi de Hooke :

$$P = E \cdot D$$

où

P = Contrainte appliquée
D = déformation
E = Module d'allongement

L'introduction des oxydes alcalin provoque un affaiblissement de la structure. A cause de la formation des oxygènes non portants, il se produit une diminution de module d'élasticité. Lorsque la température croît, les forces de liaison dans le verre deviennent plus faibles, ce qui entraîne une diminution des modules d'élasticité et de cisaillement. [5]

b - dureté du verre

La dureté du verre est la résistance de celui ci contre l'application d'une charge. Lorsque la température augmente les forces des liaisons et la viscosité diminuent. Il en résulte une diminution de la dureté H_n (N/m^2), où n désigne la valeur de la charge appliquée. [9]

c - résistance mécanique

La résistance mécanique est très importante pour l'utilisation du verre. Depuis longtemps, on essaie de mieux comprendre les raisons de sa fragilité afin de pouvoir produire des verres plus solides. [9]

I.3.3 Propriétés Thermiques

La fabrication du verre est un processus mettant en jeu des températures très élevées. Les propriétés thermiques jouent donc un rôle important .

a - chaleur massique

La chaleur massique est définie comme la dérivée partielle de l'enthalpie par rapport à la température à pression constante.

$$C_p = (\partial H / \partial T)_p$$

Elle est nulle au zéro absolu puis elle croît et atteint pour toutes les substances une valeur limite :

$$C_p = 3 n R \cong 26.n.J/mole.K$$

ou

R : constante des gaz parfaits
n : nombre d'atomes du composé.

Cette valeur limite est atteinte à des températures d'autant plus élevées que le composé contient des éléments plus lourds. Pour l'influence de la composition, elle varie avec la variation de la masse molaire: si celle-ci augmente, C_p augmente. [5]

b - conductivité thermique

C'est la capacité d'un corps de transmettre à travers son épaisseur un flux de chaleur résultant d'une différence de température.

Le transfert de chaleur dans les verres peut avoir lieu par conduction et par rayonnement. Aux basses températures c'est le premier processus qui prédomine et aux températures élevées c'est le second.

La conductivité thermique est inversement proportionnelle à l'augmentation des oxydes modificateurs. Ainsi, l'introduction des alcalins entraîne un abaissement de la conductivité et l'augmentation de la température entraîne une augmentation de cette dernière.[8]

c - dilatation thermique

Lors de la fusion, la viscosité est une l'une des propriétés déterminantes, alors que lors du refroidissement c'est la dilatation thermique qui est déterminante. Chaque particule de matière oscille par suite de l'énergie thermique.

Lorsque la température augmente, l'énergie thermique augmente et il en résulte un accroissement de l'amplitude de vibration des particules. Elle est plus grande pour les liquides que les solides. [10]

On la caractérise par le coefficient de dilatation linéaire (.) ou encore par le coefficient de dilatation cubique (-) .

$$. \alpha_T =$$

ou bien

$$- \alpha_T =$$

ou

L_0, V_0 : Longueur et volume initiaux de l'échantillon

$\Delta L, \Delta V$: Variation respective de longueur et de volume de l'échantillon .

ΔT : Variation de température .

Généralement, on trouve comme relation entre **a** et **b**:

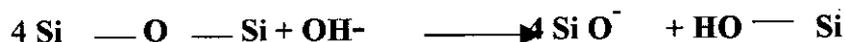
$$- \sim 3 . [2]$$

I.3.4 PROPRIETES CHIMIQUES

Le verre se distingue de sa grande durabilité vis à vis de presque tous les agents chimiques, aux températures normales. Sans cette propriété, la grande étendue des applications du verre serait impensable. Il est cependant, sensible à l'action de l'acide fluorhydrique qui permet de faire de la gravure sur verre.

* attaque du verre par des solutions aqueuses acides : celles-ci sont caractérisés par la présence d'ions (H^+) ou (H_3^+), le verre de son côté consiste en un réseau de tétraèdres SiO_4 dans lequel les vides sont occupés par les ions des modificateurs de réseau. Il y a alors un échange d'ions dans lequel le verre s'appauvrit préférentiellement en alcalins.

* attaque par les solutions alcalines : elle est régie par un autre mécanisme que dans les solutions acides. L'ion (OH^-) est déterminant car il a la possibilité de réagir avec le réseau suivant la réaction :



Il apparaît des coupures du réseau qui dans des conditions appropriées, peuvent conduire jusqu'à la formation d'anions silicates solubles à faible masse moléculaire, cela signifie une dissolution complète du verre . [11, 12]

1.3.5 PROPRIETES OPTIQUES :

a -REFRACTION (indice de réfraction) :

L'indice de réfraction est le rapport de la vitesse de la lumière dans l'air à la vitesse de la lumière dans le verre .

$$n = \frac{U_0}{U_m}$$

ou

U_0 : la vitesse de la lumière dans l'air
 U_m : la vitesse de la lumière dans le verre
 n : indice de réfraction

On peut aussi le définir comme étant le rapport des angles du rayon lumineux avec la normale respectivement dans l'air et dans le verre . [15]

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

Si la longueur d'onde augmente l'indice de réfraction décroît , cette variation porte le nom DISPERSION, pour un verre sodocalcique $n = 1.52$.

b - la transparence

1-facteur de transmission

si un flux monochromatique chemine dans un verre absorbant et a pour valeur (I_0) a la distance (0) , et (I_x) après avoir traverse une épaisseur (x)

$$F_x = \frac{I_x}{I_0} = 10^{-Kx}$$

2-facteur d'absorption

c'est le rapport entre l'intensité des flux lumineux absorbés par le verre et l'intensité des flux incidents (I_i)

$$A = \frac{I_A}{I_i}$$

Remerciements

Au terme de ce modeste travail, qui ne fut pas le monde désagréable, je tiens à remercier en premier lieu Dieu qui m'a donné la patience, le courage et la foi, grâce aux quels j'ai put achever ce mémoire.

Je tiens par la suite à adresser mes vifs remerciements à :

- Ma promotrice, madame **F. YAGOUZ**, pour l'aide précieuse, l'intérêt et le suivi régulier qu'elle a apportée à ce travail et surtout pour son aide morale.

- Ma reconnaissance et mon profond respect vont également à monsieur le professeur **CECINTOUIR** pour l'honneur qu'il nous fait de présider les travaux de notre jury.

- Mes remerciements s'adressent également à :

* Madame **DERRICHE** Maître de conférence à l'ENP.
* Madame **MEZIANI** Chargée de cours à l'ENP.

Pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Mes profonds sentiments et remerciements s'adressent aussi :

- A tous mes amis de Belcourt surtout (Naïm).
- A tous mes amis de ma classe de 3^{As}.
- A tous mes amis(es) de **BOUINCSNAFA** en particulier **M. YASSIA** et **S. KAMEL**.
- A toutes l'équipe de **SAMZI SOCIAL** en particulier **B. REDA** et **M. MOUSAMEL**.
- A tous mes amis de **A.** pour la sauvegarde de la jeunesse.
- Sans oublier bien sur tout mes amis de l'école polytechnique en particulier ceux de Génie Chimique.

En fin ma sympathie va à toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

22 **M. K. ELBELLAH**

3-facteur de réflexion

c'est le rapport entre l'intensité des flux lumineux réfléchies (Φ_R) et l'intensité des flux incidents Φ_I

$$R = \frac{\Phi_R}{\Phi_I}$$

Dans les verres silicates alcalins binaire , il existe des oxygénés non pontants qui ont une polarisabilité plus grande , ce qui a pour conséquence une élévation de l'indice de réfraction lorsque la teneur en oxyde alcalin augmente , même influence pour les oxyde alcalino-terreux.

ELABORATION DU VERRE

Pour le verre, à l'exception de corps volatils qui seront plus ou moins complètement éliminés au cours de la fusion, les composés contenus dans les matières premières, y compris les impuretés indésirables, seront intégralement retrouvés dans le produit final, et dans leur proportion initiale. Le mélange hétérogène constitué par les matières premières aura été transformé en produit homogène, et même lorsqu'il s'agit par exemple d'un bon verre d'optique physiquement plus homogène que le cristal le plus pur.

Le verre présente contrairement au cristal une structure désordonnée, autrement dit, le verre pourra présenter de nombreux états intermédiaires, entre la dissociation des liaisons fortes et les liaisons faibles. Ce sont les liaisons faibles qui cèdent les premières mais une certaine cohésion reste cependant encore assurée par les liaisons fortes, un verre ne fond pas à une température déterminée, mais se ramollit lentement.

II - 1 PREPARATION DE LA COMPOSITION

Les matières premières sont mélangées soigneusement avec des teneurs déterminées et avec une certaine humidification pour éviter la formation des poussières et faciliter la fusion. On ajoute à la composition 25 à 35 % de calcaire pour éviter les intempéries et on la stocke dans des silos.

II - 2 L'élaboration du verre

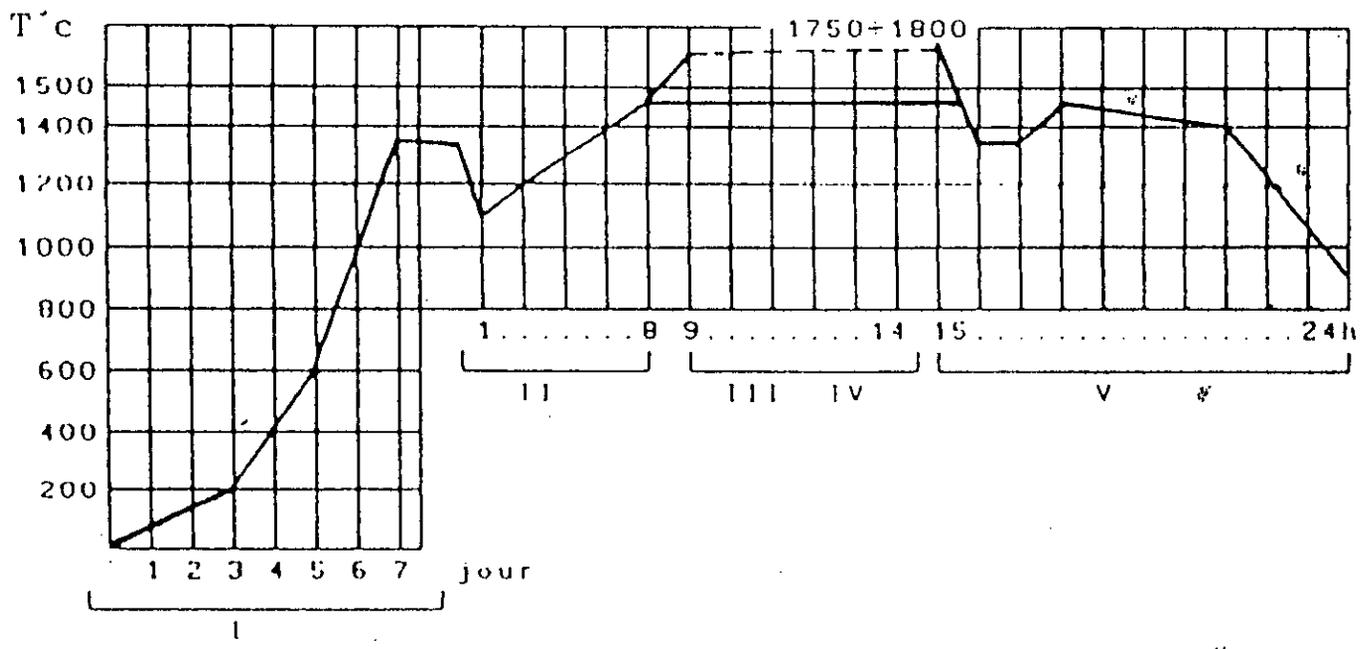
Pour mieux saisir les phases successives de l'élaboration du verre, nous les examinerons telles qu'elles se déroulent au cours d'un cycle continu dans le temps, dans un four à bassin. On commence par préparer, par pesées successives, le mélange vitrifiable. Puis, après avoir calculé, d'après l'analyse des matières premières, la quantité de chacune d'elles qui est nécessaire pour obtenir, après fusion, la composition de verre choisie.

La première étape est la formation des silicates, puis la formation du verre par dissolution du sable restant, ensuite vient l'affinage et l'homogénéisation, la masse fondue est alors prête, on refroidit le verre pour le travailler.

On distingue quatre stades de fusion : [14]

- * Dissolution de la matière première
- * Formation du verre
- * Affinage et Homogénéisation
- * Refroidissement.

Graphiquement les quatre stades précédents sont présentés de la façon suivante :



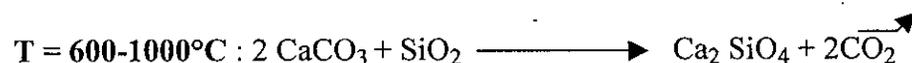
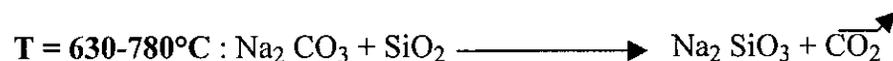
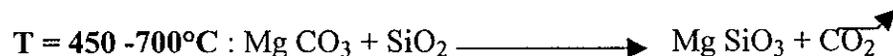
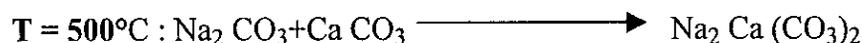
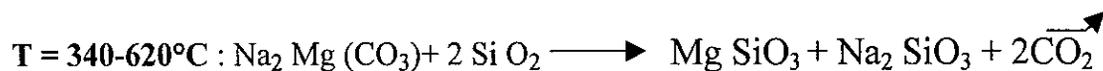
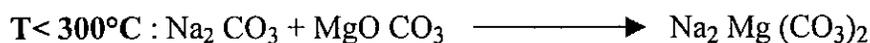
a - DISSOLUTION DE LA MATIERE PREMIERE

les matières premières ne s'échauffent rapidement qu'en surface, car elles sont mauvaises conductrices de chaleur. La vitrification va donc s'amorcer au contact, soit de l'atmosphère du four, soit des parois du creuset, soit du verre déjà fondu au fond du four.

les réactions démarrent rapidement au-dessus de 800°C, lorsque les matières les plus fusibles (le carbonate et le sulfate de sodium, ainsi que le calcaire et la dolomie) commencent à fondre. Il y a attaque du sable et dégagement du gaz carbonique résultant de la décomposition des carbonates.

Mais si la température restait relativement basse, par exemple au dessous de 1000°C, la réaction se ralentirait très vite car au fur et à mesure de la dissolution du sable dans le carbonate, le liquide devient de plus en plus visqueux.

