

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Approximation Optimale des
Systèmes dynamiques linéaires
continus de grande dimension*

Proposé par :

Mr BETTAYEB

Chargé de recherches au C.E.N

Etudié par :

BOUAMAR Mohamed

DERICHE Mohamed

Dirigé par :

Mr BETTAYEB



PROMOTION : Juin 1984

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REpubLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

—»O«—

وزارة التعليم والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

—»O«—

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

—»O«—

Département : ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

INGENIORAT D'ETAT EN ELECTRONIQUE

SUJET

*Approximation Optimale des
Systèmes dynamiques linéaires
continus de grande dimension*

Proposé par :

Mr BETTAYEB

Chargé de recherches au C.E.N

Etudié par :

DERICHE Mohamed

BOUAMAR Mohamed

Promotion : Juin 1984



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

وَقُلْ هِجْرَتِيْ
عَلَيْكُمْ مَّا
دَعَا لِيْ

صَدَقَ اللهُ الْعَلَمَاءَ

- DEDICACES -

Je dédie ce modeste travail :

- A la mémoire de mon grand père Salah,
- A mes très chers parents, pour leur sacrifice,
- A ma très chère tante (N), pour son sacrifice,
et son courage,
- A mes très chers frères et soeurs,
- A mes deux très chers frères et amis Layachi.D
et Abdesslam.B,
- A tous ceux qui témoignent qu'il n'y a d'autre
divinité qu'Allâh unique, et que Mohamed
est son serviteur et son envoyé.

M^{ed}. BOUAMAR .



Je dédie ce modeste travail :

- A la mémoire de mon grand-père BELKACEM
- A mon père pour tout ce qu'il a fait pour moi
- A ma mère
- A tous mes frères et sœurs
- A mon frère MUSTAPHA
- Aux frères des mosquées de
BORDJ-MENAÏL et Tizi-OUZOU.
- A tous ceux qui témoignent qu'il n'y a
autre Dieu qu'ALLAH et que MOHAMED
est son prophète

M. DERICHE

~~Deriche~~
y
3

- REMERCIEMENTS -

Ce travail a été effectué au centre de développement de la conversion de l'énergie (C.D.C.E) du Commissariat aux énergies nouvelles .

Nos remerciements vont d'abord à Mr. BETTAYEB responsable du laboratoire instrumentation et contrôle, qui a bien voulu nous accueillir, nous tenons à lui exprimer toute notre gratitude pour les critiques, les conseils et les encouragements qu'il nous a prodigué tout au long de l'élaboration de ce mémoire .

Nos remerciements vont également à Mrs. DJEFFAL, SELLAL, ainsi que les étudiants de magister en automatisme .

— TABLE DES MATIÈRES —

	Page
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I. Notion sur la réduction des systèmes complexes.....	4
I.1 Introduction.....	4
I.2 Problème de réduction.....	4
I.3 Critères de choix d'une méthode de réduction	6
I.4 Réduction par agrégation de variables d'état....	6
I.4.1 Principe de l'agrégation.....	6
I.4.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'agrégation.	8
I.4.3 Structure du modèle agrégé.....	9
I.5 Principe des méthodes de réduction optimale.....	11
CHAPITRE II. Etude de quelques modèles agrégés.....	12
II.1 Introduction.....	12
II.2 Exemples classiques de modèles agrégés.....	12
II.2.1 Modèles de DAVISSON.....	12
II.2.2 Modèles de CHIDAMBARA.....	16
II.2.3 Modèle de FOSSARD-DAVISSON.....	17
II.2.4 Modèles réduits par perturbations singulières..	18
II.3 Conclusions.....	23
CHAPITRE III. Réduction optimale, des systèmes complexes.....	25
III.1 Formulation et résolution théorique du problème de réduction optimale.....	25
III.1.1 Position du problème.....	25
III.1.2 Conditions d'optimalité pour des entrées Impulsion	26
III.1.3 Conditions d'optimalité pour des entrées Echelon.....	27

III.2	Reduction des systemes mono-entrée ou mono-sortie..	29
III.2.1	Introduction des formes canoniques dans le probleme de reduction optimale.....	29
III.2.2	Cas d'une entrée 'Impulsion'.....	30
III.2.3	Cas d'une entrée 'Echelon'.....	30
III.2.4	Extension au cas des systemes instables.....	32
III.3	Réduction optimale des systemes multivariables..	34
III.3.1	Notion sur les indices de commandabilité.....	35
III.3.2	Etude de quelques formes canoniques.....	35
III.3.2.1	Forme canonique de BRUNOVSKY.....	35
III.3.2.2	Forme canonique de POPOV.....	38
III.3.3	Résolution du probleme de réduction optimale et prise en compte des contraintes..	39
III.4	Mise en oeuvre de la réduction optimale.....	41
III.5	Conclusions.....	44
CHAPITRE IV Agrégation optimale.....		48
IV.1	Introduction.....	48
IV.2	Position du problème.....	49
IV.3	Agrégation optimale pour des entrées Impulsion	51
IV.4	Agrégation optimale pour des entrées 'Echelon'.....	51
IV.5	Choix des modes retenus par le modèle agrégé optimal..	53
IV.5.1	Sélection des modes à partir du régime transitoire.....	55
IV.5.2	Sélection des modes à partir du régime permanent.....	59
IV.6	Algorithme d'agrégation optimale.....	61

CHAPITRE V. Simulation numérique	64
V.1 Montage du variateur de vitesse	64
V.2 Modèle mathématique du variateur de vitesse	64
V.3 Résultats obtenus	66
V.3.1 Réduction optimale	66
V.3.2 Agrégation optimale	66
V.4 Interprétation des résultats	69
V.4.1 Réduction optimale	69
V.4.2 Agrégation optimale	69
V.5 Conclusions	73
CONCLUSION GENERALE	73
ANNEXE	75
BIBLIOGRAPHIE	86

_ Principales notations utilisées _

- n : dimension du système réel .
- m : dimension du modèle réduit.
- r : nombre de commandes d'un système .
- p : nombre de sorties d'un système .
- A : matrice d'évolution du système réel .
- B : matrice de commande du système réel .
- C : matrice d'observation du système réel .
- D : matrice de transmission directe .
- X : vecteur d'état du système réel .
- Z : vecteur d'état du modèle réduit .
- U : vecteur d'entrée .
- Y, \hat{Y} : vecteurs de sortie des systèmes réel et réduit .
- F : matrice d'évolution du modèle réduit .
- G : matrice de commande du modèle réduit .
- H : matrice d'observation du modèle réduit .
- T : matrice modale .
- L : matrice d'agrégation .
- λ_i : valeurs propres de la matrice A .
- t_i : vecteurs propres correspondants .
- J : critère de réduction .
- Tr : trace d'une matrice (= somme de ses élt's diagonaux).
- P_i : indices de commandabilité .
- Q : matrice de commandabilité .
- \otimes : produit direct de matrices .
- \bar{G} : matrice des énergies .

- Introduction générale -

En raison de l'évolution des moyens théoriques et matériels mis à sa disposition, l'automaticien est amené à appréhender des systèmes de plus en plus complexes. L'analyse et la synthèse de tels systèmes conduit le plus souvent à des calculs très lourds voire impossible à exécuter (calculs matriciels, intégrations numériques, etc...). De ce fait, l'utilisation d'un modèle de dimension réduite conservant les caractéristiques principales du système réel, modifie sans doute l'échelle du problème: tant en calcul numérique qu'en commande.

Notons que la recherche de cette représentation simplifiée a été envisagée de deux façons différentes, soit que le modèle réduit est directement identifié à partir des entrées - sorties du système, dans ce cas là, la relation n'est pas explicite et là un inconvénient, soit que le modèle est défini en appliquant au système réel une méthode spécifique de réduction (existence d'une relation au moins de façon approchée entre les états des systèmes réel et réduit) permettant de prévoir de façon plus efficace les conséquences de l'emploi du modèle réduit.

Une première approche d'approximation basée essentiellement sur les modes dominants du système réel a été étudiée par plusieurs auteurs (DAVISON, CHIDAMBARA, Fossard, Marshall, etc...) qui chacun d'entre eux a essayé de

donner une représentation plus ou moins satisfaisante du système réel par un modèle de dimension réduite ..

Notons que, bon nombre de méthodes proposées par ces auteurs entrent dans le cadre d'une technique plus générale introduite sous le nom d'agrégation par Aoki en 1968 [1].

L'avantage fondamental de cette technique consiste en l'existence d'une relation linéaire entre les états des systèmes réel et réduit de la forme $Z = LX$. Cette relation explicite amène un certain nombre de propriétés remarquables tant en modélisation qu'en commande.

Toujours dans le but de trouver un modèle optimal à partir d'un système de grande dimension, d'autres méthodes basées sur la minimisation d'une fonctionnelle caractérisant l'erreur de réduction ont été proposées par (Wilson, Popov, ...). Citons enfin une nouvelle méthode minimisant l'erreur sur les réponses impulsionnelles et fréquentielles qui vient d'être proposée dernièrement par Mr. BETTAYEB [2] donnant une expression explicite du modèle réduit à partir du système réel .

L'objet qu'on s'est fixé dans ce mémoire, est l'étude de l'approximation optimale dans l'espace d'état des systèmes dynamiques linéaires continus de grande dimension .

Notre objectif est de déterminer les matrices (F, G, H, K) du modèle réduit pour que ses sorties $\hat{y}(t)$ soient une bonne approximation de $y(t)$ pour une classe d'entrées donnée .

$$\text{système} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{Procédure de réduction}} \text{modèle réduit} \begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = Hz(t) + Ku(t) \end{cases}$$

Au chapitre I, nous allons dégager les qualités indispensables que doit posséder un bon modèle réduit, ainsi que les principes de deux méthodes de réduction (réduction optimale et agrégation optimale) qu'on étudiera de façon plus détaillée dans les chapitres III et IV. Le chapitre II est consacré à l'étude de quelques modèles agrégés qui sont des cas particuliers de l'agrégation. Enfin le chapitre V est destiné à l'application des deux méthodes de réduction à un modèle de "variateur de vitesse électronique" de dimension 6, un modèle réduit de dimension 2 et 4 est proposé. A l'issue, nous terminons par une interprétation qualitative des résultats obtenus par les deux méthodes.

- chapitre I -

Notion sur la réduction des systèmes complexes

1.1 Introduction :

Avant d'envisager le problème de la représentation des grands systèmes par des modèles de dimension réduite, il faut se poser la question suivante : Quel est l'intérêt de disposer d'un modèle réduit, et quelles sont les qualités que devra posséder ce dernier ?

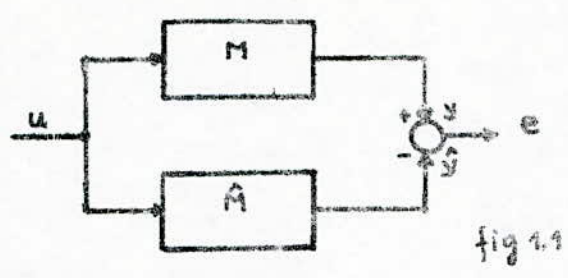
Parmi les différentes raisons qui existent pour justifier l'utilisation des modèles de dimension réduite, la principale résulte sans doute des difficultés d'ordre numérique qui apparaissent dès que l'ordre du système est suffisamment élevé. D'autre part l'analyse ou la synthèse d'un système complexe à partir d'un modèle de dimension réduite est plus aisée, donc plus facile à réaliser.

Dans ces conditions l'utilisation des modèles réduits permet l'extension du domaine d'applications des techniques de l'automatique (commande, filtrage, etc....) qui fournissent des solutions sous-optimales pour l'étude des systèmes complexes.

1.2 Problème de la réduction de modèle :

A partir d'un système décrit par un modèle linéaire M d'ordre n , il faut trouver un modèle \hat{M} d'ordre $m < n$, réalisant une bonne approximation du précédent. Nous serons, en général, amenés à considérer les caractéristiques du

vecteur erreur de sortie entre les deux modèles pour une même entrée standard (impulsion, échelon, ...) fig (1.1)



Notons que l'approximation par des modèles de dimension réduite, s'applique à des systèmes de "réalisation minimale" c'est à dire des systèmes complètement commandables et observables.

Avant de procéder à la réduction de systèmes par des modèles réduits, il faut se poser la question suivante: Comment procède-t-on à la réduction, et sur quel support se base cette approximation?

La plupart des méthodes proposées jusqu'à présent se basent sur le choix de modes dominants du système initial, d'autres sur le choix de modes classés par ordre d'énergie décroissant (voir méthode d'agrégation optimale au chapitre III).

Notion de modes dominants: L'approche "modes dominants" est la plus classique en réduction. Elle consiste à séparer les modes du système en deux groupes:

- les modes dominants ($\lambda_1, \dots, \lambda_m$) qui sont conservés dans le modèle réduit. Ce groupe est habituellement constitué par les modes instables (valeurs propres ou pôles à partie réelle positive) et par les modes les plus lents (valeurs propres à partie réelle négative les plus proches de l'origine).
- Les modes les plus rapides ($\lambda_{m+1} \dots \lambda_n$) qui sont négligés. Ces modes sont négligés du fait qu'ils s'annulent rapidement dans le temps.

1.3 critères de choix d'une méthode de réduction:

Les principales qualités que l'on peut attendre d'un modèle réduit sont comme suit:

- Posséder les mêmes caractéristiques de stabilité, ou d'instabilité, que le système réel qu'il représente;
- fournir une bonne approximation des sorties mesurables du système pour une classe d'entrées donnée, ou de façon équivalente;
- fournir une bonne approximation de la réponse en fréquence sur une gamme de fréquences donnée;
- Posséder les mêmes gains statiques entrée - sortie.
- Donner une bonne approximation du début du transitoire (ces deux dernières qualités sont souvent considérées comme indispensables);
- être relié au système par une relation linéaire ou non linéaire, même connue de façon approchée;
- être le plus simple possible et de faible dimension.

Ajoutons à ces qualités celles que doit posséder une technique de réduction permettant de définir le modèle:

- Etre applicable quelque soit le type de processus physique, sa dimension et son nombre d'entrées et de sorties;
- aider au choix d'une dimension convenable du modèle;
- Permettre de chiffrer l'erreur résultant de la réduction,
- être la plus simple possible et conduire à des calculs numériques de complexité raisonnable.

1.4 Réduction par agrégation linéaire de variables d'état:

1.4.1 Principe de l'agrégation:

L'absence d'une relation explicite (linéaire ou non linéaire) entre les états du système réel et de son modèle réduit, empêche de prévoir rigoureusement les propriétés du système à partir des résultats établis sur le modèle approximé. Cet inconvénient limite considérablement les applications possibles des modèles réduits, aussi bien dans le domaine théorique que pratique. Pour cette raison, qu'une méthode de réduction fût introduite afin de contourner cet obstacle. Cette méthode s'appelle "agrégation linéaire".

L'agrégation en tant que méthode de réduction, proposée par AOKI pour les systèmes dynamiques linéaires, consiste à imposer une relation linéaire $z(t) = Lx(t)$ entre les états du système et du modèle. L'existence de cette relation donne à un certain type de modèles, qu'on appelle "modèles agrégés", un ensemble de propriétés remarquables que nous verrons au chapitre II.

Avant tout, il nous semble utile, de préciser un point de vocabulaire: agrégation est un terme très souvent employé dans le sens de réduction qu'elle qu'en soit la nature. Ici le terme agrégation ne sera utilisé que si une relation explicite existe entre les états. Dans le cas contraire nous parlons de réduction, d'approximation ou d'agrégation approchée.

Le système étudié, supposé complètement commandable et observable, est donné sous la forme standard suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{où } x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^r \\ y \in \mathbb{R}^p \end{matrix} \quad (1.1)$$

Le modèle réduit auquel on veut aboutir est donné par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) & \text{où } z \in \mathbb{R}^m \\ \hat{y}(t) = Hz(t) + Ku(t) & \hat{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour passer du système (1.1) au modèle réduit (1.2) en procédant par agrégation, certaines propriétés ont été mise en évidence.

1.4.2 Condition nécessaire et suffisante d'agrégation stricte :

Le modèle défini par (1.2) est un modèle agrégé, si les états $z(t)$ et $x(t)$ vérifient la relation linéaire d'agrégation :

$$z(t) = Lx(t), \quad (1.3)$$

où L est une matrice de dimension (m, n) de rang plein.

en remplaçant (1.3) dans (1.2), on obtiendra :

$$\begin{cases} L\dot{x}(t) = FLx(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = HLx(t) + Ku(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

En multipliant à gauche par L l'équation d'état du système (1.1), on aura : $L\dot{x}(t) = LAx(t) + LBU(t)$ (1.5)

L'égalité entre les équations (1.4) et (1.5) conduit à :

$$\begin{cases} FL = LA \\ G = LB \end{cases}$$

Il apparaît clairement que l'existence d'une relation d'agrégation est assurée si, et seulement si :

$$\begin{cases} FL = LA \\ G = LB \\ z(0) = Lx(0) \end{cases} \quad (1.6)$$

Ces trois relations constituent la condition nécessaire et suffisante d'agrégation. Lorsqu'elles sont vérifiées, on dira que le modèle réduit (1.2) est un modèle agrégé du système (1.1) par la matrice d'agrégation L .

De plus on peut écrire : $f(F) \cdot L = L f(A)$.

où $f(F)$ et $f(A)$ sont des polynômes de matrices.

(Voir annexe pour une caractérisation mathématique de L).

remarque : On rencontre parfois associée aux égalités $FL = LA$ et $G = LB$, la condition $C = HL$ où C et H sont les matrices de sortie du système initial et du modèle agrégé. Cette égalité est incompatible avec l'observabilité complète de la paire (A, C) .

En effet $C = HL \Rightarrow \text{Ker}(L) \subset \text{Ker}(C)$, or $\text{Ker}(L)$ est invariant par A , il sera donc non observable.

1.4.3 structure du modèle agrégé :

L'établissement de la forme générale d'un modèle agrégé conduit dans une première étape à faire le changement de base suivant : $x = TV$.

où T est la matrice de passage.

l'équation d'état du système (1.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= T^{-1}ATV(t) + T^{-1}BU(t) \\ &= \Lambda V(t) + \Gamma U(t) \quad \text{avec } \Lambda = T^{-1}AT \text{ et } \Gamma = T^{-1}B. \end{aligned}$$

où Λ est une matrice sous forme Jordan, car on choisit T comme matrice modale de A , c'est à dire une matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de A à un coeff près. soient :

$$\Lambda = T^{-1}AT = \overset{m}{\left[\begin{array}{c|c} \Lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_2 \end{array} \right]} \quad \text{et } \Gamma = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \hline \Gamma_2 \end{array} \right]^m$$

$$V = (V_1, V_2)^T.$$

La forme diagonale du modèle agrégé retenant m modes du système réel, est donnée par :

$$\dot{V}_1(t) = \Lambda_1 V_1(t) + \Gamma_1 U(t). \tag{1.7}$$

et la classe des modèles agrégés, représentés par (1.2) est définie par une transformation régulière :

$$Z(t) = M V_1(t). \quad (1.8)$$

où M est une matrice quelconque de dimension (m, m) et de rang plein.

