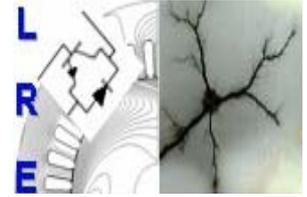




École Nationale Polytechnique d'Alger  
Département de Génie Électrique  
Laboratoire de Recherche en Électrotechnique



## MÉMOIRE DE MAGISTER

*Spécialité*  
ÉLECTROTECHNIQUE

*Option*  
Machines Électriques

*Présenté par*  
Thameur KIDAR  
(Ingénieur d'état en électrotechnique)

---

# Diagnostic de défauts électriques des machines asynchrones par des méthodes paramétriques basées sur la décomposition en sous espaces de la matrice de covariance

---

Soutenu le .. Octobre 2010, devant le jury composé de:

Président	Mr. Rachid IBTIOUEN	Professeur	ENSP
Directeur du mémoire	Mr. Omar TOUHAMI	Professeur	ENSP
Examineur	Mr. Adel BELOUHRANI	Professeur	ENSP
Examineur	Mr. Said MEKHTOUB	Maître de Conférences	ENSP
Examineur	Mr. Radouane TAHMI	Maître de Conférences	ENSP

ENSP, 10 Avenue Hassen Badi, El-Harrach, Alger.

# MÉMOIRE

*Présenté devant*

L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET

*Pour obtenir*

**Diplôme Master 2 Recherche**

*Spécialité*

Ingénierie des Matériaux et Procédés

*Option*

Fiabilité & Diagnostic

*Par*

**Thameur KIDAR**

---

**Diagnostic de défauts électriques des machines asynchrones  
par des méthodes paramétriques basées sur la décomposition  
en sous espaces de la matrice de covariance**

---

Mémoire soutenu le .. Octobre 2010, devant le jury composé de :

Mr. Rachid IBTIOUEN	Professeur	ENSP	Président
Mr. Omar TOUHAMI	Professeur	ENSP	Directeur du mémoire
Mr. Adel BELOUHRANI	Professeur	ENSP	Examineur
Mr. Said MEKHTOUB	Maître de conférence	ENSP	Examineur
Mr. Radouane TAHMI	Maître de conférence	ENSP	Examineur

# Remerciement

*L*ES travaux de recherche développés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du Laboratoire d'Analyse des Signaux et Processus Industriels de l'IUT de Roanne.

*Je remercie sincèrement Messieurs François GUILLET, directeur du LASPI, et Mohamed EL BADAOU, chef de l'option IMP, de m'avoir accueilli dans ce laboratoire. J'adresse mes vifs remerciements et ma profonde gratitude envers mes encadreurs, Monsieur Omar TOUHAMI, Professeur à l'École Nationale Supérieure Polytechnique d'Alger et Monsieur Guillaume BOULEUX, Maître de conférence à l'IUT de Roanne, pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apporté durant ces travaux. Je les remercie pour leurs conseils avisés, leurs nombreuses remarques et suggestions qui ont pu faire avancées le travail et surtout leur grande qualité humaine.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Adel BELOUHRANI, Professeur à l'École Nationale Supérieure Polytechnique d'Alger, qui, même s'il ne figurait pas dans l'encadrement administratif de ce mémoire, m'a permis de part son expérience, ses conseils, la pertinence de ses critiques et la finesse de ses suggestions d'améliorer ce travail.*

*Je remercie vivement Monsieur Rachid IBTIOUEN, Professeur à l'École Nationale Supérieure Polytechnique d'Alger, pour avoir accepté de présider le jury.*

*J'adresse également mes remerciements à Messieurs Said MEKHTOUB et Radouane TAHMI, Maîtres de conférences à l'École Nationale Supérieure Polytechnique d'Alger, de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.*

*Durant ces années de Magister, les membres administratifs et techniques de l'ENSP, du Centre Universitaire Roannais et du LASPI ont toujours su répondre présent à mes nombreuses sollicitations avec disponibilité, sympathie et bien sûr toutes leurs compétences. Qu'ils reçoivent toute ma gratitude.*

*Je ne saurais oublier les jeunes chercheurs et futurs docteurs du LRE et LASPI, qui durant mon stage, ont entretenu une très bonne ambiance. Je les souhaite du succès dans leurs recherches ainsi que dans leurs vies professionnelles.*

*Enfin, un grand merci pour ceux que je n'ai pu désigner et qui m'ont aidé de près ou de loin à parcourir ce chemin.*

*À mes chers parents*  
*À mes chers frères*  
*À Maroua et Omima*  
*À mes amis*

# Table des matières

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>11</b>
<b>I CONSTITUTION ET SURVEILLANCE DE LA MACHINE ASYNCHRONE À CAGE : ETAT DE L'ART</b>	<b>14</b>
I.1 Introduction . . . . .	14
I.2 Constitution de la machine asynchrone . . . . .	15
I.2.a) Le stator . . . . .	15
I.2.b) Le rotor . . . . .	16
I.2.c) Les organes mécaniques . . . . .	17
I.3 Présentation des défaillances du moteur asynchrone . . . . .	17
I.3.1 Définitions de quelques termes liés au diagnostic . . . . .	19
I.3.2 Défaillances d'ordre mécanique . . . . .	20
I.3.2.1 Défaillances des roulements . . . . .	20
I.3.2.2 Défaillances du flasque . . . . .	21
I.3.2.3 Défaillances de l'arbre . . . . .	22
I.3.3 Défaillances d'ordre électrique . . . . .	23
I.3.3.1 Défaillances des circuits électriques statoriques . . . . .	23
I.3.3.2 Défaillances des circuits électriques rotoriques . . . . .	24
I.4 Méthodes de surveillance de la machine asynchrone . . . . .	26
I.4.1 Méthodes basées sur l'analyse spectrale . . . . .	26
I.4.1.1 Analyses vibratoires de la machine . . . . .	27
I.4.1.2 Analyse des flux . . . . .	28
I.4.1.3 Analyse du couple électromagnétique . . . . .	28
I.4.1.4 Analyse des courants statoriques . . . . .	28
I.5 Conclusion . . . . .	29
<b>II MODELISATION DE LA MACHINE ASYNCHRONE A CAGE</b>	<b>30</b>
II.1 Introduction . . . . .	30
II.2 Modèle multi-enroulement de la machine asynchrone triphasé à cage . . . . .	31

II.2.1	Hypothèses simplificatrices . . . . .	32
II.2.1.1	Inductances de la machine . . . . .	32
II.2.2	Mise en équations de la machine . . . . .	33
II.2.2.1	Expression du couple électromagnétique ( $C_e$ ) . . . . .	40
II.3	Prise en compte du défaut dans le modèle . . . . .	42
II.3.1	Analyse des forces électromotrices en présence d'un défaut rotorique[16][2] . . . . .	45
II.4	Conclusion . . . . .	50

### **III MÉTHODES PARAMÉTRIQUES BASÉES SUR LA DÉCOMPOSITION EN SOUS ESPACES DE LA MATRICE DE COVARIANCE** **51**

III.1	Introduction . . . . .	51
III.2	LES MÉTHODES HAUTES RÉOLUTION . . . . .	52
III.2.1	La méthode MUSIC (Multiple Signal Classification) . . . . .	53
III.2.1.1	Calcul de la matrice d'autocorrélation ( $\hat{R}_x$ ) . . . . .	55
III.2.2	La méthode Root-MUSIC . . . . .	59
III.2.3	La méthode ESPRIT . . . . .	61
III.2.3.1	Estimation des fréquences . . . . .	61
III.2.4	Estimation des amplitudes, des phases et des puissances . . . . .	62
III.2.5	Estimation des fréquences des sources d'un signal à valeurs réelles . . . . .	65
III.2.6	Performances des estimateurs . . . . .	69
III.2.6.1	Borne de Cramer-Rao . . . . .	69
III.2.6.2	EQM en fonction du RSB . . . . .	69
III.3	MÉTHODES APPROXIMANT LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE . . . . .	71
III.3.1	La méthode MODE . . . . .	72
III.3.1.1	les perforamnces de MODE . . . . .	75
III.3.2	La méthode PLEDGE . . . . .	76
III.3.2.1	Estimation des amplitudes par l'utilisation des projection obliques . . . . .	79
III.3.2.2	les perforamnces de PLEDGE . . . . .	81
III.4	Conclusion . . . . .	83

### **IV DIAGNOSTIC DE DEFAUTS DE LA MACHINE ASYNCHRONE** **84**

IV.1	Introduction . . . . .	84
IV.2	Banc d'essais . . . . .	85
IV.3	Resultats expérimentaux . . . . .	87
IV.3.1	Analyse du spectre du courant statorique pour la machine saine . . . . .	88
IV.3.2	Analyse du spectre du courant statorique pour la machine défectueuse . . . . .	91
IV.3.2.1	Rotor avec une barre cassée . . . . .	91
IV.3.2.2	Rotor avec deux barres cassées . . . . .	94

IV.3.2.3 Rotor avec une portion d'anneau de court-circuit cassée . . . . .	97
IV.3.3 Analyse du spectre du courant statorique de la MAS alimentée par un onduleur . . . . .	100
IV.3.3.1 Rotor sain . . . . .	101
IV.3.3.2 Rotor avec une barre cassée . . . . .	102
IV.3.3.3 Rotor avec deux barres cassées . . . . .	104
IV.3.3.4 Rotor avec une portion d'anneau de court-circuit cassée . . . . .	106
IV.4 Etude de la vitesse . . . . .	109
IV.5 La matrice de covariance dynamique et le temps de calcul . . . . .	114
IV.6 Conclusion . . . . .	115
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>117</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>119</b>
<b>Annexe</b>	<b>123</b>

# Table des figures

I.1	<i>Photo du stator d'une machine asynchrone</i>	15
I.2	<i>Vue schématique du rotor à cage d'écureuil</i>	16
I.3	<i>Circuit magnétique constituant le rotor</i>	16
I.4	<i>Causes internes de défauts de la machine asynchrone triphasée à cage.</i>	18
I.5	<i>Causes externes de défauts de la machine asynchrone triphasée à cage.</i>	18
I.6	<i>Différentes défaillances des roulements à billes.</i>	21
I.7	<i>DSP de la fréquence instantanée du courant.</i>	21
I.8	<i>Représentation de l'excentricité statique et dynamique.</i>	22
I.9	<i>DSP du courant statorique avec 40% d'excentricité Vs. machine saine</i>	22
I.10	<i>Différents défauts statoriques de la machine asynchrone.</i>	24
I.11	<i>DSP d'un courant statorique</i>	26
I.12	<i>Principe de la surveillance par analyse spectrale</i>	27
I.13	<i>Mesures vibratoires sur la machine asynchrone</i>	27
II.1	<i>Schéma équivalent de la cage rotorique.</i>	34
II.2	<i>Schéma équivalent de la cage rotorique pour :</i>	42
II.3	<i>Circuits électriques adoptés pour la modélisation du rotor</i>	44
III.1	<i>Séparation de deux fréquences par MUSIC utilisant Hankel.</i>	57
III.2	<i>Séparation de deux fréquences par MUSIC utilisant <math>\hat{R}_x</math> classique.</i>	58
III.3	<i>Séparation de deux fréquences par MUSIC utilisant "corrmatx".</i>	59
III.4	<i>Réaction de courbe des fréquences au niveau des racines.</i>	60
III.5	<i>Estimation des puissances.</i>	64
III.6	<i>RMSE Vs. La taille de la fenêtre.</i>	64
III.7	<i>RMSE Vs. La différence entre les fréquences des sources.</i>	65
III.8	<i>La distribution des fréquences dans le plan Z.</i>	68
III.9	<i>Estimation des fréquences d'engrenage pour des signaux réels.</i>	68
III.10	<i>Estimation des fréquences d'engrenage pour des signaux complexes.</i>	68
III.11	<i>RMSE de MUSIC pour différents SNR.</i>	69
III.12	<i>RMSE d' ESPRIT pour différents SNR.</i>	70

III.13	<i>RMSE de Root-MUSIC pour différents SNR.</i>	70
III.14	<i>Performance des méthodes HR.</i>	70
III.15	<i>RMSE Vs. La taille de la fenêtre.</i>	75
III.16	<i>RMSE Vs. La différence entre les fréquences des sources.</i>	76
III.17	<i>La projection des vecteurs.</i>	81
III.18	<i>RMSE Vs. La taille de la fenêtre.</i>	82
III.19	<i>RMSE de PLEDGE, MODE et ESPRIT pour différents SNR.</i>	82
IV.1	<i>Différents types de rotors utilisés.</i>	85
IV.2	<i>Stator de la machine asynchrone a cage d'écureuil.</i>	86
IV.3	<i>Carte pour le conditionnement des signaux.</i>	86
IV.4	<i>Banc d'essais</i>	87
IV.5	<i>Schéma du banc d'essais</i>	87
IV.6	<i>Spectre temporel du courant statorique - machine saine -</i>	88
IV.7	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique - machine saine -</i>	88
IV.8	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique - machine saine -</i>	89
IV.9	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine saine -</i>	89
IV.10	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique avec MODE - machine saine -</i>	90
IV.11	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique avec PLEDGE - machine saine -</i>	90
IV.12	<i>Spectre du courant statorique - machine défectueuse -</i>	91
IV.13	<i>Spectre temporel du courant statorique - machine avec une barre cassée -</i>	92
IV.14	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec une barre cassée -</i>	92
IV.15	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec une barre cassée -</i>	92
IV.16	<i>Spectre du courant statorique avec PSD - machine avec une barre cassée -</i>	93
IV.17	<i>Spectre du courant statorique avec MODE - machine avec une barre cassée -</i>	93
IV.18	<i>Spectre du courant statorique avec PLEDGE - machine avec une barre cassée -</i>	94
IV.19	<i>Spectre temporel du courant statorique - machine avec deux barres cassées -</i>	95
IV.20	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec deux barres cassées -</i>	95
IV.21	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec deux barres cassées -</i>	95
IV.22	<i>Spectre du courant statorique avec PSD - machine avec deux barres cassées -</i>	96
IV.23	<i>Spectre du courant statorique avec MODE - machine avec deux barres cassées -</i>	96
IV.24	<i>Spectre du courant statorique avec PLEDGE - machine avec deux barres cassées -</i>	97
IV.25	<i>Spectre temporel du courant statorique - machine avec une portion d'anneau de court circuit cassée -</i>	98
IV.26	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec une portion d'anneau de court circuit cassée -</i>	98
IV.27	<i>Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec une portion d'anneau de court circuit cassée -</i>	98
IV.28	<i>Spectre du courant statorique avec PSD - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées -</i>	99

IV.29	Spectre du courant statorique avec <i>MODE</i> - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées - . . . . .	99
IV.30	Spectre du courant statorique avec <i>PLEDGE</i> - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées - . . . . .	100
IV.31	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PSD</i> - machine saine - . . . . .	101
IV.32	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PSD</i> - machine saine - . . . . .	101
IV.33	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>MODE</i> - machine saine - . . . . .	102
IV.34	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PLEDGE</i> - machine saine - . . . . .	102
IV.35	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PSD</i> - machine avec une barre cassée - . . . . .	103
IV.36	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PSD</i> - machine avec une barre cassée - . . . . .	103
IV.37	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>MODE</i> - machine avec une barre cassée - . . . . .	104
IV.38	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PLEDGE</i> - machine avec une barre cassée - . . . . .	104
IV.39	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PSD</i> - machine avec deux barres cassées - . . . . .	105
IV.40	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PSD</i> - machine avec deux barres cassées - . . . . .	105
IV.41	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>MODE</i> - machine avec deux barres cassées - . . . . .	106
IV.42	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PLEDGE</i> - machine avec deux barres cassées - . . . . .	106
IV.43	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PSD</i> - Rotor avec une portion d'anneau de court circuit cassée-	107
IV.44	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PSD</i> - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées - . . . . .	107
IV.45	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>MODE</i> - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées - . . . . .	108
IV.46	Spectre fréquentiel du courant statorique avec <i>PLEDGE</i> - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées - . . . . .	108
IV.47	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>PSD</i> - machine saine - . . . . .	109
IV.48	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>PSD</i> - machine avec une barre cassée - . . . . .	109
IV.49	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>PSD</i> - machine avec deux barres cassées - . . . . .	110
IV.50	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>PSD</i> - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées - . . . . .	110
IV.51	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>PSD</i> - machine avec une barre cassée - . . . . .	111

IV.52	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>MODE</i> - machine avec une barre cassée -	111
IV.53	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>PLEDGE</i> - machine avec une barre cassée -	112
IV.54	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>PSD</i> - machine avec deux barres cassées -	112
IV.55	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>MODE</i> - machine avec deux barres cassées -	113
IV.56	Spectre fréquentiel de la vitesse avec <i>PLEDGE</i> - machine avec deux barres cassées - . . . . .	113
IV.57	Glissement de la matrice de covariance . . . . .	114
IV.58	Spectre du courant statorique par <i>PLEDGE</i> - trame 1 - . . . . .	124
IV.59	Spectre du courant statorique par <i>PLEDGE</i> - trame 2 - . . . . .	124
IV.60	Spectre du courant statorique par <i>PLEDGE</i> - trame 3 - . . . . .	125
IV.61	Spectre du courant statorique par <i>PLEDGE</i> - trame 4 - . . . . .	125

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La machine asynchrone est une des plus utilisées pour des applications nécessitant une puissance supérieure à quelques kilowatts. De plus, elle présente de nombreux avantages comme sa facilité de mise en oeuvre, son faible coût et sa robustesse.

Une mauvaise utilisation de ces machines conduit à des pannes désagréables. Ces pannes peuvent être d'origine mécaniques (excentricité du rotor, cassure des roulements,...), ou électriques (court circuit de bobinage statorique, rupture de barre ou d'anneau,...). Les pannes peuvent aussi être dues à des phénomènes extérieures comme la surtension.

L'objectif de ce mémoire est de diagnostiquer les machines asynchrones, c'est-à-dire on essaye de les traiter sans les démonter. Le diagnostic est largement développée pour assurer la continuité du fonctionnement de la machine d'une part, et pour son temps et son coût d'intervention réduits. Parmi les défauts de la machine asynchrone à cage qui sont très répandus, on trouve ceux du rotor. Ce sont ces derniers que nous tenterons de diagnostiquer à partir de l'analyse spectrale.

Il est connu que les défauts des machines apparaissent sous forme de piques fréquentiels. Précédemment, les chercheurs utilisaient des outils de surveillance et de détection de pannes trop coûteux et basés sur des algorithmes classiques. La plupart de ces méthodes estiment le spectre des amplitudes plutôt que les fréquences. Dans ces algorithmes, pour bien s'approcher des fréquences réelles, il faut choisir de longues trames d'analyse. On trouve parmi ces méthodes d'estimation des amplitudes des algorithmes comme la PSD, Capon et le périodogramme

moyenné. Nous préciserons ici que ces méthodes sont de type non-paramétrique.

Il existe également d'autres méthodes, plus robustes, dites paramétriques mais qui exigent un coût calculatoire très lourd. La majorité de ces méthodes est basée sur la technique de vraisemblance. Pour éviter l'inconvénient du temps de calcul, les chercheurs proposent des algorithmes approximatifs le maximum de vraisemblance. Parmi ces estimateurs, on trouve MODE et PLEDGE qui sont basés sur la minimisation d'une fonction objective donnée. De plus, ils ont l'avantage de traiter les signaux courts. D'autre part, l'approche en sous-espaces conduit à la décomposition de la matrice d'autocorrélation en deux sous-espaces, sous-espace signal liée aux valeurs propres les plus grandes et un sous-espace bruit liée aux valeurs propres les plus petites.

À partir de la théorie en sous-espaces on rencontre deux types d'estimateurs : les uns sont basés sur le sous-espace bruit comme MUSIC et Root-MUSIC et les autres sont basés sur le sous-espace signal comme ESPRIT. Ces algorithmes sont étudiés dans ce mémoire et portent le nom de méthodes à haute résolution, *i.e.* ils ont une résolution au dessous la résolution de Fourier ( $\Delta f = \frac{f_{echant}}{la\ taille\ du\ signal}$ ). A fin de trouver le meilleur, nous comparons chacun d'eux à la borne de Cramer-Rao, borne statistique inférieure qui exprime la variance minimale d'un estimateur.

Dans le diagnostic, Il y a plusieurs types des signaux qui nous permettent d'estimer les fréquences des défauts, comme les tensions statoriques, la vitesse, le flux ou encore le couple mais la majorité demandent des capteurs sensibles et chers pour les relever. Cependant, le prix et la disponibilité de capteurs du courant dans les armoires de commande nous facilitent les tâches de traitements. C'est pourquoi nous allons utiliser ces signaux de courant pour le diagnostic des défauts rotoriques d'une machine asynchrone.

Dans le premier chapitre, de ce mémoire, nous allons présenter les éléments constitutifs la machine asynchrone à cage d'écurieil précisant les différents défauts pouvant survenir sur chacun d'eux. Au deuxième chapitre, nous allons exposer un modèle mathématique basé sur le couplage magnétique des circuits électriques pour analyser le comportement de la machine

dans les différents états. Ensuite, nous ferons un rappel sur les méthodes à haute résolution et le calcul des matrices de covariances. D'autre part, nous aborderons les trois techniques d'estimation MUSIC, Root-MUSIC et ESPRIT pour l'analyse spectrale, puis nous présenterons le rapport signal à bruit, l'erreur quadratique moyenne et nous montrerons leur intérêt dans l'appréciation des performances des estimateurs. On fera, ainsi, un rappel sur le maximum de vraisemblance qui permettra d'introduire les algorithmes "MODE" et "PLEDGE" montrant leurs performances par rapport à la borne de Cramer-Rao.

Le quatrième chapitre sera destiné à l'application des algorithmes MODE et PLEDGE sur les signaux de la machine asynchrone. Un banc d'essai et de mesures, composé de plusieurs machines asynchrones permet de valider les méthodes de diagnostic proposées. Trois niveaux de défaillances sont analysés, une barre cassée, deux barres cassées et une portion d'anneau de court-circuit, lorsque la machine est alimentée par le réseau triphasé.

# Chapitre I

## CONSTITUTION ET SURVEILLANCE DE LA MACHINE ASYNCHRONE À CAGE : ETAT DE L'ART

### I.1 Introduction

Le moteur asynchrone est de plus en plus utilisé dans les industries et les domaines où la puissance est supérieure à quelques kilowatts car il présente de nombreux avantages tels que sa puissance massique, sa facilité de mise en oeuvre, sa robustesse, son faible coût, etc. Mais c'est avec l'apparition des variateurs, dans les années 1980, qui permettent de faire varier la fréquence de rotation dans une large gamme, que son développement a largement été favorisé. En effet, les variateurs entrent dans la conception de nombreux procédés industriels associant des convertisseurs statiques et des machines électriques (traction électrique, laminoirs, levage, pompage, etc...)[1].

Dans ce premier chapitre, nous allons décrire les différents constituants de la machine asynchrone, ainsi que les défaillances les plus couramment observées. Ces défaillances peuvent provoquer des pannes et par conséquent des arrêts intempestifs préjudiciables au bon fonctionnement du système ainsi qu'à la sécurité des personnes.

## I.2 Constitution de la machine asynchrone

La machine asynchrone est constituée des principaux éléments suivants :

- a) le stator (partie fixe) constitué de disques en tôles magnétiques portant les enroulements responsables de magnétiser l'entrefer.
- b) le rotor (partie tournante) constitué de disques en tôles magnétiques empilés sur l'arbre de la machine portant un enroulement injecté.
- c) les organes mécaniques permettant la rotation du rotor et le maintien des différents sous-ensembles.

### I.2.a) Le stator

Il est constitué d'un enroulement bobiné réparti dans les encoches du circuit magnétique. Ce circuit magnétique est constitué d'un empilage de tôles dans lesquelles sont découpées des encoches parallèles à l'axe de la machine (Figure I.1). Le bobinage statorique peut se décomposer en deux parties : les conducteurs d'encoches et les têtes de bobines. Les conducteurs d'encoches permettent de créer dans l'entrefer le champ magnétique à l'origine de la conversion électromagnétique. Les têtes de bobines permettent, quant à elles, la fermeture des courants en organisant la circulation des courants d'un conducteur d'encoche à l'autre. L'objectif est d'obtenir à la surface de l'entrefer une distribution de courant la plus sinusoïdale possible, afin de limiter les ondulations du couple électromagnétique.

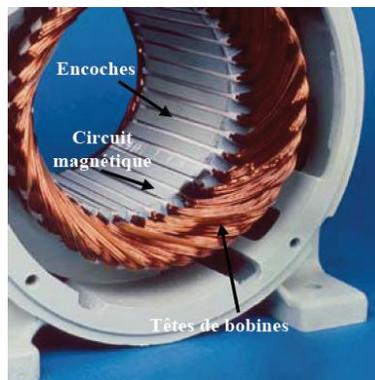


FIGURE I.1: *Photo du stator d'une machine asynchrone*

## I.2.b) Le rotor

Dans le rotor à cage, les anneaux de court-circuit permettent la circulation des courants d'un conducteur d'encoche (barre rotorique) à l'autre. Ces barres conductrices sont régulièrement réparties, et constituent le circuit du rotor (Figure I.2). Cette cage est insérée à l'intérieur d'un circuit magnétique constitué de disques en tôles empilés sur l'arbre de la machine analogue à celui du moteur à rotor bobiné (Figure I.3). Dans le cas de rotors à cage d'écoreuil, les conducteurs sont réalisés par coulage d'un alliage d'aluminium, ou par des barres massives de cuivre préformées et frettés dans les tôles du rotor. Il n'y a généralement pas, ou très peu, d'isolation entre les barres rotoriques et les tôles magnétiques, mais leur résistance est suffisamment faible pour que les courants de fuite dans les tôles soient négligeables, sauf lorsqu'il y a une rupture de barre[1]. Le moteur à cage d'écoreuil est beaucoup plus simple à construire que le moteur

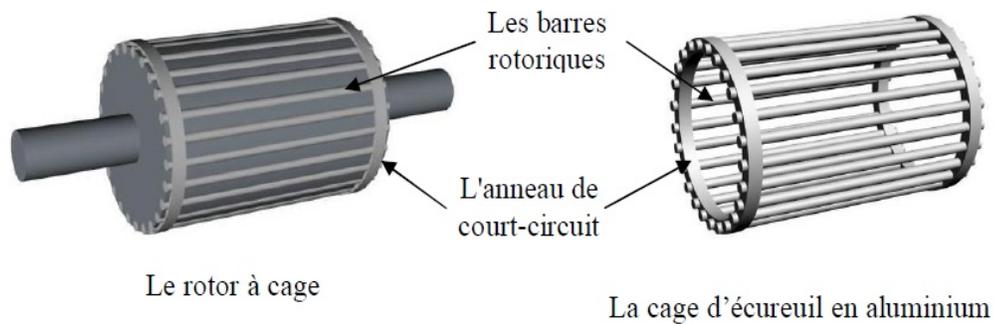


FIGURE I.2: *Vue schématique du rotor à cage d'écoreuil*

à rotor bobiné et, de ce fait, son prix de revient est inférieur. De plus, il dispose d'une plus grande robustesse. Il constitue la plus grande partie de moteurs asynchrones actuellement en service.



FIGURE I.3: *Circuit magnétique constituant le rotor*

### I.2.c) Les organes mécaniques

La carcasse sert de support, elle joue le rôle d'enveloppe et assure la protection contre l'environnement extérieur.

L'arbre est un organe de transmission. Il comprend une partie centrale qui sert de support au corps du rotor et un bout d'arbre sur lequel est fixé un demi accouplement. Il est généralement constitué en acier moulé ou forgé. Son dimensionnement est fonction des efforts de flexion (force centrifuge qui s'exerce sur lui, attraction magnétique radiale, etc...), des efforts radiaux et tangentiels dus aux forces centrifuges, des efforts de torsion (couple électromagnétique transmis en régime permanent, transitoire). Il est supporté par un ou plusieurs paliers. Ces paliers soutiennent le rotor et assurent la libre rotation. Le second palier est libre pour assurer les dilatations thermiques de l'arbre. Une isolation électrique de l'un des paliers assure l'élimination des courants dans l'arbre dû aux dissymétries des réluctances du circuit magnétique. Ils sont généralement à roulements pour les machines de petite et moyenne puissance[4].

Afin d'assurer la variation de vitesse des moteurs électriques mais aussi la conversion de l'énergie, de nombreuses machines se voient associer un convertisseur. Ainsi, de nos jours, on trouve dans un grand nombre de procédés industriels, des associations entre des convertisseurs statiques et des machines électriques (pompage, levage,...). Cela permet de fournir aux moteurs des tensions et des courants, de fréquence variable servant à commander la machine en couple ou en vitesse.

## I.3 Présentation des défaillances du moteur asynchrone

Bien que la machine asynchrone à cage d'écureuil soit réputée robuste, elle peut parfois présenter différents types de défauts. Ces défauts peuvent être soit d'origine électrique, soit d'origine mécanique. Un problème minime à l'étape de fabrication peut être à l'origine d'un défaut tout comme une utilisation non conforme de la machine. Certaines fois, nous pouvons aussi incriminer le milieu dans lequel la machine est utilisée (milieux corrosifs et/ou chimiques hostiles)[2].

Les origines des défauts peuvent être resumées dans ces deux schémas :

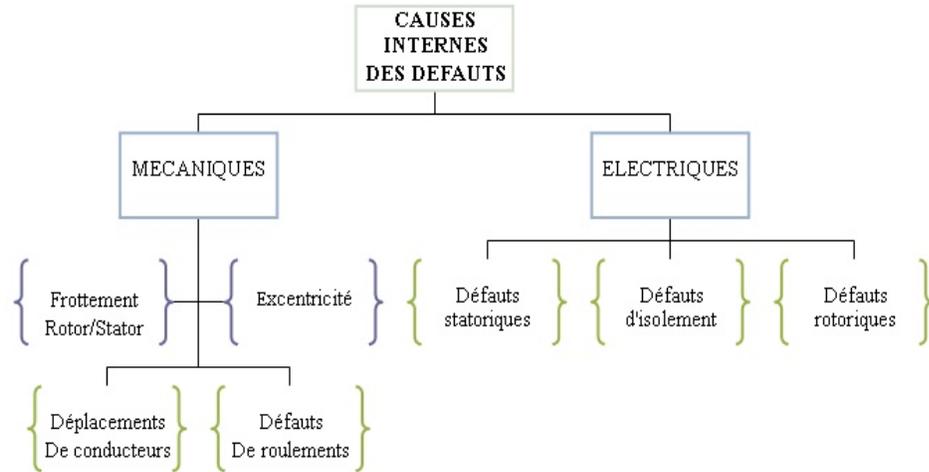


FIGURE I.4: Causes internes de défauts de la machine asynchrone triphasée à cage.

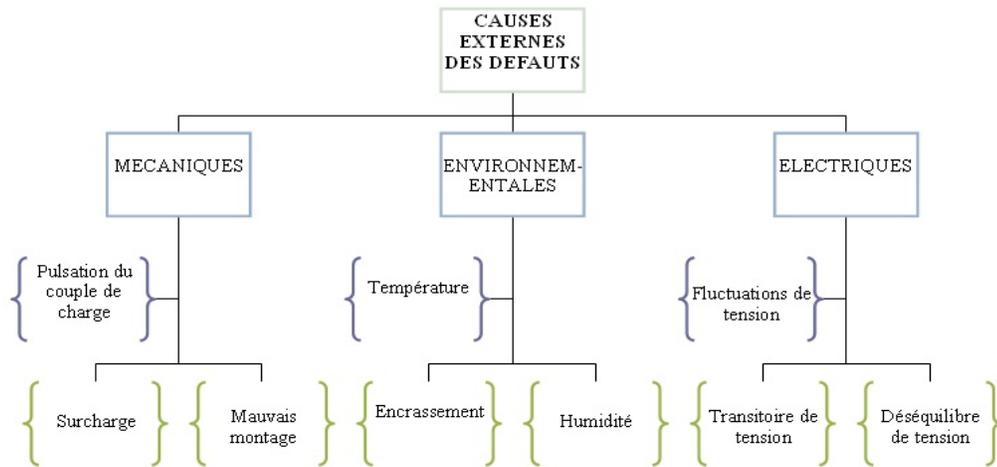


FIGURE I.5: Causes externes de défauts de la machine asynchrone triphasée à cage.

Une étude statistique, effectuée en 1988 par une compagnie allemande de systèmes industriels sur les pannes des machines asynchrones de faible et moyenne puissance (50KW à 200KW) a montré que les défauts statoriques sont les plus rencontrés dans ces types de machines. Une autre étude statistique faite sur des machines de grande puissance (100KW à 1MW) a indiqué que les contraintes mécaniques sont plus grandes pour ces types de machines ce qui explique le

taux élevé des pannes dues aux roulements[3].

Nous présentons dans un premier temps quelques définitions liés au diagnostic puis les différents défauts qui peuvent apparaître dans la machine asynchrone. Enfin, nous décrirons les méthodes les plus couramment rencontrées pour le diagnostic des défaillances de la machine asynchrone.

### I.3.1 Définitions de quelques termes liés au diagnostic

**Diagnostic :** Le terme diagnostic en grec "diagnosis" (par connaissance), désigne l'identification d'une maladie par ses symptômes. Dans cette courte définition on retrouve les trois mots clés :

- **Maladie :** il ne peut y avoir diagnostic que par rapport à une défaillance fonctionnelle (nous dirons anomalie). Dans notre cas les défauts des machines tournantes, encore faut-il pour parler de maladie que la présence de ce défaut constitue une entrave pour le bon fonctionnement de la machine.
- **Symptôme :** pour effectuer un diagnostic, il faut disposer d'informations significatives qui permettant de reconnaître le défaut si on veut être efficace. Il faut que l'information soit adoptée au besoin d'où la nécessité en général, de traiter celle-ci.
- **Identification :** c'est la démarche par laquelle on effectue le tri des informations qui sont en notre disposition pour sélectionner un ou plusieurs défauts possibles[5]. Donc de la définition, le diagnostic est l'identification de la cause probable de la défaillance à l'aide d'un raisonnement logique fondé sur un ensemble d'informations provenant d'une inspection d'un contrôle où d'un test.

**Maintenance :** toutes les activités destinées à maintenir ou à rétablir un bien dans un état ou dans des conditions données de sûreté de fonctionnement, pour accomplir une fonction requise.

**Fiabilité :** La fiabilité est l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions d'utilisation et pour une période de temps déterminée[6].

La fiabilité est destinée non seulement au concepteur et réalisateur mais aussi au responsable de la maintenance pour :

- Le choix judicieux de nouveaux équipements.
- La définition de la politique de maintenance à appliquer.
- En cas de besoin ; l'amélioration de leur disponibilité.

**Défaillance :** Evénement engendrant une modification du fonctionnement du procédé. L'état du système ne correspond plus à un fonctionnement normal, le système n'est plus apte à assurer totalement sa fonction.

**Résidu :** Signal indicateur de défauts. Il reflète la cohérence des données mesurées vis-à-vis du modèle comportemental du système.

### 1.3.2 Défaillances d'ordre mécanique

Les défaillances d'ordre mécaniques sont, en général, les plus rencontrées parmi tous les défauts que compte la machine asynchrone. Ces défauts peuvent apparaître au niveau des roulements à billes, des flasques ou encore de l'arbre moteur. Nous énumérons, dans la suite du document, certains de ces défauts sans pour autant en donner les détails. Nous pouvons trouver dans la littérature des ouvrages très complets qui traitent ces divers problèmes[7][8][9].

#### 1.3.2.1 Défaillances des roulements

Les roulements à billes jouent un rôle très important dans le fonctionnement de tout type de machines électriques. Les défauts de roulements peuvent être causés par un mauvais choix de matériau à l'étape de fabrication. Les problèmes de rotation au sein de la culasse du roulement, causés par un roulement abîmé, écaillé ou fissuré, peuvent créer des perturbations au sein de la machine. Nous savons que des courants électriques circulent au niveau des roulements d'une machine asynchrone ce qui, pour des vitesses importantes, peut provoquer la détérioration de ces derniers. La graisse, qui permet la lubrification et la bonne rotation des roulements peut, dans certaines applications, se rigidifier et causer une résistance à la rotation. L'analyse vibratoire de la machine ou l'analyse harmonique des courants statoriques permet de détecter ce type de défaillances[2].

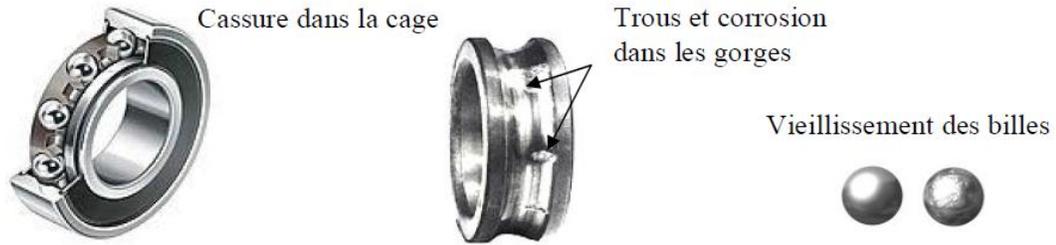


FIGURE I.6: Différentes défaillances des roulements à billes.

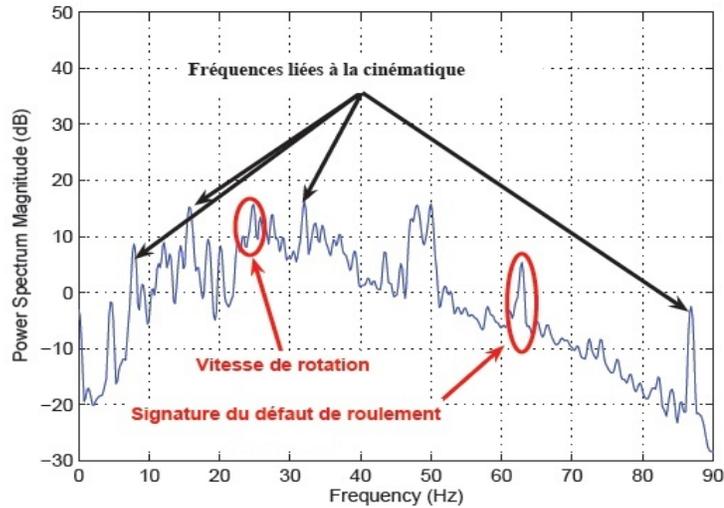


FIGURE I.7: DSP de la fréquence instantanée du courant.

### I.3.2.2 Défaillances du flasque

Les défauts créés par les flasques de la machine asynchrone sont le plus généralement causés à l'étape de fabrication. En effet, un mauvais positionnement des flasques provoque un désalignement des roulements à billes, ce qui induit une excentricité (statique et dynamique) au niveau de l'arbre de la machine. Trois cas d'excentricités sont généralement distingués[10] :

- l'**excentricité statique** : le rotor est déplacé du centre de l'alésage mais tourne toujours autour de son axe.
- l'**excentricité dynamique** : le rotor est positionné au centre de l'alésage mais ne tourne plus autour de son axe.
- l'**excentricité mixte** : associant les deux cas, statique et dynamique.

