
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Laboratoire de Génie Sismique & de Dynamique
des Structures



Mémoire de Magister

Présenté par :

Abdellah BOUDINA

Ingénieur d'Etat en Génie Civil

Diplômé de l'Ecole Nationale Polytechnique

Thème :

SIMULATION D'EXCITATIONS SISMIQUES A PARTIR DE SPECTRES CIBLES

Soutenu publiquement le mercredi 27- 01- 2010 devant le jury composé de :

Mr. B. TILIOUINE	Professeur, ENP	Président
Mr. M. HAMMOUTENE	Professeur, ENP	Directeur de Thèse
Mr. M. BELAZOUGUI	Directeur du CGS	Examineur
Mr. N. BOURAHLA	Professeur, U.S.D.Blida	Examineur
Mme. D. CHERID	Chargée de cours, ENP	Examineur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عِلْمٌ

"وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عِلْمٌ"

اللَّهُ
الصَّادِقُ
العَظِيمُ

A mes parents

A ma famille

A tous mes amis

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le Clément et le Miséricordieux de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Je voudrai exprimer mes vifs remerciements à mon directeur de thèse Mr. le Professeur M. HAMMOUTENE pour les orientations et les conseils qu'il a su me prodiguer tout au long de ce travail de recherche.

Je tiens à remercier vivement Mr. le Professeur B. TILIOUINE pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté de présider le jury et je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciements à tous les membres du jury pour avoir pris la peine d'examiner le manuscrit.

Merci aussi à tous les membres de l'équipe du Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des Structures pour leur soutien et leur aide.

Je ne pourrai oublier de remercier tous les enseignants et travailleurs qui ont contribué directement ou indirectement à ma formation depuis mes classes de primaire à ce jour.

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin m'ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

ملخص

محاكاة للتحريض الزلزالي إنطلاقاً من طيف استجابة معطى، قد تمت لهذا الغرض، قدمت دالة للكثافة الطيفية للطاقة متوافقة مع طيف إستجابة معطى، تسمح الأخذ بعين الاعتبار عدم سكونية الحركة القوية والطبيعة الانتقالية للاستجابة. هذه الدالة استعملت فيما بعد لحساب طيف الاستجابة متوسطي متوافق مع طيف استجابة معطى وهذا من خلال حساب عدة سجلات للتسارع تكون قادرة على تعويض السجلات الحقيقية بالنسبة للمناطق التي تدرس فيها مقاومة البناءات للهزات الأرضية. في الأخير، قدمت عدة أمثلة من أجل إظهار دقة النماذج المدروسة و عدة خلاصات عملية استخرجت تحت ضوء النتائج المحصل عليها.

مفاتيح : إهتزازات عشوائية، إحصائيات القمم المرتبة، دالة الكثافة الطيفية للطاقة، طيف الاستجابة الزلزالية.

Résumé

Une simulation d'excitations sismiques à partir des spectres cibles, est effectuée. A cet effet, une densité spectrale de puissance (DSP) compatible avec un spectre de réponse cible basé sur les méthodes stochastiques est développée, permettant ainsi de prendre en compte la non-stationnarité du mouvement fort et la nature transitoire de la réponse. La DSP compatible est ensuite utilisée pour générer des accélérogrammes simulés qui donnent des spectres de réponse calculés compatibles aux spectres de réponse cibles. Enfin, plusieurs exemples sont présentés en vue d'illustrer la précision des méthodes étudiées et des conclusions d'intérêt pratique sont formulées à la lumière des résultats obtenus.

Mots clés : Vibrations aléatoires, statistiques des pics ordonnés, densité spectrale de puissance, spectre de réponse sismique.

Abstract

A simulation of seismic excitations starting from the target spectrum, is carried out. To this end, a power spectral density function (PSDF) compatible with a given response spectrum with stochastic methods is developed which accounts for the nonstationarity of the ground motion and the transient nature of the structural response. The compatible PSDF is then used to generate simulated accelerograms give compatible calculated spectrum of response to the target response spectra. Finally, several examples are presented to illustrate the accuracy of the studied methods and conclusions of practical interest are provided in light of the results obtained.

Keywords: Random vibrations, statistics of ordered peaks, power spectral density function, seismic response spectrum.

SOMMAIRE

Notations

CHAPITRE 1 - INTRODUCTION GENERALE	01
1. Introduction	01
2. Objectif et organisation de la thèse	02
3. Synthèse bibliographique	05
3.1. Statistiques des pics ordonnées	05
3.2. Génération de DSP compatible avec un spectre de réponse	06
3.3. Simulation des accélérogrammes synthétiques	07
4. Organisation du mémoire	08
 CHAPITRE 2 - NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA THEORIE DES VIBRATIONS ALEATOIRES	10
1. Introduction	10
2. Processus aléatoire	10
3. Caractérisation d'un processus aléatoire	11
3.1. Fonction de densité de probabilité	11
3.2. Moyenne et autocorrélation d'un processus aléatoire	11
4. Processus stationnaire et processus ergodique	13
4.1. Processus stationnaire	13
4.2. Processus ergodique	14
4.3. Processus Gaussien	15
5. Décomposition spectrale d'un processus aléatoire	15
5.1. Transformée de Fourier	15
5.2. Fonction de densité spectrale de puissance	16
6. Réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation aléatoire stationnaire	18
6.1. Relation entrée–sortie d'un oscillateur linéaire à un degré de liberté	18
6.2. Réponse stationnaire à une excitation aléatoire stationnaire	19
6.3. Réponse transitoire à une excitation aléatoire stationnaire	21
7. Conclusions	22
 CHAPITRE 3 - STATISTIQUES DES PICS ORDONNES	23
1. Introduction	23
2. Taux de franchissement d'un seuil a. Formule de Rice	23

3. Distribution des maxima	24
4. Statistiques des pics ordonnés	28
4.1. Probabilité de distribution du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné	28
4.2. Valeur la plus probable du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné	30
4.3. Valeur attendue du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné	32
5. Applications numériques	32
6. Conclusions	34
CHAPITRE 4 - GENERATION DE DSP COMPATIBLE AVEC UN SPECTRE DE REPONSE	36
1. Introduction	36
2. Représentations de l'action sismique par la densité spectrale de puissance	36
2.1. Bruit Blanc (White Noise)	36
2.2. Densité spectrale de puissance de Kanai-Tajimi	37
2.3. Densité spectrale de puissance de Clough est Penzien	38
3. DSP déterminée à partir d'un spectre de Fourier (1ère méthode)	39
4. DSP compatible avec un spectre de réponse (2^{ème} méthode)	40
5. Applications numériques	43
6. DSP compatibles pour différentes conditions locales de site de magnitudes et de distances épacentrales	46
6.1. Effet des conditions locales de site	46
6.2. Effet de la magnitude	48
6.3. Effet de la distance épacentrale	49
7. DSP compatible avec les spectres réglementaires de l'US NRC et des RPA99	49
8. Conclusions	51
CHAPITRE 5 - GENERATION DES ACCELEROGRAMMES COMPATIBLES AVEC UN SPECTRE DE REPONSE CIBLE	53
1. Introduction	53
2. Les paramètres de simulation	54
2.1. Valeur de l'amplitude maximale de l'accélération du mouvement sismique du sol (PGA)	54
2.2. Nonstationnarité temporelle	54
2.3. Distribution de phases	61
2.3.1. Distribution de phases uniforme	61
2.3.2. Distribution des dérivées de phases	63
2.3.3. Phases des accélérogrammes réels	64

3. Aspects numériques de la procédure de simulation	65
4. Applicabilité de la procédure de simulation	66
4.1. Cas où les paramètres environnementaux sont identifiés	66
4.1.1. Effet de la magnitude	66
4.1.2. Effet de la distance épacentrale	67
4.1.3. Effet des conditions locales de site	67
4.2. Cas où les paramètres environnementaux ne sont pas identifiés	68
4.3. Génération des accélérogrammes compatibles avec les spectres réglementaires	69
5. Conclusions	73
CHAPITRE 6 - CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET RECOMMANDATIONS FUTURES	74

Références bibliographiques

Annexe Calcul de la dérivée de la fonction de transfert d'un oscillateur simple par rapport à la fréquence propre et à l'amortissement pour les réponses en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération

NOTATIONS

- $\ddot{a}(t)$ = Accélération du sol
 $a_{(n)}$ = Pic d'ordre n
 \bar{a} = Moyenne quadratique des maxima de $x(t)$
 a_{rms} = Amplitude moyenne quadratique de $x(t)$
 c = Amortissement
 $[C]$ = Matrice d'amortissement
 B, C, D = Coefficients
 $f_X(x,t)$ = Fonction de densité de probabilité d'un processus $X(t)$
 $F_X(x,t)$ = Fonction de probabilité cumulative d'un processus $X(t)$
 $F_{(n)}(\eta)$ = Fonction de distribution cumulative du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné de $x(t)$
 $f_{(n)}(\eta)$ = Fonction de densité de probabilité du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné de $x(t)$
 $FS(\omega)$ = Spectre de Fourier
 $G(\omega)$ = Fonction de densité spectrale de puissance unilatérale
 $GD(\omega)$ = Fonction de densité spectrale unilatérale de la réponse en déplacement
 $GR(\omega)$ = Fonction de densité spectrale unilatérale de la réponse
 h_i = Hauteur du $i^{\text{ème}}$ étage
 $h(t)$ = Fonction de la réponse temporelle d'un oscillateur
 $H(\omega)$ = Fonction de la réponse fréquentielle d'un oscillateur
 $H_i(\omega)$ = Fonction de la réponse fréquentielle du $i^{\text{ème}}$ mode
 $H^*(\omega)$ = Conjugué complexe de $H(\omega)$
 $H_i^*(\omega)$ = Conjugué complexe de $H_i(\omega)$
 $\tilde{H}(\omega)$ = Fonction de la réponse fréquentielle transitoire d'un oscillateur
 $\mathcal{H}(\omega, \omega_j, \xi_j)$ = Module au carré de la fonction de transfert d'un oscillateur

 $\{I\}$ = Vecteur unité
 k = Raideur
 $[K]$ = Matrice de rigidité
 m = Masse
 $[M]$ = Matrice masse
 m_X = Moyenne
 m_k = Moment d'ordre k
 N = Nombre total de pics
 p = Facteur de pic de la réponse
 PSV = Pseudo spectre de vitesse
 \overline{PSV} = Pseudo spectre de vitesse moyen
 $P(\eta)$ = Fonction de distribution cumulative des pics de $x(t)$
 $p(\eta)$ = Fonction de densité de probabilité des pics de $x(t)$
 $r = \omega_k / \omega_j$

- $R_{XX}(t_1, t_2)$ = fonction d'autocorrélation
 $R_{XY}(t_1, t_2)$ = fonction d'intercorrélacion
 $S(\omega)$ = Fonction de densité spectrale de puissance
 $S_D(\omega)$ = Fonction de densité spectrale de la réponse en déplacement
 $S_R(\omega)$ = Fonction de densité spectrale de la réponse
 $SD(\omega, \xi)$ = Spectre de réponse en déplacement
 $SV(\omega, \xi)$ = Spectre de réponse en vitesse
 $SA(\omega, \xi)$ = Spectre de réponse en accélération
 t = Le temps
 T = Durée totale d'un processus
 T_D = Durée totale d'un enregistrement accélérométriques
 T_s = Durée stationnaire d'un processus
 $U(t)$ = Déplacement modal d'un oscillateur
 ν = rapport du nombre de pics négatifs par rapport au nombre total de pics
 $[V]$ = Matrice des variances
 $x(t)$ = Fonction aléatoire
 $X(t)$ = Processus aléatoire
 $\dot{X}(t)$ = Processus dérivé
 $\ddot{X}(t)$ = Processus dérivé second
 $Y(t)$ = Déplacement relatif d'un oscillateur
 $\delta(\cdot)$ = Fonction de dirac
 ε = Une mesure de la largeur de bande du spectre de réponse
 φ_n = Phases aléatoires uniformément distribuées entre 0 et 2π
 $[\Phi]$ = Matrice modale
 $\{\phi\}_j$ = Vecteur propre du $j^{\text{ème}}$ mode
 η = Pic normalisé
 η_{\max} = Pic normalisé maximale ou facteur de pic
 η_n = $n^{\text{ème}}$ Pic normalisé
 σ_x^2, σ_x = Variance et écart type du processus $X(t)$
 $\lambda_{k,jj}$ = Moment spectral d'ordre k de la réponse du $j^{\text{ème}}$ mode
 $\rho_{XX}(t_1, t_2)$ = Coefficient de corrélation
 $\rho_{XY}(t_1, t_2)$ = Coefficient de d'intercorrélacion
 $\Gamma_{XX}(t_1, t_2)$ = Fonction d'autocovariance
 $\Gamma_{XY}(t_1, t_2)$ = Fonction d'intercovariance
 ω, ξ = Fréquence naturelle et pourcentage d'amortissement critique d'un oscillateur

CHAPITRE 1
INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction

Les tremblements de terre constituent un risque considérable pour les régions urbaines et rurales, et peuvent conduire à des dégâts importants tant sur le plan humain que sur le plan matériel. C'est pourquoi, pour fournir un degré adéquat de sécurité à un coût raisonnable, il est nécessaire d'avoir une maîtrise parfaite des paramètres contrôlant l'aléa sismique en vue d'entreprendre toutes les actions nécessaires pour la réduction de la vulnérabilité des structures. Ceci nécessite une large connaissance des propriétés des mouvements forts, de l'influence des paramètres environnementaux sur ces mouvements sismiques et de la réponse dynamique des structures excitées par les accélérations de sol.

Des études expérimentales et analytiques des mouvements forts de sol ont pu être développées ces dernières années grâce à une densification plus importante des réseaux de sismographes et d'accélérographes installés dans les différentes régions sismiques du monde. L'intérêt pour de telles études, s'est accentué en raison des problèmes de sécurité se posant avec une acuité de plus en plus grande surtout pour certaines structures importantes particulièrement sensibles aux séismes (telles que les centrales nucléaires, les ponts, les barrages, bâtiments de grandes hauteurs, équipements secondaires, etc...). En effet, outre l'étude du comportement dynamique de ce type de structures, l'analyse des effets de l'interaction sol-structure et le cas échéant de l'isolation à la base de ces structures requiert, entre autres, une parfaite connaissance de l'action sismique.

Cependant, malgré les efforts fournis par la communauté scientifique, les données actuelles sur les accélérogrammes réels ne couvrent pas toutes les conditions d'enregistrements pour permettre leur utilisation rationnelle dans la conception parasismique (manque de données en champ proche, etc...). La nécessité de simuler des accélérogrammes synthétiques s'est très vite faite ressentir, malheureusement, la définition de signaux accélérométriques réalistes reste une tâche relativement difficile compte tenu de l'importante variabilité des caractéristiques qui peut apparaître, même pour des signaux enregistrés dans des conditions

identiques. La mise en évidence des principales tendances représentant les fluctuations de ces caractéristiques accélérométriques passe par un traitement statistique des données qui sont alors arrangées par classes de magnitudes, de distances épacentrales et de conditions locales de site.

Les enregistrements de mouvements forts ainsi classés ont tendance à montrer des régularités statistiques dans leurs contenus fréquentiels. Cette propriété a été reconnue dès les premières investigations des différents enregistrements de tremblements de terre. Plusieurs études disponibles proposent des formes spectrales "standards" pour les mouvements en champ libre (spectre de Fourier et spectre évolutif) ou bien directement pour la réponse structurale (spectres de réponse) (Seed et al, 1976 ; Trifunac, 1976,1995 ; Mohraz 1976 ; Şafak, 1988...etc.). L'état de l'art a actuellement progressé au point de proposer des expressions explicites donnant les coordonnées spectrales en fonction de la magnitude, de la distance épacentrale et des conditions locales du sol (Şafak, 1988 ; Trifunac, 1989, 1994 ; Sabetta, 1996).

Cette stabilité relative du contenu fréquentiel du mouvement sismique fort a encouragé les chercheurs à investiguer dans ce domaine pour la modélisation de ce mouvement en tant que processus aléatoire.

2. Objectif du travail

Il a été trouvé alors intéressant de développer des solutions de l'histoire temporelle des accélérations sismiques du fait de leurs importances pour la compréhension du comportement dynamique des structures importantes (centrales nucléaires, les ponts, les barrages, bâtiments de grandes hauteurs...) ainsi que pour l'analyse des effets d'interaction sol-structure, des isolations à la base et de comportement non linéaire des structures. Les solutions temporelles permettent aussi d'évaluer de manière plus exacte la réponse des structures secondaires lesquelles engendrent des coups de réparation énormes (arrêt de chaîne de production, démontage de machines de production,...) lors de dysfonctionnements pouvant survenir même durant des séismes de faible magnitude.

C'est dans ce cadre que s'inscrit ce travail de recherche dans lequel il est proposé de mettre à profit la stabilité statistique de la réponse structurale (spectre de réponse en vitesse) pour

générer des accélérations sismiques qui leurs sont compatibles.

Pour cela, il était nécessaire de développer dans un premier temps des fonctions de densités spectrales de puissance (DSPF) compatibles avec des spectres de réponse cibles en utilisant la théorie des vibrations aléatoires et la statistique des pics ordonnés. Deux méthodes ont été utilisées pour cette simulation, une première qui définit la DSPF en terme de spectre de Fourier et de durée stationnaire de la phase des mouvements forts et une deuxième approche qui détermine la DSPF de manière itérative à partir du spectre cible considéré. L'applicabilité de chacune de ces deux méthodes à été testée en utilisant les spectres de réponse associés à plusieurs accélérogrammes réels (El-Asnam, Charchell, El-Centro...) et à plusieurs codes de calcul (RPA, UBC, USNRC, EC8...) d'une part et calibrés sur la base de données géotechniques (Seed 1976) et de données sismologiques (Safak 1988) d'autre part. L'approche itérative s'est avérée être la meilleure d'autant qu'elle prend implicitement en compte l'effet de la non-stationnarité fréquentielle du mouvement sismique ainsi que la nature transitoire de la réponse sismique pour les longues périodes.

Par la suite, une procédure de génération d'accélérogrammes synthétiques est menée en utilisant la méthode de superposition d'ondes sinusoïdales, dont les amplitudes sont reliées à des densités d'énergies spectrales développées selon la méthodologie retenue ci-dessus. Afin d'assurer la compatibilité avec un spectre de réponse cible donné, il a été mis en place une procédure itérative efficace subséquente permettant d'ajuster les amplitudes spectrales des réponses obtenues avec celles du spectre de réponse cible.

Afin d'assurer aux accélérogrammes synthétiques un caractère nonstationnaire dans le domaine temporel, ceux-ci ont été générés de sorte à reproduire trois phases importantes : une croissance progressive des amplitudes du signal sur un premier tronçon temporel de durée T_1 précédant l'arrivée des ondes S, un deuxième tronçon temporel de durée T_2 représentant la phase des mouvements forts et un troisième tronçon de durée T_3 caractérisé par les vibrations libres du sol engendrant une décroissance progressive des amplitudes jusqu'au stade de repos.

Plusieurs formulations ont été présentées pour l'estimation de la durée T_2 de la phase des mouvements forts. Une étude comparative de ces différentes approches a permis de retenir la formulation de Brune (1979) pour la détermination de la valeur de T_2 .

La superposition des ondes sinusoïdales est opérée de trois manières différentes suivant le mode d'affectation des phases. Dans la première approche, les valeurs des phases sont générées en utilisant une fonction de distribution de probabilité uniforme. Cette approche, qui nécessite la définition d'une fonction enveloppe pour reproduire la nonstationnarité temporelle, est utilisée lorsqu'aucune information n'est disponible sur le processus d'arrivée des différentes ondes sismiques au site considéré. Dans la deuxième approche, les valeurs des phases sont générées aléatoirement de sorte que la tendance moyenne de chacune d'elles corresponde en moyenne au temps d'arrivée au site de chacune des ondes de cisaillement associées. Une variabilité autour de la moyenne est ajoutée de sorte à assurer le caractère stochastique du mouvement fort de sol. Cette procédure de génération de phases reproduit de manière implicite l'enveloppe temporelle conformément aux trois phases décrites précédemment. La troisième approche correspond au cas où les paramètres environnementaux du site d'enregistrement peuvent être identifiés par un accélérogramme réel ; on peut alors utiliser ses phases propres pour simuler des signaux en accélérométriques synthétiques.

Afin d'apprécier l'applicabilité de la procédure de simulation ainsi développée, il est fait usage des spectres cibles cités ci-dessus associés à des accélérogrammes réels, des codes de calcul réglementaires et des banques de données géotechniques et sismologiques.

La procédure ainsi développée, a permis de corréler les paramètres de simulation avec la magnitude de séismes considérés, les distances épacentrales et les conditions locales de site, et ce suivant que l'enregistrement soit connu au site de construction (accélérogramme réel) ou bien simulé sur la base de données géotechniques (conditions de site) ou sismologiques (magnitude du séisme et distance épacentrale).

D'autre part, la prise en considération de spectres de réponse réglementaires comme spectres cibles a permis de proposer des accélérogrammes réglementaires prenant en considération les conditions de calcul imposés par les différentes réglementations en vigueur de nos jours (RPA2003, UBC, USNRC ...). Ces accélérogrammes qui reproduisent l'aléa déduit du retour d'expérience adéquats pour l'évaluation des seuils de réponses traduisant un comportement dynamique conforme au degré de fiabilité requis et ce notamment pour des structures importantes à comportement non linéaires. représentent des outils simples et adéquats pour l'analyse temporelle de la réponse dynamique des structures importantes, des effets, sur la réponse structurale, des systèmes constructifs et des modèles de comportement (notamment

non linéaire) ainsi que pour l'évaluation exacte de la réponse dynamique des systèmes secondaires.

L'application de la méthodologie de simulation basée sur les paramètres environnementaux : magnitudes et distances épacentrales a nécessité une étude de corrélation de ces deux paramètres avec le coefficient d'accélération de zone afin de situer les correspondances entre la classification réglementaire (zone sismique, site) et celle de notre étude qui est fonction de la magnitude, de la distance épacentrale et des conditions locales de site.

Enfin, les résultats obtenus sont analysés, commentés, des conclusions générales et des recommandations d'utilités pratiques sont déduites au profit des ingénieurs de bureaux d'études et de conception.

3. Synthèse bibliographique

3.1. Statistiques des pics ordonnés

En extension des travaux de Rice (1944, 1945), la distribution statistique des maximas d'une fonction aléatoire, qui est représentée par la somme d'un nombre infini de fonctions sinusoïdales à phases aléatoires, a été étudiée par Cartwright et Longuet-Higgins (1956). Cartwright et Longuet-Higgins ont appliqué cette théorie sur le mouvement des vagues en mer et le balancement des bateaux. Une application de cette théorie en génie sismique a été présentée par Udawadia et Trifunac (1974). Ils ont examiné la relation physique qui existe entre le spectre de réponse et la transformée de Fourier du mouvement fort, à travers les statistiques des valeurs extrêmes de la réponse d'un oscillateur, en supposant que la réponse est stationnaire. Leurs résultats indiquent que le spectre de réponse basé sur un calcul statistique conduit à une bonne approximation de la réponse réelle du mouvement fort.

En utilisant la théorie développée par Cartwright et Longuet-Higgins (1956), plusieurs chercheurs ont présenté différentes formulations de la distribution de probabilité des différents pics ordonnés d'un processus aléatoire $x(t)$, lorsque les pics sont arrangés dans un ordre décroissant de leurs amplitudes.

Amini et Trifunac (1981) étaient les premiers à définir la distribution de probabilité du pic d'ordre n comme la probabilité que n pics parmi un total de N pics dans $x(t)$ n'excèdent pas

une amplitude normalisée η . Toutefois, ils ont considéré que la probabilité de dépassement d'une amplitude η par tous ces pics, était la même que celle du pic le plus important. Ainsi leurs résultats se sont avérés de plus en plus conservateurs avec l'augmentation de l'ordre du pic (amplitude décroissante).

Dans le but d'améliorer la formulation de Amini et Trifunac, Gupta et Trifunac (1988) ont développé la distribution de probabilité du $n^{\text{ème}}$ pic lorsque les pics sont arrangés dans un ordre décroissant de leurs amplitudes se basant sur l'hypothèse que les occurrences des pics dans le processus $x(t)$ sont des événements statistiquement indépendants.

Basu et al (1996, 1996a) ont modifié la distribution de probabilité des pics ordonnés afin de considérer la dépendance entre les occurrences des pics en utilisant la théorie de Markov. Mais des investigations détaillées par simulation ont montré que la formulation de Gupta et Trifunac décrit le mieux la réalité (Gupta et Trifunac, 1998b).

3.2. Génération de DSP compatible avec un spectre de réponse

L'excitation sismique est représentée par un processus stochastique, il est possible d'interpréter le spectre de réponse qui lui est associé par les statistiques des valeurs extrêmes d'un oscillateur soumis au processus. Pour un modèle stationnaire de l'excitation sismique, il est possible alors d'obtenir une relation qui lie le spectre de réponse et la densité spectrale de puissance du processus.

Kaul (1978) fut le premier à examiner cette relation en proposant deux méthodes permettant d'obtenir une DSP du mouvement sismique à partir de son spectre de réponse. L'une de ses méthodes est approximative et donne une expression explicite de la DSP en fonction du spectre de réponse. L'autre méthode est exacte dans laquelle un schéma itératif pour la solution du problème a été établi. Il a été montré que pour de faibles valeurs de l'amortissement critique, la méthode approximative donne d'assez bons résultats par rapport à la méthode exacte.

En ce basant sur les travaux de Kaul, Unruh et Kana (1981) ont proposé une méthode itérative permettant l'estimation des paramètres correspondant à un spectre de réponse pour la description du mouvement fort. Dans cette procédure, le mouvement fort est représenté par un processus stochastique Gaussien stationnaire, permettant ainsi d'établir une formulation entre

le spectre de réponse et les paramètres de la densité spectrale de puissance.

Plus tard, Christian (1989) a utilisé deux schémas itératifs afin de déterminer une DSP compatible avec des spectres de réponse de calcul. Les résultats obtenus ont montré que pour des fréquences inférieures à 10 Hz, la convergence n'était pas assurée. Par contre une meilleure convergence a été obtenue pour les spectres de réponses calculés à partir d'un traitement statistiques du mouvement fort sur toute la gamme de fréquences en plus d'une convergence très rapide.