Dans cette première phase, la dissolution du sable est de 70%, les principales réactions qui se déroulent à ce stade sont:



b - FORMATION DU VERRE

A ce stade on augmente la température jusqu'à 1400°C. Les couches de surface atteignent rapidement cette température et comme le verre devient d'autant plus liquide qu'il est plus chaud, la réaction peut se poursuivre jusqu'à digestion complète du sable.

La couche de surface étant fondue, les couches sous-jacentes s'échauffent à leur tour et la fusion se poursuit progressivement. Les derniers grains de sable, qui ont tendance à se rassembler à la surface du verre fondu parce qu'il sont plus légers que le verre, sont attaqués par le sulfate de sodium qui réagit à plus haute température que les carbonates.

c - L'AFFINAGE ET HOMOGENEISATION

Le verre fondu est encore loin d'être homogène. Il subsiste en particulier de nombreuses bulles de gaz provenant de la décomposition des carbonates et des sulfates et dont les plus fines ne peuvent être éliminées facilement parce que le verre, à la température de formation du verre est encore visqueux; il a la consistance d'une huile épaisse.

L'homogénéité chimique du verre n'est pas non plus parfaite, car nous avons vu que la fusion se fait par digestion progressive du sable . Or, un liquide épais est difficile à homogénéiser. Aussi, la fusion doit-elle être suivie d'une nouvelle phase, celle de l'affinage et de l'homogénéisation.

Le premier acte consiste à élever la température du verre jusqu'au maximum admissible. La production de gaz SO_2 , O_2 , qui sont facilement absorbés et dégagés à $1500^\circ C$. Le Na_2SO_4 est un affinant qui a une action physique car il a une action de vaporisation, la montée des bulles provoque l'homogénéisation .

A la fin de l'affinage le verre étant très fluide pour le travail, on le refroidit à une température de $1200^\circ C$ avec une viscosité de 10^5 à 10^6 poises .

Le concept " homogénéisation du verre " est encore très mal défini à l'heure actuelle. Il est certain qu'une homogénéité parfaite n'est réalisée que dans de très petits éléments de volume.

Les causes de l'inhomogénéité peuvent être dues : [17]

- 1 . à la composition
- 2 . aux réactions de formation
- 3 . à des phénomènes d'immiscibilité
- 4 . aux réactions aux limites du verre
- 5 . aux courants de convection qui mettent en contact des verres ayant des passés thermique très différents
- 6 . à des phénomènes de dévitrification ou de redissolution de cristaux .

De plus, l'homogénéisation du verre est influencée par des facteurs actifs :

- 1 . La diffusion
- 2 . La déformation des cordes par les mouvements du verre et des bulles gazeuses.
- 3 . La tension superficielle et la tension interfaciale et par un facteur passif
- 4 . La viscosité

Pour cela on élève la température au dessus de celle du fusion ,la viscosité de ce fait diminue ce qui facilite la montée des bulles .

D - LE REFROIDISSEMENT

Le verre est refroidi pour augmenter sa viscosité à une température permettant la mise en forme (**1000 à 1200**) pour les verres courants .

Pendant le refroidissement d'un liquide ,le volume diminue , la structure change et si la vitesse de refroidissement est grande , cela nous donne assez du temps pour avoir l'équilibre et de bien ordonné les molécules ,de ce fait le liquide sera figé et être à l'état métastable de liquide surfondue .

Des travaux exécutés à l'aide de rayons (X) ont montré que l'ordre moléculaire dans les verres est d'une façon générale irrégulier et analogue à celui des liquide.[5]

Les idées actuelles sur la structure des verres reposent sur les travaux de **ZACKARIASEN** et **WARREN**, qui voient dans le verre aussi bien fondu que solide un ordre rapproché des tétraèdres (SiO₄) formateurs du verre reliés par des ponts oxygène. [2]

II-3 LES FOURS

Si l'industrie du verre est aussi ancienne, c'est non seulement parce que les matières premières nécessaires à sa fabrication ont toujours été abondantes et facilement exploitables, mais aussi parce que l'industrie céramique, plus vieille encore, a su mettre tout de suite à sa disposition les matériaux nécessaires à la construction des fours et des récipients indispensables à la fusion du verre.

Parmi ces fours, nous pouvons citer le plus utilisé: le four à bassin conçu essentiellement en vue de la fusion continue.

L'organe essentiel d'un four à bassin est la cuve, constituée de blocs en matériaux réfractaires résistant à la corrosion par le verre et assemblés à sec sans aucun liant. La sole peut être constituée soit par des matériaux uniques, soit par un placage de 10 cm de matériaux de qualité sur un soubassement en matériaux argileux moins résistant au verre, mais thermiquement moins conducteur. La profondeur d'une cuve est variable suivant la nature et surtout la teinte du verre qu'on désire y fabriquer.

La chaleur est apportée à partir de flammes qui se développent au dessus de la surface du verre fondu : Ce sont les couches superficielles, les plus chaudes, qui retransmettent la chaleur aux couches sous-jacentes plus froides. Au niveau de la sole, la température est au moins d'une centaine, et parfois de plusieurs centaines de degrés inférieure à celle de la surface.

La superstructure des fours comprend la voûte et des assises latérales comportant des ouvertures pour les enfournements, l'admission du combustible et l'évacuation des gaz brûlés. La voûte est en brique de silice. [15]

Mais la tendance actuelle est de réaliser les parties qui souffrent le plus (colliers de brûleurs et orifice des fumées) en matériaux électro-fondus plus résistants.

Les fours sont chauffés par des combustibles : gaz naturel, mazout lourd, ..., de façon à fonctionner avec récupération de chaleur à travers des empilages de briques. Ces dernières sont chauffées par les gaz brûlés et servent à chauffer l'air entrant. De plus, les zones les plus chaudes constituent des régions d'altitude légèrement plus élevée, à partir desquelles le verre s'écoule en surface vers les zones les plus froides, de plus faible altitude. Il en résulte des courants de verre permanents, dont les circuits se ferment sur eux mêmes et dont l'intensité est bien supérieure à celle du courant qui résulterait de la simple tirée du verre.

On peut définir six principaux courants :

- A partir de la zone la plus chaude du four, il existe un courant d'écoulement vers l'amont.
- Un courant similaire, à partir de la zone la plus chaude existe vers l'aval et vient se refermer, après avoir effectué le trajet inverse dans les couches profondes, en remontant vers la source chaude.
- L'axe longitudinal de la cuve, plus chaude que les parois refroidies, constitue une sorte de fâitage à partir duquel le verre, s'écoule vers chacune des parois latérales, ce qui produit deux nouveaux courants en amont de zone de température maximale et deux courants en aval.

On réalise des lignes transversales de bougonneurs qui créent un flux continu longitudinal de verre amont et aval sur toute la largeur du four et maintiennent le mélange vitrifiable du côté amont du four.

Toutefois un barrage étanche entre les deux compartiments de fusion et de travail provoquerait un effet de refroidissement trop important. Aussi on dispose généralement d'un barrage en nids d'abeille, laissant pénétrer plus ou moins les gaz chauds du compartiment de fusion dans le compartiment de travail, le réglage du nombre et de la section des alvéoles permet d'amener le verre exactement à la température requise.

La position d'une ouverture d'enfournement, des entrées de combustible et d'évacuation des gaz brûlés varie suivant la dimension des fours et leur disposition. Il faut seulement signaler qu'il existe d'autres fours qui sont moins utilisés à l'échelle industrielle pour des différentes raisons, parmi ces fours: le four à pots et le four électrique. [16]

LES FOURS CONTINUS

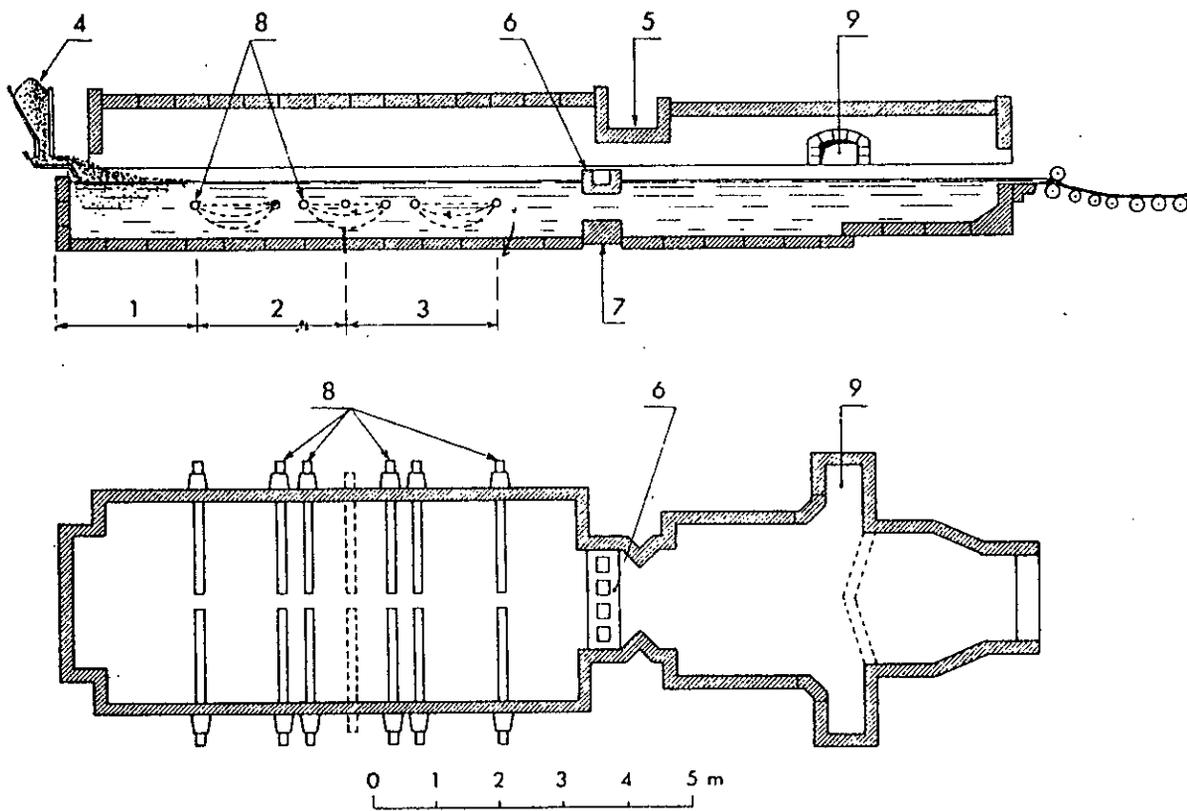


Fig. 5-4. — Four de fusion électrique pour fabrication de verre plat.

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| 1 — Zone de préfusion. | 6 — Barrage flottant. |
| 2 — Zone de fusion. | 7 — Barrage immergé. |
| 3 — Zone d'affinage. | 8 — Électrodes. |
| 4 — Enfourneuse automatique. | 9 — Niches d'écumage. |
| 5 — Voûte surbaissée. | |