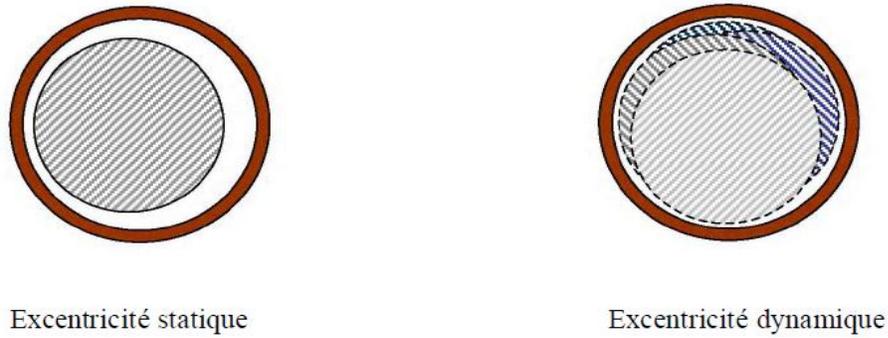


FIGURE I.8: Représentation de l'excentricité statique et dynamique.

Il est possible de détecter ce type de défaillance par une analyse vibratoire ou une analyse harmonique des courants absorbés par la machine.

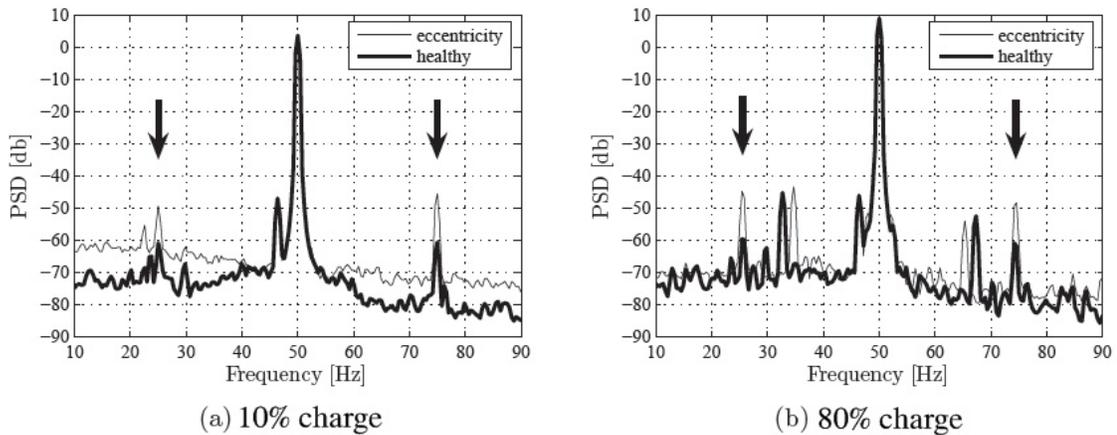


FIGURE I.9: DSP du courant statorique avec 40% d'excentricité Vs. machine saine

### I.3.2.3 Défaillances de l'arbre

L'arbre de la machine peut laisser paraître une fissure due à l'utilisation d'un mauvais matériau lors de sa construction. A court ou long terme, cette fissure peut mener à une fracture nette de l'arbre provoquant ainsi un arrêt irrémédiable de la machine asynchrone. Les milieux corrosifs peuvent aussi affaiblir la robustesse de l'arbre de la machine. Par exemple, l'humidité peut provoquer des micro-fissures et conduire à une destruction complète de la machine. Une excentricité statique, dynamique ou mixte peut induire des efforts considérables sur l'arbre

moteur, amenant ainsi une fatigue supplémentaire. Une analyse vibratoire, une analyse par ultrason, une analyse fréquentielle des courants absorbés ou simplement une analyse visuelle de l'arbre de la machine permet de détecter ce type de défaillance.

### **I.3.3 Défaillances d'ordre électrique**

Les défaillances d'origine électrique peuvent, dans certain cas, être la cause d'un arrêt de la machine (au même titre que les défaillances d'ordre mécanique). Ces défaillances se séparent en deux catégories bien distinctes. Nous pouvons citer les défaillances qui apparaissent au niveau des circuits électriques statoriques et celles qui apparaissent au niveau des circuits électriques rotoriques[11].

#### **I.3.3.1 Défaillances des circuits électriques statoriques**

L'apparition d'un défaut au niveau des circuits électriques statoriques de la machine asynchrone peut avoir des origines diverses. Nous pouvons citer, par exemple, les défauts de type courts-circuits inter-spires qui apparaissent à l'intérieur des encoches statoriques. Ce type de défaut peut être causé par une dégradation des isolants des spires du bobinage statorique. Nous pouvons citer aussi les courts-circuits apparaissant entre une phase et le neutre, entre une phase et la carcasse métallique de la machine ou encore entre deux phases statoriques. Ces défauts ont le plus souvent une origine mécanique. En effet, des vibrations excessives peuvent mener à un desserrement des boulons de la plaque à bornes de la machine créant ainsi le court-circuit. Une cosse mal serrée à la jonction du câble d'alimentation et des bornes de la machine peut être à l'origine d'une ouverture de phase. Le défaut le plus couramment rencontré reste encore la fusion d'un fusible de protection. Ces défauts peuvent être détectés par une analyse harmonique des courants absorbés par la machine.



Ouverture dans une phase de l'alimentation



Courts-circuits entre - phase



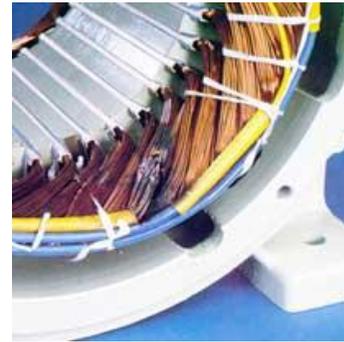
Déséquilibre de l'alimentation



Endommagement dû à la surcharge



Masse dans l'encoche



Dégradation causée par une surtension

FIGURE I.10: *Différents défauts statoriques de la machine asynchrone.*

### I.3.3.2 Défaillances des circuits électriques rotoriques

Deux types de défaillances peuvent apparaître au rotor d'une machine asynchrone à cage d'écurieul. La cage étant composée de barres et d'anneaux de court-circuit d'aluminium ou

de cuivre, une rupture partielle ou totale d'un de ces composants peut être considérée comme un défaut électrique rotorique. L'apparition de ce type de défaut peut être d'origine diverse. En effet, la rupture d'une barre ou d'un segment d'anneau de court-circuit peut être due à plusieurs phénomènes qui sont souvent indépendants les uns des autres. Nous pouvons citer par exemple une mauvaise utilisation de la machine asynchrone (charge trop importante) ou encore l'environnement hostile dans lequel elle fonctionne. Parmi les causes premières, nous pouvons énumérer[12] :

- Des contraintes mécaniques causées par des forces électromagnétiques ou des vibrations mécaniques excessives ;
- Des démarrages trop fréquents induisant des courants élevés dans les barres ou dans les segments d'anneaux ;
- Des contraintes environnementales causées par une contamination ou une abrasion de la cage rotorique (industrie chimique par exemple).

Une défaillance au niveau de la cage rotorique se situe généralement à la jointure entre une barre et un anneau de court-circuit. En effet, les barres rotoriques et les anneaux de court-circuit ne pouvant pas être construits d'un seul bloc (sauf pour les machines de petites puissances), une soudure est pratiquée aux extrémités de chaque barre pour relier ces dernières aux deux anneaux de court-circuit. La fragilité de ces soudures, par rapport aux barres et aux anneaux fabriqués d'un seul bloc, provoque, à ces endroits précis, une fragilité de la cage d'écureuil. Tout comme les défauts statoriques, les défauts rotoriques peuvent être détectés par une analyse harmonique des courants statoriques. Une analyse vibratoire de la machine asynchrone permet aussi détecter ce type de défaillances.

Comme la détection de la majorité des défauts d'une machine asynchrone repose sur une analyse vibratoire de la machine ou sur une analyse harmonique des courants absorbés au stator, le deuxième chapitre est dédiée aux différents outils nécessaires à l'analyse fréquentielle des signaux révélateurs d'un défaut mécanique et/ou électrique.

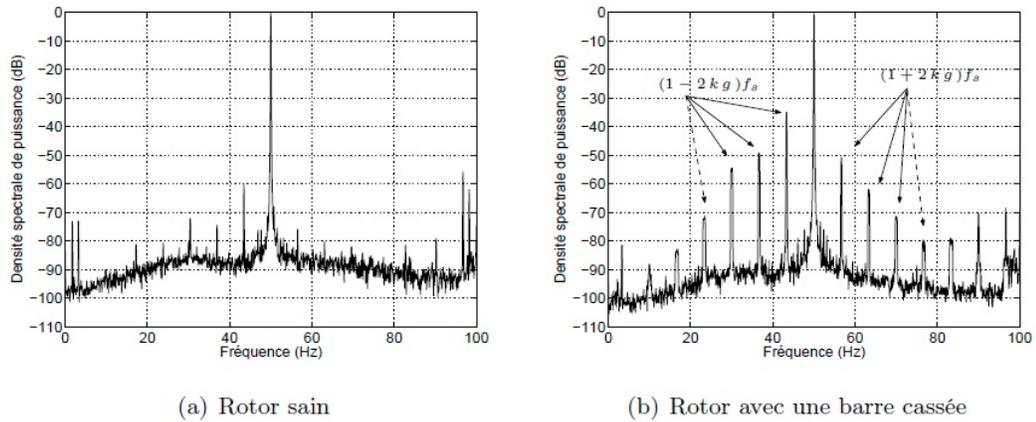


FIGURE I.11: *DSP d'un courant statorique*

## I.4 Méthodes de surveillance de la machine asynchrone

La surveillance est un moyen de garantir le bon fonctionnement des systèmes, la continuité de service et la protection du matériel et des personnels. Dans ce que suit nous allons décrire les méthodes les plus couramment rencontrées pour le diagnostic des défaillances de la machine asynchrone.

### I.4.1 Méthodes basées sur l'analyse spectrale

L'analyse spectrale est utilisée depuis de nombreuses années pour détecter des défaillances dans les machines électriques, essentiellement les ruptures de barres et/ou de portions d'anneaux au rotor des machines asynchrones, la dégradation des roulements, les excentricités et les courts-circuits dans les bobinages. Ces cas se prêtent bien à cette approche dans la mesure où de nombreux phénomènes se traduisent par l'apparition de fréquences directement liées à la vitesse de rotation ou à des multiples de la fréquence d'alimentation.

La surveillance par analyse spectrale de la machine asynchrone consiste à effectuer une simple transformée de Fourier des grandeurs affectées par le défaut, et à visualiser les fréquences parasites constituant la signature d'un défaut dans la machine (Figure.1.9). Les grandeurs choisies sont soit les grandeurs électriques (plus particulièrement les courants de ligne), soit les grandeurs mécaniques (vibration, couple électromagnétique) :



FIGURE I.12: Principe de la surveillance par analyse spectrale

#### I.4.1.1 Analyses vibratoires de la machine

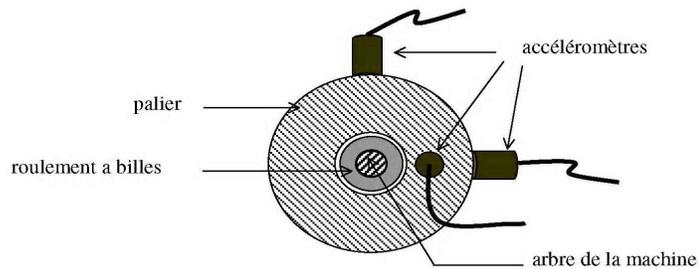


FIGURE I.13: Mesures vibratoires sur la machine asynchrone

L'analyse vibratoire de la machine asynchrone peut être menée grâce à des accéléromètres placés sur les paliers dans les directions verticales, axiales et radiales. Les vibrations de la machine fournissent des informations sur pratiquement tous les défauts fréquemment rencontrés, notamment ceux mécaniques[10]. Cependant, ces analyses vibratoires comportent certains inconvénients[2] :

- Problème d'accessibilité.
- Difficultés rencontrées dans les connexions mécaniques des accéléromètres pour effectuer les mesures nécessaires au voisinage direct du défaut.

De plus, le coût de ces capteurs reste relativement élevé par rapport aux autres capteurs tels que les capteurs de vitesse ou de courant. Pour s'affranchir de ces problèmes, les recherches focalisent leurs efforts pour détecter et localiser les défauts par l'analyse d'autres signaux.

### **I.4.1.2 Analyse des flux**

La conversion électromécanique de l'énergie est localisée dans l'entrefer. Cette conversion est donc affectée par tout déséquilibre magnétique, mécanique, électrique ou électromagnétique au rotor ou au stator. Le flux d'entrefer et par la même, l'induction magnétique dans cet entrefer, le flux embrassé dans les enroulements statoriques ou encore le flux de fuite dans l'axe du rotor sont des paramètres qui, à cause de leur sensibilité à tout déséquilibre de la machine, méritent d'être analysés[10].

Ces grandeurs sont difficilement mesurables mais des études ont été menées pour extraire des signatures spécifiques à certains défauts. Le flux axial est toujours présent dans les machines électriques à cause des dissymétries inhérentes à leur fabrication. L'étude des variations de flux peut donc être une solution pour détecter et localiser un défaut à travers l'utilisation de bobines exploratrices placées à l'extérieur de la machine, perpendiculairement à l'axe du rotor.

### **I.4.1.3 Analyse du couple électromagnétique**

Le couple électromagnétique développé dans les machines électriques, provient de l'interaction entre le champ statorique et celui rotorique. Par conséquent, tout défaut, soit au niveau du stator ou au rotor, affecte directement le couple électromagnétique.

L'analyse spectrale du signal du couple (mesuré ou estimé), donne des informations sur l'état du moteur[13].

### **I.4.1.4 Analyse des courants statoriques**

Les signaux évoqués précédemment permettent de détecter un grand nombre de défauts sur la machine. Cependant, ces signaux nécessitent la mise en place d'un grand nombre de capteurs (flux, couple mètre, accéléromètres,...) souvent onéreux, sensibles et délicats à placer dans des environnements contraignants[14].

Pour ces inconvénients et pour extraire de manière précise les informations relatives aux défauts, les recherches ont été particulièrement dirigées vers le spectre des courants statoriques pour deux raisons : Les courants sont faciles à mesurer, ils fournissent des informations sur de nombreux défauts[10].

Les défauts de la machine asynchrone se traduisent dans le spectre du courant statorique soit par[13] :

- L'apparition des raies spectrales dont les fréquences sont directement liées à la fréquence de rotation de la machine, aux fréquences des champs tournants et aux paramètres physiques de la machine (nombre d'encoche rotorique et nombre de paires de pôles).
- La variation de l'amplitude des raies spectrales, présentés dans le spectre du courant.

Cette approche de surveillance des entraînements électriques a été largement utilisée depuis ces dernières années, elle est connue sous le nom de MCSA (Motor Current Signature Analysis). L'avantage, eu égard aux signaux précédents, est que les capteurs de courants sont désormais présents dans tous les systèmes de commande des entraînements électriques et offrent donc, un accès aisé à la mesure sans une implémentation (de capteur) supplémentaire.

## I.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons rappelé brièvement la constitution de la machine asynchrone triphasée à cage, puis nous avons fait une présentation des différents défauts qui peuvent apparaître, et énoncé différentes méthodes de diagnostic de ces derniers. Notre travail se focalise sur l'étude et la détection des cassures de barres et de portions d'anneau de court-circuit dans la cage rotorique d'un moteur asynchrone. Afin de mener au mieux cela, il nous faut disposer d'un bon modèle mathématique, décrivant le comportement de la machine dans l'état sain et avec défaut. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre II

## MODELISATION DE LA MACHINE ASYNCHRONE A CAGE

### II.1 Introduction

L'objectif de la modélisation et la simulation de la machine asynchrone est de connaître son comportement dans différents états pour la contrôler et la commander. On dit qu'on peut modéliser un processus physique, si on est capable de prédire quel est son comportement (sortie) lorsqu'on le soumet à une sollicitation (entrée) connue.

Le problème de modélisation se pose lorsque l'ingénieur doit prendre une décision au sujet d'un phénomène dont il ne connaît le comportement qu'à partir des données expérimentales. Dans certains cas, la connaissance fondamentale des phénomènes en question nous permet de proposer un modèle mathématique bien précis (modèle de connaissance)[4].

Pour des raisons de commodité pratique, le modèle sera mathématique afin d'être simulé sur calculateur numérique. On cherche donc une relation mathématique qui lie les variables d'entrée et celles de sortie. Cette relation mathématique prend une certaine forme qui définit la structure du modèle. Elle fait intervenir des paramètres dont, en général, on ignore a priori les valeurs numériques.

Les progrès de l'informatique et du génie des logiciels permettent de réaliser des modélisations performantes et d'envisager l'optimisation des machines électriques. Ainsi la modélisation permet de guider les développements par une quantification des phénomènes. En outre, elle est d'un appoint précieux en permettant d'une part, de restituer une image de ce que l'on peut observer expérimentalement, et d'autre part de prévoir des comportements de la machine plus variés que ceux de l'observation expérimentale[3].

Pour obtenir le modèle d'un système ; trois tâches doivent être accomplies :

- Choisir le modèle ;
- Déterminer ses paramètres ;
- Vérifier sa validité.

La modélisation décrite dans ce chapitre, a pour objet d'exploiter la rupture de barres ou de portions d'anneaux de court-circuit pour une machine asynchrone à cage. Pour ce faire nous avons choisit un modèle basé sur un circuit maillé représentant la cage rotorique car il s'adapte bien au problème posé, puisqu'il décrit chaque élément de la cage par un circuit électrique équivalent.

## II.2 Modèle multi-enroulement de la machine asynchrone triphasé à cage

L'objectif est avant tout de posséder un modèle de la machine asynchrone qui met en évidence l'influence des défauts étudiés sur les grandeurs mesurables de la machine (courants, vitesse, couple,...), afin d'étudier les phénomènes mis en jeu.

Pour se faire, on va modéliser le rotor de la machine par des mailles reliées entre elles électriquement et couplées magnétiquement, afin de disposer d'un modèle mathématique où les paramètres mesurables apparaissent explicitement et ne nécessitent pas d'outils de calcul complexes.

On introduit dans notre étude le modèle de la machine asynchrone où on considère le stator avec des constitutions symétriques pour permettre d'avoir une force magnétomotrice sinusoïdale dans l'entrefer et le rotor à une structure de mailles.

## II.2.1 Hypothèses simplificatrices

Pour mettre en évidence l'influence des défauts électriques sur les grandeurs temporelles de la machine asynchrone, il est indispensable de poser certaines hypothèses qui ont pour but de faciliter la mise en équations des circuits électriques de la machine. Mais, il faut imposer un minimum d'hypothèses si nous voulons que le vecteur de sortie soit le plus exploitable possible.

Dans l'approche proposée, nous avons supposé que[15] :

- Le circuit magnétique linéaire (la perméabilité du fer très grande devant 1).
- L'effet de peau est négligeable.
- Les barres rotoriques sont isolées les unes des autres.
- Les pertes fer, les effets capacitifs et les effets thermiques sont négligeables.
- Pas d'effet d'excentricité.

Avec ces hypothèses, on suppose que le stator est sain et les différents paramètres du modèle sont donnés dans la section suivante[13].

### II.2.1.1 Inductances de la machine

Le tableau (II.1), résume les expressions des différentes inductances de la machine asynchrone à cage que nous allons l'utiliser.

INDUCTANCES	EXPRESSIONS
L'inductance principale d'une phase statorique.	$L_{sp} = L_{ms} = \frac{4\mu_0 N_s^2 Rl}{e\pi p^2}$
L'inductance mutuelle entre phases statoriques.	$M_s = \frac{-L_{sp}}{2}$
L'inductance totale d'une phase statorique.	$L_{as} = L_{bs} = L_{cs} = L_s = L_{sp} + L_{sf}$
L'inductance principale d'une maille rotorique.	$L_{rp} = \frac{N_r - 1}{N_r^2} \mu_0 \frac{2\pi}{e} Rl$
L'inductance mutuelle entre mailles rotoriques non adjacentes.	$M_{rr} = -\frac{\mu_0}{N_r^2} \frac{2\pi}{e} Rl$
L'inductance mutuelle entre mailles rotoriques adjacentes.	$M_{r_{k(k-1)}} = M_{r_{k(k)}} = M_{rr} - L_b$
L'inductance mutuelle entre une maille rotorique et une phase statorique "a".	$M_{r_{ksa}} = L_{sr} \cos(\omega_r t + ka)$ avec : $L_{sr} = \frac{4\mu_0 N_s^2 Rl}{e\pi p^2} \sin\left(\frac{a}{2}\right)$

TABLE II.1: Inductances de la machine asynchrone à cage.

## II.2.2 Mise en équations de la machine

Nous recherchons l'ensemble des équations différentielles indépendantes définissant le modèle de la machine. Le but de la mise en équations est de savoir le comportement de la machine sans et avec le défaut.

### a) Equations des tensions statoriques

L'équation de tension statorique se met sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} V_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{abc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{abc} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Où :

$$\begin{bmatrix} \phi_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{abc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{sr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{rk} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

avec :

$$\begin{bmatrix} V_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a & V_b & V_c \end{bmatrix}^T, \text{ vecteur de tensions statoriques.}$$

$$\begin{bmatrix} i_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \end{bmatrix}^T, \text{ vecteur de courants statoriques.}$$

$$\begin{bmatrix} i_{rk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{r0} & i_{r1} & \cdots & i_{rk} & \cdots & i_{r(N_r-1)} \end{bmatrix}^T, \text{ vecteur de courants dans les mailles rotoriques.}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a & \phi_b & \phi_c \end{bmatrix}^T, \text{ vecteur de flux statoriques.}$$

$$\begin{bmatrix} R_s \end{bmatrix} : \text{matrice des résistances statoriques.}$$

$$\begin{bmatrix} R_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{bmatrix} L_s \end{bmatrix} : \text{matrice des inductances statoriques.}$$

$$\begin{bmatrix} L_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{as} & M_s & M_s \\ M_s & L_{bs} & M_s \\ M_s & M_s & L_{cs} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

$[M_{sr}]$  : matrice des inductances mutuelles entre phases statoriques et mailles rotoriques.

$$[M_{sr}] = \begin{bmatrix} \cdots & L_{sr} \cos(\theta_r + ka) & \cdots \\ \cdots & L_{sr} \cos(\theta_r + kb - \frac{2\pi}{3}) & \cdots \\ \cdots & L_{sr} \cos(\theta_r + kc - \frac{4\pi}{3}) & \cdots \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Où :  $k = 0, 1, 2, \dots, N_r - 1$

### b) Equations de tensions au rotor

La figure (II.1) représente le schéma équivalent de la cage rotorique.

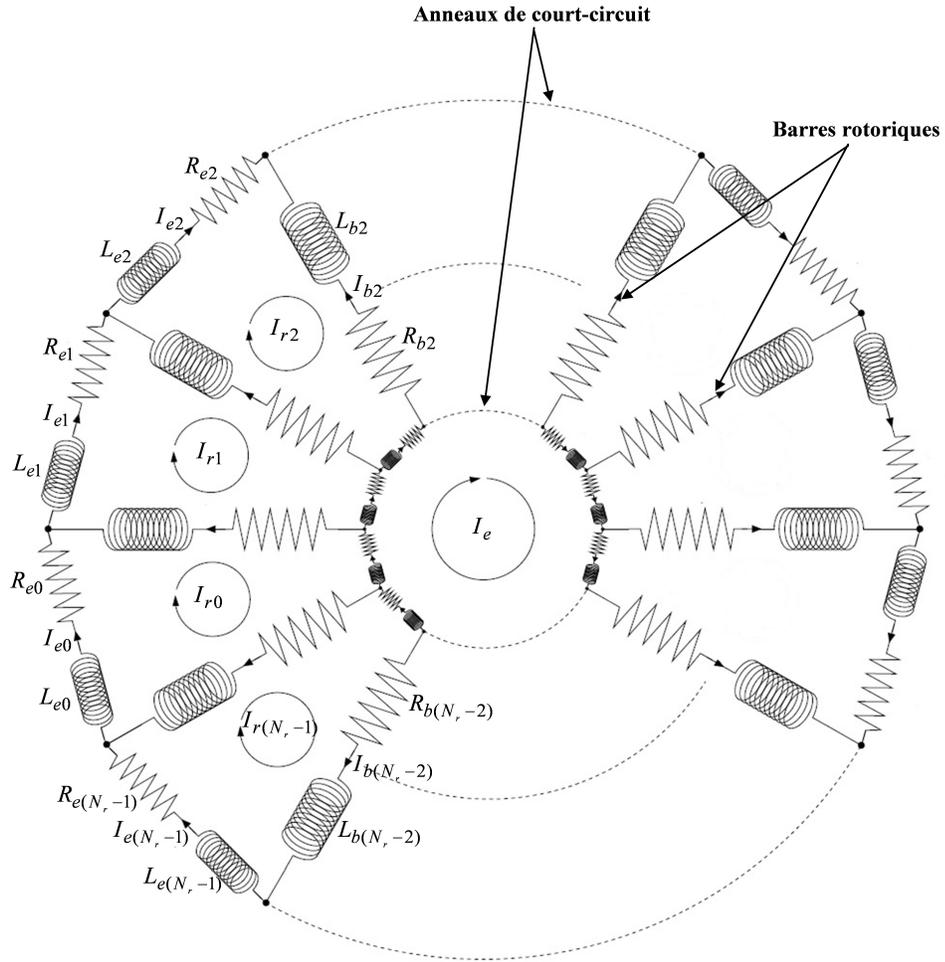


FIGURE II.1: Schéma équivalent de la cage rotorique.

L'équation de tension pour une maille "k" de la cage rotorique est donnée par :

$$R_{bk}i_{r(k-1)} + \left(2\frac{R_e}{N_r} + R_{bk}\right)i_{rk} - R_{bk}i_{r(k+1)} - \frac{R_e}{N_r}i_e + \frac{d}{dt}\phi_{rk} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \phi_{rk} = & \left(L_{rp} + 2l_b + 2\frac{L_e}{N_r}\right)i_{rk} - M_{rr} \sum_{j=0}^{N_r-1} i_{rj} - L_b \left(i_{r(k-1)} + i_{r(k+1)}\right) - \frac{L_e}{N_r}i_e \\ & - L_{sr} \left[ \cos(\theta_r + ka) \quad \vdots \quad \cos(\theta_r + ka - \frac{2\pi}{3}) \quad \vdots \quad \cos(\theta_r + ka - \frac{4\pi}{3}) \right] \left[ i_{abc} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Il faut compléter le système d'équations des circuits du rotor par celle de l'anneau de court-circuit, on a alors :

$$\frac{R_e}{N_r} \sum_{k=0}^{N_r-1} i_{rk} + \frac{L_e}{N_r} \sum_{k=0}^{N_r-1} \frac{d}{dt}i_{rk} - R_e L_e - L_e \frac{d}{dt}i_e = 0 \quad (\text{II.8})$$

Les équations (II.6) (II.8) constituent la mise en équation de la partie rotor.

### c) Equation globale des tensions

L'équation globale des tensions est donnée par :

$$\left[ V \right] = \left[ R \right] \left[ I \right] + \left[ L \right] \frac{d \left[ I \right]}{dt} + \frac{d \left[ L \right]}{dt} \left[ I \right] \quad (\text{II.9})$$

Avec :

$\left[ V \right] = \left[ V_a \quad V_b \quad V_c \quad \vdots \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \right]^T$ , vecteur global des tensions ( $N_r + 4$ ), il contient les trois tensions statoriques et les  $N_r$  tensions des mailles rotoriques ainsi que la tension de l'anneau de court-circuit.

$\left[ I \right] = \left[ i_a \quad i_b \quad i_c \quad \vdots \quad i_{r0} \quad i_{r1} \quad i_{rk} \quad \cdots \quad i_{r(N_r-1)} \quad \vdots \quad i_e \right]^T$ , vecteur global des courants ( $N_r + 4$ ), il contient les trois courants statoriques et les  $N_r$  courants des mailles rotoriques, ainsi que le courant de l'anneau de court-circuit.

$$\left[ R \right] = \begin{bmatrix} \left[ R_s \right] & \vdots & \left[ 0 \right] \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \left[ 0 \right] & \vdots & \left[ R_r \right] \end{bmatrix}, \text{matrice globale des résistances.}$$

Avec :

$[R_r]$  : matrice des résistances rotoriques.

$$[R_r] = \begin{bmatrix} R_{b0} + R_{r(N_r-1)} + 2\frac{R_e}{N_r} & -R_{b0} & 0 & \cdots & -R_{r(N_r-1)} & \vdots & -\frac{R_e}{N_r} \\ -R_{b0} & R_{b1} + R_{b0} + 2\frac{R_e}{N_r} & -R_{b1} & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -R_{r(k-1)} & R_{bk} + R_{r(k-1)} + 2\frac{R_e}{N_r} & -R_{rk} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -R_{r(N_r-1)} & 0 & \cdots & -R_{r(N_r-2)} & R_{r(N_r-2)} + R_{r(N_r-1)} + 2\frac{R_e}{N_r} & \vdots & -\frac{R_e}{N_r} \\ -\frac{R_e}{N_r} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{R_e}{N_r} & \vdots & R_e \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_s] & \vdots & [M_{sr}] \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ [M_{sr}] & \vdots & [L_r] \end{bmatrix}, \text{ matrice globale des inductances.}$$

$$[L_r] = \begin{bmatrix} L_{rp} + 2L_{rb} + 2\frac{L_e}{N_r} & M_{rr} - L_b & M_{rr} & \cdots & -R_{r(N_r-1)} & \vdots & -\frac{R_e}{N_r} \\ M_{rr} - L_b & L_{rp} + 2L_{rb} + 2\frac{L_e}{N_r} & M_{rr} - L_b & M_{rr} & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -R_{r(N_r-1)} & M_{rr} & \cdots & -R_{r(N_r-1)} & L_{rp} + 2L_{rb} + 2\frac{L_e}{N_r} & \vdots & -\frac{R_e}{N_r} \\ -\frac{R_e}{N_r} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{R_e}{N_r} & \vdots & R_e \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{d[L]}{dt} = \begin{bmatrix} [0] & \vdots & \frac{d[M_{sr}]}{dt} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \frac{d[M_{sr}]}{dt} & \vdots & [0] \end{bmatrix}, \text{ dérivée de la matrice globale des inductances.}$$

On remarque que la matrice  $[M_{sr}]$  dépend du temps, ce qui nécessite l'inversion de la matrice inductance  $[L_r]$ , de dimension  $N_r + 4$ , à chaque pas de calcul. Pour rendre cette matrice constante, on applique la transformation de Park sur les équations de tensions statoriques. On prend le référentiel lié au rotor.

La matrice de Park modifiée est définie par :

$$\left[ P(\theta) \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

La matrice globale de Park de dimension  $(N_r + 4)(N_r + 4)$  est définie par :

$$\left[ T \right] = \begin{bmatrix} \left[ P(\theta) \right] & \vdots & \left[ 0 \right] \\ \dots & \vdots & \dots \\ \left[ 0 \right]^T & \vdots & \left[ 1 \right] \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

$\left[ 1 \right]$  : est la matrice identité de dimension  $(N_r + 4)(N_r + 4)$ .

Sachant que :

$$\begin{aligned} \left[ V \right] &= \left[ T \right] \left[ V_{tr} \right], \text{ avec : } \left[ V_{tr} \right] = \left[ V_{os} \quad V_{ds} \quad V_{qs} \quad \vdots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \right]^T \\ \left[ I \right] &= \left[ T \right] \left[ I_{tr} \right], \text{ avec : } \left[ I_{tr} \right] = \left[ i_{os} \quad i_{ds} \quad i_{qs} \quad \vdots \quad i_{r0} \quad i_{r1} \quad i_{rk} \quad \dots \quad i_{r(N_r-1)} \quad \vdots \quad i_e \right]^T \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases} V_{ds} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_m \cos(\omega_s - \omega_r) t \\ V_{qs} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_m \sin(\omega_s - \omega_r) t \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.9) devient :

$$\left[ T \right] \left[ V_{tr} \right] = \left[ R \right] \left[ T \right] \left[ I_{tr} \right] + \left[ L \right]^{-1} \frac{d \left[ T \right]}{dt} \left[ I_{tr} \right] + \frac{d \left[ L \right]}{dt} \left[ T \right] \left[ I_{tr} \right] \quad (\text{II.15})$$

$$\left[ V_{tr} \right] = \left( \underbrace{\left[ T \right]^{-1} \left[ R \right] \left[ T \right]}_A + \underbrace{\left[ T \right]^{-1} \left[ L \right] \frac{d \left[ T \right]}{dt}}_B + \underbrace{\left[ T \right]^{-1} \frac{d \left[ L \right]}{dt} \left[ T \right]}_C \right) \left[ I_{tr} \right] + \underbrace{\left[ T \right]^{-1} \left[ L \right] \left[ T \right]}_D + \frac{d \left[ I_{tr} \right]}{dt} \quad (\text{II.16})$$

Les termes A, B et C sont donnés par :

$$A = [T]^{-1} [R] [T] = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} [R_s] [P(\theta)] & \vdots & [0] \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ [0] & \vdots & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

$$B = [T]^{-1} [L] \frac{d[T]}{dt} = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} [L_s] \frac{d[P(\theta)]}{dt} & \vdots & [0] \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots \\ [M_{sr}]^T \frac{d[P(\theta)]}{dt} & \vdots & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

$$C = [T]^{-1} \frac{d[L]}{dt} [T] = \begin{bmatrix} [0] & \vdots & [P(\theta)]^{-1} \frac{d[M_{sr}]}{dt} \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ \frac{d[P(\theta)]}{dt} [M_{sr}]^T & \vdots & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

$$D = [T]^{-1} [L] [T] = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} [L_s] [P(\theta)] & \vdots & [P(\theta)]^{-1} [M_{sr}] \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ [M_{sr}]^T [P(\theta)] & \vdots & [L_r] \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

La mise en équation du modèle de la machine, conduit à un système complet de dimension  $(N_r + 4)$  :

$$\begin{bmatrix} V_{0s} \\ V_{ds} \\ V_{qs} \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \left[ L_{tr} \right] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{0s} \\ i_{ds} \\ i_{qs} \\ \dots \\ i_{r0} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_{rk} \\ \vdots \\ i_{r(N_r-1)} \\ \dots \\ i_e \end{bmatrix} + \left[ R_{tr} \right] \begin{bmatrix} i_{0s} \\ i_{ds} \\ i_{qs} \\ \dots \\ i_{r0} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_{rk} \\ \vdots \\ i_{r(N_r-1)} \\ \dots \\ i_e \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

$\left[ L_{tr} \right]$  et  $\left[ R_{tr} \right]$  sont les matrices globales des inductances et des résistances obtenues après la transformation de Park.

La matrice  $\left[ L_{tr} \right]$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} L_s + 2M_s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_s - M_s & 0 & \dots & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \cos(a) & \dots & \dots & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \cos((N_r - 1)a) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_s - M_s & \dots & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \sin(a) & \dots & \dots & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \sin((N_r - 1)a) & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} & 0 & \dots & L_{rp} + 2L_b + 2\frac{L_e}{N_r} & M_{rr} - L_b & M_{rr} & \dots & M_{rr} - L_b & \dots & -\frac{L_e}{N_r} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \cos(a) & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \sin(a) & \dots & M_{rr} - L_b & L_{rp} + 2L_b + 2\frac{L_e}{N_r} & M_{rr} - L_b & M_{rr} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \cos((N_r - 1)a) & \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \sin((N_r - 1)a) & \dots & M_{rr} - L_b & \dots & M_{rr} & M_{rr} - L_b & L_{rp} + 2L_b + 2\frac{L_e}{N_r} & \dots & -\frac{L_e}{N_r} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{L_e}{N_r} & \dots & \dots & \dots & -\frac{L_e}{N_r} & \dots & L_e \end{bmatrix}$$

La matrice  $[R_{tr}]$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix}
 r_s & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \vdots & 0 \\
 0 & r_s & \omega_r(L_s - M_s) & \vdots & 0 & -\omega_r\sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr}\sin(a) & \dots & \dots & -\omega_r\sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr}\sin((N_r - 1)a) & \vdots & 0 \\
 0 & \omega_r(L_s - M_s) & r_s & \vdots & \omega_r\sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} & \omega_r\sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr}\cos(a) & \dots & \dots & \omega_r\sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr}\cos((N_r - 1)a) & \vdots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & R_{b0} + R_{b(N_r-1)} + 2\frac{R_e}{N_r} & -R_{b0} & 0 & \dots & -R_{b(N_r-1)} & \vdots & -\frac{R_e}{N_r} \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -R_{b(k-1)} & R_{bk} + R_{b(k-1)} + 2\frac{R_e}{N_r} & -R_{bk} & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & -R_{b(N_r-1)} & 0 & \dots & -R_{b(N_r-2)} & R_{b(N_r-1)} + R_{b(N_r-2)} + 2\frac{R_e}{N_r} & \vdots & -\frac{R_e}{N_r} \\
 \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{R_e}{N_r} & \dots & \dots & \dots & -\frac{R_e}{N_r} & \vdots & R_e
 \end{bmatrix}$$

A ces équations, on ajoute les équations électromécaniques afin d'avoir la vitesse électrique de rotation et la position  $\theta_r$  du rotor.

$$\frac{d}{dt}\omega_m = \frac{1}{j}(C_e - C_r - k_0\omega_m) \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{d}{dt}\theta_r = \omega_r \quad (\text{II.23})$$

L'expression de  $(C_e)$  sera présentée dans la section suivante.