Gupta et Trifunac (1998a) ont apporté plusieurs améliorations aux méthodes itératives précédentes par l'utilisation d'un facteur de pic plus précis et en prenant en compte la nature transitoire de la réponse. Ainsi, la DSP compatible obtenue donne une meilleure description du contenu fréquentiel du mouvement fort pour le calcul stochastique de la réponse sismique des structures.

3.3. Simulation des accélérogrammes synthétiques

Plusieurs travaux traitent des procédures de simulation des accélérogrammes synthétiques compatibles avec spectres de réponse cibles tels que Vanmarcke (1976) et Preumont (1980) qui sont basés sur la superposition des ondes avec l'application directe de la densité spectrale de puissance (DSP) du modèle de Kanai-Tajimi comme amplitude et des phases aléatoires générés avec une distribution uniforme, et avec une durée totale proposée de 15 à 20 sec. Plus tard Gupta (1993) présente un modèle itératif pour le calcul des DSP compatibles aux spectres de réponse cibles comme amplitude et utilise des phases aléatoires générées avec une distribution uniforme, et pour tous les travaux la nonstationnarité temporelle du mouvement sismique est introduite avec l'application d'une enveloppe temporelle soit très simple de forme trapézoïdale (SIMQKE-I 76) ou d'une forme connue proposée par Jennings et all (1969). Par la suite Sabetta et Pugliese (1996) proposent des lois de régression pour le calcul de la durée totale du mouvement sismique ainsi que la valeur maximale de l'accélération (PGA).

Bien que les méthodologies développées présentent un intérêt certain, il est néanmoins important de proposer une nouvelle approche pouvant introduire de manière relativement plus simple les effets de la nonstationnarité dans les domaines fréquentiel et temporel.

C'est dans ce cadre que s'inscrit notre travail qui se propose de développer une procédure de

simulation d'accélération sismique compatible avec les spectres de réponse qui englobe cette double nonstationnarité à travers une procédure adéquate d'estimation de la DSPF et d'une technique appropriée de génération des différences de phases.

4. Organisation du mémoire

Après le premier chapitre d'introduction, le présent travail est divisé en six chapitres. Le chapitre II traite des notions fondamentales de la théorie de probabilité et du processus stochastique, nécessaires à une analyse des vibrations aléatoires. La relation entrée-sortie donnant la réponse stationnaire d'un système à un degré de liberté est étudiée dans ce chapitre, avec prise en compte de l'effet de la réponse transitoire dans la réponse globale de l'oscillateur.

Le chapitre III présente la méthode des statistiques des pics ordonnés développée par Gupta et Trifunac (1988). Cette méthode permet d'obtenir la distribution des probabilités des différents pics d'un processus stationnaire lorsque les pics sont ordonnés de manière décroissante selon leurs amplitudes.

Dans le chapitre IV, des méthodes analytiques pour la détermination de la densité spectrale de puissance de l'action sismiques sont étudiés. Outre la forme analytique de la densité spectrale de puissance de Kanai-Tajimi, le calcul de la densité spectrale de puissance directement à partir du spectre de Fourier du mouvement fort, en le considérant comme stationnaire sur une durée déterminée, est examiné. Une méthode plus efficace, permettant de déterminer la densité spectrale de puissance à partir d'un spectre de réponse donné, est développée. La validité de chaque méthode ainsi que leur capacité à préserver les caractéristiques du mouvement fort est examinée à travers des applications sur des accélérogrammes de séismes réels ainsi que des spectres de calcul. Une investigation sur les effets liés aux conditions locales du sol, la magnitude et à la distance épacentrale sur la densité spectrale de puissance est menée en considérant plusieurs modèles de spectres de réponses prenant en compte ces effets.

Dans le chapitre V on utilise le calcul des DSP compatibles pour calculer des accélérogrammes qui donneront un spectre moyen comparable avec le spectre cible pour des séismes réels dans un premier temps ainsi que les spectres cibles normalisés et en fin les

spectres règlementaires.

Enfin le chapitre VI est consacré aux conclusions principales et à des perspectives pour de futures recherches.

CHAPITRE 2

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA THEORIE DES VIBRATIONS ALEATOIRES

CHAPITRE 2

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA THEORIE DES VIBRATIONS ALEATOIRES

1. Introduction

L'étude des propriétés statistiques nécessaires à la caractérisation d'un phénomène aléatoire relève de la théorie des vibrations aléatoires. Ces dernières années, la théorie des processus aléatoires c'est largement développée et constitue le fondement pour l'analyse stochastique des structures.

Historiquement, les premières tentatives d'application de la théorie des vibrations aléatoires dans l'analyse des structures datent du début des années 50, pour l'étude des vibrations induites par les jet-moteurs sur les panneaux du fuselage des avions à réaction. Le domaine d'application de la théorie des vibrations aléatoires c'est rapidement étendu aux différentes disciplines de la mécanique des structures, entre autre le génie civil, principalement pour l'étude de la réponse des structures aux sollicitations aléatoires et complexes tel que le vent, les vagues marines, et les mouvements sismiques.

Aujourd'hui, la théorie des vibrations aléatoires représente un des outils de base dans le génie parasismique. La réponse des structures linéaires à des processus gaussiens a été pleinement explorée, et des algorithmes de calcul sont maintenant incorporés dans des codes informatiques et qui sont actuellement à usage commun.

Les outils de la théorie des vibrations aléatoires exposés dans ce chapitre, donnent la possibilité d'étudier des systèmes dynamiques simples, et d'obtenir des informations sur les statistiques des paramètres de sortie, indispensable à l'évaluation de leur niveau de fiabilité.

2. Processus aléatoire

En dynamique, beaucoup de phénomènes physiques sont modélisés par des fonctions dépendant du temps, de l'espace,...etc. Si la quantité qui nous intéresse est le résultat d'un événement aléatoire, alors la fonction qui le décrit sera, elle aussi, aléatoire. Une fonction aléatoire est appelée un processus aléatoire (P.A) quand elle est fonction d'un seul paramètre t (en particulier quand t indique le temps), et un champ aléatoire quand les variables sont plus

d'une. Les champs aléatoires sont essentiellement des fonctions aléatoires multidimensionnelles c'est-à-dire dépendant de plus d'un paramètre, comme dans le cas des fonctions qui dépendent des coordonnées spatiales (x, y, z) .

Si $X(t)$, $t \in T$, indique un processus aléatoire, un échantillon particulier du processus est noté par la fonction $x(t)$. Chaque échantillon (c'est à dire chaque réalisation d'un phénomène aléatoire) est différent d'un autre car il dépend de circonstances uniques qui ne se répéteront pas à l'occasion d'autres mesures. Cependant, tous les échantillons ont un certain nombre de traits communs qui s'expriment à travers les mêmes propriétés statistiques.

3. Caractérisation d'un processus aléatoire

3.1. Fonction de densité de probabilité

D'une manière générale, pour caractériser les processus aléatoires de façon complète dans le sens probabiliste, on définit une valeur de la probabilité à chaque élément $x(t)$ de $X(t)$. Pour une valeur donnée du paramètre t , le processus se réduit à une variable aléatoire (V.A) $X(t)$, qui est complètement décrite par sa *fonction de densité de probabilité*, $f_X(x, t)$. Pour un nombre fini $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ des valeurs de $t \in T$, on a n V.A: $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, ..., $X_n = X(t_n)$, qui sont complètement caractérisées par leur fonction de densité de probabilité conjointe.

Un processus stochastique est défini par conséquent par une infinité de fonctions de densité conjointes relatives à chaque nombre fini du paramètre t . La distribution associée à n points le long de l'axe t , est appelée *densité d'ordre n*

$$\begin{array}{ll} f_X(x, t) & \text{d'ordre 1} \\ f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) & \text{d'ordre 2} \\ \vdots & \\ f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) & \text{d'ordre } n \end{array}$$

Toutes ces densités sont des fonctions non négatives et symétriques par rapport à leurs arguments. Elles vérifient la condition de normalisation suivante :

$$\underbrace{\iiint}_{n \text{ fois}} f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad (2.1)$$

3.2. Moyenne et autocorrélation d'un processus aléatoire

Une deuxième alternative de caractérisation d'un processus aléatoire consiste à définir les moments conjoints d'ordre 1, 2 ..., n comme suit :

$$\begin{aligned}
E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx && \text{ordre 1} \\
E[X(t_1)X(t_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 && \text{ordre 2} \\
&\vdots && \vdots \\
E[X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n)] &= \int \int \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \cdots x_n f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \cdots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n && \text{ordre } n
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Les deux premiers moments sont d'une importance pratique considérable. Ils sont désignés respectivement par *la moyenne* et *la fonction d'autocorrélation*. Ils contiennent les informations les plus importantes du processus aléatoire : la tendance et la dispersion.

La moyenne ou *valeur attendue* d'un processus est une fonction de t , et dépend de la distribution d'ordre 1 seulement:

$$m_X = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x, t) dx \tag{2.3}$$

La fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire est définie comme le moment conjoint (d'ordre deux) entre les valeurs du processus à deux instants t_1 et t_2 . Elle est donc fonction de t_1 et t_2 , et obtenu à partir de la fonction de densité de probabilité d'ordre deux comme suit :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \tag{2.4}$$

Le moment central conjoint d'ordre deux est appelée *la fonction d'autocovariance*.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - m_{X1})(X(t_2) - m_{X2})] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - m_{X1}) (x(t_2) - m_{X2}) f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

avec : $m_{X1} = m_X(t_1)$ et $m_{X2} = m_X(t_2)$

L'autocorrélation et l'autocovariance sont reliées par l'expression :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - m_{X1})(X(t_2) - m_{X2})] \\
&= R_{XX}(t_1, t_2) - m_{X1} m_{X2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

La fonction d'autocorrélation ne change pas si les arguments sont inter-changés

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2, t_1) \tag{2.7}$$

de plus on a :

$$R_{XX}^2(t_1, t_2) \leq R_{XX}(t_1, t_1) R_{XX}(t_2, t_2) \quad (2.8)$$

D'autres fonctions utiles sont reliées aux deux premiers moments sont :

la variance

$$\sigma_X^2 = E[(X(t) - m_X)^2] \quad (2.9)$$

l'écart type

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X(t) - m_X)^2]} \quad (2.10)$$

et le coefficient de corrélation

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma_{X1} \cdot \sigma_{X2}} \quad (2.11)$$

Par ailleurs, lorsqu'il s'agit de deux processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$, la dépendance statistique qui les relie peut s'exprimer à travers la *fonction d'intercorrélation* définie par :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot Y(t_2)] \quad (2.12)$$

et la fonction d'intercovariance

$$\Gamma_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_{X1})(Y(t_2) - m_{Y2})] \quad (2.13)$$

Le coefficient d'intercorrélation

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_{X1} \cdot \sigma_{Y2}} \quad (2.14)$$

4. Processus stationnaire et processus ergodique

4.1. Processus stationnaire

Un processus aléatoire est défini stationnaire si ses propriétés probabilistes obtenues pour l'ensemble, ne dépendent que des temps relatifs et non absolus. Dans ce cas, la densité de probabilité décrivant le processus reste invariante à une translation dans le temps. Cela implique :

$$\begin{aligned}
f_X(x_1, t_1) &= f_X(x_1, t_1 + \tau) \\
f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) &= f_X(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau) \\
&\vdots \\
f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= f_X(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Un processus qui satisfait l'équation (2.15) est dit *strictement stationnaire*. Un processus *faiblement stationnaire* ou *stationnaire au sens large*, est celui dont la moyenne est constante et la fonction d'autocorrélation dépend seulement de la variable $\tau = t_2 - t_1$

$$\begin{aligned}
E[X^n(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x, t) dx = \text{Constante} \\
R_{XX}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_X(\tau)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Un processus strictement stationnaire est aussi stationnaire au sens large, par contre l'inverse est généralement non vérifié.

Les processus aléatoires utilisés en engineering ont toujours un début et une fin et ne peuvent donc pas être vraiment stationnaires, mais pour des considérations pratiques, il est très souvent adéquat de supposer que le processus est stationnaire pour l'essentiel de la durée, ou bien il peut être divisé en plusieurs tranches qui sont approximativement stationnaires (Newland 1984).

4.2. Processus ergodique

Considérons un processus stationnaire $X(t)$, sa moyenne temporelle est définie par :

$$\langle X(t) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \tag{2.17}$$

Un processus est dit ergodique, si en plus de la stationnarité, les moyennes temporelles, sur un échantillon, et les moyennes d'ensemble sont identiques.

Un processus est dit ergodique dans la moyenne si :

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \tag{2.18}$$

Un processus est dit ergodique dans la corrélation si :

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t)X(t + \tau) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt \tag{2.19}$$

4.3. Processus Gaussien

Une V.A est dite gaussienne si elle a la fonction de densité de probabilité suivante

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x(t)-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (2.20)$$

On peut facilement vérifier que m_X est la moyenne et que σ_X est l'écart type de $X(t)$. Par conséquent la distribution gaussienne est complètement définie par ces deux paramètres. On appelle *distribution gaussienne unitaire*, la distribution qui correspond à $\sigma_X = 1$ et $m_X = 0$.

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x(t)^2}{2}} \quad (2.21)$$

Un vecteur $\{X\}$ est gaussien, si la densité commune de ses composants est donnée par l'expression

$$f_X(\{X\}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |[V]|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\{X\} - \{m_X\})^T [V]^{-1} (\{X\} - \{m_X\})\right] \quad (2.22)$$

où $\{m_X\}$ est le vecteur des moments et $[V]$ la matrice des covariances de $\{X\}$.

Sur la base des propriétés citées plus haut, un vecteur de n variables gaussiennes avec une matrice de corrélation $[V]$ peut être représenté par une combinaison linéaire de n V.A indépendantes.

Un processus aléatoire réel est dit Gaussien si les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement gaussiennes, pour toutes les valeurs de t_1, t_2, \dots, t_n .

5. Décomposition spectrale d'un processus aléatoire

5.1. Transformée de Fourier

Soit une fonction réelle $h(t)$, sa transformée de Fourier est définie par :

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.23)$$

où $H(\omega)$ constitue l'amplitude spectrale de la fonction considérée. L'existence de $H(\omega)$ est garantie si $h(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire si l'intégrale suivante a une valeur finie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (2.24)$$

La transformée inverse est définie par :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.25)$$

La notion de transformée de Fourier sera utilisée afin de définir la décomposition spectrale d'un processus aléatoire stationnaire $X(t)$.

5.2. Fonction de densité spectrale de puissance

La fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire dépend d'une seule variable : le décalage du temps entre deux instants choisis. La transformée de Fourier de cette fonction est appelé la *densité spectrale de puissance* (DSP) du processus

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.26)$$

Par symétrie, la transformée de Fourier inverse de la DSP, donne la fonction d'autocorrélation

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.27)$$

Les deux relations ci-dessus sont appelées relations de *WIENER-KHINTCHINE*. La fonction d'autocorrélation étant une fonction symétrique définie positive, sa DSP est aussi réelle, symétrique et définie positive. La DSP $S_{XX}(\omega)$ donne une indication sur la décomposition spectrale d'un signal. Elle décrit la répartition fréquentielle de l'énergie moyenne du processus sur toute la gamme de fréquences considérée.

Un signal peut être caractérisé par une frange de fréquences large ou étroite. A ce titre, un processus ayant un contenu spectral large ou étalé est dit *processus à Bande large (Wide Band)*, tandis que celui dont le contenu spectral est réduit ou étroit est dit *processus à Bande étroite (Narrow Band)*.

Le fait que $S_{XX}(\omega)$ soit défini pour $\omega \in]-\infty, \infty [$ avec une symétrie par rapport à 0, a motivé l'introduction de la *densité spectrale unilatérale* $G_{XX}(\omega)$ définie uniquement pour les valeurs de $\omega \geq 0$ comme suit :

$$G_{XX}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (2.28)$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \quad (2.29)$$

L'intégral de la DSP sur l'axe réel donne la fonction d'autocorrélation pour $\tau = 0$, qui n'est autre que la variance du processus.

$$R_{XX}(0) = E[X^2] = \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \, d\omega \quad (2.30)$$

La DSP croisée de deux processus aléatoire $X(t)$ et $Y(t)$ est définie par :

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau \quad (2.31)$$

Elle existe si $S_{XX}(\omega)$ et $S_{YY}(\omega)$ existent. $S_{XY}(\omega)$ est généralement complexe et satisfait la relation:

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) \text{ puisque } R_{XY}(\tau) = -R_{YX}(\tau) \quad (2.32)$$

où : * indique le complexe conjugué.

Un processus stationnaire dont la DSP est une constante S_0 , est appelé *bruit blanc* (B.B).

$$S_{XX}(\omega) = S_0 \quad (2.33)$$

D'après l'équation (2.30) sa fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$R_0(\tau) = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} \, d\omega = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (2.34)$$

où $\delta(\)$ désigne la fonction de Dirac.

A partir de l'équation (2.34), on obtient $R_0(\tau) = 0$ pour $\tau \neq 0$. Donc pour un B.B, la corrélation entre deux instants différents est nulle, alors que la variance du processus est infinie, comme on peut le voir en remplaçant $S(\omega)$ par une constante dans l'équation (2.29).

Un bruit blanc ne peut pas exister physiquement, mais il représente une idéalisation utile pour plusieurs phénomènes aléatoires caractérisés par une très courte mémoire. Sa simplicité permet aux solutions approximatives d'être obtenues pour divers problèmes. Pour les raisons ci-dessus, le B.B joue un rôle important dans l'analyse des vibrations aléatoires.

6. Réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation aléatoire stationnaire

6.1. Relation entrée–sortie d'un oscillateur linéaire à un degré de liberté

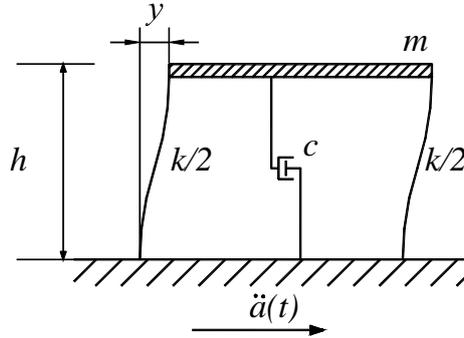


Fig. 2.1- Oscillateur à un degré de liberté

L'équation du mouvement d'un oscillateur simple de masse m , de facteur d'amortissement c et d'une raideur k , et soumis à une accélération d'appuis $\ddot{a}(t)$ (Fig. 2.1) s'écrit :

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = -\ddot{a}(t) \quad (2.35)$$

ω_n désigne la fréquence propre et ξ la fraction de l'amortissement critique définies par :

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \quad (2.36)$$

La solution de l'équation (2.35) pour des conditions initiales nulles s'écrit sous la forme d'un produit de convolution comme suit (Preumont, 1990):

$$y(t) = \int_0^t \ddot{a}(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \cdot \ddot{a}(t-\tau) d\tau = h * \ddot{a} \quad (2.37)$$

Cette expression exprime la relation entrée sortie dans le domaine temporel d'un système linéaire à un degré de liberté soumis à une excitation d'appuis $\ddot{a}(t)$ à support positif ($\ddot{a}(t) = 0$ pour $t < 0$) et $h(t-\tau)$ exprime la réponse impulsionnelle du système qui est donnée par :

$$h(t-\tau) = -\frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d(t-\tau) \quad (2.38)$$

où $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ désigne la fréquence propre amortie.

La réponse complète peut alors être considérée comme une succession d'impulsions, chacune produisant une réponse du type exprimé dans l'équation précédente. En intégrant de 0 à t , on obtient la réponse du système linéaire à l'instant t :

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{a}(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.39)$$

L'expression est connue sous le nom d'*intégral de Duhamel* pour les systèmes amortis (Clough et Penzien, 1975).

D'un autre coté, si l'accélération est de la forme $\ddot{a}(t) = \ddot{A}(\omega)e^{i\omega t}$ et que la réponse est de la forme $y(t) = Y(\omega)e^{i\omega t}$, l'équation (2.35) se transforme en :

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot \ddot{A}(\omega) \quad (2.40)$$

où $H(\omega)$ est la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté, donnée par :

$$H(\omega) = \frac{-1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_n\omega} \quad (2.41)$$

L'équation (2.40) exprime la relation entrée sortie dans le domaine fréquentiel d'un système linéaire à un degré de liberté. En comparant l'équation (2.37) avec l'équation (2.40) on peut voir que $H(\omega)$ est proportionnelle à la transformée de Fourier de $h(t)$ comme suit :

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.42)$$

ou bien

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = h(t) \quad (2.43)$$

Ainsi, la réponse $y(t)$ d'un système à un degré de liberté, de fréquence propre ω_n et d'un amortissement critique ξ , peut être exprimée de manière équivalente dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel par les relations suivantes :

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot \ddot{a}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \cdot \ddot{A}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.44)$$

6.2. Réponse stationnaire à une excitation aléatoire stationnaire.

On suppose que l'excitation $\ddot{a}(t)$ est représentée par un processus aléatoire stationnaire $\ddot{A}(t)$ à moyenne nulle. La réponse devient aussi un processus à moyenne nulle $Y(t)$, à qui les propriétés du moment d'ordre deux, c'est-à-dire, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance, seront sujets aux dérivations suivantes :

En prenant en compte, que la fonction $h(\tau)$ dans l'équation (2.37) devient nulle quand

l'argument est négatif et en procédant un changement de variables, l'équation (2.37) peut s'écrire comme suit :

$$Y(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot \ddot{A}(t-\tau) \, d\tau \quad (2.45)$$

Pour aboutir à $R_{YY}(t_1, t_2) = E[Y(t_1) Y(t_2)]$, il est plus commode de construire en premier la fonction d'intercorrélation entre $Y(t)$ et $\ddot{A}(t)$. En utilisant l'équation (2.45), on obtient

$$R_{Y\ddot{A}}(t_1, t_2) = E[\ddot{A}(t_1) Y(t_2)] = \int_0^\infty h(u) \cdot R_{\ddot{A}\ddot{A}}(\tau-u) \, du \quad (2.46)$$

Nous obtenons maintenant l'autocorrélation en faisant usage des équations (2.45) et (2.46) :

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1) Y(t_2)] = \int_{-\infty}^\infty h(u) \cdot E[\ddot{A}(t_1-u) Y(t_2)] \, du \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty h(u) \cdot h(v) \cdot R_{\ddot{A}\ddot{A}}(t_1-t_2-u-v) \, du \, dv \\ &= \int_{-\infty}^\infty h(u) \cdot R_{Y\ddot{A}}(t_1-t_2-u) \, du \end{aligned} \quad (2.47)$$

Par application de la transformée de Fourier sur l'équation (2.46) on obtient :

$$S_{Y\ddot{A}}(\omega) = H(\omega) \cdot S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) \quad (2.48)$$

Finalement, la DSP du processus de la réponse $Y(t)$ est obtenue en appliquant la transformée de Fourier à l'équation (2.47) et en utilisant le résultat de l'équation (2.48). On obtient alors :

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) \quad (2.49)$$

L'expression (2.49) indique que la DSP de la réponse est obtenu simplement en multipliant la DSP du processus d'entrée par le carré de la fonction de transfert du système.

La transformée de Fourier inverse de $S_{YY}(\omega)$ donne la fonction d'autocorrélation de la réponse comme suit :

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) e^{i\omega\tau} \, d\omega \quad (2.50)$$

Pour $\tau = 0$, on obtient la variance du processus de la réponse :

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) \, d\omega \quad (2.51)$$

Comme mentionné plus haut, si le processus d'entrée est gaussien, la linéarité de l'équation (2.49) assure que le processus de la réponse est aussi gaussien. Dans ce cas, le processus est complètement caractérisé par $R_{YY}(\tau)$ ainsi que par sa transformée $S_{YY}(\omega)$.

6.3. Réponse transitoire à une excitation aléatoire stationnaire.

La réponse $Y(t)$ d'un système initialement au repos, à une excitation aléatoire $\ddot{A}(t)$, est donnée par l'équation (2.45). Les moments seront alors donnés par

$$E[Y(t_1)\dots Y(t_n)] = \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} E[\ddot{A}(\tau_1)\dots \ddot{A}(\tau_n)] \cdot h(t_1 - \tau_1)\dots h(t_n - \tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 \int_0^{\infty} \quad (2.52)$$

Dans le cas où l'excitation est faiblement stationnaire, on a :

$$E[\ddot{A}(\tau_1)\ddot{A}(\tau_2)] = R_{\ddot{A}\ddot{A}}(\tau_1 - \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)} d\omega \quad (2.53)$$

$$R_{YY}(\tau_1 - \tau_2) = E[Y(\tau_1)Y(\tau_2)] = \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} R_{\ddot{A}\ddot{A}}(\tau_1 - \tau_2) h(t - \tau_1) h(t - \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (2.54)$$

En combinant cette équation avec l'équation (2.52) on obtient la fonction d'autocorrélation de la réponse :

$$R_{YY}(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)} h(t - \tau_1) h(t - \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\omega \quad (2.55)$$

puis en intégrant sur τ_1 et τ_2 , on obtient :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) \tilde{H}(\omega, t_1) \tilde{H}^*(\omega, t_2) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega \quad (2.56)$$

où

$$\tilde{H}(\omega, t) = \int_0^t h(\alpha) e^{-i\omega\alpha} d\alpha \quad (2.57)$$

La moyenne quadratique $E[Y^2(t)]$ peut être obtenue en posant $t_1 = t_2 = t$ dans l'équation (2.56).

On obtient alors :

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) |\tilde{H}(\omega, t)|^2 d\omega \quad (2.58)$$

Ainsi, la DSP de la réponse $y(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$S_{YY}(\omega, t) = |\tilde{H}(\omega, t)|^2 S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) \quad (2.59)$$

$\tilde{H}(\omega, t)$ est appelée fonction de transfert transitoire. Elle existe toujours pour un système amorti. Pour un oscillateur linéaire elle est donnée par (Caughey et Stumpf, 1961) :

$$\tilde{H}(\omega, t) = H(\omega) \left[e^{-i\omega t} - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi\omega_n - i\omega}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right] \quad (2.60)$$

on aura alors :

$$\begin{aligned} |\tilde{H}(\omega, t)|^2 = |H(\omega)|^2 & \left\{ \left[e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - \cos \omega t \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[e^{-\xi\omega_n t} \frac{\omega}{\omega_d} \sin \omega_d t - \sin \omega t \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

On observera que $\tilde{H}(\omega, t)$ tend vers $H(\omega)$ quand t est grand, cela est d'autant plus rapide que l'amortissement est important. Après convergence de $\tilde{H}(\omega, t)$ vers $H(\omega)$, l'équation (2.56) ne dépendra que de $t_1 - t_2$, ce qui indique que la réponse devient stationnaire.

7. Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons vu que pour la classe des systèmes linéaires, la relation entrée-sortie s'exprime par des produits de convolution dans le domaine temporel et des multiplications dans le domaine fréquentiel. Il s'ensuit que la plupart des traitements s'effectuent plus simplement dans le domaine fréquentiel. La facilité avec laquelle la relation entrée-sortie s'exprime dans le domaine fréquentiel est d'ailleurs une caractéristique attrayante des systèmes linéaires. En effet, la réponse d'un système linéaire à une excitation Gaussienne est également Gaussienne. De tels processus sont entièrement caractérisés par leurs propriétés statistiques du deuxième ordre, en occurrence la moyenne et la fonction d'autocorrélation ou de densité spectrale de puissance.

CHAPITRE 3

STATISTIQUES DES PICS ORDONNES

CHAPITRE 3

STATISTIQUES DES PICS ORDONNES

1. Introduction

En utilisant la probabilité de distribution des maxima d'un processus stochastique stationnaire, plusieurs formulations ont été développées sur la distribution des probabilités des différents pics d'un processus stationnaire lorsque les pics sont ordonnés de manière décroissante selon leurs amplitudes. Amini et Trifunac (1981) ont développé une distribution de probabilité des pics en les considérant comme des événements statistiquement indépendants. Gupta et Trifunac (1988) ont amélioré la formulation de Amini et Trifunac afin d'obtenir des valeurs plus précises des pics les plus importants. Basu et *al* (1996, 1996a) ont modifié la distribution de probabilité des pics ordonnés pour prendre en compte la dépendance entre les pics en utilisant la théorie de Markov.

Nous présenterons dans ce qui suit, la formulation développée par Gupta et Trifunac (1988) qui donne de bonnes estimations de la valeur des pics ordonnés pour un processus stochastique stationnaire et que l'hypothèse d'indépendance des pics ordonnés reste valable aussi pour les processus à bande étroite (Gupta et Trifunac, 1998b).

2. Taux de franchissement d'un seuil a (Formule de Rice)

Pour un processus Gaussien stationnaire $X(t)$ à moyenne nulle, le taux moyen de franchissement à pente positive d'un seuil a est donné par (Preumont, 1990) :

$$\alpha_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} e^{\left(-\frac{a^2}{\sigma_X^2}\right)} \quad (3.1)$$

où $\sigma_X^2 = E[X^2(t)]$ et $\sigma_{\dot{X}}^2 = E[\dot{X}^2(t)]$ sont les variances de $X(t)$ et $\dot{X}(t)$ respectivement, lesquelles sont définies en fonction de la DSP unilatérale de $X(t)$ comme suit :

$$\sigma_X^2 = \int_0^\infty G_{XX}(\omega) d\omega \quad \text{et} \quad \sigma_{\dot{X}}^2 = \int_0^\infty \omega^2 G_{XX}(\omega) d\omega \quad (3.2)$$

En définissant le moment d'ordre n de la DSP $G_{XX}(\omega)$ par :

$$m_n = \int_0^\infty \omega^n G_{XX}(\omega) d\omega ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

l'équation (3.2) peut s'écrire

$$\alpha_a^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{\left(-\frac{a^2}{m_0}\right)} \quad (3.4)$$

le moment d'ordre zéro, m_0 , est égal à la moyenne quadratique du processus $x(t)$. Si on introduit l'amplitude normalisée η tel que

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{m_0}} \quad (3.5)$$

alors le taux de franchissement à pente positive d'un seuil η dans le processus $x(t)$ normalisé par l'amplitude moyenne quadratique est donné par :

$$\alpha_\eta^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)} \quad (3.6)$$

Étant donné que la distribution d'un processus Gaussien est symétrique, alors le nombre moyen de fois pour lequel le processus normalisé $x(t)$ va dépasser le seuil $-\eta$ (c'est-à-dire dans le sens opposé) est aussi le même.

3. Distribution des maxima

Pour obtenir la probabilité de distribution des maxima locaux d'un processus aléatoire $X(t)$, Cartwright et Longuet-Higgins (1956) ont représenté le processus comme étant la somme d'un nombre infini de fonctions sinusoïdales à phases aléatoires comme suit :

$$X(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.7)$$

où ω_n sont les fréquences circulaires, φ_n des phases aléatoires uniformément distribuées entre 0 et 2π , et les amplitudes C_n sont de telle sorte que pour un petit intervalle $d\omega$, on a :

$$\sum_{\omega_n=\omega}^{\omega+d\omega} \frac{1}{2} C_n^2 = S(\omega) d\omega \quad (3.8)$$

où $S(\omega)$ représente le spectre d'énergie de $X(t)$.

En considérant que le processus $X(t)$ est deux fois dérivable, un maximum se produit quand $\dot{X}(t)=0$ et $\ddot{X}(t)<0$. La probabilité que ça se produise simultanément sur un intervalle

$[x, x + dx]$ est donnée par :

$$dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} \quad (3.9)$$

où $f(x, \dot{x}, \ddot{x})$ est la densité de probabilité conjointe du processus $X(t)$ et de ses dérivées $\dot{X}(t)$ et $\ddot{X}(t)$. A partir de l'équation (3.7) on a :

$$\dot{X}(t) = -\sum_n C_n \omega_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.10)$$

$$\ddot{X}(t) = -\sum_n C_n \omega_n^2 \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.11)$$

En considérant $X(t)$ comme un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle, la densité de probabilité conjointe de $X(t)$, $\dot{X}(t)$ et $\ddot{X}(t)$ s'exprime à partir de l'équation (2.22) comme suit:

$$f(\{X\}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\mathbf{V}|^{1/3}} \exp\left(-\frac{1}{2} \{X\}^T \mathbf{V}^{-1} \{X\}\right) \quad (3.12)$$

avec $\{X\} = \{x \ \dot{x} \ \ddot{x}\}^T$ et $\mathbf{V} = E[\{X\} \{X\}^T] = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{pmatrix}$

\mathbf{V} représente la matrice des covariances dans laquelle m_0 , m_2 et m_4 désignent les moments spectraux d'ordre 0, 2 et 4, respectivement qui sont donnés par :

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S(\omega) d\omega \quad ; \quad n = 0, 2, 4 \quad (3.13)$$

Le taux moyen total des maxima est donné par :

$$\bar{N} = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} \quad (3.14)$$

en utilisant l'équation (3.12) dans l'équation (3.14) on obtient :

$$\bar{N} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

Si le Processus $X(t)$ a une durée totale T , alors le nombre total de maxima sera donné par :

$$N = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

La fréquence moyenne des maxima sur un intervalle $[x, x + dx]$ s'écrit :

$$F(x) dx = dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} \quad (3.17)$$

La probabilité de distribution des maxima de $X(t)$ est obtenue en divisant l'équation (3.17) par l'équation (3.14) et en normalisant le résultat par $\sqrt{m_0}$. On obtient alors :

$$p(\eta) = \sqrt{m_0} \frac{F(x)}{N} \quad (3.18)$$

en utilisant l'équation (3.12), on aura :

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\varepsilon \cdot e^{(-\eta^2/2\varepsilon^2)} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot \eta \cdot e^{(-\eta^2/2)} \cdot \int_{-\infty}^{\eta \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}} e^{(-x^2/2)} dx \right] \quad (3.19)$$

où η désigne l'amplitude normalisée par l'amplitude moyenne quadratique a_{rms} :

$$\eta = \frac{x(t)}{a_{rms}} \quad (3.20)$$

avec

$$a_{rms} = \sqrt{m_0} \quad (3.21)$$

et ε est un paramètre compris entre 0 et 1 définit comme suit :

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (3.22)$$

Le paramètre ε est une mesure de la largeur de bande du spectre fréquentiel du processus $x(t)$ relative à sa fréquence prédominante. Pour $\varepsilon = 0$ la distribution (3.19) devient une distribution de Rayleigh :

$$p(\eta) = \eta e^{(-\eta^2/2)} \quad \eta \geq 0 \quad (3.23)$$

Pour $\varepsilon = 1$, la distribution devient une distribution Gaussienne.

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\eta^2/2)} \quad (3.24)$$

La figure (3.1) montre la FDP des maxima pour différentes valeurs de ε .

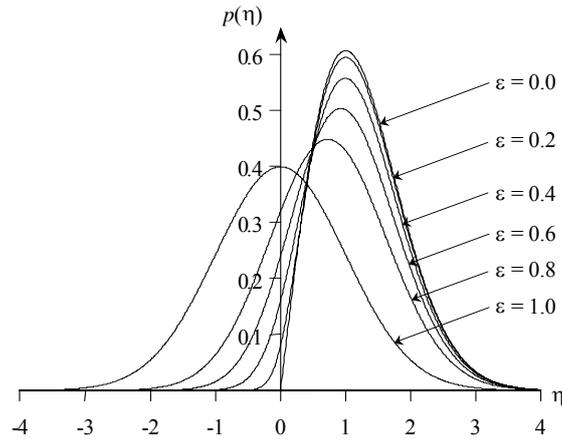


Fig. 3.1– Fonction de densité de probabilité des maxima pour différentes valeurs de ε .

La fonction de distribution cumulative pour que l'amplitude du pic normalisé dépasse une valeur η , peut être définie par :

$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\eta/\varepsilon}^{\infty} e^{(-x^2/2)} dx + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot e^{(-\eta^2/2)} \cdot \int_{-\infty}^{\eta \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}} e^{(-x^2/2)} dx \right] \quad (3.25)$$

La figure (3.2) montre la FDC pour que la valeur du maximum soit plus grande que η pour différentes valeurs de ε .

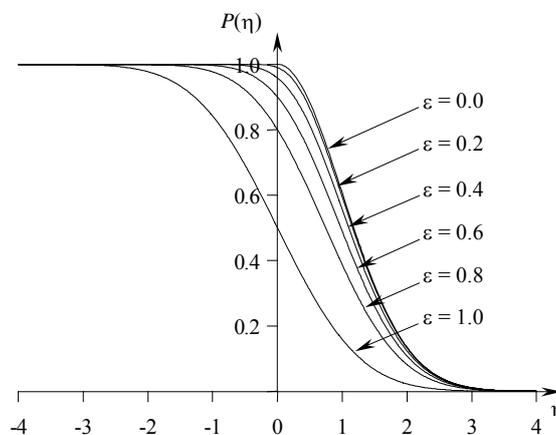


Fig. 3.2– Fonction de distribution cumulative pour que la valeur du maximum soit plus grande que η pour différentes valeurs de ε

Les intégrales (3.19) et (3.25) peuvent être évaluées en utilisant la fonction erreur définie comme suit (Press et al, 1986) :

$$erf(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad \text{pour } x \geq 0 \quad \text{et } erf(x) = -erf(-x) \quad \text{pour } x < 0 \quad (3.26)$$

alors on peut écrire

$$p(\eta) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}\right)} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot \eta \cdot e^{\left(\frac{\eta^2}{2}\right)} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right] \right\} & \dots \eta \geq 0 \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}\right)} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot \eta \cdot e^{\left(\frac{\eta^2}{2}\right)} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{-\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right] \right\} & \dots \eta < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$P(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \right] + \frac{1}{2} (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot e^{\left(\frac{\eta^2}{2}\right)} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right] \right\} & \dots \eta \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{-\eta}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \right] + \frac{1}{2} (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot e^{\left(\frac{\eta^2}{2}\right)} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{-\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right] \right\} & \dots \eta < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

4. Statistiques des pics ordonnés

4.1. Probabilité de distribution du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné

Soit a_1, a_2, \dots, a_N les variables aléatoires représentant les N pics d'une fonction aléatoire $x(t)$ (Fig. 3.3).

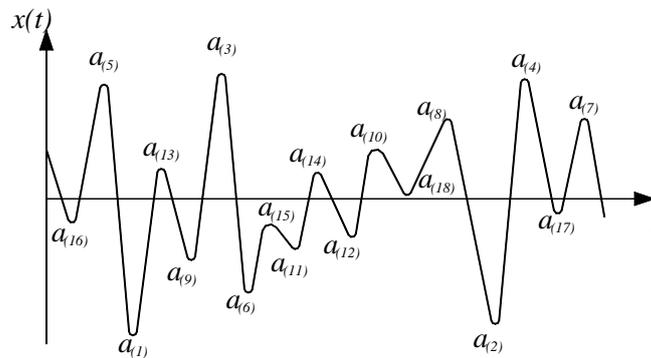


Fig. 3.3- Exemple d'une fonction aléatoire $x(t)$ avec $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(N)}$ respectivement les pics du 1^{er} ordre, 2^{ème} ordre, 3^{ème} ordre, ... $N^{\text{ème}}$ ordre.

La fonction cumulative de distribution $P(\eta)$ de chaque variable est donnée par

$$P(\eta) = \operatorname{Prob}\{a_i > \eta\} = \int_{\eta}^{\infty} p(u) du \quad (3.29)$$

où $p(u)$ est la fonction de densité de probabilité des pics de $x(t)$. Les fonctions de probabilité des pics de $x(t)$ normalisées par rapport à l'amplitude moyenne quadratique, sont données par les équations (3.19) et (3.25).

En arrangeant les pics de manière décroissante selon leurs amplitudes, on obtient les variables suivantes $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(N)}$, avec $a_{(1)} \geq a_{(2)} \geq a_{(3)}, \dots, \geq a_{(N)}$ (fig. 3.3).

grand qu'une valeur particulière de η , ou bien qu'il soit plus petit que cette valeur. Aussi, les pics sont considérés statistiquement indépendants. Donc on peut dire que le déroulement des pics suit la loi de Bernoulli et que la probabilité pour que i des N pics ne dépasseront pas la valeur η est donnée par la distribution binomiale comme suit (Newland, 1984) :

$$= \binom{N}{i} [P(\eta)]^i [1 - P(\eta)]^{N-i} \quad (3.35)$$

En utilisant l'équation (3.35) dans l'équation (3.34) on obtient :

$$F_{(n)}(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{N}{i} [P(\eta)]^i [1 - P(\eta)]^{N-i} \quad (3.36)$$

cette équation donne la probabilité cumulative pour que le $n^{\text{ème}}$ pic parmi les N pics, ne dépasse pas la valeur η . La figure (3.4) montre le tracé de la fonction de probabilité cumulative des cinq premiers pics d'un processus pour $\varepsilon = 0.5$ et $N = 10$.

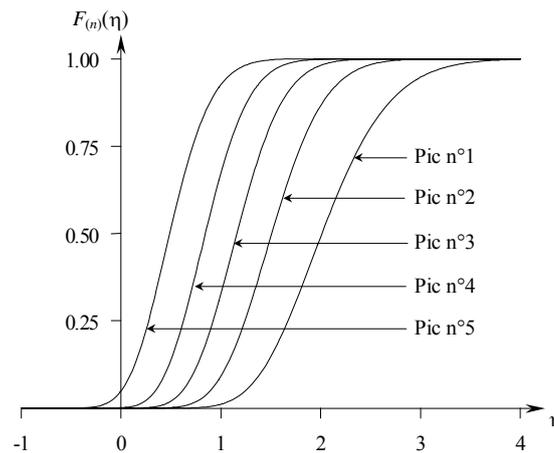


Fig. 3.4- La fonction de distribution cumulative $F_{(n)}(\eta)$ des cinq premiers pics ordonnés pour $\varepsilon = 0.5$ et $N = 10$.

4.2. Valeur la plus probable du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné

A partir de l'équation (3.36), la densité de probabilité du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné est donnée par

$$f_{(n)}(\eta) = -\frac{dF_{(n)}(\eta)}{d\eta} \\ = -\sum_{i=n}^N \binom{N}{i} \left\{ i [P(\eta)]^{i-1} [1 - P(\eta)]^{N-i} - (N - i) [P(\eta)]^i [1 - P(\eta)]^{N-i-1} \right\} \frac{dP(\eta)}{d\eta} \quad (3.37)$$

Puisqu'on a $\frac{dP(\eta)}{d\eta} = -p(\eta)$, l'équation (3.37) peut s'écrire comme suit :

$$f_{(n)}(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{N}{i} \left\{ i [P(\eta)]^{i-1} [1-P(\eta)]^{N-i} - (N-i) [P(\eta)]^i [1-P(\eta)]^{N-i-1} \right\} P(\eta) \quad (3.38)$$

En utilisant les égalités suivantes

$$\binom{N}{i} (N-i) = \binom{N}{i+1} (i+1) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n-1$$

on trouve que :

$$f_{(n)}(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \binom{N}{i} \cdot i \cdot [P(\eta)]^{i-1} [1-P(\eta)]^{N-i} - \binom{N}{i} \cdot (N-i) \cdot [P(\eta)]^i [1-P(\eta)]^{N-i-1} \right\} P(\eta) \quad (3.39)$$

En développant la somme de cette équation on obtient :

$$\begin{aligned} f_{(n)}(\eta) &= \left\{ 0 - \binom{N}{1} (0+1) [P(\eta)]^0 [1-P(\eta)]^{N-0-1} \right\} P(\eta) \\ &+ \left\{ \binom{N}{1} (1) [P(\eta)]^0 [1-P(\eta)]^{N-1} - \binom{N}{2} (2) [P(\eta)]^1 [1-P(\eta)]^{N-2} \right\} P(\eta) \\ &+ \left\{ \binom{N}{2} (2) [P(\eta)]^1 [1-P(\eta)]^{N-2} - \binom{N}{3} (3) [P(\eta)]^2 [1-P(\eta)]^{N-3} \right\} P(\eta) \\ &+ \dots + \left\{ \binom{N}{n-1} (n-1) [P(\eta)]^{n-2} [1-P(\eta)]^{N-n+1} - \binom{N}{n} (n) [P(\eta)]^{n-1} [1-P(\eta)]^{N-n} \right\} P(\eta) \quad (3.40) \end{aligned}$$

Donc, la fonction de densité de probabilité du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné devient :

$$f_{(n)}(\eta) = n \binom{N}{n} [P(\eta)]^{n-1} [1-P(\eta)]^{N-n} P(\eta) \quad (3.41)$$

La valeur la plus probable du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné est la valeur de η pour laquelle $f_{(n)}(\eta)$ est maximale.

La figure (3.5) montre le tracé de densité de probabilité des 5 premiers pics ordonnés d'un processus ayant les paramètres statistiques suivant $\varepsilon = 0.5$ et $N = 10$.

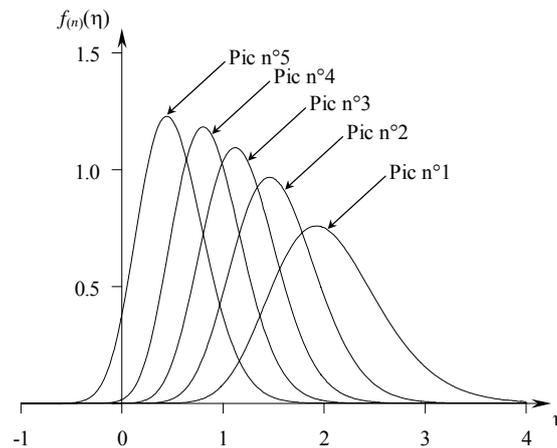


Fig. 3.5- La fonction de densité de probabilité $f_{(n)}(\eta)$ pour les cinq premiers pics ordonnés, $\varepsilon = 0.5$ et $N = 10$.

Pour déterminer la valeur la plus probable de manière précise, on évalue la fonction $f_{(n)}(\eta)$ pour différentes valeurs de η à des intervalles très rapprochés égales à 0.05. En comparant les amplitudes de $f_{(n)}(\eta)$ pour trois points consécutifs, on peut localiser trois points autour du point maximum. Une parabole passant par les trois points localisés, nous permet de localiser la valeur de η pour laquelle la première dérivée de la parabole est nulle. Cette valeur de η représente la valeur la plus probable du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné.

4.3. Valeur attendue du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné

En utilisant la fonction de densité de probabilité $f_{(n)}(\eta)$ donnée par l'équation (3.41), la valeur attendue (moyenne) du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné est donnée par :

$$E[a_{(n)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_{(n)}(\eta) d\eta \quad (3.42)$$

Le calcul de cette équation peut être mené de manière exacte par intégration numérique de l'équation (3.42). Gupta et Trifunac (1998) ont développé une expression approximative qui donne de manière efficace la valeur attendue du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné.

5. Applications numériques

L'applicabilité des procédures décrites dans les paragraphes précédents est examinée à travers des exemples numériques. Quatre enregistrements accélérométriques correspondant aux composantes S90W du séisme d'El-Centro du 18 mai 1940 (Fig.3.6a), N05W du séisme de Parkfield du 27 juin 1966, enregistrée à Cholame Shandon (Fig.3.6b), N90W de la réplique d'El Attaf du séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980 (Fig.3.6c), N90E du séisme de Cherchell du 29 octobre 1989, (Fig.3.6d), ont été choisis à cet effet.

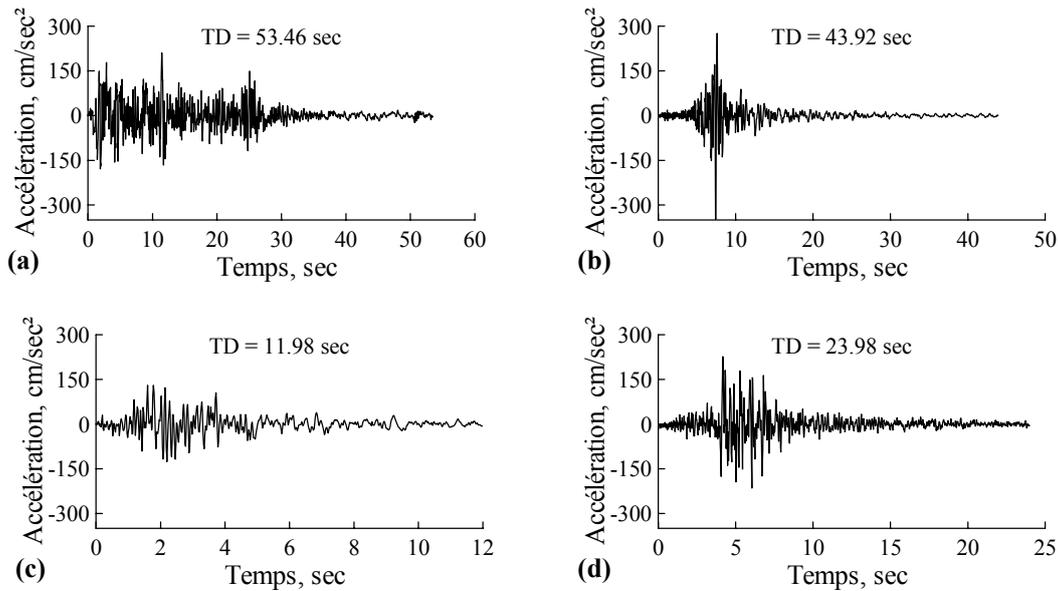


Fig. 3.6- Enregistrements accélérométriques. a) séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b) séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c) séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980*, d) séisme de Cherchell du 29 octobre 1989**.

Ces accélérogrammes ont été utilisés pour le calcul des rapports théoriques, $E[a_{(1)}]/E[a_{(n)}]$, entre le premier pic espéré et les pics espérés d'ordre n . Ces rapports sont ensuite comparés aux rapports des pics réels correspondants, $a_{(1)}/a_{(n)}$.

On procède au calcul des amplitudes attendues, $E[\eta_{(1)}]$, $E[\eta_{(2)}]$, $E[\eta_{(3)}]$, ... des différents pics ordonnés normalisés, à partir de l'équation (3.42). Pour ce faire, on utilise les résultats de Cartwright et Longuet-Higgins (1956) permettant de déterminer le paramètre ε en fonction du rapport ν , qui représente le rapport entre le nombre de pics négatifs et le nombre total de pics de l'accélérogramme, selon la relation suivante :

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (1 - 2\nu)^2} \quad (3.43)$$

Les pics réels $a_{(1)}$, $a_{(2)}$, $a_{(3)}$, ... ainsi que le nombre total de pics N , sont déterminés directement à partir de l'enregistrement accélérométrique.

Les résultats des figures (3.7a) à (3.7d) montrent qu'en général, plusieurs pics d'ordre inférieur qui correspondent au mouvement fort de l'accélérogramme, montrent une bonne concordance avec les pics théoriques espérés. Mais dans certains cas (Fig.3.7b) le rapport $a_{(1)}/a_{(n)}$ remonte très rapidement au dessus du rapport théorique $E[a_{(1)}]/E[a_{(n)}]$. De tels accélérogrammes sont caractérisés par un ou deux pics isolés d'une amplitude très importante qui diminuent brusquement vers les autres pics.

(*) : Séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980 ; réplique de l'Attaf

(**) : Séisme de Cherchell du 29 octobre 1989 ; séisme de Tipaza enregistrement de Cherchell.

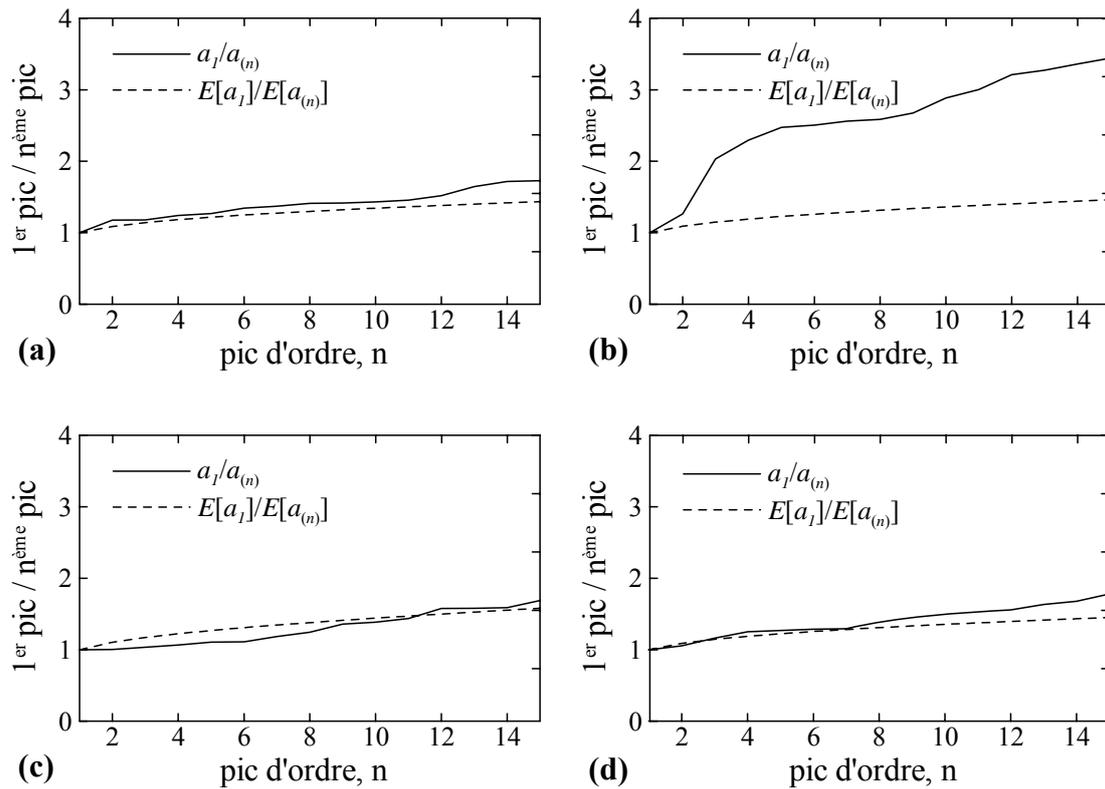


Fig. 3.7– Comparaison du rapport $E[a_{(1)}] / E[a_{(n)}]$ avec le rapport $a_{(1)} / a_{(n)}$ pour les enregistrements accélérométriques de : a) séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b) séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c) séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980, d) séisme de Cherchell du 29 octobre 1989.