LES FOURS CONTINUS

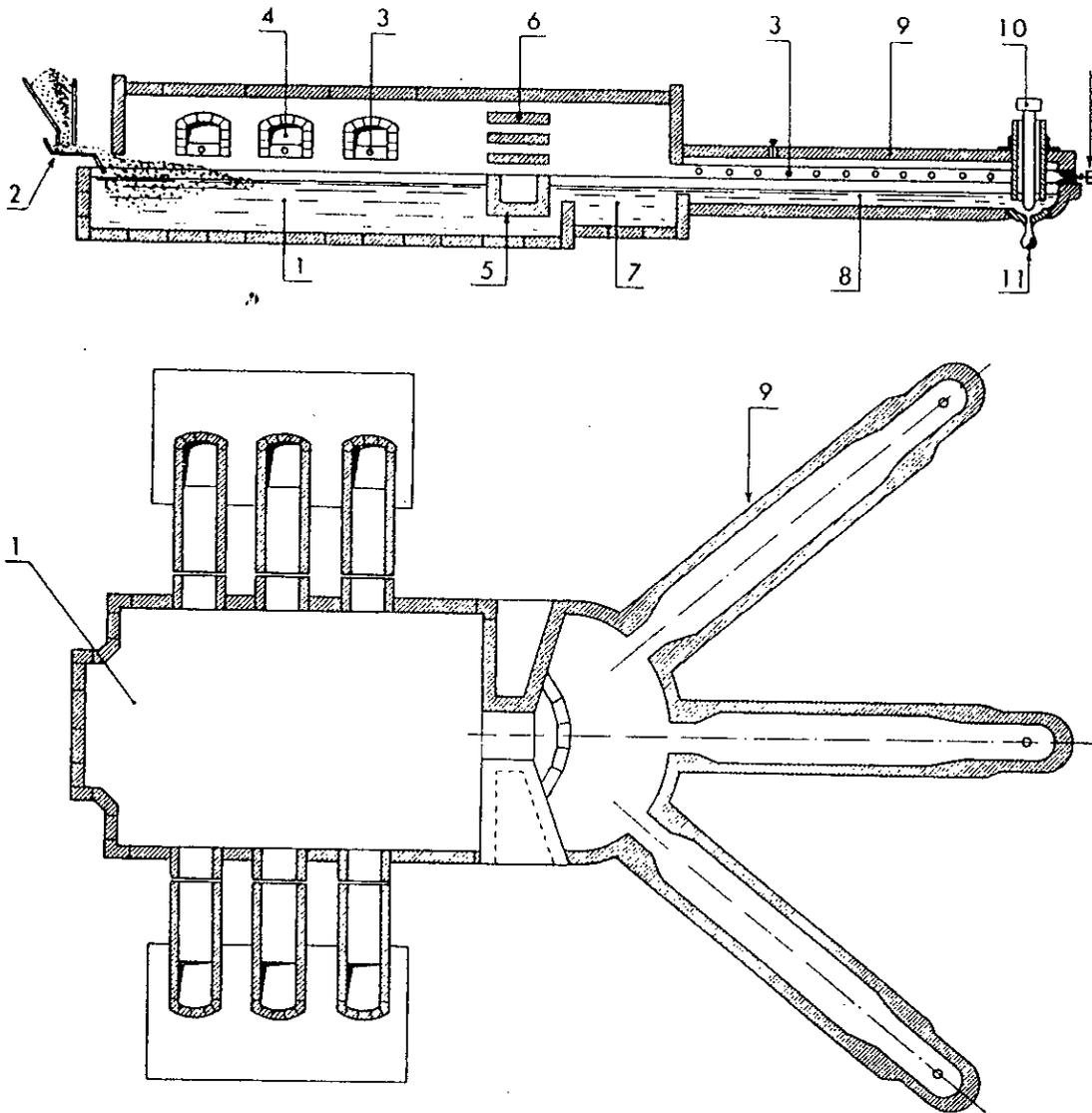
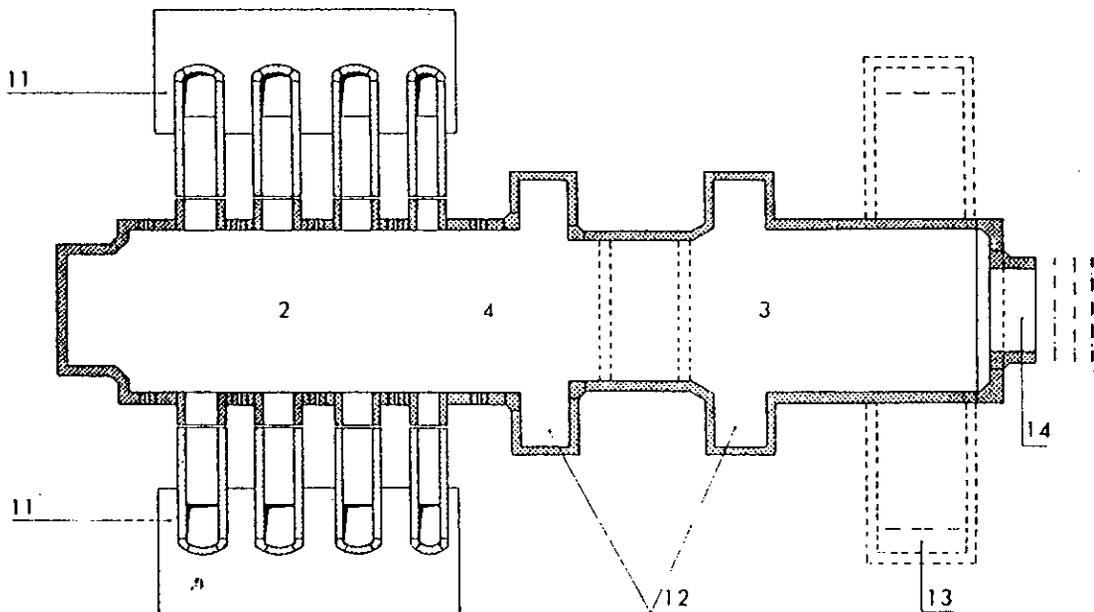
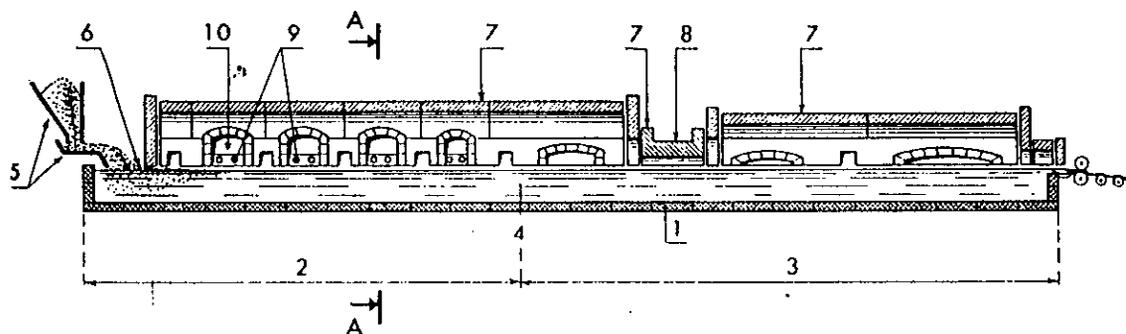
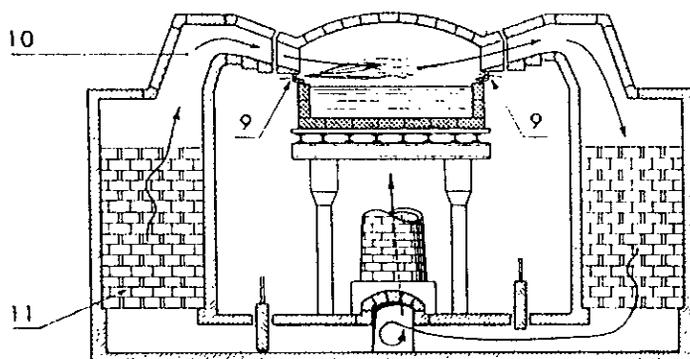


Fig. 5-3. — Four à verre creux.

- | | |
|--|---|
| 1 — Compartiment de fusion et d'affinage. | 7 — Compartiment de braise. |
| 2 — Enfourneuse automatique. | 8 — Canal de distribution. |
| 3 — Brûleurs. | 9 — Avant-corps. |
| 4 — Conduit de récupérateur. | 10 — Distributeur automatique de verre. |
| 5 — Gorge. | 11 — Paraison en formation. |
| 6 — Empilage de briques de silice non jointives séparant partiellement les deux compartiments. | |



0 5 10 m



COUPE A A

Fig. 5-2. — Four à bassin pour verre plat ou verre à vitres.

- | | |
|--|---|
| 1 — Cuve. Réfractaires à base d'alumine. | 9 — Brûleurs. |
| 2 — Zone de fusion. | 10 — Conduits des récupérateurs. |
| 3 — Zone de refroidissement. | 11 — Récupérateurs. |
| 4 — Zone de température maximale de surface. | 12 — Niches d'écumage. |
| 5 — Enfourneuse mécanique. | 13 — Puits d'étirage (fabrication de verre à vitres). |
| 6 — Mélange vitrifiable en cours de fusion. | 14 — Lèvre de coulée (fabrication de verre coulé par laminage). |
| 7 — Voûte en briques de silice. | |
| 8 — Voûte surbaissée. | |

**PRESENTATION DES EQUATIONS FONDAMENTALES
DE LA MECANIQUE DES FLUIDES****INTRODUCTION**

La description mathématique de l'état d'un fluide en mouvement se fait au moyen de fonction déterminante, ses caractéristiques thermohydroliques (perte de pression, distribution de température et de vitesseetc.)

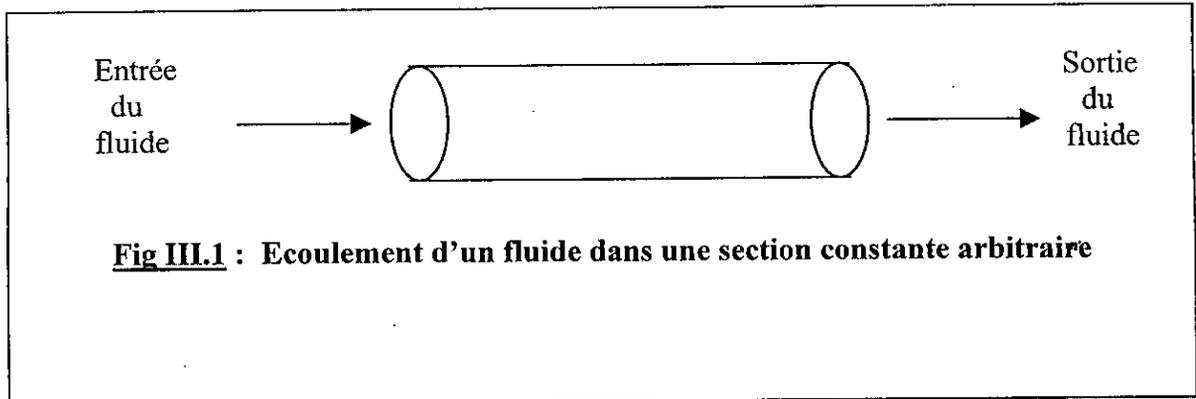
Ces quantités doivent être calculées en appliquant les principes fondamentaux de la mécanique des fluides qui sont les :

- * conservation de la masse
- * conservation des quantités de mouvement
- * conservation de l'énergie

III.1 Hypothèses de travail

Vue la complexité de la résolution de ces équations certaines hypothèses et restrictions sont imposées pour l'ensemble de notre travail (Fig 1)

- 1 - Régime permanent
- 2 - Ecoulement monophasique et unidirectionnel
- 3 - Propriétés du fluide constantes
- 4 - Ecoulement complètement établi
- 5 - Section d'écoulement constante
- 6 - Hypothèses de Stokes applicable
- 7 - Le fluide étant isotrope.
- 7 - Transfert thermique complètement développé



III.2 Equations fondamentales de la mécanique des fluide [18]

Ce sont des principes de conservation tirés de la mécanique et de la physique. Ils conduisent à écrire un certain nombre d'équation fondamentales :

A - Principe de conservation de la masse [18]

C'est un principe de physique qui permet d'établir une relation entre certaines caractéristiques du fluide et ses mouvements , indépendamment des causes qui les provoquent . Il se traduit par l'équation de continuité (Equation scalaire) , qui spécifie que nous ne pouvons pas créer ou détruire de la matière .

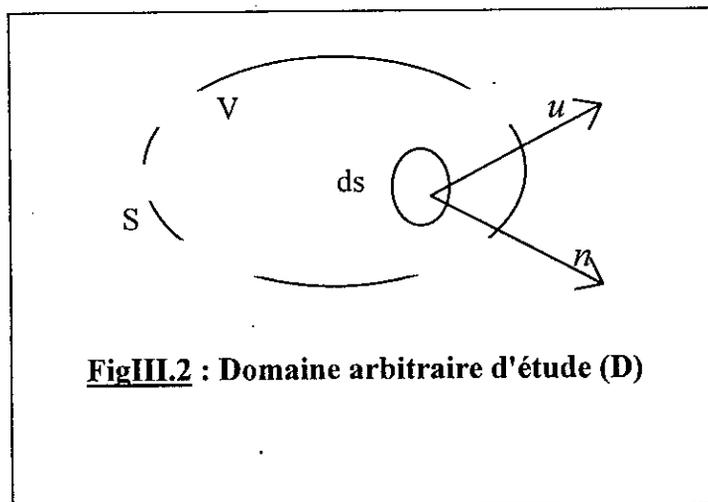
** Equation Globale

Quelque soit le domaine (D) du fluide dont on suit le mouvement (Fig 2) , sa masse reste constante au cours du temps . Ceci est traduit par la relation suivante :

$$\frac{dm}{\partial t} = \frac{d}{\partial t} \int_D \rho \partial v + \int_S \rho \vec{u} \vec{n} \partial s \quad \text{III.1}$$

$\frac{d}{\partial t} \int_D \rho \partial v$: Débit massique total occupant le volume du domaine D

$\int_S \rho \vec{u} \vec{n} \partial s$: Débit massique relatif net s'écoulant à travers la surface frontière S.



FigIII.2 : Domaine arbitraire d'étude (D)

En utilisant la règle de LEIBTNITZ et l'équation II.1 , nous obtenant l'équation globale de conservation de la masse qui s'écrit comme suit :

$$\int_D \frac{d}{dt} \rho dv + \int_S \rho \bar{u} \bar{n} \bar{\partial} s = 0 \quad \text{III .2}$$

****Equation Locale :**

Le domaine (D) étant arbitraire , nous obtenons l'équation ponctuelle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \bar{u} = 0 \quad \text{équation de continuité} \quad \text{III .3}$$

et avec les hypothèses de travail 2 et 3 , nous obtiendrons équation de conservation de la masse dans un repère cartésien :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{III .4}$$

B - Principe de conservation de quantités de mouvement [18]

C'est un principe de mécanique qui permet d'établir des relations entre les caractéristiques du fluide , celles de ces mouvements et les causes qui les produisent (forces). Il se traduit par les équations des quantités de mouvement , ou par la 2^{ème} loi de la dynamique de NEWTON (équation vectorielle)

**** Equation Globale**

Quelque soit le domaine (D) du fluide dont on suit le mouvement (Fig 3) , la variation des quantité de mouvements au cours du temps est égale à la résultante des forces extérieures agissants sur le volume (V) et sur la surface (S) .

$$\vec{F}_R = \vec{F}_V + \vec{F}_S \quad \text{III .5}$$

avec :

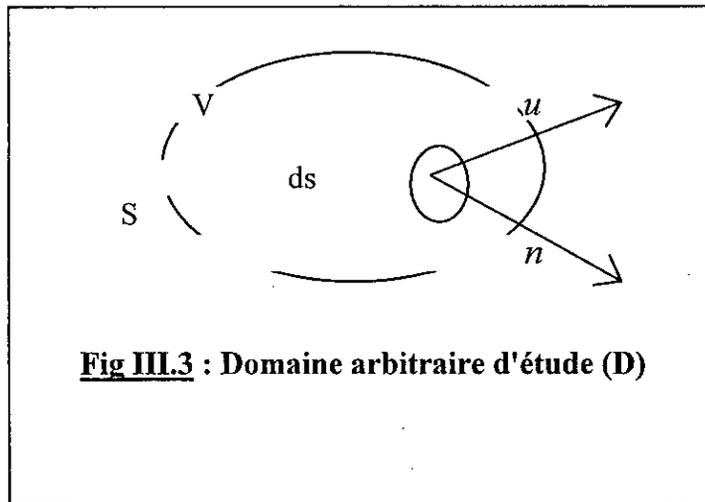
$$F_R = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dv \quad \text{Force résultante}$$

$$F_V = \int_V \rho \vec{f} dv \quad \text{Force de volume}$$

$$F_S = \int_S \delta \vec{n} ds \quad \text{Force de surface}$$

Nous obtenons alors équation globale des quantités de mouvement :

$$\int_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dv = \int_V \rho \vec{f} dv + \int_S \delta \vec{n} ds \quad \text{III .6}$$



****Equation Locales**

On a :

$$\int_V \vec{\delta} \vec{n} ds = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \delta dv \quad \text{III.7}$$

d'où

$$\int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} dv = \int_V \rho \vec{f}_i dv + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \delta dv \quad \text{III.8}$$

Le domaine (D) étant arbitraire , on peut écrire :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_i \quad \text{III.9}$$

En utilisant les hypothèses de travail 3 et 5 dans le repère cartésien , nous obtenons équation locale de conservation des quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \quad \text{III.10}$$

Le développement de équation II.10 en régime permanent conduit à équation simplifiée suivante :

$$U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

μ : Viscosité dynamique du fluide

ν : Viscosité cinématique du fluide

C - Principe de conservation d'énergie [18]

C'est un principe d'énergétique (ou 1^{er} principe de thermodynamique) . Il permet d'établir des relations entre les différentes formes d'énergies mises en jeu . Il se traduit par équation d'énergie (équation scalaire)