La forme la plus générale d'un modèle agrégé est donnée

$$\text{par : } \dot{Z}(t) = M \Lambda_1 M^{-1} + M \Gamma_1 \quad (1.9)$$

Par analogie avec le système (1.2) on déduit que :

$$\begin{cases} F = M \Lambda_1 M^{-1} \\ G = M \Gamma_1 \end{cases} \quad (1.10)$$

et la relation d'agrégation correspondante est :

$$Z(t) = M V_1(t) = M (I_m : 0) V(t) = M (I_m : 0) T^{-1} X(t)$$

$$\text{On pose : } L_0 = (I_m : 0) T^{-1}$$

$$\text{On aura : } Z(t) = M L_0 X(t) = L X(t) \quad (1.11)$$

Pour éviter le calcul de T^{-1} , on constate que L_0^T est formée par les vecteurs propres de la matrice A^T associés aux valeurs propres retenues dans Λ_1 (voir annexe pour la démonstration).

Notons qu'il existe bon nombre de méthodes de réduction se basant sur le choix de modes lents, citons parmi les quelles, celles de DAVISON, CHIDAMBARA, FOSSARD etc... qui admettent d'une manière ou d'une autre une relation linéaire entre les états du système réel, et ceux du modèle réduit, de la forme $Z = LX$. Ces modèles sont appelés "modèles agrégés",

nous aurons l'occasion d'en parler dans le chapitre prochain.

soulignons que la méthode d'agrégation optimale se basant toujours sur le principe de l'agrégation, sera étudiée de

façon plus détaillée dans le chapitre IV.

1.5. Principe des méthodes de réduction optimale :

Ces méthodes introduisent une mesure quantitative de l'erreur de réduction entre la réponse du système réel et celle de son modèle réduit. La synthèse de ce modèle étant faite en minimisant une certaine fonctionnelle de l'erreur de réduction. La fonctionnelle couramment utilisée en réduction est l'intégrale du carré de l'écart entre les sorties des systèmes réel et réduit en réponse impulsionnelle.

Le but de ces méthodes, est d'aboutir à un modèle réduit de la forme (1.2) qui représente le plus possible le système initial (1.1), telle que l'erreur quadratique entre la réponse des systèmes soit minimale pour une classe d'entrées et un horizon d'observation donnés.

Dans le domaine temporel, cette mesure étant définie par :

$$J = \sum_{i=1}^r \text{Tr} \left\{ \int_0^{\infty} (y^i(t) - \hat{y}^i(t))^T (y^i(t) - \hat{y}^i(t)) dt \right\} \quad (1.12)$$

où $e^i(t) = y^i(t) - \hat{y}^i(t)$ représente l'écart en réponse impulsionnelle entre les sorties du système réel et du modèle réduit.

Enfin le procédé de réduction optimale pourrait être représenté comme suit : (fig 1.2)

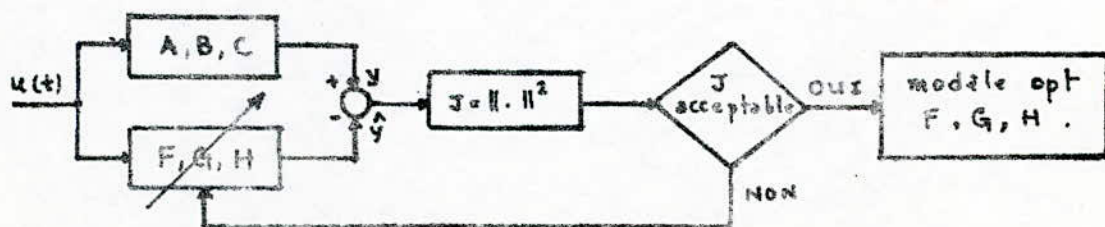


fig 1.2 Procédé de réduction optimale.

- chapitre II -

- Etude de quelques modèles agrégés -

2.1 Introduction :

Après une formulation générale du problème de réduction, en particulier l'agrégation et la réduction optimale, nous allons entamer l'étude de quelques modèles réduits proposés par DAVISON, CHIDAMBARA, FOSSARD etc... qui sont basés sur le choix de modes dominants du système réel. Ces méthodes, bien que quelques unes aient été proposées avant 1968, sont en général des cas particuliers de l'agrégation.

2.2 Exemples classiques de modèles agrégés [2]; [3]:

2.2.1 Modèles de DAVISON:

* Premier modèle de DAVISON [3]; [4]:

DAVISON néglige totalement les modes rapides en supposant :

$$v_2(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Le modèle qu'il propose fournit une approximation des m premières composantes du vecteur d'état du système initial correspondant aux m modes dominants retenus. Ce modèle est

$$\text{donné par: } \begin{cases} \dot{z}(t) = F z(t) + G u(t) \\ \hat{y}(t) = I_m z(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{avec : } F = T_1 \Lambda_1 T_1^{-1} \quad , \quad G = T_1 \Gamma_1$$

T_1 résulte de la partition de la matrice modale T

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & | & T_2 \\ \hline T_3 & | & T_4 \end{bmatrix}$$

Pour plus d'illustration, trouvons le modèle réduit de Davison à partir du système (1.1) avec $D=0$.

faisons le changement de base $x(t) = TV(t)$

où T est la matrice modale de A et $V = (v_1, v_2)^T$.

$$\text{le système devient : } \begin{cases} \dot{V}(t) = T^{-1}ATV(t) + T^{-1}BU(t) \\ y(t) = CV(t) \end{cases}$$

$$\text{où } \Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = T^{-1}B = (\Gamma_1; \Gamma_2)^T$$

$$\Omega = CT = (\Omega_1; \Omega_2).$$

Il est évident qu'en écrivant $v_2(t) = 0$, on obtient le modèle

$$\text{réduit suivant : } \begin{cases} \dot{v}_1(t) = \Lambda_1 v_1(t) + \Gamma_1 u(t) \\ \hat{y}(t) = \Omega_1 v_1(t). \end{cases}$$

le modèle agrégé est obtenu par la transformation régulière

$$z = T_1 v_1 \quad (T_1: \text{matrice régulière de dim } m \text{ et de rang plein}).$$

le modèle réduit devient:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = T_1 \Lambda_1 T_1^{-1} z(t) + T_1 \Gamma_1 u(t) \\ \hat{y}(t) = \Omega_1 T_1^{-1} z(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

qui est identique à (2.1) lorsque $\Omega_1 = T_1$ c'est à dire si

$$C = (Im; 0)$$

La relation d'agrégation conduisant au modèle de Davison est donc:

$$\begin{aligned} z(t) &= T_1 v_1(t) = T_1 (Im; 0) v(t) = T_1 (Im; 0) T^{-1} x(t) \\ &= T_1 L_0 x(t) = L_0 x(t). \end{aligned}$$

Les réponses indicielles obtenues pour les modèles réel et réduit de Davison sont données par:

$$\begin{cases} y(t) = - (T_1 \Lambda_1^{-1} \Gamma_1 + T_2 \Lambda_2^{-1} \Gamma_2) + T_1 e^{\Lambda_1 t} \Lambda_1^{-1} \Gamma_1 + T_2 e^{\Lambda_2 t} \Lambda_2^{-1} \Gamma_2 \\ \hat{y}(t) = - T_1 \Lambda_1^{-1} \Gamma_1 + T_1 e^{\Lambda_1 t} \Lambda_1^{-1} \Gamma_1. \end{cases} \quad (2.3)$$

A partir de ces réponses, on peut en conclure deux propriétés caractérisant ce modèle :

- la 1^{ère} consiste en l'excitation correcte des modes conservés dans le modèle réduit, et l'écart $y(t) - \hat{y}(t)$ ne dépend que des modes contenus dans Λ_2 .
- la seconde exprime l'erreur statique en régime permanent.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t)) = -T_2 \Lambda_2^{-1} \Gamma_2$$

Ces deux remarques montrent qu'une bonne approximation n'est obtenue que si les modes de Λ_2 sont rapides et d'amplitudes faibles.

* Second modèle de Davison [5] :

Afin d'éliminer l'erreur en régime permanent (erreur statique) dans le cas des systèmes stables soumis à des entrées échelon, Davison a proposé un second modèle pour les systèmes à une et plusieurs entrées.

- cas des systèmes mono-entrée :

Pour le second modèle, Davison introduit un nouveau état Z^* qui se déduit de l'état Z du premier modèle par la relation :

$$Z^*(t) = \text{diag}\{d_i\} \cdot Z(t) = D Z(t). \quad (2.4)$$

avec :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_i & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_m \end{bmatrix}$$

(cette matrice $D(m \times m)$ est \neq de la matrice D utilisée dans (1.1) les d_j étant choisis de façon à assurer l'identité des régimes permanents

$$\text{ces paramètres sont donnés par : } \left. \begin{aligned} d_j &= \frac{[A^{-1}B]_j^R}{[F^{-1}G]_j} ; \text{ si } [F^{-1}G]_j \neq 0 \\ &= 1 \quad \text{si } [F^{-1}G]_j = 0 \end{aligned} \right\} j=1, \dots, m \quad (2.5)$$

où $[F^{-1}G]_j$: est le $j^{\text{ème}}$ élément du vecteur colonne $[F^{-1}G]$ d'ordre m ,
 et $[A^{-1}B]_j^*$: " " " " $[A^{-1}B]^*$ "

(*) : astérisque indiquant la réduction.

Le nouveau modèle proposé en appliquant la relation (2.4) au 1^{er} modèle de Davison (2.1) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{z}^*(t) = DFD^{-1}z^*(t) + DGU(t) \\ \hat{y}(t) = D^{-1}z^*(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Avec ce modèle, un correct état permanent est atteint pour une entrée échelon (si $[F^{-1}G]_j \neq 0$) et un comportement dynamique satisfaisant est maintenu.

Il faut noter que si $[F^{-1}G]_j = 0$ pour un certain j , l'état permanent de la variable z_j^* introduit une erreur qui ne peut être corrigée. De ce fait les variables qu'il faut retenir alors dans le modèle réduit ainsi que l'ordre de ce modèle seront choisis avec $[F^{-1}G]_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$). En effet la matrice D ne peut pas exister lorsque l'une des composantes x_i ou z_i est nulle en régime permanent.

Au cas où le modèle réduit existe, la matrice d'agrégation est donnée par : $L_D^0 = DT_1 L_0 = D L_0$. (2.7)

On montre ça comme suit :

$$z^* = DZ = DT_1 V_1 = DT_1 [I_m | 0] T^{-1} X = DT_1 L_0 X = D L_0 X$$

$$\text{d'où } z^* = L_D^0 X$$

- Cas des systèmes multi-entrées :

Pour des systèmes à plusieurs entrées, le modèle de Davison correspondant est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = F z_i + G_i U_i, & i = 1, 2, \dots, r \\ z^* = \sum_{i=1}^r D_i z_i & (r \text{ entrées}) \end{cases} \quad (2.8)$$

où $G = (G_1, G_2, \dots, G_r)$

$D_i, i = 1, 2, \dots, r$ sont déterminées à partir de (2.5) en mettant G_i à la place de G et B_i à la place de B où $B = (B_1, B_2, \dots, B_r)$

B_1, B_2, \dots, B_r sont les vecteurs colonnes constituant la matrice de commande B .

Le modèle précédent (2.8) pourra s'écrire selon la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{z}^a = \sum_{i=1}^r D_i F z_i + \sum_{i=1}^r D_i G_i u_i \\ z^a = \sum_{i=1}^r D_i z_i \end{cases} \quad (2.9)$$

En conclusion, on peut dire que le second modèle de Davison pour les systèmes multi-entrées n'est pas agrégé, vu qu'il est impossible de trouver une relation linéaire reliant l'état z^a à l'état z .

2.2.2 Modèle de CHIDAMBARA [18]:

Parmi les modèles qu'a proposé CHIDAMBARA, un modèle agrégé se basant sur le choix de modes dominants du système réel. Son but était d'approximer les états par un nombre d'états inférieur.

$$\text{soit : } \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \text{(système réel)} \end{array} \xrightarrow{\text{réduction}} \begin{array}{l} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) \\ \text{(modèle réduit)} \end{array}$$

Après un changement de base ($X = TV$) où T est la matrice modale, l'équation d'état du système réel devient:

$$\dot{V} \Lambda V^{-1} + T^{-1} B u(t) \quad (2.10)$$

avec $\Lambda = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_i & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_n \end{bmatrix}$

où $J_i (k_i \times k_i)$ est un bloc Jordan correspondant à λ_i d'ordre de multiplicité k_i .

Il est toujours possible de choisir T tel que les valeurs propres

prédominantes de A soient présentes dans J_1, J_2, \dots, J_j et les autres dans J_{j+1}, \dots, J_m .

L'équation (2.10) peut s'écrire alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{p}{J} & 0 \\ \hline 0 & \overset{n}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + T^{-1} B U \quad (2.11)$$

où $\overset{p}{J}$ ($m \times m$) : matrice contenant les valeurs propres prédominantes.

$\overset{n}{J}$ ($(n-m) \times (n-m)$) : matrice contenant les valeurs propres dont l'effet peut être négligeable au niveau de la réponse.

A partir de (2.11) On peut écrire :

$$\dot{v}_1(t) = \overset{p}{J} v_1(t) + \{\text{les } m \text{ premières lignes de } T^{-1} B\} u(t). \quad (2.12)$$

C'est l'équation d'état du modèle réduit :

$$\dot{z}(t) = F z(t) + G u(t).$$

avec : $F = \overset{p}{J}$, $G = \{\text{les } m \text{ 1}^{\text{ère}} \text{ lignes de } T^{-1} B\}$.

et $z(t) = v_1(t)$.

La matrice d'agrégation du modèle est donc donnée par : "Lo"

$$Z = v_1 = (I_m | 0) v = (I_m | 0) T^{-1} X = L_o X.$$

L'auteur améliora son modèle [19] par une optimisation de la matrice de sortie H en minimisant un critère portant sur les p sorties ($p < m$) des modèles réel et réduit soumis à des entrées polynômiales d'ordre ≤ 2 .

Il existe d'autres modèles pour le même auteur mais qui ne sont pas agrégés [20].

2.23 Modèle de Fossard-Davison :

Toujours dans le but d'éliminer l'erreur en régime permanent, Fossard et Davison ont proposé un modèle réduit défini par (2.1) et un vecteur de sortie :

$$y(t) = I_m z(t) + K_F u(t) \quad \text{où } K_F = -T_2 N_2^{-1} \Gamma_2.$$

Ce modèle est agrégé par la relation $z(t) = L_D x(t)$.

Il correspond à faire l'hypothèse simplificatrice $\dot{V}_2(t) = 0$.

En effet, cette hypothèse exprime que les modes contenus dans Λ_2 étant rapides, $V_2(t)$ peut être approché, pour une réponse indicielle, par sa valeur en régime permanent $\hat{V}_2(t) = -\Lambda_2^{-1} \Gamma_2 U$.

Le vecteur de sortie est alors approximé et devient :

$\hat{y}(t) = \Omega_1 V_1(t) + \Omega_2 \hat{V}_2(t)$, et le modèle agrégé correspondant

$$\text{sera : } \begin{cases} \dot{V}_1(t) = \Lambda_1 V_1(t) + \Gamma_1 U(t) \\ \hat{y}(t) = \Omega_1 V_1(t) + \Omega_2 \Lambda_2^{-1} \Gamma_2 U(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

qui est identique à celui de Fossard-Davison avec $C = (I \ 0)$.

La matrice d'agrégation pour ce modèle est L_D définie par :

$$z(t) = T_1 L_D x(t) = L_D x(t).$$

En conclusion, on peut dire qu'avec ce modèle malgré l'absence de l'erreur statique et la conservation des modes avec une correcte excitation, il y a toujours une erreur qui subsiste, car la correction sur \hat{y} n'est faite que sur certains des modes de Λ_2 .

224 Modèles réduits par perturbations singulières:

La technique des perturbations singulières abordée par Kokotovic suppose le système réel mis sous la forme :

$$\begin{cases} \begin{matrix} (1) \\ \vdots \\ (n) \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21}/\mu & A_{22}/\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_2/\mu \end{bmatrix} u(t). \\ y(t) = (C_1 ; C_2) x(t). \end{cases} \quad (2.14)$$

où μ est un petit paramètre positif.

Le système possède la propriété d'évoluer selon deux échelles de temps, c'est à dire qu'il possède m modes lents et $(n-m)$ modes

rapides (n.m) valeurs propres approximativement en $1/\mu$.

En négligeant les modes rapides, c'est à dire en faisant $\mu = 0$ dans l'équation (2) du système (2.14) On aura: (si A_{22} non singulière)

$$A_{22} X_2 = -A_{21} X_1 - B_2 u \Rightarrow X_2 = -A_{22}^{-1} A_{21} X_1 - A_{22}^{-1} B_2 u.$$

$$\text{d'où } \dot{X}_1 = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) X_1 + (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) u$$

$$y = [C_1; C_2] X = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

$$= (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) X_1 - C_2 A_{22}^{-1} B_2 u.$$

En posant $X_1 = z$, le modèle réduit sera décrit par:

$$\begin{cases} \dot{z} = F_K z + G_K u \\ \hat{y} = H_K z + K_K u \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\text{avec : } F_K = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \quad , \quad H_K = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}$$

$$G_K = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \quad , \quad K_K = -C_2 A_{22}^{-1} B_2.$$

Recherchons sous quelles conditions, ce modèle peut être considéré comme agrégé du système (2.14). Pour cela, supposons qu'il existe une matrice L_K vérifiant les relations $F_K L_K = L_K A_K$ et $G_K = L_K B_K$.

$$\text{soit } L_K = [L_1; L_2]$$

$$F_K L_K = [A_{11} L_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} L_1, A_{11} L_2 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} L_2]$$

$$L_K A_K = [L_1 A_{11} + L_2 A_{21} / \mu, L_1 A_{12} + L_2 A_{22} / \mu]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{11} L_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} L_1 = L_1 A_{11} + L_2 A_{21} / \mu & (a) \\ A_{11} L_2 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} L_2 = L_1 A_{12} + L_2 A_{22} / \mu & (b) \end{cases}$$

$$G_K = L_K B_K = (L_1 B_1 + L_2 B_2 / \mu) \quad (c)$$

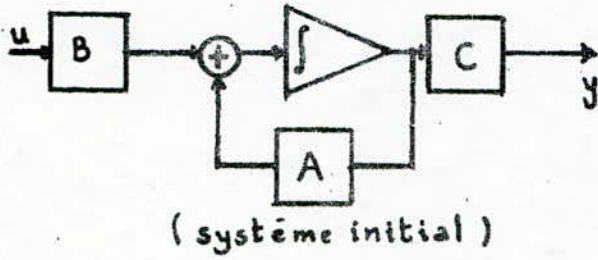
$$\Rightarrow B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 = L_1 B_1 + L_2 B_2 / \mu.$$

Les conditions (a) et (c) sont vérifiées en choisissant comme matrice d'agrégation: $L_K = (I_m; -\mu A_{12} A_{22}^{-1})$.