6. Conclusions

La plupart des études déjà effectuées sur la réponse stochastique des structures ont considéré les statistiques du pic le plus important seulement. La théorie des statistiques des pics ordonnés présentée dans ce chapitre nous permet non seulement d'estimer l'amplitude du pic le plus important mais aussi les autres pics les plus significatifs de la réponse. La détermination de ces pics dépend de trois paramètres : (i) a_{rms} , la moyenne quadratique des amplitudes de la réponse, (ii) ε , une mesure de la largeur de bande du spectre de réponse, et (iii) N , le nombre total des pics de la réponse.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus avec les hypothèses de la stationnarité et de l'indépendance mutuelle des amplitudes des maxima d'une fonction aléatoire. Il a été observé que les amplitudes des pics obtenus par la formulation de Gupta et Trifunac sont proches des amplitudes des pics réels, surtout pour les pics d'ordre inférieur (les pics les plus importants).

Les valeurs attendues, et les valeurs les plus probables peuvent être utilisées afin de tracer l'amplitude relative spectrale de la réponse maximale ainsi que pour la deuxième, troisième, ... $n^{\text{ème}}$ valeur maximale. Ces valeurs correspondent aussi à l'amplitude maximale qui peut être dépassée une fois, deux fois, ..., n fois durant le temps de vibration d'une structure.

CHAPITRE 4

GENERATION DE DSP COMPATIBLE AVEC UN SPECTRE DE REPONSE

CHAPITRE 4

GENERATION DE DSP COMPATIBLE AVEC UN SPECTRE DE REPONSE

1. Introduction

Dans ce chapitre, plusieurs méthodes de détermination d'une DSP d'un mouvement sismique en vue du calcul dynamique de la réponse stochastique des structures, sont exposées. La théorie de vibrations aléatoires et les statistiques des pics ordonnés présentés dans les chapitres précédents sont exploitées à cet effet.

Outre la représentation analytique de l'action sismique par un bruit blanc ou par un bruit blanc filtré, on a examiné deux méthodes pour lesquelles la DSP est définie de manière à être compatible avec un spectre de réponse donné. Dans la première méthode, la DSP est définie en terme du spectre de Fourier et de la durée stationnaire du mouvement fort. Tandis que dans la deuxième méthode, la DSP est déterminée itérativement à partir d'un spectre de réponse cible. Les résultats obtenus montrent que les spectres de réponse théoriques et les spectres de réponse cibles, sont en excellent accord pour une gamme de fréquences très étendue englobant aussi bien le domaine des basses que celui des hautes fréquences. Cette deuxième approche permet de prendre en considération les effets de la non-stationnarité du mouvement sismique ainsi que celui de la nature transitoire de la réponse dynamique des structures.

2. Représentations de l'action sismique par la densité spectrale de puissance

2.1. Bruit Blanc (White Noise)

Les premiers modèles stochastiques du mouvement fort, supposaient que l'énergie du séisme était uniformément distribuée sur toutes les fréquences considérées (Bycroft, 1960). L'accélération est ainsi représentée par un bruit blanc à bande limitée dont la DSP est égale à une constante jusqu'à une fréquence ω_{\max} , et nulle pour les fréquences supérieures (Fig. 4.1) :

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0 & \text{pour } \omega \in [0, \omega_{\max}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

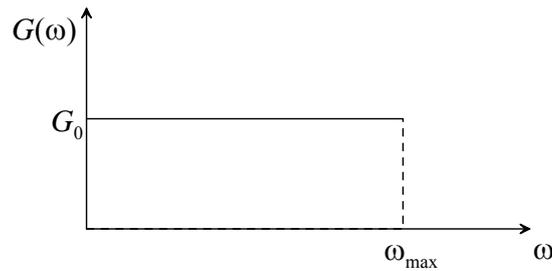


Fig 4.1- Représentation de l'action sismique par un bruit blanc

2.2. Densité spectrale de puissance de Kanai-Tajimi

Une analyse approfondie du mouvement sismique, a montré que l'énergie du séisme n'est pas distribuée uniformément sur toutes les fréquences considérées, mais qu'elle est concentrée dans un intervalle limité de fréquences. C'est pourquoi, en se basant sur les travaux de Kanai (1957) sur le contenu fréquentiel des enregistrements sismiques, Tajimi (1960) a proposé une expression analytique de la DSP de l'accélération sismique.

$$G(\omega) = G_0 \frac{1 - 4\xi_g^2 (\omega/\omega_g)^2}{\left[1 - (\omega/\omega_g)^2\right]^2 + 4\xi_g^2 (\omega/\omega_g)^2} \quad (4.1)$$

où ξ_g et ω_g représentent, respectivement, l'amortissement et la fréquence prédominante du sol et G_0 l'intensité du mouvement fort.

La DSP de Kanai-Tajimi a été largement utilisée pour représenter une excitation sismique stationnaire, et plusieurs études ont été menées pour obtenir les paramètres ξ_g , ω_g et G_0 (Lai, 1982 ; Elghadamsi et al, 1988)

Les figures (4.2a) et (4.2b) montrent respectivement les DSP normalisées de Kanai-Tajimi pour les composantes horizontales et verticales, d'accélérogrammes enregistrés pour trois types de sites : alluvions, alluvions/rocher et rocher. Les paramètres ξ_g , ω_g et G_0 , obtenus par Elghadamsi et al (1988), sont donnés au tableau (4.1).

Tableau 4.1 – Paramètres de Kanai-Tajimi pour des composantes horizontales et verticales d'accélérogrammes enregistrés sur un site d'alluvions, alluvions/rocher et rocher.

	Catégorie de site	G_0	ω_g	ξ_g
Horizontales	Alluvions	0.102	18.35	0.34
	Alluvions / Rocher	0.078	22.87	0.30
	Rocher	0.070	27.02	0.30
Verticales	Alluvions	0.080	26.20	0.46
	Alluvions / Rocher	0.072	29.09	0.46
	Rocher	0.053	38.83	0.46

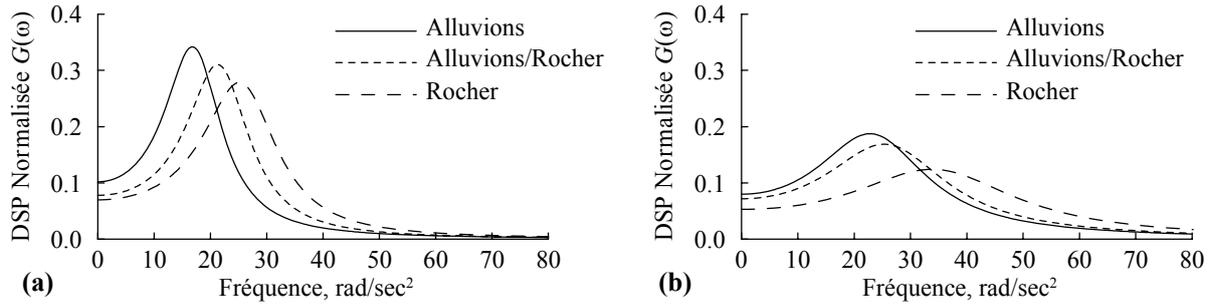


Fig. 4.2- DSP normalisées de Kanai-Tajimi, pour différentes conditions de site. a) composantes horizontales. b) composantes verticales.

2.3. Densité spectrale de puissance de Clough est Penzien

La DSP définie par l'équation (4.1), ne s'annule pas pour une fréquence égale à zéro, cela conduit à des valeurs infinies de la moyenne quadratique de la vitesse et du déplacement du sol. Pour éliminer ce problème, Clough et Penzien (1975) ont introduit un filtre passe-haut (high-pass) de second ordre pour modifier l'équation (4.1) comme suit :

$$G(\omega) = G_0 \frac{1 - 4\xi_g^2 (\omega/\omega_g)^2}{\left[1 - (\omega/\omega_g)^2\right]^2 + 4\xi_g^2 (\omega/\omega_g)^2} \cdot \frac{(\omega/\omega_k)^4}{\left[1 - (\omega/\omega_k)^2\right]^2 + 4\xi_k^2 (\omega/\omega_k)^2} \tag{4.2}$$

Der-Kiureghian et Neuenhofer (1992) ont proposé des valeurs pour les paramètres du filtre ω_k et ξ_k : 1.5 et 0.6 pour les sites rocheux, 0.5 et 0.6 pour les sites alluvionnaires et 1.0 et 0.6 pour les sites intermédiaires.

Les figures (4.3a) et (4.3b) montrent respectivement les DSP normalisées de Clough et Penzien pour les composantes horizontales et verticales d'accélérogrammes enregistrés pour trois types de sites. Etant donné que le deuxième rapport tend rapidement vers 1 lorsque ω augmente, on constate qu'il n'influence la forme de la DSP que pour la région des très basses fréquences.

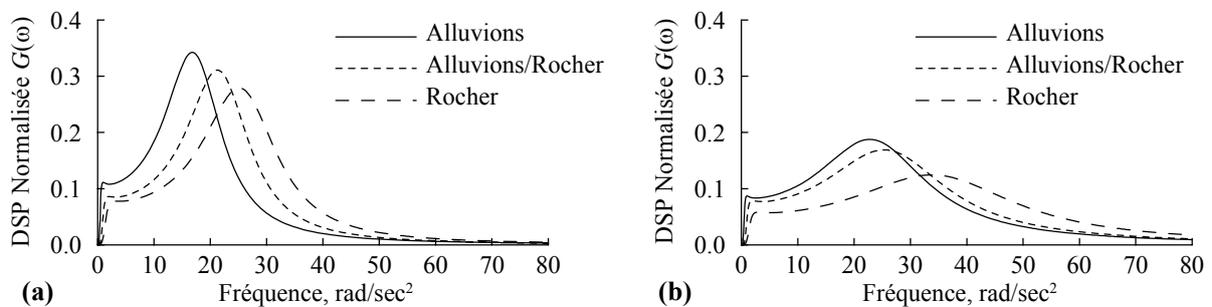


Fig. 4.3- DSP normalisées de Clough et Penzien, pour différentes conditions de site. a) composantes horizontales. b) composantes verticales.

3. DSP déterminée à partir d'un spectre de Fourier (1ère méthode)

La DSP d'un processus stochastique stationnaire de durée T_S peut être définie à partir du spectre de Fourier $FS(\omega)$, comme suit (Bendat et Piersol, 1986) :

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi T_S} |FS(\omega)|^2 \quad (4.3)$$

Les accélérogrammes étant toutefois des fonctions non-stationnaires, l'utilisation de cette formule requiert la définition d'une durée stationnaire T_S qui assure une conservation totale de l'énergie de l'accélérogramme (Trifunac et Brady, 1975) afin que les principaux pics attendus puissent correspondre aux pics réels les plus importants.

Soient $a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}, \dots$ les amplitudes réelles des différents pics d'un accélérogramme $\ddot{a}(t)$ de durée totale T . On définit et l'amplitude normalisée du $i^{\text{ème}}$ pic ordonné comme suit :

$$\eta_{(i)} = a_{(i)} / a_{rms} \quad (4.4)$$

Pour calculer les valeurs, $E[\eta_{(1)}], E[\eta_{(2)}], E[\eta_{(3)}], \dots$ des amplitudes attendues des différents pics ordonnés normalisés selon l'équation (3.42), on commence par déterminer le paramètre ε à partir de l'équation (3.43), et on calcule N , le nombre total de pics de l'accélérogramme $\ddot{a}(t)$.

Par ailleurs, l'énergie totale de l'accélérogramme $\ddot{a}(t)$ est donnée par (Arias, 1970) :

$$I(T) = \int_0^T [\ddot{a}(t)]^2 dt \quad (4.5)$$

La valeur de a_{rms} pour un processus stationnaire de durée T_S de même énergie que l'accélérogramme $\ddot{a}(t)$, est exprimée par :

$$a_{rms}^2 = \frac{1}{T_S} \int_0^T a^2(t) dt = \frac{1}{T_S} I(T) \quad (4.6)$$

La valeur T_S de la durée stationnaire est alors égale à :

$$T_S = \frac{1}{a_{rms}^2} I(T) \quad (4.7)$$

en utilisant l'équation (4.4), on a pour chaque pic du $i^{\text{ème}}$ ordre la relation suivante :

$$T_{S(i)} = \left(\frac{\eta_i}{a_{(i)}} \right)^2 I(T) \quad (4.8)$$

En remplaçant l'amplitude normalisée $\eta_{(i)}$ par la valeur attendue $E[\eta_{(i)}]$ du $i^{\text{ème}}$ pic ordonné

correspondant, la valeur inconnue de la durée stationnaire du pic d'ordre i pourra être déterminée à partir de l'expression suivante :

$$T_{s(i)} = \left(\frac{E[\eta_{(i)}]}{a_{(i)}} \right)^2 I(T) \quad (4.9)$$

En calculant la durée stationnaire pour un grand nombre de pics d'accélération, la valeur finale de la durée stationnaire du mouvement fort sera prise égale à la moyenne des durées correspondant aux pics les plus élevés caractérisés par des durées plus ou moins stables (Gupta, 1994, 1994a).

4. DSP compatible avec un spectre de réponse (2^{ème} méthode)

Le spectre de réponse d'un mouvement fort correspond à la réponse maximale d'un ensemble d'oscillateurs de fréquences propres et d'amortissements différents (Nigam et Jennings, 1968) et intègre implicitement les effets de la non-stationnarité du mouvement et du caractère transitoire de la réponse. Le calcul de la DSP compatible avec ce spectre inclura automatiquement l'effet de la non-stationnarité du séisme ainsi que la nature transitoire de la réponse pour les longues périodes.

Soit $G(\omega)$ la DSP compatible avec un spectre de réponse donné. La DSP de la réponse en déplacement $GD(\omega)$ d'un oscillateur de pulsation ω_n et d'un pourcentage d'amortissement critique ξ peut s'écrire à partir de l'équation (2.59) comme suit :

$$GD(\omega) = |\tilde{H}(\omega, T_D)|^2 G(\omega) \quad (4.10)$$

où $\tilde{H}_n(\omega, T_D)$ est la fonction de transfert transitoire de l'oscillateur, donnée par l'équation (2.60) et évaluée à un temps T_D égale à la durée totale du mouvement fort.

Pour obtenir une première approximation des moments m_0 , m_2 et m_4 de la DSP de la réponse en déplacement, on remplace $\tilde{H}_n(\omega, T_D)$ par la fonction de transfert $H_n(\omega)$ et la valeur de $|H_n(\omega)|^2$ par un rectangle de hauteur $1/4\xi^2\omega_n^4$ et de largeur $\pi\xi\omega_n$, centré sur la valeur ω_n . On procède aussi à une approximation de $G(\omega)$ sur une bande à fréquence étroite à partir de $(\omega_n - \frac{1}{2}\xi\omega_n)$ jusqu'à $(\omega_n + \frac{1}{2}\xi\omega_n)$ par une valeur constante $G_0(\omega_n)$.

Avec ces approximations les moments m_0 , m_2 et m_4 de $GD(\omega)$ sont obtenus par:

$$m_0 = \frac{\pi G_0(\omega_n)}{4\xi\omega_n^3} \quad (4.11)$$

$$m_2 = \frac{G_0(\omega_n)}{4\xi^2\omega_n^4} \left(\pi\xi + \frac{1}{12}\pi^3\xi^3 \right) \omega_n^3 \quad (4.12)$$

$$m_4 = \frac{G_0(\omega_n)}{4\xi^2\omega_n^4} \left(\pi\xi + \frac{1}{2}\pi^3\xi^3 + \frac{1}{80}\pi^5\xi^5 \right) \omega_n^5 \quad (4.13)$$

On en déduit aisément l'expression des paramètres a_{rms} , N et ε à partir des équations (3.21), (3.16) et (3.22) comme suit :

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{\pi G_0(\omega_n)}{4\xi\omega_n^3}} \quad (4.14)$$

$$N = \frac{T\omega_n}{\pi} \left(\frac{\pi\xi + \frac{1}{2}\pi^3\xi^3 + \frac{1}{80}\pi^5\xi^5}{\pi\xi + \frac{1}{12}\pi^3\xi^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{6}\pi^2\xi^2 + \frac{1}{144}\pi^4\xi^4}{1 + \frac{1}{2}\pi^2\xi^2 + \frac{1}{80}\pi^4\xi^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

On s'aperçoit à partir de ces équations que les paramètres N et ε sont fonction de l'amortissement, de la fréquence naturelle de l'oscillateur, et de la durée totale du mouvement fort. On peut donc calculer l'amplitude normalisée maximale $\bar{\eta}_{\max}$, du plus grand pic de la réponse à partir de l'équation (3.42) pour $n = 1$.

La valeur attendue de la réponse maximale peut être interprétée comme celle d'un oscillateur de pulsation ω_n et d'un pourcentage d'amortissement critique ξ . Elle représente donc par définition l'amplitude attendue du spectre de réponse $\overline{SD}(\omega_n, \xi)$. La valeur moyenne théorique $\overline{PSV}(\omega_n, \xi)$ des amplitudes du pseudo-spectre de vitesse, sera alors donnée par :

$$\overline{PSV}(\omega_n, \xi) = \omega_n \overline{SD}(\omega_n, \xi) = \omega_n \bar{\eta}_{\max} \cdot a_{rms} = \bar{\eta}_{\max} \sqrt{\frac{\pi G_0(\omega_n)}{4\xi\omega_n}} \quad (4.17)$$

En égalisant cette valeur avec la valeur correspondante $PSV(\omega_n, \xi)$ du spectre de réponse

cible, on peut déduire la première approximation de la DSP :

$$G_0(\omega_n) = \frac{4\xi\omega_n}{\pi} \left[\frac{PSV(\omega_n, \xi)}{\bar{\eta}_{\max}} \right]^2 \quad (4.18)$$

Cette première approximation est ensuite utilisée de manière itérative en vue d'obtenir une nouvelle valeur plus précise des amplitudes spectrales attendues $\overline{PSV}(\omega_n, \xi)$. On en déduit l'expression de la DSP pour la $j^{\text{ème}}$ itération (Unruh et Kana, 1981) :

$$G_j(\omega) = G_{j-1}(\omega) \left[\frac{PSV(\omega_n, \xi)}{PSV_{j-1}(\omega_n, \xi)} \right]^2 \quad (4.19)$$

Cette procédure itérative est ensuite répétée jusqu'à convergence des valeurs des amplitudes du spectre théorique vers celles du spectre de réponse cible. Un organigramme du schéma itératif de la méthode est donné dans la figure (4.4).

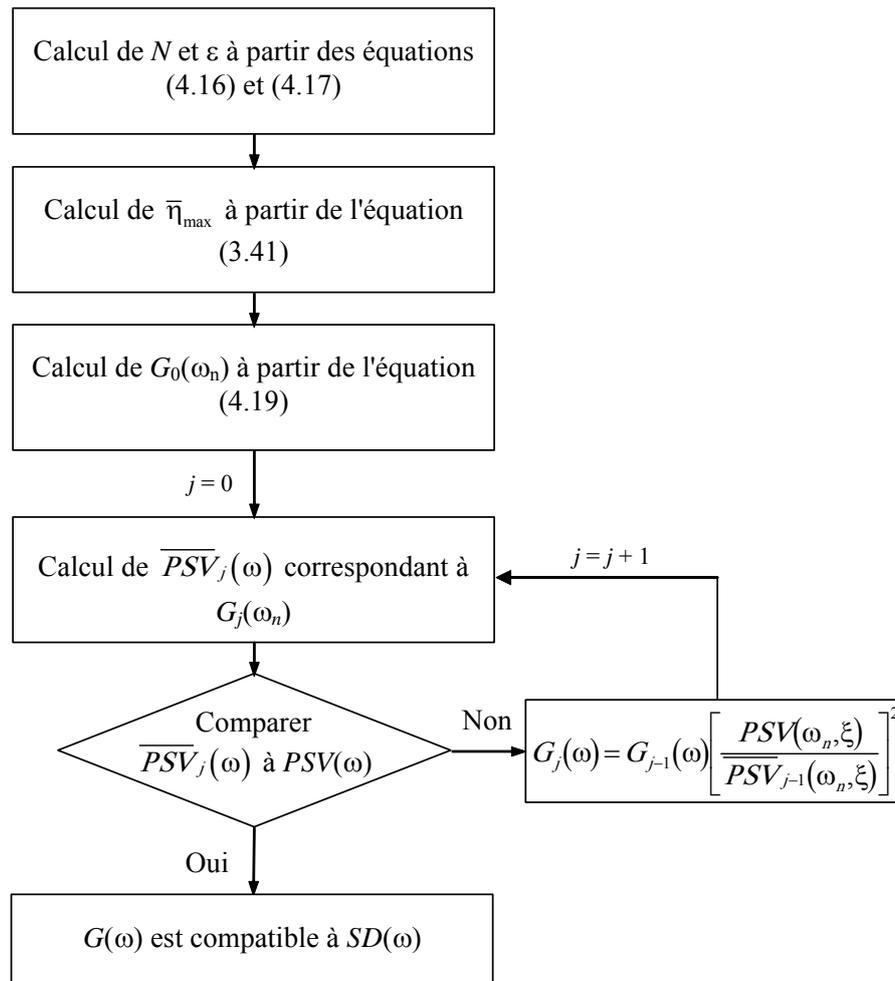


Fig. 4.4- Organigramme du schéma itératif de la deuxième méthode.

5. Applications numériques

L'applicabilité des deux méthodes présentées dans les paragraphes précédents est examinée sur la base des résultats obtenus à partir des enregistrements accélérométriques de quatre événements sismiques. Les composantes S90W du séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, (Fig.3.6a), N05W du séisme de Parkfield du 27 juin 1966 (Fig.3.6b), N90W de la réplique d'El Attaf du séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980 (Fig.3.6c), N90E du séisme de Charchell du 29 octobre 1989 (Fig.3.6d), sont utilisées à cet effet.

Dans le tableau (4.1) sont indiquées les valeurs des durées stationnaires $T_{S(i)}$ des 15 premiers pics de chacun des accélérogrammes considérés. La valeur de la durée stationnaire finale T_S de chaque accélérogramme est calculée à partir de la moyenne des durées soulignées associées aux premiers pics ordonnés (plus grandes amplitudes) présentant des durées stationnaires relativement stables. A partir de cette durée stationnaire, la DSP de l'accélérogramme considéré pourra être déterminée directement à partir de l'équation (4.3).

Tableau 4.1- Durées stationnaires du mouvement fort correspondant aux 15 premiers pics ordonnés.

Pic n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	T_S
Séisme d'El-Centro 1940 ; Durée totale $T_D = 53.46$ sec																
$T_{S(i)}$	22.1	<u>25.9</u>	<u>23.6</u>	<u>24.3</u>	<u>24.0</u>	<u>25.7</u>	<u>25.6</u>	<u>26.2</u>	<u>25.4</u>	<u>25.2</u>	<u>25.3</u>	<u>26.8</u>	30.7	32.7	32.3	25.27
Séisme de Parkfield 1966 ; Durée totale $T_D = 43.92$ sec																
$T_{S(i)}$	3.4	9.6	<u>11.4</u>	<u>10.7</u>	<u>11.9</u>	<u>11.4</u>	<u>12.4</u>	<u>11.9</u>	<u>11.5</u>	<u>11.7</u>	15.6	15.4	16.1	15.8	15.6	11.61
Séisme d'El Asnam 1980 ; Durée totale $T_D = 11.98$ sec																
$T_{S(i)}$	6.3	<u>5.2</u>	<u>4.9</u>	<u>4.8</u>	<u>4.8</u>	<u>4.5</u>	<u>4.9</u>	<u>5.1</u>	5.8	5.8	6.0	7.0	6.7	6.6	7.2	4.59
Séisme de Charchell 1989 ; Durée totale $T_D = 23.98$ sec																
$T_{S(i)}$	7.1	6.7	<u>7.4</u>	<u>7.9</u>	<u>7.7</u>	<u>7.5</u>	<u>7.3</u>	<u>8.0</u>	8.5	8.7	8.7	8.9	8.9	9.5	9.8	7.17

Les DSP théoriques obtenues en utilisant la première méthode ainsi que les spectres de réponse calculés (trait discontinu) et les spectres de réponse cibles (trait continu), pour un amortissement de 5%, sont présentés dans les figures (4.5a) à (4.5d) pour les quatre enregistrements accélérométriques considérés. On remarque que les spectres calculés sont en bonne concordance avec les spectres réels correspondants pour les courtes périodes seulement. Pour les périodes longues, on observe que les positions des pics des spectres de réponse cibles sont pratiquement inchangées mais que les amplitudes spectrales sont surestimées.