** Equation Globale

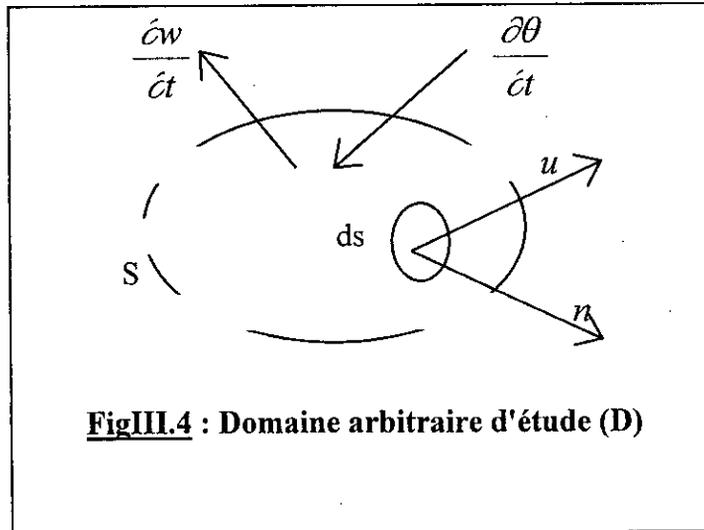
Quelque soit le domaine (D) du fluide dont on suit le mouvement (Fig 4) la variation de l'énergie totale (énergie cinétique et énergie interne) du volume de contrôle (V) au cours du temps , est égale à la somme de la quantité de chaleur fournie au volume de contrôle (V) et des travaux développés par les différentes forces agissantes sur ce volume (V) et sur la frontière (S) , cela se traduit par équation :

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho E + \rho U^2 / 2) dv = \underbrace{\int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dv}_{P_v} + \underbrace{\int_S T u ds + \sum \frac{\partial q}{\partial t}}_{P_s} \quad \text{III.11}$$

P_v : Puissance des forces de volume

P_s : Puissance des forces de surface

$\sum \frac{\partial q}{\partial t}$: La puissance calorifique reçue par le domaine (D), (par rayonnement et par, convection)



**** Equation Locale :**

En résumé , équation locale de conservation de énergie peut s'exprimer sous une des formes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \bar{u} \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - B \frac{\partial P}{\partial t} T \\ \rho T \frac{\partial S}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial t} \end{aligned} \right\} = \Phi + K \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{III.12}$$

$\frac{\partial E}{\partial t}$: Variation énergie interne par unité de masse

$\frac{\dot{e}S}{\dot{a}}$: Variation de l'entropie massique du fluide

$\frac{\dot{a}q}{\dot{a}}$: Puissance calorifique apportée par l'extérieure .

La forme de équation locale énergie qu'on va adopter dans notre travail , est la suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - B \frac{\partial P}{\partial t} T = \Phi + \frac{K}{T} \quad \text{III.13}$$

où

C_p : Chaleur massique a pression constante

B : Coefficient de dilatation cubique a pression constante donnée par la relation

$$B = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) = 0 \quad (\rho = \text{constante})$$

Φ : Fonction de dissipation de RAYLEIGH qui représente la puissance dissipe par frottement et par unité de volume à l'intérieur du fluide . Cette puissance est généralement négligée , par contre , elle ne l'est pas pour l'écoulement a très grandes vitesse de circulation (écoulement sonique et supersonique)

K : Conductivité thermique du fluide .

Dans l'hypothèse d'un régime permanent, l'équation local de la conservation de l'énergie se réduit à :

$$U_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad \text{III.14}$$

$\alpha = \frac{K}{\rho C_p}$: La diffusibilité thermique du fluide.

III.3 - ETUDE DES ECOULEMENT LAMINAIRE :

On ne sait pas résoudre les équations de la dynamique des fluides dans le cas le plus générale , la difficulté vient de ce qu'elles ne sont pas linéaires . Dans un petit nombre de cas , où les conditions aux limites sont particulièrement simple , il est possible cependant de trouver une solution : les écoulements correspondants sont appelés « laminaires » .

Quand un écoulement permanent est laminaire , les lignes de courants (confondues avec les trajectoires) sont des courbes fixes dans l'espace et ne se mélangent pas au cours du mouvement : les couches fluides glissent les unes sur les autres , sans qu'il y ait passage de particule d'une couche à l'autre . Au voisinage d'un solide elle épousent la forme géométrique de la paroi .

Ces solutions laminaires représentent bien certains écoulement réellement observés , mais l'expérience montre que , pour une configuration géométrique donnée des parois solides qui limitent l'espace occupé par le fluide en mouvement , cet écoulement laminaire n'est stable que si les vitesses écoulement ne sont pas trop grandes .

III.3.1 EQUATION DU MOUVEMENT

Nous considérons le cas d'un fluide incompressible en écoulement permanent , soit l'axe (oz) confondu avec l'axe du tube de diamètre $D = 2R$ fig ; ox et oy sont quelconques perpendiculaire à (oz) .

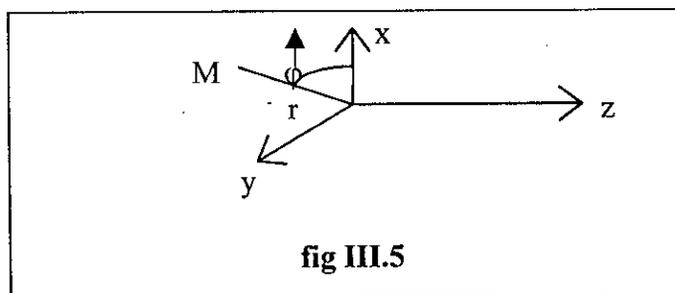


fig III.5

L'écoulement étant laminaire , les lignes de courant sont - par raison de symétrie - parallèles à (oz) , donc les composantes (u , v) de la vitesse sont nulles :
 $u = v = 0$.

les équations de NAVIER - STOKES s'écrivant :

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\
 u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\
 u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w
 \end{aligned} \quad \text{III.15}$$

des deux premières on tire :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p_g}{\partial y} = 0 \\
 p_g &= p_g(z)
 \end{aligned}$$

la pression motrice est donc constante dans une section droite du tube

Quant à équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

elle se réduit à

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{III.16}$$

Il reste donc , comme seule équation du mouvement

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w$$

Par raison de symétrie, on est amené à passer en coordonnées cylindrique (r, φ, z) , la vitesse (w) ainsi que (Δw) ne dépendront pas de (φ) .

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

Par suite

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad \text{III.17}$$

Or (p) ne dépend que de (z) , et (w) ne dépend que de (r) , l'égalité précédente n'est donc vérifiée qu'à la condition que chaque membre soit égale à une constante . Apollons-là : a

Par intégrations successives nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= -a \frac{r}{\mu} \\ r \frac{\partial w}{\partial r} &= -a \frac{r^2}{2\mu} + b \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= -a \frac{r}{2\mu} \\ w &= -a \frac{r^2}{4\mu} + b \log r + c \end{aligned} \quad \text{III.18}$$

b et c sont des constantes d'intégration définies par les conditions aux limites . Pour (r = 0) , cette expression ne nous donne pas une valeur définie pour (w) , on fera donc (b = 0) . Comme (w) s'annule sur les parois du tube , ici pour (r = R) , on trouve :

$$c = \frac{a R^2}{4\mu}$$

Par suite la répartition des vitesses a l'intérieur du tube circulaire est donnée par l'expression suivante :

$$w = \frac{a}{4\mu} (R^2 - r^2) = w_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

en posant :

$$w_{\max} = \frac{a R^2}{4\mu}$$

expression qui représente un paraboloïde de révolution , ayant son sommet sur l'axe du tube .
Cette répartition est la même tout le long du tube fig III.6

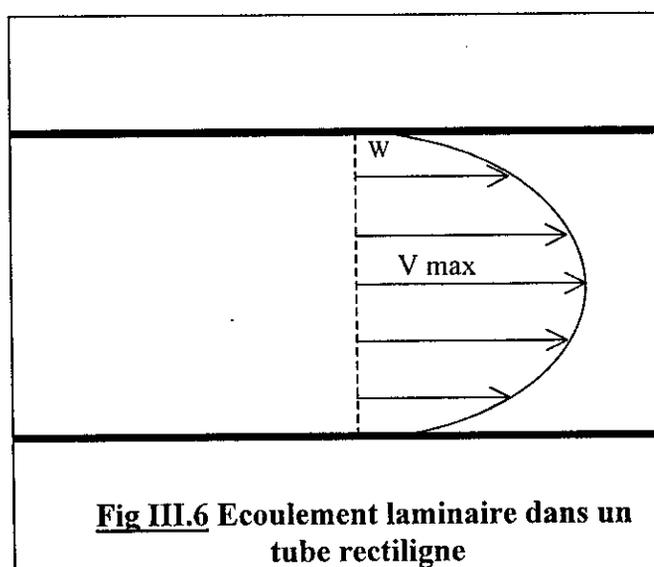
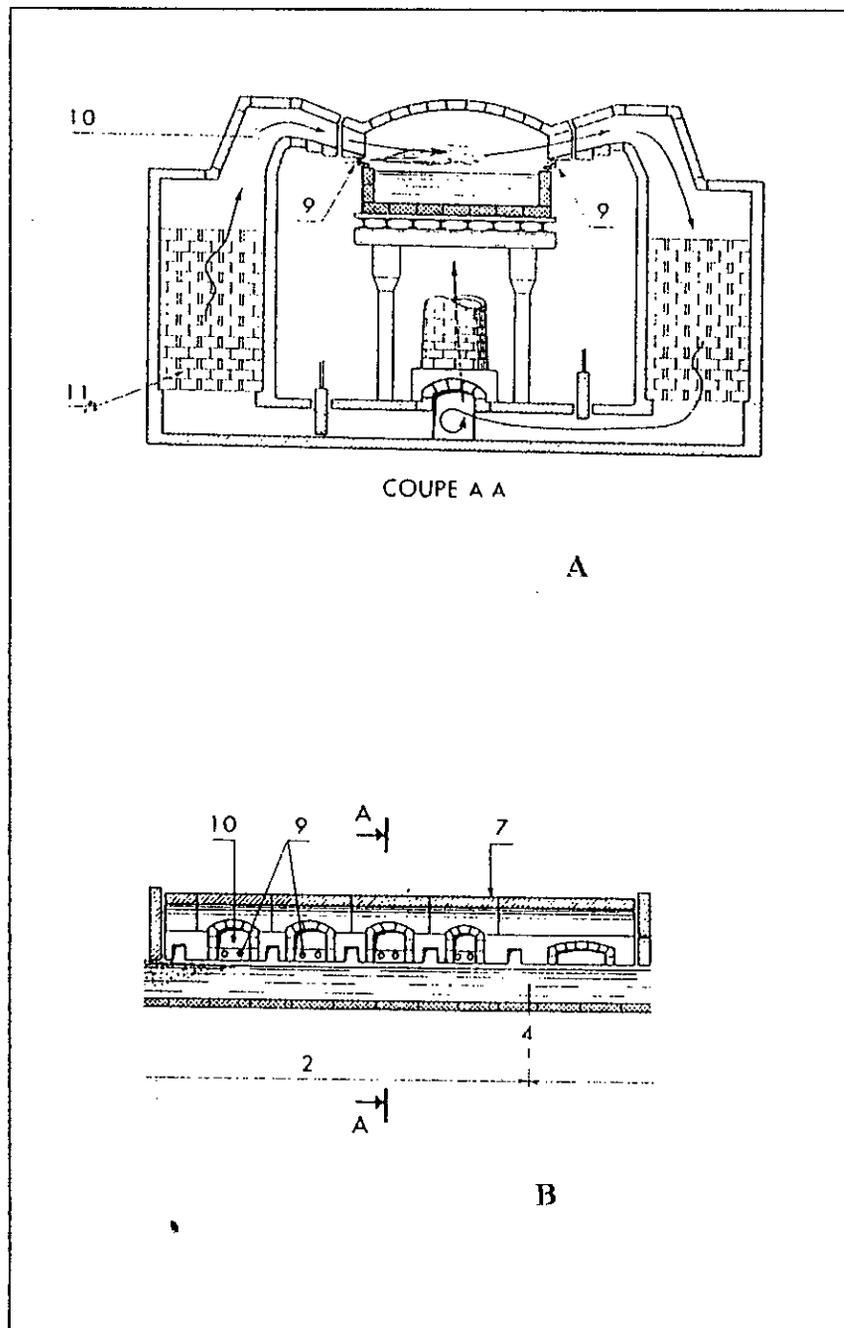


Fig III.6 Ecoulement laminaire dans un tube rectiligne

**APPLICATION DES EQUATIONS FONDAMENTALE
DANS UN FOUR A FUSION**

L'objet du présent travail consiste à déterminer les champs de vitesses et de températures dan un fours à bassin de géométrie rectangulaire .L'analyse se fera pour un écoulement laminaire monophasique, à une étape ou le mélange est considéré homogène et les transferts de chaleurs unidirectionnel dans le four .



III-1 Description du domaine d'étude :

D'après la figure IV.1a , on remarque que le domaine d'étude est de géométrie assez Complexe, afin de simplifier l'étude pour un premier temps on supposera une géométrie rectangulaire, tel qu'on peut se ramener à une analyse dans un secteur rectangulaire symétrique. Fig IV.2

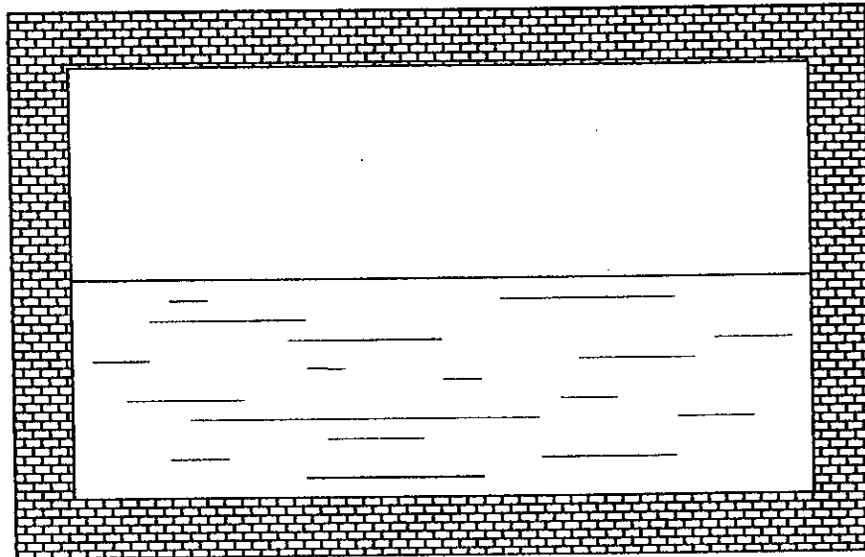


Fig IV.2 domaine d'étude

IV-2- Etablissement des équations thermodynamique de l'écoulement

Après avoir écrit les équations générales de l'hydrodynamique, dans le chapitre précédent, nous les appliquons maintenant à notre problème. Ainsi, nous aboutissons aux équations aux dérivées partielles à résoudre.