### II.2.2.1 Expression du couple électromagnétique ( $C_e$ )

Il faut d'abord, trouver les expressions des composantes biphasées  $\psi_{ds}$ ,  $\psi_{qs}$  et du flux statorique. On a :

$$\begin{bmatrix} \psi_{0dqs} \\ \phi_{kr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{sr}]^T & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{0dqs} \\ I_{kr} \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \psi_{0dqs} \\ \phi_{kr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} [L_s] [P(\theta)] & [P(\theta)]^{-1} [M_{sr}] \\ [M_{sr}]^T [P(\theta)] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{0dqs} \\ I_{kr} \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Après le calcul on obtient :

$$\begin{cases} \psi_{0s} &= (L_s + 2M_s)i_{0s} \\ \psi_{ds} &= (L_s - M_s)i_{ds} + \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \sum_{k=0}^{N_r-1} i_{rk} \cos(ka) \\ \psi_{qs} &= (L_s - M_s)i_{qs} + \sqrt{\frac{3}{2}}L_{sr} \sum_{k=0}^{N_r-1} i_{rk} \sin(ka) \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Or, pour un moteur alimenté par une source triphasée, la puissance instantanée s'écrit :

$$\begin{aligned} P_s(t) &= \begin{bmatrix} V_{abc} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{abc} \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} P(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0dq_s} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} P(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{0dq_s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} V_{0dq_s} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{0dq_s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Les équations de tensions dans un repère lié au rotor sont données par :

$$\begin{cases} V_{ds} &= R_s i_{ds} + \frac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega_r \psi_{qs} \\ V_{qs} &= R_s i_{qs} + \frac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega_r \psi_{ds} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

En remplaçant les tensions  $V_{ds}$  et  $V_{qs}$  dans l'expression (II.27), on obtient :

$$P_{sa}(t) = R_s (i_{ds}^2 + i_{qs}^2) + \left( i_{ds} \frac{d\psi_{ds}}{dt} + i_{qs} \frac{d\psi_{qs}}{dt} \right) + \omega_r (\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds}) \quad (\text{II.29})$$

Le troisième terme, représente la puissance électromagnétique transmise au rotor à travers l'entrefer par l'intermédiaire du champ tournant. Donc le couple électromagnétique est :

$$C_e = P(\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds}) \quad (\text{II.30})$$

En remplaçant  $\psi_{ds}$  et  $\psi_{qs}$  par leurs expressions, on obtient :

$$C_e = \sqrt{\frac{3}{2}} P L_{sr} \left( i_{qs} \sum_{k=0}^{N_r-1} i_{rk} \cos(ka) - i_{ds} \sum_{k=0}^{N_r-1} i_{rk} \sin(ka) \right) \quad (\text{II.31})$$

### II.3 Prise en compte du défaut dans le modèle

Le type de défaut que nous étudions est la rupture d'une ou plusieurs barres rotoriques ou de portions d'anneaux de court-circuit. Le circuit électrique rotorique donné à la figure (II.1) doit être reconsidéré pour permettre la prise en compte du défaut rotorique dans le modèle de la machine.

La figure (II.2) représente un schéma de deux mailles adjacentes en état sain et à la présence de la rupture d'une barre.

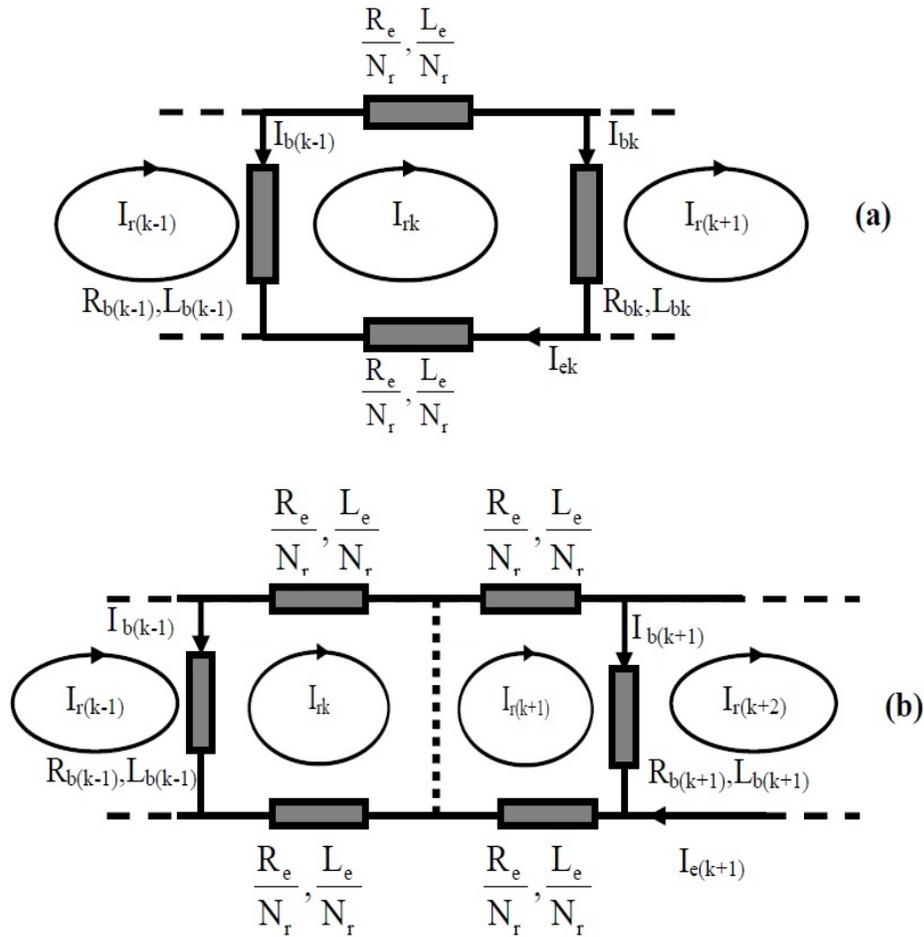


FIGURE II.2: Schéma équivalent de la cage rotorique pour :

(a).Etat sain (b).Avec une barre rompue

La modélisation de ce type de défaillance peut être en utilisant deux méthodes différentes, le but étant d'annuler le courant qui traverse la barre incriminée.

La première méthode de modélisation consiste à reconstituer totalement le circuit électrique rotorique. Dans ce type d'approche, la barre rotorique défaillante est enlevée du circuit électrique, ce qui oblige à recalculer les matrices des résistances  $[R_r]$  et des inductances  $[L_r]$  de la machine asynchrone.

En effet, la suppression d'une barre de la cage nous donne des matrices  $[R_r]$  et  $[L_r]$  de rang inférieur à celle développée pour la machine saine.

La seconde approche envisageable consiste à augmenter artificiellement la valeur de la résistance de la barre ou de la portion d'anneau incriminée d'un facteur suffisant pour que le courant qui la traverse soit le plus proche possible de zéro en régime permanent.

En comparaison avec la première méthode, la structure du circuit électrique rotorique n'est pas modifiée car nous considérons, dans ce type de modélisation, qu'une rupture de barre n'altère pas les inductances propres et mutuelles de la cage rotorique.

Par conséquent, le programme de calcul s'adaptera à cette nouvelle contrainte et nous donnera l'évolution temporelle des différents signaux pour un fonctionnement de la machine avec ce type de défaut.

De plus, la simulation d'une barre partiellement cassée (barre fissurée de moitié par exemple) ne peut pas être envisagée si nous utilisons la première méthode de modélisation alors qu'elle est tout à fait faisable avec la seconde[15].

La figure (II.3) illustre un rotor avec une portion d'anneau de court circuit cassée.

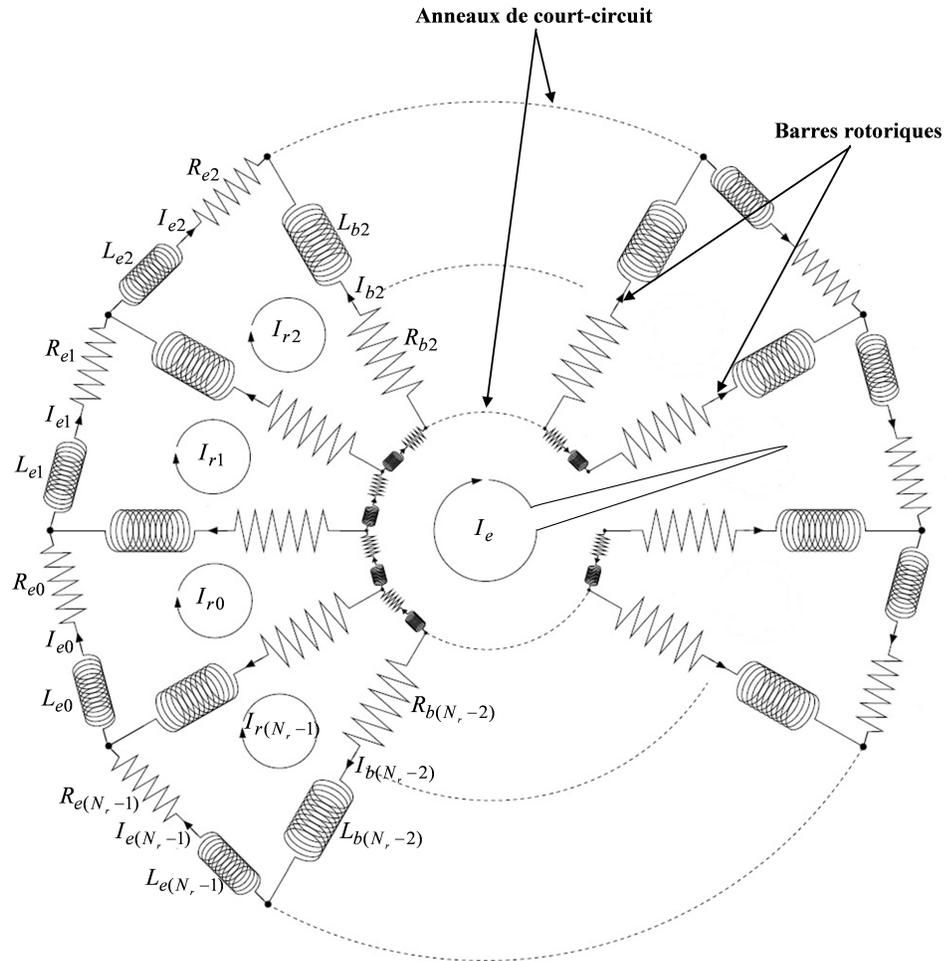


FIGURE II.3: *Circuits électriques adoptés pour la modélisation du rotor en présence d'une portion d'anneau de court-circuit cassée*

### II.3.1 Analyse des forces électromotrices en présence d'un défaut rotorique[16][2]

L'expression de l'induction au niveau du stator est donnée comme suit :

$$B_s = k_s I_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \quad (\text{II.32})$$

Au niveau du rotor, les courants dans les barres de la cage créent un champ dans l'entrefer de pulsation  $g\omega_s$  par rapport à l'axe rotorique. Le rotor tourne à la vitesse  $(1 - g)\omega_s$  par rapport au stator. Dans le cas d'une rupture de barre, le circuit est déséquilibré et, par conséquent, crée une onde inverse dans l'entrefer de vitesse  $-g\omega_s$  par rapport au rotor. Par rapport au stator, cette onde a une vitesse  $(1 - g)\omega_s - g\omega_s = (1 - 2g)\omega_s$ . Les inductions rotoriques sont composées d'une induction directe appelée  $B_{rd}$  et d'une induction inverse appelée  $B_{ri}$  ayant pour expression par rapport à l'axe statorique :

$$\begin{aligned} B_{rd} &= k_{rd} I_{rd} \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\ B_{ri} &= k_{ri} I_{ri} \cos((1 - 2g)\omega_s t + \phi_{B_{ri}} - \theta_M) \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

L'induction totale dans l'entrefer se calcule en effectuant la somme de l'induction statorique et de toutes les inductions rotoriques :

$$B_{tot} = B_s + B_{rd} + B_{ri} \quad (\text{II.34})$$

A partir de cette equation, nous pouvons évaluer l'énergie totale en sachant que celle-ci se concentre essentiellement dans l'entrefer de la machine.

$$\begin{aligned} W_{tot} &= \oint_v \frac{B_{tot}^2}{2\mu_0} dV = \frac{RLe}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} (B_s + B_{rd} + B_{ri})^2 d\theta \\ W_{tot} &= \frac{RLe}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} (B_s^2 + B_{rd}^2 + B_{ri}^2 + 2B_s B_{rd} + 2B_s B_{ri} + 2B_{rd} B_{ri}) d\theta \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Cette équation se décompose en différentes énergies qui sont :

$$W_{tot} = W_s + W_{rd} + W_{ri} + W_{srd} + W_{sri} + W_{rdri} \quad (\text{II.36})$$

L'énergie statorique  $W_s$  donne :

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{RLe}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} (k_s I_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M))^2 \\ W_s &= \frac{RLe}{2\mu_0} k_s^2 I_s^2 \pi \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Les énergies rotoriques  $W_{rd}$  et  $W_{ri}$  sont :

$$\begin{aligned} W_{rd} &= \frac{RLe}{2\mu_0} k_{rd}^2 I_{rd}^2 \pi \\ W_{ri} &= \frac{RLe}{2\mu_0} k_{ri}^2 I_{ri}^2 \pi \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

L'énergie  $W_{srd}$  due à l'interaction du stator et du rotor donne dans le sens direct :

$$\begin{aligned} W_{srd} &= \frac{RLe}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} (2B_s B_{rd}) d\theta \\ W_{srd} &= \frac{RLe}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} (k_s I_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) k_{rd} I_{rd} \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M)) d\theta \\ W_{srd} &= \frac{RLe}{\mu_0} k_s I_s k_{rd} I_{rd} \pi \cos(-\phi_{B_s} + \phi_{B_{rd}}) \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

De la même manière, on trouve  $W_{sri}$  dans le sens inverse :

$$W_{sri} = \frac{RLe}{\mu_0} k_s I_s k_{ri} I_{ri} \pi \cos(-2g\omega_s t - \phi_{B_s} + \phi_{B_{ri}}) \quad (\text{II.40})$$

Seulement l'énergie d'interaction entre le stator et le rotor crée le couple moteur.

$$C_{emtot} = C_{em_{srd}} + C_{em_{sri}} = \frac{dW_{srd}}{d\tau_{srd}} + \frac{dW_{srd}}{d\tau_{srd}} \quad (\text{II.41})$$

avec  $\tau_{srd} = \phi_{B_s} + \phi_{B_{rd}}$  et  $\tau_{sri} = \phi_{B_s} + \phi_{B_{ri}}$

Donc le couple total est donné par la relation :

$$C_{emtot} = \pi \frac{RLe}{\mu_0} k_s I_s (k_{rd} I_{rd} \sin(\phi_{B_s} + \phi_{B_{rd}}) + k_{ri} I_{ri} \sin(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}})) \quad (\text{II.42})$$

$$C_{emtot} = C_{em_{cst}} + \Delta C_{em} \quad (\text{II.43})$$

Cette dernière équation montre que le couple produit par la machine est composé de deux termes. Le premier est un couple constant dû au champ direct et le second un couple pulsant dû au champ inverse de pulsation  $2g\omega_s$ .

**La vitesse :** L'équation de la vitesse d'une machine asynchrone se calcul grâce à la relation :

$$J_t \frac{d\Omega}{dt} = C_{emtot} - C_r \quad (\text{II.44})$$

où  $C_r$  représente le couple résistant (couple de charge). En admettant que le couple résistant soit égal au couple  $C_{em_{srd}}$ , nous obtenons pour l'équation de vitesse :

$$\begin{aligned} J_t \frac{d\Omega}{dt} &= C_{em_{sri}} \\ \Omega &= \frac{1}{J_t} \int C_{em_{sri}} dt + \Omega_0 \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

En remplaçant  $C_{em_{sri}}$  et en calculant l'intégrale, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 - \frac{1}{2Jg} \pi \frac{RLe}{\omega_s \mu_0} k_s I_s k_{ri} I_{ri} \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}}) \\ \Omega &= \Omega_0 + K \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}}) = \Omega_0 + \Delta\Omega\end{aligned}\quad (\text{II.46})$$

Nous remarquons que la vitesse à une pulsation égale à  $2g\omega_s$  identique à celle du couple électromécanique.

**Force électromotrice** : La force électromotrice se calcule à partir du flux total dans l'entrefer de la machine.

$$e(t) = -\frac{d\phi_{tot}}{dt} = -\frac{d\phi_s}{dt} - \frac{d\phi_{rd}}{dt} - \frac{d\phi_{ri}}{dt} \quad (\text{II.47})$$

Le flux est donné par la relation de base :

$$\phi = \oint_s \vec{B} d\vec{S} \quad (\text{II.48})$$

La dérivée par rapport au temps du flux s'écrit :

$$\frac{d\phi}{dt} = B(t)RL \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{II.49})$$

En se basant sur l'équation précédente, la force magnétomotrice  $e(t)$  devient :

$$\begin{aligned}e(t) &= -B_s(t)RL \frac{d\theta_s}{dt} - B_{rd}(t)RL \frac{d\theta_{rd}}{dt} - B_{ri}(t)RL \frac{d\theta_{ri}}{dt} \\ e(t) &= -B_s(t)RL\omega_s - B_{rd}(t)RL\omega_{rd} - B_{ri}(t)RL\omega_{ri} \\ e(t) &= -B_s(t)RL\omega_s - B_{rd}(t)RL(\Omega + g\omega_s) - B_{ri}(t)RL(\Omega - g\omega_s)\end{aligned}\quad (\text{II.50})$$

En remplaçant les termes  $B_s(t)$ ,  $B_{rd}(t)$  et  $B_{ri}(t)$  par leurs expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned}e(t) &= -k_s I_s RL\omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \\ &\quad -k_{rd} I_{rd} RL(\Omega + g\omega_s) \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\ &\quad -k_{ri} I_{ri} RL(\Omega - g\omega_s) \cos((1 - 2g)\omega_s t + \phi_{B_{ri}} - \theta_M)\end{aligned}\quad (\text{II.51})$$

Puis, en remplaçant les termes  $\Omega$  par  $\Omega(t) = \Omega_0 + K \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}}) = (1 - g)\omega_s + K \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}})$ , la forme de la force électromotrice devient :

$$\begin{aligned}e(t) &= -k_s I_s RL\omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \\ &\quad -k_{rd} I_{rd} RL((1 - g)\omega_s + K \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}}) + g\omega_s) \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\ &\quad -k_{ri} I_{ri} RL((1 - g)\omega_s + K \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}}) - g\omega_s) \cos((1 - 2g)\omega_s t + \phi_{B_{ri}} - \theta_M)\end{aligned}\quad (\text{II.52})$$

$$\begin{aligned}
 e(t) = & -k_s I_s R L \omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \\
 & -k_{rd} I_{rd} R L (\omega_s + K \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}})) \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\
 & -k_{ri} I_{ri} R L ((1 - 2g)\omega_s + K \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}})) \cos((1 - 2g)\omega_s t + \phi_{B_{ri}} - \theta_M)
 \end{aligned} \tag{II.53}$$

En développant, nous avons :

$$\begin{aligned}
 e(t) = & -k_s I_s R L \omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \\
 & -k_{rd} I_{rd} R L \omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\
 & +k_{rd} I_{rd} R L K \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}}) \\
 & -k_{ri} I_{ri} R L (1 - 2g)\omega_s \cos((1 - 2g)\omega_s t + \phi_{B_{ri}} - \theta_M) \\
 & +k_{ri} I_{ri} R L K \cos((1 - 2g)\omega_s t + \phi_{B_{ri}} - \theta_M) \cos(2g\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}})
 \end{aligned} \tag{II.54}$$

En développant les termes en cosinus, la force électromotrice devient :

$$\begin{aligned}
 e(t) = & -k_s I_s R L \omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \\
 & -k_{rd} I_{rd} R L \omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\
 & + \frac{k_{rd} I_{rd} R L K}{2} (\cos((1 + 2g)\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}} + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\
 & + \cos((1 - 2g)\omega_s t - \phi_{B_s} + \phi_{B_{ri}} + \phi_{B_{rd}} - \theta_M)) \\
 & -k_{ri} I_{ri} R L (1 - 2g)\omega_s \cos((1 - 2g)\omega_s t + \phi_{B_{ri}} - \theta_M) \\
 & + \frac{k_{ri} I_{ri} R L K}{2} (\cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \\
 & + \cos((1 - 4g)\omega_s t - \phi_{B_s} + 2\phi_{B_{ri}} - \theta_M))
 \end{aligned} \tag{II.55}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned}
 e(t) = & -k_s I_s RL \omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \\
 & -k_{rd} I_{rd} RL \omega_s \cos(\omega_s t + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\
 & +k_{rd} I_{rd} RL \mathbf{K} \cos((1 + 2g)\omega_s t + \phi_{B_s} - \phi_{B_{ri}} + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\
 & +k_{rd} I_{rd} RL \mathbf{K} \cos((1 - 2g)\omega_s t - \phi_{B_s} + \phi_{B_{ri}} + \phi_{B_{rd}} - \theta_M) \\
 & -k_{ri} I_{ri} RL (1 - 2g) \omega_s \cos((1 - 2g)\omega_s t + \phi_{B_{ri}} - \theta_M) \\
 & +k_{ri} I_{ri} RL \mathbf{K} \cos(\omega_s t + \phi_{B_s} - \theta_M) \\
 & -k_{ri} I_{ri} RL \mathbf{K} \cos((1 - 4g)\omega_s t - \phi_{B_s} + 2\phi_{B_{ri}} - \theta_M)
 \end{aligned} \tag{II.56}$$

avec :

$$\mathbf{K} = \frac{K}{2} = -\frac{1}{4Jg} \pi \frac{RL e}{\omega_s \mu_0} k_s I_s k_{ri} I_{ri}$$

L'expression du couple est la somme de deux composantes, la première étant une composante constante due au champ direct (courant direct) et la seconde étant une composante pulsante due au champ inverse (courant inverse créé par la rupture de barre). Suite à une rupture de barre rotorique, un champ inverse dans l'entrefer est créé. Il apparaît alors dans l'expression de la vitesse, une composante pulsante à  $2g\omega_s$  en supposant un couple résistant constant est égale au couple direct de la machine asynchrone. Pour l'expression des forces magnétomotrices dans le cas d'une rupture de barre rotorique, nous avons :

- Une fréquence  $f_s$  due au champ statorique  $B_s$  et aux champs rotoriques direct  $B_{rd}$  et inverse  $B_{ri}$ .
- Une fréquence  $(1 - 2g)f_s$  due aux champs rotoriques direct  $B_{rd}$  et inverse  $B_{ri}$ .
- Une fréquence  $(1 + 2g)f_s$  due au champ rotorique direct  $B_{rd}$ .
- Une fréquence  $(1 - 4g)f_s$  due au champ rotorique inverse  $B_{ri}$ .

En utilisant la même démarche, nous pouvons montrer que la rupture d'une barre de la cage rotorique induit des composantes fréquentielles dans le spectre du courant statorique aux fréquences données par la relation :

$$f_{bc_k}^\pm = (1 \pm 2kg)f_s \tag{II.57}$$

## II.4 Conclusion

Nous avons utilisé un modèle multi-enroulement qui tient compte de la structure du rotor. Le choix d'un tel modèle est imposé par l'objectif de pouvoir simuler une rupture de barre ou de portion d'anneaux de court-circuit au rotor. Pour cela, nous avons représenté toutes les équations des barres et les portions d'anneaux du rotor.

Pour diagnostiquer la machine défaillante, nous aurons besoin à des méthodes qui permettent d'estimer les fréquences à partir des signaux expérimentaux. Le chapitre suivant est destiné au développement de quelques algorithmes d'estimation. Ces estimateurs seront basés sur des critères statistiques avec un pouvoir résolvant plus grand, ce que nous permettra à la suite de faire aisément l'analyse des spectres fréquentiels.

# Chapitre III

## MÉTHODES PARAMÉTRIQUES BASÉES SUR LA DÉCOMPOSITION EN SOUS ESPACES DE LA MATRICE DE COVARIANCE

### III.1 Introduction

Les ingénieurs et les chercheurs de traitement du signal cherchent toujours de développer les estimateurs fréquentielles. Ces savants ont commencé par les méthodes d'analyse spectrale (La Transformée de Fourier Rapide, le Périodogramme moyenné, le Cepstre ...). Cependant, leurs faibles résolutions et le coût calculatoire leur sont imposés de créer des autres méthodes précis et assez rapides.

La résolution d'un estimateur représente l'écart fréquentiel minimal qui doit séparer deux raies proches pour être détecté. Nous parlerons alors d'analyse à *haute résolution*, lorsque l'estimateur est capable de détecter deux raies spectrales plus proches que la limite donnée par Fourier ( $\Delta f = \frac{f_{\text{echant}}}{\text{taille du signal}}$ ).

L'objectif de recherches actuelles est de trouver des méthodes avec un pouvoir de résolution trop fort. De plus, ils doivent être capables d'estimer les éléments d'un vecteur de base à partir des signaux trop courts. Ce vecteur comporte la puissance de bruit, les fréquences des sources et leurs puissances  $\eta = [\sigma^2, f_1, \dots, f_L, P_{11}, \dots, P_{LL}]$ .

Les travaux de Prony en 1795 qui visent à estimer une somme d'exponentielles par des techniques prédictives, ont permis l'issue des nouvelles méthodes dites "Haute Résolution" et qui reposent essentiellement sur les propriétés de la matrice d'autocorrélation du signal traité. Après, les chercheurs ont découvert qu'à partir de cette matrice on peut décomposer notre signal à deux sous-espaces différents, un espace dit signal engendré par les sinusoides et un espace dit bruit orthogonal à ce dernier.

Parmi les méthodes HR, on trouve MUSIC et Root-MUSIC (qui reposent sur l'espace bruit) ou ESPRIT et ses variantes TLS-ESPRIT[17], PRO-ESPRIT[18] (qui reposent sur l'espace signal). Il y a aussi une liste plus complète d'autres techniques d'estimation destinées à l'analyse spectrale, comme les algorithmes KT[19], MKT[20], Matrix Pencil[21], bien répandus aujourd'hui.

Les techniques de traitement du signal approximant le maximum de vraisemblance MODE[29] et PLEDGE[30] nous permettent de déterminer la localisation des sources avec un pouvoir de résolution assez fort. Cette propriété laisse envisager une amélioration dans différentes applications comme l'analyse vibratoire, le traitement d'antenne ou l'analyse spectrale des signaux qui sera notre sujet d'étude au cours de ce travail.

## III.2 LES MÉTHODES HAUTES RÉOLUTION

L'idée de base de ces méthodes est la décomposition de l'espace d'observation en deux sous espaces complémentaires. Contrairement aux méthodes non-paramétriques, ces méthodes utilisent la propriété d'orthogonalité entre les deux sous espaces pour localiser les sources, ce qui les rend totalement indépendantes.

### III.2.1 La méthode MUSIC (MUltiple SIgnal Classification)

La méthode du goniomètre ou MUSIC [27], [28] est la plus connue des méthodes haute résolution. Cette méthode a été largement utilisée pour la localisation spatiale des sources et l'analyse spectrale. Les vecteurs sources appartiennent au sous-espace signal et sont donc orthogonaux au sous-espace bruit. La méthode MUSIC exploite les éléments propres de la matrice d'autocorrélation. En faisant le produit scalaire des vecteurs sources avec les éléments du sous-espace bruit on obtient des zéros.

On pose le problème suivant :

$$x(t) = A(\omega).s(t) + b(t) \quad (\text{III.1})$$

Où :

$x(t)$  : Le signal relevé (observé) ;

$A(\omega)$  : Matrice de Vandermonde ;

$s(t)$  : Matrice de source ou bien d'amplitude ;

$b(t)$  : Bruit blanc gaussien complexe centré  $N(0, \sigma^2)$ .

$A$  est donnée comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\omega_1} & e^{-j\omega_2} & \dots & e^{-j\omega_L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-j\omega_1(m-1)} & e^{-j\omega_2(m-1)} & \dots & e^{-j\omega_L(m-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Avec :  $\omega_k = 2\pi f_k$  et  $m$  est la taille de la fenêtre d'observation.

On déduit que :

$$E \left[ x(t)x^H(t) \right] = \hat{R}_x = A.E \left[ S(t)S^H(t) \right] .A^H = A.\hat{R}_s A^H + \hat{R}_b \quad (\text{III.3})$$

On peut écrire ça uniquement si les sources sont supposées aléatoires.  $H$  : Opérateur hermitien indique la transposée conjugué de la matrice.

Sachant que :

$$\hat{R}_b = \sigma^2 I$$

Où  $\sigma^2$  est la variance du bruit.

En calculant les valeurs propres de  $\hat{R}_x$ , puis les vecteurs propres correspondants (classés par ordre de valeurs propres décroissantes),

$$\begin{cases} \lambda_k > \sigma^2 & k = 1, 2, \dots, L \\ \lambda_k = \sigma^2 & k = L + 1, L + 2, \dots, N \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Avec :  $N$  : est la taille du signal étudié et  $L$  : est le nombre des sources du signal. On obtient donc  $N$  vecteurs propres, dont les  $L$  premiers correspondent au sous-espace du signal  $U_S$ , et les  $N - L$  derniers au sous-espace du bruit  $U_B$ .

On admet :

$$\hat{R}_x = U \Lambda U^H = \begin{bmatrix} U_S & U_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_S + \sigma^2 I & 0 \\ 0 & \sigma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_S^H & U_B^H \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} U_S = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_L \end{bmatrix} \\ U_B = \begin{bmatrix} U_{L+1} & U_{L+2} & \dots & U_N \end{bmatrix} \end{cases}$$

En pratique on ne connaît pas forcément la valeur  $L$ , on peut donc utiliser un critère basé sur la théorie de l'information, comme le maximum de vraisemblance, AIC (Akaike Information Criterion) ou MDL (Minimum Description Length), qui nous permet d'estimer le nombre de sinusoïdes de notre signal, sachant que ces critères ne seront plus efficaces si le bruit est coloré.

En fait, les estimateurs AIC et MDL consistent à minimiser une fonction de coût composée d'un terme commun et d'une pénalisation propre à chacun des estimateurs [22] :

$$\begin{aligned} AIC(k) &= -N(m-k) \ln \left( \frac{\left( \prod_{l=k+1}^m \hat{\lambda}_l \right)^{\frac{1}{m-k}}}{\frac{1}{m-k} \sum_{l=k+1}^m \hat{\lambda}_l} \right) + k(2m-k) & k = 1, \dots, m-1 \\ MDL(k) &= -N(m-k) \ln \left( \frac{\left( \prod_{l=k+1}^m \hat{\lambda}_l \right)^{\frac{1}{m-k}}}{\frac{1}{m-k} \sum_{l=k+1}^m \hat{\lambda}_l} \right) + \frac{1}{2}k(2m-k) \ln N, \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

où  $\hat{\lambda}_l$  sont les valeurs propres ordonnées ( $\hat{\lambda}_l \geq \hat{\lambda}_{l+1}$ ) de la matrice  $\hat{R}_x(m \times m)$ .

Dans le reste de ce document on va considérer que le nombre de sinusoïdes est connu et égale à  $L$ .

On a :

$$\hat{R}_x U_B = U_B \cdot \sigma^2 I = \sigma^2 U_B \quad (\text{III.7})$$

D'autre part :

$$\hat{R}_x U_B = \left( A R_S A^H \cdot U_B + \sigma^2 U_B \right) = \sigma^2 U_B \quad (\text{III.8})$$

$$\Rightarrow A^H U_B = 0. \quad (\text{III.9})$$

La dernière relation signifie que les sous espaces signal et bruit sont orthogonaux :  $S_S \perp S_B$ .

On va ensuite tracer une fonction de coût qui réalise une projection de l'espace bruit sur l'espace signal, donc qui cherche en fait pour quelles valeurs de  $\omega$  l'espace bruit est orthogonal à l'espace signal. En d'autres termes, on cherche  $\omega$  qui permet de maximiser une fonction de coût appelée un pseudo-spectre. La fonction de coût de MUSIC est donnée comme ci-dessous [25] :

$$P_{music}(\omega) = \frac{1}{a(\omega)^H \cdot \hat{U}_B \hat{U}_B^H \cdot a(\omega)} \quad (\text{III.10})$$

### III.2.1.1 Calcul de la matrice d'autocorrélation ( $\hat{R}_x$ )

On considère le modèle de signal complexe  $S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(2\pi f_k t + \phi_k)}$

Où chaque fréquence  $f_k$  est associée à une amplitude réelle  $\alpha > 0$  et une phase  $\phi_k \in [0, 2\pi[$ .

En définissant les amplitudes complexes  $\alpha_k = \sum_{k=0}^{m-1} a_k e^{j\phi_k}$  et les pôles complexes  $e^{j2\pi f_k t}$

On a plusieurs manières pour estimer la matrice d'autocorrélation, et on va prendre 3 méthodes différentes, chacune illustrée par un exemple.

#### a) À partir de la matrice de Hankel :

Comme on a déjà vu :  $x(t) = A(\omega) \cdot s(t) + b(t)$ .

On suppose que le signal  $x(t)$  est observé sur l'intervalle temporel  $\{0 \dots N - 1\}$  de longueur  $N \geq 2.m$ .

On définit alors la matrice de Hankel de dimension  $(m \times L)$  contenant les  $N$  échantillons du signal observé :

$$X = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \cdots & x[L-1] \\ x[1] & x[2] & \cdots & x[L] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[m-1] & x[m] & \cdots & x[N-1] \end{bmatrix}$$

On définit de même les matrices de Hankel  $S$  et  $B$  de mêmes dimensions  $(m \times L)$ , à partir des échantillons des signaux  $s(t)$  et  $b(t)$  respectivement.

Pour tout  $k \in \{0 \dots N-1\}$ , on considère la composante  $s_k(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k e^{j2\pi f_k t}$ , On définit alors la matrice de Hankel de dimensions  $(m \times L)$  :

$$S_k = \begin{bmatrix} s_k[0] & s_k[1] & \cdots & s_k[L-1] \\ s_k[1] & s_k[2] & \cdots & s_k[L] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_k[m-1] & s_k[m-2] & \cdots & s_k[N-1] \end{bmatrix}$$

Où :

$$\begin{cases} s_k[0] & = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \\ s_k[1] & = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \cdot e^{j\omega_k} \\ s_k[2] & = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \cdot e^{j2\omega_k} \\ \vdots & \\ s_k[N-1] & = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \cdot e^{j(N-1)\omega_k} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Alors la matrice  $S_k$  devient :

$$S_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k & \cdots & \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \cdot e^{j(L-1)\omega_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \cdot e^{j(m-1)\omega_k} & \cdots & \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \cdot e^{j(N-1)\omega_k} \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\omega_1} & & e^{j\omega_L} \\ e^{j2\omega_1} & & e^{j2\omega_L} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{j(m-1)\omega_1} & \cdots & e^{j(m-1)\omega_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_0 e^{j\omega_1} & \cdots & \alpha_0 e^{j(N-m)\omega_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{L-1} & \alpha_{L-1} e^{j\omega_{L-1}} & \cdots & \alpha_{L-1} e^{j(N-m)\omega_{L-1}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Donc on peut estimer la matrice d'autocorrélation  $\hat{R}_x$  par :

$$\hat{R}_x = \frac{1}{L}(S_k \times S_k^H) \quad (\text{III.14})$$

Exemple de calcul :

```

fe=20000; % fréquence d'échantillonnage
f1=50; % fréquence de la source 1
f2=51; % fréquence de la source 2
N=200; % taille du signal
t=0 :N;
A=[exp(j*2*pi*f1.*t/fe); exp(j*2*pi*f2.*t/fe)];
s=[1 1];
x=s*A+randn(1,N);
%%%%%%%%%%%% Matrice de Hankel %%%%%%%%%%%%%%
for n=1 :N/2
    for m=1 :N/2
        X(n,m)=x(n+m-1);
    end
end
end

```

Après l'application de MUSIC utilisant la matrice de Hankel, on avait pu estimer deux fréquences voisines très proches :

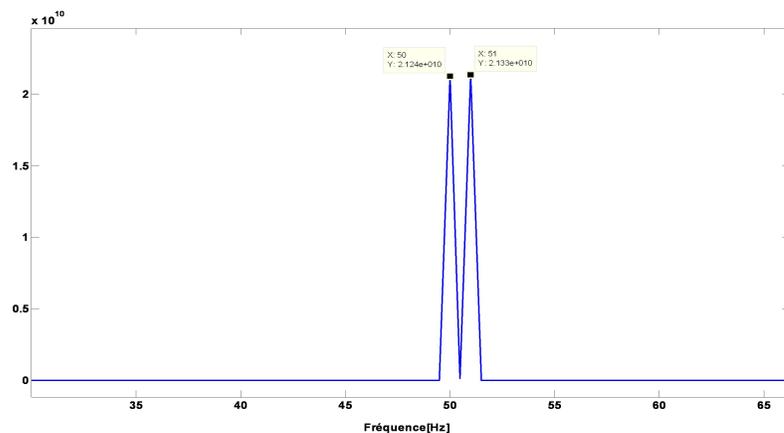


FIGURE III.1: Séparation de deux fréquences par MUSIC utilisant Hankel.

b) Calculant les éléments de  $\hat{R}_x$  terme par terme :

Sachant que la matrice  $\hat{R}_x$  est donnée comme ci-dessous :

$$\hat{R}_x = \begin{bmatrix} \hat{r}(0) & \hat{r}(1) & \hat{r}(2) & \cdots & \hat{r}(m-1) \\ \hat{r}^*(1) & \hat{r}(0) & \hat{r}(1) & \cdots & \hat{r}(m-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{r}^*(m-1) & \hat{r}^*(m-2) & \cdots & \cdots & \hat{r}(0) \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Avec  $r(\tau)$  donné par la relation suivante :

$$\hat{r}(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} x(k)x(k+\tau) \quad / \tau = 1 \dots m-1$$

L'utilisation de cette méthode nous donne aussi les mêmes performances que la méthode de Hankel :

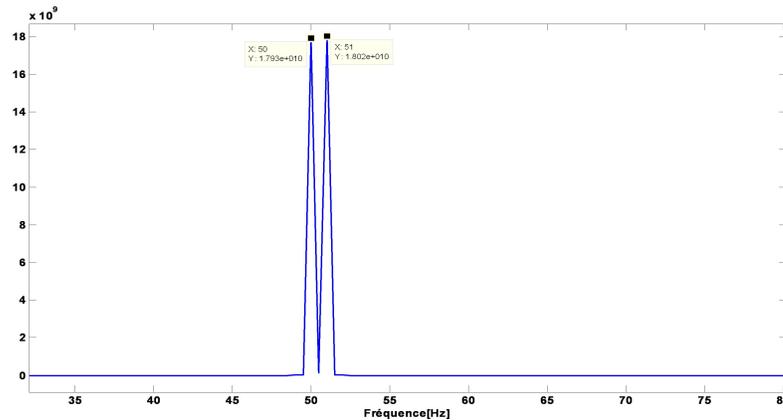


FIGURE III.2: Séparation de deux fréquences par MUSIC utilisant  $\hat{R}_x$  classique.

c) Utilisant l'outil Matlab :

On peut aussi estimer la matrice d'autocorrélation  $\hat{R}_x$  numériquement par l'instruction "corrmtx", dont on calcule la première ligne puis on utilise la commande "toeplitz" pour reconstruire les autres lignes.

On remarque que cette méthode est aussi performante, et rapide dans le temps de calcul :

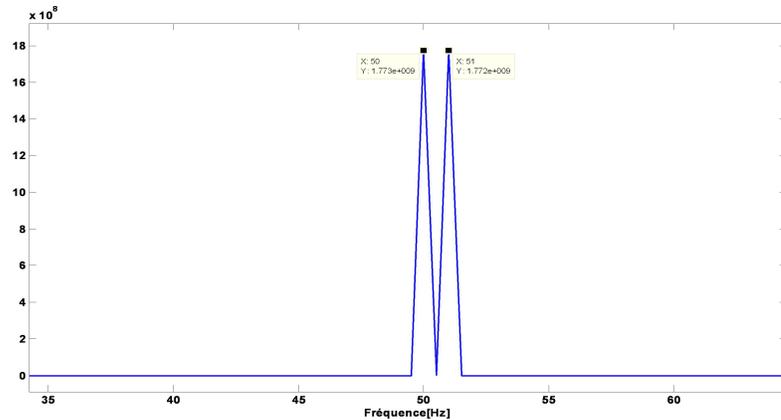


FIGURE III.3: Séparation de deux fréquences par MUSIC utilisant "corrmatx".