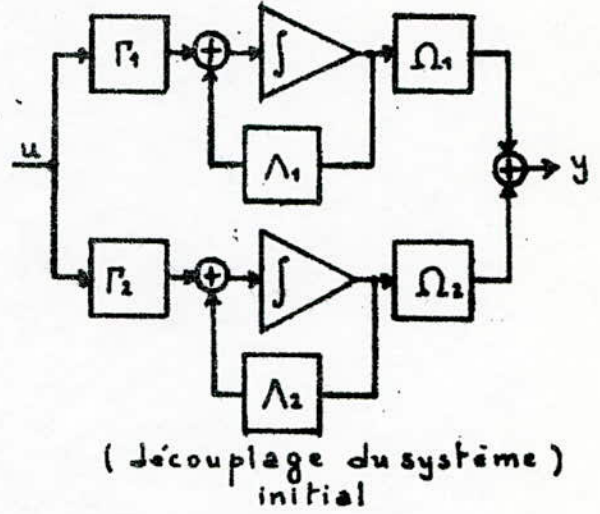
En substituant L_K dans (b) on obtient:

$$-\mu (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) A_{12} A_{22}^{-1} = 0 \Leftrightarrow -\mu F_K A_{12} A_{22}^{-1} = 0$$

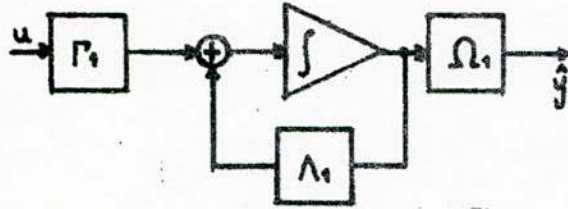
fig 2.1 : modèles réduits classiques ($D=0$) .



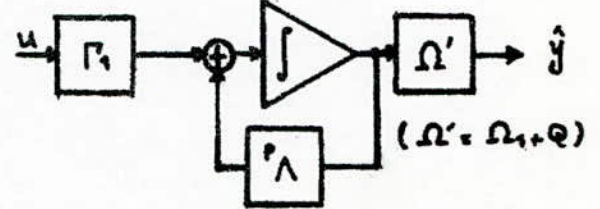
(système initial)



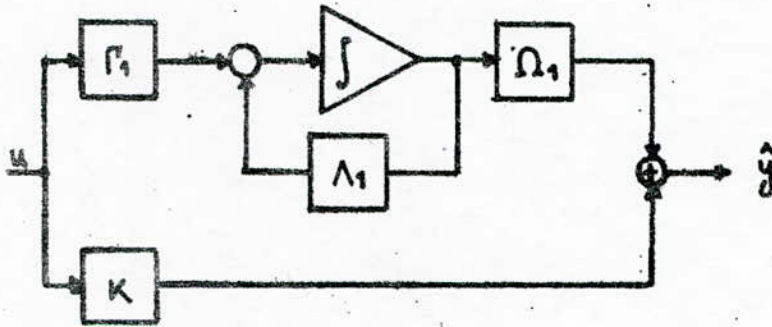
(découplage du système) initial



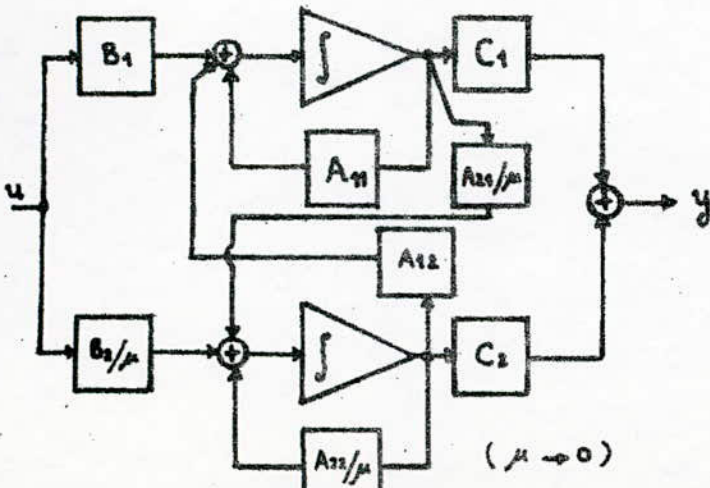
(Modèle de Davison)



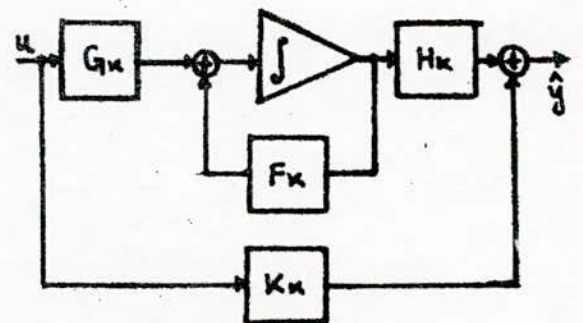
(Modèle de Chidambara)



(Modèle de Fossard-Davison).



(système réel)



(modèle réduit par perturbations singulières).

Posons $E(\mu) = -\mu F_k A_{12} A_{22}^{-1}$.

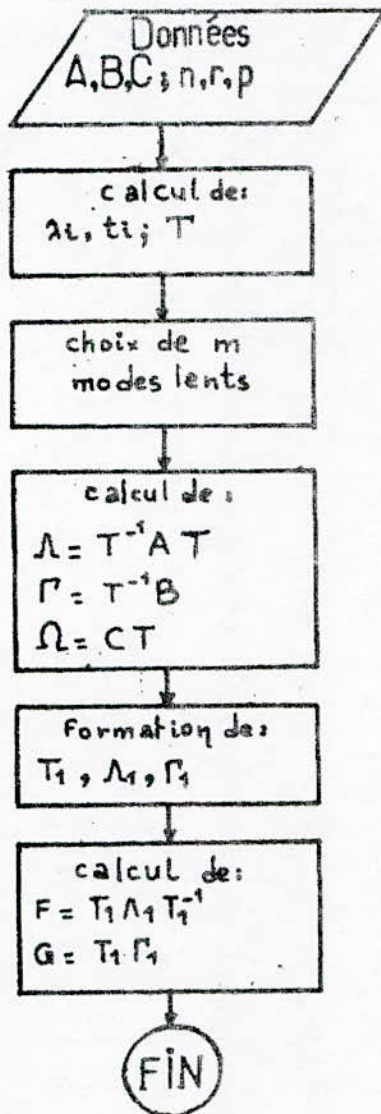
$$E(\mu) = 0 \Leftrightarrow (\mu = 0 \text{ ou } A_{12} = 0)$$

le modèle obtenu n'est donc agrégé que si $\mu = 0$ ou $A_{12} = 0$.
Ce sont deux contraintes très restrictives puisque en pratique μ ne peut pas être nul et qu'en général, il est impossible d'obtenir une mise en équations qui, simultanément, découple un sous système lent avec $A_{12} = 0$ et fasse apparaître le paramètre de perturbation μ .

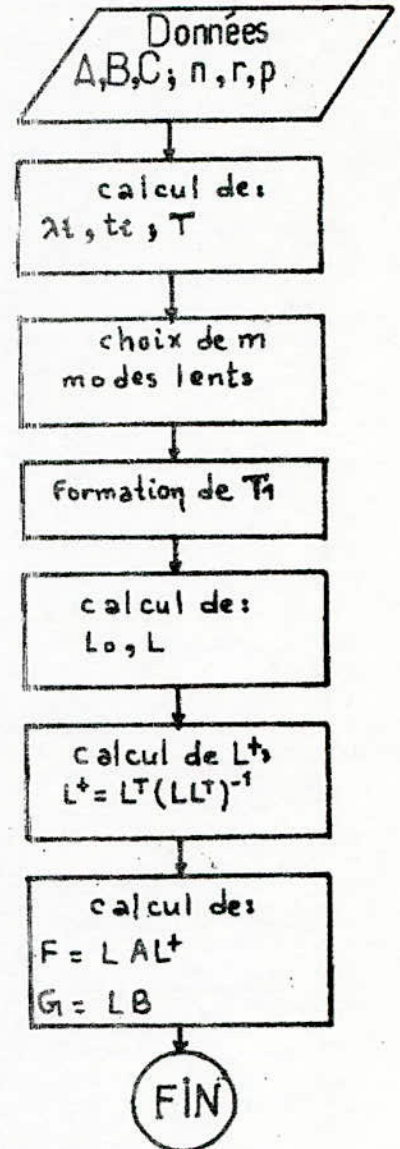
En Conclusion, nous pouvons dire que les deux approches perturbation et agrégation ne sont qu'asymptotiquement équivalentes ($E(\mu) \rightarrow 0$ si $\mu \rightarrow 0$). En général le modèle réduit par perturbations singulières n'est pas un modèle agrégé.

Remarques générales :

La structure obtenue pour la matrice d'agrégation permet alors de montrer que la plupart des modèles réduits classiques, conservant les modes dominants (DAVISON, FOSSARD, CHIDAMBARA, ...) sont des cas particuliers de l'agrégation. La synthèse de ces modèles réduits se trouve ainsi considérablement simplifiée. En effet le calcul d'un modèle agrégé ne nécessite que la connaissance des vecteurs propres associés aux valeurs propres retenues dans l'agrégation alors que les expressions classiques de ces modèles utilisent la matrice modale complète. Nous illustrons cette remarque en faisant le calcul du 1^{er} modèle réduit de DAVISON dans deux organigrammes représentant deux procédures différentes, classique et agrégée (fig 2.2).

1^{er} MODELE DE DAVISON

(procédé classique)



(procédé par agrégation)

fig 2.2

Remarquons que le calcul du modèle agrégé présente une simplification remarquable par rapport aux expressions classiques utilisées pour le calcul des modèles réduits. Une remarque importante à faire sur tous ces modèles réduits porte sur le choix des modes retenus. Ce choix est justifié par un raisonnement couramment admis, mais en partie inexact : pour un système stable les modes rapides sont présents durant une période initiale assez courte ; après cette période ils sont négligeables et la dynamique du système peut être décrite par les modes lents. Il est bien évident que ce choix est en général incorrect car il ne repose que sur la notion de durée sans tenir compte de la façon dont sont excités et observés les modes. Par exemple un mode rapide de forte amplitude n'est pas négligeable devant un mode lent de faible amplitude. Une seconde remarque réside dans le fait que pour toutes ces méthodes, la qualité des modèles agrégés obtenus ne peut être jugée qu'après avoir comparé leurs réponses à celles du système réel. C'est là un inconvénient, d'où la nécessité d'introduire une mesure permettant d'apprécier l'erreur commise en réduisant le système réel afin que l'évaluation de ces modèles soit plus objective. Cette mesure conduit à la notion de modèle agrégé optimal, qui est développée dans le chapitre IV.

2.3 Conclusions :

L'agrégation linéaire de variables d'état constitue une des solutions les plus importantes du problème de réduction.

Elle permet la synthèse d'un grand nombre de modèles réduits classiques qui conservent les modes lents du système, en précisant les relations existant entre les vecteurs état des modèles réels et réduits. Elle permet aussi, avec un volume de calculs assez faible, la définition de modèles réduits qui, tout en étant sous-optimaux, fournissent une approximation en général assez satisfaisante. Toutefois cette approche n'est valable que si les modes du système réel peuvent être décomposé en deux sous-groupes distincts (modes lents, modes rapides). Le cas où les modes sont très proches entre eux, un problème de choix de modes à retenir se pose. Des méthodes ont été proposées afin de contourner cet obstacle, citons parmi les quelles celle proposée par M^r BETTAYEB [21] dernièrement.

Enfin disons qu'une mesure de l'erreur de réduction et sa minimisation permettra sans doute de mieux apprécier le modèle réduit, donc de mieux connaître la qualité de l'approximation. Ce nouvel critère est introduit dans les deux méthodes de réduction que nous aurons l'occasion de les étudier en détail dans les chapitres III et IV.

- chapitre III -

Réduction optimale des systèmes complexes

3.1 Formulation et résolution théorique du problème de réduction optimale :

3.1.1 Position du problème :

Considérons un système dynamique linéaire, invariant décrit par les équations d'état et de mesure suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

Le système est supposé asymptotiquement stable, l'extension aux systèmes instables sera étudiée ultérieurement. Notre but est d'approximer le système réel par un modèle de dimension réduite de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = Hz(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Le critère quadratique J à minimiser est fonction de l'écart : $e^i(t) = y^i(t) - \hat{y}^i(t)$ (i note la réponse obtenue quand toutes les entrées sont nulles sauf l'entrée u_i).

J s'écrit de la forme :

$$J = \sum_{i=1}^p \int_0^{\infty} e^i(t)^T e^i(t) dt. \quad (3.3)$$

Ceci étant vrai pour des entrées déterministes tel que : l'échelon, l'impulsion etc... (objet de notre étude).

Pour des entrées stochastiques (aléatoires), le critère J

s'écrit de la forme : $J = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{ e^T(t) Q e(t) \}$

où $Q = I_{p \times p}$, E : espérance mathématique des signaux stochastiques.

Le problème revient donc à déterminer (F, G, H) qui minimise le critère J pour un vecteur d'entrée $u(t)$ (impulsion; échelon).

3.1.2 Conditions d'optimalité pour des entrées impulsions:

Dans ce cas, le critère J converge sur un horizon infini

puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} e^i(t) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r.$

soit le système augmenté suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \vdots \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \vdots \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ G \end{bmatrix} u(t) \\ e(t) = \begin{bmatrix} C & \vdots & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \vdots \\ z(t) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t) \\ e(t) = \bar{C} \bar{x}(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

La réponse impulsionnelle du système augmenté quand seulement l'entrée u_i est excitée s'écrit:

$$e^i(t) = -\bar{C} e^{\bar{A}t} \bar{b}_i \quad (3.5)$$

(\bar{b}_i : étant la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \bar{B}).

Le critère de réduction associé devient:

$$J = \text{Trace} \left\{ \int_0^{\infty} (\bar{C} e^{\bar{A}t} \bar{B})^T (\bar{C} e^{\bar{A}t} \bar{B}) dt \right\} = \text{Trace} \left\{ \bar{C}^T \bar{C} \int_0^{\infty} (e^{\bar{A}t} \bar{B} \bar{B}^T e^{\bar{A}t}) dt \right\} \\ = \text{Trace} (RW) \quad (3.6)$$

$$\text{avec } W = \int_0^{\infty} (e^{\bar{A}t} \bar{B} \bar{B}^T e^{\bar{A}t}) dt \quad (3.7)$$

solution de l'équation de Lyapunov

$$\bar{A}W + W\bar{A}^T + S = 0 \quad (3.8)$$

$$\text{et } R = \bar{C}^T \bar{C}, \quad S = \bar{B} \bar{B}^T.$$

La minimisation de (3.6) sous la contrainte (3.8) est équivalente à celle de: $J_1 = \text{Tr}(RW) + \text{Tr}\{P^T(\bar{A}W + W\bar{A}^T + S)\}$. (3.9)

P : étant la matrice des multiplicateurs de Lagrange qui est

à l'optimum solution de l'équation de Lyapunov

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + R = 0 \quad (3.10)$$

Rappelons que P et W sont des matrices symétriques qui peuvent être partitionnées de la façon suivante :

$$P = \begin{bmatrix} \overbrace{P_{11}}^n & P_{12} \\ \hline P_{12}^T & \underbrace{P_{22}}_m \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix}$$

Les conditions d'optimalité s'obtiennent en annulant le gradient de J par rapport aux éléments de F , G et H .

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dF} = 2 (W_{12}^T P_{12} + P_{22} W_{22}) = 0 & (a) \\ \frac{dJ}{dG} = 2 (P_{12}^T B + P_{22} G) = 0 & (b) \\ \frac{dJ}{dH} = 2 (H W_{22} - C W_{12}) = 0 & (c) \end{cases} \quad (3.11)$$

(voir démonstration en annexe).

A partir des conditions (3.11), le modèle réduit optimal s'écrit :

$$\begin{cases} F = T_1 A T_2 & (\text{voir démonstration en annexe}) \\ G = T_1 B \\ H = C T_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} T_1 = -P_{22}^{-1} P_{12}^T \\ T_2 = W_{12} W_{22}^{-1} \end{cases} \quad (3.13)$$

Notons qu'il existe une infinité de solutions optimales T_1, T_2 . Cela se justifie par le fait que le modèle réduit est invariant par toute transformation régulière T : si T_1 et T_2 sont solutions, $T^{-1}T_1$ et T_2T sont aussi solutions.

3.1.3 Conditions d'optimalité pour des entrées échelon :

Lorsque le système est soumis à une entrée échelon il est nécessaire, pour assurer l'existence d'un critère lorsque

l'horizon d'observation est infini, d'imposer des contraintes sur les régimes permanents du système et du modèle réduit.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}^i(t) \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (3.14)$$

$$\text{or } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -CA^{-1}B$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = -HF^{-1}G$$

La contrainte d'égalité des régimes permanents implique :

$$CA^{-1}B = HF^{-1}G \quad \text{qui s'écrit simplement : } \bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{B} = 0 \quad (3.15)$$

Cette contrainte pourrait être introduite dans l'expression du critère, celui-ci devient :

$$J_1 = J + 2 \text{Tr} (\bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{B}\Gamma) \quad (3.16)$$

(Γ étant l'ensemble des r multiplicateurs de Lagrange)

Le calcul des conditions d'optimalité se fait de la même façon que précédemment (3.11), et s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial F} = 2(P_{22}F^{-1}W_{22} - P_{12}^T A^{-1}W_{12})F^{-T} - \frac{\partial J_1}{\partial G} (F^{-1}G)^T = 0 \\ \frac{\partial J_1}{\partial G} = 2F^{-T} (P_{22}F^{-1}G - P_{12}^T A^{-1}B - H^T \Gamma^T) = 0 \\ \frac{\partial J_1}{\partial H} = 2(HF^{-1}W_{22} - CA^{-1}W_{12} - \Gamma^T G^T)F^{-T} = 0 \\ \frac{\partial J_1}{\partial \Gamma} = 2(CA^{-1}B - HF^{-1}G) = 0 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Contrairement au cas de l'impulsion, aucune solution explicite analogue à (3.12), (3.13) ne pourra être proposée, puisque ces conditions définissent une infinité de solutions (du fait que Γ est qcq). Dans le prochain paragraphe, nous allons voir des méthodes permettant de contourner ce problème, en fixant une forme canonique pour le modèle réduit tout en choisissant une seule solution optimale.

3.2 Réduction des systèmes mono-entrée ou mono-sortie :

3.2.1 Introduction des formes canoniques dans le problème de réduction optimale :

Kalman [17] a montré, que tout système dynamique linéaire invariant et commandable pouvait se ramener à une forme commandable canonique par un changement de base.

La forme du nouveau système est :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ (-a_m) & \dots & \dots & \dots & (-a_1) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \underbrace{[h_1 \mid h_2 \mid \dots \mid h_m]}_m \quad (3.18)$$

Ceci étant le cas d'une seule entrée - plusieurs sorties.

Pour le cas d'une seule sortie - plusieurs entrées, le système étant supposé observable et la forme canonique s'écrit comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & (-a_m) \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & (-a_1) \end{bmatrix}, \quad G = [g_1 \mid g_2 \mid \dots \mid g_m] \quad (3.19)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous étudions la forme (3.18), la forme (3.19) est traitée de la même manière.