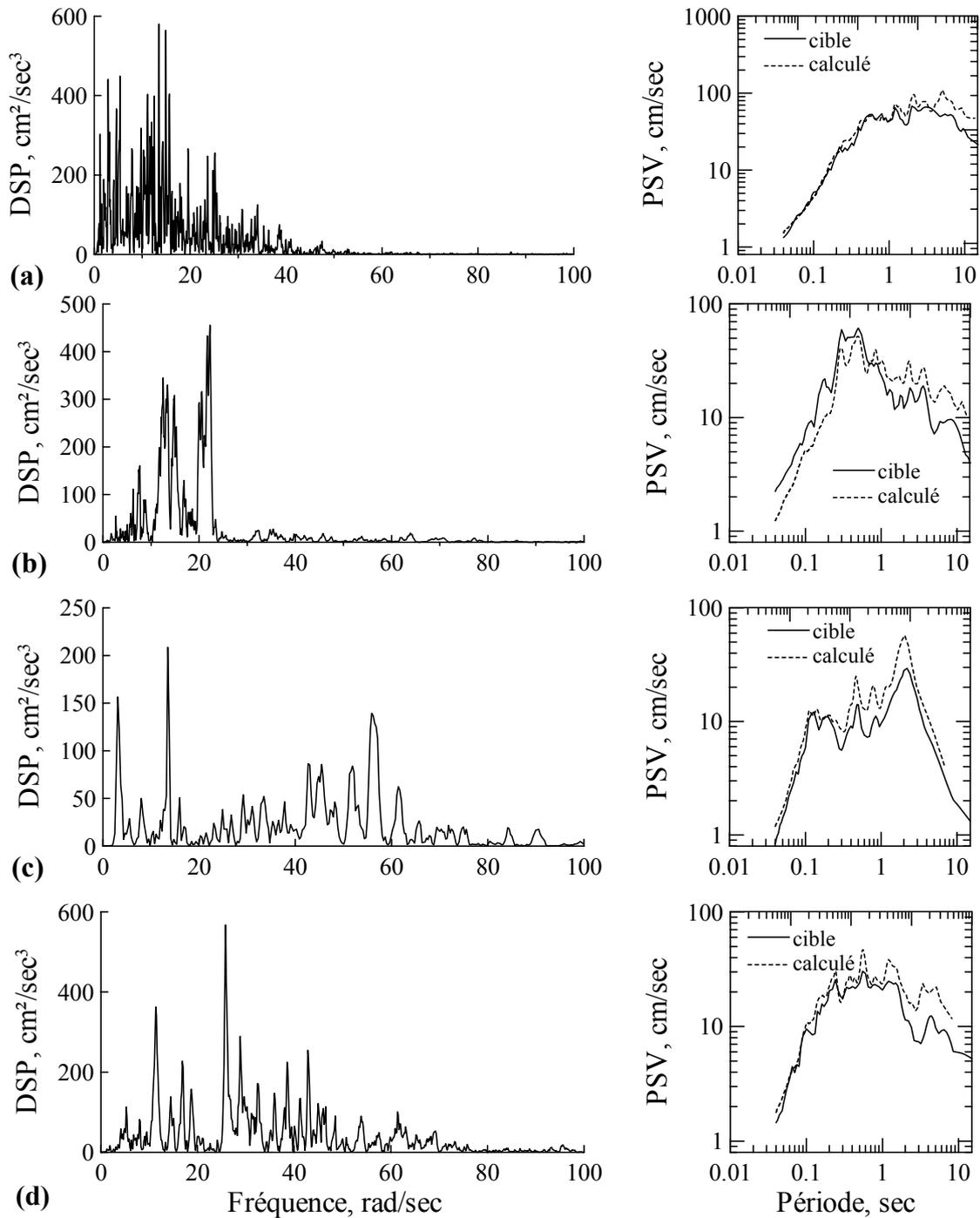


Fig.4.5- DSP théoriques obtenues par la première méthode et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles, $\xi=5\%$. a) séisme d'El-Centro 1940, b) séisme de Parkfield 1966, c) séisme d'El Asnam 1980, d) séisme de Cherchell 1989.

Ceci peut aisément s'expliquer par le fait que la partie stationnaire du mouvement fort de l'accélérogramme est, en général, dominée par les ondes de hautes fréquences, induisant ainsi un résultat plus précis pour ces fréquences. Par un filtrage approprié des hautes fréquences et en calculant à partir du nouveau accélérogramme obtenu, une nouvelle durée stationnaire, il est évidemment possible d'obtenir une meilleure compatibilité pour les longues périodes, ce qui ne sera malheureusement plus le cas pour les courtes périodes.

Par ailleurs, les résultats obtenus en utilisant la deuxième méthode (Fig.4.6a à 4.6d), montrent que les spectres de réponse théoriques, ainsi calculés, et les spectres de réponse cibles sont en excellent accord pour une gamme de fréquences très étendue englobant aussi bien le domaine des basses que celui des hautes fréquences. Cette deuxième approche permet de prendre en considération les effets de la non-stationnarité du mouvement sismique ainsi que celui de la nature transitoire de la réponse dynamique des structures.

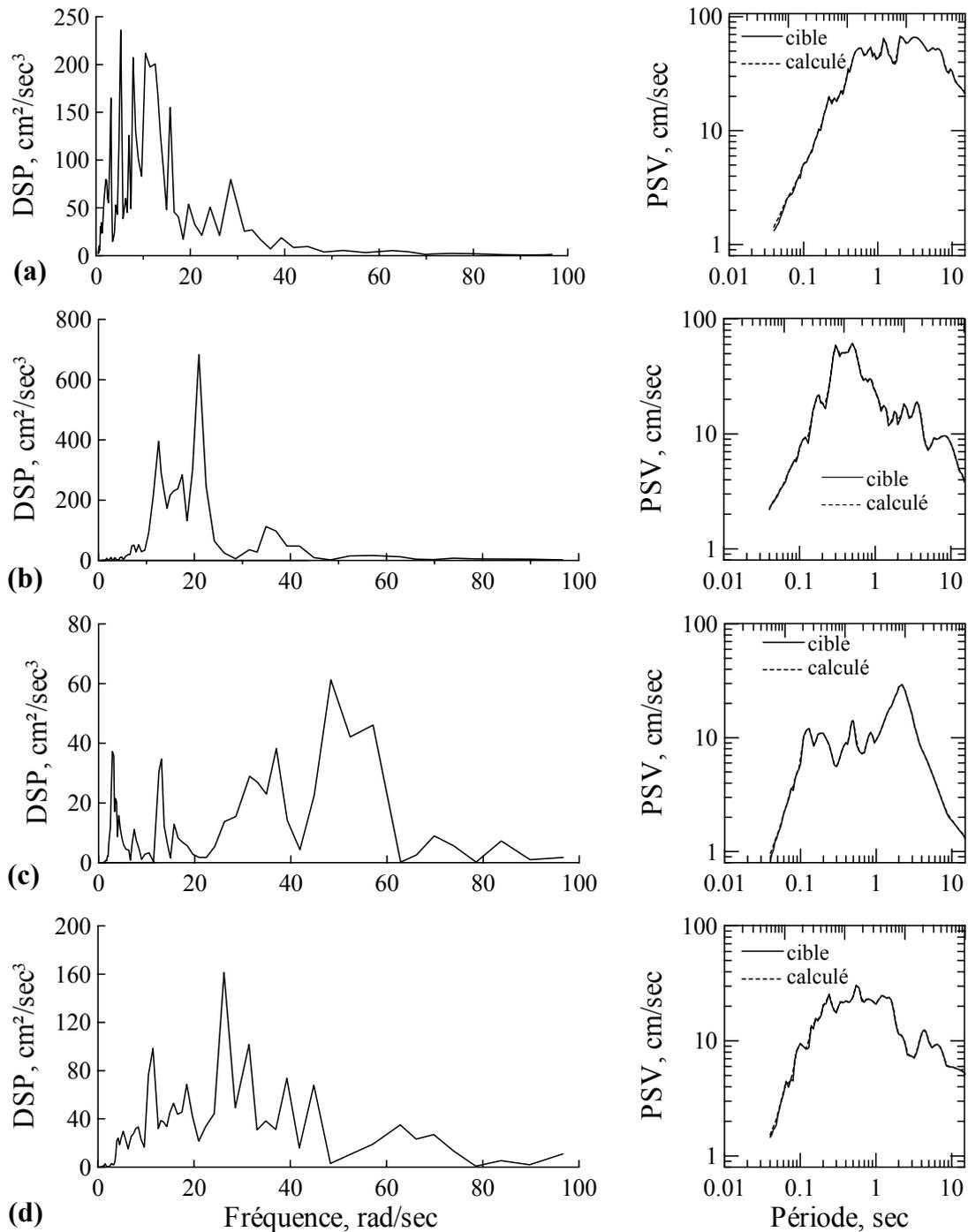


Fig.4.6- DSP théoriques obtenues par la seconde méthode et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles, $\xi=5\%$, a) séisme d'El-Centro 1940, b) séisme de Parkfield 1966, c) séisme d'El Asnam 1980, d) séisme de Cherchell 1989.

Sur le plan opérationnel, l'application du schéma itérative de la deuxième méthode sur les quatre enregistrements précédents a montré que la convergence de l'algorithme utilisé est très rapide et qu'une excellente concordance entre les amplitudes des spectres théoriques et cibles peut être obtenue après seulement deux à trois itérations (Fig 4.7).

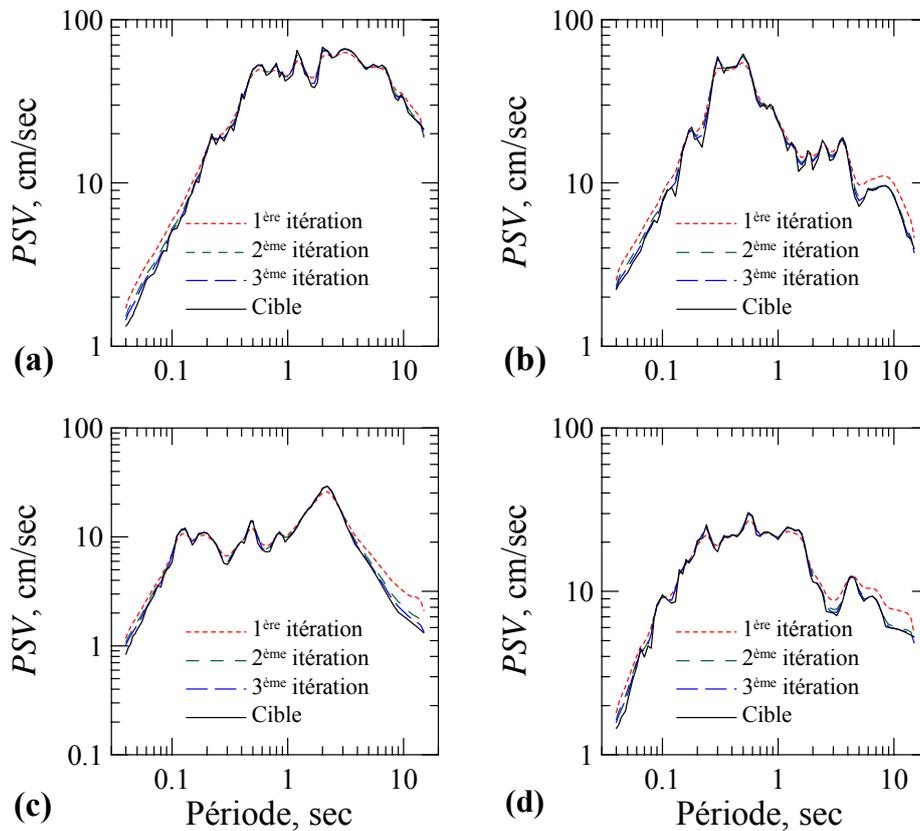


Fig. 4.7– Pseudo-spectres de vitesse obtenues par les 3 premières itérations, a) séisme d'El-Centro 1940, b) séisme de Parkfield 1966, c) séisme d'El Asnam 1980, d) séisme de Cherrchell 1989.

6. DSP compatibles pour différentes conditions locales de site de magnitudes et de distances épacentrales

L'utilisation de spectres de réponses pour l'obtention de DSP compatible ne doit pas fournir juste une bonne approximation de la réponse mais doit aussi refléter toutes les caractéristiques du mouvement fort. Ainsi, les effets des conditions locales de site, de magnitude, et de distance épacentrale, doivent apparaître sur les DSP obtenues au même titre que les spectres de réponses respectifs. Pour montrer cela on a procédé au calcul des DSP compatibles avec des spectres de réponse prenant en compte différents types de sols, différentes magnitudes et différentes distances épacentrales.

6.1. Effet des conditions locales de site

Pour étudier l'effet des conditions locales du site sur la DSP on a utilisé les spectres de réponse obtenus par Seed et *al* (1976) pour quatre types de sols : rocheux, fermes, meubles et

très meubles (Fig. 4.8).

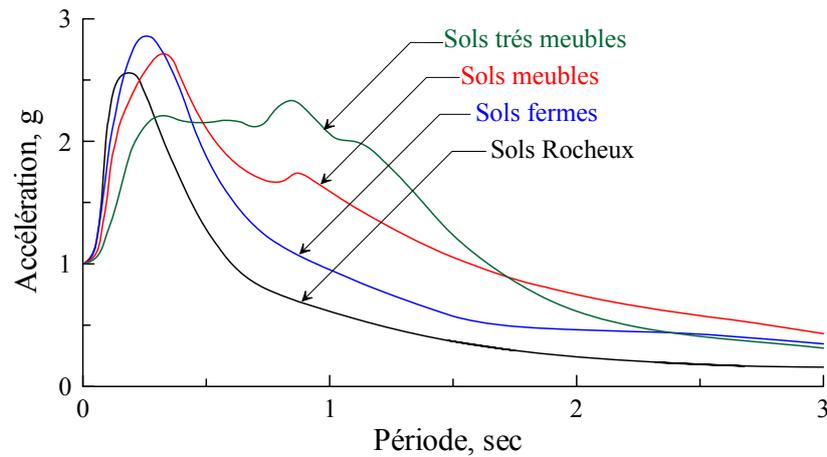


Fig. 4.8– Spectres moyens d'accélération pour différentes conditions de site selon Seed et al (1976).

La figure (4.9) montre les DSP compatibles obtenues par la deuxième méthode et les pseudo-spectres de vitesse pour les quatre types de sols pour un amortissement de 5%. Il est clair que les spectres obtenus à partir de la DSP compatible se confondent parfaitement avec les spectres de réponse cibles. Ainsi, les caractéristiques induites par les conditions locales de site restent dûment préservés par la DSP compatible.

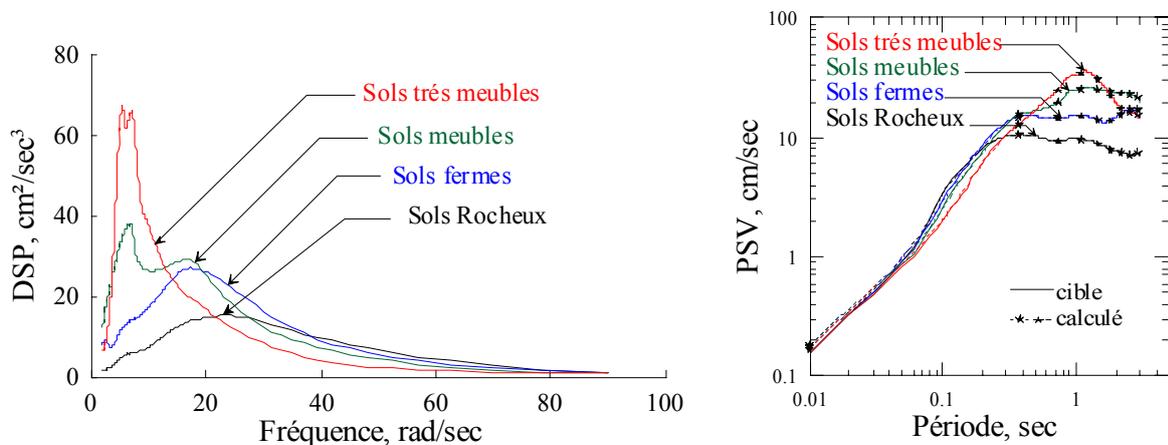


Fig. 4.9– DSP compatible et comparaison des spectres de réponse calculés avec les spectres de réponse cibles pour différentes conditions de site, $\xi=5\%$.

Les DSP présentées dans la figure (4.9) pour les quatre types de sols montrent que la DSP d'un sol meuble tend vers une DSP d'un processus à bande étroite, l'énergie y est concentrée aux alentours d'une fréquence prédominante. Par contre la DSP d'un sol ferme tend vers celle d'un processus à bande large avec une DSP qui s'étend sur un intervalle de fréquence plus large. La fréquence prédominante augmente avec la raideur du sol, plus le sol est ferme et plus la valeur de la fréquence prédominante augmente.

On remarque aussi, que l'énergie au alentour de la fréquence prédominante augmente lorsque le sol est plus mou et que la distribution de l'énergie dans les basse fréquences est plus importante pour les sols meubles qu'elle ne l'est pour les sols fermes. La tendance s'inverse pour les hautes fréquences où l'énergie est plus importante pour les sols fermes qu'elle ne l'est pour les sols meubles. On peut dire ainsi les sols mous ont tendance à filtrer les hautes fréquences.

6.2. Effet de la magnitude

Pour étudier l'effet de la magnitude sur la DSP, on utilise les spectres de réponse obtenus par Şafak (1988) à partir de modèles sismologiques de source pour une probabilité de non dépassement de 50 %. On considère successivement trois magnitudes : 5, 6 et 7 à une distance épacentrale de 10 Km. Il est à constater à partir de la figure (4.10) que les spectres de réponse théoriques obtenus à partir de DSP compatibles sont identiques aux spectres de réponse cibles pour les trois magnitudes considérées, sur toute la plage des périodes excepté pour les très faibles périodes ou le spectre théorique passe légèrement au dessus du spectre cible. Ainsi, la méthode itérative utilisée est capable de reprendre l'effet de la magnitude sur la DSP compatible au spectre de réponse cible.

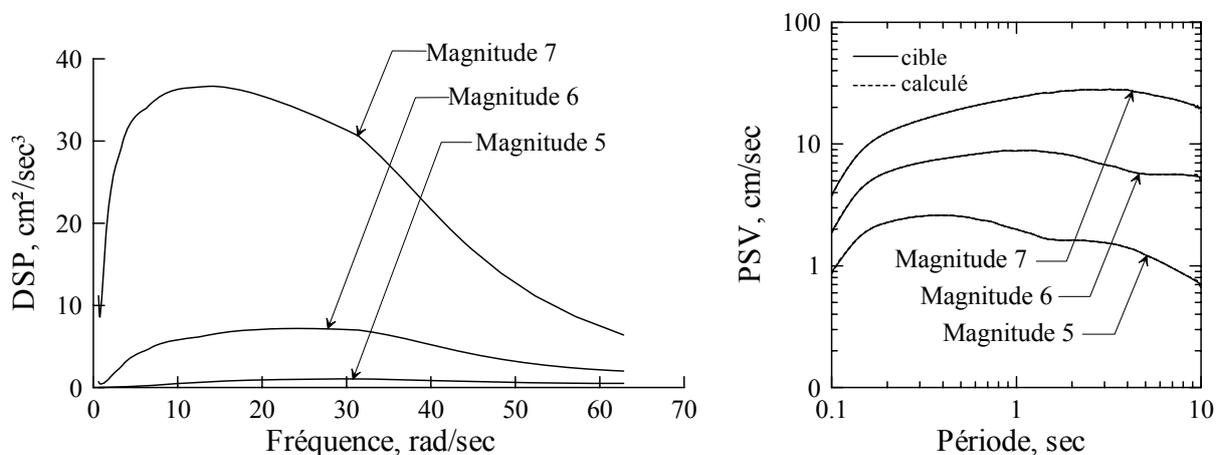


Fig. 4.10– DSP compatible et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles pour différentes magnitudes.

Il est clair que la magnitude est un paramètre d'une influence considérable sur la distribution de l'énergie du séisme. Plus la magnitude est grande et plus l'énergie transmise est importante. Ceci est d'autant plus accentué pour les basse fréquences qu'il ne l'est pour les hautes fréquences. En effet on remarque que l'effet de la magnitude diminue considérablement pour les hautes fréquences.

6.3. Effet de la distance épacentrale

La figure (4.11) montre les spectres de réponses obtenus par Şafak (1988) pour une probabilité de non dépassement de 50% en considérant trois distances épacentrales : 10, 20 et 50 km pour une magnitude 7. On remarque que les spectres de réponses calculées sont identiques aux spectres de réponse cibles pour toutes les périodes considérées, indépendamment de la distance épacentrale.

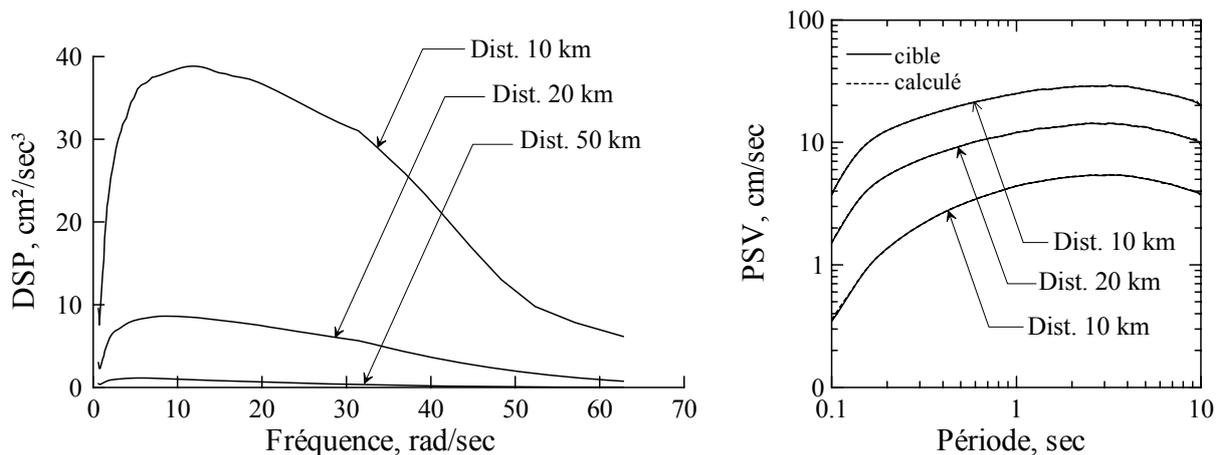


Fig. 4.11– DSP compatible et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles pour différentes distances épacentrales.

La variation de l'énergie pour toutes les fréquences est inversement proportionnelle à la distance épacentrale. Plus la distance est importante est plus l'énergie transmise diminue. Comme pour la magnitude, l'effet de la distance épacentrale est plus important pour les basses fréquences qu'il ne l'est pour les hautes fréquences.

Contrairement à la magnitude, on remarque que la variation de l'énergie du séisme est inversement proportionnelle à la distance épacentrale. Plus la distance est importante est plus l'énergie transmise diminue. Comme pour la magnitude, l'effet de la distance épacentrale est plus important pour les basses fréquences qu'il ne l'est pour les hautes fréquences.

En conclusion on peut dire que l'effet est d'autant plus accentué lorsque le séisme est de forte magnitude en champ proche, et moins significatif lorsque le séisme est de faible magnitude en champ lointain.

7. DSP compatible avec les spectres réglementaires de l'US NRC et des RPA99

La validité de cette méthode a été par ailleurs examinée en considérant les spectres réglementaires en accélération de la U. S. Nuclear Regulatory Commission (1973), préconisés pour le calcul des centrales nucléaires, pour trois valeurs de l'amortissement critique : 0.5%,

2.0% et 5.0% (Fig.4.12a), ainsi que les spectres des Règles Parasismiques Algériennes RPA99 (1999) pour quatre types de sols : sol rocheux, sol ferme, sol meuble et sol très meuble (Fig.4.12b).

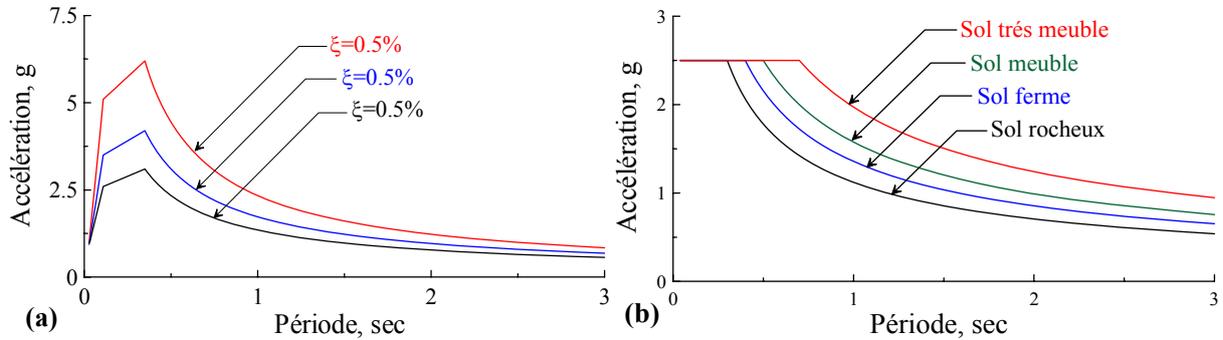


Fig.4.12- Spectres en accélération de a)- l'U.S NRC pour un amortissement de 0.5%, 2% et 5%, b)- RPA99 pour quatre types de sols : rocheux, fermes, meubles et très meubles.

On constate clairement à partir des figures (4.13) et (4.14) que les spectres de réponse calculés restent confondus aux spectres de réponse cibles, indépendamment des valeurs de l'amortissement ou du type de sol considéré. On remarque également dans la figure (4.13) qu'un problème de convergence peut subsister en hautes fréquences (>20 Hz) pour des valeurs d'amortissement voisines de 5%.