### III.2.2 La méthode Root-MUSIC

Cette méthode a été conçue pour l'analyse spectrale afin de diminuer le coût calculatoire par rapport à celle de MUSIC. Il s'agit de remplacer la recherche de  $L$  maxima par une recherche de racines d'un polynôme.

Root-MUSIC peut-être présentée de la manière suivante : On remplace les termes  $e^{-j\omega}$  par la variable  $z$ . La fonction de coût  $P_{music}$  devient alors en fonction de  $z$  :

$$P_{music}(z) = \frac{1}{a^T(z^{-1})U_B U_B^H a(z)}. \quad (\text{III.16})$$

On pose :

$$P(z) = a^T(z^{-1})U_B U_B^H a(z), \quad (\text{III.17})$$

avec :  $a^T(z^{-1}) = [1, z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-(m-1)}].$

Pour que  $P_{music}(z)$  soit maximum cela implique que le dénominateur doit être minimum

il faut donc qu'on cherche les racines du polynôme  $P(z)$  ;

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1, z^{-1}, z^{-2}, & \dots & , z^{-(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(1,1) & g(1,2) & \cdots & g(1,m) \\ g(2,1) & g(2,2) & \cdots & g(2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(m,1) & g(m,2) & \cdots & g(m,m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ \vdots \\ z^{-(m-1)} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III.18})$$

Si on développe ce système on trouve un polynôme d'ordre  $2m-2$  comme illustré ci-dessous :

$$p_1 z^{2m-2} + p_2 z^{2m-1} + \dots + p_{2m-2} z^1 + p_{2m-1} = 0, \quad (\text{III.19})$$

où les coefficients  $p_i$  sont respectivement la somme des éléments diagonaux de la matrice  $GG^H$  de gauche à droite.

Donc avec l'instruction "roots" de Matlab on peut extraire les racines de notre polynôme  $P(z)$ . Ces solutions sont en fait les composantes exponentielles de la matrice de Vandermonde c'est-à-dire  $z = e^{i2\pi f_k}$ . Les fréquences  $f_k$  peuvent être estimées à partir de la phase des  $2m-2$  racines de  $P(z)$  les plus proches de cercle unité c'est-à-dire les racines qui ont une amplitude plus proche de 1 et à l'intérieur du cercle.

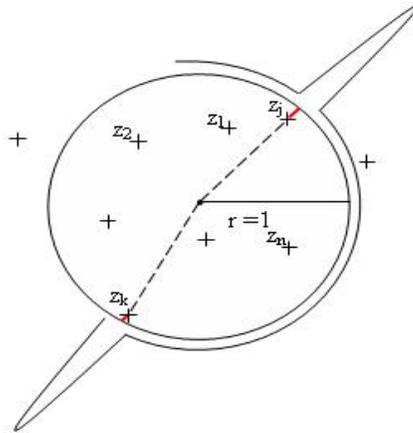


FIGURE III.4: Réaction de courbe des fréquences au niveau des racines.

L'intérêt de la version polynomiale est double : la recherche des zéros d'un polynôme est beaucoup moins coûteuse en temps de calcul que l'évaluation puis la recherche des maxima dans un pseudo-spectre.

### III.2.3 La méthode ESPRIT

ESPRIT est l'acronyme d'Estimation of Signal Parametres Via Rotational Invariance Techniques. Cette méthode a été proposée par [Roy et al., 1986]. Elle se base aussi sur l'approche de sous espaces, mais au lieu d'utiliser l'orthogonalité des sous-espaces bruit et signal, elle utilise les propriétés du sous-espace signal. L'intérêt principal de ESPRIT est sa simplicité de mise en oeuvre et son faible coût calculatoire [24].

L'algorithme ESPRIT s'appuie sur une propriété particulière de l'espace signal : l'invariance rotationnelle, et comme toutes les méthodes HR, elle est basée aussi sur l'estimation de la matrice d'autocorrélation  $\hat{R}_x$  :

$$\hat{R}_x = \frac{1}{m} S_k S_k^H$$

On suppose que l'espace signal est de dimension  $L$ , et la matrice  $S$  est la matrice de Hankel de dimension  $(m \times N - m)$ . On pourra diagonaliser la matrice  $\hat{R}_x$  à l'aide d'une svd  $[U_1, D, U_2] = svd(\hat{R}_x)$ . La matrice  $\hat{R}_x$  étant symétrique définie positive, les vecteurs colonnes des matrices  $U_1$  et  $U_2$  (de dimension  $m \times m$ ) sont vecteurs propres de  $\hat{R}_x$ , associés aux  $m$  valeurs propres rangées dans la matrice diagonale  $\Lambda$  par ordre décroissant (on a alors  $\hat{R}_x = U_1 \Lambda U_1^H = U_2 \Lambda U_2^H$ ). On pourra ainsi extraire de  $U_1$  (ou de  $U_2$ ) une base de l'espace signal  $U_s$  (de dimension  $m \times L$ ).

#### III.2.3.1 Estimation des fréquences

Pour estimer les fréquences, on pourra procéder de la façon suivante :

Soit  $A_{\downarrow}^m$  la matrice de dimensions  $(m - 1 \times L)$  qui contient les  $(m - 1)$  premières lignes de  $A$ , et  $A_{\uparrow}^m$  la matrice de dimensions  $(m - 1 \times L)$  qui contient les  $(m - 1)$  dernières lignes de  $A$ . Alors on vérifie que :

$$A_{\uparrow}^m = A_{\downarrow}^m D \tag{III.20}$$

Où  $D = \text{diag}(z_1, \dots, z_L)$ ,

et  $z_i = e^{j\omega_i}$ .

Il existe une matrice inversible  $G$  de dimension  $(L \times L)$  telle que :

$$A = U_s G \tag{III.21}$$

où  $G$  est définie comme la matrice de passage de la première base à la seconde.

Puis on extrait de  $U_s$  les matrices  $U_{s\downarrow}$  (obtenue en supprimant la dernière ligne de  $U_s$ ) et  $U_{s\uparrow}$  (obtenue en supprimant la première ligne de  $U_s$ );

En substituant l'équation (III.21) dans l'équation (III.20), on trouve alors que :

$$U_{s\uparrow} = U_{s\downarrow} \cdot \Phi \quad (\text{III.22})$$

où  $\Phi$  appelée matrice spectrale, et elle est définie par :

$$\hat{\Phi} = G \cdot D \cdot G^{-1}. \quad (\text{III.23})$$

À partir de la méthode de moindre carré on pourra ensuite estimer  $\hat{\Phi}$  :

$$\hat{\Phi} = \left( \left( U_{s\downarrow}^H U_{s\downarrow} \right)^{-1} U_{s\downarrow}^H \right) U_{s\uparrow} = U_{s\downarrow}^\dagger U_{s\uparrow} \quad (\text{III.24})$$

Où le symbole  $\dagger$  est l'opérateur de pseudo inverse.

D'ailleurs, on peut calculer les valeurs propres de  $\hat{\Phi}$  à l'aide de la fonction "eig" de Matlab (on rappelle que les valeurs propres de  $\hat{\Phi}$  sont les poles  $z_k = e^{i2\pi f_k}$ ). On en déduit :

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \text{angle}(z_k) \quad (\text{III.25})$$

### III.2.4 Estimation des amplitudes, des phases et des puissances

Il s'agit d'utiliser la méthode des moindres carrés pour estimer les amplitudes  $a_k$  et les phases  $\phi_k$ , avec la connaissance du signal  $X$  et les fréquences  $f_k$ . L'estimation des amplitudes complexes est basée sur la relation suivante :

$$s = A^\dagger x = \left( \left( A^H A \right)^{-1} A^H \right) x \quad (\text{III.26})$$

Où  $x$  est le vecteur  $\left[ x(0) \ \dots \ x(m-1) \right]^T$  et  $A$  est la matrice de Vandermonde de dimension  $(m \times L)$ . Sachant que les éléments de cette matrice vérifient la relation  $A_{(t,k)} = z_k^t$ . Tant que les éléments de la matrice  $\alpha$  s'écrivent sous la forme exponentielle, on peut déduire  $a_k = |\alpha_k|$  et  $\phi_k = \text{angle}(\alpha_k)$  pour  $k \in \{0 \dots L-1\}$ .

D'autre part, et à partir de la matrice des amplitudes qui a été estimée précédemment, on peut estimer aussi les puissances de nos sources par deux méthodes différentes, soit on enlève

les éléments  $a_k$ , qui correspondent aux fréquences recherchées, au carré, soit par le calcul d'espérance mathématique de la matrice  $S(t)$  :

$$P_{uis} = E \left[ S(t).S^*(t-k) \right] = \frac{1}{L+1} \left( S(t).S^*(t) \right) \quad (\text{III.27})$$

où chaque élément de la diagonal de la matrice  $P_{uis}$  est associé à une puissance de nos sources.

**a) Le rapport signal sur bruit**

**-RSB** : Le rapport signal sur bruit exprime la qualité d'un signal par rapport aux parasites ou bien c'est le rapport entre la puissance d'un signal et la puissance des bruits parasites. Si le rapport signal/Bruit est élevé cela signifie que le bruit est négligeable. Réciproquement si le rapport signal/Bruit est faible cela signifie que le bruit est important.

**b) L'erreur quadratique moyenne**

**-EQM** : L'erreur quadratique moyenne est une grandeur permettant de comparer les estimateurs entre eux. Elle est définie de la manière suivante :

$$EQM(\hat{f}) = E[(\hat{f} - f)^2]. \quad (\text{III.28})$$

D'où :

$$REQM(\hat{f}) = \sqrt{\frac{1}{stat} \sum_{k=1}^{stat} (\hat{f} - f)^2} \quad (\text{III.29})$$

stat : le nombre d'itérations.

l'estimateur le plus efficace est simplement celui qui a la variance la plus petite.

On utilise aussi parfois l'abréviation *RMSE* du terme anglais (*Root mean squared error*).

Lorsqu'on a exécuté notre algorithme de calcul pour 1000 itérations puis on fait la moyenne des résultats obtenus, on a trouvé deux fréquences égales à celles des sources imposées malgré le faible  $SNR = 30$  dB :

F1= 50.3985.

F2= 50.6688.

Alors ça implique que l'algorithme ESPRIT est capable aussi de séparer deux fréquences proches. Il ne nous reste donc qu'à valider les résultats obtenus déjà par l'estimation des puissances en comparant ces derniers avec celui de la densité spectrale de puissance (PSD), où on a trouvé les résultats suivants :

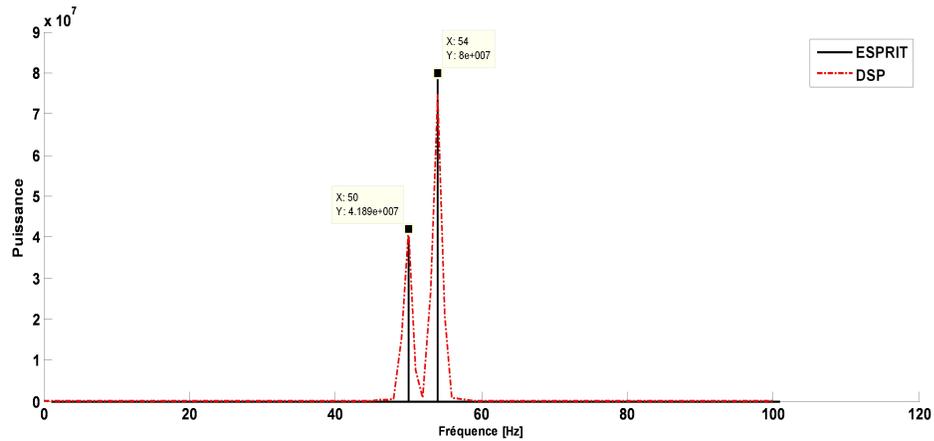


FIGURE III.5: *Estimation des puissances.*

Donc et d'après la figure précédente, on est bien arrivé à constater que les puissances des sources estimées par l'algorithme ESPRIT et celles estimées par la DSP sont totalement confondues.

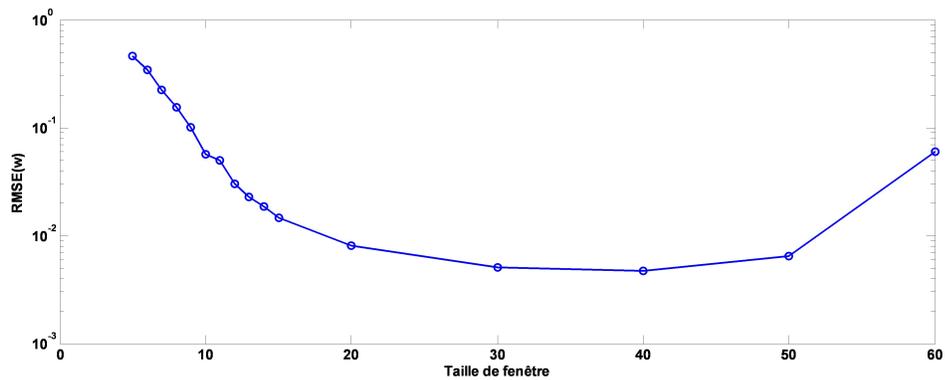


FIGURE III.6: *RMSE Vs. La taille de la fenêtre.*

c) **Facteurs de précision** La figure ci-dessus montre que pour un SNR=15 dB, l’Algorithme ESPRIT donne des résultats assez bon. Tout dépend la taille de la fenêtre dont l’erreur quadratique moyenne est de  $10^{-2,3}$  pour une fenêtre de 40 échantillons, et se dégrade si on augmente ou bien on réduit la taille de la fenêtre.

On peut remarquer aussi, dans la figure suivante, que ces performances ne dépendent pas que à la taille de la fenêtre, car la différence entre les fréquences des sources joue un rôle très important dans la précision. Sachant que si ces fréquences sont plus en plus éloignées, l’erreur quadratique moyenne sera très faible. Cependant, s’elles sont très proches, les résultats estimés vont être divergées par apport à celle réelles.

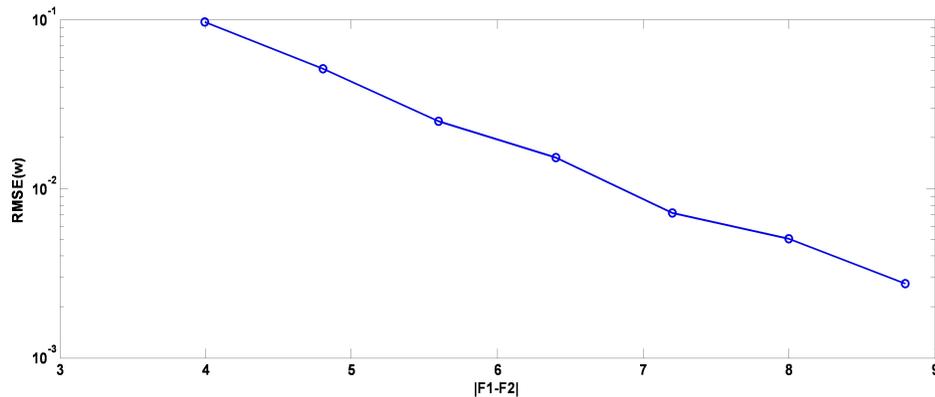


FIGURE III.7: *RMSE Vs. La différence entre les fréquences des sources.*

### III.2.5 Estimation des fréquences des sources d’un signal à valeurs réelles

Tous les algorithmes d’estimations dans la littérature supposent que les données sont à valeurs complexes. Bien qu’il soit généralement connu que ces algorithmes soient applicables aux données à valeurs réelles. Il est raisonnable de s’attendre à de meilleurs résultats si l’information ou les données à valeurs réelles peuvent en quelque sorte être intégrées dans l’algorithme de calcul[31].

Pour étudier ce cas là, on impose que notre signal s'écrive sous la forme :

$$z(t) = \sum_{k=1}^L x_k(t) + b(t) \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (\text{III.30})$$

Où :

$$x_k(t) = \alpha_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (\text{III.31})$$

Tel que N représente le nombre d'observation du signal à traiter qui est constitué par L composantes sinusoïdales, en plus  $\{\alpha_k \succ 0\}$ ,  $\{\omega_k \in [0, \pi]\}$  et  $\{\phi\}$  des variables aléatoires indépendants. D'après Euler, les fonctions trigonométriques s'expriment par une somme d'exponentielles, c'est-à-dire :  $\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$ , ce qui nous permet de réécrire l'équation (III.30) sous la forme :

$$z(t) = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{2} \left[ e^{j(\omega_k t + \phi_k)} + e^{-j(\omega_k t + \phi_k)} \right] + b(t) \quad (\text{III.32})$$

D'autre part, on introduit le vecteur instantané  $x(t)$  de la dimension  $(m \times 1)$ , telle que  $m \succ 2L$  :

$$x(t) = \left[ z(t) \quad z(t+1) \quad \dots \quad z(t+m-1) \right]^T \quad (\text{III.33})$$

Par conséquent, le bruit  $b(t)$  s'exprime de la même façon que (III.33) :

$$B(t) = \left[ b(t) \quad b(t+1) \quad \dots \quad b(t+m-1) \right]^T \quad (\text{III.34})$$

Donc et après le développement des équations précédentes, on peut reformuler  $x(t)$  comme ci-dessous :

$$x(t) = As(t) + B(t) \quad (\text{III.35})$$

Où A et s sont des matrices de dimensions  $(m \times 2L)$  et  $(2L \times 1)$  respectivement, par contre, le vecteur B a la même dimension que x.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega_1} & \dots & e^{j\omega_L} & e^{-j\omega_1} & \dots & e^{-j\omega_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(m-1)\omega_1} & \dots & e^{j(m-1)\omega_L} & e^{-j(m-1)\omega_1} & \dots & e^{-j(m-1)\omega_L} \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

$$s(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} \\ \vdots \\ \alpha_L e^{j(\omega_L t + \phi_L)} \\ \alpha_1 e^{-j(\omega_1 t + \phi_1)} \\ \vdots \\ \alpha_L e^{-j(\omega_L t + \phi_L)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

On remarque ici que les étapes et la procédure pour exprimer le système sont pareils que pour le traitement des valeurs complexes.

On choisit donc l'algorithme Root-MUSIC pour voir les performances pour estimer les fréquences du signal de synthèse d'un engrenage de deux roues. Le signal réel d'engrenage est une somme de deux sinusoïdes,  $S_1$  de fréquence  $f_1 = 30Hz$  correspond à la roue  $R_1$  et  $S_2$  de fréquence  $f_2 = 14Hz$  correspond à la roue  $R_2$ , modulée avec une porteuse sinusoïde d'engrènement  $S$  de fréquence  $f_{en} = 75Hz$ . On obtiens maintenant un signal de valeurs réelles  $S = S_e(1 + m_e(S_1 + S_2)) + \text{bruit}$  avec  $m_e$  est le facteur de modulation. Pour faire la comparaison avec le même signal mais avec des valeurs complexes, on applique la transformé de Hilbert sur le signal  $S$ . On prend la taille du signal  $N=2000$  échantillons, la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1000$  et le bruit est de  $\text{SNR}=20\text{dB}$ .

La simulation de notre algorithme nous a présenté des bons résultats pour les signaux réels et les signaux complexes. Cet algorithme a pu estimer les dix fréquences correspondantes à  $f_{en}$ ,  $f_{en} + f_1$ ,  $f_{en} - f_1$ ,  $f_{en} + f_2$ ,  $f_{en} - f_2$  et leurs images dans le côté négatif comme il est montré ci-dessous :

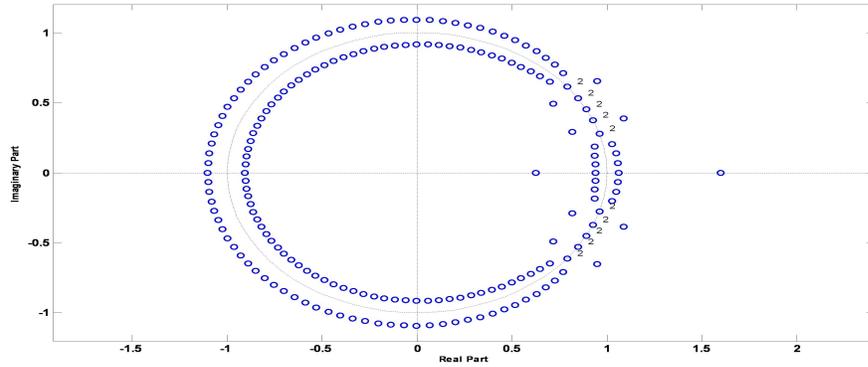


FIGURE III.8: La distribution des fréquences dans le plan  $Z$ .

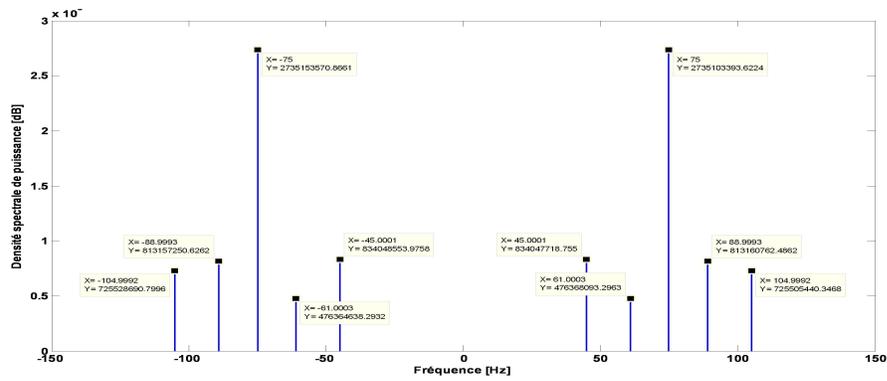


FIGURE III.9: Estimation des fréquences d'engrenage pour des signaux réels.

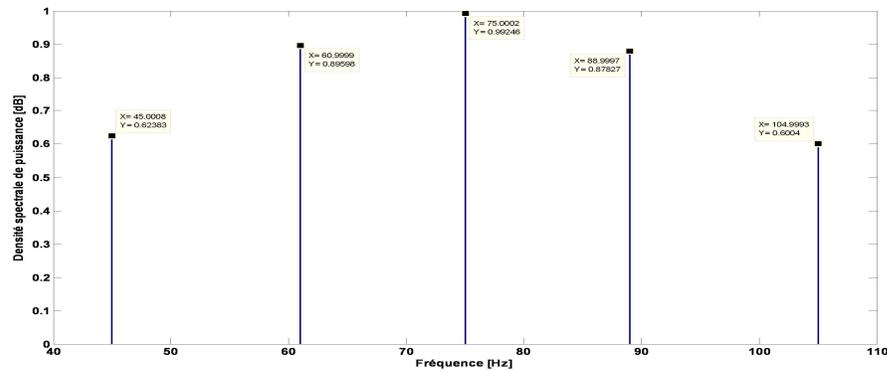


FIGURE III.10: Estimation des fréquences d'engrenage pour des signaux complexes.

La figure (III.8) montre que les bonnes fréquences se trouvent sur le cercle, cinq dans le côté positif et cinq dans le côté négatif.

## III.2.6 Performances des estimateurs

### III.2.6.1 Borne de Cramer-Rao

La borne de Cramér-Rao est un outil fondamental qui exprime une borne inférieure de la variance d'estimation, elle permet d'analyser les performances des estimateurs[26], son expression dans le cadre de l'estimation de fréquence est :

$$CRB(k) = \frac{6}{N^3 \cdot SNR(k)} \quad (\text{III.38})$$

### III.2.6.2 EQM en fonction du RSB

Nous avons mené plusieurs simulations pour montrer les différents aspects de MUSIC, Root-MUSIC et ESPRIT. Dans tous les cas, les résultats sont basés sur 100 itérations,  $L = 2$  sources et on prend 100 échantillons. Les phases initiales des sources sont distribuées aléatoirement entre 0 et  $2\pi$ .

Dans le premier cas, la REQM de MUSIC est comparée à la BCR, et la REQM de Root-MUSIC à la BCR, puis la REQM de l'ESPRIT à la même borne. D'autre part, nous comparons Root-MUSIC, MUSIC et ESPRIT, à la borne de Cramer-Rao simultanément en traçant la REQM en fonction du RSB.

Sachant que les fréquences à estimer sont  $f_1 = 50Hz$  et  $f_2 = 51Hz$ , la taille de la matrice d'autocorrélation est de  $(50 \times 50)$ , la dimension de l'espace signal est de  $2 \in C^L$ , la taille de l'espace bruit est de  $48 \in C^L$ .

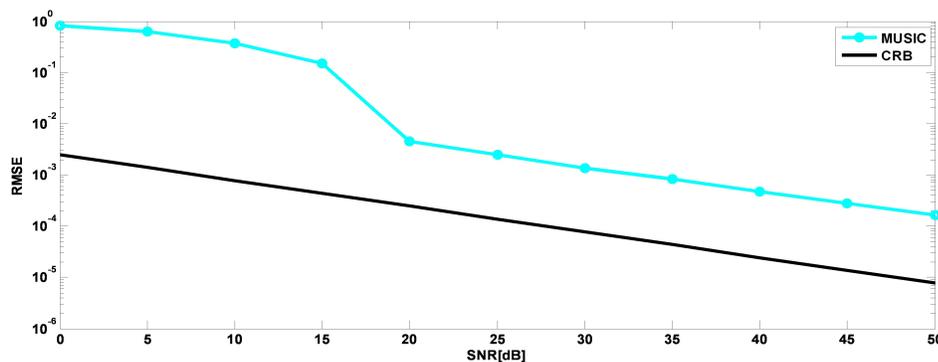


FIGURE III.11: *RMSE de MUSIC pour différents SNR.*

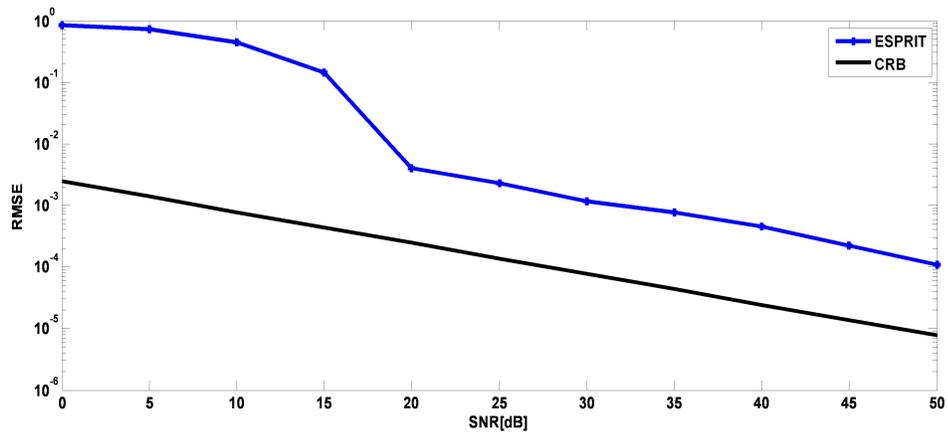


FIGURE III.12: RMSE d' ESPRIT pour différents SNR.

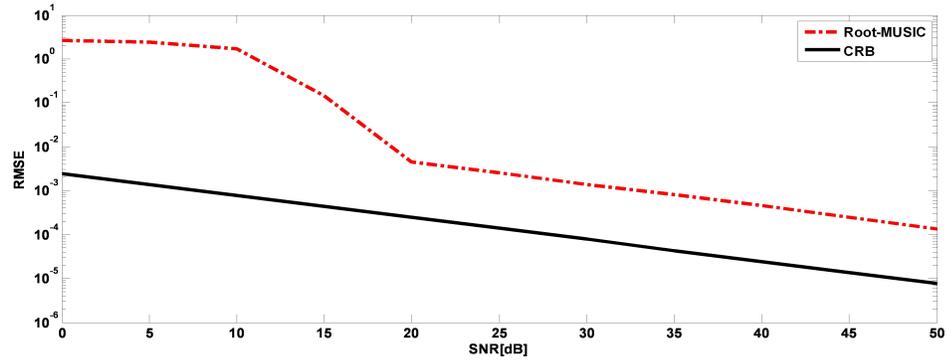


FIGURE III.13: RMSE de Root-MUSIC pour différents SNR.

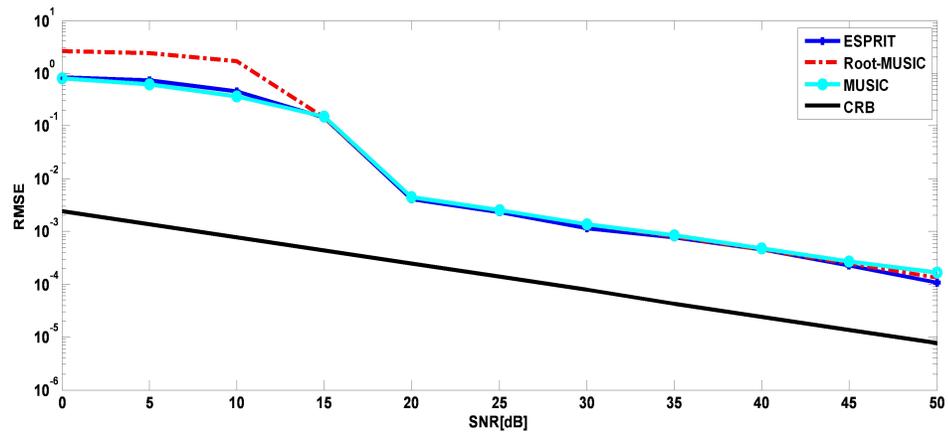


FIGURE III.14: Performance des méthodes HR.

L'objectif de ce type de simulation est de connaître l'influence de la variation du SNR sur les performances des méthodes à haute résolution afin d'estimer les bonnes fréquences. D'autre part, comme on a vu que l'augmentation du rapport signal à bruit permet d'améliorer l'estimation des fréquences, on remarque dans la zone 0 dB à 20 dB que les performances sont faibles. Nous pouvons par ailleurs observer les bonnes performances de ces méthodes à partir de 20 dB et plus, notamment en terme de consistance.

On peut dire que pour les faibles valeurs du SNR, les algorithmes ESPRIT, MUSIC et Root-MUSIC ont de moins bonnes performances. Cependant, elles prennent les mêmes performances dans les hauts SNR dont elles sont apparus plus proche de la BCR. Les comportements de ces algorithmes sont presque similaires le long des courbes.

Dans la section suivante, on va rencontrer autres types d'estimateurs dits approximant le maximum de vraisemblance. Ces estimateurs sont connus par leur forte résolution et leur meilleure estimation. De plus, ils représentent des bonnes performances même s'il y a la corrélation entre les échantillons.

### III.3 MÉTHODES APPROXIMANT LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Le principe du maximum de vraisemblance est une méthode générale d'estimation de paramètres. Il fournit des estimateurs asymptotiquement efficaces et sans biais. C'est pourquoi il est souvent préféré aux autres techniques d'estimation lorsqu'il possède une solution analytique simple. La méthode du maximum de vraisemblance ramène l'estimation des fréquences et des amplitudes à un problème de moindres carrés[33].

### III.3.1 La méthode MODE

"Methode Of Direction Estimation", est aussi connu *WSF* "Weighted Subspace Fitting". C'est un algorithme utile pour estimer les paramètres des signaux, corrélés ou non, sous la forme d'exponentielles superposées. En fait, il est démontré que sa précision théorique pour un simple échantillon est plus élevée que les deux estimateurs ESPRIT et Root-MUSIC. De plus, il est capable de faire la décomposition propre à moindre coût de calcul par rapport à celle du ML "Maximum Likelihood".

Comme les autres méthodes de séparation de sources à haute résolution, le WSF est aussi basée sur la minimisation du critère de ML :

$$f(\omega) = \min \operatorname{tr}\{P_A^\perp \hat{R}_x\} \quad (\text{III.39})$$

Où :  $P_A^\perp = I - AA^\dagger$ , représente la matrice de projection sur l'espace orthogonal des colonnes de  $A(\omega)$ ,  $\operatorname{tr}\{\bullet\}$  est l'opérateur trace,  $\hat{R}_x$  est la matrice de covariance du signal.

Le point essentiel qui caractérise cette méthode est de chercher la bonne matrice d'autocorrélation qui comporte les valeurs propres les plus proches aux celles exactes. Après un développement mathématique de la matrice  $\hat{R}_x$  par [29], on trouve que sa meilleure décomposition est donnée sous la forme :

$$\hat{R}_x = \hat{E}_s \hat{W} \hat{E}_s^H \quad (\text{III.40})$$

Sachant que  $W$  est une matrice diagonale qui dépend aux sous espace signal, son inverse et à la variance du bruit :

$$\hat{W} = (\hat{\Lambda}_s - \hat{\sigma}^2 I) \hat{\Lambda}_s^{-1} \quad (\text{III.41})$$

Telle que :  $\hat{\sigma}^2$  signifie l'estimation de la variance du bruit définit mathématiquement par la moyenne des petites valeurs propres de la matrice  $\hat{R}_x$ .

Alors, on peut réécrire le critère (III.39) utilisant l'équation (III.40) comme suit :

$$f(\omega) = \min \operatorname{tr}\{P_A^\perp \hat{E}_s \hat{W} \hat{E}_s^H\}. \quad (\text{III.42})$$

On a aussi  $P_A^\perp = BB^\dagger = B(B^H B)^{-1} B^H$ . Où  $B$  représente la matrice toeplitz d'un vecteur  $b$  différent de zéro et qui vérifie la condition suivante :

$$B^H A(\omega) = 0. \quad (\text{III.43})$$

Tant que  $\hat{E}_s$  et  $A$  engendrent le même espace, on a alors également :

$$B^H E_s = 0 \quad (\text{III.44})$$

où :

$$B = \begin{bmatrix} b_L^* & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_0^* & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & b_L^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0^* \end{bmatrix} \text{ de taille } m \times (m-l).$$

Pour simplifier le problème et le mettre sous une forme mathématique flexible et faisable, il suffit donc de traduire l'équation (III.43) comme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} b_L & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_L & \cdots & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_L & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ z^m \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{III.45})$$

Il est bien évident maintenant, à partir du produit précédent, que l'identification des paramètres voulus se base notamment sur les racines d'un polynôme de degré  $L$  (nombre de sources) :

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_L = b_0 \prod_{M=1}^L (z - e^{j\omega_M}). \quad (\text{III.46})$$

La première tâche est donc d'estimer les coefficients de  $b(z)$ , partant de la fonction objective  $f(b)$  par l'utilisation du critère de minimisation "LAGRANGIEN" sous la contrainte  $b^H b = 1$  pour éviter le vecteur solution zéro :

$$f(b) = \min \operatorname{tr}\{B(B^H B)^{-1} B^H . E_s . W . E_s^H\} \quad (\text{III.47})$$

En rappelant les propriétés matricielles où l'opérateur  $\operatorname{tr}$  est commutatif d'une part, et en imposant temporairement  $B^H B = I$ , d'autre part, alors (III.47) devient :

$$f(b) = \min \operatorname{tr}\{B^H . E_s . W . E_s^H . B\}. \quad (\text{III.48})$$

On peut exprimer le produit d'une matrice Toeplitz par un vecteur quelconque, en le transformant du produit d'une matrice Hankel par un autre vecteur, comme il est montré ci-dessous :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}_b = \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}_a. \quad (\text{III.49})$$

On impose également que  $Q = E_s.W.E_s^H$ , par conséquent (III.48) devient :

$$f(b) = \min \text{tr}\{B^H.Q.B\} \quad (\text{III.50})$$

cela nous permet de traduire la trace par une somme de produits quadratiques des vecteurs  $b, b^H$  et les petites matrices carrés de taille  $(L + 1 \times L + 1)$  dans la digonal de  $Q$  :

$$f(b) = \min \left( \sum_{i=1}^{L+1} b^H Q_i b \right). \quad (\text{III.51})$$

D'après Lagrangien, il s'agit de trouver la valeur de  $\lambda$  pour que :

$$\frac{\partial f(b, \lambda)}{\partial b} = b^H Q b - \lambda(b^H b - 1) = 0 \quad (\text{III.52})$$

Donc, en développant (III.52) on obtient à la fin :

$$(Q + Q^H)b = 2\lambda b \quad \text{avec } Q = Q^H \quad (\text{III.53})$$

D'où :

$$Qb = \lambda b. \quad (\text{III.54})$$

Cela signifie que  $\lambda$  et  $b$  sont respectivement la valeur propre et le vecteur propre de la matrice  $Q$ . On déduit donc que la fonction objective  $f(b)$  est minimum pour le vecteur propre  $b$  associé à la plus petite valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $Q$ .

Afin d'estimer  $b$ , La deuxième tâche s'agit d'utiliser le terme  $(B^H B)^{-1}$  à la fonction objective à minimiser et de le remplacer par  $(\hat{B}^H \hat{B})^{-1}$  estimé précédemment. Ensuite, on refait la même procédure de minimisation, prenant en considération que :

$$E_s.W.E_s^H = \sum_k e_k e_k^H \omega_k \quad (\text{III.55})$$

Alors (III.47) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(b) = \min \operatorname{tr}\{B^H \cdot E_s \cdot W \cdot E_s^H \cdot B(\hat{B}^H \hat{B})^{-1}\} \\ \Leftrightarrow f(b) = \min \operatorname{tr}\{\sum_k B(\hat{B}^H \hat{B})^{-1} B^H \cdot e_k \cdot e_k^H \cdot \omega_k\} \\ \Leftrightarrow f(b) = \min \operatorname{tr}\{\sum_k \omega_k \cdot e_k^H B(\hat{B}^H \hat{B})^{-1} B^H \cdot e_k\} \\ \Rightarrow f(b) = \min \operatorname{tr}\{b^H (\sum_k \omega_k \cdot \tilde{E}_k^H (\hat{B}^H \hat{B})^{-1} \tilde{E}_k) b\} \end{array} \right. \quad (\text{III.56})$$

$\tilde{E}_k$  : représente la matrice Hankel du vecteur  $e_k$ .

On impose maintenant  $M = (\sum_k \omega_k \cdot \tilde{E}_k^H (\hat{B}^H \hat{B})^{-1} \tilde{E}_k)$ , ce qui transforme le système (III.56) en :

$$f(b) = \min(b^H M b) \quad (\text{III.57})$$

Comme on a déjà vu,  $f(b)$  est minimum pour le vecteur propre  $b$  associé à la plus petite valeur propre  $\lambda$  de la nouvelle matrice M.

Finalement, on peut estimer les fréquences des sources par le calcul des angles des racines de la fonction (III.46).