1^{re} forme canonique: les (a_i) $i=1, \dots, m$ représentent les coefficients du polynôme caractéristique formé par les m valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ choisies a priori.

$$P_m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m.$$

On remarque bien l'intérêt de l'utilisation de la forme canonique pour le modèle réduit, puisque celle-ci diminue considérablement le nombre de paramètres à déterminer qui se trouve réduit de m^2 .

Une autre conséquence très intéressante pourrait être déduite

de la contrainte d'égalité des régimes permanents du système réel et de son modèle réduit pour un vecteur d'entrée échelon.

$$\text{Soit : } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -CA^{-1}B \quad (3.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = \frac{1}{a_m} h_1$$

En égalisant ces deux limites, nous obtenons:

$$h_1 = -a_m CA^{-1}B \quad (3.21)$$

On remarque bien que le problème d'optimalité avec Contraintes - cas de l'échelon - se trouve ramené à un problème sans contraintes en fixant la 1^{ère} Colonne de H.

3.2.2 Cas d'une entrée impulsion:

Ce cas est le même que celui déjà étudié au paragraphe (3.1.2).

En fixant les valeurs propres dominantes pour le modèle réduit, et par suite les coefficients du polynôme caractéristique G_r détermine F et G connues sous leur forme canonique (3.18)

Une optimisation par rapport à H donne selon la condition (3.11c)

$$\text{la relation : } H = CW_12W_12^{-1} \quad (3.22)$$

La minimisation du critère J portera sur les m et p.m paramètres correspondant respectivement à F et H.

3.2.3 Cas d'une entrée échelon:

Pour ce type d'entrées, la contrainte portant sur le régime permanent conduit à ce que l'erreur à minimiser dépend du régime transitoire seulement.

Le critère de réduction s'écrit donc:

$$J = \int_0^{\infty} \| Cx_T(t) - Hz_T(t) \|^2 dt \quad (3.23)$$

Soit le vecteur augmenté transitoire: $V(t) = \begin{bmatrix} x_T(t) \\ z_T(t) \end{bmatrix}$

le système augmenté transitoire s'écrit alors:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = \bar{A}V(t) + \bar{B}U(t) \\ e_T = \bar{C}V(t). \end{cases} \quad (3.24)$$

On a :

$$\begin{cases} x(t) = x_T + x_P \\ z(t) = z_T + z_P \end{cases} \quad (3.25)$$

avec $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$

$$\text{Alors : } v(0) = \begin{bmatrix} x_T(0) \\ z_T(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_P(0) \\ -z_P(0) \end{bmatrix}$$

Le régime permanent du système (3.24) s'obtient pour $\dot{v}(t) = 0$
câd $v(t) = -\bar{A}^{-1}\bar{B}$.

$$\text{Soit } v_P(\infty) = -\bar{A}^{-1}\bar{B}, \text{ alors } v_P(\infty) \cdot v_P^T(\infty) = \bar{A}^{-1}\bar{B}\bar{B}^T\bar{A}^{-T}$$

D'une façon similaire au cas de l'impulsion, le critère s'écrit :

$$J_1 = \text{Trace} (R\tilde{W}) \quad (3.26)$$

où \tilde{W} est la solution de l'équation de Lyapunov

$$\bar{A}\tilde{W} + \tilde{W}\bar{A}^T + W_0 = 0 \quad (3.27)$$

$$\text{où } W_0 = v_P(\infty) \cdot v_P^T(\infty) = \bar{A}^{-1}\bar{B}\bar{B}^T\bar{A}^{-T}.$$

En multipliant le 1^{er} membre de la relation (3.27) par \bar{A} à gauche et \bar{A}^T à droite, nous obtenons :

$$\bar{A}\bar{A}\tilde{W}\bar{A}^T + \bar{A}\tilde{W}\bar{A}^T\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T = 0 \quad (3.28)$$

On retrouve bien la forme initiale : $\bar{A}W + W\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T = 0$.

$$\text{où } W = \bar{A}\tilde{W}\bar{A}^T \text{ câd } \tilde{W} = \bar{A}^{-1}W\bar{A}^{-T}.$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a_m} = 2 \text{Tr} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_m} (\tilde{W}_{12}^T P_{12} + \tilde{W}_{22} P_{22}) \right\} - 2 \text{Tr} \left\{ (\tilde{W}_{22} H^T - \tilde{W}_{12}^T C^T) C U_1 \right\} \\ \quad + 2 a_m^{-2} \text{Tr} (U_1 P_{12}^T) - 2 a_m^{-3} \text{Tr} (U_2 P_{22}) \\ \frac{\partial J}{\partial a_i} = 2 \text{Tr} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_i} (\tilde{W}_{12}^T P_{12} + \tilde{W}_{22} P_{22}) \right\}; i = m-1, m-2, \dots, 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

et pour les $p(m-1)$ paramètres libres de H :

$$\frac{\partial J}{\partial h_{ij}} = 2 \text{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial h_{ij}} (\tilde{W}_{22} H^T - \tilde{W}_{12}^T C^T) \right\} \quad (3.30)$$

où $\tilde{W}_{12}(n, m)$, $\tilde{W}_{22}(m, m)$, $U_1(n, m)$, $U_2(m, m)$ sont définis par :

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11} & \tilde{W}_{12} \\ \tilde{W}_{12}^T & \tilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} A^{-1}B & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial F}{\partial q_i}$ est une matrice nulle sauf pour le terme de la $m^{\text{ième}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à (-1) , $\frac{\partial H}{\partial h_{ij}}$ est une matrice nulle sauf pour le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne, qui est égal à $(+1)$.

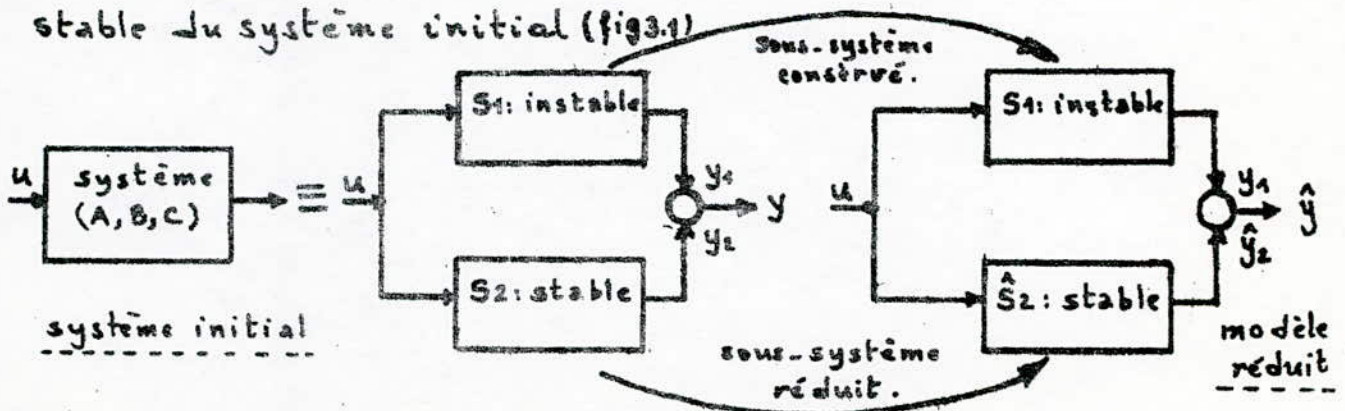
3.2.4 Extension au cas des systèmes instables:

Une bonne approximation d'un système n'est obtenue qu'en conservant strictement tous ses modes instables dans le modèle réduit. En effet les modes instables non retenus, pourront introduire des contraintes supplémentaires sur le régime asymptotique, associées à d'autres contraintes sur le même régime liées au type d'entrée.

De ce fait, le problème de réduction pourrait être traité en décomposant le système initial par transformation linéaire en 2 sous-systèmes découplés, l'un stable et l'autre instable.

Le modèle réduit pourrait être aussi constitué de 2 sous-systèmes:

- un sous-système instable identique à celui du système initial.
- un sous-système stable obtenu par réduction de la partie stable du système initial (fig 3.1)



fig(3.1) réduction d'un système instable .

On remarque bien que les contraintes sur le sous système instable sont conservées dans le modèle réduit. Quant à la partie stable, les contraintes pourraient être prises en compte en appliquant les résultats des paragraphes précédents.

La décomposition du système initial se fait comme suit:

a) On fait un changement de base de variables d'état $x = T_1 \tilde{x}$

$$\text{avec : } T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \hline 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix}, \quad T_1^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} \\ \hline 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$[\tilde{T}_{11} \mid \tilde{T}_{12}]$: une matrice dont les lignes représentent les n_1 vecteurs propres correspondant aux n_1 valeurs propres à partie réelle positive associées à A^T .

Le système initial (3.1) devient alors:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.32)$$

avec $J_1 =$ bloc de Jordan formé des valeurs propres à partie réelle positive.

$$\text{et : } \begin{aligned} \tilde{A}_3 &= A_3 T_{11} & \tilde{B}_1 &= T_{11} B_1 + T_{12} B_2 & \tilde{C}_1 &= C_1 T_{11} \\ \tilde{A}_4 &= A_3 T_{12} + A_4 & \tilde{B}_2 &= B_2 & \tilde{C}_2 &= C_1 T_{12} + C_2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$A_3, A_4, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont des partitions des matrices A, B, C .

b) On fait un 2^{ème} changement de base $\tilde{x} = T_2 x'$.

$$T_2 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ \hline -N & I_{n-n_1} \end{bmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ \hline N & I_{n-n_1} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

où N est solution de l'équation de Lyapunov $N J_1 - \tilde{A}_4^T N + \tilde{A}_4^T = 0$ (3.35)

Par cette transformation, le système (3.32) devient:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix} u \quad (3.36)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } \begin{aligned} A_4 &= \tilde{A}_4 & , & & B_1 &= \tilde{B}_1 & , & & c_1 &= \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 N \\ \Lambda_1 &= J_1 & & & B_2 &= N \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 & & & c_2 &= \tilde{c}_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

La forme (3.36) montre bien le découplage entre le sous système instable (Λ_1, B_1, c_1) et le sous système stable (A_4, B_2, c_2)

Enfin, le modèle réduit est choisi sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Lambda_1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline G_2 \end{bmatrix} u \\ \hat{y} &= \begin{bmatrix} c_1 & | & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Le problème se ramène donc à la recherche des matrices (F_4, G_2, H_2) du sous système stable en utilisant les résultats des paragraphes (3.2.2) et (3.2.3).

3-3 Réduction optimale des systèmes multivariables:

Contrairement au cas monovarié, il n'existe pas de forme canonique unique pour les systèmes multivariables [16].

En effet ces formes respectent un certain nombre d'invariants de structure (indices de commandabilité) qui caractérisent le système étudié. Dans ce qui suit, nous allons définir les indices de commandabilité, ensuite étudier quelques unes de ces formes canoniques, et enfin terminer avec quelques remarques sur le problème de réduction optimale.

3.3.1 Notion sur les indices de commandabilité:

Soit $Q = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$ la matrice de commandabilité du système (A, B, C) de rang n (le système étant supposé complètement commandable). On pourra toujours trouver n colonnes linéairement indépendantes de Q formant la matrice: $Q_q = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{q-1}B]$ $1 \leq q \leq n$ de rang n , alors la plus petite valeur de q (appelée μ) représente l'indice de commandabilité du système.

De façon plus générale, (cas d'un système de r entrées)

On choisit une base S de \mathbb{R}^n parmi les colonnes de Q de telle façon que si $A^j b_i \in S \Rightarrow A^{j+1} b_i \in S$.

Par définition les n_i (indices de commandabilité du système)

sont: $n_i \triangleq \left\{ A^j b_i \in S \text{ pour } 0 \leq j \leq n_i - 1 \text{ et } A^{n_i} b_i \notin S; i=1, \dots, r \right\}$.

En ordonnant les colonnes (b_i) de B , nous pourrions avoir le vecteur n des indices de commandabilité ordonné comme suit:

$$n_1 \gg n_2 \gg \dots \gg n_r \dots$$

Rappelons que ces indices sont des invariants du système et sont conservés par toute transformation non-singulière sur l'état et/ou les entrées.

3.3.2. Etude de quelques formes canoniques:

3.3.2.1 forme canonique de Brunovski [8,9]:

Nous allons étudier la méthode de Brunovski qui détermine la forme canonique d'un système à partir des indices de commandabilité que nous venons de définir. Brunovski montra que tout système contrôlable (A, B) peut se mettre par changement de base sous la forme canonique suivante:

$$(A, B, C) \longrightarrow (A', B', C')$$

$$\dim A = \dim A'$$

$$\dim B = \dim B'$$

$$\dim C = \dim C'$$

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & \dots & A'_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{r1} & \dots & A'_{rr} \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} B'_1 \\ \vdots \\ B'_r \end{bmatrix}, \quad C' = [\text{quelconque}] \quad (3.39)$$

$$\text{avec : } A'_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ x & \dots & x & \dots & x & x \end{bmatrix}, \quad A'_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x & x & \dots & x \end{bmatrix}$$

$\dim A'_{ij} = n_i \times n_j$; x : représente un élément nul ou non nul.

$$B'_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ x & x & \dots & 1 & x & \dots & x \end{bmatrix}$$

↑
i^{ème} colonne

Rappelons succinctement l'algorithme de recherche de la forme canonique [8] :

- 1°. chercher les n_i ($1 \leq i \leq r$) correspondant aux r entrées.
 - 2°. former la matrice $Q' = [b_1, b_2, \dots, b_r, Ab_1, \dots, Ab_r, A^2 b_1, \dots, A^{n_1-1} b_1, \dots]$ et calculer son inverse.
 - 3°. former la matrice $P = (T^{-1})^T$, T est la matrice modale du système. $P = [P(1) | \dots | P(r)]$.
- $P(i)$: est un bloc de n_i colonnes.
- ${}^j P(i)$: est la $j^{\text{ème}}$ colonne du bloc $P(i)$.
- ${}^i P(k)$: est la $[rn_1 + (r-1)(n_2 - n_1 - 1) + \dots + (r-k+1)(n_k - n_{k-1} - 1) + 1]^{\text{ème}}$ ligne de Q'^{-1} . avec $1 \leq k \leq r$.
- En particulier ${}^i P(r)$ est la dernière ligne de Q'^{-1} .

$${}^d P(i) = (A^T)^{d-1} \cdot {}^1 P(i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 2 \leq d \leq n_i \end{cases}$$

4°. Déduire la matrice modale T et former les matrices

A' , B' , C' tq :

$$A' = T^{-1}AT, \quad B' = T^{-1}B \quad \text{et} \quad C' = CT \quad (3.40)$$

- Exemple d'application :

$$\text{Soit le système : } \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u. \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

$n = 4$, $r = 2$, On trouve pour ce système $n_1 = 2$ et $n_2 = 2$.

$$\text{Donc } Q' = [b_1, b_2, Ab_1, Ab_2]$$

$$Q'^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On cherche les ${}^i P(i)$ en utilisant les formules données ci-dessus.

$${}^1 P(2) = [-3/4 \quad 1/4 \quad -1/4 \quad 1/4]^T \quad (\text{dernière ligne de } Q'^{-1})$$

$${}^1 P(1) = [-1/4 \quad 1/2 \quad 1/4 \quad -1/4]^T$$

$${}^2 P(1) = A^T {}^1 P(1) \quad \text{et} \quad {}^1 P(2) = A^T {}^1 P(2)$$

On déduit la matrice P et par suite la matrice T :

$$T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -7 & 4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

les matrices A' , B' , C' trouvées sont :

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 5/4 & -5/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 3/4 & -3/2 & 7/4 \end{bmatrix}, \quad B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

En conclusion, on peut dire que cette méthode, mis à part les calculs relativement longs, se base sur un choix au préalable des indices de Commandabilité du modèle réduit. Cela peut conduire à des solutions éloignées de l'optimum réel, du fait que le calcul du régime permanent dépend encore de ces indices.

3322 forme canonique de Popov [9]:

Popov propose une forme canonique se basant seulement sur le calcul de Q' sans oublier d'ordonner le vecteur des indices de Commandabilité : $n_1 \gg n_2 \gg \dots \gg n_r$.

La forme canonique proposée est la suivante:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A_1' \\ I_{n-r} & A_2' \end{bmatrix} = Q'^{-1} A Q'$$

(3.41)

$$B' = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} = Q'^{-1} B$$

$$C' = C Q'$$

En reprenant l'exemple précédent pour ce cas, on trouve les matrices suivantes:

$$A' = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ \hline 1 & 0 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & 3/4 & 3/4 \end{array} \right] ; \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons pour cette méthode, que les calculs sont plus aisés, qu'il est facile de prendre en compte la contrainte des régimes permanents, et enfin il n'est pas nécessaire de fixer tous les indices.

Nous nous limitons enfin à ces 2 formes - d'ailleurs sont les plus utilisées - et nous allons essayer de discuter le problème de réduction optimale avec contraintes en appliquant la 2^{ème} forme canonique (forme de Popov).

3.3.3 Résolution du problème de réduction optimale et prise en compte des contraintes:

Le modèle réduit peut s'exprimer de la façon suivante:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & F_1 \\ I_{m-r} & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \hat{y} = HZ = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.41)$$

avec : F_1 ($r \times r$) , F_2 ($(m-r) \times r$)

H_1 ($p \times r$) , H_2 ($p \times (m-r)$)

Le nombre de paramètres à déterminer est $(p+r)m$, alors que dans le cas monovariante il était de $(p+1)m$.

Quand un vecteur d'entrée échelon est appliqué à l'entrée u_i , le régime permanent s'exprimera par :

$$z(\infty) = -F^{-1} G e^i \quad \text{avec } e^i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{ième ligne} \\ \text{pour } F^{-1} \end{array}$$

sachant la forme de F , on trouve

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -F_2 F_1^{-1} & I \\ F_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Le régime permanent s'écrira donc :

$$\begin{cases} z_1^i(\infty) = + F_2 F_1^{-1} e^i \\ z_2^i(\infty) = - F_1^{-1} e^i \end{cases}$$

$$\hat{y}^i(\infty) = - \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} F^{-1} G e^i = \begin{bmatrix} H_1 F_2 F_1^{-1} & -H_2 F_1^{-1} \end{bmatrix} e^i \quad (3.43)$$

La contrainte d'égalité des régimes permanents du système réel et de son modèle réduit s'écrit :

$$H_1 F_2 F_1^{-1} - H_2 F_1^{-1} = -CA^{-1}B \quad (3.44)$$

qui peut être tenue en compte en imposant à H_2 :

$$H_2 = H_1 F_2 + CA^{-1}B F_1 \quad (3.45)$$

Ceci permet de ramener le problème à une minimisation sans contraintes portant sur les $(mr + (m-r)p)$ paramètres libres de F_1 , F_2 et H_1 .

remarque : Malgré que le problème est ramené à une minimisation sans contraintes, les calculs du gradient du critère par rapport à F_1 , F_2 et H_1 sont assez lourds. De façon à ne plus encombrer l'exposé, nous renvoyons le lecteur pour le calcul du gradient à l'annexe.