IV-2-1- Equation gouvernantes.

Les lignes de courants sont supposées parallèles à l'axe de l'écoulement. Ainsi les composantes U_1, U_2 sont nulles, ($U_1 = U_2 = 0$), ce qui nous amène à dire que :

- l'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{\partial U_3}{\partial X_3} = 0 \quad \text{IV.1}$$

- Nous avons comme seule équation des quantités de mouvement :

$$U_i \frac{\partial U_3}{\partial x_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_3}{\partial x_i} \right)$$

qui peut se réduire, en simplifiant les termes nuls ($U_1, U_2, \frac{\partial U_3}{\partial x_3}$) à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \quad \text{IV.2}$$

L'équation qui régit la répartition des températures dans le fluide est obtenue d'après le principe de la conservation de l'énergie. Or comme il s'agit d'un fluide en écoulement,

l'énergie emmagasinée dans les particules fluides est transportée par leur mouvement. La quantité transportée dépend de la vitesse des particules fluides, aussi il est toujours nécessaire de résoudre le problème hydrodynamique avant de traiter la question relative à la répartition des températures.

Remarque : Dans la région où l'écoulement est complètement développé la pression P ne dépend que de x_3 et U_3 ne dépend que de x_1 et x_2 . L'égalité précédente n'est donc vérifiée qu'à la condition que chaque terme soit égal à une constante.

- En simplifiant les termes nuls (U_1, U_2) et on suppose que le transfert de chaleur suivant l'axe d'écoulement est suffisamment faible pour qu'on puisse le négliger par rapport au transfert de chaleur suivant les deux autres directions, donc

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \ll \frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \approx 0 \right]$$

L'équation de l'énergie se réduit alors

$$U_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)$$

Remarque : Pour l'équation de l'énergie, on a supposé que le transfert de chaleur en général se fait dans une seule direction suivant l'axe normal à la section d'écoulement.

- Dans la région où l'écoulement est thermiquement développé, le coefficient de convection thermique h est uniforme suivant l'axe de l'écoulement. De plus le flux chaleur pour les parois est nulle (parois adiabatique), alors la loi de NEWTON [19] pour le refroidissement permet d'écrire :

$$\overline{\frac{dT_s}{dx_3}} = \frac{dT_m}{dx_3} \quad \text{IV. 4}$$

tel que :

T_s : Température moyenne sur les parois de la section d'écoulement.

T_m : Température moyenne du fluide dans la section d'écoulement.

En introduisant la différence de température adimensionnelle $\frac{T_s - T}{T_s - T_m}$ et sous

la condition d'un flux uniforme, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} \left[\frac{T_s(x_3) - T(x_1, x_2, x_3)}{T_s(x_3) - T_m(x_3)} \right] = 0$$

En résolvant cette équation et compte tenu de l'équation III nous avons :

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = \overline{\frac{\partial T_m}{\partial x_3}} \quad \text{IV. 5}$$

- Faisons un bilan des quantités de chaleur échangées entre le fluide et le milieu

e. section d'écoulement.

$$\int_{Ar} g \, dx \, dy = \int_A \rho C_p U_3 \frac{dT}{dx_3} \, dx \, dy \quad \text{IV.6}$$

g : Etant la source de chaleur apportée au fluide sur la section Ar .

U_3 : vitesse sur la section de l'écoulement A .

On sait que :

$$\bar{g} = \frac{1}{Ar} \int_{Ar} g \, dx \, dy$$

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{A} \int_A U_3 \, dx \, dy$$

Donc :

$$\frac{dT}{dx_3} = \frac{\bar{g} \, Ar}{\rho c_p U_{\text{moy}} A}$$

L'équation de l'énergie gouvernante est :

$$\frac{U_3 \bar{g} Ar}{U_{\text{moy}} \rho c_p A} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \quad \text{IV.7}$$

Posons :

$$U_3 = w, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

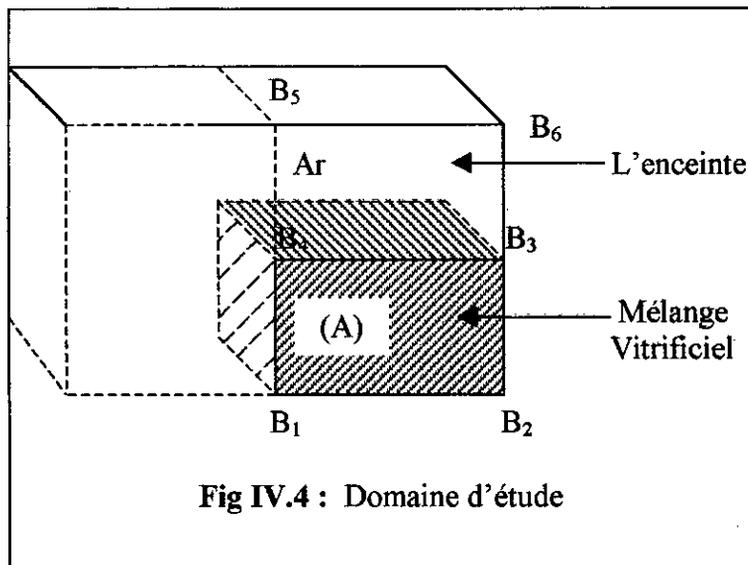
Les équations III (1, 2, 7) deviennent alors respectivement.

$$\bullet \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{IV.8}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \quad \text{IV.9}$$

$$\bullet \frac{U_3 \text{ Ar } \bar{g}}{U_{\text{moy}} A \rho c_p} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \quad \text{IV. 10}$$

A et Ar , étant respectivement la section de l'écoulement, dans l'enceinte et le mélange. Fig : IV.4



IV. 2 .2 Conditions aux limites

a - distribution des vitesses

Pour obtenir la distribution des vitesses dans le domaine d'étude, nous devons résoudre l'équation de quantité de mouvement III. 8 associée au conditions aux limites suivantes

- Sur les arêtes B₁B₂, B₂B₃

$$W = 0$$

- Sur le côté B₁B₄, B₃B₄

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

Remarque : l'équation de rayonnement $q = \sigma f_{1-2} (T_1^4 - T_2^4)$ n'est pas une équation linéaire, puisque la température intervient en puissance quatre (4). Ce pendant, compte tenu de faible écart de température $(T_1 - T_2) \leq 100 \text{ }^\circ\text{C}$ par développement limité.

$$\begin{aligned}
 T_1^4 - T_2^4 &= (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2) \\
 &\approx 4 T_1^3 (T_1 - T_2) \\
 &\approx C (T_1 - T_2)
 \end{aligned}$$

La densité de flux de rayonnement peut alors être " linearisée " en fonction $(T_1 - T_2)$.

$$\phi_R = h_R (T_1 - T_2)$$

où : $h_R = C f_{1-2} =$; h_R : coefficient d'échange thermique par rayonnement.

b – Distribution des Températures :

La distribution des températures est obtenue en résolvant l'équation de l'énergie.

- Sur les arrêtes B_1B_2, B_2B_3 ; $T = T_P$
- Sur les arrêtes B_2B_3 ; $T = T_{P1}$
- Sur le côté B_1B_4

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

Remarque : La valeur de la température sur la surface B_3B_4 n'est pas a priori connu, à cet effet, nous devons résoudre simultanément l'équation III. 9 et l'équation de l'énergie dans le four, qui s'écrit en considérant que le transfert de chaleur suivant l'axe de l'écoulement est négligeable.

La résolution de l'équation d'énergie dans l'enceinte nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho c_p \frac{\partial T_A}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho c_p \frac{\partial T_A}{\partial y} \right] = 0 \quad \text{IV.11}$$

où : $\rho c_p = \frac{K_A}{\rho \cdot c_p}$

- Sur les arrêtes $B_3 B_6$; $T_A = T_{P2}$
- Sur les arrêtes B_4B_5 ; $\frac{\partial T_A}{\partial n} = 0$
- Sur les arrêtes B_5B_6 ; $K_A \frac{\partial T_A}{\partial n} = h'_R (T_{P3} - T_{Su})$

La condition B_3B_4 devient alors une condition de passage entre le milieu Ar , A et doit satisfaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_A \\ h_R (T_{Su} - T_{P3}) + K \frac{\partial T}{\partial n} = h'_R (T_{P3} - T_{Su}) + K_A \frac{\partial T_A}{\partial n} + h (T_A - T_{Su}) \end{array} \right. \quad \text{IV. 12}$$

Finalement, la distribution des températures obéit aux équations IV. 10.11, associées aux conditions aux limites.

- Sur les arrêtes $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, $B_3 B_6$, respectivement $T = T_1$, $T = T_{P1}$, $T = T_{P2}$

- Sur le contour $B_1 B_5$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

- Sur le contour $B_5 B_6$

$$K \frac{\partial T_A}{\partial n} = h'_R (T_{P3} - T_{Su})$$

- Sur la frontière $B_3 B_4$ nous devons vérifier les conditions de passage IV. 12

IV. 2. 3 Passage aux variables adimensionnelles

Le passage aux variables adimensionnelles permet de traiter les problèmes posés de manière plus simple. Cela consiste à grouper les variables en nombre adimensionnel ramenés à des valeurs de référence.

$$X = \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{Y}{l_0}, \quad N = \frac{n}{l_0}$$

$$W = \frac{w}{V^*}, \quad \theta = \frac{K h_R}{g h} (T - T^*)$$

où :

$$V^* = \frac{l_0^2 (-dp/dz)}{\mu}$$

l_0 : la largeur du four caractéristique de référence .

V^* : la vitesse de référence.

T^* : Température au centre du four (Température de référence).

En remplaçant ces Variables adimensionnelles dans le système d'équations nous obtenons :

a- **Distribution des vitesses** :

Tous calcul fait, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -1$$

Associées aux conditions aux limites.

- $W=0$ sur le contour $B_1 B_2, B_2 B_3$

- $\frac{\partial w}{\partial N} = 0$ sur le contour $B_3 B_4, B_4 B_1$

b- **Distribution des températures**

l'équation III.10 peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{W}{W} \frac{A_r}{A} \frac{h_r}{h} \quad \text{IV. 14 a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{IV.14 b}$$

associées aux conditions aux limites :

- $\frac{\partial \theta}{\partial N} = 0$ sur $B_5 B_1$

- $K_A \frac{\partial T_A}{\partial n} = h(T_A - T_{Su})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \theta_r = \theta_{Su} \\ \bullet (\theta_{Su} - \theta_A) + \frac{K}{\ell h_R} \frac{\partial \theta}{\partial N} = \frac{h_R'}{h_R} (\theta_A - \theta_{Su}) + \frac{K_A}{h_R \ell} \frac{\partial \theta_A}{\partial N} + \frac{h}{h_R} (\theta_A - \theta_{Su}) \end{array} \right\} \text{ sur } B_3 B_4$$

- $\theta = \theta_p$ sur le contour $B_1 B_2, B_2 B_6$.

CONCLUSION :

Nous avons établis dans ce chapitre les équations adimensionnelles aux dérivées partielles qui nous permettrons de déterminer les champs de vitesses et températures du problème que nous étudions .

Nous avons aussi noter les difficultés liées à la détermination de certain paramètres nécessaire pour le calcul .Des difficultés essentiellement dues au manque de référence bibliographique .

Nous utiliserons par la suite (chapitre IV) la méthode des éléments finis pour déterminer les vitesses et les températures suivant la section d'écoulement étudié .

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Introduction :

Le développement de toute technologie s'appuie essentiellement sur , l'expérimentation qui est toujours nécessaire, et aussi , sur un modèle capable de reproduire le fonctionnement du dispositif en cours de conception. Dans le cas où le sujet des dispositifs étudiés est l'écoulement de fluides, le modèle de fonctionnement de ce dispositif aura besoin d'une connaissance précise de la répartition spatiale et temporelle des champs de vitesses, températures, pressions....etc. . Cette connaissance passe par la résolution des équations aux dérivées partielles qui décrivent les phénomènes physiques, et qui sont généralement non linéaires, couplées et évolutives et leur résolution nécessite l'emploi de méthodes numériques.

Les principales méthodes connues (différences finies , éléments finis , intégrales de frontières) , sont aujourd'hui couramment utilisées dans l'analyse des problèmes d'hydrodynamique et de thermique . On note en particulier , la méthode des éléments finis qui a connu un développement considérable du moment qu'elle est mieux adaptée aux problèmes non linéaires à géométrie complexe.