### III.3.1.1 les perforamnces de MODE

Pour étudier l'influence de quelques paramètres sur la précision, on a fait deux essais différents. Le premier est de varier la longueur de la fenêtre d'observation de 5 jusqu'à 190 échantillons, puis on récupère à chaque fois l'erreur quadratique moyenne de  $(\omega)$  sur chaque pas de cette trame. Dans notre exemple, on a obtenu un faible RMSE égale à  $10^{-2,7}$  pour une fenêtre de 70 échantillons (figure III.15).

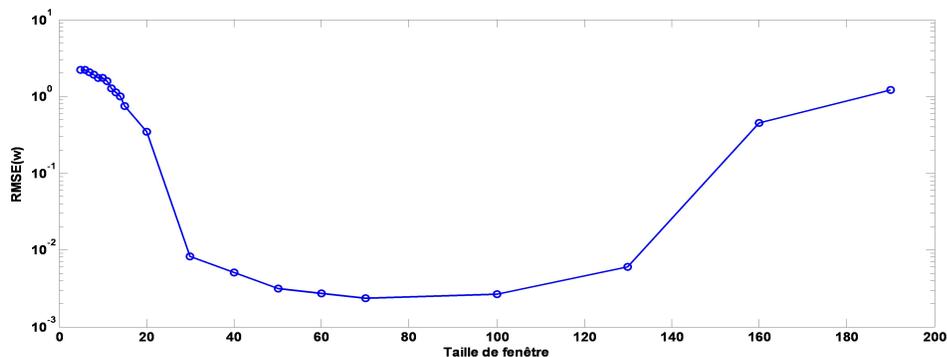


FIGURE III.15:  $RMSE$  Vs. La taille de la fenêtre.

Par contre, le deuxième essai consiste à augmenter la plage entre les deux fréquences F1 et F2. On moyenne sur 1000 réalisations avec un pas de 0,8 Hz. Puis on récupère le RMSE en fonction de la différence entre F1 et F2 :

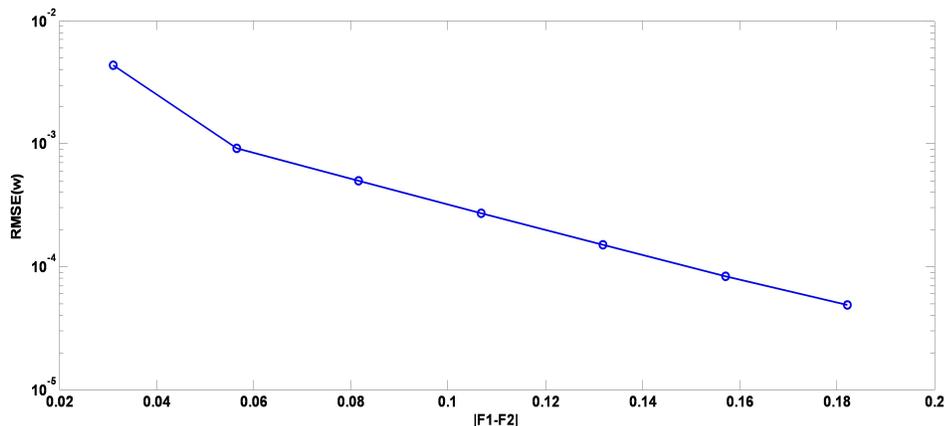


FIGURE III.16: *RMSE Vs. La différence entre les fréquences des sources.*

On déduit de la figure (III.16) que, à chaque fois que les fréquences à estimer sont éloignées, l'erreur quadratique moyenne sera de plus en plus faible.

### III.3.2 La méthode PLEDGE

**Prior knowLEDGE** est une nouvelle technique basée sur l'approche de MODE. Elle intègre la connaissance de fréquences pour améliorer l'estimation.

On peut facilement estimer les fréquences inconnues par l'intégration des autres fréquences connues dans le critère, puis on recherche les racines qui peuvent résoudre notre nouveau polynôme  $Q(z)$ . Soit le polynôme :

$$Q(z) = b_0 \prod_{i=1}^L (z - e^{j\omega_i}), \quad (\text{III.58})$$

où les coefficients de ce polynôme sont les éléments  $b_k$  du vecteur propre qui minimisent la fonction objective (III.57). Si maintenant on impose  $L_n$  fréquences connues, alors le polynôme  $Q(z)$  peut se factoriser en deux polynômes  $Q_c(z)$  et  $Q_i(z)$  :

$$Q(z) = b_0 \prod_{i=1}^L (z - e^{j\omega_i}) = Q_c(z)Q_i(z), \quad (\text{III.59})$$

où  $Q_c(z)$  est le pôleynome dont les  $L_c$  racines sont les  $z_c$  de fréquences connues et  $Q_i(z)$  est le pôleynome dont les  $L_i$  racines sont les  $z_i$  de fréquences inconnues. Les deux pôleynomes sont données comme suit :

$$Q_c(z) = q_0 \prod_{i=1}^{L_c} (z - e^{j\omega_i}) = q_0 z^{L-c} + \dots + q_{L_c}, \quad (\text{III.60})$$

$$Q_i(z) = \bar{b}_0 \prod_{i=1}^{L_i} (z - e^{j\omega_i}) = \bar{b}_0 z^{L-i} + \dots + \bar{b}_{L_i}, \quad (\text{III.61})$$

Pour résoudre ce problème, on doit décomposer le vecteur  $b$  de la fonction(III.57) en un produit de deux matrices :

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_L \end{bmatrix}^T = C^T \bar{b} \quad (\text{III.62})$$

Avec :

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 & \bar{b}_1 & \dots & \bar{b}_{L_i} \end{bmatrix}^T \quad (\text{III.63})$$

$$C = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_{L_c} & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & q_0 & q_1 & \dots & q_{L_c} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.64})$$

On sait à partir de l'approche MODE que :

$$\text{Trace} \left[ B(\hat{B}^H \hat{B})^{-1} B^H \cdot \hat{E}_s \cdot \hat{W} \cdot \hat{E}_s^H \right] = b^H \hat{M} b. \quad (\text{III.65})$$

Si on estime les coefficients  $q_k$  de la matrice  $C$  à partir du pôleynome (III.61) et qu'on utilise l'équation (III.62) dans (III.65), on trouve :

$$\text{Trace} \left[ B(\hat{B}^H \hat{B})^{-1} B^H \cdot \hat{E}_s \cdot \hat{W} \cdot \hat{E}_s^H \right] = \bar{b}^H \hat{M} \bar{b} \quad (\text{III.66})$$

où  $\hat{M} = C \hat{M} C^H$ . Pour minimiser ce critère il faut imposer dans un premier temps que  $(\hat{B}^H \hat{B}) = I$  et imposer la contrainte de minimisation  $\{b^H b = 1\}$  :

$$\begin{aligned} f(b) &= b^H M b = \bar{b}^H C^* M C^T \bar{b} \\ \Rightarrow \min f(b) &= \frac{\partial b^H M b}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b} \lambda (b^H b - 1) = \frac{\partial}{\partial b} (\bar{b}^H C^* M C^T \bar{b}) - \frac{\partial}{\partial b} \lambda (\bar{b}^H C^* C^T \bar{b} - 1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

On pose  $D = C^*C^T$ , alors (III.67) devient :

$$\begin{aligned}
 2\hat{M}\bar{b} - \lambda(D\bar{b} + \bar{b}^H D) &= 0 & (III.68) \\
 \Rightarrow 2\hat{M}\bar{b} &= 2\lambda D\bar{b} \\
 \Rightarrow D^{-1}\hat{M}\bar{b} &= \lambda\bar{b}.
 \end{aligned}$$

On constate alors que  $\bar{b}$  est le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre de la matrice  $\{D^{-1}\hat{M}\}$ .

Par la même procédure que précédemment, nous formulons la matrice  $\hat{B}$  puis nous résolvons la fonction (III.66) sous la même contrainte  $\{b^H b = 1\}$  :

$$\left\{ \begin{aligned}
 f(b) &= \min \operatorname{tr}\{B^H \cdot E_s \cdot W \cdot E_s^H \cdot B(\hat{B}^H \hat{B})^{-1}\} \\
 \Leftrightarrow f(b) &= \min \operatorname{tr}\{\sum_k B(\hat{B}^H \hat{B})^{-1} B^H \cdot e_k \cdot e_k^H \cdot \omega_k\} \\
 \Leftrightarrow f(b) &= \min \operatorname{tr}\{\sum_k \omega_k \cdot e_k^H B(\hat{B}^H \hat{B})^{-1} B^H \cdot e_k\} \\
 \Rightarrow f(b) &= \min \operatorname{tr}\{b^H (\sum_k \omega_k \cdot \tilde{E}_k^H (\hat{B}^H \hat{B})^{-1} \tilde{E}_k) b\} \\
 \Rightarrow f(b) &= \min \operatorname{tr}\{(C^T \bar{b})^H (\sum_k \omega_k \cdot \tilde{E}_k^H (\hat{B}^H \hat{B})^{-1} \tilde{E}_k) (C^T \bar{b})\}
 \end{aligned} \right. \quad (III.69)$$

$\tilde{E}_k$  : représente la matrice Hankel du vecteur  $e_k$ .

On impose maintenant  $M = C^*(\sum_k \omega_k \cdot \tilde{E}_k^H (\hat{B}^H \hat{B})^{-1} \tilde{E}_k) C^T$ , ce que transforme le système (III.69) à la forme suivante :

$$f(b) = \min(\bar{b}^H M \bar{b}) \quad (III.70)$$

Pour minimiser cette equation, on doit utiliser le critère de lagrangien :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial b}(\bar{b}^H M \bar{b}) - \frac{\partial}{\partial b} \lambda(b^H b - 1) &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial b} (C^T b)^H M (C^T b) &= 2\lambda b \\
 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial b} b^H G b &= 2\lambda b \\
 \Rightarrow G b &= \lambda b
 \end{aligned} \quad (III.71)$$

Avec :  $G = C^* M C$ .

Comme on a déjà vu,  $f(b)$  est minimum pour le vecteur propre  $b$  associé à la petite valeur propre  $\lambda$  de la nouvelle matrice  $G$ . Finalement, on peut estimer les fréquences inconnues des sources par le calcul des angles des racines de la fonction (III.61).

### III.3.2.1 Estimation des amplitudes par l'utilisation des projection obliques

Les projecteurs obliques sont peu utilisés en traitement du signal et donc assez mal connus. Les solutions optimales de plusieurs problèmes s'obtiennent très souvent grâce à une projection orthogonale. Dans la littérature, les projecteurs orthogonaux ont été appliqués à l'estimation de paramètres[34], au traitement d'antenne[35], au traitement du signal par block[36], en robotique et dans bien d'autres problèmes d'estimation encore[37].

Les méthodes de traitement du signal de type sous espaces partagent le même but : minimiser les effets du bruit. Quelques techniques de suppression de bruit ont émergé en intégrant les projecteurs orthogonaux. Ces techniques modélisent le signal souhaité comme un vecteur appartenant à un sous espace et le bruit comme un vecteur aléatoire[37].

Dans cette sous section nous donnons les formules de construction des projecteurs obliques. Les projecteurs orthogonaux sont notés  $\mathbf{P}$  et le projecteur sur le sous espace orthogonal  $\mathbf{P}^\perp$ . Nous notons par  $\mathbf{E}_{(\dots)}$  les projecteurs obliques indicés par leur sous espaces de projection et de direction. Par convention, on note en premier le sous espace de projection, vient ensuite le sous espace de direction.

Un projecteur oblique est avant tout un projecteur, par conséquent cette matrice vérifie la relation :

$$\mathbf{E}_{(\dots)}^2 = \mathbf{E} \tag{III.72}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un projecteur soit orthogonal est de satisfaire la condition de symétrie hermitienne :

$$\mathbf{P}^H = \mathbf{P} \tag{III.73}$$

Pour un projecteur orthogonal  $\mathbf{P}_A$  dont le sous-espace de projection est  $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$  et dont le sous-espace complémentaire est  $\mathfrak{R}(\mathbf{B}) = \mathfrak{R}(\mathbf{A})^\perp$ . nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_A \mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{P}_A \mathbf{B} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{III.74}$$

On sait que les vecteurs engendrant les sous espaces sont distribués par une manière aléatoire, *i.e.* ces vecteurs ne sont pas orthogonaux. Si on veut faire la projection d'un vecteur par rapport à un autre, on est obligé de faire une projection oblique. Par un autre terme, les matrices de projection non-orthogonales sont identifiées comme des projecteurs obliques. Les projecteurs obliques sont donc idempotents mais ils perdent la symétrie hermitienne (propriété très importante). Pour un projecteur oblique  $\mathbf{E}_{(\mathbf{A}\mathbf{B})}$  dont le sous-espace de projection est  $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$  et le sous-espace de direction  $\mathfrak{R}(\mathbf{B})$ , nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(\mathbf{A}\mathbf{B})}\mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_{(\mathbf{A}\mathbf{B})}\mathbf{B} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{III.75}$$

Nous donnons maintenant une méthodologie qui permet la construction d'un projecteur oblique avec les sous-espaces de projection et de direction souhaités. Supposons que  $\mathbf{A}$  est une matrice complexe de taille  $p \times m$  de plein rang, et de la même façon, que  $\mathbf{B}$  est une matrice complexe de taille  $p \times n$  de plein rang. Supposons de plus que  $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$  et  $\mathfrak{R}(\mathbf{B})$  sont disjoints, ce qui requiert l'inégalité  $m + n \leq p$ .

La formule pour obtenir un projecteur orthogonal dont le sous-espace de projection est  $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$  est bien connue et donnée par :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{H}}.\tag{III.76}$$

Le projecteur complémentaire, *i.e.* le projecteur dont le sous-espace de projection est  $\mathfrak{R}(\mathbf{B}) = \mathfrak{R}(\mathbf{A})^{\perp}$  est donnée par la formule :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{P}_{\mathbf{B}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{A}}.\tag{III.77}$$

Par conséquent, si on a une matrice  $[\mathbf{A} \ \mathbf{B}]$  composée de la concaténation des colonnes de  $\mathbf{A}$  et de celles de  $\mathbf{B}$ , le projecteur orthogonal devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathbf{AB}} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp}\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathbf{B}}^{\perp})^{\dagger} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}_{\xi}^{\dagger}.\end{aligned}\tag{III.78}$$

D'après l'hypothèse  $X = \mathbf{A}S$ , on peut estimer les amplitudes de notre signal comme suit :  
 $S = \mathbf{A}^{\dagger}X$ .

En utilisant l'algorithme PLEDGE, le projecteur oblique estime les amplitudes par la manière suivante :

$$\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{A}}_f} \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{S}} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{E}_{\hat{\mathbf{A}}_f} \mathbf{X} \quad (\text{III.79})$$

Où :  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\tilde{\mathbf{S}}$  : sont respectivement la matrice de Vandermonde et la matrice des amplitudes sans le vecteur des fréquences connues  $f$ .

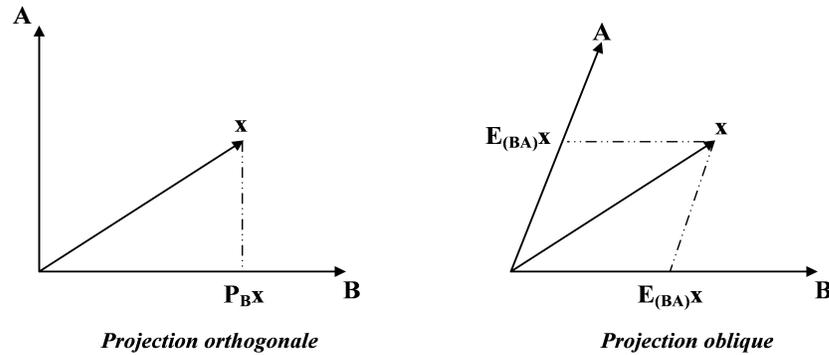


FIGURE III.17: *La projection des vecteurs.*

### III.3.2.2 les perforamnces de PLEDGE

Si on veut savoir les performances de cet algorithme, il suffit les comparer avec celles de MODE et ESPRIT.

Concernant la taille des échantillons, on a pris la taille du signal égale à 200 échantillons, les fréquences des sources sont  $F1 = 50Hz$  et  $F2 = 51Hz$ , et le rapport signal à bruit égale à 25dB. Finalement on a varié les trames de test de 5 à 190 échantillons. On obtient les resultats suivants :

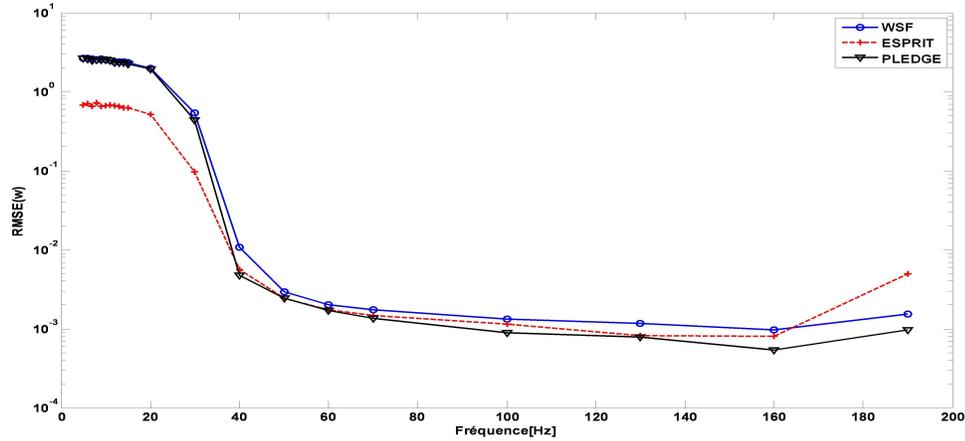


FIGURE III.18:  $RMSE$  Vs. La taille de la fenêtre.

Dans notre exemple, on remarque que l'erreur quadratique moyenne de "PLEDGE" a le plus faible  $RMSE = 10^{-3}$  par rapport aux autres algorithmes pour une trame de 100 échantillons.

Pour valider les résultats précédents, on va montrer la  $RMSE(\omega)$  de chaque algorithme en fonction du SNR. En comparant les performances de ces algorithmes par rapport à la borne de

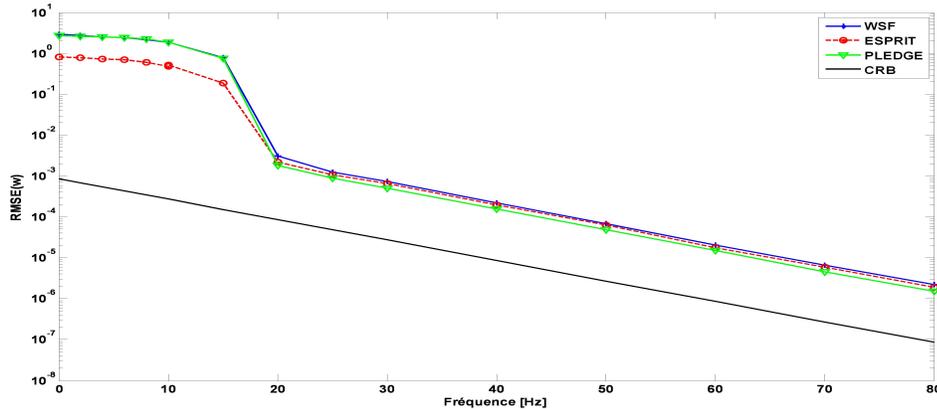


FIGURE III.19:  $RMSE$  de PLEDGE, MODE et ESPRIT pour différents SNR.

Cramer-Rao. On a choisi une trame à traiter de taille égale à 100 échantillons et pour un SNR variant de 0 dB jusqu'à 80 dB.

À partir de la figure (III.19), on conclut que l'algorithme PLEDGE est le plus proche de la borne de Cramer-Rao, ce qui signifie qu'il est le meilleur par rapport à MODE ou ESPRIT.

## III.4 Conclusion

On avait essayé de traiter les méthodes HR qui sont des méthodes paramétriques et qui se basent sur les propriétés des sous-espaces propres de la matrice d'autocorrélation des données. Spectral-MUSIC est une méthode utilisée fréquemment. Elle peut être utilisée dans les cas des ALU et l'analyse spectrale. Pour réduire sa complexité, Root-MUSIC a été proposée dans ce cas là : elle transforme la recherche des maxima du critère de Spectral MUSIC en une recherche des racines d'un polynôme. Nous avons proposé aussi l'algorithme ESPRIT qui a presque les mêmes performances que MUSIC et Root-MUSIC.

Dans la fin de ce chapitre, on a vu les deux algorithmes MODE et PLEDGE qui sont basés sur le critère de vraisemblance. D'après l'étude de l'erreur quadratique moyenne de chaque estimateur, on a montré que PLEDGE est le plus performant. Le choix de ce dernier nous permettra de l'utiliser dans le prochain chapitre pour bien estimer les fréquences correspondantes aux défauts rotoriques à partir des spectres fréquentiels des courants d'alimentation.

# Chapitre IV

## DIAGNOSTIC DE DEFAUTS DE LA MACHINE ASYNCHRONE

### IV.1 Introduction

L'étude menée dans le chapitre précédent nous a permis d'analyser et de comprendre les phénomènes qui apparaissent au niveau des grandeurs temporelles de la machine asynchrone. La validation expérimentale est, dans notre travail, indispensable car il peut exister une importante différence entre les résultats théoriques et ceux issus de l'expérimentation.

Ce chapitre est destiné à l'expérimentation de trois méthodes de diagnostic permettant l'estimation des fréquences de défauts au niveau de la cage rotorique. Trois niveaux de défaillance seront étudiés, la rupture d'une barre, deux barres et la rupture d'une portion d'anneau de court-circuit de la cage rotorique de la machine asynchrone. Nous présentons dans un premier temps le banc d'essai puis nous appliquons les méthodes proposées sur les signaux issus d'essais expérimentaux.

## IV.2 Banc d'essais

Les machines asynchrones à cage d'écureuil utilisées pour les différents essais expérimentaux sont des machines (saine, avec une barre cassée, deux barres cassées et avec une portion d'anneau de court circuit cassée) de 4Kw accouplées à une machine à courant continu, à deux paires de pôles, fabriquée par l'Entreprise Algérienne des Industries Electrotechniques Electro-Industries-AZAZGA[33].

Nous présentons à la (Figure IV.1) les rotors ayant respectivement une barre cassée, deux barres cassées et avec une portion d'anneau cassée. Nous avons décidé de percer les barres rotoriques à la jointure entre une barre et l'anneau de court-circuit car c'est à cet endroit de la cage que la rupture d'une barre est la plus probable (problèmes au niveau de la soudure entre les barres et les deux anneaux). La charge appliquée à la machine asynchrone est créée en connectant une caisse de résistance aux bornes de la machine à courant continu qui fonctionne alors en génératrice.



Rotor sain



Rotor avec une barre cassée



Rotor avec deux barres cassées



Portion d'anneau de court-circuit cassée

FIGURE IV.1: *Différents types de rotors utilisés.*



FIGURE IV.2: Stator de la machine asynchrone a cage d'écureuil.

L'acquisition des signaux est faite par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition IOTEQ/DAQ séries 1005, ayant une fréquence d'échantillonnage de 200kHz, 16 entrées analogiques, 16 entrées digitales.

Capteurs des courants et des tensions : ce sont des capteurs à effet Hall très sensibles et ils peuvent capter des signaux avec des fréquences qui peuvent aller jusqu'à 200kHz, l'utilisation de ces capteurs nécessite la connaissance de leurs caractéristiques surtout les valeurs maximales du courant et de la tension à relever. Pour ce faire, le conditionnement du signal est fortement recommandé afin de protéger les capteurs, la Figure IV.3 présente la carte qui a été réalisée en vue de conditionner et rassembler les différents signaux.

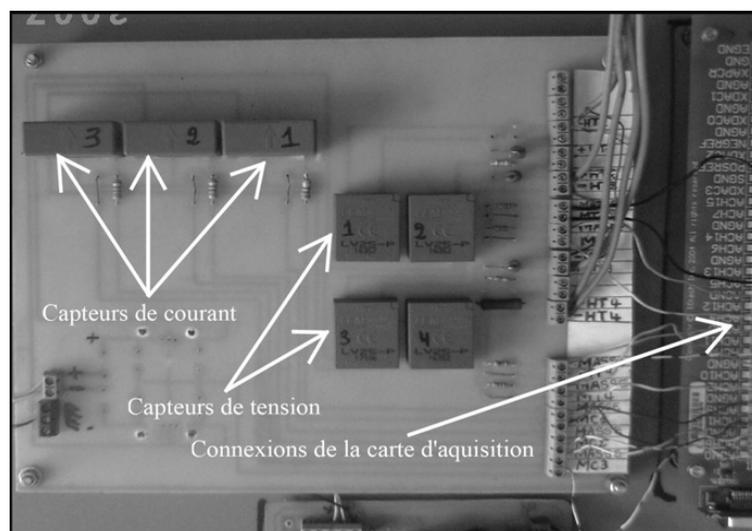


FIGURE IV.3: Carte pour le conditionnement des signaux.



FIGURE IV.4: Banc d'essais

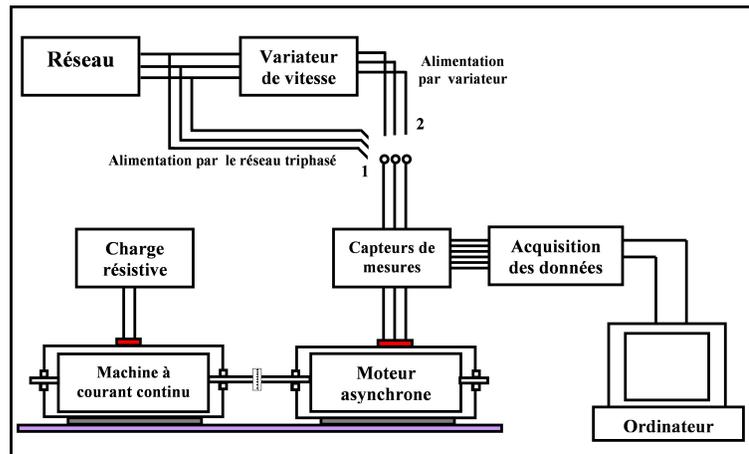


FIGURE IV.5: Schéma du banc d'essais

### IV.3 Resultats expérimentaux

Après avoir relevé les signaux, nous allons partager notre étude en quatre parties. Chacune d'elle correspondra à une défaillance rotorique. Après le diagnostic des défauts, nous testerons le comportement de PLEDGE avec une matrice de covariance dynamique, *i.e.* nous choisirons un signal puis nous glisserons la fenêtre d'observation le long du signal traité et on essayera de distinguer la différence entre les spectres obtenus dans chaque trame. Par la suite, nous prendrons à chaque essaie une trame de  $N = 900$  échantillons avec une fréquence d'échantillonnage égale à 1 KHz. Ce qui exprime une résolution de  $\Delta f = 1,1Hz$ .

### IV.3.1 Analyse du spectre du courant statorique pour la machine saine

Nous présentons dans cette sous section l'évolution temporelle et fréquentielle, du signal totale (100,000 échantillons), du courant statorique pour la machine saine en charge nominale. Ces éléments nous permettront d'avoir des représentations étalons pour faciliter par la suite le diagnostic.

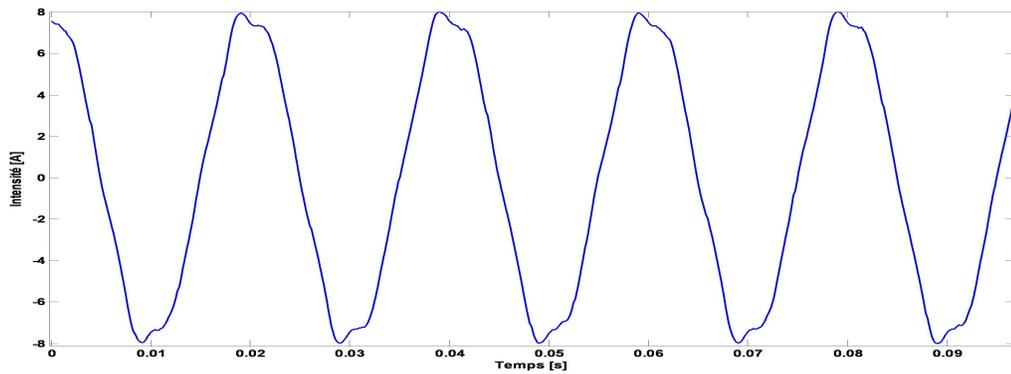


FIGURE IV.6: *Spectre temporel du courant statorique - machine saine -*

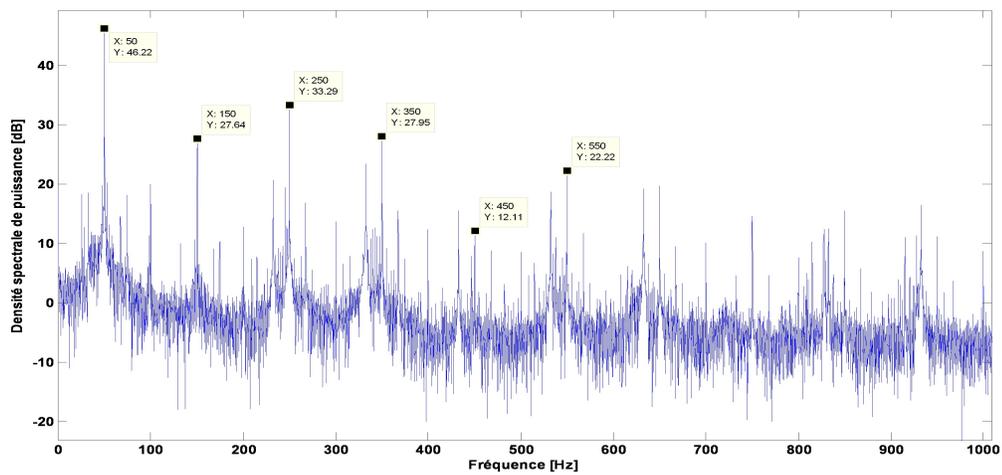


FIGURE IV.7: *Spectre fréquentiel du courant statorique - machine saine -*

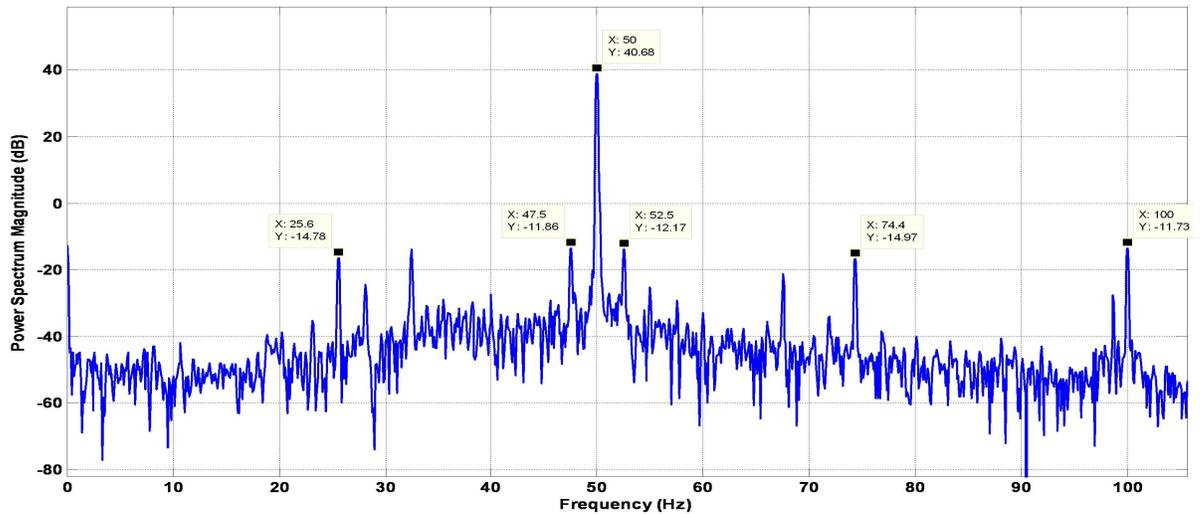


FIGURE IV.8: *Spectre fréquentiel du courant statorique - machine saine -*

On remarque bien dans les deux dernières figures l'importance du pic 50 Hz, qui correspond à la fréquence d'alimentation, et ses harmoniques impairs qui apparaissent plutôt mieux que ceux pairs.

Ce qui nous intéresse c'est tout ce qui se passe autour de la fréquence 50 Hz et ses harmoniques. Nous présentons dans les trois figures suivantes les spectres fréquentiels estimés par la "PSD", "MODE" et "PLEDGE" :

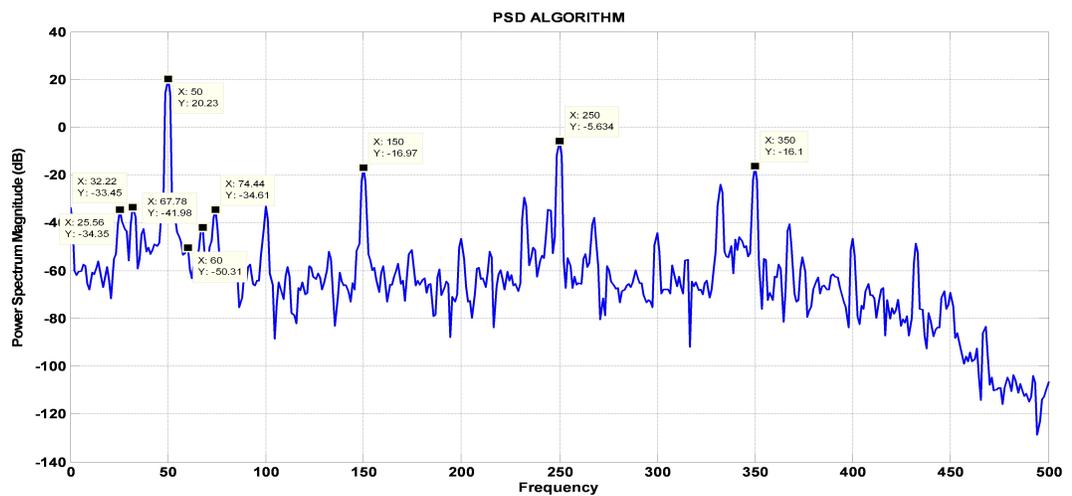


FIGURE IV.9: *Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine saine -*

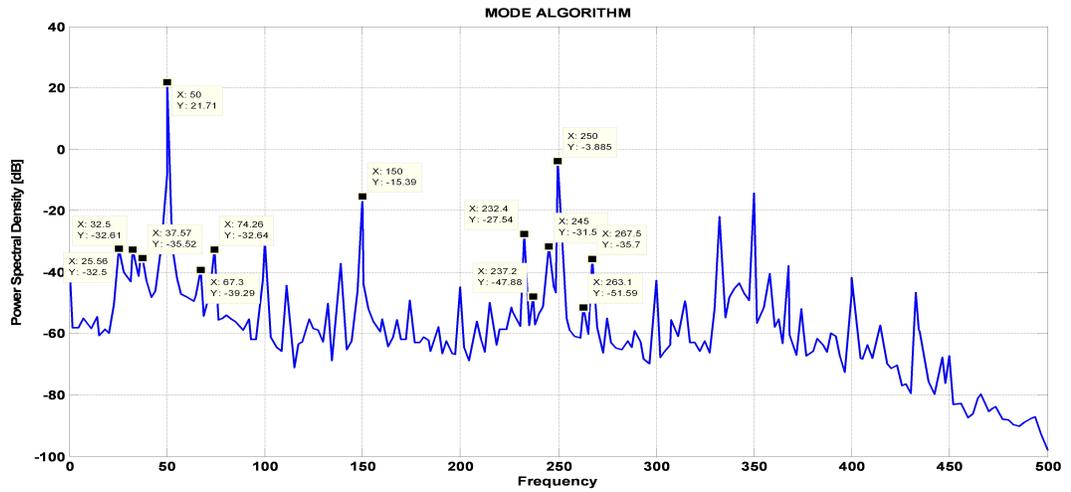


FIGURE IV.10: Spectre fréquentiel du courant statorique avec MODE - machine saine -

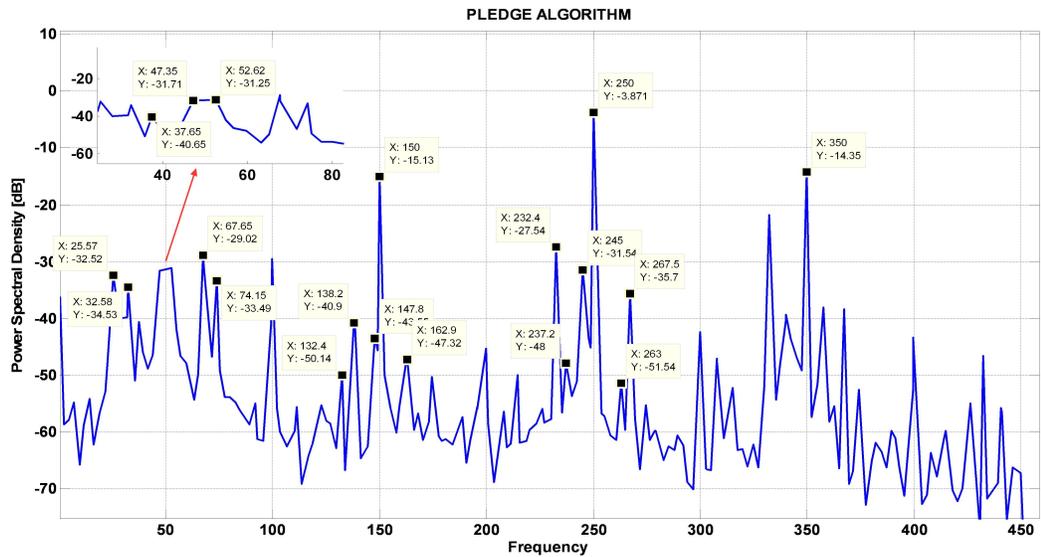


FIGURE IV.11: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PLEDGE - machine saine -

On constate que l'algorithme PLEDGE arrive à estimer, à partir d'un nombre réduit d'échantillons, les fréquences proches de 50 Hz dont les deux fréquences  $(1+2g)f = 52,62\text{Hz}$  et  $(1-2g)f = 47,35\text{Hz}$ . Ce qui implique que le glissement de la machine saine en charge nominale égale à 0,0262. Par contre les deux fréquences précédentes sont cachées dans les spectres estimés par "PSD" et "MODE". On remarque aussi que les autres fréquences estimées par MODE sont presque confondues avec celles de PLEDGE.