Notons que ces méthodes de réduction (cas multivariable) ne sont pas les seules qui existent à présent, plusieurs auteurs ont proposé des méthodes de réduction, citons au passage la méthode de Wilson [14] dont nous donnerons l'algorithme ultérieurement.

remarques générales :

Les résultats obtenus pour le cas multivariable constituent une généralisation du cas monovariable. L'inconvénient de l'utilisation des formes canoniques est dû essentiellement au classement des indices qui peut ne pas conduire à l'optimum absolu, toute fois les résultats obtenus sont satisfaisants en général.

La méthode proposée par Popov reste limitée au cas d'entrées échelon (ou impulsion), où la prise en compte des contraintes peut être introduite d'une manière plus aisée. Toutefois le cas se comp.

-lique pour des entrées d'ordre supérieur.

Le cas des systèmes instables peut être traité de façon similaire qu'en monovariabla (décomposition en sous-systèmes stable et instable).

3.4 Mise en oeuvre de la réduction optimale :

Après avoir passé en revue les principes de la réduction optimale, nous nous penchons dans ce paragraphe sur les algorithmes d'exécution de ces méthodes. Notons au passage que l'application pratique de ces méthodes nécessite le choix d'un algorithme de minimisation et d'un autre pour la résolution des équations de Lyapunov.

L'algorithme de minimisation qu'on a choisit est celui proposé par Fletcher - Powell, celui proposé pour la résolution des équations de Lyapunov est cité par S.P. Bingulac (voir annexe).

1^{er} Cas : systèmes monovariabla (mono entrée ou mono sortie) :

Algorithme de réduction : (organigramme fig 3.2)

1^o. Déterminer le spectre des valeurs propres du système initial.

- retenir les m valeurs propres dominantes et former le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m$.

(cette étape fait appel à un sous-programme 'COEF' pour la détermination des coefficients a_i).

2^o (cas mono entrée) :

Former les matrices F_0 et G_0 initiales :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} ; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

(cas monosortie) :

former les matrices F et H initiales.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & -a_m \\ 1 & & & & -a_{m-1} \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 - a_1 \end{bmatrix} ; H = [0 \dots \dots 0 \ 1]$$

3° (cas mono entrée) :

calculer la matrice H :

$$H = CW_{12} W_{22}^{-1}$$

où W est la solution de l'équation de Lyapunov

$$\bar{A}W + W\bar{A}^T + S = 0$$

$$\text{où } \bar{A} = \begin{bmatrix} A & | & 0 \\ \hline 0 & | & F \end{bmatrix} , S = \bar{B}\bar{B}^T , \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ G \end{bmatrix}$$

(cas monosortie) :

calculer la matrice G :

$$G = -P_{22}^{-1} P_{12}^T B$$

où P est solution de l'équation de Lyapunov

$$P\bar{A} + \bar{A}^T P + R = 0$$

$$\text{où } R = \bar{C}^T C \text{ avec } \bar{C} = [C \ ; \ H]$$

4° Calculer le critère : $J = \text{Tr}(RW) = \text{Tr}(PS)$.

soient les 2 équations :

$$\begin{cases} \bar{A}^T P + P\bar{A} + R = 0 \\ \bar{A}W + W\bar{A}^T + S = 0 \end{cases}$$

$$\text{équivalent à : } \begin{cases} \bar{A}^T P W + P\bar{A}W + RW = 0 \\ \bar{A}W P + W\bar{A}^T P + SP = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RW = -\bar{A}^T P W - P\bar{A}W \\ SP = -\bar{A}W P - W\bar{A}^T P \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J = \text{Tr}(RW) &= -\text{Tr}(\bar{A}^T P W + P\bar{A}W) = -\text{Tr}(\bar{A}^T P W) - \text{Tr}(P\bar{A}W) \\ &= -\text{Tr}(W\bar{A}^T P) - \text{Tr}(\bar{A}W P) = -\text{Tr}(W\bar{A}^T P + \bar{A}W P) \\ &= \text{Tr}(SP) = \text{Tr}(PS) \end{aligned}$$

- 5° Calculer le gradient de J par rapport aux éléments de F .
Ce calcul dépend du cas considéré (entrée échelon ou impulsion) et du système étudié (mono entrée ou mono sortie), il fait appel à un sous programme 'FONC' (voir paragraphes précédents concernant les conditions d'optimalité).
- 6° faire un test sur le module du gradient G de J ($\|G\| \leq \epsilon$) et voir, s'il est acceptable, écrire les matrices F, G et H , sinon introduire les paramètres libres de F dans l'algorithme de minimisation (ss. prog 'FLEPOWE'), on obtiendra en sortie de nouvelles valeurs (α_i), enfin, retour à la première étape.
La procédure continue de cette façon jusqu'à aboutir à un modèle (F, G, H) optimal.

- 7° calculer le vecteur d'état (conditions initiales) Z_0

$$Z_0 = K X_0$$

$$\text{avec } K = -P_{22}^{-1} P_{12}^T \quad (\text{voir démonstration en annexe}).$$

2^{ème} CAS: systèmes multivariables : (organigramme fig 3.3)

D'après l'étude faite précédemment, la réduction optimale se basant sur la forme canonique de Popov peut se résumer comme suit:

- 1° Ordonner le vecteur d'entrée du système de telle façon que les indices de commandabilité soient rangés par ordre décroissant.
- 2° Choisir les indices de commandabilité correspondant au modèle réduit.
- 3° Mettre les matrices F, G et H sous leurs formes canoniques
- 4° Introduire les paramètres libres de $(F_1, F_2$ et $H_1)$ dans un algorithme de minimisation (utilisant J et G / aux éléments

de F_1, F_2 et H_1) jusqu'à aboutir à l'optimum.

5°. Ecrire les matrices F, G, H finales du modèle.

Toujours dans le cas multivariable, Wilson [14] a proposé une autre méthode que nous résumons dans les étapes suivantes:

- 1°. fixer m valeurs propres du système (A, B, C) et former le polynôme caractéristique pour déterminer les $a_i (i=1, \dots, m)$
- 2°. former F initiale (forme Compagne), ainsi que $G^{(1)}$ comme dans le cas monovariable tq $(F, G^{(1)})$ soit contrôlable.
- 3°. Calculer $H^{(1)}$: $H^{(1)} = CW_1 Z W_2 Z^{-1}$ (W solution de $\bar{A}W + W\bar{A}^T + S = 0$).
- 4°. En utilisant le couple $(F, H^{(1)})$ retrouver $G^{(2)}$.

$$G^{(2)} = -P_{22}^{-1} P_{12} B \quad (P \text{ solution de } \bar{A}^T P + P\bar{A} + R = 0).$$

La procédure continue de cette façon avec le couple $(F, G^{(2)})$ en calculant à chaque pas le critère J jusqu'à ce que celui ci devienne constant pour un certain système initial $(F, G^{(i)}, H^{(i)})$.

Enfin nous introduisons les paramètres de F dans l'algorithme de minimisation pour obtenir le triplet (F, G, H) du modèle réduit optimal.

3.5 Conclusions:

La réduction optimale des systèmes complexes permettant de trouver un modèle réduit optimal en minimisant l'écart de réduction est sur le plan théorique la plus satisfaisante. Toutefois la mise en œuvre pratique de cette méthode fait intervenir une programmation non linéaire qui rend les calculs du modèle réduit plus lourds donc un temps de calcul plus long. Outre le problème numérique, un problème de divergence de l'algorithme

de minimisation se pose. Nous pourrions remarquer encore que cette méthode ne permet pas de lier les états du modèle réduit à celui du système réel par une relation stricte comme c'est le cas pour l'agrégation.

Notons enfin que les contraintes sur les régimes permanents peuvent être prises en compte au niveau de la structure même du modèle et c'est là un avantage.

Terminons enfin par dire, que la méthode de réduction optimale reste malgré ses calculs lourds la plus satisfaisante, en donnant une bonne approximation du système à réduire, mais ce toujours pour des systèmes de faible dimension.

ORGANIGRAMME DE REDUCTION OPTIMALE

cas : monovariabale (WILSON)

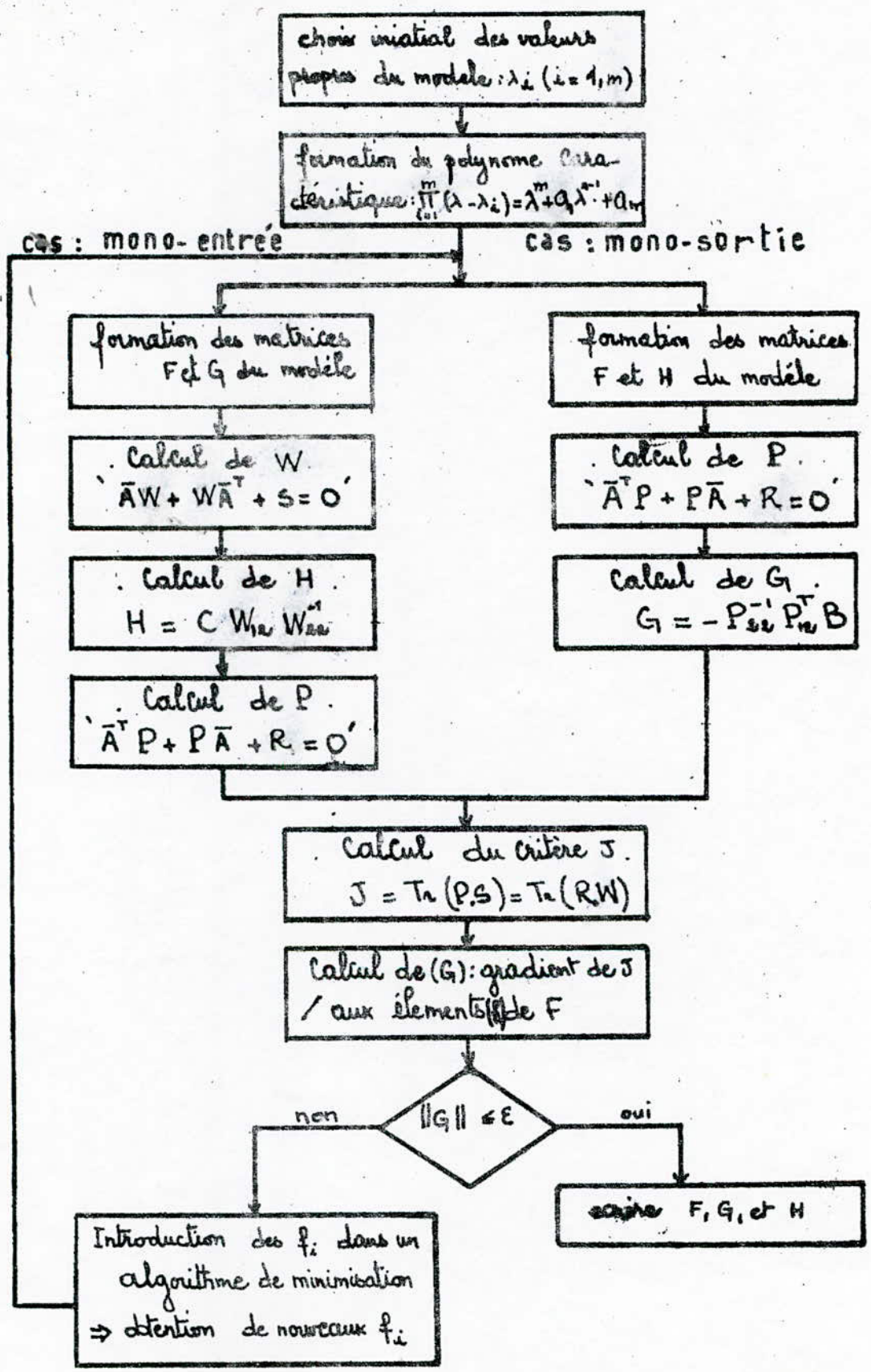


fig 3.2

-ORGANIGRAMME DE LA REDUCTION OPTIMALE-

cas : multivariable (WILSON)

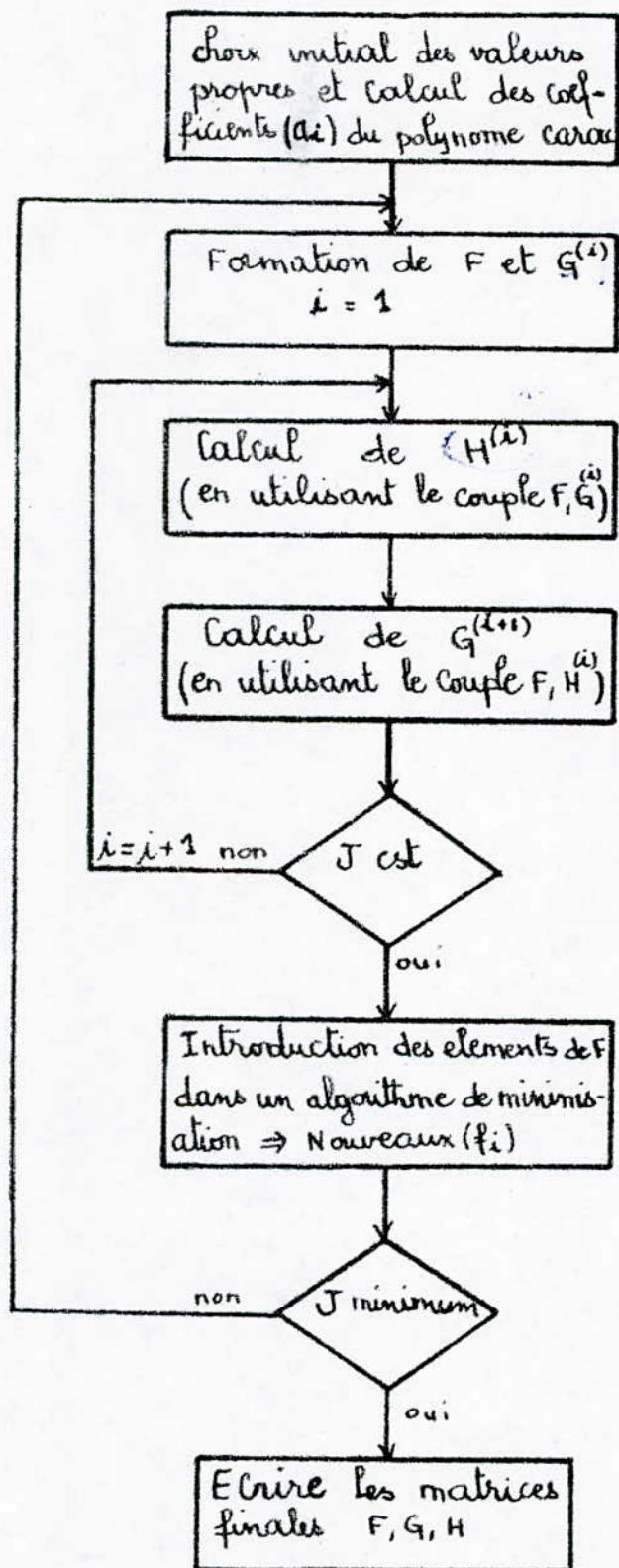


fig 3.3

- chapitre IV -

Agrégation Optimale

4.1 Introduction :

Parmi les nombreuses méthodes de réduction applicables aux systèmes multivariables, la technique d'agrégation présente un intérêt particulier. En effet, l'existence d'une relation linéaire entre les états des systèmes réel et réduit amène un certain nombre de propriétés remarquables. Toutefois, le choix des modes du modèle agrégé qui appartiennent nécessairement à l'ensemble des modes du système initial est fondamental pour la qualité des résultats obtenus. Dans la plupart des applications de modèles réduits au sens des modes dominants, les modes retenus sont les plus lents [6, 5, 18, 19].

Deux méthodes ont été proposées pour aborder de façon plus réaliste ce problème de choix des modes dominants.

La première consiste à rechercher les modes très faiblement commandables ou très faiblement observables. Une telle méthode n'est pas vraiment satisfaisante car elle ne tient pas en compte du fait qu'une faible observation d'un mode peut être compensée par une forte excitation.

La seconde méthode dernièrement proposée permet de déterminer un modèle agrégé optimal au sens d'un critère quadratique et pour un horizon d'observation infini. L'optimisation porte seulement sur le choix des modes et conduit à définir un modèle réduit dont les sorties consér.

vent strictement les pondérations des modes retenus.

Il s'agit en somme d'effectuer un choix optimal des modes, or pour ce choix, il faut envisager C^m cas différents (n et m désignent respectivement les dimensions des modèles initiaux et réduit) si bien que cette technique est difficilement applicable pour un système de grande dimension.

La technique que nous allons étudier dans ce chapitre bien que, dans son principe, sous optimale par rapport à la précédente, conduit à des résultats satisfaisants lorsqu'une optimisation par rapport à la matrice des sorties est effectuée, et ce avec un volume de calcul considérablement réduit.

4.2 Position du problème :

soit le système linéaire invariant, supposé complètement commandable et observable décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^p \quad (4.1)$$

et un modèle simplifié dont l'état z est agrégé de x .

$$z(t) = Lx(t) \quad \forall t \geq 0.$$

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Gu \\ \hat{y} = Hz \end{cases} \quad \text{où } z \in \mathbb{R}^m, \hat{y} \in \mathbb{R}^p, m \ll n \quad (4.2)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence du modèle agrégé impliquent que le spectre des valeurs propres de F soit un sous ensemble du spectre des valeurs propres de A . De ce fait sans diminuer la généralité des résultats, nous pouvons supposer que le modèle agrégé est sous la forme de Jordan avec : $L = L_0$, $F = \Lambda_1$, $G = \Gamma_1$ (4.3)

$$\text{où } L_0 = (I_m \mid 0) T^{-1}$$

$$F = [T^{-1}AT]_{m \times m}$$

$$G = [T^{-1}B]_{m \times r}$$

Le problème d'agrégation optimale consiste à définir les matrices (L, F, G, H) du modèle agrégé pour que l'approximation des sorties de (4.1) obtenue par $\hat{y}(t)$ soit optimale au sens d'un critère quadratique de réduction J

$$J = \sum_{i=1}^r \int_0^{t_f} (e^i(t))^T \cdot e^i(t) dt \quad (4.4)$$

défini à partir de l'écart entre les sorties du système et

$$\text{du modèle } e^i(t) = y^i(t) - \hat{y}^i(t) \quad i = 1, \dots, r$$

où l'indice i note la réponse obtenue lorsque toutes les entrées sont nulles à l'exception de l'entrée u_i .

Le modèle agrégé défini par la matrice d'agrégation L_0 sera

$$\text{donc : } \begin{cases} \dot{z}(t) = \Lambda_1 z(t) + \Gamma_1 u(t) \\ \hat{y}(t) = H z(t) + K u(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

La solution sous-optimale proposée pour ce problème de réduction se résume en deux étapes [3]:

- Sélection des modes à retenir dans le modèle agrégé;
- Optimisation du critère par rapport à H pour ce choix de modes.

La qualité des résultats obtenus par cette méthode dépend essentiellement du choix préalable des modes. Bien entendu, le modèle agrégé ainsi défini ne correspond pas à l'optimum du problème global, mais seulement au minimum du critère pour ce choix de modes donné. Toutefois, si ce choix est convenablement fait, cette solution conduit en général à des résultats très satisfaisants.

Une procédure permettant le choix des modes sera développée ultérieurement. Tout d'abord nous étudions le choix optimal de H et K pour des entrées classiques déterministes tel que l'échelon et l'impulsion.