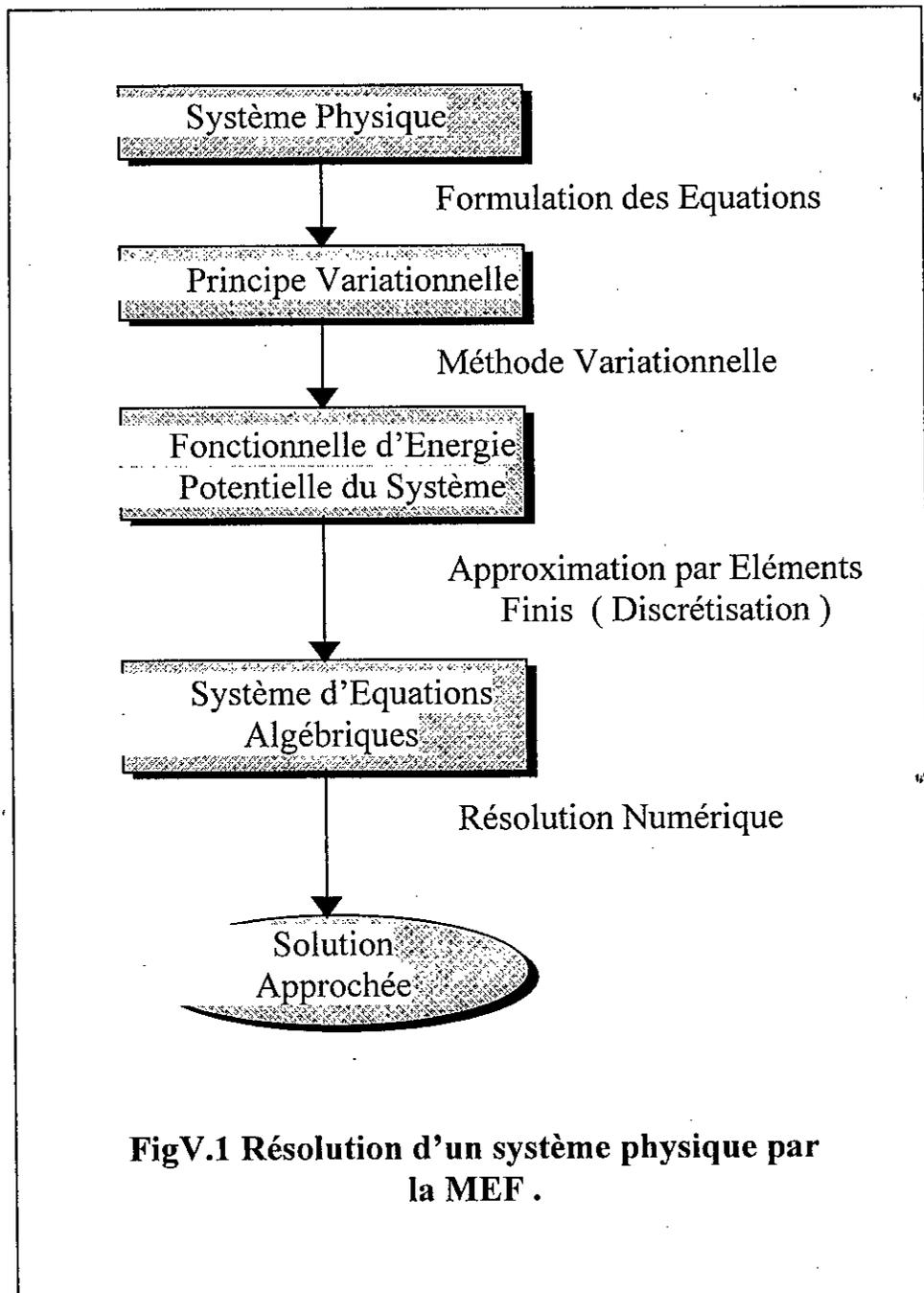
Dans ce chapitre , nous nous proposons de présenter la méthode des éléments finis (MEF), et de l'utiliser comme moyen de résolution des équations aux dérivées partielles établies dans le chapitre précédent. Nous avons adopté pour cela une formulation variationnelle en choisissant un maillage formé d'éléments du type T3 (triangle à trois nœuds).

V.1 Méthode des Eléments Finis (M.E.F) :

C'est en 1956 que TURNER , CLOUGH , MARTIN et TOPP ont introduit le concept d'élément fini qui a été largement appliqué pour l'étude des structures. A l'état actuel, la MEF est très répandue dans les études industrielles, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire. Elle s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique , soit : stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans une géométrie quelconque à une, deux ou trois dimensions.

Il existe différentes approches à l'approximation par éléments finis. L'une des plus utilisée est la méthode variationnelle, ceci est dû au fait qu'elle est simple à formuler. Elle consiste à ramener la résolution des équations aux dérivées partielles, compte tenu des conditions aux limites, à la minimisation d'une fonctionnelle généralement liée à l'énergie potentielle totale du système étudié. Le principe est de subdiviser le domaine à étudier en régions élémentaires (éléments finis), où l'inconnue est approchée par une interpolation polynomiale.

L'organigramme présenté en (Fig.V1) montre les étapes à suivre pour mener à bien la résolution d'un problème par la MEF.



FigV.1 Résolution d'un système physique par la MEF .

V.2 Formulation des équations :

Les équations aux dérivées partielles décrivant les comportements dynamique et thermique du problème que nous étudions, se réduisent, compte tenu de ce qui a été exposé dans le chapitre précédent, aux deux systèmes suivants :

a - distribution des vitesses :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right) = -1 \quad \text{dans A} \quad \text{V.1a}$$

$$W=0 \quad \text{sur le contour } B_1B_2, B_2B_3 \quad \text{V.1b}$$

$$\frac{\partial W}{\partial N} = 0 \quad \text{sur le contour } B_3B_4, B_4B_1 \quad \text{V.1c}$$

b - distribution des températures

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{W}{W} \frac{A_r}{A} \frac{h_R}{h} \quad \text{dans A} \quad \text{V.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta_A}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta_A}{\partial Y} \right) = 0 \quad \text{dans A} \quad \text{V.2b}$$

$$\theta = \theta_A \quad \text{sur le contour } B_3B_4 \quad \text{V.2c}$$

$$(\theta_w - \theta) + \frac{K}{lh_r} \frac{\partial \theta}{\partial N} = \left(\frac{K_s}{h_r l} \right) \frac{\partial \theta_A}{\partial N} + \left(\frac{h}{h_r} + \frac{h_{rR}}{h_r} \right) (\theta_A - \theta) \quad \text{sur le contour } B_3B_4 \quad \text{V.2d}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial N} = 0 \quad \text{sur le contour } B_1B_2 \quad \text{V.2e}$$

$$\theta = \theta_p \quad \text{sur le contour } B_1B_2, B_2B_6 \quad \text{V.2f}$$

$$K_A \frac{\partial \theta_A}{\partial N} = h'_R (\theta_A - \theta_{SU}) \quad \text{sur le contour } B_5B_6 \quad \text{V.2g}$$

On remarque que les équations (V.1a) et (V.2a,b), formulées avec les conditions aux limites (V.1b,c) et (V.2c,d,e), peuvent être mises sous la forme d'une seule équation aux dérivées partielles tel que :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) = P \quad \text{dans A ou } A_r \quad \text{V.3a}$$

$$\phi = \phi_r \quad \text{sur le contour } B_3B_4 \quad \text{V.3b}$$

$$(\theta_w - \theta_A) + \frac{K}{lh_k} \frac{\partial \theta}{\partial N} = \left(\frac{K_d}{h_k l} \right) \frac{\partial \theta_A}{\partial N} + \left(\frac{h}{h_k} + \frac{h'_{iR}}{h_k} \right) (\theta_A - \theta_w) \quad \text{sur le contour } B_3B_4 \quad \text{V.3c}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial N} = 0 \quad \text{sur le contour } B_1B_5 \quad \text{V.3d}$$

$$\theta = \theta_p \quad \text{sur le contour } B_1B_2, B_2B_3 \quad \text{V.3e}$$

$$K_A \frac{\partial \theta_A}{\partial N} = h'_R (\theta_A - \theta_{SU}) \quad \text{sur le contour } B_5B_6 \quad \text{V.3f}$$

ϕ : désigne , lorsqu'il le faut, la vitesse (W) ou la température (θ), dans la section d'écoulement.

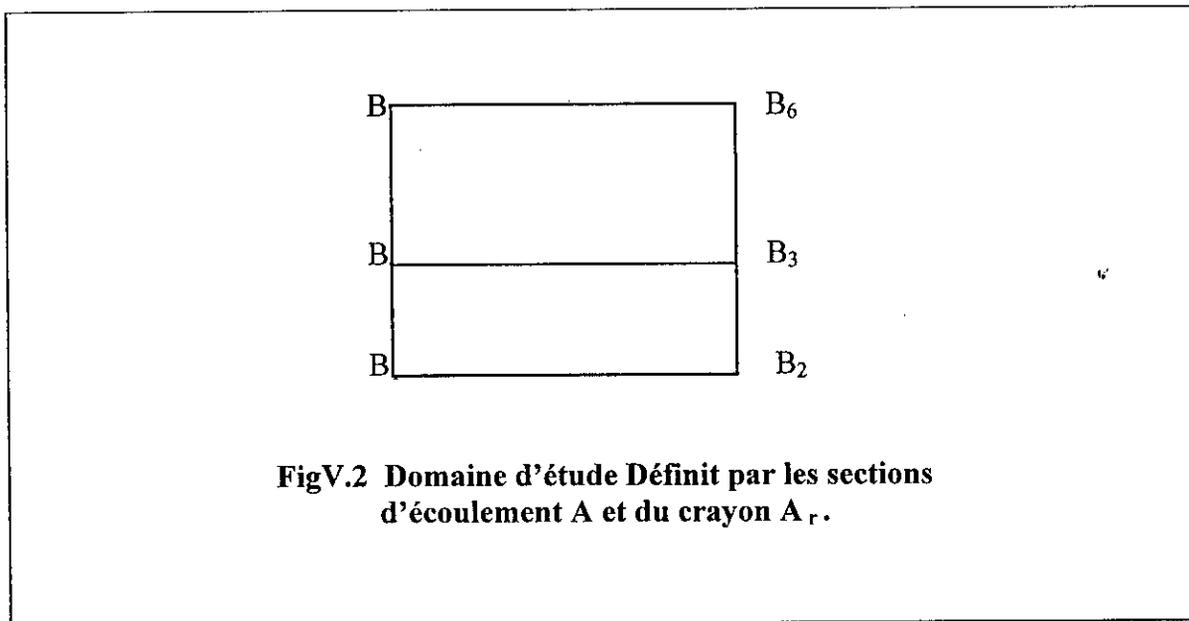
ϕ_r : désigne la température (θ_A), dans la section enceinte

P est le second membre défini par :

$$P = -1 \quad \text{pour l'équation } \text{V.1a}$$

$$P = \frac{W}{W} \frac{A_r}{A} \frac{h_R}{h} \quad \text{pour l'équation } \text{V.2a}$$

$P = 0$ pou l'équation V.2b



V.3 Formulation variationnelle du problème :

La méthode variationnelle consiste à ramener la résolution des équations aux dérivées partielles, compte tenu des conditions aux limites, à la minimisation d'une fonctionnelle généralement liée à l'énergie potentielle totale du système étudié. La fonctionnelle d'énergie associée à l'équation (V.3a) s'écrit :

$$\Pi(\phi) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 \right] - P\phi \right\} dx dy \tag{V.4}$$

Ω : représente le domaine d'étude.

V.4 D iscrétisation du domaine étudié :

Le domaine d'étude (Ω) va être divisé en éléments (Ω^e) dont la forme est directement liée à la dimension du problème traité (une, deux ou trois dimensions). Dans notre cas, nous avons choisi des éléments triangulaires à trois nœuds, qui sont faciles à générer par des algorithmes automatiques de maillage.

Sur (Fig V.3) est représenté le maillage du domaine étudié. Ce maillage doit obéir à des règles que nous énumérons ci-après

- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut donc le recouvrement partiel de deux éléments (FigV.4).
- L'ensemble de tous les élément (Ω^e) doit constituer un domaine aussi proche que possible de (Ω). Ainsi, les vides (trous) entre éléments sont exclus (Fig.V.5).

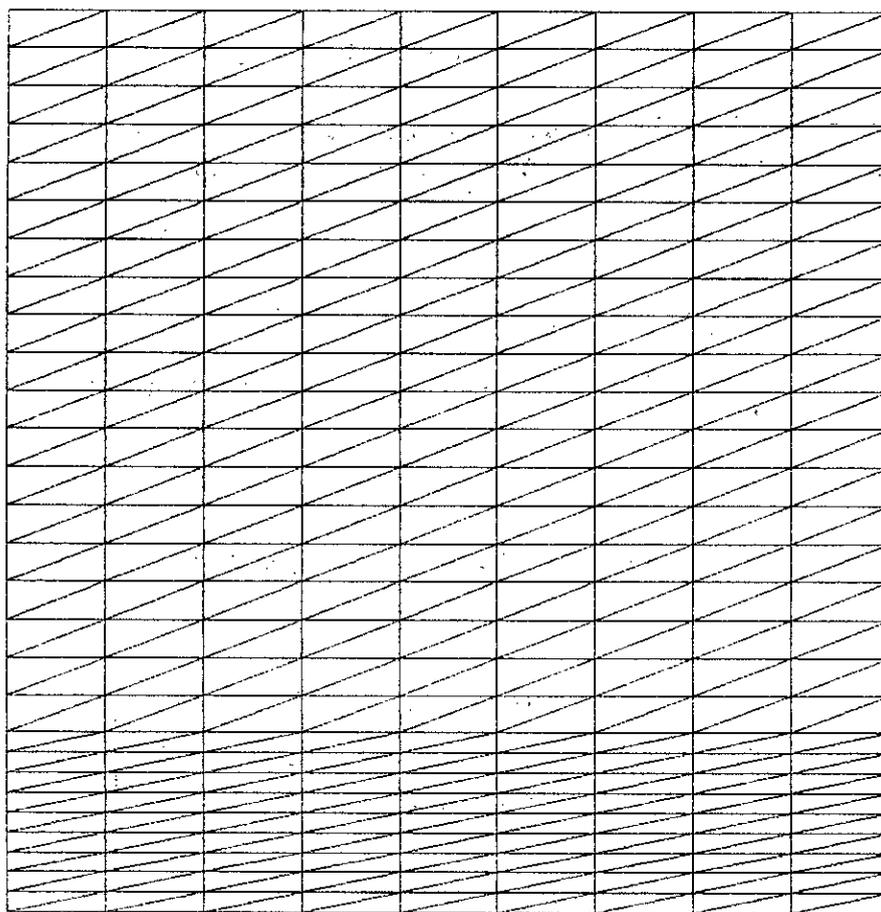


Fig v.3 maillage du domaine étudié

V.5 Approximation par élément finis de ϕ :

Nous allons supposer que la fonction inconnue ϕ varie linéairement à l'intérieur de chaque élément. Ainsi, nous pouvons approcher l'inconnue ϕ à l'intérieur de (Ω^e) par un polynôme du premier degré tel que :

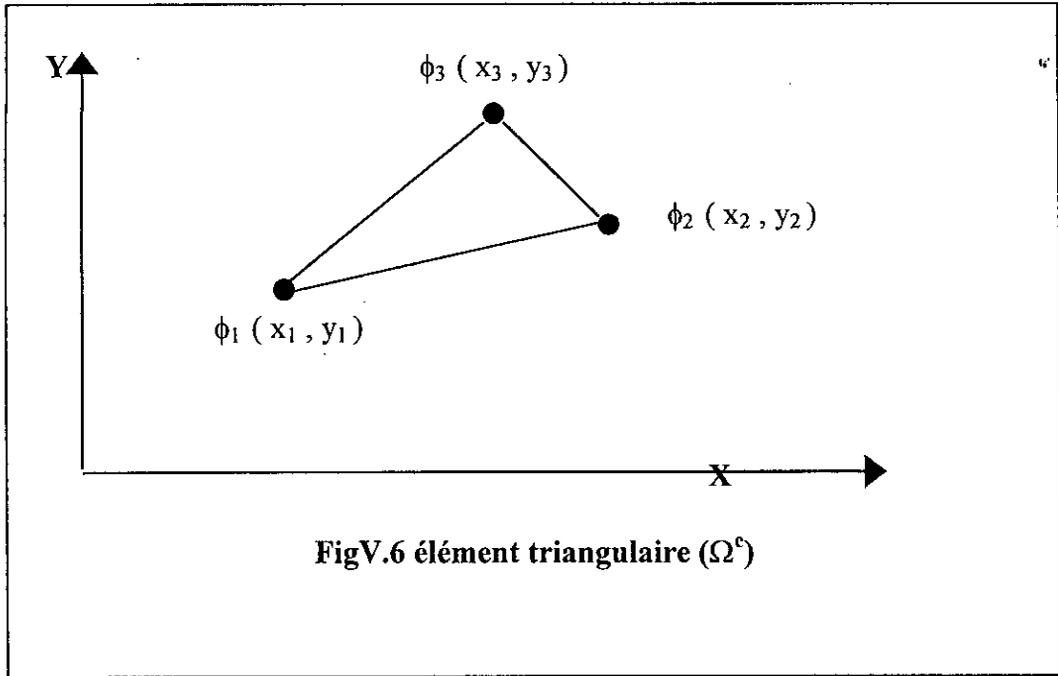
$$\phi^e(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y = (1 \ x \ y) \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{V.5}$$

pour les trois nœuds de l'élément (Ω^e) (FigV.6), nous aurons :

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{V.6}$$

d'où

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad \text{V.7}$$



En remplaçant (V.7) dans (V.5) , nous pouvons écrire :

$$\phi^e(x, y) = N_1(x, y) \phi_1 + N_2(x, y) \phi_2 + N_3(x, y) \phi_3 \quad \text{V.8}$$

où :

$N_i(x,y)$ ($i = 1,2,3$) , sont les fonctions d'interpolations telles que :

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (P_i + Q_i x + R_i y) \quad \text{V.9}$$

avec:

$$P_i = x_j y_k - x_k y_j \quad \text{V.10a}$$

$$Q_i = y_j - y_k \quad \text{V.10b}$$

$$R_i = x_k - x_j \quad \text{V.10c}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (P_i + P_j + P_k) \quad \text{V.10d}$$

i,j,k représentent toute permutation circulaire des indices 1,2,3 assignés dans le sens trigonométrique et Δ est l'aire du triangle (Ω^e).