### IV.3.2 Analyse du spectre du courant statorique pour la machine défectueuse

Si nous portons notre attention sur le spectre du courant statorique dans la bande [0 100] Hz (Figure IV.11), nous pouvons remarquer la présence de plusieurs composantes dont les fréquences sont données par la relation :

$$f_{bc_k} = (1 \pm 2kg)f \quad f : \text{fréquence d'alimentation} = 50\text{Hz}$$

Nous avons démontré que les composantes de fréquence  $f_{bc_k} = (1 \pm 2kg)f$  présentes dans le spectre du courant statorique peuvent être utilisées pour la détection d'une ou plusieurs barres rotoriques cassées. La rupture d'une portion d'anneau de court-circuit peut aussi être détectée en utilisant ces composantes car, tout comme la rupture d'une barre de la cage, ce défaut rotorique induit lui aussi un champ tournant inverse de fréquence  $gf$  dans l'entrefer de la machine asynchrone, produisant ainsi les mêmes composantes dans le spectre fréquentiel du courant statorique.

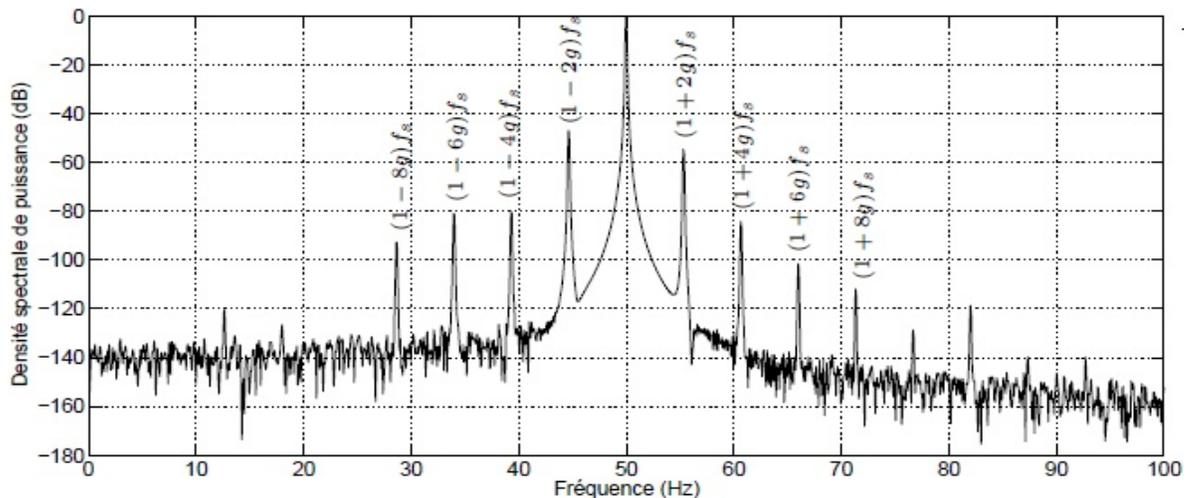


FIGURE IV.12: *Spectre du courant statorique - machine défectueuse -*

#### IV.3.2.1 Rotor avec une barre cassée

Nous présentons au début, comme la section précédente, les spectres temporels et fréquentiels de la machine avec une barre rotorique cassée :

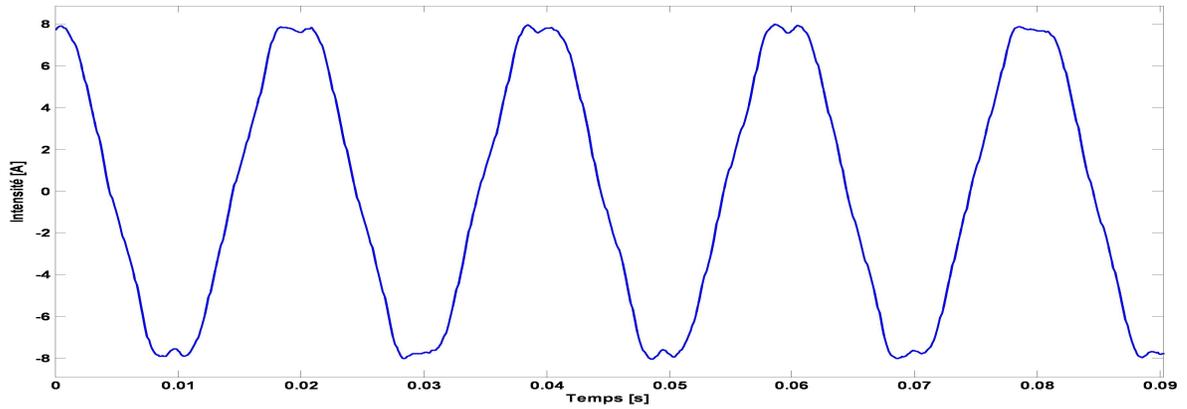


FIGURE IV.13: *Spectre temporel du courant statorique - machine avec une barre cassée -*

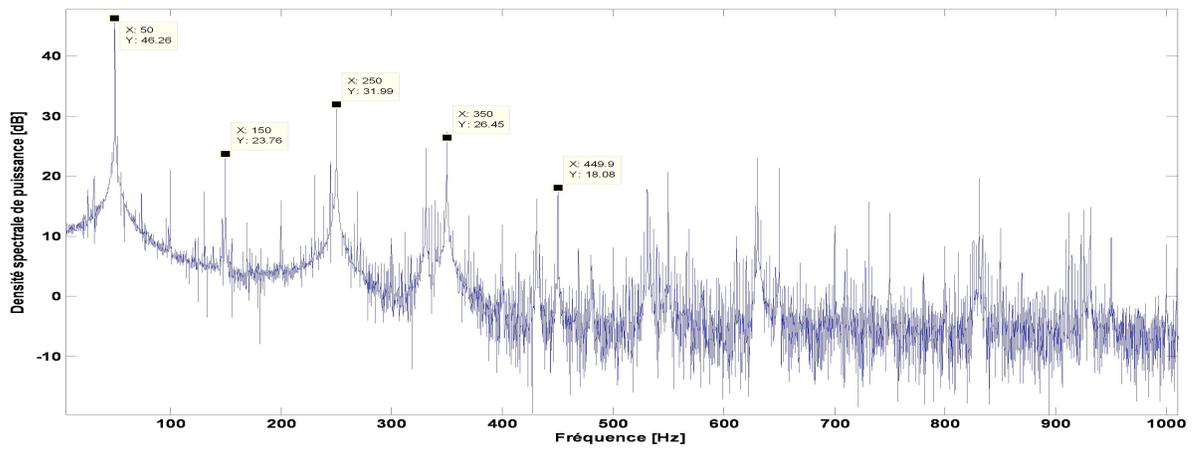


FIGURE IV.14: *Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec une barre cassée -*

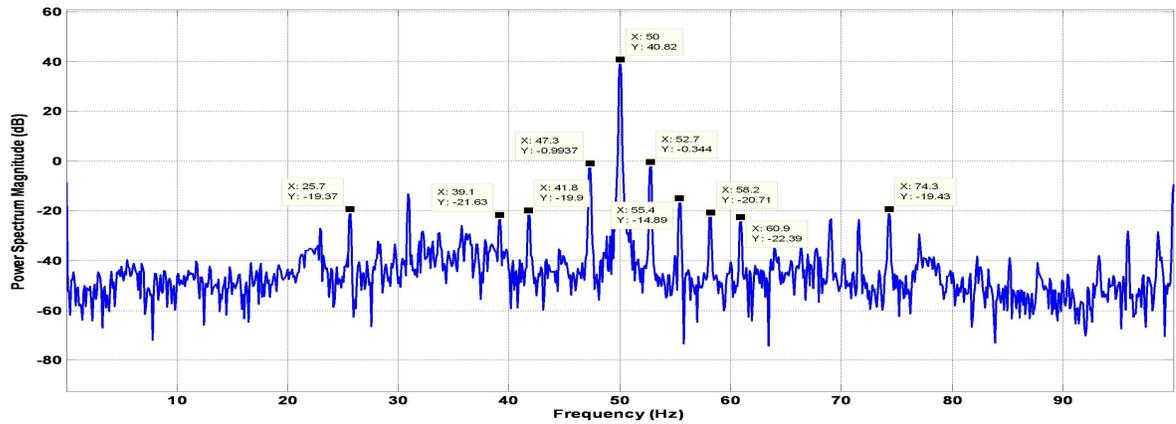


FIGURE IV.15: *Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec une barre cassée -*

Concernant le spectre temporel, la forme de la sinusoïde du courant statorique est un peu plus déformée par rapport à celle de la machine saine. Dans le spectre fréquentiel, on distingue le pic fréquentiel de 50 Hz, ses harmoniques impairs et l'apparition des nouveaux pics autour de la fréquence d'alimentation. Ces pics correspondent à la modulation de la fréquence du défaut par le 50 Hz et ses harmoniques. Pour suivre l'évaluation de ces fréquences autour le 50 Hz, nous présentons dans les trois figures suivantes le spectre fréquentiel avec la "PSD", "MODE" et "PLEDGE" :

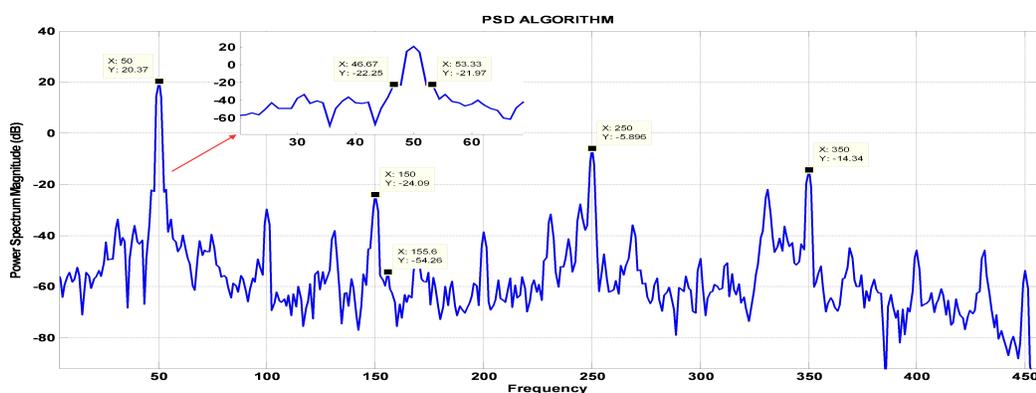


FIGURE IV.16: Spectre du courant statorique avec PSD - machine avec une barre cassée -

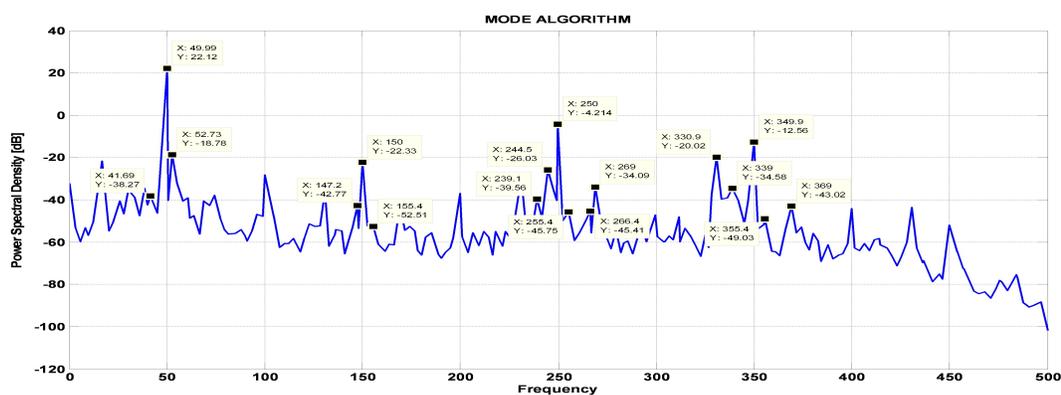


FIGURE IV.17: Spectre du courant statorique avec MODE - machine avec une barre cassée -

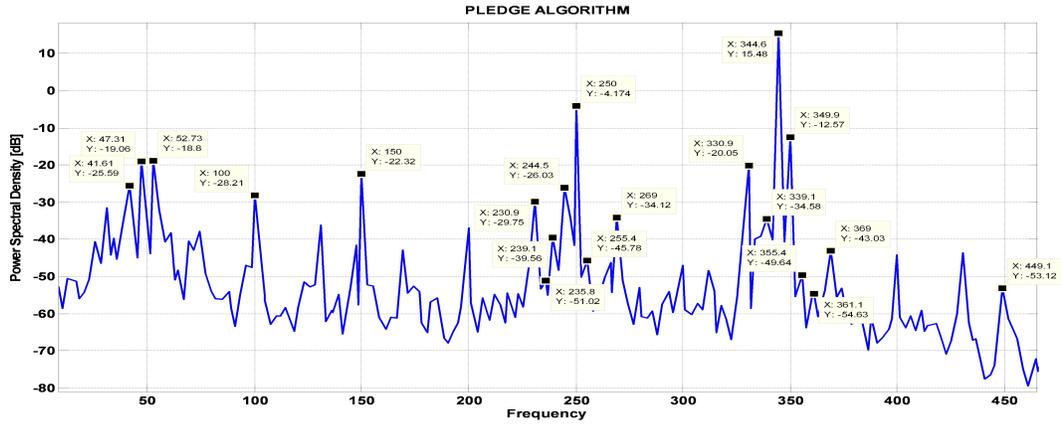


FIGURE IV.18: *Spectre du courant statorique avec PLEDGE - machine avec une barre cassée -*

Il est bien claire que l'algorithme PLEDGE arrive à estimer séparément les fréquences  $(1 \pm 2kg)f$  correspondants au défaut :  $(1 - 2g)f = 47.31Hz$ ,  $(1 + 2g)f = 52.73Hz$ ,  $(1 - 6g)f = 41.93 \simeq 41.61Hz$ . Dans le 5<sup>eme</sup> harmonique, on distingue les fréquences : (230.9 235.8 239.1 244.5 250 255.4 269)Hz qui correspondent respectivement aux  $k=-7, -5, -4, -2, 0, +2, +3$ . L'algorithme MODE n'a pas pu distinguer la première fréquence à gauche du 50 Hz qui correspond à  $(1 - 2g)f$ . Par contre l'algorithme PSD n'estime ni la fréquence à gauche ni la fréquence à droite, associées à  $(1 \pm 2g)f$ . De plus, les valeurs affichées sont loins par rapport aux vrai valeurs. On peut dire donc qu'à partir d'un nombre réduit d'échantillons, l'algorithme PLEDGE présente des résultats précis, ce qui nous aide pratiquement à diminuer le temps de calcul et la taille des circuits mémoires des appareils de diagnostic au contraire de la PSD.

### IV.3.2.2 Rotor avec deux barres cassées

Le spectre temporel et fréquentiel sont donnés comme suit :

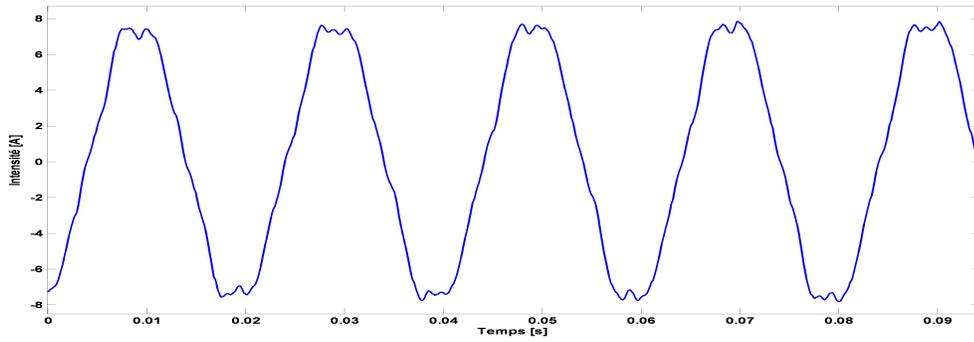


FIGURE IV.19: Spectre temporel du courant statorique - machine avec deux barres cassées -

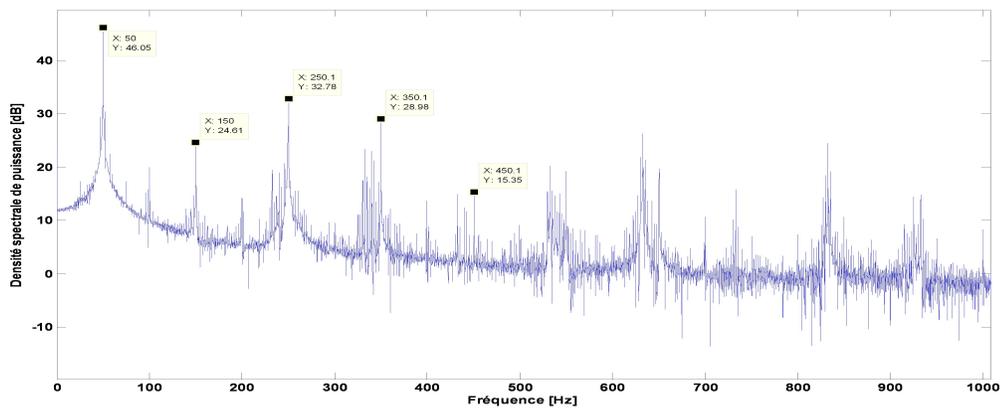


FIGURE IV.20: Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec deux barres cassées -

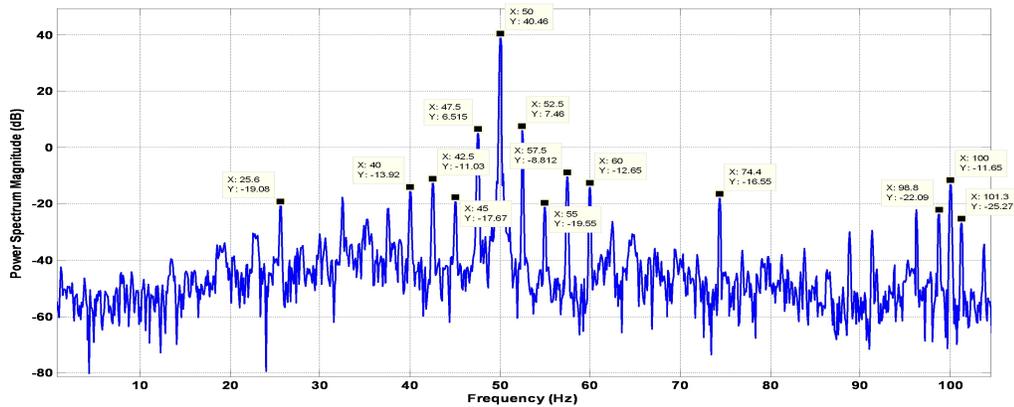


FIGURE IV.21: Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec deux barres cassées -

La figure du spectre temporel montre que la forme de la sinusoïde du courant statorique est plus déformée par rapport à celles de la machine saine et de la machine avec une barre cassée. On remarque aussi que le spectre fréquentiel est très riche en harmoniques où les bandes latérales sont plus importantes en amplitude par rapport à la machine avec une barre cassée.

Afin de suivre l'évaluation des fréquences autour du 50 Hz, nous présentons dans les trois figures suivantes le spectre fréquentiel estimé par la "PSD", "MODE" et "PLEDGE" :

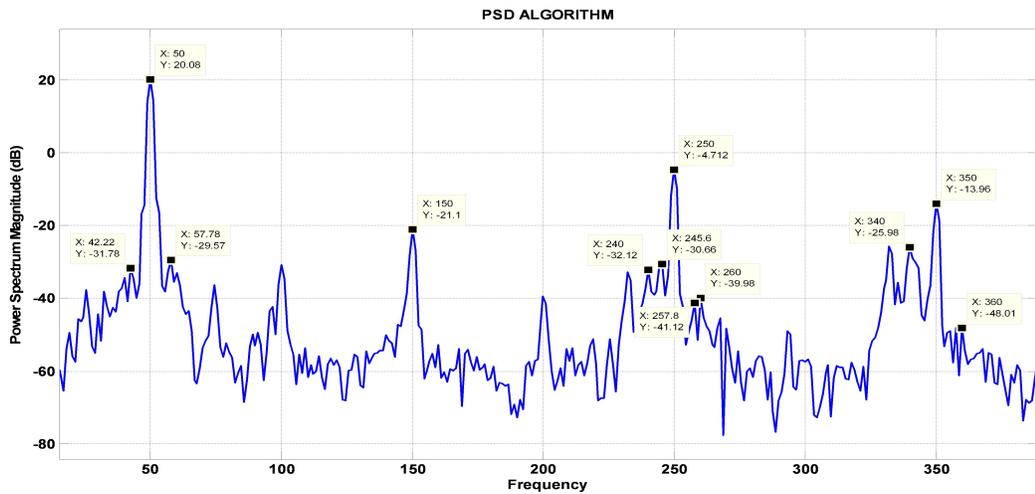


FIGURE IV.22: Spectre du courant statorique avec PSD - machine avec deux barres cassées -

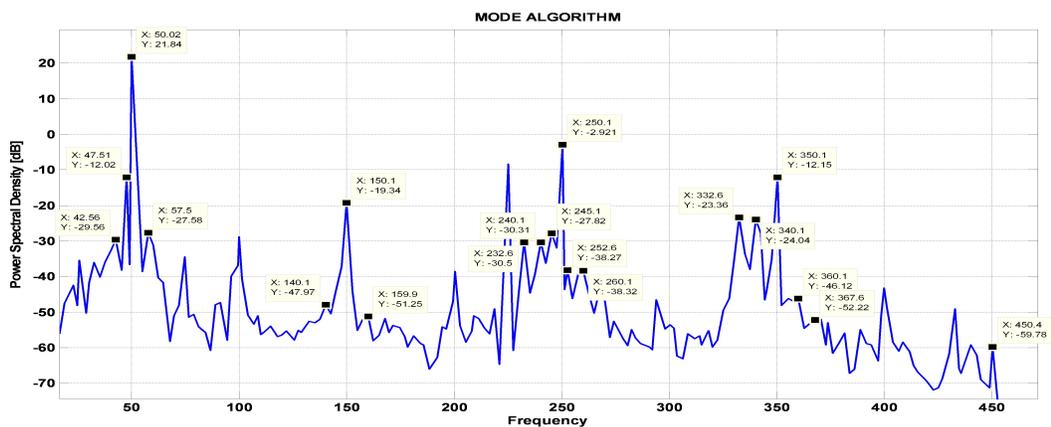


FIGURE IV.23: Spectre du courant statorique avec MODE - machine avec deux barres cassées -

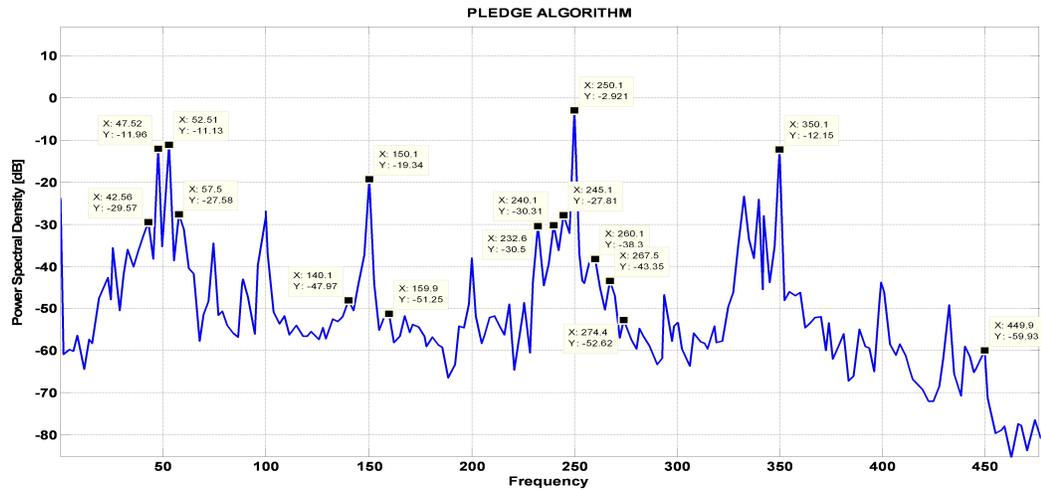


FIGURE IV.24: Spectre du courant statorique avec PLEDGE - machine avec deux barres cassées-

Dans ce cas, l'algorithme PLEDGE arrive à estimer toutes les fréquences autour du 50 Hz : (42.56 47.52 52.51 57.5)Hz. Ces fréquences correspondent respectivement aux  $k=-3, -1, +1, +3$ . Même pour le 5<sup>ème</sup> harmonique on distingue les fréquences : (232.6 240.1 245.1 250 260.1 267.5)Hz qui sont associées aux  $k=-7, -4, -2, 0, +4, +7$ . L'algorithme MODE présente les mêmes fréquences à l'exception de celle qui correspond à  $(1 + 2g)f = 52,51Hz$ . Par contre l'algorithme PSD a estimé seulement les fréquences du défaut  $(1 - 2 \times 3g)f = 42.22Hz$  et  $(1 + 2 \times 3g)f = 57.78Hz$  qui sont moins précises de 0.25Hz par apport à celles estimées par PLEDGE et MODE. Pour avoir des résultats aussi précis, La PSD a besoin de beaucoup d'échantillons.

### IV.3.2.3 Rotor avec une portion d'anneau de court-circuit cassée

Nous allons montrer que la machine asynchrone à portion d'anneau de court-circuit cassée porte le même comportement que la machine à une barre rotorique cassée mais avec des bandes latérales autour de la fréquence de rotation et ses harmoniques. On peut déduire ça en comparant les résultats obtenus avec ceux de la machine à barre cassée :

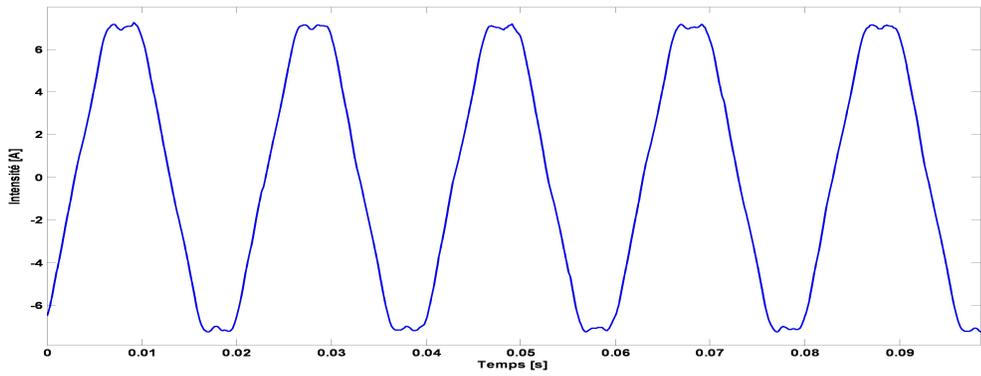


FIGURE IV.25: Spectre temporel du courant statorique - machine avec une portion d'anneau de court circuit cassée -

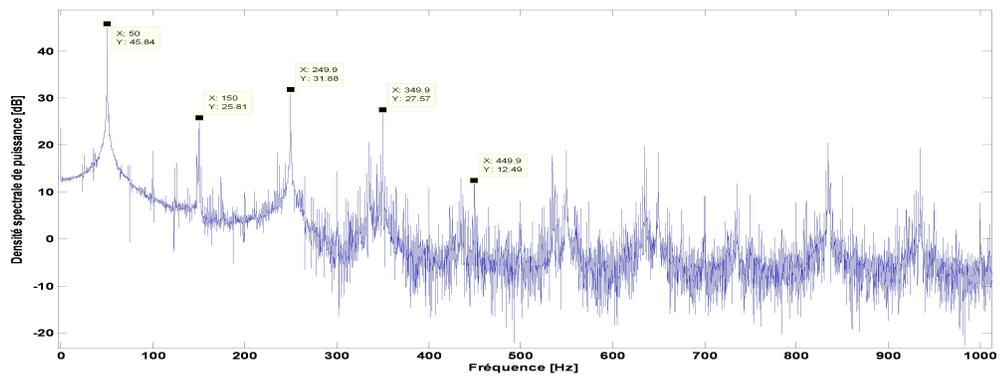


FIGURE IV.26: Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec une portion d'anneau de court circuit cassée -

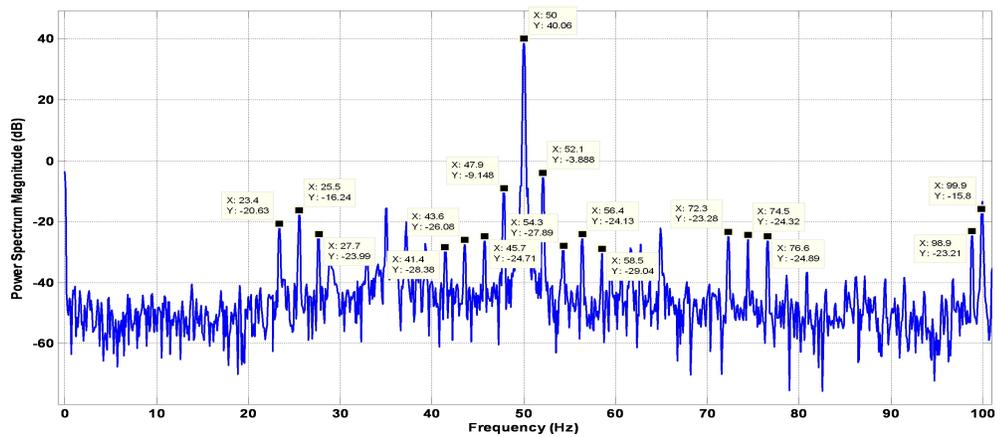


FIGURE IV.27: Spectre fréquentiel du courant statorique - machine avec une portion d'anneau de court circuit cassée -

On trouve que les spectres temporels et fréquentiels des deux défauts sont presque confondus avec l'apparition des fréquences adjacentes à la fréquence de rotation 25.5 Hz, il y a le 23.4Hz et le 27.7Hz correspondent à  $(1 \pm 2g)f_{rotation}$ . On retrouve aussi la fréquence 50 Hz et ses harmoniques ( $3^{eme}$ ,  $5^{eme}$ ,  $7^{eme}$  ...). Pour estimer les fréquences correspondantes au défaut d'anneau de court circuit autour du 50 Hz, on va utiliser les trois algorithmes d'estimations précédents :

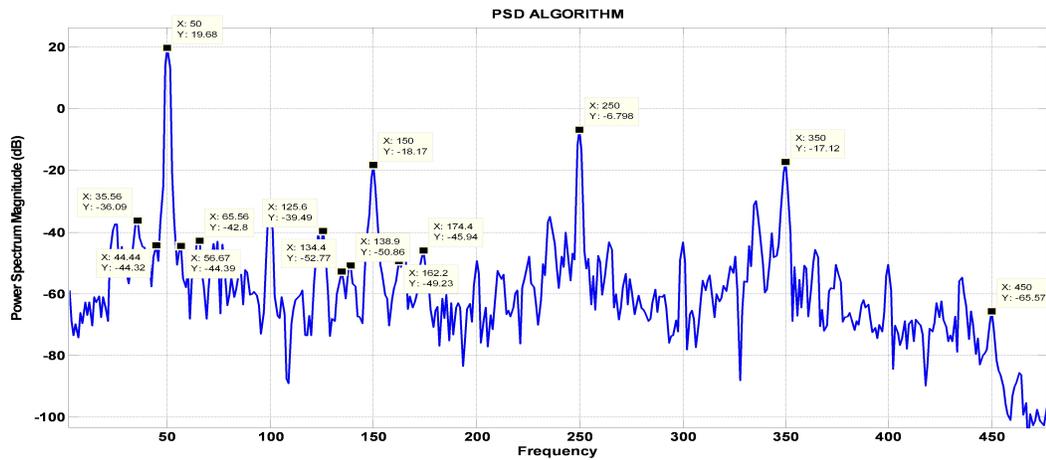


FIGURE IV.28: Spectre du courant statorique avec PSD - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées -

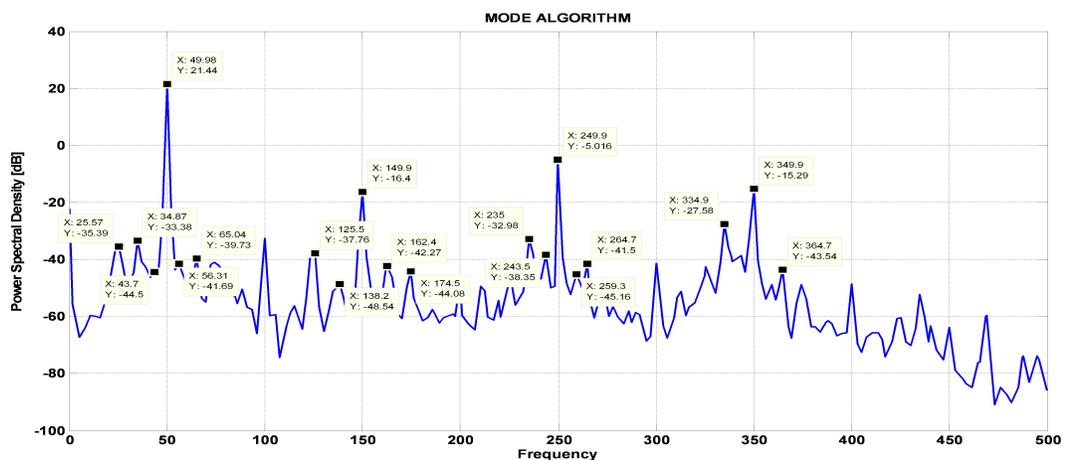


FIGURE IV.29: Spectre du courant statorique avec MODE - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées -

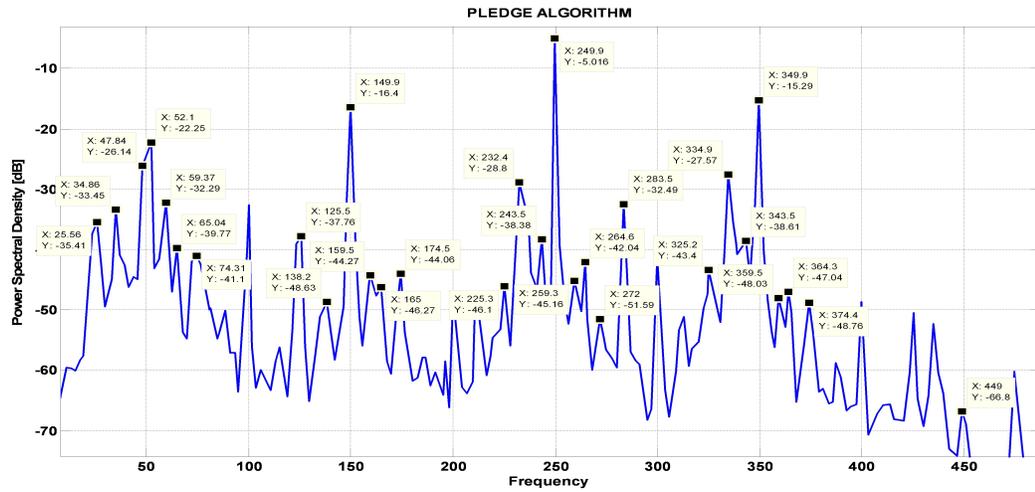


FIGURE IV.30: Spectre du courant statorique avec PLEDGE - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées -

L'algorithme PLEDGE est le seul qui arrive à estimer les deux fréquences de défaut  $(1 - 2g)f = 47,84Hz$  et  $(1 + 2g)f = 52,1Hz$  comme il a estimé les fréquences  $(34.86 - 59.37)Hz$  qui correspondent à  $k = -7, +4$ . Pour l'harmonique 5<sup>eme</sup> on distingue les fréquences  $(225.3 - 232.4 - 243.5 - 249.9 - 259.3 - 264.6 - 272)Hz$  associées respectivement aux  $k = -11, -8, -3, 0, +4, +7, +10$ . MODE a passé directement aux deux fréquences  $(1 - 2 \times 3g)f = 43.7Hz$  et  $(1 + 2 \times 3g)f = 56.31Hz$  qui correspondent aux  $k = \pm 3$ . l'estimateur PSD a trouvé aussi les mêmes résultats que MODE mais avec une incertitude un peu plus grande dans l'estimation. On remarque que le glissement dans le cas de ce défaut a diminué encore une fois à 0.0216.

### IV.3.3 Analyse du spectre du courant statorique de la MAS alimentée par un onduleur

Dans cette section, nous allons refaire toutes les applications précédentes sur les signaux acquis de la machine alimentée par un onduleur. Nous allons choisir la fréquence  $f_s \simeq 40Hz$  comme une fréquence d'alimentation puis nous chercherons les défauts autour cette dernière.