4.3 Agrégation optimale pour des entrées impulsion:

Pour des entrées impulsionnelles, la présence de matrice de couplage entrées-sorties n'intervient qu'à l'instant $t=0$ où l'entrée est appliquée. De ce fait une optimisation par rapport à K , sur l'horizon $(0, t_f)$, n'apporte rien de plus que n'importe quel autre choix de K . Nous prenons donc pour cette étude $K = D$ de façon à nous ramener au problème de l'agrégation d'un triplet (A, B, C) par (Λ_1, Γ_1, H) .

La solution du problème d'optimisation posé est obtenue de façon classique en réécrivant le critère sous la forme :

$$J = \text{Trace} \left\{ (C - HL_0)^T \cdot (C - HL_0) W \right\} \quad (4.6)$$

$$\text{où } W = \sum_{i=1}^p \int_0^{t_f} e^{A\tau} B_i B_i^T e^{A\tau} d\tau. \quad (4.7)$$

$$\text{avec } W_i = \int_0^{t_f} e^{A\tau} B_i B_i^T e^{A\tau} d\tau \text{ solution de l'équation de Lyapunov} \\ AW_i + W_i A^T + B_i B_i^T = 0 \quad (4.8)$$

et en exprimant la condition d'optimalité du premier ordre par rapport à H :

$$\frac{\partial J}{\partial H} = 2 (HL_0 W L_0^T - C W L_0^T) = 0 \quad (\text{voir démonstration en annexe})$$

Le choix optimal de la matrice H est donc donné par :

$$H = C W L_0^T (L_0 W L_0^T)^{-1} \quad (4.9)$$

Il est facile de vérifier que cette condition est aussi suffisante

puisque : $\frac{\partial^2 J}{\partial h_j^2} = 2 L_0 W L_0^T > 0 \quad \forall j = 1, \dots, p.$

où h_j^T note les lignes de H .

4.4 Agrégation optimale pour des entrées échelon:

Pour définir un modèle agrégé optimal pour ce type d'entrées, il est nécessaire d'introduire un ensemble de contraintes sur les régimes permanents du système et du modèle.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y^i(t) - \hat{y}^i(t)) = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (4.10)$$

Lorsque ces contraintes sont satisfaites, le critère (4.6)

$$\text{existe et est égal } \tilde{J}_0: J_0 = \text{Trace} \{ (C - HL_0)^T (C - HL_0) \tilde{W} \} \quad (4.11)$$

$$\text{où } \tilde{W} = A^{-1} W A^{-T} \quad (4.12)$$

C'est donc un problème d'optimisation avec contraintes qui doit être résolu et deux cas peuvent se présenter selon que le modèle agrégé comporte ou non une matrice de couplage entrée-sortie K .

1^{er} cas: La sortie du modèle est définie par H et K :

En remarquant que le critère J_0 sans contrainte ne dépend que de H , le problème sera donc traité de la façon suivante:

- calculer la solution optimale H^* minimisant le critère J_0 sans contrainte. Le résultat obtenu est identique au cas impulsionnel et H^* se déduit de (4.9) en remplaçant W par \tilde{W} .
- fixer la matrice K de façon à assurer les contraintes sur le régime asymptotique soit:

$$K = (C - H^* L_0) X_0 + D \quad (4.13)$$

où X_0 est la matrice formée des vecteurs $x^i(\infty)$

$$X_0 = -A^{-1}B.$$

Puisque le minimum absolu d'un critère est atteint dans le cas sans contrainte, il est évident que la solution proposée est la solution optimale pour des entrées échelon.

2^{ème} cas: La sortie du modèle est définie par H :

Dans ce cas les matrices de couplage du système et du

modèle réduit sont égales ($\kappa = D$) et le critère J_0 sera minimisé avec les contraintes (4.10). La résolution par la méthode de Lagrange conduit à définir un critère modifié :

$$J'_0 = J_0 + 2 \operatorname{Tr} \{ P^T (C - HL_0) X_0 \} \quad (4.14)$$

où P est une matrice (p, r) de multiplicateurs de Lagrange. Le calcul du gradient par rapport à H et P fournit les conditions nécessaires d'optimalité :

$$\begin{cases} \frac{\partial J'_0}{\partial H} = 2 (HL_0 \tilde{W} L_0^T - C \tilde{W} L_0^T - P X_0^T L_0^T) = 0 \\ \frac{\partial J'_0}{\partial P} = 2 (C - HL_0) X_0 = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

(Voir démonstration en annexe)

En combinant ces 2 équations, l'expression de H optimale s'écrit :

$$H = C \tilde{W} L_0^T V (I_m - E (E^T V E)^{-1} E^T V) + C X_0 (E^T V E)^{-1} E^T V \quad (4.16)$$

où $V = (L_0 \tilde{W} L_0^T)^{-1}$ et $E = L_0 X_0$

remarques: - Ce résultat n'est valable que si la dimension m du modèle agrégé est supérieure au nombre d'entrées r . Si $m = r$ seules les contraintes peuvent être assurées et il n'y a pas d'optimisation possible.

- La première solution proposée a pour avantage de fournir une meilleure approximation. Toutefois, la réponse obtenue présente une discontinuité à l'origine différente de celle du système réel puisque $\kappa = D$. Pour certaines applications cette solution ne peut être tolérée. Il faut alors choisir $\kappa = D$ et fixer H par la seconde méthode.

4.5 Choix des modes retenus par le modèle agrégé optimal :

Tous les modèles réduits (agrégés ou non) proposés jusqu'à présent et conservant des modes du système réel, ce sont :

les modes les plus lents et instables qui sont retenus. Ce choix est fondé sur des considérations liées à la durée d'un mode sans tenir compte de la façon dont il est excité ou observé. En d'autres termes, il se base sur les propriétés de A sans tenir compte de B et C . Quelques d'autres solutions pour ce choix de modes qui ont été proposées à ce jour mais elles sont loin d'être satisfaisantes. Citons parmi les quelles une méthode reposant sur la recherche judicieuse des modes les plus "fortement observables" et de les retenir dans le modèle agrégé. L'avantage que présente cette approche est sa simplicité comparée à la complexité d'une minimisation globale qui nécessite C_n^m minimisations partielles avec m modes fixés.

En pratique cela signifie que le choix des modes est une étape fondamentale qui peut conduire, soit à une solution proche de l'optimum global (souvent même à cet optimum), soit à une solution qui en est très éloignée.

Une méthode plus satisfaisante a été proposée durant les quelques dernières années toujours dans le but d'offrir un choix convenable des modes significatifs de la sortie d'un système.

Cette méthode repose sur deux études successives qui mettent en évidence :

- L'énergie associée à chaque mode ;
- Certaines propriétés du régime asymptotique.

L'utilisation conjointe de ces deux informations conduit à classer les modes par ordre d'importance décroissante et permet de définir à la fois une dimension m convenable et les modes à retenir.

Dans tout ce qui suit nous supposons que le système est à une entrée et une sortie. Nous verrons à la fin le cas multivariable.

4.5.1 Sélection des modes à partir du régime transitoire:

Cette étude a pour but de classer par ordre d'importance décroissante, les contributions énergétiques apportées par chaque mode dans la sortie du système. Par exemple dans le cas d'une réponse impulsionnelle

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \omega_i e^{\lambda_i t} \gamma_i \quad (4.17)$$

L'énergie apportée par chaque mode se calcule au moyen de :

$$W_{\lambda_i} = \int_0^{t_f} (\omega_i e^{\lambda_i t} \gamma_i)^2 dt, \quad (4.18)$$

t_f : étant l'horizon d'observation utilisé dans le critère (4.6) et

$$\Omega = CT = [\omega_1, \dots, \omega_n]$$

$$\Gamma = T^{-1}B = [\gamma_1, \dots, \gamma_n]^T$$

$$\Lambda = T^{-1}AT = \text{diag}\{\lambda_i\} \quad (\text{Pour simplifier, les } n \text{ valeurs propres de } A \text{ sont supposées réelles et distinctes})$$

L'importance énergétique des modes est donc mesurée par les W_{λ_i} et un préclassement peut être effectué en classant les W_{λ_i} par ordre décroissant. Mais du point de vue réduction, ce premier classement n'est pas satisfaisant car, s'il tient compte de l'énergie, il masque le signe de la contribution du mode telle qu'elle apparaît dans $y(t)$. En effet, si deux modes λ_i et λ_j sont voisins ($\lambda_i \neq \lambda_j$) et ont tous deux une énergie notable et du même ordre de grandeur ($W_{\lambda_i} \neq W_{\lambda_j}$), au niveau de la réponse, s'ils apparaissent avec des signes contraires, leur contribution effective est négligeable. Le test sur le signe des contributions apportées par deux modes λ_i et λ_j peut se faire sur le terme croisé:

$$W_{\lambda_i, \lambda_j} = \int_0^{t_f} (\omega_i e^{\lambda_i t} \gamma_i)(\omega_j e^{\lambda_j t} \gamma_j) dt, \quad (4.19)$$

remarque : Afin d'obtenir cette forme de blocs réels par le calcul, on procède de la façon suivante :

Soit un mode complexe (λ_i, λ_i^*) , le vecteur propre qu'il faut associer à λ_i sera un vecteur composé des parties réelles du vecteur propre correspondant à λ_i . Le second vecteur propre associé à λ_i^* sera le vecteur composé des parties imaginaires de ce vecteur propre correspondant à λ_i .

Les différentes énergies à calculer peuvent s'obtenir à partir de la matrice W .

$$W = \int_0^{t_f} e^{AZ} B B^T e^{AZ} dz.$$

où W est solution de l'équation de Lyapunov

$$AW + WA^T + BB^T = 0.$$

On forme la matrice définie par le produit direct :

$$\bar{G} = (CT)^T (CT) \otimes (T^{-1} W T^{-T}) \quad (4.21)$$

T est la matrice modale transformant A sous la forme diagonale (ou sous forme diagonale par bloc dans le cas où les valeurs propres sont multiples dégénérées, ou complexes).

Pour un mode réel (λ_i réel) l'énergie est donnée par :

$$W \lambda_i = \bar{g}_{ii} \quad (4.22)$$

et pour un mode complexe (paire complexe $\lambda_j, \lambda_{j+1} = \lambda_j^*$)

$$W \lambda_j = \bar{g}_{jj} + \bar{g}_{j+1, j+1} + \bar{g}_{jj+1} + \bar{g}_{j+1, j} \quad (4.23)$$

Quant aux termes croisés ils se calculent par l'une des relations :

$$W \lambda_i, \lambda_j = \bar{g}_{ij} \quad (4.24)$$

si les deux modes sont réels,

$$W \lambda_j, \lambda_k = \bar{g}_{jk} + \bar{g}_{j+1, j+1} + \bar{g}_{j+1, k+1} + \bar{g}_{j+1, k} \quad (4.25)$$

si les deux modes sont complexes (paires complexes λ_j, λ_j^* et λ_k, λ_k^*),

$$W_{\lambda_i, \lambda_j} = \bar{g}_{ij} + \bar{g}_{i, j+1} \quad (4.26)$$

si un mode est réel (λ_i) et un mode est complexe (λ_j, λ_j^*).

En définitive, l'algorithme de choix des modes est le suivant:

- former la matrice \bar{G} définie par (4.21),
- classer les modes par ordre d'énergie décroissante (en utilisant les égalités (4.22) et (4.23))
- si deux modes λ_i et λ_j sont tels que $\text{Re}(\lambda_i) \neq \text{Re}(\lambda_j)$ et $W_{\lambda_i} \neq W_{\lambda_j}$ tester le signe du produit croisé W_{λ_i, λ_j} . si le signe est positif le classement reste inchangé, dans le cas contraire les deux modes sont retirés du classement;
- retenir dans le modèle agrégé les m premiers modes du classement obtenu après (c). Le choix de m se fait en comparant les énergies de modes classés en positions m et $m+1$ tel que $W_{\lambda_j} \gg W_{\lambda_i}$.

Pour illustrer la mise en oeuvre nous donnons l'exemple simple

suivant :

$$a) \begin{cases} \Lambda = \text{diag}(-1, -1, 1, -4) \\ \Gamma = (1, 1, 1)^T \\ \Omega = (1, -1, 1) \end{cases}, \bar{G} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,476 & 0,2 \\ -0,476 & 0,454 & -0,196 \\ 0,2 & -0,196 & 0,125 \end{bmatrix}$$

- On est dans un cas où les modes sont réels, donc l'étude des énergies \bar{g}_{ii} donne: $(-1), (-1, 1), (-4)$ comme préclassement des modes;
- les modes (-1) et $(-1, 1)$ vérifient les relations (4.20). Comme le signe g_{12} est négatif les deux modes sont retirés du classement ou seul subsiste (-4) ;
- Le modèle réduit retient donc le mode (-4) .

L'application de cette méthode dans le cas de systèmes

ayant des pôles simples Complexes Conjugués s'obtient aussi à partir de la matrice \bar{G} . Il suffit de Considérer la somme des termes du sous-bloc formé à partir des lignes et colonnes associées à la paire de pôles Complexes Considérée.

4.5.2 sélection des modes à partir du régime permanent :

d'étude énergétique des modes à partir de la matrice W définie sur le transitoire se révèle dans certains cas insuffisante car elle ne tient pas compte des contraintes asymptotiques. Prenons par exemple le cas d'une réponse indicielle : la contribution en sortie d'un mode rapide se traduit par un terme équivalent à une discontinuité d'amplitude plus ou moins grande. Dans le cas où un mode rapide amène une discontinuité très importante ce mode n'est pas négligeable même si son énergie en transitoire est faible comparée à celle d'autres modes. En effet, si le modèle agrégé ne retient pas ce mode, la prise en compte de la contrainte asymptotique va conduire à amplifier les modes plus lents retenus et amener une erreur transitoire importante. C'est ce qu'illustre la fig(4.1)

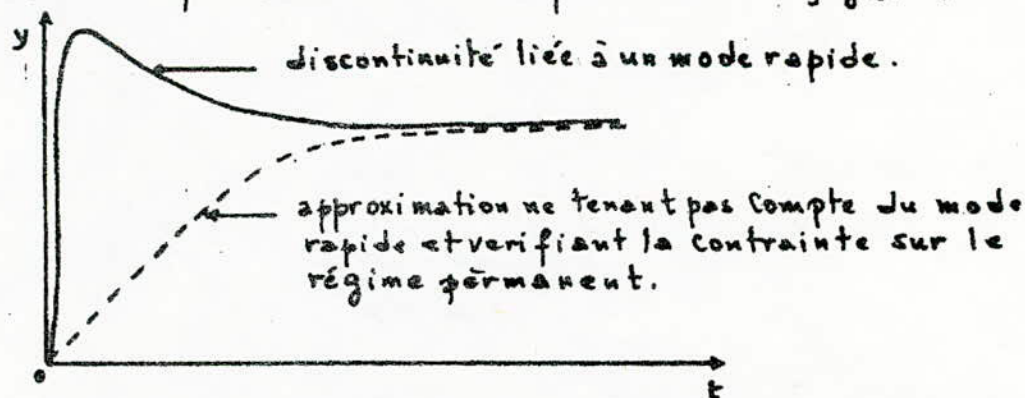


fig 4.1: "discontinuité" des modes rapides.

Pour détecter ce type de situation, une étude de la contribution apportée par chaque mode au régime permanent est

est nécessaire. Ceci concerne tous les modes plus rapides que ceux retenus au terme de l'étude énergétique (en pratique cette étude se limite à l'étude des modes au moins dix fois plus rapides). Ceci peut s'obtenir en faisant le calcul pour chaque couple entrée - sortie de la matrice ligne décomposant le régime permanent sur la base modale :

$$P^i_j = \Omega^j \otimes \Lambda^{-1} \Gamma^i = (p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (4.27)$$

où Γ^i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de Γ et Ω^j la $j^{\text{ème}}$ ligne de Ω .

et on vérifie, tout d'abord, si la discontinuité recherchée est significative, c'est à dire si $\alpha = \sum_E p_i$ est du même ordre de grandeur que le régime permanent de la sortie (E note l'ensemble des modes rapides étudiés). Dans ce cas, on extrait le ou les modes rapides qui apportent effectivement cette discontinuité. La sélection se fait simplement en classant les $|p_i|$ et en vérifiant, comme pour l'étude de l'énergie, que lorsque deux modes sont voisins les p_i correspondants sont de même signe. Ce test de signe évite de retenir deux modes qui s'annulent réciproquement en régime permanent. Dans le cas de pôles complexes conjugués (mode complexe) on considère les termes p_i et p_{i+1} .

En définitive, les modes retenus par le modèle agrégé sont constitués par l'union des modes retenus au terme des deux étapes de sélection citées précédemment. Toutefois, la sélection complémentaire à partir du régime permanent ne se justifie que dans l'étude de réponses impulsionnelles où $K=D$. Dans le cas où le modèle agrégé est défini avec $K \neq D$, il n'est pas nécessaire de faire l'étude que vient d'être mentionnée.

ionnée puisque la discontinuité pourra être prise en compte par le terme $Ku(t)$.

Pour traiter le cas multidimensionnel (multivariable), citons deux solutions proposées dans ce sens :

La première consiste à étudier globalement toutes les entrées et les sorties, ce qui revient à utiliser dans l'expression de \bar{G} :

$$W = \sum_{i=1}^r \int_0^{t_f} x^i(t) \cdot x^i(t)^T dt \quad \text{même que (4.7).}$$

et à appliquer l'algorithme monovarié décrit plus haut.

Une autre possibilité consiste à reprendre l'étude décrite plus haut pour chaque couple entrée - sortie (p.r) fois. Ensuite, la meilleure union possible des modes sélectionnés pour chaque cas étudié est retenue comme choix des modes. Cette méthode permet une analyse plus fine mais est difficilement applicable si le nombre d'entrées et de sorties est élevé. En général la meilleure union possible consiste à faire l'union des modes retenus pour chaque couple entrée - sortie. Malheureusement cette solution se révèle dans certains cas très défavorable, assez délicate et impose à l'utilisateur de trouver un compromis acceptable entre le nombre de modes retenus pour chaque sortie et la dimension du modèle.

4.6 Algorithme d'agrégation optimale :

La mise en oeuvre de la méthode d'agrégation optimale développée auparavant est du type conversationnel. Le programme se fait en trois étapes successives :

- a) 1^{ère} étape : Cette étape destinée à des calculs communs comporte le calcul de la forme modèle et le calcul de W obtenu par résolution de l'équation de Lyapunov.

b) 2^{ème} étape : Dans cette étape, la liste des modes susceptibles d'être retenus est fournie à l'utilisateur. Ce dernier choisit la dimension "m" et les modes correspondants pour le modèle agrégé. Ces données sont ensuite introduites dans le programme.

c) 3^{ème} étape : Cette étape comporte le calcul du modèle optimal, et le critère d'erreur associé. Si l'utilisateur juge les résultats insuffisants, il peut relancer cette dernière partie du programme en augmentant la dimension "m" (en ajoutant d'autres modes au choix initial).