Notons que : ($N_i(x,y) = 1$) au nœud i et prend la valeur 0 pour les autres nœuds, de la sorte, l'approximation sur tout le domaine (Ω) sera la somme des approximations élémentaires ϕ^e :

$$\phi = \sum_{e=1}^{ne} \phi^e(x, y) \quad \text{V.11}$$

ne : étant le nombre d'éléments triangulaires à l'intérieur de (Ω).

V.6 Minimisation de la fonctionnelle :

Considérons la fonctionnelle d'énergie (V.4)

$$\Pi(\phi) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)^2 \right] - P\phi \right\} dx dy$$

En remplaçant ϕ par l'expression (V.11), nous obtenons :

$$\Pi(x,y) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \sum_{e=1} \phi^e(x,y) \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \sum_{e=1} \phi^e(x,y) \right)^2 \right] - P \sum_{e=1} \phi^e(x,y) \right\} dx dy$$

soit :

$$\Pi(\phi) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right)^2 \right] - P \phi^e \right\} dx dy \quad \text{V.12}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\Pi = \sum_{e=1}^{ne} \Pi^e$$

avec :

$$\Pi^e(x, y) = \iint_{\Omega^e} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^e}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \right)^2 \right] - P \phi^e \right\} dx dy \quad \text{V13}$$

Le critère de RAYLEIGH-RITZ, stipule que la fonctionnelle Π est minimum si :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n$$

où

n_e : est le nombre de nœuds dans le domaine (Ω).

Soit, en vertu de (V.13) :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\sum_{e=1}^{n_e} \Pi^e \right) = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \Pi^e}{\partial \phi_i} \quad \text{V.15}$$

Ce résultat montre que la fonctionnelle d'énergie Π est minimum dans le domaine entier (Ω), si elle l'est dans chaque sous-domaine (Ω^e).

V.7 Construction du système d'équations algébrique :

L'équation (V.15) permet d'écrire, pour chaque élément triangulaire (Ω^e) de sommets u,j,k, les équations suivantes :

Pour le sommet i :

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \phi_i} = \iint_{\Omega^e} \left\{ \left[\frac{\partial \phi^e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right) \right] - P \frac{\partial \phi^e}{\partial \phi_i} \right\} dx dy \quad \text{V.16}$$

La relation (V.8) permet d'écrire :

$$\phi^e(x, y) = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k$$

nous aurons donc :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi^e}{\alpha} &= \frac{\partial N_i}{\alpha} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\alpha} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\alpha} \phi_k & , & & \frac{\delta \phi^e}{\alpha} &= \frac{\partial N_i}{\alpha} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\alpha} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\alpha} \phi_k \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\delta \phi^e}{\alpha} \right) &= \frac{\partial N_i}{\alpha} & , & & \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\delta \phi^e}{\alpha} \right) &= \frac{\partial N_i}{\alpha} \\ \frac{\delta \phi^e}{\delta \phi_i} &= N_i \end{aligned}$$

et en remplaçant dans (V.16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^e}{\partial \phi_i} &= \iint_{\Omega^e} \left\{ \left[\left(\frac{\partial N_i}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\beta} \right)^2 \right] \phi_i + \left[\frac{\partial N_i}{\alpha} \frac{\partial N_j}{\alpha} + \frac{\partial N_i}{\beta} \frac{\partial N_j}{\beta} \right] \phi_j \right. & \text{V.17} \\ & \left. + \left[\frac{\partial N_i}{\alpha} \frac{\partial N_k}{\alpha} + \frac{\partial N_i}{\beta} \frac{\partial N_k}{\beta} \right] \phi_k - P N_i \right\} dx dy \end{aligned}$$

En faisant, de la même façon, le calcul pour les sommets j et k, nous obtenons un système de trois équations à trois inconnues qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[K^e] \{ \phi^e \} = \{ F^e \} \quad \text{V.18}$$

où :

- [K^e] : matrice rigidité élémentaire de dimension 3x3.
- { φ^e } : vecteur des variables inconnues de rang 3.
- { F^e } : vecteur sollicitation élémentaire de rang 3.

Après intégration dans l'élément (Ω^e), nous obtenons les expressions suivantes pour les termes K_{ij}^e de [K^e] et F_i^e de {F^e} :

$$K_{ij}^e = \frac{Q_i Q_j - R_i R_j}{4\Delta} \quad \text{V.19.a}$$

$$F_i^e = \frac{P\Delta}{3} \quad \text{V.19.b}$$

V.8 Extension et assemblage des matrices et vecteurs élémentaires :

L'application du critère de minimisation à chaque élément conduit à la construction de (ne) matrices élémentaires $[K^e]$, et (ne) vecteurs élémentaires $\{F^e\}$. Ce qui nous intéresse cependant, c'est d'obtenir le vecteur solution $\{\phi\}$ qui minimise Π dans tout le domaine (Ω). On construit alors (ne) matrices $[K^e]$ de dimension (nxm) et (ne) vecteurs $\{F^e\}$ de rang n, dont les éléments non nul sont les termes de rang i,j,k . Ainsi, on réalise une extension des matrices et vecteurs élémentaires.

L'assemblage des (ne) matrices $[K^e]$ ainsi obtenues, se fait par sommation de celles-ci pour aboutir à la matrice rigidité globale $[K]$ de dimension (nxm). Il en est de même pour les (ne) vecteurs $\{F^e\}$ pour aboutir au vecteur sollicitation globale $\{F\}$ de rang (n). (n) et (ne) représentent successivement le nombre de nœuds et le nombre d'éléments dans le domaine (Ω).

Le système ainsi obtenu est :

$$[K] \{\phi\} = \{F\} \quad \text{V.20}$$

V.9 Introduction des conditions aux limites :

Après la construction de la matrice globale $[K]$, on se doit d'imposer les conditions aux limites spécifiques à notre problème, qui sont de deux types :

V.9.1 Condition de DIRICHLET :

Celle-ci, impose une valeur fixe de ϕ sur une portion de la frontière du domaine étudié. Nous aurons alors :

- pour les vitesses : $W = 0$ sur le contour B_1B_2, B_2B_3
- pour les températures : $\theta = \theta_p$ sur le contour B_1B_2, B_2B_6

V.9.2 Condition de NEUMANN :

Dans ce cas, la dérivée normale de ϕ est imposée sur une partie de la frontière du domaine Ω . Nous aurons alors :

- pour les vitesses : $\frac{\partial W}{\partial N} = 0$ sur le contour B_3B_4, B_4B_1

- pour les températures : $\frac{\partial \theta}{\partial N} = 0$ sur le contour B_1B_5

$$\frac{K_A}{l} \frac{\partial \theta}{\partial N} = h'_R (\theta - i) \quad \text{sur le contour } B_5B_6$$

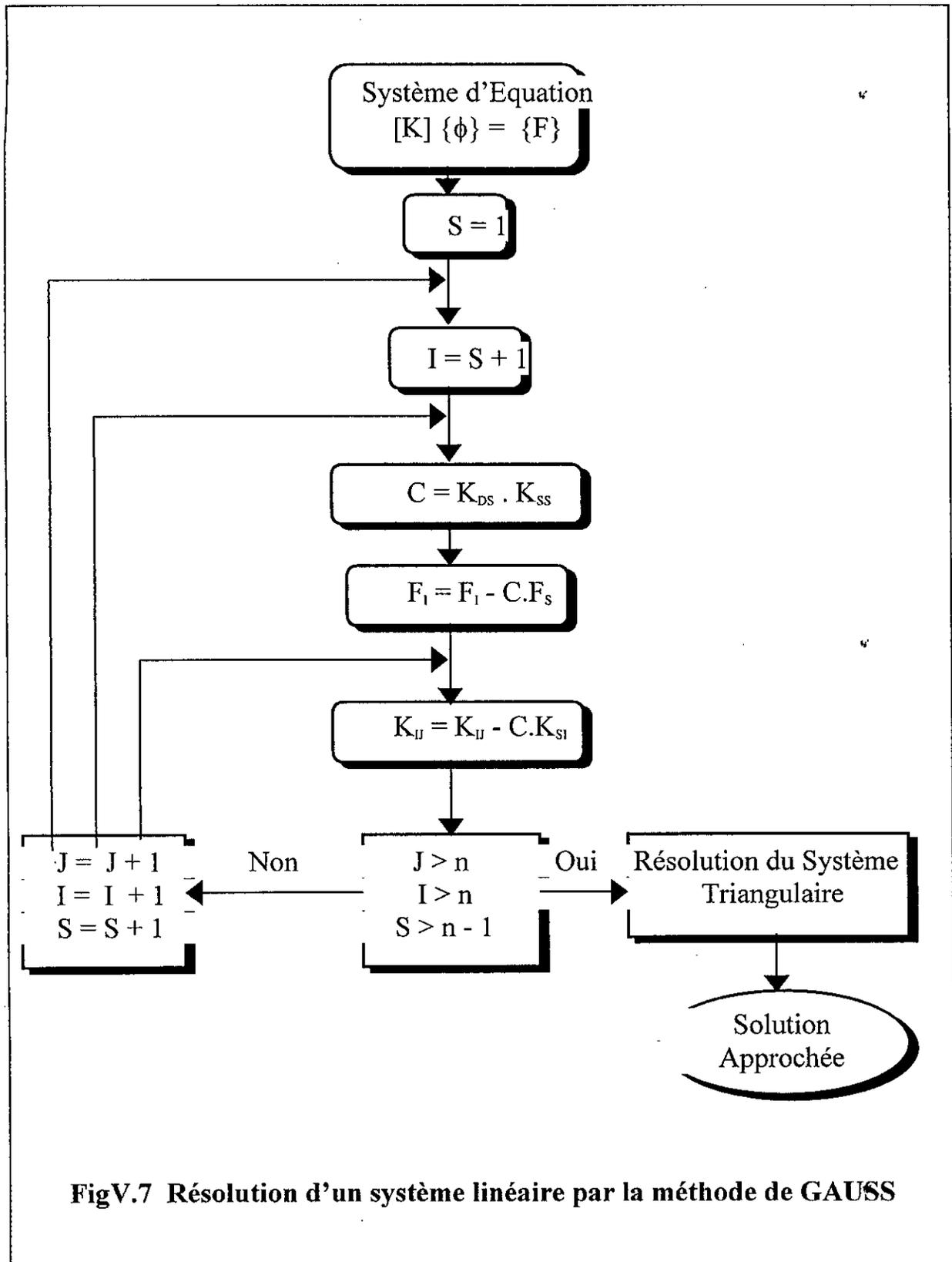
Les conditions de NEUMANN (V.3d) et (V.3f), et les conditions de passages (V.3b) et (V.3c), sont automatiquement vérifiés lors de formulation du problème.

Les conditions de DIRICHLET peuvent être introduite dans le système de plusieurs manières. Dans notre cas, le choix s'est porté sur la méthode du terme diagonal dominant. La matrice $[K]$ est d'abord assemblée sans tenir compte des conditions aux limites, puis pour chaque nœud i dont la valeur ϕ_i est imposée et égale à ϕ_i , on apporte les changements suivants :

- on remplace la matrice rigidité globale K_i par $K_{ii} + \alpha$. α étant un nombre très grand devant les termes K_{ii} .
- de la même façon, F_i est remplacé par $\alpha \phi_i$ dans le vecteur des sollicitations globales.

V.10 Résolution du système d'équations issu de la discretisation :

Une multitude de méthodes numériques permettent de résoudre le système V.20. Dans le cas linéaire notre choix s'est porté sur la méthode de pivotation de GAUSS [20], qui a l'avantage de résoudre des systèmes à matrice $[K]$ quelconque (symétrique ou non, creuse ou non, bande ou non). L'organigramme de (FigV.7) montre la transformation d'un système d'équation en un système triangulaire (méthode d'élimination de gauss).



FigV.7 Résolution d'un système linéaire par la méthode de GAUSS

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons développé les étapes nécessaires à la résolution d'un problème physique par la méthode des éléments finis, en adoptant une formulation variationnelle. Par la suite, nous avons élaboré un programme de calcul basé sur cette méthode qui nous permettra par la suite de déterminer la distribution des vitesses et des températures du problème étudié.

DISCUSSION DES RESULTATS

Le procédé de fabrication du verre est un procédé à haute température, et pour de raisons de concurrence et de coût de fabrication, elle attache une grande importance à l'optimisation du rendement de production et à l'optimisation énergétique du procédé de fabrication du verre.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus, suite de la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, qui régissent l'écoulement dans un four à fusion. Ces résultats sont décrits sur des graphes dont les variables sont données sous formes adimensionnelles.