### IV.3.3.1 Rotor sain

En appliquant l'algorithme PSD sur tout le signal du courant statorique (100.000 échantillons), nous trouvons le resultat suivant :

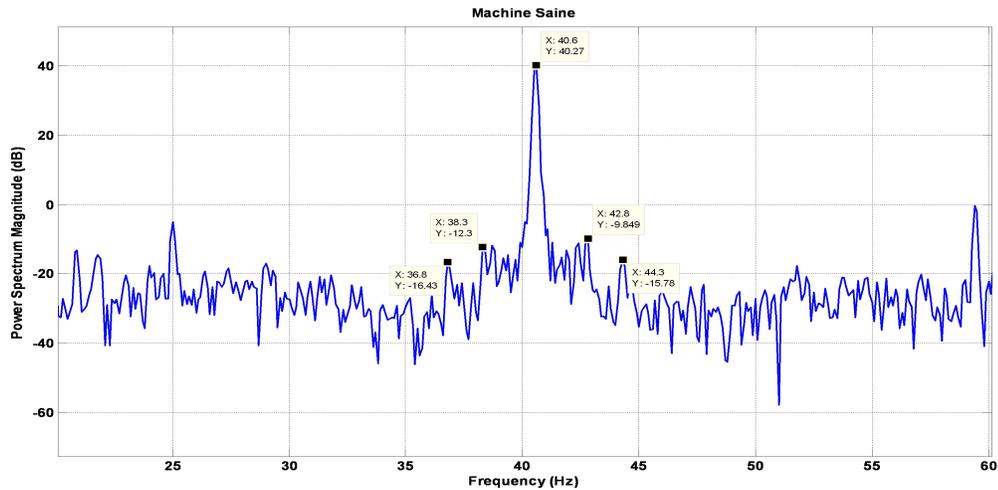


FIGURE IV.31: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine saine -

Dans cette figure, nous distinguons la fréquence d'alimentation 40.5Hz et ses fréquences adjacentes (36.8Hz, 44.3Hz) et (38.4Hz, 42.8Hz) associées respectivement à  $(1 \pm 2g)f_s$  et  $(1 \pm 4g)f_s$ . Afin de suivre l'évaluation de ces fréquences, nous présentons dans les trois figures suivantes le spectre fréquentiel, de 900 échantillons, estimé par la "PSD", "MODE" et "PLEDGE" :

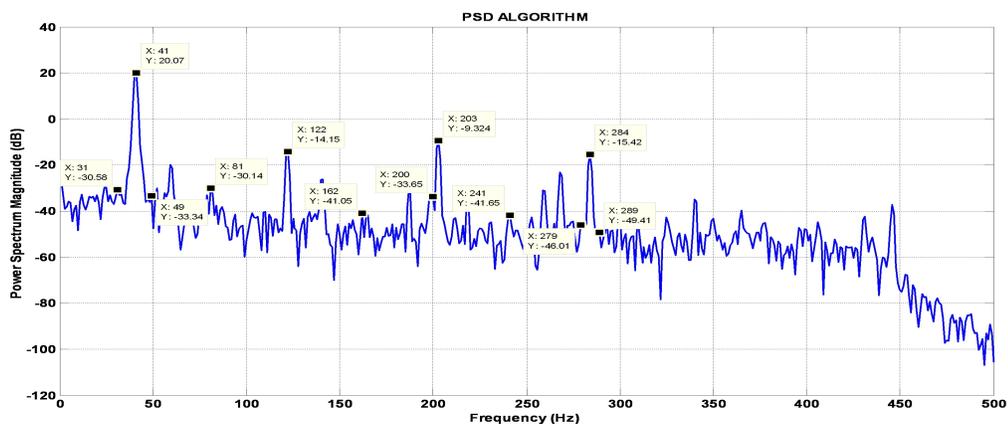


FIGURE IV.32: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine saine -

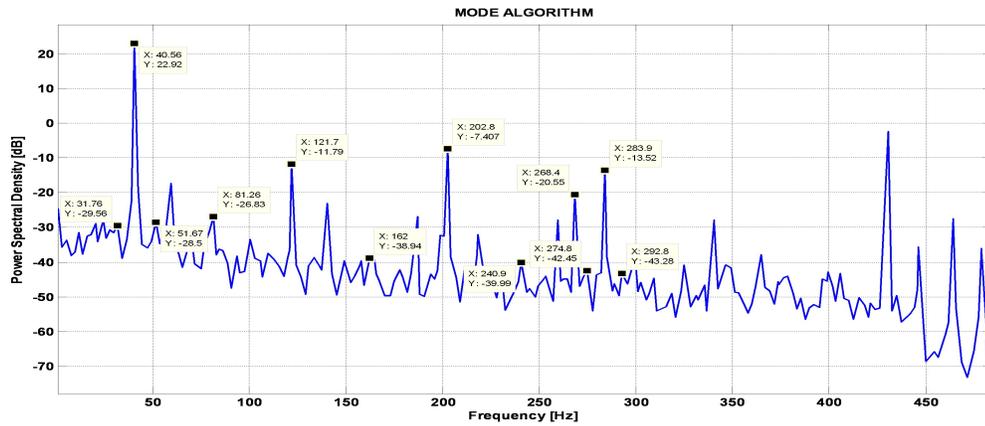


FIGURE IV.33: Spectre fréquentiel du courant statorique avec MODE - machine saine -

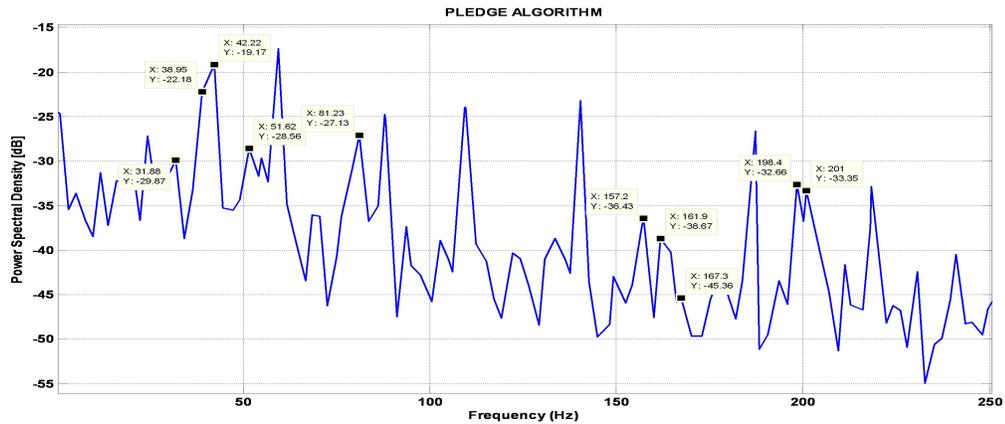


FIGURE IV.34: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PLEDGE - machine saine -

On constate que l'algorithme PLEDGE arrive à estimer, à partir d'un nombre réduit d'échantillons, les fréquences proches de 40 Hz dont les deux fréquences  $(1 + 2g)f_s = 42.22\text{Hz}$  et  $(1 - 2g)f_s = 38.95\text{Hz}$ . Ce qui implique que le glissement dans ce cas en charge nominale égale à 0,0246. Par contre les deux fréquences précédentes sont cachées dans les spectres estimés par "PSD" et "MODE". On remarque aussi que les autres fréquences estimées par MODE sont presque confondues avec celles de PLEDGE.

#### IV.3.3.2 Rotor avec une barre cassée

La PSD du signal total de la MAS avec une barre cassée affiche le résultat suivant :

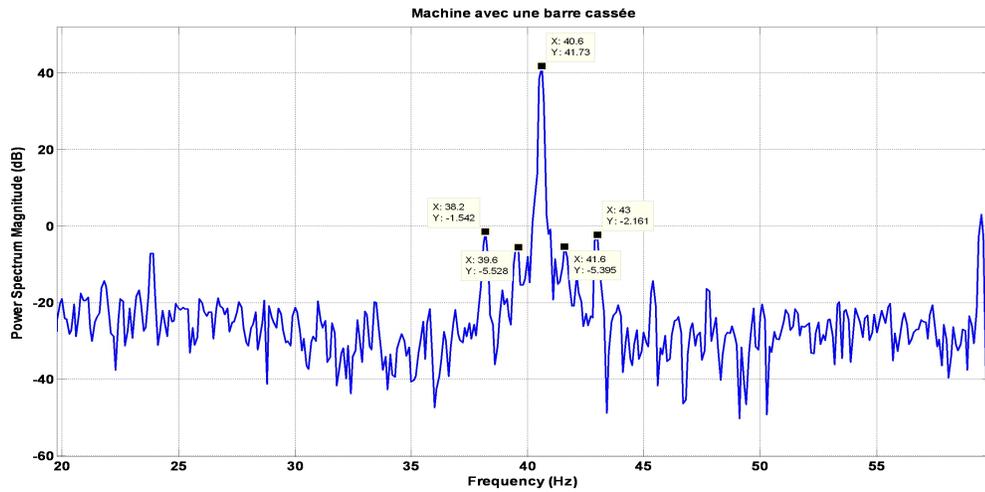


FIGURE IV.35: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine avec une barre cassée -

On remarque ici l'évolution des pics en fréquence et en amplitude par rapport au spectre fréquentiel de la MAS saine. Dans ce qui suit, on essaie d'estimer les pics du défaut dans la zone des basses fréquences. L'application des trois méthodes précédentes, sur une trame de 900 échantillons, nous donne les figures suivantes :

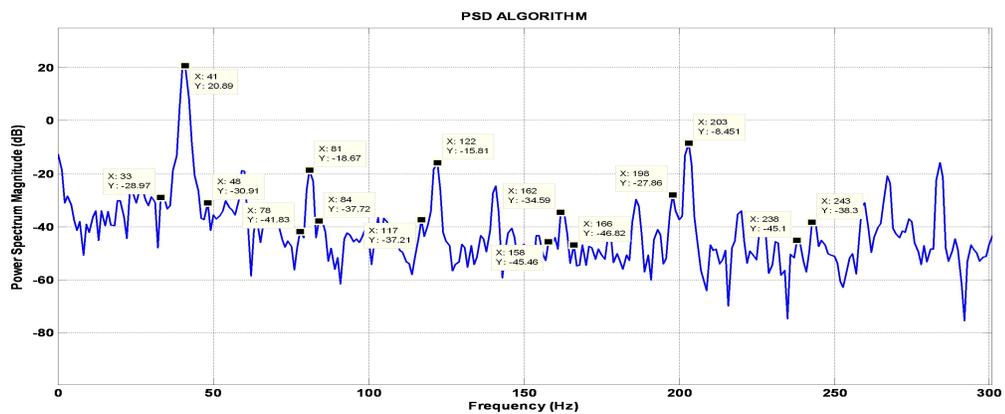


FIGURE IV.36: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine avec une barre cassée -

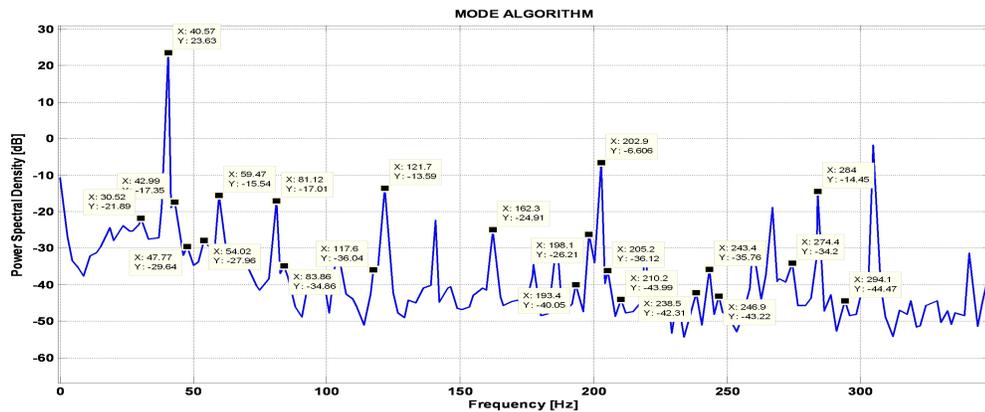


FIGURE IV.37: Spectre fréquentiel du courant statorique avec MODE - machine avec une barre cassée -

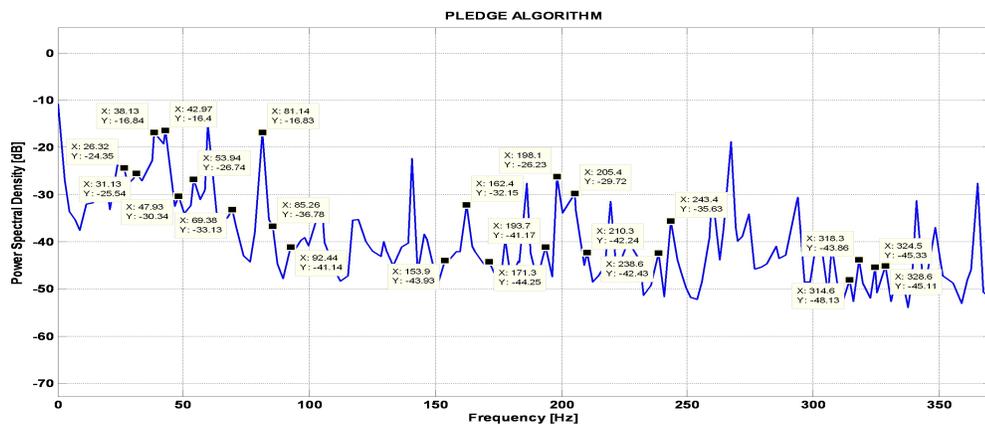


FIGURE IV.38: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PLEDGE - machine avec une barre cassée -

Comme on a déjà vu dans le cas de la MAS alimentée par le réseau, l'algorithme PSD n'a pas pu aussi estimer les fréquences adjacentes à la fréquence de l'onduleur. l'estimateur MODE a estimé juste la fréquence à droite correspond à  $(1 + 2g)f_s$ . Par contre, l'algorithme PLEDGE a estimé toutes les fréquences autour le 40Hz.

### IV.3.3.3 Rotor avec deux barres cassées

L'évolution des fréquences de ce type de défaut est donnée comme ce suit :

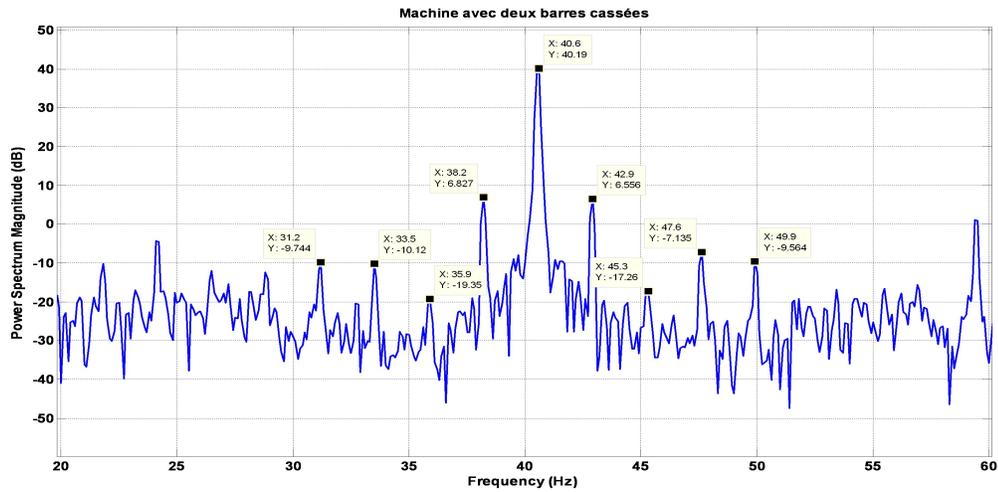


FIGURE IV.39: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine avec deux barres cassées -

À partir de cette figure, on remarque l'augmentation, un peu plus, des amplitudes adjacentes au 40Hz, associées aux  $(1 \pm 2kg)f_s$ . Pour suivre cette évolution, on applique les méthodes "PSD", "MODE" et "PLEDGE" sur une trame de 900 échantillons du signal relevé :

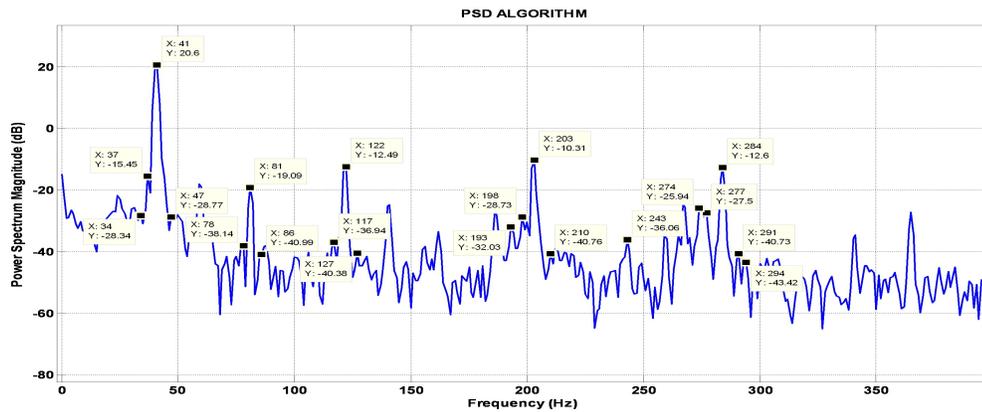


FIGURE IV.40: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine avec deux barres cassées -

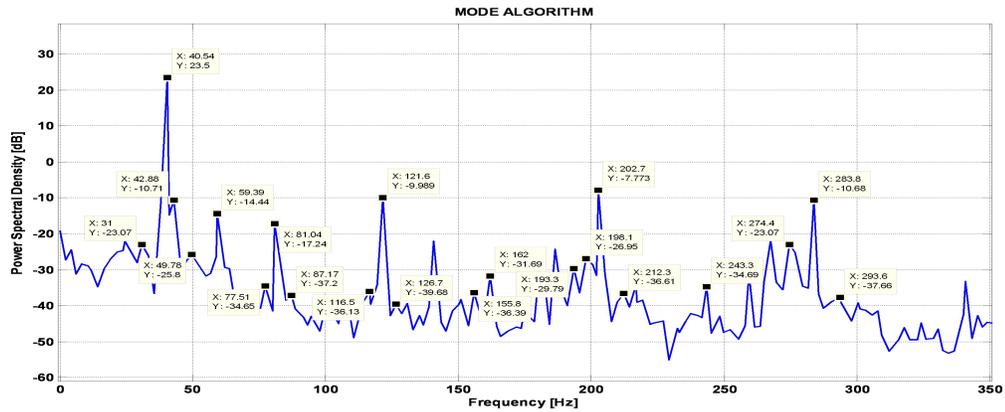


FIGURE IV.41: Spectre fréquentiel du courant statorique avec MODE - machine avec deux barres cassées -

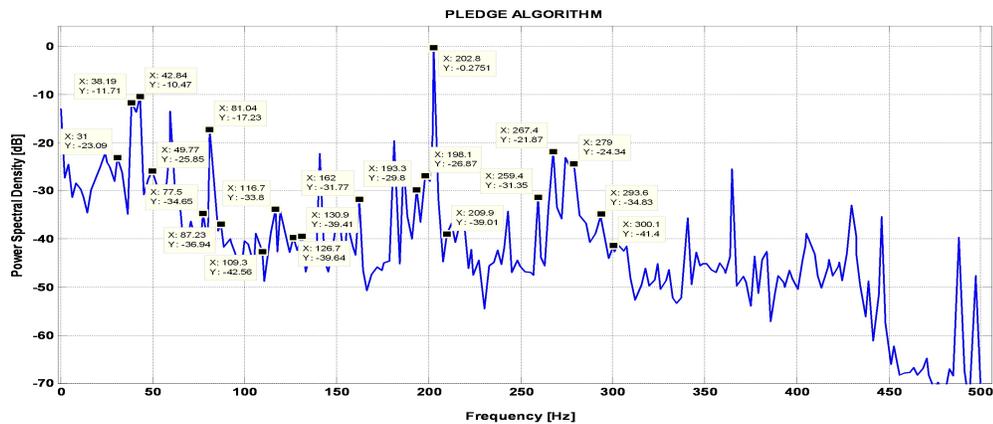


FIGURE IV.42: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PLEDGE - machine avec deux barres cassées -

La première figure montre que la PSD a estimé la fréquence adjacente à gauche liée à  $(1 - 2g)f_s$  mais toujours il y a un écart entre les valeurs estimées et celles réelles. D'autre part, la deuxième figure montre que l'algorithme MODE a estimé la fréquence adjacente à droite associée à  $(1 + 2g)f_s$ . Par contre, dans la troisième figure, PLEDGE estime toutes les fréquences, qui se trouvent autour du  $40\text{Hz}$  et ses harmoniques, correspondantes aux  $(1 \pm 2kg)f_s$ .

#### IV.3.3.4 Rotor avec une portion d'anneau de court-circuit cassée

Le spectre fréquentiel de tout le signal est donné comme suit :

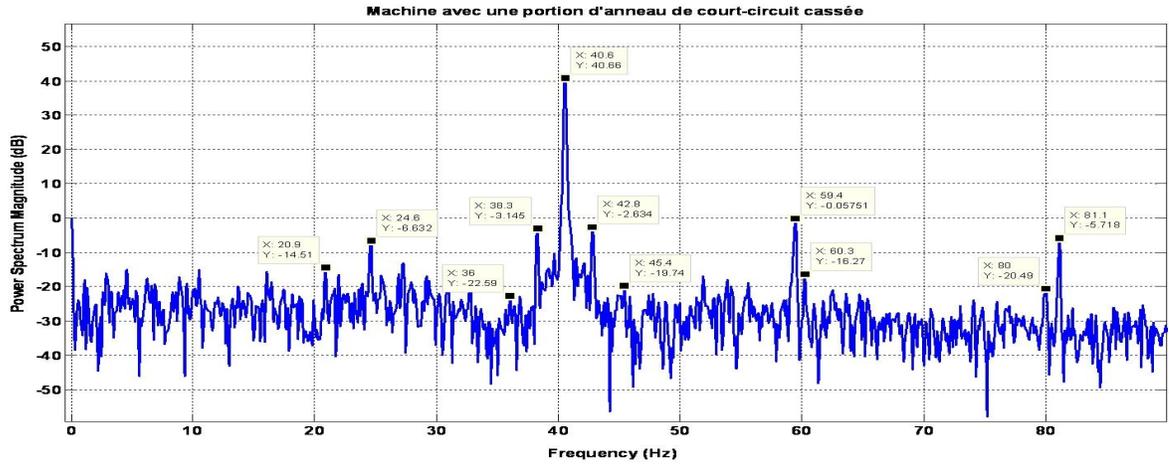


FIGURE IV.43: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - Rotor avec une portion d'anneau de court circuit cassée-

On distingue dans cette figure la modulation de la fréquence du défaut par la fréquence d'alimentation 40Hz. Il y a les fréquences (36, 38.3, 42.8, 45.4)Hz associées à  $(1 \pm 2kg)f_s$ . On trouve aussi  $(40.6 - 20.9) = 19.7$ Hz qui exprime la vitesse de rotation et par la suite ses harmoniques  $(40.6 + 19.7) = 60.3$ Hz et  $(60.3 + 19.7) = 80$ Hz. D'autre part, on remarque les deux pics 59.4Hz et 81.1Hz qui correspondent à la somme des harmoniques de la vitesse de rotation et la moitié de la fréquence du défaut  $2gf_s$ .

Afin d'estimer les fréquences précédentes à partir d'une fenêtre d'observation courte (1800 échantillons), on applique nos méthodes d'estimation là-dessus :

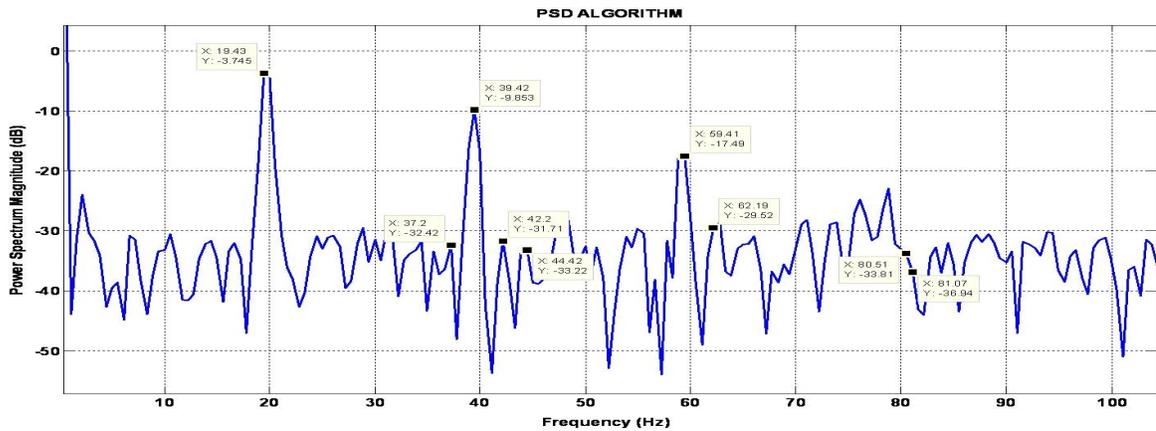


FIGURE IV.44: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PSD - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées -

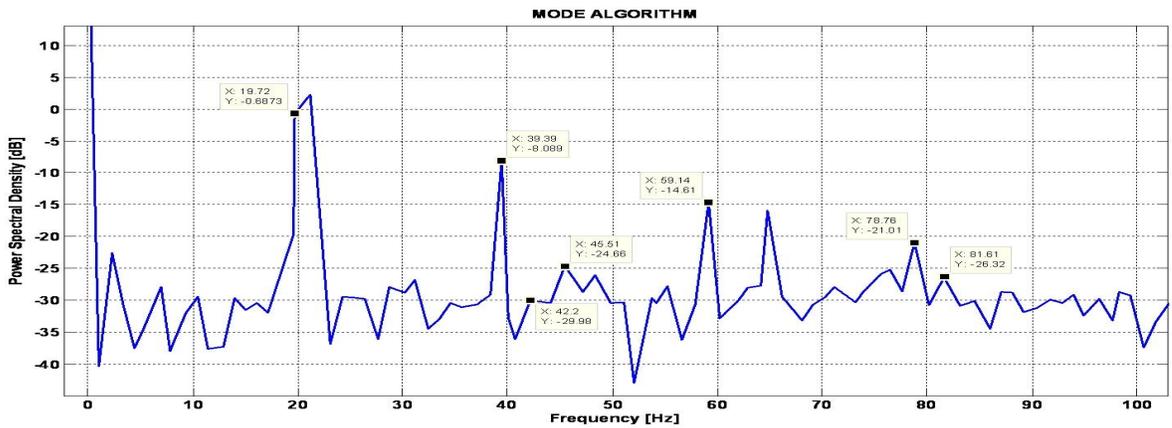


FIGURE IV.45: Spectre fréquentiel du courant statorique avec MODE - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées -

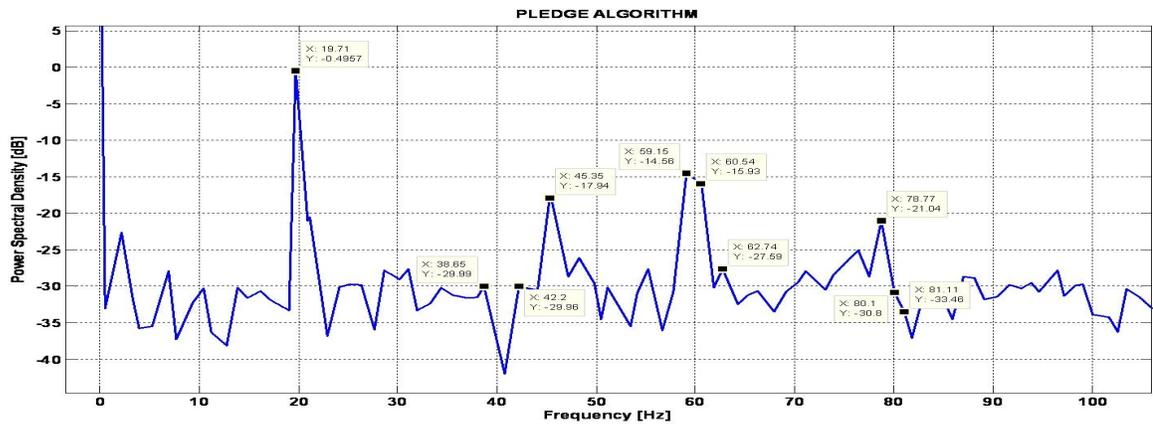


FIGURE IV.46: Spectre fréquentiel du courant statorique avec PLEDGE - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées -

Il est bien claire ici que l'algorithme PSD estime les fréquences du défaut mais avec une grande incertitude. Par contre, l'algorithme MODE estime quelques fréquences liées au défaut avec précision et autres sont cachées dans le spectre. L'agorithme PLEDGE distingue avec précision toutes les fréquences déjà estimées avec la PSD pour la taille totale du signal.

On peut dire que la méthode PLEDGE est toujours meilleure par rapport à MODE et PSD quelque soit le type du signal de courant.

## IV.4 Etude de la vitesse

Dans cette partie d'étude, on va essayer de diagnostiquer la machine asynchrone en traitant le signal de la vitesse. Pour avoir ce type de signaux, on va récupérer juste le signal issu d'une génératrice tachymétrique entraînée par la machine défectueuse.

On va présenter maintenant une comparaison entre le spectre total, 100.000 échantillons, de la vitesse de la machine saine et celle défectueuse alimentées par le réseau électrique :

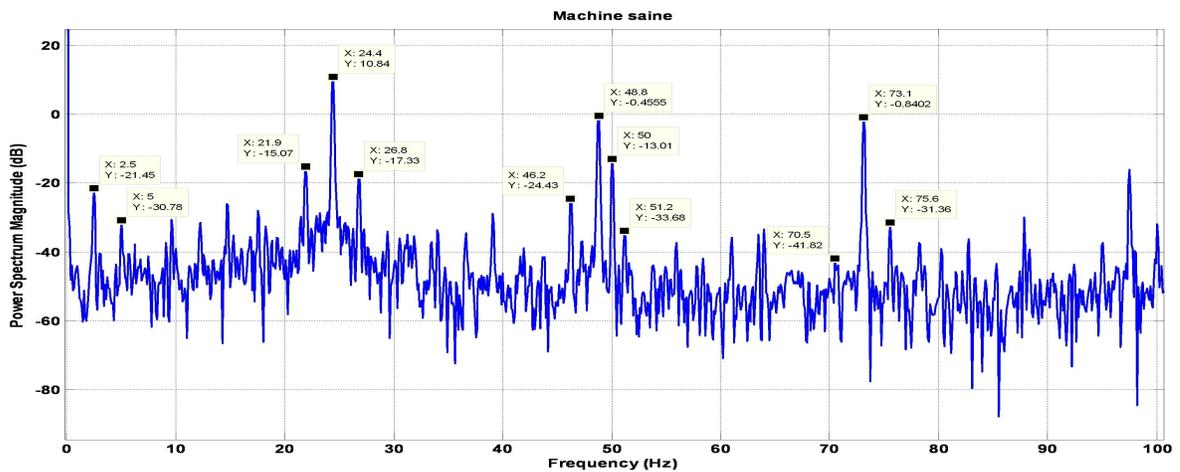


FIGURE IV.47: Spectre fréquentiel de la vitesse avec PSD - machine saine -

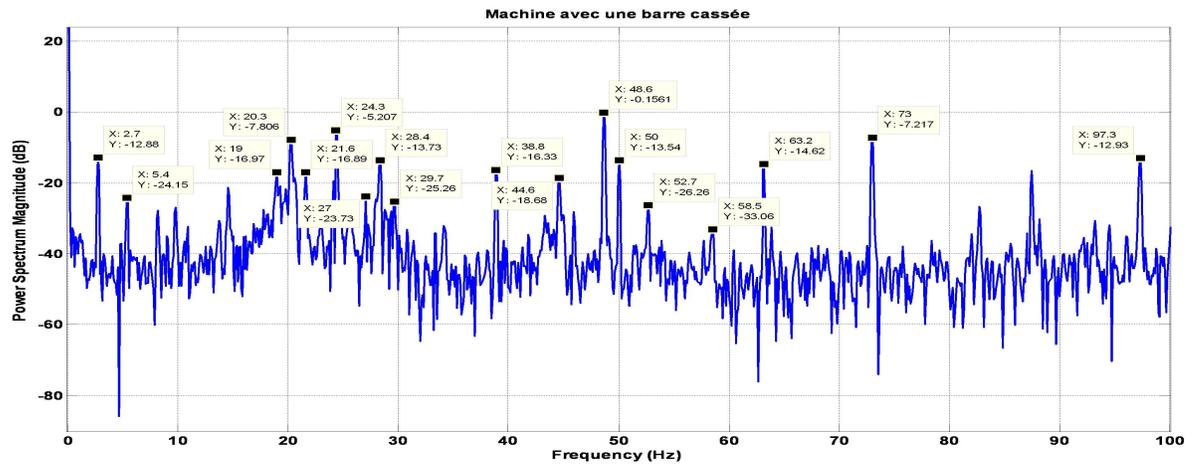


FIGURE IV.48: Spectre fréquentiel de la vitesse avec PSD - machine avec une barre cassée -

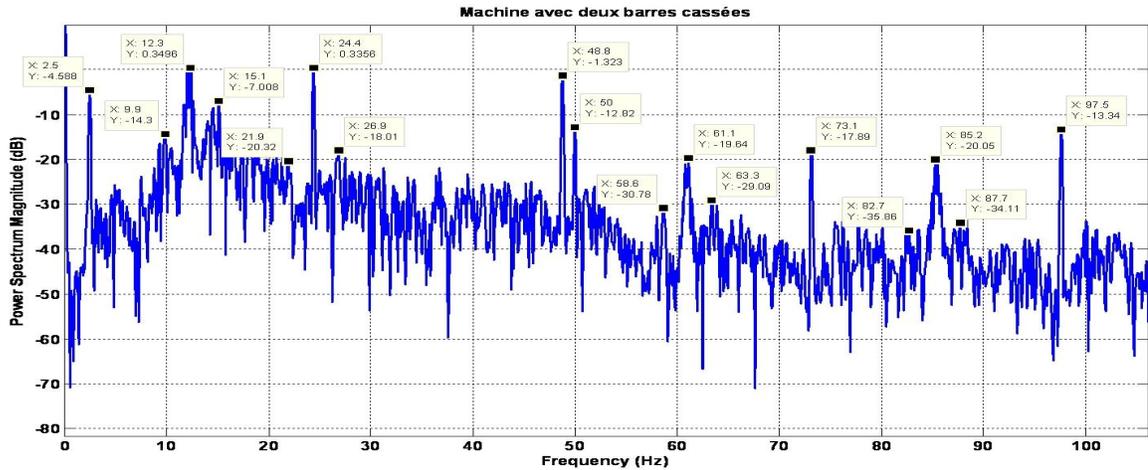


FIGURE IV.49: Spectre fréquentiel de la vitesse avec PSD - machine avec deux barres cassées -

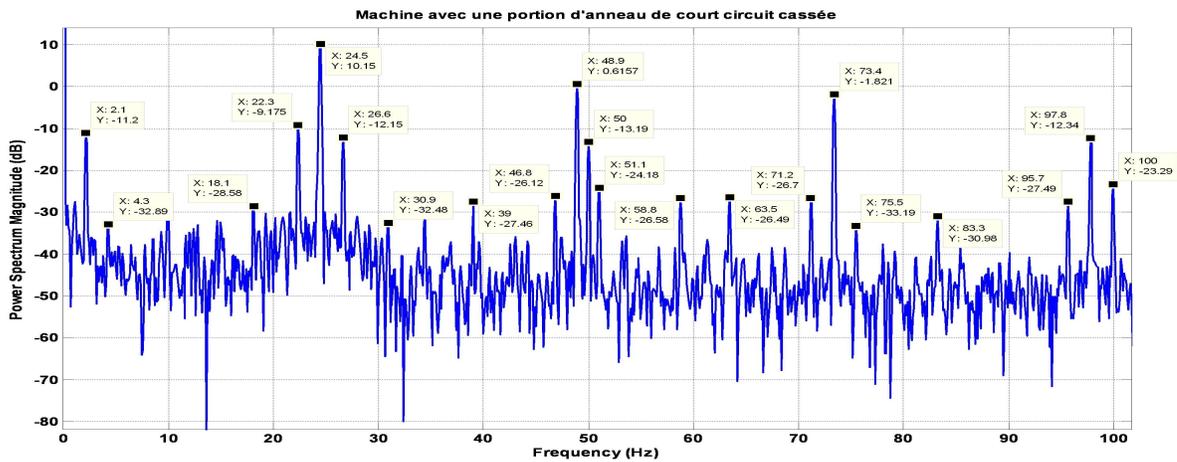


FIGURE IV.50: Spectre fréquentiel de la vitesse avec PSD - machine avec portion d'anneau de court-circuit cassées -

Dans la première figure, on remarque la présence de la fréquence d'alimentation 50Hz, la fréquence de rotation 24.4Hz et ses harmoniques (48.4Hz, 73.1Hz ...). Comme on a développé le comportement du défaut du rotor dans le spectre de la vitesse dans le chapitre 2, on trouve dans le spectre fréquentiel, la composante 2.5Hz et ses harmoniques liées à  $2k f_s$  et la modulation de ces dernières par la fréquence de rotation.

Pour la deuxième figure, la rupture d'une barre rotorique conduit à l'évolution des fréquences. On remarque l'augmentation des amplitudes des pics autour de la fréquence de

rotation et l'apparition des nouvelles fréquences correspondantes à  $(24.3 \pm 4gf_s)$  et  $(24.3 \pm 3gf_s)$ .

Par contre, le défaut de deux barres, dans la troisième figure, se manifeste dans le spectre fréquentiel par la modulation de la composante  $2gf_s$  par la vitesse de rotation, par sa moitié (12.3Hz) et par les harmoniques de cette dernière (61.1Hz et 85.2Hz).

La rupture d'une portion de l'anneau de court-circuit conduit à la diminution du glissement et l'augmentation des amplitudes des pics correspondants au défaut.

Afin d'estimer les fréquences des défauts, on applique maintenant nos trois méthodes d'estimation des fréquences sur des trames réduites des signaux précédents.