Après avoir étudié toute la méthode d'agrégation optimale, présentons maintenant notre propre travail : (fig 4.2)

Nous avons essayé dans ce mémoire de programmer cette méthode pour des entrées échelon, cela permettra donc d'éviter le dialogue conversationnel entre l'utilisateur et le programme. Dans ce cas l'utilisateur peut fixer d'avance la dimension "m" de son modèle réduit sans attendre la liste des modes (susceptibles d'être retenus) qu'elle soit fournie. Notons que la réduction de modèles pour des entrées échelon dans cette méthode ne fait pas intervenir l'étude de la discontinuité puisqu'elle est prise en considération par le terme $Ku(t)$ (lorsque $K \neq D$).

Nous avons essayé quand même d'insérer dans ce programme le calcul du modèle réduit pour des entrées impulsion, or nous savons que dans ce cas l'étude de la discontinuité est nécessaire, son omission donc conduit parfois à des discontinuités introduites par les modes rapides lors du régime transitoire. Nous aurons peut être l'occasion de voir cette discontinuité présentée par ces modes lors de la réduction d'un modèle pour des entrées impulsion dans le chapitre prochain.

METHODE D'AGREGATION OPTIMALE POUR DES ENTREES ECHELON

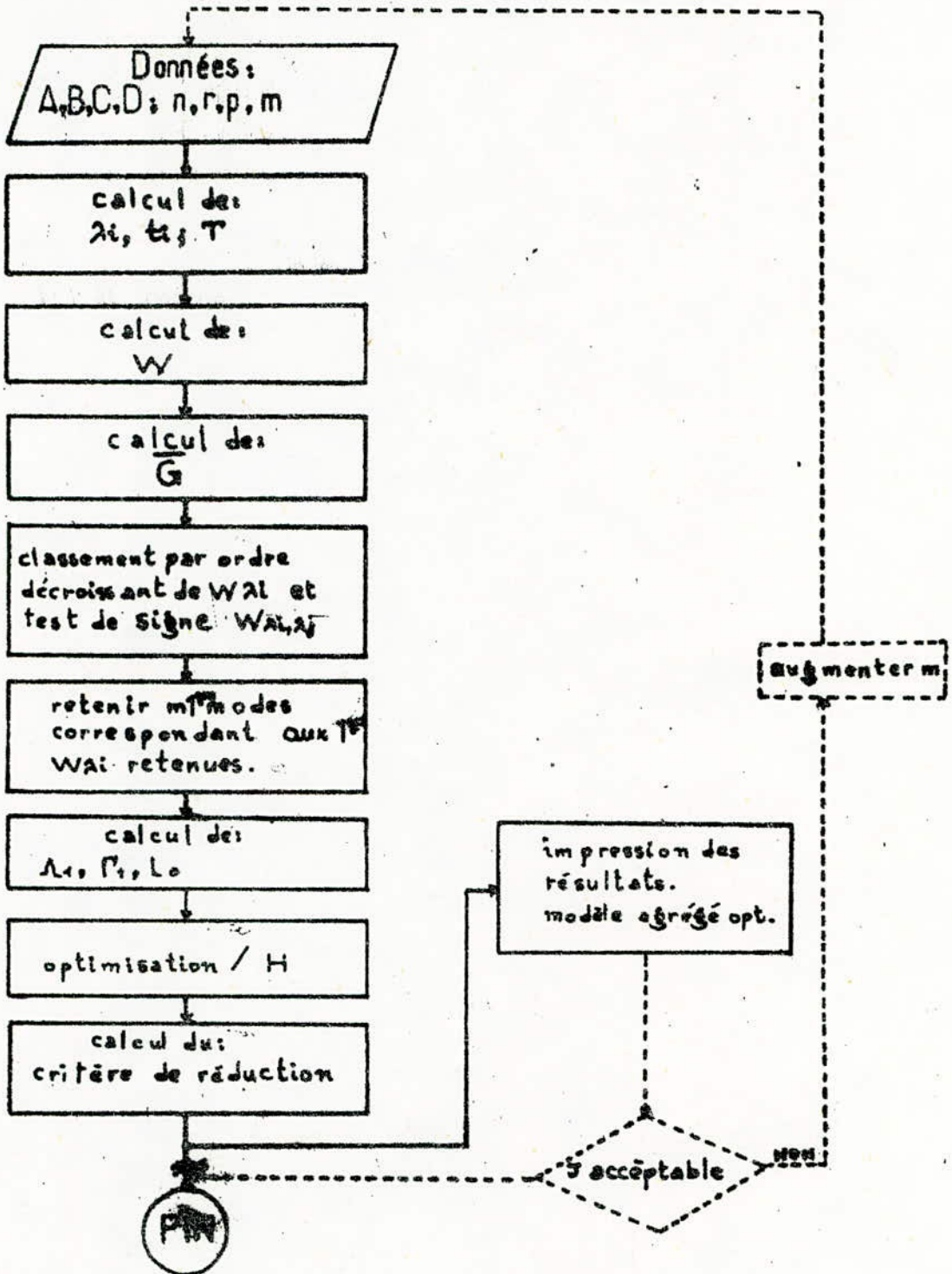
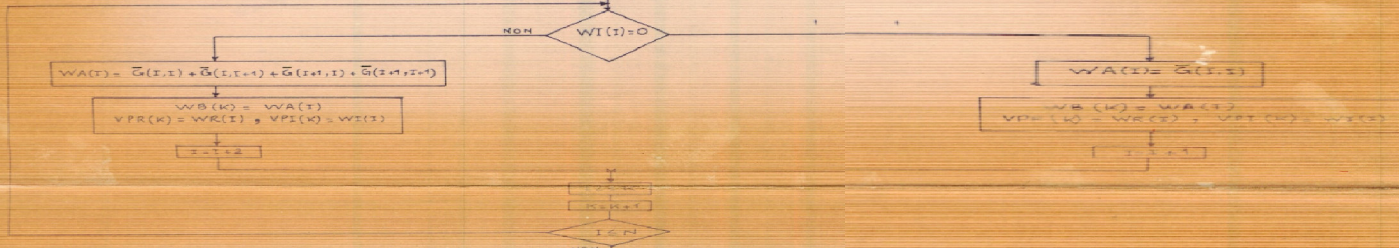


fig 4.2

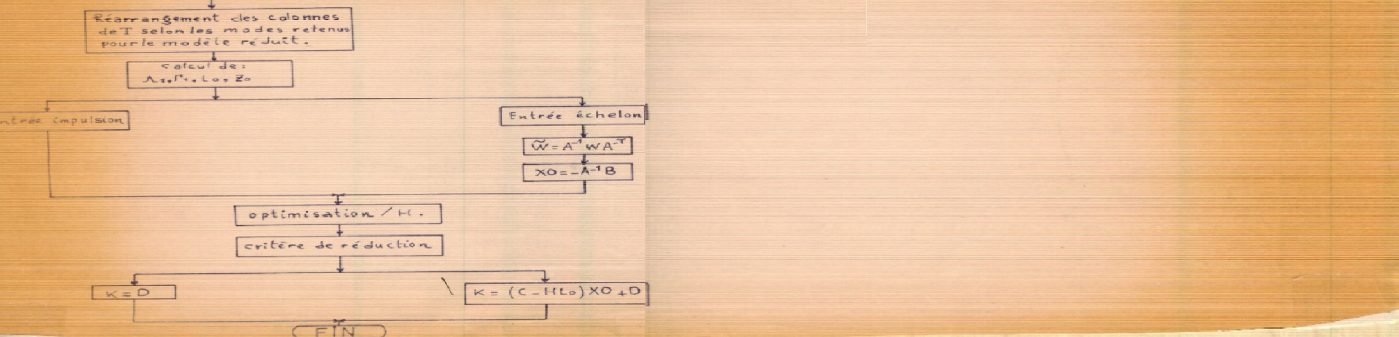
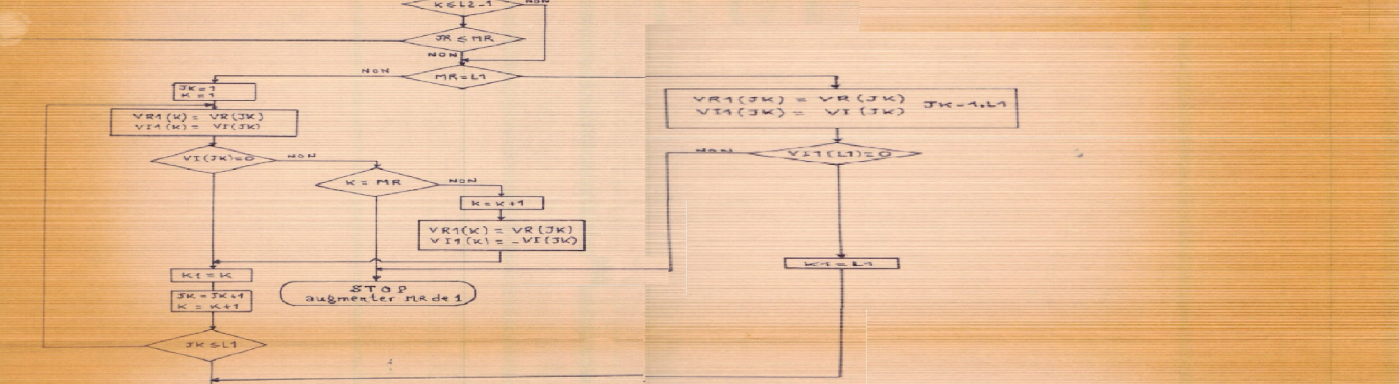
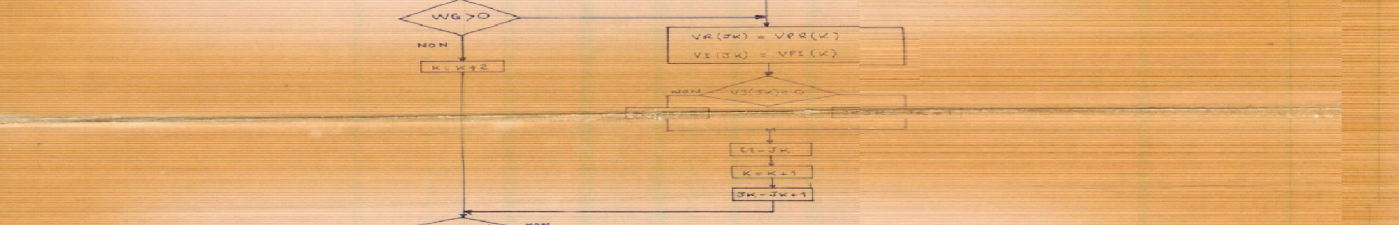
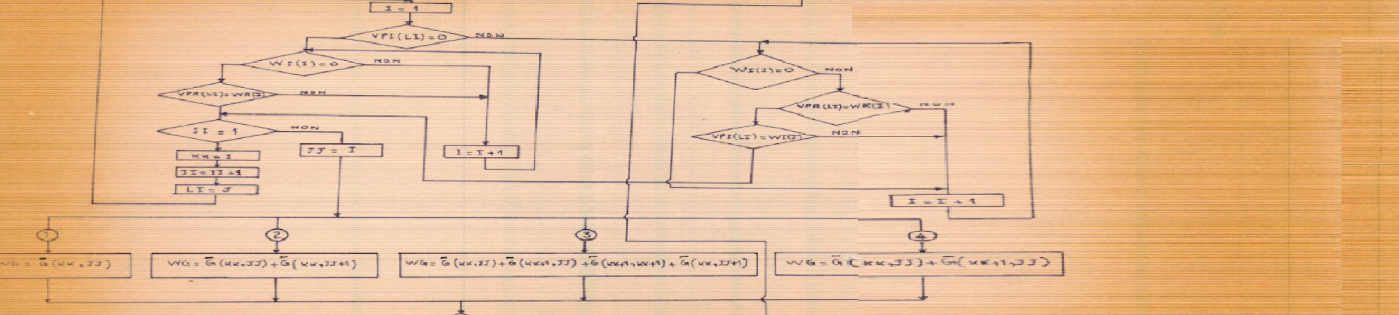
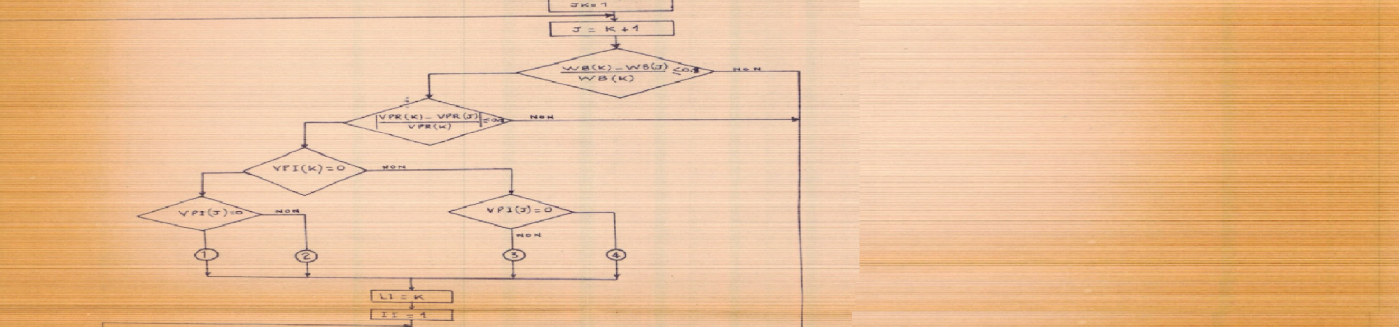
ORGANIGRAMME DEVELOPPE DE LA METHODE D'AGREGATION OPTIMALE POUR DES ENTREE'S ECHELON.

Données
A, B, C, D, X₀; N, R, P, MR

calcul de:
λ_i, t_i, T
calcul de:
W
calcul de:
G
I = 1
K = 1



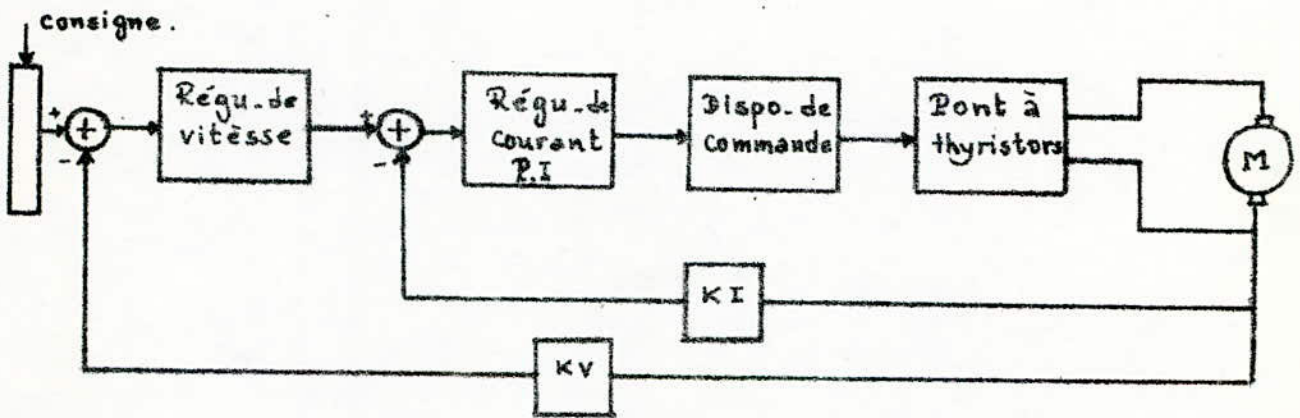
Classement par ordre décroissant de WB(K)
VPR(K) + VPI(K) associés



- chapitre V -
simulation numérique

Après une étude théorique des différentes méthodes de réduction, nous terminons dans ce chapitre par l'application d'un modèle de "variateur de vitesse électronique" de dimension (6) aux deux méthodes d'approximation optimale (Réduction optimale et agrégation optimale). Les résultats obtenus seront commentés en fin de ce chapitre.

5.1 Montage du variateur de vitesse :



Ce montage permet de commander la vitesse d'un moteur à courant continu. L'induit du moteur est alimenté par une tension commandée obtenue à partir d'un pont à thyristors. Deux boucles de régulation sont prévues, l'une en courant et l'autre en tension afin de maintenir la vitesse du moteur constante quelle que soit la charge appliquée.

5.2 Modèle mathématique du variateur de vitesse :

Le modèle mathématique représentant ce variateur de vitesse est un système d'équations différentielles d'ordre '6' décrit sous forme d'équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^6, y \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1.$$

C'est un système dynamique linéaire continu complètement commandable et observable.

Ses matrices d'évolution, de commande et d'observation sont données par: A, B et C

$$A = \begin{bmatrix} -12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30.7209 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.602 \\ 175.5481 & 71.4285 & 0 & 0 & -4.7964 & -14.8689 \\ 174.7601 & 71.1079 & 71.1079 & -100 & -4.7748 & -14.8021 \\ 0 & 0 & 0 & 1047.1428 & -71.4285 & -88.5714 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.0645 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 187.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -201.0387 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Les variables d'état du système sont:

- x_1 : tension de commande intégrée
- x_2 : paramètre interne du régulateur
- x_3 : Ecart en tension à l'entrée du régulateur en courant
- x_4 : tension de sortie du pont à thyristors
- x_5 : courant dans l'induit du moteur
- x_6 : vitesse de rotation du moteur (en rd/s)

La sortie y du système représente la vitesse du moteur (rd/s)

et u est l'entrée du système qui représente la tension de commande du pont.

(Pour plus de détails, voir thèse sur 'variateur de vitesse' - Juin 84).

Spéctre des valeurs propres de A^1 et énergies correspondantes :

VAL. PROPRES	λ_1	λ_2	λ_3	λ_3^*	λ_4	λ_4^*
PART. REELLE (WR)	-78.9345	-12.5	-33.5416	-33.5416	-12.7054	-12.7054
PART. IMAG (WI)	0	0	48.1201	-48.1201	15.796	-15.796
ENERGIE (WB)	90.5922	0	18932.85		330046.36	

La matrice modale T est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.3769 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0033 & -0.9262 & 0.0021 & -0.0057 & 0.0109 & -0.0498 \\ 0.0443 & 0 & 0.0516 & 0.0362 & 0.0497 & -0.0205 \\ -0.0457 & 0 & 0.0295 & 0.0364 & 0.0349 & -0.0411 \\ 0.9937 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1015 & 0 & -0.0786 & -0.1128 & -0.2493 & -0.3099 \end{bmatrix}$$

5.3 Résultats Obtenus :

5.3.1 Réduction optimale (voir fig 5.1)

- entrée échelon : le modèle réduit obtenu est d'ordre 2 et est décrit par :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -425.5 & -32.4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = (75369.4 \quad -0.023)$$

Le choix initial des paramètres libres de F se fait à partir des modes lents retenus du système réel (dans ce cas le mode choisi est : (λ_4, λ_4^*))

Pour ce choix, le polynôme caract est : $(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_4^*) = \lambda^2 + 25.4108\lambda + 410.9408$.

$$\text{d'où : } \begin{cases} a_1 = 25.4108 \\ a_2 = 410.9408 \end{cases} \Rightarrow F \text{ initiale} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -410.9408 & -25.4108 \end{bmatrix}$$

Le vecteur cond. initiales du modèle réduit est nul ($Z_0 = [0]$), car $X_0 =$

5.3.2. Agrégation optimale :

*1^{er} cas : $m = 4$ (dim du modèle réduit)

- entrée échelon : Le modèle réduit obtenu est décrit par : (fig 5.1)

$$F = \begin{bmatrix} -12.6734 & 15.7939 & 0.0602 & 0.0317 \\ -15.7977 & -12.7375 & 0.0114 & -0.0306 \\ -0.0351 & 0.0757 & -33.5863 & 48.031 \\ 0.0275 & 0.0759 & -48.2095 & -33.4944 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 14583.244 \\ -6495.6235 \\ -15755.189 \\ -2685.7471 \end{bmatrix}$$

$$H = (-0.2492 \quad -0.3094 \quad -0.0751 \quad -0.1141)$$

$$K = -0.2589$$

modes retenus pour le modèle réduit :

λ_4, λ_4^* et λ_3, λ_3^*

vecteur conditions initiales : $z_0 = (0, 0, 0, 0)^T$

matrice d'agrégation L_0 :

$$L_0 = \begin{bmatrix} 73.2419 & 29.8044 & -9.4245 & -0.0629 & 0.0415 & -4.23 \\ -35.2447 & -14.3422 & -7.1397 & 3.1143 & 0.2625 & -0.5614 \\ -78.4765 & -31.9342 & -14.483 & 25.4496 & 1.4706 & 5.1782 \\ -15.1 & -6.1447 & 27.581 & -3.1622 & -1.3739 & -0.7238 \end{bmatrix}$$

Entrée impulsion : (fig 5.2)

$$K = D = 0$$

$$H = (-0.2508 \quad -0.3088 \quad -0.0746 \quad -0.1098)$$

mêmes expressions pour F, G et L_0 qu'en échelon.