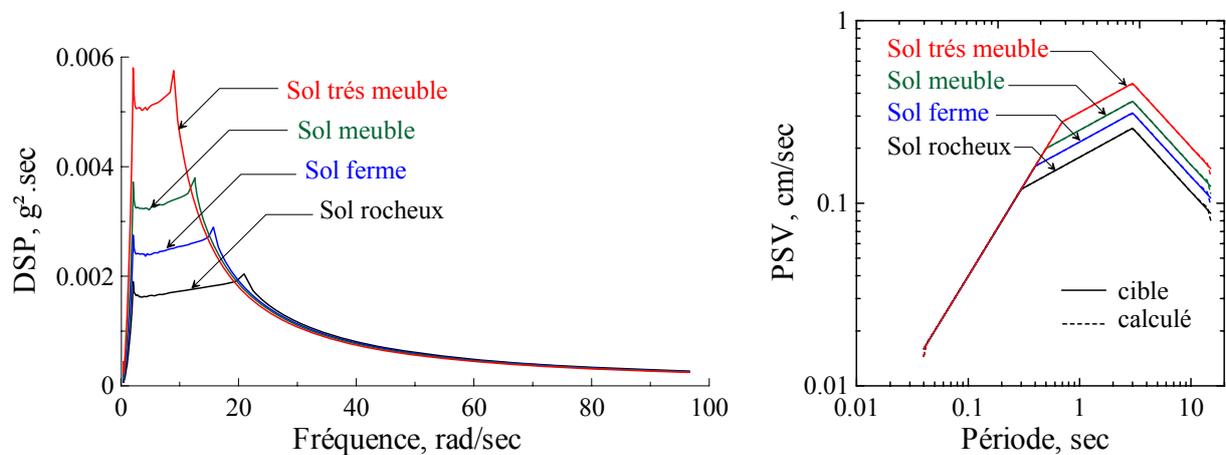


Fig.4.13- DSP compatibles aux spectres de réponse des RPA99 et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles, pour quatre types de sols : rocheux, ferme, meuble et très meuble.

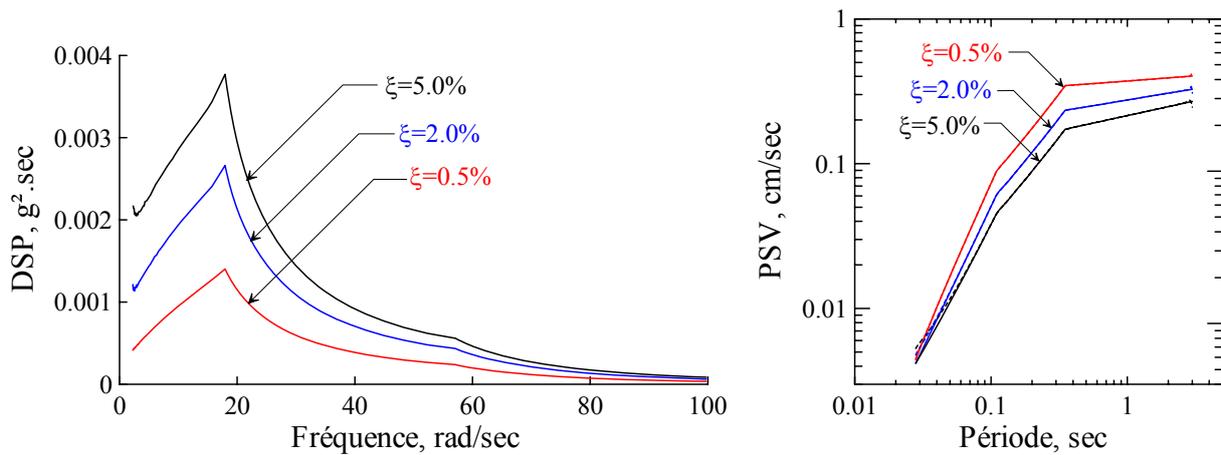


Fig.4.14–DSP compatibles aux spectres de réponse de la U.S. Nuclear Regulatory Commission et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles pour $\xi=0.5\%$, 2% et 5%.

8. Conclusions

Le calcul de la DSP à partir du spectre de Fourier et de la durée modifiée du mouvement fort en le considérant comme faiblement stationnaire, reste limitée pour les hautes fréquences où l'abondance de ces dernières conduit à une bonne estimation de la réponse. Pour les basses fréquences, la non-stationnarité du mouvement fort fait que la réponse est surestimée.

En revanche, l'utilisation d'une DSP compatible avec un spectre de réponse cible présentée dans ce Chapitre, permet non seulement d'obtenir des résultats précis pour une gamme de fréquences plus large, mais aussi une meilleure estimation des pics de la réponse les plus significatifs correspondant à la phase forte du mouvement sismique. En outre, cette approche permet de fournir un mode de représentation réaliste des caractéristiques du séisme, et de prendre également en considération les effets de non-stationnarité du mouvement fort et du caractère transitoire de la réponse sismique des structures.

L'étude des DSP compatibles obtenus pour différents types de sols a montré que la DSP d'un sol meuble tend vers une DSP d'un processus à bande étroite, par contre la DSP d'un sol ferme tend vers celle d'un processus à bande large et que la fréquence prédominante d'un sol augmente avec sa raideur. On remarque aussi que la distribution de l'énergie dans les basses fréquences est plus importante pour les sols meubles qu'elle ne l'est pour les sols fermes. La tendance s'inverse pour les hautes fréquences où l'énergie est plus importante pour les sols fermes qu'elle ne l'est pour les sols meubles.

Il a été mis en évidence qu'un changement de la magnitude et de la distance épicerale,

peut avoir une influence significative sur la distribution spectrale de l'énergie sismique surtout pour le domaine des basses fréquences. L'effet est d'autant plus accentué lorsque le séisme est de forte magnitude en champ proche, et moins significatif lorsque le séisme est de faible magnitude en champ lointain.

CHAPITRE 5

GENERATIONS D'ACCELEROGRAMMES COMPATIBLES AVEC UN SPECTRE DE REPONSE CIBLE

CHAPITRE 5

GENERATIONS D'ACCELEROGRAMMES COMPATIBLES AVEC UN SPECTRE DE REPONSE CIBLE

1. Introduction.

La procédure de génération de densité spectrale de puissance compatible (DSP) retenue ci-avant (2^{ème} méthode) est maintenant utilisée pour la génération d'accélérogramme synthétique compatible avec des spectres de réponse cibles. Les signaux artificiels sont calculés en utilisant la méthode de superposition d'ondes sinusoïdales dont les amplitudes sont reliées à la DSP précédemment retenue. Outre la prise en considération de manière implicite pour cette méthode des effets de la nonstationnarité fréquentielle du mouvement sismique et de la nature transitoire de la réponse dynamique de la structure, nous introduisons trois différentes options pour la prise en charge des phases et par suite donc de la nonstationnarité temporelle c'est ainsi que pour synthétiser de manière réaliste de génération des phases ont été considérées ; l'une des elles étant associée à la définition d'une fonction enveloppe temporelle.

La durée totale du mouvement sismique, est composée de trois phases essentielles, a été estimé en considérant les temps d'arrivées au site des divers trains d'ondes successifs, les paramètres contrôlant le processus de rupture de la faille sismique, et les vibrations libres de la terre; C'est ainsi que dans ce chapitre, nous présentant dans une première partie une étude comparative pour la sélection des procédures d'évaluations des paramètres caractéristiques de la nonstationnarité temporelle des mouvements sismiques. Dans une deuxième partie une étude paramétrique est conduite afin d'apprécier les effets des variables environnementales sur les paramétriques caractéristiques de la nonstationnarité temporelle.

La procédure de simulation est ensuite utilisée pour dans une troisième partie, la génération d'accélérogrammes réglementaires compatibles avec des spectres de réponse issus de différentes réglementations parasismiques en vigueur dans le monde. Les résultats sont présentés en termes de comparaison des formes spectrales cibles et simulés.

2. Les paramètres de simulation :

2.1. Valeur de l'amplitude maximale de l'accélération du mouvement sismique du sol (PGA) :

Les seuils des amplitudes maximales des accélérations sismiques sont en général fonction des paramètres environnementaux qui contrôlent les effets de la taille du séisme (Magnitude 'M'), les effets du trajet pour les ondes sismiques (Distance épacentrale 'R') ainsi que les effets des dépôts sédimentaires du site considéré (Sol 'S'). Ces seuils d'amplitudes sont estimées en considérant les effets moyens des paramètres explicatifs à travers des lois de régressions élaborées sur la base de banques de données accélérométriques enregistrées.

L'amplitude maximale de l'accélération sismique (PGA) peut se faire suivant les lois de régressions consignées dans le Tableau (5.1) ci-dessous :

Tableau 5.1- Expression du PGA suivant différentes lois de régressions.

Auteur	Lois de régression
Djouabi (2010)	$\text{Log}(PGA) = 2.252 + 0.357M + 0.092S_1 + 0.282S_2 - 1.578\text{Log}(\sqrt{R^2 + h^2})$
Sabetta & Pugliese (1996)	$\text{Log}(PGA(g)) = -1.845 + 0.363M + 0.195S_1 + 0. * S_2 - 1.\text{Log}(\sqrt{R^2 + h^2})$

Dans notre étude, on retient pour le calcul du PGA, la loi de régression proposée par Djouabi(2010) et qui a été élaborée sur la banque de données mondiale comprenant 411 accélérogrammes groupés en 9 classes (Site-Magnitude-Distance épacentrale), les sols sont associés aux coefficients présentés sur le Tableau (5.2), et h de 5 km.

Tableau 5.2- Les coefficients associés aux types de sol. Djouabi (2010).

Coefficient S_1 et S_2	S_1	S_2
Sol rocheux	0	0
Sol ferme	1	0
Sol meuble	0	1

2.2 Nonstationnarité temporelle:

Afin d'assurer aux accélérogrammes synthétiques un caractère nonstationnaire dans le domaine temporel, ceux-ci ont été générés de sorte à reproduire trois phases importantes voir (Fig.5.1) : une croissance progressive des amplitudes du signal sur un premier tronçon temporel de durée T_1 précédant l'arrivée des ondes S , un deuxième tronçon temporel de durée T_s représentant la phase des mouvements forts et un troisième tronçon de durée T_3 caractérisé

par les vibrations libres du sol engendrant une décroissance progressive des amplitudes jusqu'au stade de repos.

$$T_d = T_1 + T_s + T_3 \quad (5.1)$$

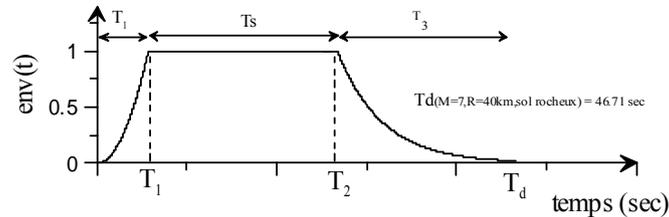


Fig. 5.1- Forme de l'enveloppe temporelle proposé par Jennings (1969)

La distribution dans le temps de l'énergie libérée par les ondes sismiques est gérée par une fonction enveloppe temporelle de durée T_d , décrivant les variations du mouvement de sol. Différentes méthodes ont été proposées pour l'estimation de la durée totale T_d d'un séisme (Trufinac, Westermo 1976), (Trufinac, Novikova 1993), (Sabetta, Pugliese 1996). Elles sont basées sur les différentes conditions magnitude, distance épacentrale et caractéristique du site local. Dans ce travail, la durée totale T_d des mouvements sismiques de sol est égale à la somme des trois tronçons temporels suivants :

Durée T_1 précédant l'arrivée des ondes S :

- Cette durée correspondant au décalage temporel en secondes entre les ondes S et P et dont la valeur est obtenue en divisant la distance épacentrale R en kilomètre par $V_p * V_s / (V_p - V_s)$ (Sabetta, Pugliese 1996) considéré comme étant égal à 7 km/sec.

Durée T_s de la phase des mouvements forts S :

- Cette durée est déterminée sur la base des paramètres caractéristiques de la faille sismiques à savoir : la fréquence coin f_c , et les dimensions L et W de la surface de la faille. Son expression est donnée par (Brune 1979) :

$$T_s = \frac{1}{f_c} \quad (5.2)$$

La fréquence coin f_c s'exprimant comme suit :

$$f_c = 0.6 * \frac{V_s}{L} \quad (5.3)$$

Où V_s est la valeur de la vitesse des ondes S , on adopte la valeur de 3,5 km/sec.

La valeur de la longueur L de la faille sismique est égale au double de celle de la largeur W de telle sorte que :

$$S = 0.5 * L^2 \quad (5.4)$$

$$L = \sqrt{2 * S} \quad (5.5)$$

Où S est la valeur de la surface de la faille sismique.

Dans ce travail, on adopte les valeurs de surfaces S proposées par Sibson (1989) pour différentes magnitudes, ce qui donne les valeurs consignées dans le Tableau (5.3) pour la durée de la phase temporelle des mouvements forts.

Tableau 5.3- Valeurs de la durée T_s de la phase des mouvements forts pour différentes magnitudes de séisme.

Magnitude	Surface (m ²)	$L = \sqrt{2 * S}$	$f_c = 0.6 * \frac{V_s}{L}$	$T_s = \frac{1}{f_c}$ (sec)
M=5	10 000 000	4472,136	0,4696	2,13
M=6	100 000 000	14142,136	0,1485	6,734
M=7	1 000 000 000	44721,360	0.0470	21,296

La forme de l'enveloppe temporelle durant la phase des mouvements forts est gérée par la distribution de phase retenue, à savoir distribution uniforme ou bien distribution dérivées de phases ou bien phases réelles de l'accélérogramme retenu.

Durée T_3 des vibrations libres du sol :

- Cette durée est associée aux mouvements basses fréquences ($f \leq f_c$) du sol. La valeur ξ de l'amortissement dépend de la nature du sol au site d'enregistrement, l'enveloppe temporelle a une forme qui assure l'amortissement du mouvement du sol et dont l'expression de Jennings est donnée par la fonction suivante (Gupta & Joshi 1993) :

$$env(t) = \exp^{-\xi 2\pi f_c (t-T_2)} = \exp^{-\alpha(t-T_2)} \quad (5.6)$$

avec $\alpha = \xi * 2\pi * f_c$ les valeurs de ξ retenues dans cette étude sont celles proposées par Zerva (1997).

Lorsque $t = T_d$ on alors $env(t) = 0,02$ et sachant que $T_d - T_2 = T_3$ on a alors :

$$T_3 = \frac{\ln(0.02)}{-\xi 2\pi f_c} = \frac{\ln(0.02)}{-\alpha} \quad (5.7)$$

La phase des vibrations libres du sol est prolongée jusqu'à atteindre une amplitude de mouvement égale à 2% de l'amplitude maximale de la phase des mouvements forts.

Le Tableau (5.4) présente les valeurs de la durée T_3 obtenues pour différentes magnitudes et pour différentes conditions locales de site représentés par les valeurs associés de l'amortissement ξ .

Tableau 5.4- Valeurs de la durée T_3 des vibrations libres du sol et les paramètres associés.

Magnitude	Sol	ξ Zerva (97)	f_c	$\omega_c = 2\pi f_c$	$\alpha = \xi * \omega_c$	$T_3 = \frac{\ln(0.02)}{-\alpha}$ (sec)
M=7	rocheux	0.6	0.047	0.2953	0.1772	22.08
	ferme	0.4			0.1181	33.12
	meuble	0.2			0.0591	66.24
M=6	rocheux	0.6	0.148	0.9299	0.5579	7.01
	ferme	0.4			0.3720	10.52
	meuble	0.2			0.1860	21.03
M=5	rocheux	0.6	0.47	2.9531	1.7719	2.21
	ferme	0.4			1.1812	3.31
	meuble	0.2			0.5906	6.62

Validation du choix des durées :

Les approches retenues dans ce travail pour le calcul des durées des trois phases temporelles des accélérogrammes sont maintenant validées en procédant à une comparaison avec des approches proposées par d'autres auteurs.

La différence partira essentiellement sur la durée T_S de la phase des mouvements forts car les autres durées T_1 et T_3 sont identiques pour les accélérogrammes, pour cela, nous retenons les approches proposées par divers auteurs et consignées dans le Tableau (5.5).

Tableau 5.5- Expression la durée stationnaires du mouvement fort T_S suivantes différentes régressions.

Auteur	Lois de régression
Sabetta & Pugliese (1996)	$\text{Log}(T_s) = -0.783 + 0.193M - 0.133S_1 + 0.138S_2 + 0.208\text{Log}(\sqrt{R^2 + h^2})$
Vanmarcke (1980)	$T_s = 30 * \exp(-3.254 * \text{PGA}^{0.35})$
Trifunac & Brady (1975) Pour les basses fréquences	$T_s = -4.88*S + 2.33*M + 0.149*R$
Trifunac & Novikova (1995) Pour les hautes fréquences	$T_s = 1.28 + 0.014*10^{**}(0.4M) + 0.062R$

Les résultats obtenus pour la durée T_d par les différentes approches sont consignées dans les Tableaux (5.6) et (5.7).

Tableau 5.6- Récapitulative de la durée totale suivant régression Trifunac & Brady (1975), Trifunac & Novikova (1995) et Sabetta 1996 et le modèle géophysique (retenu dans notre étude)
avec M : magnitude, R : distance épacentrale (km), S : type de sol r (rocheux) f (ferme) m (meuble)

Magnitude +Distance +Sol	$T_1=R/7$	T_S Trifunac		T_3	T_d Trifunac (sec)		(Sabetta 1996)		T_d (géophysique) Notre étude	
		(loi 75)	(loi 95)		(loi 75)	(loi 95)	$T_S=Dv$	$T_3 = T_1 + 2.5 * T_S$		T_d
M=5, R=20, Sr	2.86	4.87	3.92		9.94	8.99	2.85	9.99	12.99	7.20
M=5, R=40, Sr	5.71	7.85	5.16	2.21	15.77	13.08	3.28	13.92	18.091	10.05
M=5, R=80, Sr	11.43	13.81	7.64		27.45	21.28	3.78	20.89	27.157	15.77
M=5, R=20, Sf	2.86	9.75	3.92		15.92	10.09	2.10	8.11	10.543	8.30
M=5, R=40, Sf	5.71	12.73	5.16	3.31	21.76	14.19	2.42	11.75	15.278	11.16
M=5, R=80, Sf	11.43	18.69	7.64		33.43	22.38	2.79	18.39	23.913	16.87
M=5, R=20, Sm	2.86	14.63	3.92		24.11	13.40	3.92	12.66	16.459	11.61
M=5, R=40, Sm	5.71	17.61	5.16	6.62	29.95	17.50	4.51	16.98	22.079	14.47
M=5, R=80, Sm	11.43	23.57	7.64		41.62	25.69	5.20	24.43	31.758	20.18
M=6, R=20, Sr	2.86	7.20	6.04		17.07	15.91	4.45	13.98	18.18	16.60
M=6, R=40, Sr	5.71	10.18	7.28	7.01	22.91	20.00	5.12	18.51	24.057	19.46
M=6, R=80, Sr	11.43	16.14	9.76		34.58	28.20	5.90	26.18	34.04	25.17
M=6, R=20, Sf	2.86	12.08	6.04		25.45	19.41	3.28	11.05	14.364	20.10
M=6, R=40, Sf	5.71	15.06	7.28	10.52	31.29	23.51	3.77	15.13	19.67	22.96
M=6, R=80, Sf	11.43	21.02	9.76		42.97	31.70	4.35	22.29	28.98	28.68
M=6, R=20, Sm	2.86	16.96	6.04		40.85	29.93	6.12	18.15	23.591	30.62
M=6, R=40, Sm	5.71	19.94	7.28	21.03	46.69	34.03	7.03	23.29	30.276	33.48
M=6, R=80, Sm	11.43	25.90	9.76		58.36	42.22	8.11	31.70	41.215	39.19
M=7, R=20, Sr	2.86	9.53	11.35		34.47	36.29	6.94	20.21	26.274	46.24
M=7, R=40, Sr	5.71	12.51	12.59	22.08	40.30	40.39	7.98	25.66	33.361	49.09
M=7, R=80, Sr	11.43	18.47	15.07		51.98	48.58	9.21	34.44	44.774	54.81
M=7, R=20, Sf	2.86	14.41	11.35		50.39	47.33	5.11	15.63	20.323	57.28
M=7, R=40, Sf	5.71	17.39	12.59	33.12	56.22	51.43	5.87	20.40	26.52	60.13
M=7, R=80, Sf	11.43	23.35	15.07		67.90	59.62	6.78	28.37	36.882	65.85
M=7, R=20, Sm	2.86	19.29	11.35		88.38	80.45	9.54	26.70	34.713	90.39
M=7, R=40, Sm	5.71	22.27	12.59	66.24	94.22	84.54	10.96	33.12	43.061	93.25
M=7, R=80, Sm	11.43	28.23	15.07		105.89	92.74	12.65	43.05	55.964	98.96

Il est à remarquer que l'approche de Vanmarcke (1980) utilise une régression donnant l'expression de T_S en fonction du PGA. Le Tableau 5.6 récapitule les valeurs des PGA utilisées selon deux approches (Djouabi 2010) et Sabetta (1996) pour le calcul de T_d .

Tableau 5.7- Récapitulative de la durée totale suivant les lois de régressions de : Djouabi (2010) et Sabetta (1996) selon l'approche Vanmarcke (1980).

Magnitude Distance Type de Sol	PGA (régression)		T_S (Vanmarcke) = $f(PGA)$			
	PGA (Djouabi)	PGA (Sabetta)	T_S (Djouabi)	T_S (Sabetta)	T_d (Djouabi)	T_{d2} (Sabetta)
M=5, R=20, Sr	91.704	44.409	7.25	9.97	12.32	15.04
M=5, R=40, Sr	31.873	22.711	11.25	12.56	19.17	20.48
M=5, R=80, Sr	10.778	11.422	15.34	15.13	28.97	28.76
M=5, R=20, Sf	113.341	69.578	6.50	8.27	12.67	14.44
M=5, R=40, Sf	39.393	35.583	10.43	10.83	19.46	19.85
M=5, R=80, Sf	13.321	17.895	14.56	13.46	29.30	28.20
M=5, R=20, Sm	175.545	44.409	5.05	9.97	14.53	19.45
M=5, R=40, Sm	61.013	22.711	8.76	12.56	21.10	24.89
M=5, R=80, Sm	20.632	11.422	12.92	15.13	30.97	33.18
M=6, R=20, Sr	208.635	102.441	4.52	6.86	14.39	16.73
M=6, R=40, Sr	72.514	52.389	8.11	9.34	20.84	22.06
M=6, R=80, Sr	24.521	26.347	12.26	11.99	30.70	30.43
M=6, R=20, Sf	257.862	160.500	3.91	5.34	17.28	18.71
M=6, R=40, Sf	89.624	82.081	7.34	7.66	23.57	23.89
M=6, R=80, Sf	30.306	41.279	11.45	10.25	33.39	32.20
M=6, R=20, Sm	399.381	102.441	2.79	6.86	26.68	30.75
M=6, R=40, Sm	138.811	52.389	5.81	9.34	32.56	36.09
M=6, R=80, Sm	46.939	26.347	9.76	11.99	42.22	44.45
M=7, R=20, Sr	474.666	236.306	2.40	4.15	27.34	29.09
M=7, R=40, Sr	164.977	120.849	5.25	6.28	33.04	34.07
M=7, R=80, Sr	55.787	60.776	9.10	8.78	42.61	42.28
M=7, R=20, Sf	586.662	370.233	1.98	2.97	37.96	38.94
M=7, R=40, Sf	203.903	189.340	4.59	4.81	43.42	43.65
M=7, R=80, Sf	68.950	95.221	8.30	7.12	52.85	51.67
M=7, R=20, Sm	908.631	236.306	1.26	4.15	70.36	73.25
M=7, R=40, Sm	315.808	120.849	3.36	6.28	75.31	78.23
M=7, R=80, Sm	106.791	60.776	6.71	8.78	84.38	86.44

La Figure (5.2) ci-dessous récapitule toutes valeurs de Td calculées suivant les différentes approches. On remarque les valeurs des durées déterminées suivant notre méthodologie est en accord avec la moyenne des valeurs données par les autres auteurs, (voir Fig.5.3).

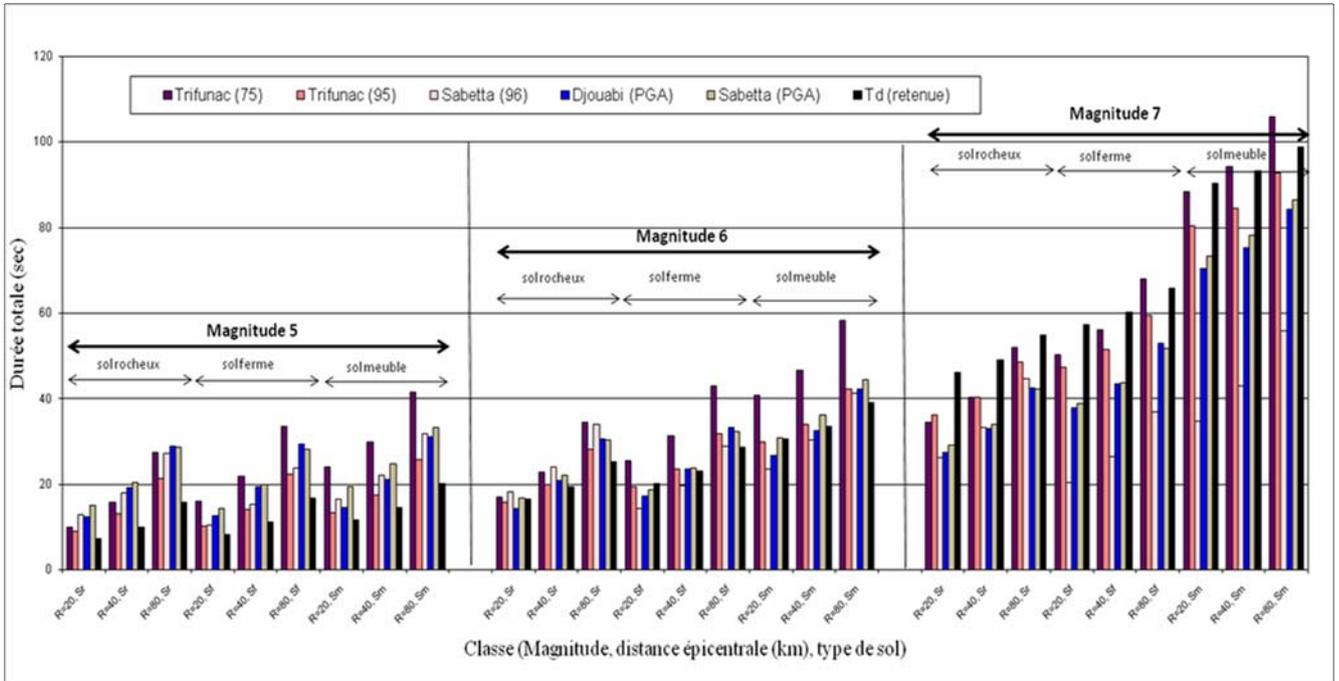


Fig.5.2- Comparaison entre la durée totale suivant plusieurs propositions de régressions. avec M : magnitude, R : distance épacentrale (km), S : type de sol r (rocheux) f (ferme) m (meuble)

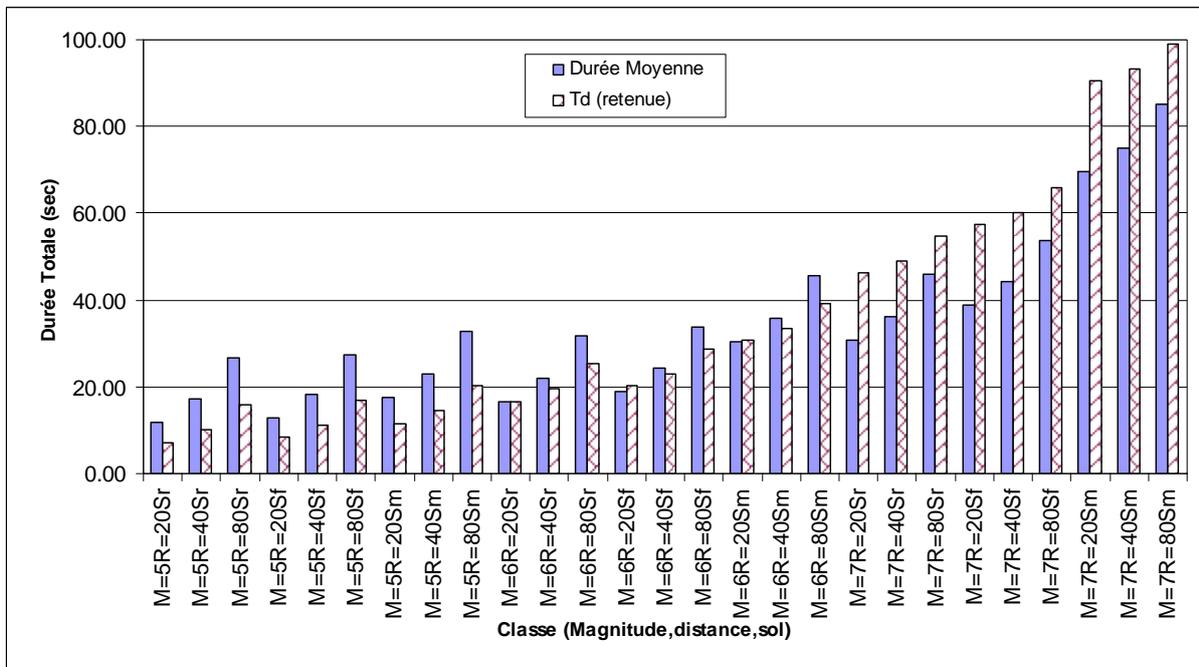


Fig.5.3- Comparaison entre la durée totale retenue dans notre étude et la moyenne des autres approches avec M : magnitude, R : distance épacentrale (km), S : type de sol r (rocheux) f (ferme) m (meuble)

On remarque que T_d déterminé suivant l'approche retenue a une meilleur corrélation pour magnitude $M=6$; la durée déterminée dans cette étude est en moyenne supérieur à celle des autres approches le rapport étant compris entre 1,16 et 1,51 ; alors que pour les faibles magnitude $M=5$ la tendance est inférieure aux autres avec un rapport compris entre 0,58 et 0,65 .