Grâce au programme de calcul que nous avons élaboré, en vue de prédire le comportement thermohydrolique de l'écoulement étudié, nous avons fait ressortir les profils de vitesse et de température.

VI.1. PROFILS DE VITESSES

La répartition des vitesses représente un paraboloïde qui s'élargit avec la hauteur du verre fondu.

La figure VI.1. représente les profils des vitesses ($\frac{W}{W}$) dans le four. Nous pouvons remarquer que les vitesses adimensionnelles auprès de la paroi sont considérables puis elle diminue jusqu'à une valeur ($\frac{W_{\max}}{W} = 2,065$) proche de la surface du verre. Cette valeur peut diminuer ou augmenter suivant la chaleur de chauffe et la durée de ce chauffage, car on sait que la viscosité est liée directement en sens inverse avec la température, malgré qu'on la suppose constante mais en réalité elle est variable, ce qui fait que la vitesse maximum se trouve à la surface.

Vitesse maximum = 2.065

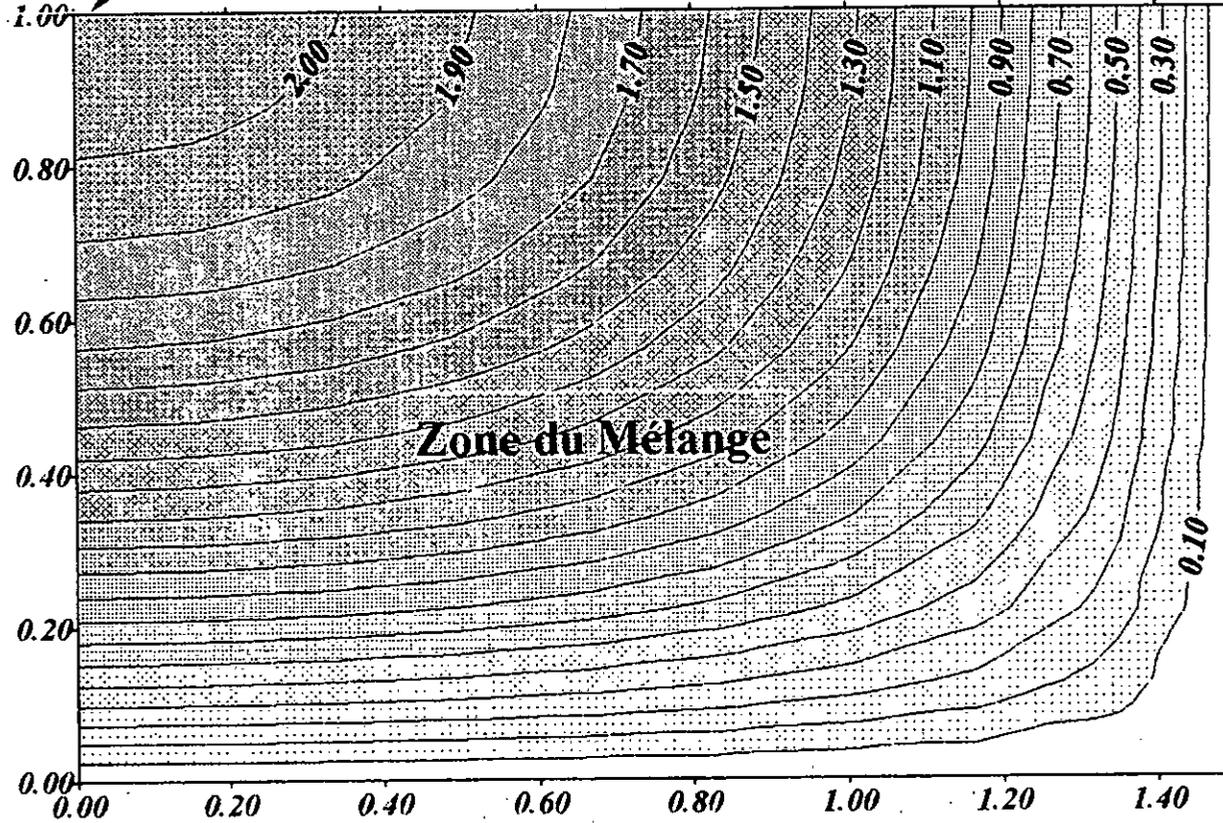


Fig.1 profil des vitesses dans mélange en grandeurs adimensionnelles

VI.1. PROFILS DE TEMPERATURES

Le profil de température constitue un paramètre essentiel de la conduite des fours. Il serait particulièrement intéressant de relier cette information à d'autres grandeurs caractéristiques du procédé mis en œuvre. On peut citer : l'épaisseur du verre fondu, sa concentration en in colorant, la température du fond ainsi que les propriétés des parois.

La distribution des températures adimensionnelles dans le verre et dans l'enceinte est obtenue en supposant que les conductivités thermiques sont constantes, ainsi que la chaleur dégagée par le four. Les parois latérales sont considérées adiabatiques, et les propriétés radiatives indépendantes de la longueur d'onde et de la direction ; pour chaque surface (la voûte, surface du verre), on a ainsi $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho$

Le flux incident sur toute la surface y est uniformément reparti.

$$\frac{h_k}{h} = 1,78, \quad g = 4110,39 \text{ W/m}^2, \quad k = 3 \text{ W/m} \text{ } ^\circ\text{C} \text{ à } 1400^\circ\text{C}.$$

Ces différentes valeurs sont obtenues soit par abaque soit par calcul (voir Annexe).

La figure VI.2 représente les isothermes des températures adimensionnelles (θ) pour le verre fondu et l'enceinte dans un four à fusion.

On remarque que les températures diminuent au fur et à mesure qu'on s'approche du centre du four jusqu'à une température minimale ($T = -2.505$), dans la zone du verre, mais en réalité, vu le rayonnement important du verre et le chauffage qui se fait à sa surface, la température diminue dans la zone du verre d'une manière décroissante à partir de la surface, et dans la zone du gaz elle augmente au fur et à mesure qu'on s'en va vers la voûte. Cette anomalie est due au fait que les conditions aux limites qui ont été posées dans le programme.

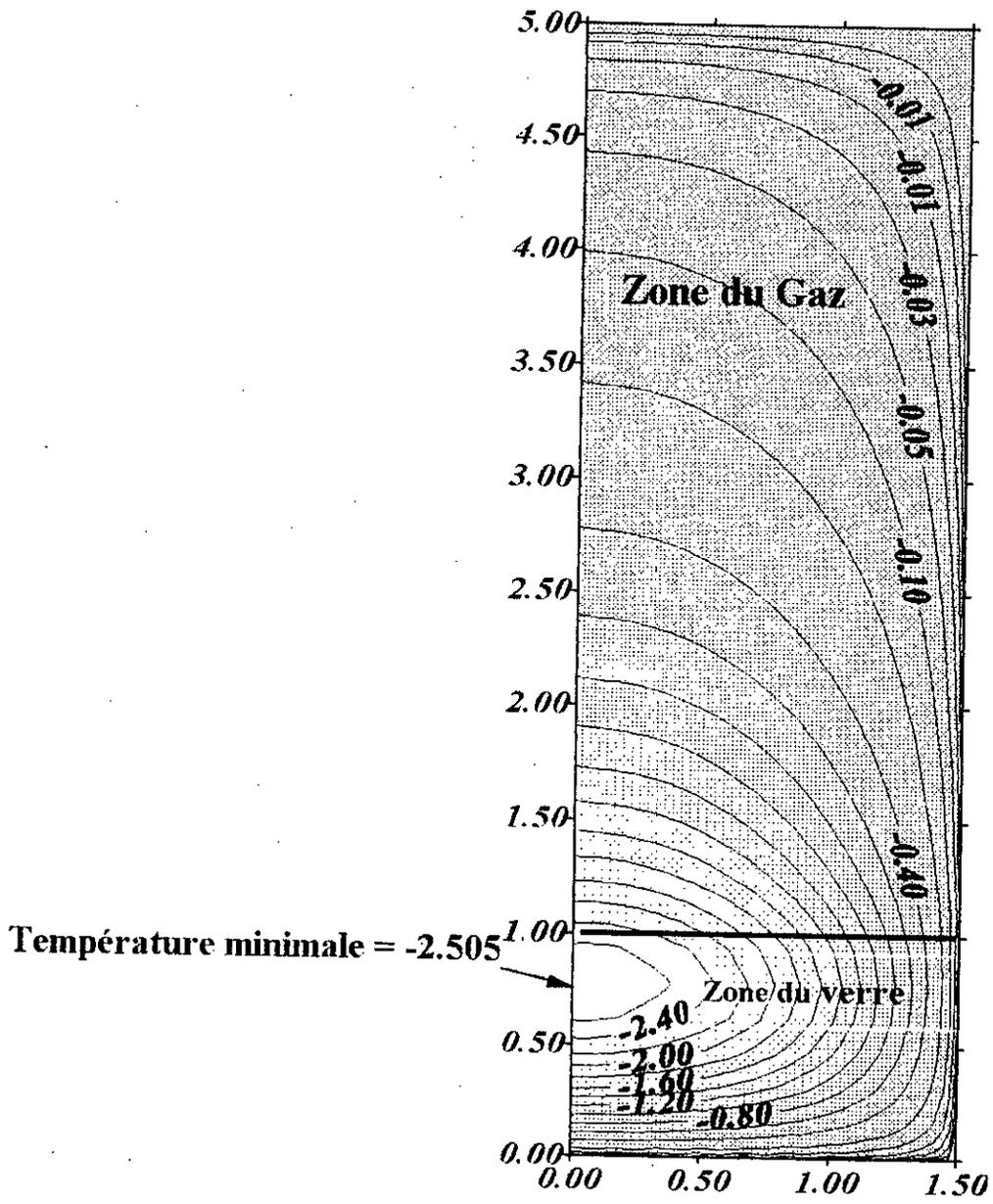


Fig.2 profil des températures dans le four en grandeurs adimensionnelles

CONCLUSION

Le contrôle de température au niveau du four est important puisqu'elle permet de réguler la vitesse de fusion de la composition permettant ainsi de tirer plus ou moins de verre. De plus un gradient de température important accroîtrait les mouvements de convections à l'intérieur du bain entraînant une amélioration de l'échange flamme - verre.

Nous avons mis au point un programme de calcul en utilisant la méthode des éléments finie, afin de terminer les profils de Vitesse et de Température. Les différentes équations que nous avons posées, commençons par les équations fondamentales de la mécanique du fluide en essayant d'approcher au maximum les conditions réelles, malgré que cela reste un peut difficile, vu la complexité du phénomène.

Dans le verre, la chaleur se transmet par la conduction et rayonnements - qui associe les phénomènes d'absorption, d'émissions et de diffusions sur certaines bandes spectrales - a haute température on a négligé la variation de certains paramètres en fonction de température, comme la conductivité, la viscosité est surtout on n'a pas en considération la longueur d'ondes pour le rayonnement.

La mise en œuvre de ce programme nous a permis d'avoir un aperçu approximatif sur les profils de vitesse et température, il va de soit que la connaissance de l'évolution de la forme de profil dans le four aide à délimiter les domaines de validités de certains modèles analytiques détaillés de transfert thermique dans le four et peut éventuellement servir a terme a un meilleur contrôle des procédés.

Bibliographie

- [1] Duval " Le verre " coll Que sais-je ? PUF Paris 1974
- [2] E.Savoy : " Traité technique du verre " Ed. Entreprise Martin Villeneuve 1989
- [3] R.Haase " Thermodynamische der Mischphasen " Berlin 1953
- [4] R.PERRIN et J.P.SCHARP " Chimie industrielle " Tome II Ed. Masson Paris 1995.
- [5] H.Scholtze : "Le verre :nature, structure et propriétés"
2^{ème} Edition Institut du verre Paris 1980.
- [6] H.RAWSON : " Properties and applications of glass " Elsevier New york 1954.
- [7] H.COLE : "Viscosity-Temperature relations in glass "
I.C.G Institut du verre Charleroi 1970.
- [8] G.W.Morey : " The properties of glass "
2^{ème} ed.Reinhold publishing corporation New york 1954.
- [9] P.DANE : " guide pratique pour l'utilisation du verre dans les ensembles mécaniques "
Ed DUNOD Paris 1971.
- [10] J.E.STANWORTH : " Physical properties of glass " Clavendon Press 1950.
- [11] A. PAUL : " Chemistry of glasses " Chapman et all New york 1982.
- [12] E.y.VERNAZ, N.JAQUET- FRANCILLON, Verre Vol 3 n° 3 Juin 1997
- [13] WINNACKER " Technologie minérale " Tome IV Ed. EYROLLES Paris 1969.
- [14] J.ZARZYCKI : " Les verres et l'état vitreux. " Ed. Masson Paris 1982.
- [15] I.BULAVIN et coll " Heat processus in glass and silicate Technology "
Ed. Mir Moscou 1986.
- [16] P.PIGAGNIOL : "Les industries verrières. " Ed. Dunod Paris 1966.

- [17] Symposium sur la fusion du verre
6 - 10 Octobre 1958
Bruxelles.
- [18] R.COMOLET
Mécanique expérimentale des fluides Tome 2
2^{ème} édition MASSON Paris 1976.
- [19] INCROPERA
Fundamental of Heat and Mass Transfer
- [20] JEAN.CLAUDE.SABONNADIÈRE
Eléments finis et cao
HERMES Paris - Londres - Lausanne.
- [21] H. Scholtz
Le verre, Nature, Structure et propriétés
2^{ème} édition Institut du verre
Paris 1980.
- [22] HAASE.R
Thermodynamique der Mischphasen.
Berlin 1956.
- [23] P.COLONOT, G.GALLET
Le verre et la céramique dans la technique du vide.
édition EYROLLES Paris 1962.
- [24] WINNACKER
Technologie minérale Tome IV
édition EYROLLES Paris 1968.
- [25] A.LEDHTIEV
Théorie des échanges de chaleur et de masse.
édition MIR Moscou.
- [26] P.PIGANIOL
Les industries verrières
édition DUNOD Paris 1966.
- [27] I. BULAVIN, A.RAPOPORT
In glass and silicate technologie
édition MIR Publishers Moscou.
- [28] H.S.CARSLAW
Condition of heat in solids
2^{ème} édition Oxford at thearendon press.
- [29] LINDON C. THOMAS
Fundamental of heat transfer.
1980.

[30] J.F.SACADURA

Transfert thermique

édition MAC GRAW HILL BOOK Lyon 1977

[31] J.ZARZYCKI

Le verre à l'état vitreux

édition MASSON Paris 1982.

[32] G.K.BAMFORD

« Journal of non-crystalline solids » 47.1 (1982) 1-20