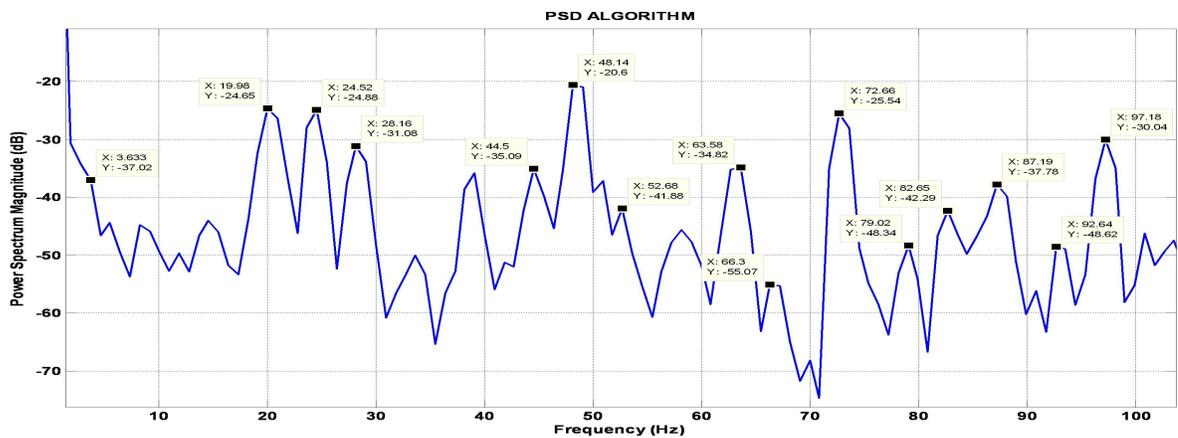


FIGURE IV.51: Spectre fréquentiel de la vitesse avec PSD - machine avec une barre cassée -

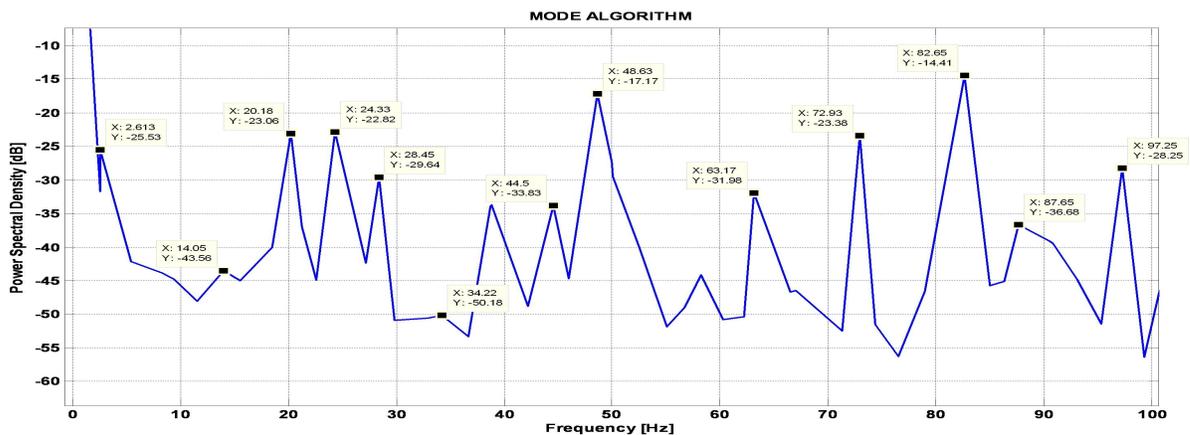


FIGURE IV.52: Spectre fréquentiel de la vitesse avec MODE - machine avec une barre cassée -

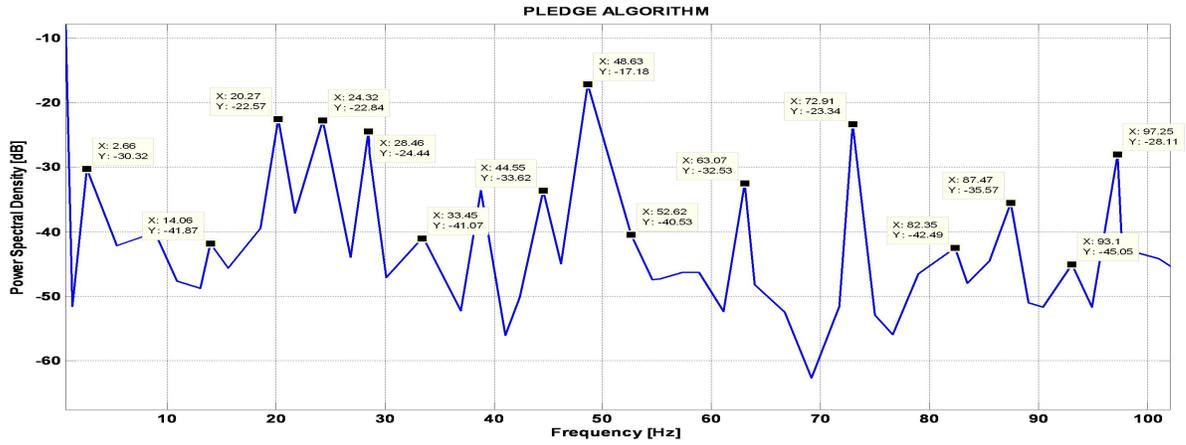


FIGURE IV.53: Spectre fréquentiel de la vitesse avec PLEDGE - machine avec une barre cassée

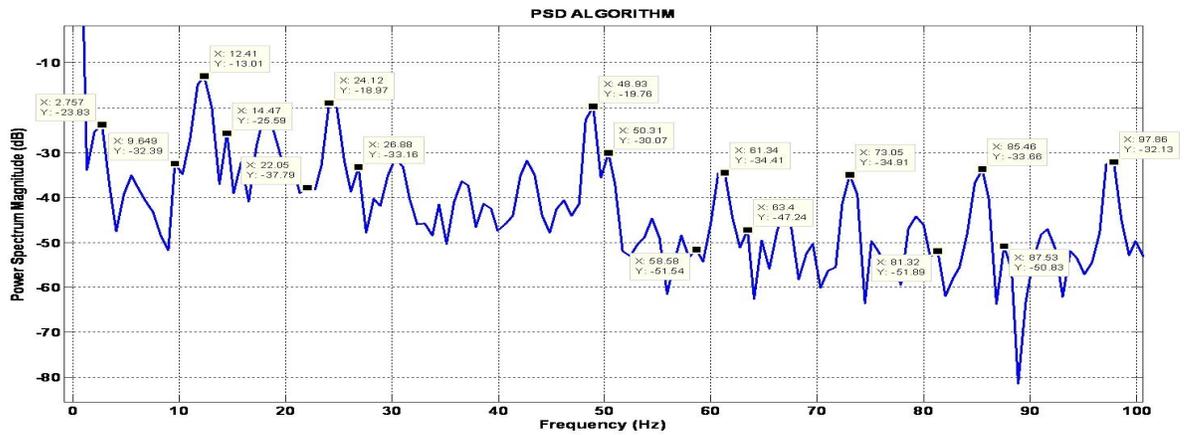


FIGURE IV.54: Spectre fréquentiel de la vitesse avec PSD - machine avec deux barres cassées -

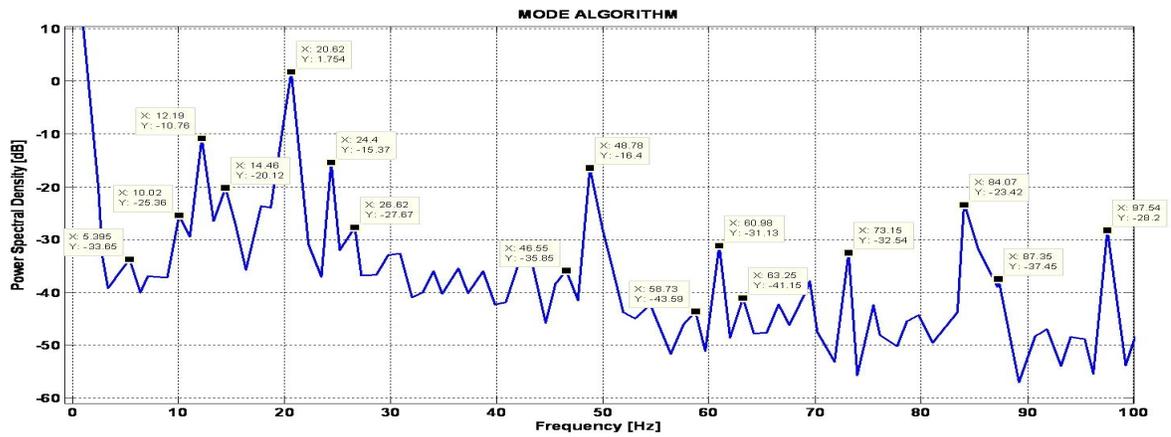


FIGURE IV.55: Spectre fréquentiel de la vitesse avec MODE - machine avec deux barres cassées

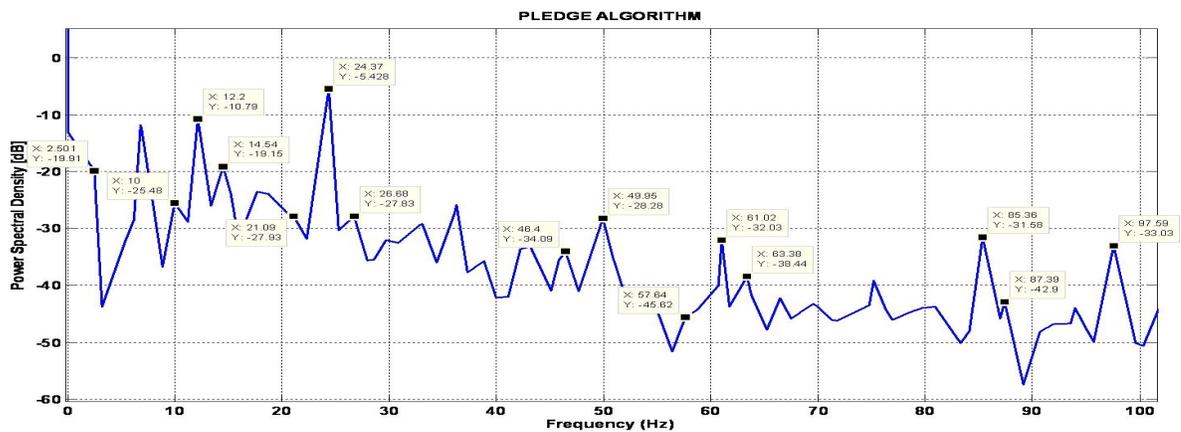


FIGURE IV.56: Spectre fréquentiel de la vitesse avec PLEDGE - machine avec deux barres cassées -

D'après l'analyse de ces spectres, on constate que la méthode PLEDGE reste toujours meilleure en terme de l'estimation et de la précision par rapport les deux autres algorithmes. Les résultats obtenus à l'aide du PLEDGE sont confondus avec ceux théoriques ce qui exprime la faisabilité de cet estimateur.

## IV.5 La matrice de covariance dynamique et le temps de calcul

### - La matrice de covariance dynamique :

Dans cette section, on va montrer l'importance de faire glisser la matrice de covariance le long du signal traité. En premier lieu, On prend une trame d'observation glissante, de 899 échantillons, du signal de la machine à barre cassée puis on analyse les résultats obtenus à chaque matrice de covariance glissée. La figure suivante représente les spectres fréquentiels issus de PLEDGE par deux trames différentes :

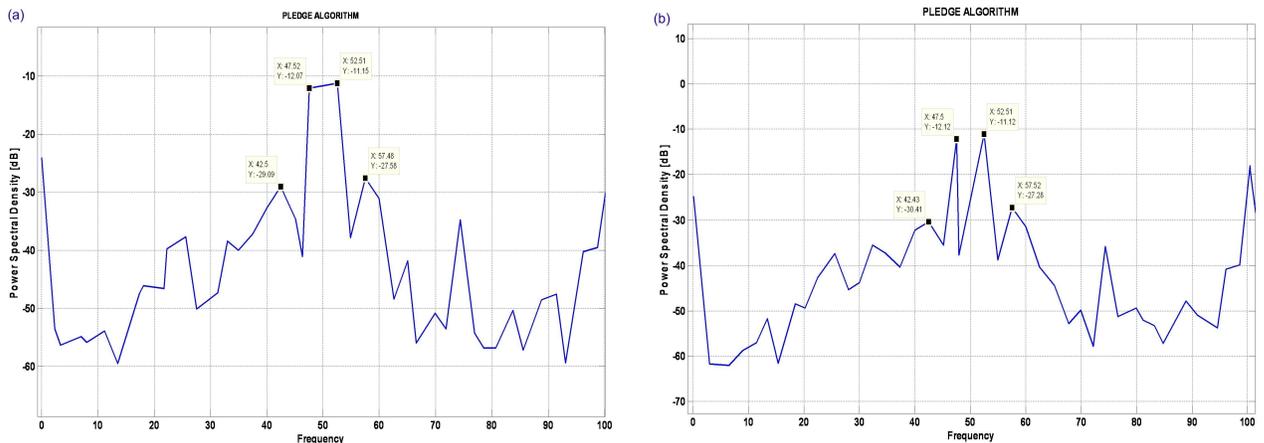


FIGURE IV.57: *Glissement de la matrice de covariance*

On remarque au niveau de la figure (b) que l'algorithme PLEDGE discrimine mieux les deux pics fréquentiels autour du 50 Hz que la figure (a). On déduit alors que pour un bon diagnostic et une bonne analyse, on doit choisir une matrice de covariance dynamique.

### - Le temps de calcul :

Parmi les caractéristiques de performances des estimateurs, on trouve le coût calculatoire. Sachant que les meilleurs algorithmes souffrent de ce dernier comme le maximum de vraisemblance. En utilisant les instructions "Tic" et "Toc" de Matlab, on va mesurer le temps de calcul requis à l'estimation des fréquences pour chaque méthode. Pour cela on prend une fenêtre d'observation de 899 échantillons :

» Le coût calculatoire de PSD : 0.4040 secondes. (Pour la taille max du signal)

- » Le coût calculatoire de MODE : 6.0602 secondes.
- » Le coût calculatoire de PLEDGE : 13.1426 secondes.

L'algorithme PSD est rapide mais il a besoin de beaucoup d'échantillons pour approximer les fréquences exactes. Par contre, l'algorithme MODE est 15 fois moins rapide comparé à la PSD mais les deux sont moins performants que PLEDGE. Ce dernier estime les fréquences dans un temps double par rapport à MODE mais avec ses performances ce temps est très raisonnable.

## IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'estimation des fréquences des défauts rotoriques par les estimateurs approxinant le maximum de vraisemblance. ces derniers se distinguent par une résolution inférieure à celle de Fourier, et l'analyse court terme. Nous avons étudié trois niveaux de défaillances à savoir une barre cassée, deux barres cassées et portion d'anneau de court-circuit cassée. Pour une alimentation de la machine soit par le réseau triphasé ou bien par un onduleur, les résultats obtenus ont permis de diagnostiquer la présence d'un défaut par l'apparition des pics fréquentiels importants qui suivent la relation suivante  $f_{br_k} = (1 \pm 2kg)f$ .

De plus, On a pris la machine en charge nominale dans les essais précédents pour assurer un glissement important qui nous permet de distinguer facilement les fréquences associées à  $f_{br_k} = (1 \pm 2kg)f$ . On a remarqué aussi que le glissement diminue avec l'augmentation de nombre des barres cassés. D'autre part, on a observé que les défauts rotoriques influent de plus en plus sur l'amplitude des composantes situées dans la zone des basses fréquences du spectre du courant statorique et le spectre de la vitesse.

D'après le traitement des signaux précédents, on a trouvé que l'algorithme PLEDGE est le seul qui soit capable d'estimer les fréquences des défauts autour du 50 Hz à partir d'un nombre réduit d'échantillons. Après plusieurs essais (Voir l'annexe), on a déduit que l'algorithme PLEDGE peut séparer les deux plus proches fréquences de 50 Hz avec au minimum 480 échantillons et MODE peut le faire à partir d'au moins 900 échantillons. Par contre il faut choisir une trame très grande pour bien estimer ces deux fréquences avec la PSD.

On déduit alors que l'estimateur PLEDGE est le plus performant parmi les algorithmes développés dans ce document et on peut lui avouer une confiance totale pour le diagnostic des machines électriques.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

EN premier temps, nous avons rappelé les éléments constituant la machine asynchrone afin de préciser les différents défauts pouvant survenir sur ceux-ci. Ensuite, nous avons présenté les équations de la machine et les équations correspondantes à l'évolution du défaut. Enfin, nous avons exposé divers outils issus des techniques de traitements du signal permettant l'analyse des signaux d'un défaut électrique et/ou mécanique dans le domaine fréquentiel.

L'étude bibliographique menée a permis de se rendre compte que les défauts rotoriques naissants étaient encore difficilement identifiables car ils sont en fonction du glissement. Or celui-ci étant de l'ordre de quelques pourcent, les fréquences à estimer sont très proches. De plus, pour établir la présence d'une défaillance électrique et/ou mécanique, nous avons pris les essais sur la machine saine comme références.

Nous avons discuté des méthodes de diagnostic récemment appliquées à la machine asynchrone pour établir la présence d'un défaut. Nous avons cité les méthodes à haute résolution qui sont capables d'estimer des fréquences au-dessous de la résolution de Fourier ( $\Delta f = \frac{f_{echan}}{N}$ ). Ces méthodes sont basées sur la décomposition de la matrice de covariance en sous-espaces. Parmi ces méthodes, nous avons présenté "MUSIC", "Root-MUSIC", "ESPRIT". Le développement de ces algorithmes peut être guidé par le fait que les méthodes déjà existantes (estimateurs) ne sont pas efficaces au sens statistique. Nous rappelons que la propriété d'efficacité des estimateurs est définie par l'intermédiaire de la borne de Cramér-Rao (CRB). Enfin, nous avons cité d'autres critères d'optimalité tels que la taille de la fenêtre d'observation, l'écart entre les sources et les types de signaux.

Nous avons, en suite, introduit d'autres méthodes approximant le maximum de vraisemblance et qui estiment les fréquences au dessous de la résolution de Fourier. Ils ont aussi l'avantage d'estimer les fréquences à partir des signaux courts. La première méthode dite MODE est basée sur la minimisation d'un critère donné, par la recherche des racines d'un polynôme. L'autre méthode, surnommée PLEDGE, est basée sur le précédent algorithme MODE. Ce nouvel estimateur exploite l'information des fréquences connues pour mieux estimer les inconnues. Nous avons montré aussi que PLEDGE avait de bonnes performances dans la zone où le SNR est faible, malgré les hypothèses de base qui imposent que les signaux sont corrélés. Ensuite, nous avons utilisé une projection oblique pour estimer les amplitudes des fréquences estimées.

Nous avons appliqué les trois estimateurs PLEDGE, MODE et la PSD sur des signaux du courant statorique d'une machine à rotor défectueux. L'algorithme PLEDGE est le seul qui a pu distinguer les pics fréquentiels correspondants aux défauts à partir des trames d'observation très réduites. Par contre, pour avoir ces mêmes résultats utilisant la PSD, il faut prendre des échantillons très grands, la chose qui conduit à un temps de calcul très lourd et nécessite des circuits de stockage très larges. D'autre part, nous avons remarqué l'importance de glisser la matrice de covariance le long du signal pour trouver des résultats plus satisfaisants.

Finalement, nous avons déduit que l'algorithme PLEDGE est le meilleur estimateur pour faire le diagnostic des machines électriques asynchrones quelque soit le type du défaut. Pour assurer le bon fonctionnement de cet algorithme, il suffit que la corrélation entre les sources soit pas trop élevées.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1 ] Olivier ONDEL. "Diagnostic par reconnaissance des formes : application a un ensemble convertisseur - machine asynchrone". Thèse de doctorat, l'école centrale de lyon, 17 octobre 2006.
- [2 ] Gaëtan DIDIER. "Modélisation et diagnostic de la machine asynchrone en présence de défaillances". Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy-I, 29 Octobre 2004.
- [3 ] Tarek. BOUMEGORA. "Recherche des signatures électromagnétiques des défauts dans une machine asynchrone et synthèse d'observateurs en vue du diagnostic". Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2001.
- [4 ] Abdelfatah KHATIR. "Etude comparative des modèles des machines asynchrones utilisés en diagnostic des défauts". Mémoire de magister, Université Ferhat Abbas de Setif, Algérie, 11 Avril 2009.
- [5 ] Mohamed-Ryad ZEMOURI. "Contribution à la surveillance des systèmes de production à l'aide des réseaux de neurones dynamiques : Application à la maintenance". Thèse de doctorat, L'UFR des Sciences et Techniques de l'Université de France -Comté, 2003.
- [6 ] F. Fellipitti, G. Franceschini, P. Vas. "Recent developpement of induction motor drives fault diagnosis using AI techniques". International electronics society, IEON, vol 4, pp :1966-1973, IEEE 1998.
- [7 ] R. Bigret and J. L. Féron. "Diagnostic - maintenance - disponibilité des machines tournantes". Masson, 1995.
- [8 ] A. H. Bonnett. "Understanding motor shaft failures". IEEE Applications Magazine, pages 25-41, September/October 1999.

- [9 ] A. H. Bonnett. "Root cause ac motor failure analysis with a focus on shaft failures". IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 36(5) :1435-1448, September/October 2000.
- [10 ] Roland. CASIMIR. "Diagnostic des défauts des machines asynchrones par reconnaissance des formes". Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2003.
- [11 ] A. H. Bonnett and G. C. Soukup. "Cause and analysis of stator and rotor failures in three-phase squirrel-cage induction motors". IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 28(4) :921-937, July/August 1992.
- [12 ] A. H. Bonnett and G. C. Soukup. "Analysis of rotor failures in squirrel-cage induction motors". IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 24(6) :1124-1130, November/December 1988.
- [13 ] E.S. Hamdi. "Contribution au Diagnostic d'une Machine Asynchrone Triphasée à Cage". Thèse de doctorat, Université de Biskra, Algérie, 2006.
- [14 ] M. Nezar. "Diagnostic des associations convertisseurs statiques -machine asynchrone en utilisant les techniques de l'intelligence artificielle". Thèse de doctorat, Université de Batna, Algérie, 2006.
- [15 ] G. Didier. "Modélisation et diagnostic de la machine asynchrone en présence de défaillances". Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy-I, 2004.
- [16 ] M. Sahraoui, S. E. Zouzou, A. Menacer, A. Aboubou ,A. Derghal. " Diagnostic des défauts dans les moteurs asynchrones triphases a cage ; Partie II : Méthodes dédiées a la détection des cassures de barres dans les moteurs asynchrones triphasés a cage". Courrier du Savoir - Nř05, Juin 2004, pp. 57-61.
- [17 ] Vladimir I. Vasilishin. "Direction of arrival estimation via unitary TLS-esprit algorithm with structure weighting". Article, Kharkov Air Force Institute.
- [18 ] Y. Li, K. Liu, and J. Razavilar. "A parameter estimation scheme for damped sinusoidal signals based on low-rank Hankel approximation". IEEE Trans. Signal Processing, vol. 45, pp. 481-486, Feb. 1997.
- [19 ] H. Zhu, T. Han, W. Shi, "Application of PRO-ESPRIT algorithm in identification of surface acoustic wave identification-tags". Journal of Shanghai University, Volume 12, Number 4 / août 2008.

- [20 ] Y. Li, K. Liu, and J. Razavilar, "A parameter estimation scheme for damped sinusoidal signals based on low-rank Hankel approximation". IEEE Trans. Signal Processing, vol. 45, pp. 481-486, Feb. 1997.
- [21 ] Y. Hua and T. K. Sarkar, "Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise". IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing, vol. 38, no. 5, pp.814-824, May 1990.
- [22 ] P. Chargé, Y. Wang, J. Saillard. "Un algorithme efficace pour la localisation de sources Non circulaires". Laboratoire IRCCyN/Division SETRA, UMR CNRS 6597, Traitement du Signal 2000 - Volume 17 - n° 5/6.
- [23 ] Carine El Kassiss. "Méthodes à haute résolution pour antennes non uniformes". Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI, 08 décembre 2009.
- [24 ] R. Roy et T. Kailath. "Total least squares ESPRIT". Dans Proc. of 21st Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, pages 297-301, novembre 1987.
- [25 ] R. O. Schmidt. "A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation". PhD thesis, Stanford University, Stanford, Californie, USA, novembre 1981.
- [26 ] P. Stoica, A. Nehorai. "MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound". IEEE Trans. Signal Processing, vol 17. No 5. May 1989.
- [27 ] G. Bienvenu. "Méthode haute résolution pour la localisation de sources rayonnantes". Onde Electrique, 64(4) :28-37, 1984.
- [28 ] S. Marcos. "Les méthodes à haute résolution (traitement d'antenne et analyse spectrale)". Hermes, 1998.
- [29 ] Hamid Krim, Mats Viberg. "Two Decades of Array Signal Processin Research : The Parametric Approach". IEEE signal processing magazine, july 1996.
- [30 ] Guillaume Bouleux , Petre Stoica, Rémy Boyer. "An optimal prior knowledge-based DOA estimation method". 17th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2009), Glasgow, Scotland, August 24-28, 2009.
- [31 ] Petre Stoica, Anders Eriksson, "MUSIC estimation of real-valued sine-wave frequencies". Signal Processing 42 (199s) 139-146.

- [32 ] Roland BADEAU, "Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Application aux signaux de musique". Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, 18 avril 2005.
- [33 ] Documentation Technique Electro - Industries "Compagnie Algérienne de fabrication de Moteurs Asynchrones (0,18kW à 400kW) et Alternateurs (16kVA ai 180kVA)". Complexe MEI BPJ17, Algeria. 1984-2004.
- [34 ] Golub, G. and Loan, C. V. "Matrix Computations". Maryland : Johns Hopkins University Press, Baltimord, 3rd edition edition. 1996.
- [35 ] Buckley, K. and Xu, X. "Spatial-Spectrum Estimation in a Location Sector ". IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, 38 :1842-1852. 1990.
- [36 ] Furukawa, T., Kubota, H., and Tsujii, S. "Orthogonal projection algorithm for block adaptive signal processing and some of its properties". Electron. Commun., 73 :29. 1990.
- [37 ] Guillaume Bouleux. "Traitement d'antenne adapté aux modèles linéaires intégrant une interférence structurée. Application aux signaux mécaniques". Thèse de doctorat, Universite Jean Monnet, Saint-Etienne. 4 Décembre 2007.

# Annexe

## Les caractéristiques détaillées de la machine :

La puissance  $P = 4KW$  ; la tension  $V_s = 220/380 V(\Delta/Y)$  ; le courant  $I_s = 15.2/8.8(A)$  ; la vitesse  $N_n = 1435(tr/mn)$  ; le nombre de pair de pôles  $P = 2$  ; le nombre des phases  $m = 3$  ; La fréquence  $f = 50Hz$  ;  $\cos(\phi) = 0.83$  ;  $J = 0.025Kg.m^2$

### stator :

- Le nombre d'encoches statoriques  $N = 36$ .
- La résistance par phase du stator  $R_s = 1.5\Omega$ .
- Le nombre de spires en série par phase 156.
- L'entrefer effectif  $g_e = 0.28mm$
- Le pas de raccourcissement  $5/6$ .
- La longueur active du circuit magnétique  $l_e = 120mm$ .
- Le rayon moyen à l'entrefer  $r = 70mm$ .
- L'inductance magnétisante du stator  $L_{ls} = 7mH$ .

### rotor :

- Le nombre des barres  $n = 28$ .
- La surface d'une barre rotorique  $57.1mm^2$ .
- La section de l'anneau de court circuit  $278.25mm^2$ .

- L'inductance de la barre rotorique  $L_b = 0.28\mu H$ .
- La résistance de la barre rotorique  $R_b = 96.94\mu\Omega$ .
- L'inductance de l'anneau de court-circuit  $L_e = 0.036\mu H$ .
- La résistance de l'anneau de court-circuit  $R_e = 5\mu\Omega$ .

## La matrice de covariance glissante :

On présente ici quelques figures associées au glissement de la fenêtre d'observation sur le même signal. La taille de chaque fenêtre est  $N=899$  échantillons :

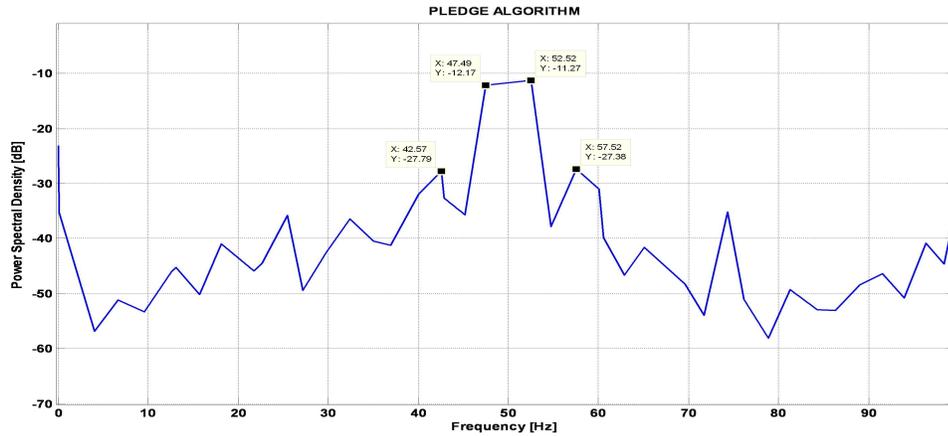


FIGURE IV.58: *Spectre du courant statorique par PLEDGE - trame 1 -.*

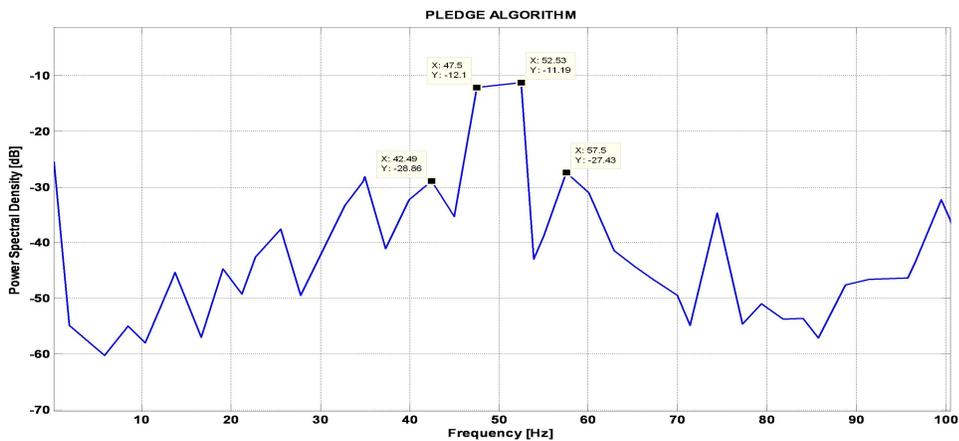


FIGURE IV.59: *Spectre du courant statorique par PLEDGE - trame 2 -.*

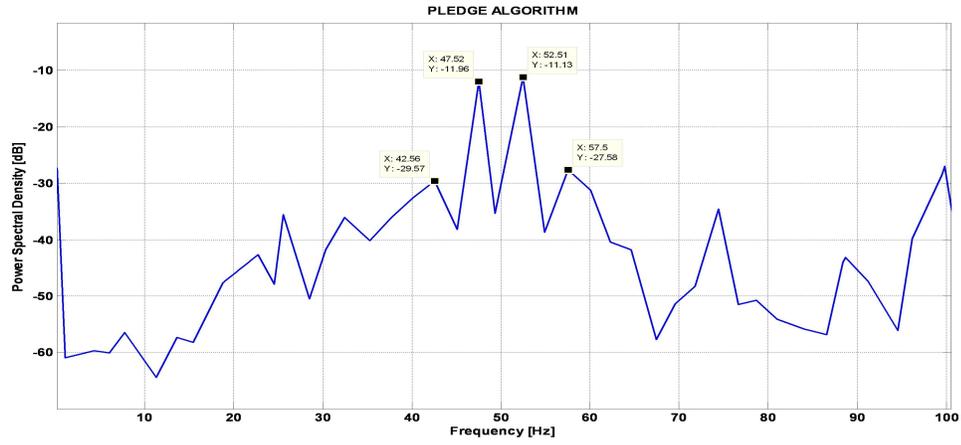


FIGURE IV.60: *Spectre du courant statorique par PLEDGE - trame 3 -*.

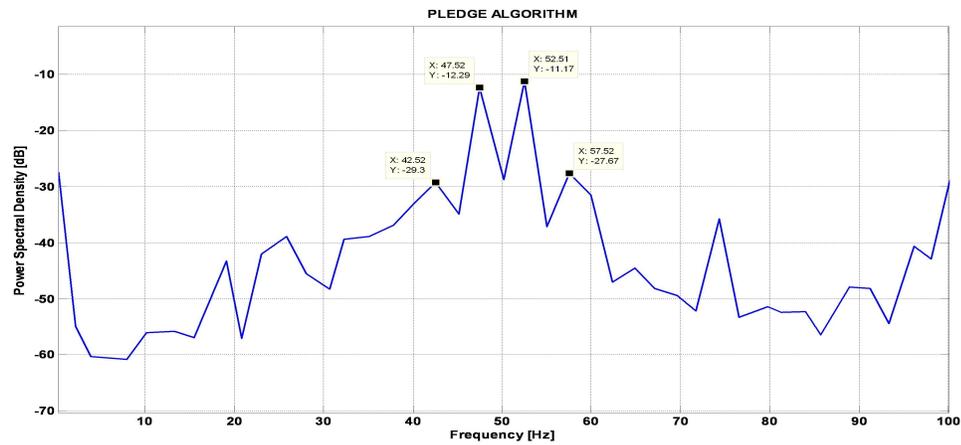
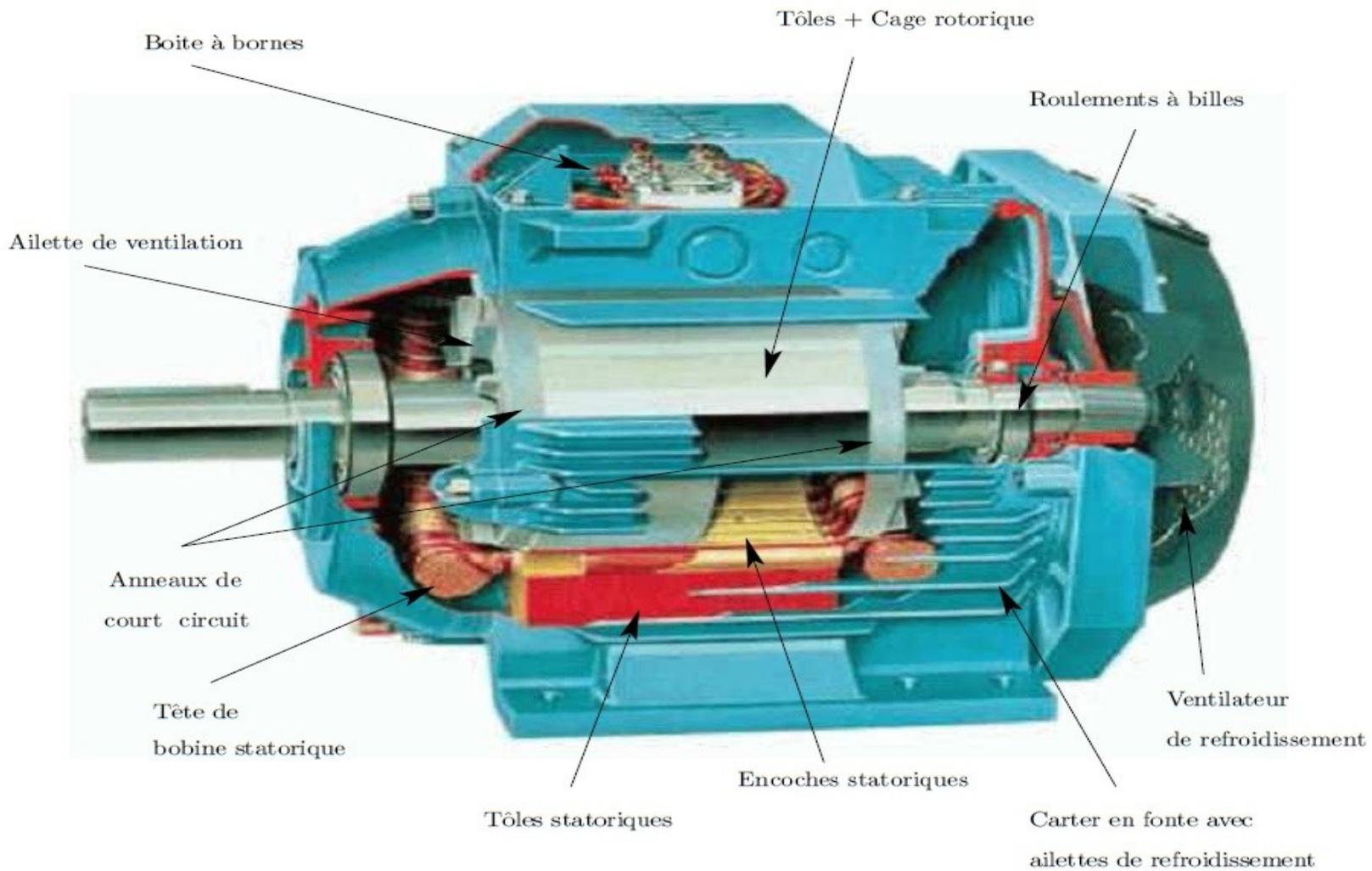


FIGURE IV.61: *Spectre du courant statorique par PLEDGE - trame 4 -*.



*Eléments de constitution d'une machine asynchrone à cage d'écureuil*

## ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بعرض أهم طرق تشخيص المحركات الكهربائية اللاتزامنية ذات القفص السنجابي، واصفين في البداية مكونات هذا النوع من المحركات وأشهر الأعطاب التي تصيبها.

يهتم جل هذا العمل بتطبيق طرق جديدة، كانت تستعمل في معالجة الهوائيات، على تشخيص الأعطاب الكهربائية للمحرك. حيث أن الدقة الرديئة لتحويلات فوري وكابون هي التي حتمت علينا إستعمال المتنبئات ذات الدقة العالية مثل MUSIC ، Root-MUSIC و ESPRIT ولكن رداءة فعاليتها مقارنة مع حد كرامر راو أرغمننا على جلب طرق مشابهة لـ الحد الأعلى للاحتتمالات مثل MODE و PLEDGE التي أعطتنا نتائج جد جيدة إنطلاقا من عينات قصيرة جيدا من إشارة التيار الكهربائي المغذي للمحرك، مما يسمح لنا بتقليل الوقت العملي لأخذ هذه الإشارات.

**الكلمات المفتاحية:** المحرك الكهربائي اللاتزامني ذو القفص السنجابي، المتنبئات ذات الدقة العالية، المتنبئات المشابهة لـ الحد الأعلى للاحتتمالات، كرامر راو، التشخيص، الإسقاطات المائلة، إنكسار أعمدة القفص.

## Résumé:

Dans cette étude, nous traitons le diagnostic des défauts rotoriques dans les machines asynchrones à cage d'écurie. Nous décrivons les éléments constituant la machine asynchrone et les principaux défauts pouvant survenir sur celle-ci. Ensuite, nous proposons un modèle de machine basée sur la méthode des circuits électriques couplés magnétiquement.

Nous nous intéressons plus particulièrement au développement de nouvelles méthodes de diagnostic. Nous présentons plusieurs méthodes permettant la détection d'un défaut rotorique. Les méthodes à haute résolution ont un pouvoir résolvant au dessous de la résolution de Fourier. Ces méthodes sont basées sur la décomposition de la matrice de covariance en sous espaces. Parmi ces méthodes, nous citons "MUSIC", "Root-MUSIC", "ESPRIT". Nous introduisons deux autres méthodes approximant le maximum de vraisemblance. La première méthode dite MODE est basée sur la minimisation d'un critère donné, par la recherche des racines d'un polynôme. La deuxième méthode, surnommée PLEDGE, est basée sur le précédent algorithme MODE. Ce nouvel estimateur exploite l'information des fréquences connues pour mieux estimer les inconnues. L'intérêt majeur de cette méthode est sa forte résolution à partir des courts signaux. Enfin, Nous montrons que PLEDGE a de bonnes performances dans la zone où le SNR (rapport signal sur bruit) est faible, malgré les hypothèses de base qui imposent que les signaux sont corrélés. Ensuite, nous avons utilisé une projection oblique pour estimer les amplitudes des fréquences estimées.

**Mots-clés:** Machine asynchrone triphasée à cage, défauts, diagnostic, surveillance, estimation, projection oblique, PLEDGE, MODE, DSP, rupture de barre rotorique.

## Abstract :

In this study, we move on to the broken rotor bar diagnosis of squirrel-cage induction machines. We describe the various elements of the induction machine and the its major defects that may occur. we propose a machine model based on the method of magnetically coupled circuits.

We are particularly interested to develop a new diagnostic methods. In this document, we present a several methods to detect the defect of the rotor. We cite the high resolution methods that are based on the decomposition of the covariance matrix subspaces. First, we mention high-resolution methods, which have a resolve ability bellow the resolution of Fourier. Among these methods, we present "MUSIC", "Root-MUSIC", "ESPRIT". Reminder that the effective property of estimators is defined via the Cramer-Rao bound (CRB). Secondly, we introduce two other methods approximating the maximum of likelihood. The first method named MODE is based on the minimization of the ML criterion by finding a polynomial's roots. The second method, called PLEDGE, is based on the previous algorithm MODE. This new estimator uses the information of known frequencies to estimate the unknown. We show that PLEDGE had a good performances in the area where the SNR (signal to noise ratio) is low, despite the assumptions that require that the signals are correlated. Then, we used an oblique projection to estimate the amplitudes of the frequencies estimated.

**Key-words:** Squirrel cage induction motor, defects, diagnosis, estimation, oblique projection, PLEDGE, MODE, PSD, broken rotor bars.