2.2 Distribution de phases:

La méthode de génération d'accélération synthétiques retenue dans ce travail utilise la superposition d'ondes sinusoïdales dont les amplitudes sont reliées au spectre de densité d'énergie des accélérations du sol ; mais aucune procédure pratique n'a encore fait l'unanimité pour leur affecter les phases de manière réaliste.

Pour synthétiser des accélérogrammes ayant des caractéristiques nonstationnaires proche de la réalité, il est suggéré dans ce travail deux différentes options pour la sélection des phases. Dans la première, la tendance moyenne des angles de phases ainsi que leur fluctuation autour de cette moyenne sont gérées par une fonction de densité de probabilité des dérivées de phases $P(\phi')$ dépendant des trois premiers moments de l'enveloppe temporelle (Nigam 1982), la deuxième option propose l'utilisation des phases d'un accélérogramme réel appropriée. Lorsque l'information disponible ne permet l'utilisation des deux options citées ci-dessus pour la sélection des phases, il peut être nécessaire d'avoir recours à l'approche utilisant des phases uniforme.

2.2.1. Distribution de phases uniformes

L'appréciation du contenu phasique dans les procédures de simulation des mouvements sismiques a, jusqu'à un passé récent, été associée à une distribution de variables aléatoires uniformément répartie dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, Fig. (5.4). Ce qui veut dire que l'on assimile les spectres de phases de Fourier des enregistrements réels de tremblements de terre à des bruits blancs. Cette distribution conduit à une répétition uniforme de l'énergie libérée sur toute la durée de l'accélérogramme considéré.

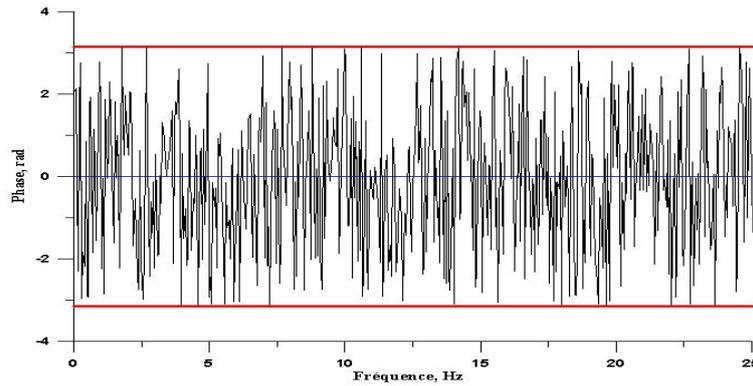


Fig. 5.4- Présentation d'une distribution de phases uniforme

Enveloppe temporelle associée à la distribution uniforme de phases:

Plusieurs enveloppes types sont proposés de la plus simple comme l'enveloppe proposé dans (Simqke 1976), type exponentiel (Preumont 1980), (Clough & Penzien 1975)

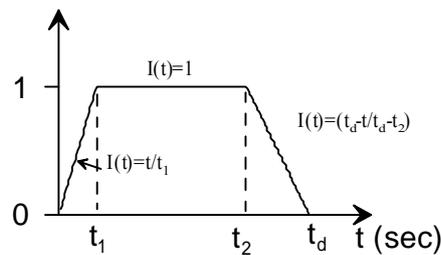


Fig. 5.4- présentation de l'enveloppe proposée par SIMQKE1.

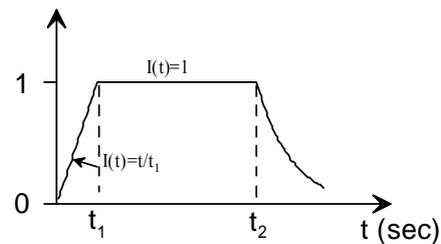


Fig. 5.5- présentation de l'enveloppe proposée par (Preumont 1980).

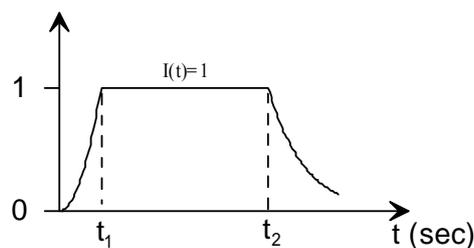


Fig. 5.6- présentation de l'enveloppe proposée par (Clough, Penzien 1975).

Durant cette phase, l'amplitude de l'enveloppe temporelle suit une croissance progressive dont la forme retenue est donnée par l'expression de Jennings suivante (Gupta 1993) :

$$env(t) = I(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{T_1}\right)^2 & \text{pour } t \leq T_1 \\ 1 & \text{pour } T_1 \leq t \leq T_2 \\ \exp^{-\alpha(t-T_2)} & \text{pour } T_2 \leq t \leq T_d \end{cases} \quad (5.8)$$

2.2.2. Distribution des dérivées de phases:

En modélisant la partie des mouvements forts des accélérations sismiques comme des bruits Gaussiens modulés par une enveloppe temporelle, Nigam a montré que la distribution des dérivées de phase dépend effectivement des trois premiers moments de l'enveloppe temporelle, à travers la relation analytique suivante :

$$p(\phi') = \frac{\rho^2}{2} \frac{1}{\left[(\phi' - t_m)^2 + \rho^2\right]^{3/2}} \quad (5.9)$$

Où $\phi' = \frac{d\phi(f)}{df}$ dérivée par rapport à la fréquence f des phases $\phi(f)$

$\rho^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)^2$ écart-type associé à la durée du mouvement fort.

$t_m = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ délai moyen de groupes.

$\gamma_i = \int_{-\infty}^{+\infty} t^i A^2(t) dt \quad i = 0,1,2$ est le moment d'ordre i du carré de l'enveloppe $A(t)$.

L'enveloppe temporelle $A(t)$ est définie par l'expression suivante :

$$A(t) = \left(x^2(t) + \hat{x}^2(t) \right)^{1/2} \quad (5.10)$$

Où $x(t)$ est un signal réel et $\hat{x}(t)$ est la transformée de Hilbert du signal $x(t)$, en d'autre terme, elle est le résultat de l'application de $x(t)$ à l'entrée du système linéaire de fonction de transfert.

$$H(f) = i \operatorname{sign}(f) = \begin{cases} i & f > 0 \\ -i & f < 0 \\ 0 & f = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Il suit le théorème de convolution, que $h(t)$ peut alternativement être définie comme la convolution de $x(t)$ par la réponse impulsionnelle correspondant à $H(f)$, $h(t) = \frac{1}{\pi t}$.

On obtient :

$$\hat{x}(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (5.12)$$

La fonction de répartition des délais des groupes permettant de générer le contenuphasique est donnée par la relation suivante (Hammoutene 1995) :

$$F(\phi') = \frac{1}{2} + \frac{t_m - \phi'}{\left[(\phi' - t_m)^2 + \rho^2 \right]^{3/2}} \quad (5.13)$$

2.2.3. Phases des accélérogrammes réels

Lorsqu'il est possible d'identifier un accélérogramme réel qui puisse être retenu pour représenter les conditions sismologiques ainsi que les conditions locales du site de construction, ses phases peuvent être utilisées pour synthétiser des accélérogrammes compatibles avec son spectre de réponse considéré comme cible.

Si $F(\omega)$ est la transformé de Fourier de l'accélérogramme considéré, alors

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\phi(\omega)} \quad (5.14)$$

Les valeurs des phases sont données alors par :

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{F(\omega)}{|F(\omega)|} \right) \quad (5.15)$$

On utilise alors la procédure décrite précédemment pour obtenir l'accélérogramme dont les amplitudes sont reliées avec la DSP compatible avec le spectre de réponse cible.

3. Aspects numériques de la procédure de simulation

Dans ce paragraphe, nous développons tous les aspects nécessaires à la mise en œuvre de la procédure numérique de simulation nonstationnaire. Le problème consiste à calculer un signal synthétique $r(t)$ en suivant la procédure décrite plus haut. Le signal $r(t)$, qui ne représente qu'une réalisation du processus $R(t)$ auquel il appartient. S'exprimera donc, compte tenu des équations (5.16) et (5.17), comme une somme d'harmoniques nonstationnaires $r(f_k, t)$

$$r(t) = \sum_{k=1}^N r(f_k, t) \quad (5.16)$$

Où :

$$N = \frac{f_{\max}}{\Delta f} \quad (5.17)$$

Δf est la résolution spectrale et f_{\max} la plus haute fréquence compatible avec le théorème de Nyquist.

Si Δt est le pas d'échantillonnage en temps alors :

$$f_{\max} = \frac{1}{2 * \Delta t} \quad (5.18)$$

Les harmoniques $r(f_k, t)$ sont définies par l'équation :

$$r(f_k, t) = A(f_k) * \sin[2\pi f_k t + \theta_k] \quad (5.19)$$

avec :

$$A(f_k, t) = \sqrt{4\pi * G_{xx}(f_k) * \Delta f}$$

et $f_k = k * \Delta f$

L'évaluation des amplitudes $A(f_k, t)$ associées à chaque valeur du temps $t_m = m * \Delta t$, ($m = 1, 2, \dots, M$) et de la fréquence $f_k = k * \Delta f$, ($k = 1, 2, \dots, N$) représentent les amplitudes de notre accélérogramme à simuler. Les indices M et $N = M/2$ sont respectivement associés à la durée totale $T = (M-1) * \Delta t$ et à la fréquence de Nyquist $f_{\max} = N * \Delta f$ de l'enregistrement considéré.

Et pour application le pas d'échantillonnage en temps Δt est toujours pris égal à 0.02 sec.

Par ailleurs, les phases θ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) sont générées conformément à la distribution de probabilité choisie en adoptant la procédure suivante pour chaque incrément k ($k = 1, 2, \dots, N$):

- On génère un nombre aléatoire A compris entre 2 et 1. Ce nombre représentant la valeur de

la fonction de répartition $F(\theta_k)$, $F(\Delta\theta_k)$ ou $F(\theta_k')$ selon que l'on a choisi une distribution de phase, dans notre cas les dérivées de phases. Le nombre A est généré numériquement, en utilisant la subroutine RAN1 (Press et al 1986) : on fait appel à ce sous-programme avec, comme argument, un nombre entier négatif.

Donc notre cas l'accélérogramme sera généré comme suivant :

$$\ddot{x}(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4\pi * G(f_k) * \Delta f} * \sin[2\pi f_k * t + \theta_k] \quad (5.20)$$

Et après la construction de l'accélérogramme simulé avec la méthode présentée par Preumont (1980), on passe au calcul du spectre de réponse qui conduira à la comparaison avec le spectre de réponse cible. Et pour ça, en utilisant l'algorithme présenté dans le livre Dynamique des structures de Paultre (2005).

4. Applicabilité de la procédure de simulation :

La méthode de simulation développée dans ce travail a été basée sur la compatibilité des accélérogrammes obtenus avec un spectre de réponse cible.

L'applicabilité de cette méthode est maintenant vérifiée en sélectionnant des spectres cibles de diverses sources.

Afin de tester la sensibilité des accélérogrammes de simulation aux paramètres environnementaux, nous avons choisi de sélectionner d'une part, les spectres cibles proposés par Safak (1988) qui propose les formes spectrales en corrélation directe avec la magnitude et la distance et d'autre part, ceux proposés par Seed (1976) qui sont fonction de la nature des conditions locales de site.

4.1. Cas où les paramètres environnementaux sont identifiés

4.1.1 Effet de la magnitude

La figure (5.7) montre les accélérogrammes simulés pour un sol ferme à une distance épacentrale de 10 km pour différentes valeurs de la magnitude. L'augmentation des valeurs de la magnitude engendre une augmentation de l'amplitude, de la durée et du contenu basses fréquences du signal. Pour chaque magnitude, les valeurs des PGA des signaux simulés reproduisent sur chaque accélérogramme suivent de manière proche la valeur *prédite par la*

loi d'atténuation reportée sur le haut de la figure, et leurs moyennes convergent vers celle – ci.

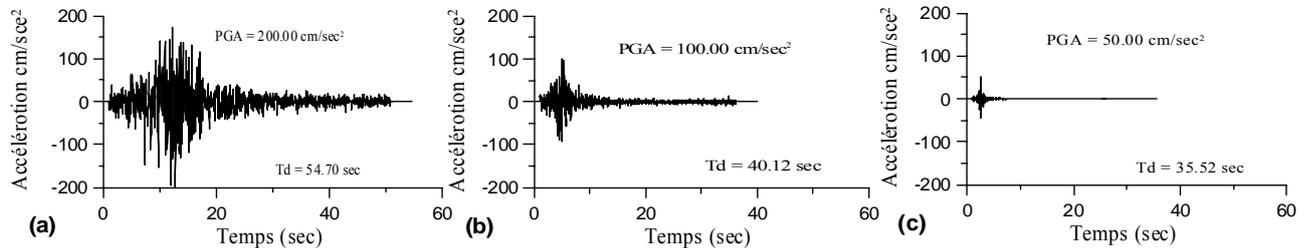


Fig. 5.7- Accélérogrammes compatibles aux spectres de réponse de Safak (1988) pour trois cas (sol ferme, $R=10$ km et $M=7, 6$ et 5).

4.1.2 Effet de la distance épacentrale

L'atténuation du mouvement du sol en fonction de la distance épacentrale est représentée sur la Fig.(5.8). Comme il était prévisible, les plus grandes distances correspondent aux plus faibles accélérations, et plus longues durées.

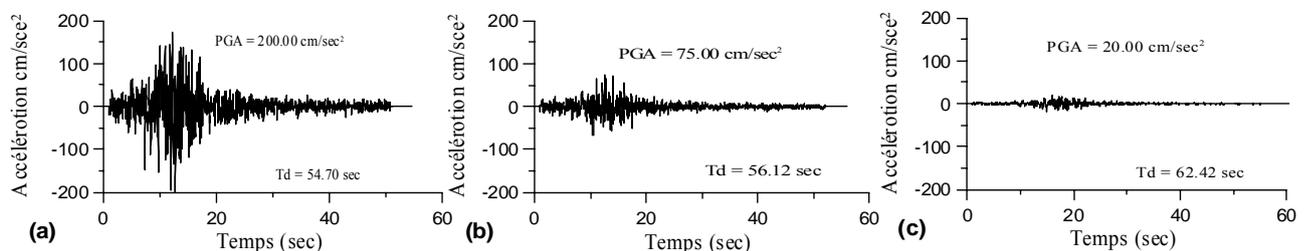


Fig. 5.8- Accélérogrammes compatibles aux spectres de réponse de Safak (1988) pour trois cas (sol ferme, $M=7$, et $R=10, 20$ et 50 km).

4.1.3 Effet des conditions locales de site

La figure (5.9) montre l'effet de différentes conditions locales de site sur les fonctions temporelles de l'accélération. En allant du sol ferme vers le sol rocheux, on constate une diminution de la durée du mouvement sismique et une augmentation du contenu hautes fréquences responsable des plus petites valeurs du PGA. A l'inverse, le sol meuble par rapport au sol ferme montre une durée plus grande, un contenu basses fréquences plus important et des pics d'accélérations plus grands.

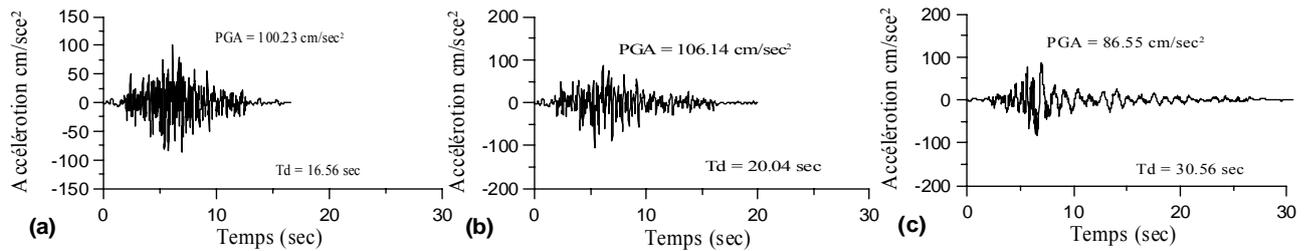


Fig. 5.9- Accélérogrammes compatibles aux spectres de réponse de Seed (1976) pour trois cas ($M=6$ et $R= 20$ km et sol rocheux, ferme et meuble).

4.2 Cas où les paramètres environnementaux ne sont pas identifiés

Afin d'illustrer l'applicabilité de la méthode au cas des séismes réels nous avons choisi d'adopter comme spectre de réponse cible ceux associés aux accélérogrammes d'*El-Centro* de 1940 et d'*EL-Asnam* de 1980 et de *Cherchell* 1989.

La figure (5.10-(c),(d)) montre les traces de l'accélérogramme réel enregistré, lors du séisme d'*El-Centro* de 1940 et l'un des 15 accélérogrammes simulés obtenus par l'application de la procédure de la simulation. En utilisant la superposition d'ondes sismiques dont les amplitudes sont données par la DSP compatible et préservant complètement les caractéristiques du contenuphasique de l'accélérogramme original.

On constate une bonne concordance entre les signaux synthétiques et le signal original en termes des amplitudes temporelles suivant la valeur de PGA imposée.

Le spectre de réponse moyen des accélérogrammes simulés et celui de l'accélérogramme réel sont tracés sur la figure (5.10-e,f), avec une qualité de compatibilité entre le spectre de réponse simulé et le spectre de réponse cible $PSV^{cible}(T)$ avec une erreur sur RMS inférieure à 5% (Giaralis 2009).

$$RMS\ erreur = \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{PSV^{cible}(T_j) - PSV(T_j)}{PSV^{cible}(T_j)} \right)^2} \quad (5.21)$$

La comparaison de ces deux spectres de réponse montre une bonne superposition de leurs graphes preuve de leur compatibilité.

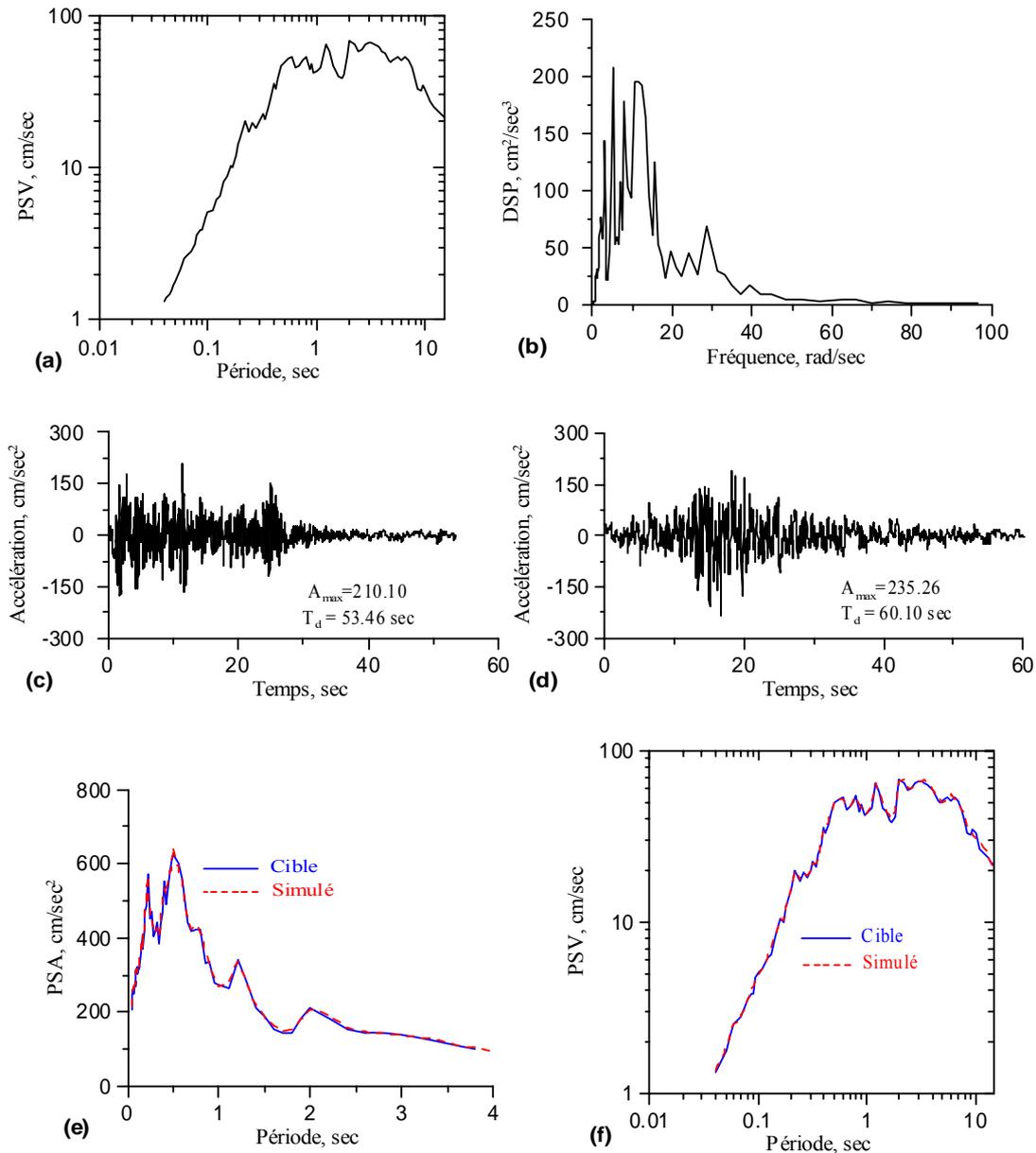


Fig. 5.10- Accélérogrammes compatibles aux spectres de réponse de séisme d'El-Centro 1940 et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles, pour une classe de : ($M=7, R=40$ km, sol ferme) (a) PSV cible, (b) DSP compatible, (c) accélérogramme réel du séisme, (d) accélérogramme simulé, (e) Comparaison PSA-simulé avec PSA-cible, (f) Comparaison PSV-simulé avec PSV-cible,

4.3 Génération des accélérogrammes compatibles avec les spectres réglementaire

Classification retenue pour les paramètres environnementaux (m_{ds}):

Afin de traduire le zonage proposé par les différentes réglementations parasismiques en terme de variations des paramètres sismologiques utilisés dans notre étude, nous faisons usage de la classification proposée par Hammoutene (1995) sur le Tableau (5.8) :

Tableau 5.8- Classification des paramètres (Magnitude et distance)

Magnitude	Distance épicentre en km		
	d1	d2	d3
m1	< 10	10 – 20	≥ 20
m2	< 15	15 – 30	≥ 30
m3	< 20	20 – 40	≥ 40
m4	< 25	25 – 50	≥ 50
m5	< 30	30 - 60	≥ 60

Où $m1 \leq Ms=4,5$; $Ms=4,5 \leq m2 \leq Ms=5,5$; $Ms=5,5 \leq m3 \leq Ms=6,5$;

$Ms=6,5 \leq m4 \leq Ms=7,5$; $Ms=7,5 \leq m5$.

Les utilisations locales de site sont désignées par S_0 pour les sols rocheux, S_1 pour les sols fermes et S_2 pour les sols meubles.

Les spectres de réponse moyens correspondant à 15 accélérogrammes simulés sont comparés avec les formes spectrales considérées comme cibles et suggérées par le code algérien RPA2003 (DTR BC 2-48 RPA Version 2003) pour les cas de sols en zone III de catégorie S_1 (site rocheux : $800 \text{ m/s} \leq V_s$), de catégorie S_2 (site ferme : $400 < V_s \leq 800 \text{ m/s}$) et de catégorie S_3 (site meuble : $200 < V_s \leq 400 \text{ m/s}$) correspondant grossièrement, dans aux classes de sol **rocheux**, **ferme** et **meuble** de la présente étude, respectivement. Les accélérogrammes synthétiques, les fonctions de Densités Spectrales de Puissance (DSP) et les pseudo-spectres de réponse en accélérations (PSA) et en vitesses (PSV), calculés pour le cas des structures en portiques d'acier dense ($\xi = 0.05$, Tableau 4.2 du RPA 2003) classés "ouvrages d'importance vitale" (Groupe d'importance 1A selon les critères de classification du RPA 2003, Chapitre III), sont représentés sur la figure (5.11).

Les formes des accélérogrammes montrés sur la (Fig. 5.11) ont été obtenus pour des conditions de sites différents, En analysant les formes temporelles de ces accélérogrammes ainsi que les valeurs des PGA, on abouti aux mêmes conclusions que celles obtenus en étudiant l'influence du site sur les accélérogrammes (§ 4.1.3).

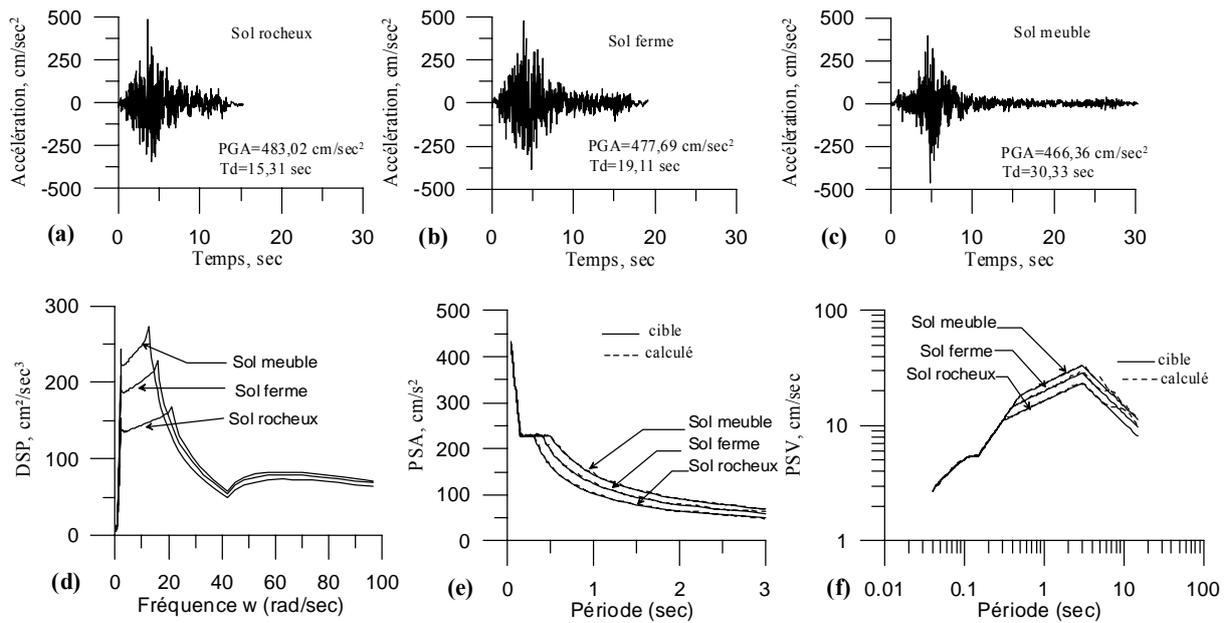


Fig. 5.11- Comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse du règlement RPA 2003, pour une Zone III $A=0.40$ $PGA=490.50 \text{ cm/s}^2$ correspondant à la classe de (m3d1 s0, s1, s2) ;
 (a, b, c) accélérogrammes simulés (m3d1s0, m3d1s1, m3d1s2 respectivement),
 (d) DSP compatibles, (e) Comparaison PSA-simulé avec PSA-cible, (f) Comparaison PSV-simulé avec PSV-cible,

On remarque que la durée totale T_d passe du simple (15sec) au double (30 sec), l'énergie libérée au site étant la même, le PGA a tendance à diminuer mais très peu sensible, Les accélérogrammes exhibent des PGA dont les valeurs sont voisins de celles suggérées par le RPA2003 à savoir la valeur (1.25Ag) du spectre de calcul pour $T=0$ (Zone III, Groupe 1A) correspondant à l'amplitude du spectre de calcul en accélération pour la période $T=0$ ($A=0.40$, structure implantée en zone III et appartenant au groupe d'importance 1A).

Avec l'application de la loi de régression de Djouabi (2010) on a les valeurs des classes correspondant aux PGA de chaque zone sismique proposé par le Règlement Parasismique Algérien version 2003, pour une structure classé IA ouvrages d'importance vitale (Sécurité, Hopitaux,...) pour différents types de sol.

$$PGA=1.25*A*g \quad \text{avec } g = 981 \text{ cm/sec}^2 \tag{5.22}$$

Et pour cela on propose les répartitions des classes suivant le Tableau (5.9), avec cette classification on peut lire : Z-III sol ferme correspond à la classe m2d1s1 ou bien m4d1s1.

Tableau 5.9- Classification (m/s) correspondant au zonage proposé par le RPA2003.

Sol rocheux (s0)			
Classe	Distance		
	d1	d2	d3
Magnitude	m1	Z-IIa , Z-I	-
	m2	Z-III, ZIIb, Z-IIa , Z-I	-
	m3	Z-III, ZIIb, Z-IIa	Z-I
	m4	Z-III, ZIIb	Z-IIa , Z-I
	m5	-	Z-III, ZIIb, Z-IIa
Sol ferme (s1)			
Classe	Distance		
	d1	d2	d3
Magnitude	m1	Z-IIb-Z-IIa , Z-I	-
	m2	Z-III, ZIIb, Z-IIa , Z-I	-
	m3	Z-III, ZIIb, Z-IIa	Z-I
	m4	Z-III	ZIIb, Z-IIa , Z-I
	m5	-	Z-III, ZIIb, Z-IIa
Sol meuble (s2)			
Classe	Distance		
	d1	d2	d3
Magnitude	m1	Z-III, Z-IIb-Z-IIa	Z-I
	m2	Z-III, ZIIb, Z-IIa	Z-I
	m3	Z-III	ZIIb, Z-IIa, Z-I
	m4	Z-III	ZIIb, Z-IIa
	m5	-	Z-III

La zone III de la réglementation parasismique propose des seuils de demande sismique qui restent en deçà des seuils requis prévus par notre approche ; en effet pour la classe m5d1 pour les sols s0,s1 et s2 , les amplitudes d'accélération données par notre étude sont supérieures à l'accélération proposée par le règlement qui est de 490.50 cm/sec^2 .

A l'opposé, les classes m1d2s0, m1d3s0, m1d2,s1, m1d3,s1... peuvent être considérées au regard de la réglementation RPA2003 comme des zones à faible aléa sismique.

Les formes des DSP font représenter l'influence du type de sol à savoir que les amplitudes spectrales augmentent on va du sol rocheux au sol meuble avec un décalage du maxima vers les basses fréquences.

Les mêmes remarques peuvent être déduites de l'observation des spectres de réponse en vitesse et déplacement.

Les mêmes observations sont mises en relief pour les zones (I), (Iia) et (Iib) proposées par le RPA2003.

De même, le même travail a été effectué en considérant les codes de calcul UBC, USNRC, EC8, et on tire les mêmes remarques.

5. Conclusions

Dans ce chapitre, on a présenté les divers aspects qui régissent la procédure de simulation des accélérogrammes compatibles avec des spectres de réponse cibles.

Après avoir défini les divers paramètres de simulation, nous avons analysé l'applicabilité de cette méthode en considérant des spectres de réponses sensibles aux paramètres environnementaux, d'un part, et des spectres de réponse réglementaires, d'autre part.

Les accélérogrammes obtenus traduisent de manière implicite cette sensibilité à travers les valeurs des PGA et celles des divers phases temporelles qui caractérisent la nonstationnarité temporelle.

Une corrélation entre la classification réglementaire et la classification retenue dans cette étude a été possible à travers les résultats obtenus c'est ainsi que des accélérogrammes réglementaires ont été définis pour chaque classe de magnitude, distance épacentrale et condition local de site prenant donc en charge l'aléa déduit sur le terrain d'un retour d'expérience.

Les accélérogrammes représentent l'outil adéquat pour l'évaluation des seuils de réponse compatibles avec le comportement dynamique conforme au degré de fiabilité requis pour les structures de grande importance notamment à comportement non linéaire.

CHAPITRE 6
CONCLUSIONS GENERALES
ET RECOMMANDATIONS
FUTURES

CHAPITRE 6

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET RECOMMANDATIONS FUTURES

Dans ce travail de recherche, nous avons développé une méthodologie pour la génération d'accélération sismiques compatibles avec des spectres de réponse cibles.

Dans un premier temps, nous avons comparé deux méthodologies pour le calcul de DSPF, et l'approche itérative s'est révélée meilleur d'autant plus qu'elle prend implicitement l'effet de la nonstationnarité fréquentielle du mouvement sismique.

Par la suite une procédure de génération d'accélérogrammes synthétiques a été développée en utilisant la méthode de superposition d'ondes sinusoïdales dont les amplitudes sont reliées aux densités d'énergies spectrales développées suivant la méthodologie retenue ci-dessus. La compatibilité des accélérogrammes ainsi obtenus, avec les spectres de réponse a été assurée par la mise en place d'une procédure itérative subséquente qui s'est révélée efficace et a permis d'ajuster les amplitudes spectrales des réponses artificielles avec celles du spectre de réponse cible.

Le caractère nonstationnaire des accélérations sismiques dans le domaine temporel a été assuré de trois manières différentes en considérant un contenu phasique uniforme couplé avec le choix d'une fonction temporelle dans un premier temps, en adoptant un contenu phasique généré à partir d'une fonction de densité de probabilité de dérivées de phases dont les paramètres caractérisent la durée des mouvements forts. La troisième méthode a simplement consisté à prendre en compte le contenu phasique de l'accélérogramme réel lorsque celui-ci est disponible du site de construction.

L'applicabilité de la procédure de simulation a été appréciée en utilisant des spectres de réponse cibles d'accélérogrammes réels, des spectres de réponse issus de règlements parasismiques, des spectres de réponse évolués analytiquement à partir de modèles

sismologiques de zone sismique ou calibrés sur la base d'une banque de données pour différentes conditions de sol.

L'applicabilité de la méthode a montré entre autres que :

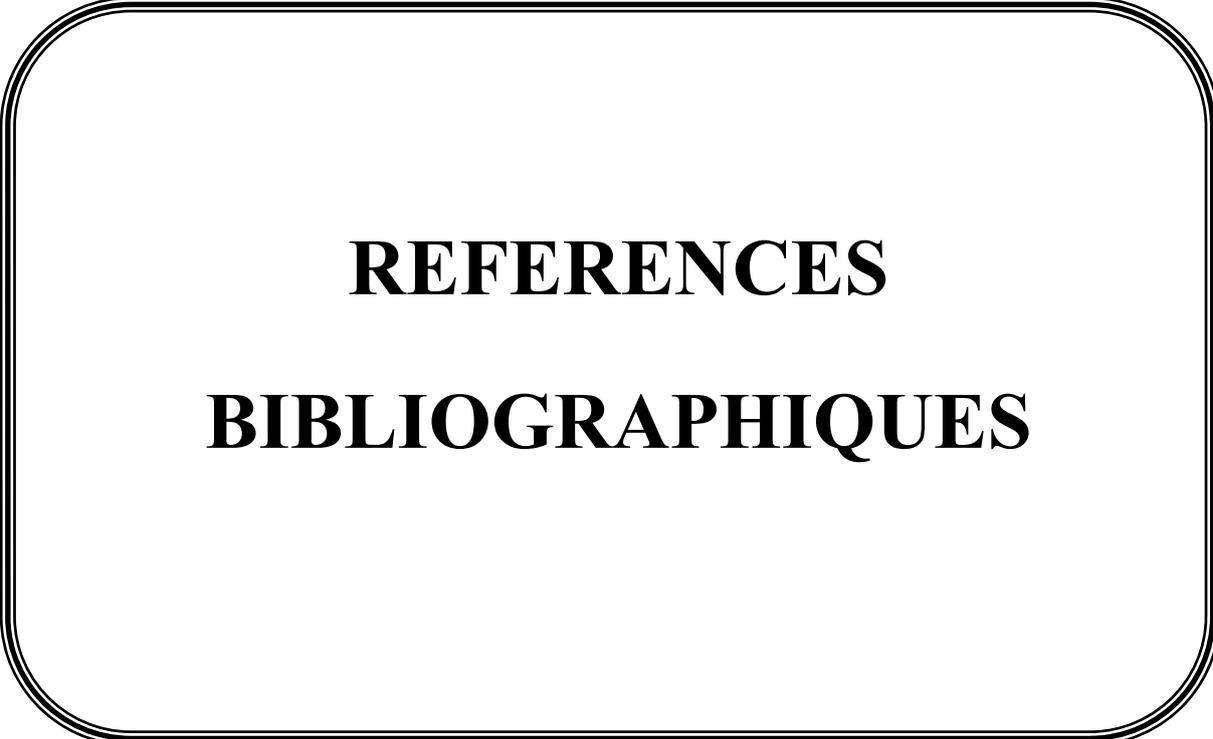
- Une bonne adéquation entre les formes spectrales simulées et cibles.
- Les variations des paramètres de simulation (PGA, durées) sont compatibles avec les variations des conditions sismologiques (Magnitude, distance, site).
- La double nonstationnarité du mouvement sismique est prise implicitement en considération à travers l'évaluation de la DSPF et de la fonction de distribution des phases.
- L'utilisation de spectres de réponse réglementaires permet de proposer à l'ingénieur de bureau étude, des accélérogrammes synthétiques de calcul compatibles avec la réglementation parasismique considérée.

D'autre part, ce travail fournit les outils nécessaires pour le développement d'accélération sismiques réglementaires compatibles avec la réglementation parasismique en vigueur. Ces accélérogrammes seront d'une utilité certaine pour le calcul de la réponse de structures complexes et/ou à comportement non linéaire avec un seuil de fiabilité prenant en compte l'aléa traduit le retour d'expérience dans la zone sismique.

Une appréciation du zonage proposé par le règlement en vigueur est rendu possible en comparant les niveaux d'accélération obtenus pour chaque classe magnitude-site-distance avec ceux proposés par le règlement.

Cette étude pouvait être utilisée à bon escient dans le développement de thèmes de recherche tels que :

- L'étude de l'influence de la variabilité spatiale de l'input sismique sur la réponse sismique probabiliste des structures en introduisant l'effet de passage d'onde et l'effet de l'incohérence du mouvement sismique.
- L'investigation sur l'influence des incertitudes des propriétés dynamiques sur la réponse sismique des structures par des simulations de type Monte-Carlo. Ceci permettra entre autres d'estimer le domaine de validité de la méthode étudiée par rapport aux pourcentages d'incertitudes sur les paramètres dynamiques.
- L'intégration des aspects fiabilistes dans la conception des structures vis-à-vis des tremblements de terre.



REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Amini, A. and M.D. Trifunac (1981). *Distribution of peaks in linear earthquake response*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 107(EM1), 207–227.
- Amini, A. and M.D. Trifunac (1985). *Statistical extension of response spectrum superposition*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **4**, 54–63.
- Arias, A. (1970). *A measure of earthquake intensity, Seismic Design of Nuclear Power Plants*. R.J. Hansen, Editor, the Massachusetts Institute of Technology Press.
- Basu, B., V.K. Gupta and D. Kundu (1996). *Ordered peak statistics through digital simulation*. Earthq. Eng. Struct. Dyn., **25**, 1061–1074.
- Basu, B., V.K. Gupta and D. Kundu (1996a), *A Markovian approach to ordered peak statistics*. Earthq. Eng. Struct. Dyn., **25**, 1335–1351.
- Bendat, J.S. and A.G. Piersol (1986). *Random Data Analysis and Measurement Procedures*. John Wiley & Sons, mc., New York.
- Bozorgnia, Y. and V. Bertero (2004). *Earthquake engineering*, CRC Press, New York, NY.
- Bycroft, G.N. (1960). *White noise representation of earthquakes*. Proc. ASCE, **EM2**, 1–14.
- Cartwright, D.E. and M. S. Longuet-Higgins (1956). *The statistical distribution of maxima for a random function*, Proc. Royal Soc. of London, Ser. **A327**, 212–232.
- Caughey, T.K. and H.J. Stumpf (1961). *Transient response of a dynamic system under random excitation*, J. Applied Mech., ASME, **28**, 563–566.
- Christian, J.T. (1989). *Generating seismic design power spectral density functions*, Earthquake Spectra, **5(2)**, 351–368.
- Clough, R.W. and J. Penzien (1975). *Dynamics of structures*, Mc Graw–Hill, New York, NY.
- Der–Kiuergian, A. and A. Neuenhofer (1992). *Response spectrum method for multiple–support seismic excitations*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **21**, 713–740.

- Djouabi, H. (2010). *Lois prédictives pour l'estimation de la réponse sismique et des mouvements sismiques forts*. Mémoire de magister sous la direction du Pr. M. Hammoutene. ENP Alger.
- Elghadamsi, F.E., B. Mohraz, C.T. Lee and P. Moayad (1988). *Time dependent power spectral density of earthquake ground motion*. Soil Dynam. & Earthq. Eng., **7(1)**, 15–21.
- Giaramis, A., P.D. Spanos (2009). *Wavelet-based response spectrum compatible synthesis of accelerograms – Eurocode application (EC8)*. Soil Dynam. & Earthq. Eng., **29**, 219-235.
- Gupta, I.D., R.G. Joshi (1993). *on synthesizing response spectrum compatible accelerograms*. European Earthquake Engineering, **2**, 25–33.
- Gupta, I.D. (1994). *A probabilistic approach for estimating the response of multi-degree-of-freedom structures*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **13(2)**, 79–87.
- Gupta, I.D. (1994a). *Defining effective peak acceleration via order statistics of acceleration peaks*. Europ. Earthquake Eng., **11**, 3–11.
- Gupta, I.D., R.G. Joshi and V.K. Pandit (1994). *A note on design power spectral density function of strong earthquake ground motion*. Proc. 10th Symp. On Earthquake Eng., Nov. 16-18, Roorkee, 843–852.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1988). *Order statistics of peaks in earthquake response*. J. Engng. Mech. Div., ASCE, **114(10)**, 1605–1627.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1998a). *Defining equivalent stationary PSDF to account for nonstationarity of earthquake ground motion*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **17**, 89–99.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1998b). *A note on the statistics of ordered peaks in stationary stochastic processes*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **17**, 317–328.
- Hammoutène, M. (1995). *Simulation nonstationnaire et bidimensionnelle des enregistrements de tremblements de terre*. Thèse de doctorat d'état ENP Alger.
- Hammoutène, M. , B. Tiliouine et S. A. Zermout (2006). *Effects of reliability models on structural response under stochastic seismic motion*. European Earthquake Engineering, International Journal of Earthquake Engineering and Engineering Seismology, Vol. 1, 14-22
- Kanai, K. (1957). *Semi-empirical formula for the seismic characteristics of ground*. Bull. Earthquake Res. Inst., Univ. of Tokyo, Japan, **35**, 308–325.

- Kaul, M.K. (1978). *Stochastic characterization of earthquakes through their response spectrum*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **6**, 497—509.
- Lai, S.P. (1982). *Statistical characteristics of strong ground motions using power spectral density function*. Bull. Seism. Soc. Amer., **72**, 259—274.
- McCann, M.W., H.C. Shah (1979). *Determining strong-motion duration of earthquake*. Bull. Seism. Soc. Amer., **69**, 1253-1265.
- Newland, D.E. (1984). *An introduction to random vibrations and spectral analysis*. Longman Inc., New York.
- Nigam, N.C. (1982). *Phase properties of a class of random processes*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **10**, 711-717.
- Nigam, N.C. and P.C. Jennings (1968). *Digital calculations of response spectra from strong-motion earthquake records*. Earthquake Engineering Research Laboratory.
- Novikova, E.I., M.D. Trifunac (1994). *Duration of strong ground motion in terms of earthquake magnitude, epicentral distance, site conditions and site geometry*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **23**, 1023-1043.
- Paultre, P. (2005). *Dynamique des structures application aux ouvrages de genie civil*. Lavoisier, Paris.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., (1986). *Numerical Recipes : The Art of scientific computing*. Cambridge University Press.
- Preumont, A. (1980). *A Method for the generation of artificial earthquake accerlerograms*, Nuclear Engineering and design, **59**, 357-368.
- Preumont, A. (1985). *The generation of non-separable artificial earthquake accerlerograms for the design of nuclear power plants*, Nuclear Engineering and design, **88**, 59-67.
- Preumont, A. (1990). *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne.
- Règles Parasismiques Algériennes RPA99 version 2003, (2003). Centre National de Recherches Appliquées en Génie Parasismique, D.T.R.-B.C.-2.48, Alger.
- Reinoso, E., M. Ordaz (2001). *Duration of strong ground motion during Mexican earthquakes in terms of magnitude, distance to the rupture area and dominant site period*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **30**, 653-673.

- Rice, S.O. (1944). *Mathematical analysis of random noise*. Bell System Tech. J., **22**, 282–332.
- Rice, S.O. (1945). *Mathematical analysis of random noise*. Bell System Tech. J., **24**, 46–156.
- Sabetta, F., A. Pugliese (1996). *Estimation of response spectra and simulation of nonstationary earthquake ground motions*. Bull. Seism. Soc. Amer., **86**, 337-352.
- Şafak, E. (1988). *Analytical approach to calculation of response spectra from seismological models of ground motion*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **16**, 121–134.
- Seed, H.B., C. Ugas and J. Lysmer (1976). *Site-dependent spectra for earthquake resistant design*. Bull. Seism. Soc. Amer., **66**, 221–234.
- Sibson, R.H. (1989). *Earthquake faulting as a structural process*. Journal of structural geology, **11**, 1-14.
- Tajimi, H. (1960). *A statistical method for determining the maximum response of a building structure during an earthquake*. Proc. 2nd World Conf. Earthquake Eng., Tokyo and Kyoto, Japan, **A-2**, 781–797.
- Tiliouine, B., M. Hammoutène et P. Y. Bard (2000). *On the phase content modelling of earthquake strong ground motions*. European Earthquake Engineering, International Journal of Earthquake Engineering and Engineering Seismology, Vol. 1, 27 – 34
- Tiliouine, B., S. Zermout, A. Mebarki et C. Soize (2003). *Génération de spectre de puissance pour l'analyse stochastique de la réponse sismique des structures*. Proc. VI^e Colloque National AFPS, Génie parasismique : Aspects dynamiques et vibratoires en Génie Civil, Palaiseau, France, **1**, 107–114.
- Trifunac, M.D. and A.G. Brady (1975). *A study on the duration of strong earthquake ground motion*. Bull. Seism. Soc. Amer., **65**(3), 581–626.
- Trifunac, M.D. (1978). *Response spectra for earthquake ground motion*. J. Engng. Mech. Div., ASCE, (**EM5**), 1081-1097.
- Udwadia, F.E. and M.D. Trifunac (1974). *Characterization of response spectra through the statistics of oscillator response*. Bull. Seism. Soc. Amer., **64**, 205–219.
- Unruh, J.F. and D.D. Kana (1981). *An iterative procedure for the generation of consistent power/response spectrum*. Nuclear Eng. & Design, **66**, 427–435.

- U.S. Nuclear Regulatory Commission (1973). *Design response spectra for seismic design of nuclear power plants*. Regulatory guide 1.60, Washington D.C.
- Vanmarcke, E.H., D.A. Gasparini (1976). *SIMQKE- Simulated earthquake motions compatible with prescribed response spectra*. Dept. of Civil Eng., Massachusetts Institute of Technology., R76-4.
- Vanmarcke, E.H., S.P. Lai (1980). *Strong-motion duration and RMS amplitude of earthquake records*. Bull. Seism. Soc. Amer., **70**, 1293-1307.
- Wang, J., L. Fan, S. Qian, J. Zhou (2002). *Simulations of non-stationary frequency content and its importance to seismic assessment of structures*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **31**, 993-1005.
- Zermout, S. (2004). *Investigation de la réponse stochastique des structures sous excitations sismiques*. Thèse de magister ENP Alger.
- Zerva, A., T. Harada (1997). *Effet of surface layer stochasticity on seismic ground motion coherence and strain estimates*. Soil Dynam. & Earthq. Eng., **16**, 445-457.

Annexe

Calcul de la dérivé de la fonction de transfert d'un oscillateur simple par rapport à la fréquence propre et à l'amortissement pour les réponses en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accelération

Pour la réponse en déplacement le carré du module de la fonction de transfert d'un oscillateur de fréquence propre ω_j et d'amortissement ξ_j s'écrit :

$$\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) = \frac{1}{(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2} \quad (\text{A1.1})$$

Il en résulte les dérivées suivantes par rapport à la fréquence propre et à l'amortissement

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} \right]_{\frac{\bar{\omega}_j}{\xi_j}} = \frac{-4\bar{\omega}_j [(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2) + 2\xi_j^2 \omega^2]}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \right]_{\frac{\bar{\omega}_j}{\xi_j}} = \frac{-8\xi_j \bar{\omega}_j^2 \omega^2}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad (\text{A1.2})$$

De même, pour la réponse en pseudo-vitesse, on aura :

$$\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) = \frac{\omega_j^2}{(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2} \quad (\text{A1.3})$$

et les dérivées correspondantes

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} \right]_{\frac{\bar{\omega}_j}{\xi_j}} = \frac{2\bar{\omega}_j (\bar{\omega}_j^4 + \omega^4)}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \right]_{\frac{\bar{\omega}_j}{\xi_j}} = \frac{-8\xi_j \bar{\omega}_j^4 \omega^2}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad (\text{A1.4})$$

Pour la réponse en pseudo-accelération on aura :

$$\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) = \frac{\omega_j^4}{(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2} \quad (\text{A1.5})$$

d'où

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} \right]_{\frac{\bar{\omega}_j}{\xi_j}} = \frac{4\bar{\omega}_j^3 \omega^2 (-\bar{\omega}_j^2 + \omega^2 + \xi_j^2 \bar{\omega}_j^2)}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \right]_{\frac{\bar{\omega}_j}{\xi_j}} = \frac{-8\xi_j \bar{\omega}_j^6 \omega^2}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad (\text{A1.6})$$