*2^{ème} cas : $m = 2$

- entrée échelon : (fig 5.1)

le modèle réduit obtenu est décrit par :

$$F = \begin{bmatrix} -12.6734 & 15.7939 \\ -15.7939 & -12.7375 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 14583.259 \\ -6495.5354 \end{bmatrix}$$

$$H = (-0.2595 \quad -0.2885)$$

$$K = 9.8744$$

mode retenu pour le modèle réduit :

(λ_4, λ_4^*)

le vecteur cond. initiales Z est nul puisque X_0 nul

La matrice d'agrégation L_0 est donnée par :

$$L_0 = \begin{bmatrix} 73.242 & 29.8045 & -8.4245 & -0.0629 & 0.0475 & -4.23 \\ -35.2448 & -14.3422 & -7.1391 & 3.1143 & 0.2625 & -0.5674 \end{bmatrix}$$

- entrée impulsion : (fig 5.2)

$$K = D = 0$$

$$H = (-0.2204 \quad -0.2781)$$

même expressions obtenues pour F , G et L_0 qu'en échelon.

5.4. Interprétation des résultats :

5.4.1 Réduction optimale :

* Le nombre maximal d'itérations pris dans l'algorithme de minimisation du critère J (algorithme FLETCHER-POWELL) a été fixé à 40, et nous remarquons que l'approximation (fig 5.1) n'est pas très satisfaisante, cela pourra s'expliquer par :

- Soit que le nombre d'itérations (40) n'était pas suffisant pour arriver à avoir un critère minimal.
- Soit qu'en est en présence d'un minimum local, le minimum absolu n'étant pas encore atteint.
- Soit que l'algorithme n'a pas convergé et pivote autour du minimum sans l'atteindre.

* Nous remarquons que les régimes permanents du système réel et de son modèle réduit sont identiques. Ceci est évident puis que la contrainte d'égalité de ces régimes a été prise en compte au niveau de la structure du modèle réduit.

* Le temps de calcul fait pour obtenir le modèle réduit d'ordre 2 est de : 11'20" qui est relativement long. Ceci est relatif au calcul itératif introduit par l'algorithme de minimisation qui à chaque fois fait appel à la résolution de 2 équations de Lyapunov d'ordre $(m+n)$. Le calcul devient rapidement prohibitif pour des systèmes d'ordre supérieur, d'où l'inconvénient de la méthode.

5.4.2 Agrégation optimale :

• Les réponses (à l'échelon et à l'impulsion) du modèle réduit représentent une bonne approximation de celles du système réel (fig 5.1, fig 5.2). Ceci est dû à l'importance des énergies des modes retenus relativement aux autres.

- énergies des modes :

$$\begin{array}{l}
 m=2 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_4 \\ \lambda_4^* \end{array} \right\} \quad 330046.36 = WB_1 \\
 m=4 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 \\ \lambda_3^* \end{array} \right\} \quad 18932.85 = WB_2 \\
 \lambda_1 \quad 90.5932 = WB_3 \\
 \lambda_2 \quad 0 = WB_4
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{modes retenus} \\ \\ \text{modes non retenus} \end{array}$$

Nous remarquons que l'énergie attribuée au mode complexe (λ_4, λ_4^*) est très importante vis à vis aux autres énergies ($WB_1/WB_2 = 17,43$, $WB_1/WB_3 = 3643,16$, $WB_1/WB_4 = \infty$).

C'est pour cette raison que les réponses des modèles réduits d'ordre 4 et plus particulièrement celui d'ordre 2 sont très satisfaisantes.

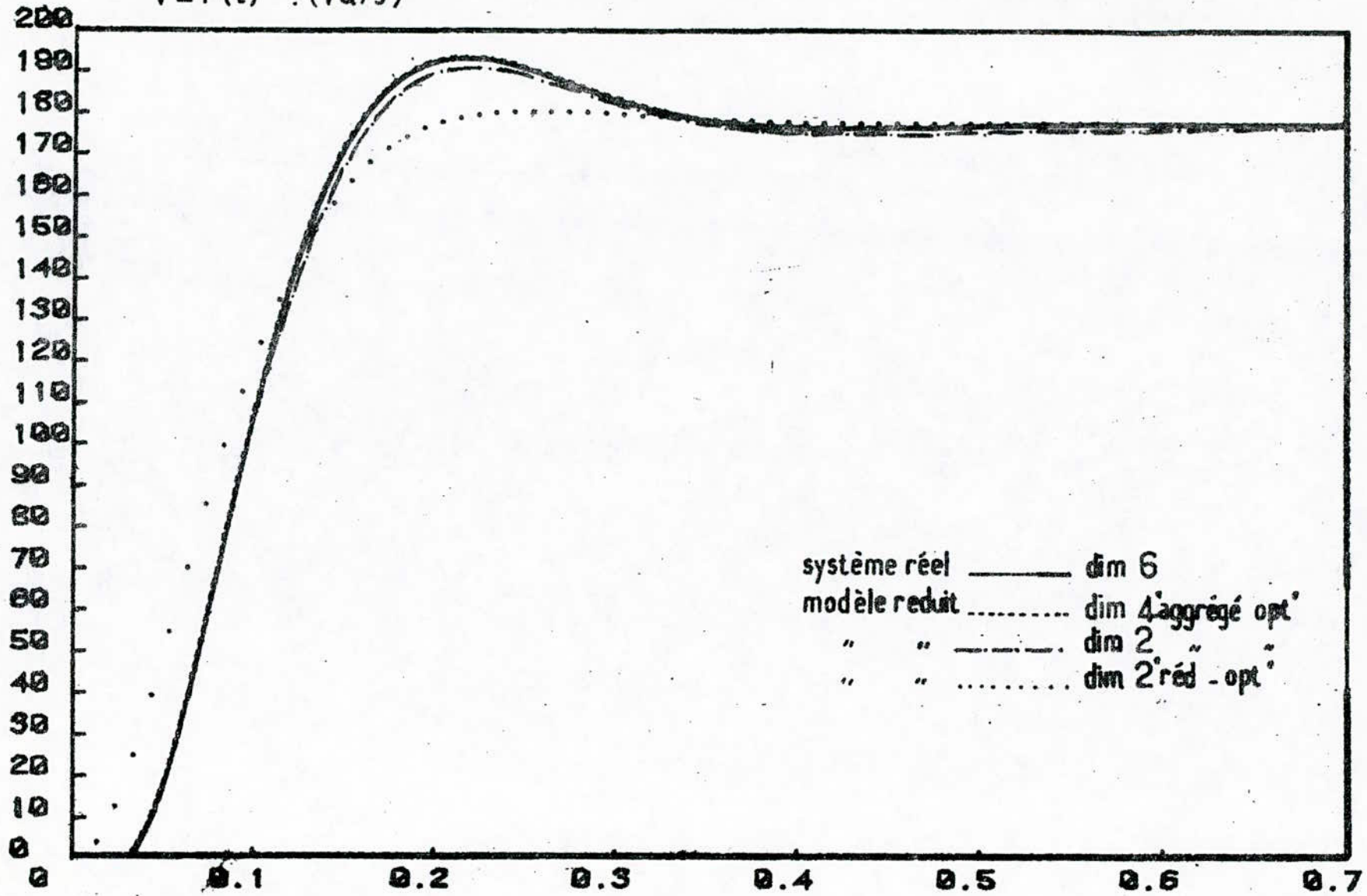
• Les régimes permanents des deux modèles réduits (entrée échelon) sont identiques à celui du système réel (du fait que la contrainte égalité est prise en compte)

• Le temps de calcul fait pour la réduction du système est très satisfaisant par rapport à la méthode précédente il est de 2'20".

Malheureusement pour ce modèle bien particulier "variateur de vitesse" qu'on a choisi, on ne trouve pas de discontinuité pendant le régime transitoire du modèle réduit (pour des entrées impulsion). Cela peut s'expliquer par le fait que les modes non retenus n'ont pas de contribution significative au régime permanent.

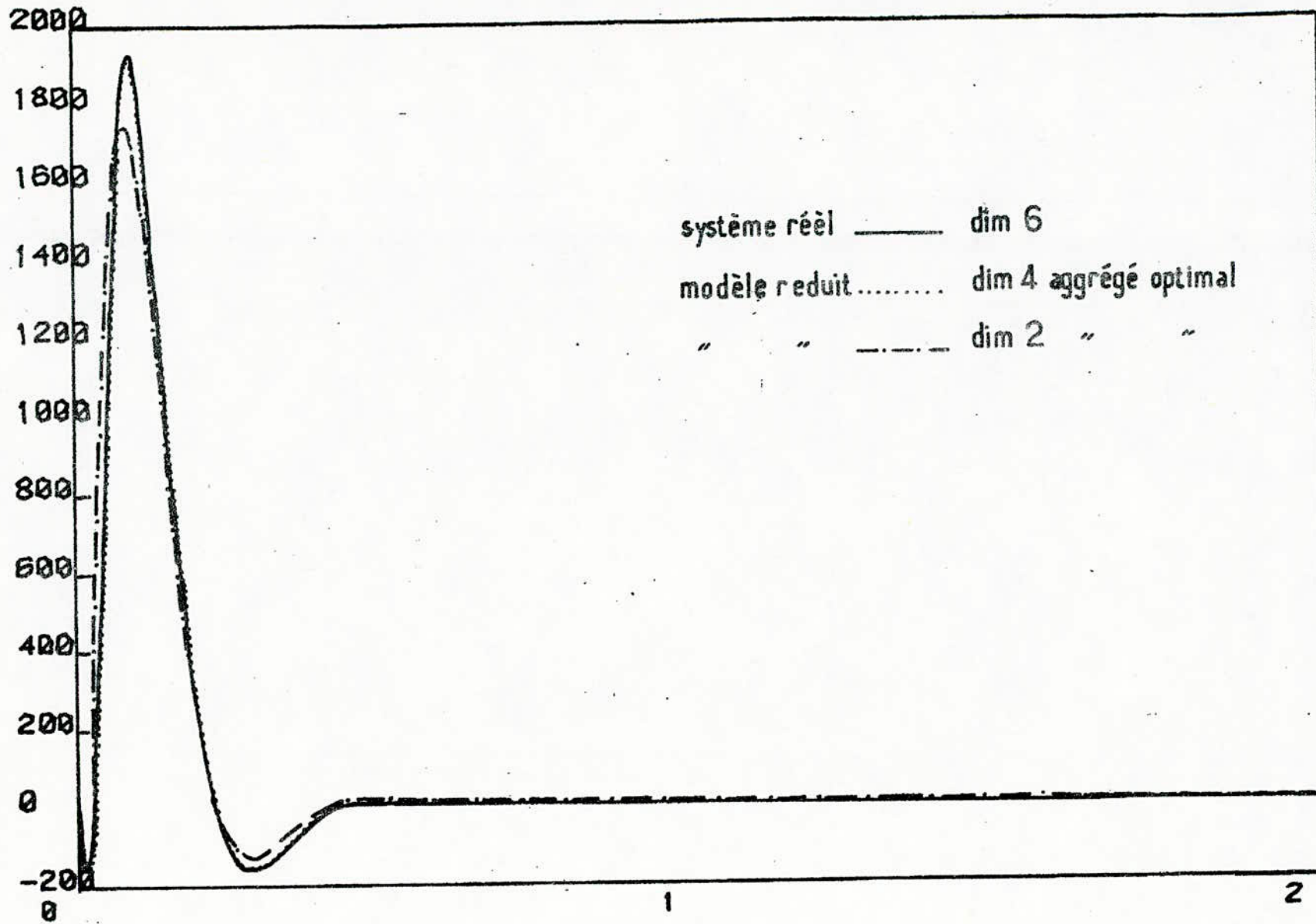
*** COURBES OBTENUES PAR APPROXIMATION. *** (Réponse à l'échelon)

$V = F(t)$ (rd/s)



système réel ——— dim 6
 modèle réduit dim 4 agrégé opt
 " " -.-.-.-.- dim 2
 " " dim 2 red-opt

(fig 5.1)



(fig 5.2)

5.5 Conclusions :

À la lumière des résultats obtenus, l'approximation est jugée satisfaisante pour les deux méthodes, bien que la méthode de réduction optimale devrait donner de meilleurs résultats dans le sens du critère considéré (la qualité de ces résultats dépend essentiellement de la convergence de l'algorithme de minimisation). L'absence d'une relation explicite reliant les états du système réel et de son modèle réduit constitue un inconvénient de la méthode. La non-linéarité est un problème en plus qui complique énormément l'algorithme et conduit à un temps de calcul relativement long. Ce problème de non linéarité a été justement éliminé par la méthode d'agrégation optimale par le choix de modes à retenir avant l'optimisation. L'existence d'une relation explicite entre l'état du système et celui de son modèle réduit offre à cette méthode des propriétés remarquables tant en modélisation qu'en commande. Outre ces avantages, la présence d'une mesure de l'erreur de réduction permet de mieux apprécier la qualité de l'approximation pour cette méthode qui bien étant sous optimale, conduit le plus souvent à de bons résultats et avec un temps de calcul acceptable.

CONCLUSION GENERALE :

Ce travail est consacré à l'étude de méthodes temporelles d'approximation optimale des systèmes complexes par des modèles de dimension réduite. Nous avons tout d'abord effectué une étude sur quelques modèles réduits

(DAVISON, CHIDAMBARA, ...) se basant sur le choix de modes dominants du système réel. Une étude plus détaillée de deux grandes méthodes d'approximation (réduction optimale et agrégation optimale) a fait l'objet particulier de notre travail. Enfin une simulation numérique basée sur un modèle d'ordre 6 présentée en fin de ce mémoire nous a permis de dégager les différentes caractéristiques spécifiant ces deux méthodes. Notons qu'une application plus étendue de ces méthodes est certainement efficace pour des systèmes de grande dimension ($n \gg 50$, en particulier l'agrégation optimale). Les calculs seront plus accentués dans ce cas, d'où une optimisation du temps se serait alors nécessaire.

Enfin notons qu'une extension au cas des systèmes discrets pourrait être envisagée, nous recommandons qu'elle fera l'objet d'une étude plus détaillée d'une thèse d'ingénieur dans un prochain avenir.

— ANNEXE —

CHI * Caractérisation mathématique de la matrice d'agrégation L:

théorème: La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un système agrégé du système réel par l'opérateur linéaire L, est que le noyau de L soit invariant par A.

a) Condition nécessaire:

$$FL = LA \Rightarrow FLX = LAX = 0$$

donc $Ax \in \text{Ker}(L) \Rightarrow L$ est invariant par A.

b) Condition suffisante:

Soit (v_{m+1}, \dots, v_n) une base du sous-espace invariant par A supposé être le noyau de L. Soit une base de \mathbb{R}^n obtenue en complétant par (v_1, \dots, v_m) la base précédente et posons:

$$T = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$$

$$\text{Alors: } LT = [K, 0] \quad \text{Donc } L = [K, 0]T^{-1}$$

K étant une matrice régulière d'ordre m.

$$\text{Alors: } \begin{cases} F = [K, 0]T^{-1}A \\ G = [K, 0]T^{-1}B \end{cases}$$

Soit (A', B') la représentation de la paire (A, B) dans la base T.

A' et B' sont partitionnées comme suit:

$$A' = \begin{bmatrix} A'_1 & 0 \\ A'_2 & A'_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B' = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix}$$

où A'_1 est de dimension $(m \times m)$ et B'_1 de dim $(m \times r)$

On a alors:

$$\begin{cases} F = K A'_1 K^{-1} \\ G = K B'_1 \end{cases}$$

* Démonstration:

Démontrons que la matrice L_0^T est formée par les vecteurs

propres de la matrice A^T associés aux valeurs propres retenues dans Λ_1 .
 Pour cela on doit montrer l'égalité suivante:

$$A^T L_0^T = L_0^T \Lambda_1 \quad (\text{par analogie avec } AT = T\Lambda)$$

où T est la matrice modale formée des vecteurs propres de A .

Λ est une matrice diagonale

$$\text{soit donc d'après } AT = T\Lambda \Rightarrow A = T\Lambda T^{-1} \Rightarrow A^T = T^{-T}\Lambda T^T.$$

$$L_0 = (I_m | 0) T^{-1} \Rightarrow L_0^T = T^{-T} \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{alors } A^T L_0^T = T^{-T} \Lambda T^T T^{-T} \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$= T^{-T} \Lambda \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} = T^{-T} \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T^{-T} \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_1$$

$$= L_0^T \Lambda_1$$

On a bien donc: $A^T L_0^T = L_0^T \Lambda_1$, le calcul de T^{-1} est alors contourné.

CH.3.

* Forme générale du gradient de J :

Soient les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} J = \text{Tr}(RW) \\ \bar{A}W + W\bar{A}^T + S = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} J = \text{Tr}(PS) \\ \bar{A}^T P + P\bar{A} + R = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Il s'agit de définir la dérivée de J / à un élément β quelconque appartenant à \bar{A} , S ou R .

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = \text{Tr} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta} R \right) + \text{Tr} \left(W \frac{\partial R}{\partial \beta} \right) \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow R = -\bar{A}^T P - P\bar{A} \quad \text{en remplaçant } R \text{ dans (3)}$$

$$\text{On obtient } \frac{\partial J}{\partial \beta} = -2 \text{Tr} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta} P\bar{A} \right) + \text{Tr} \left(W \frac{\partial R}{\partial \beta} \right) \quad (4)$$

En dérivant l'équation (1.2) on aura :

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} \bar{A}^T + \bar{A} \frac{\partial W}{\partial \beta} + W \frac{\partial \bar{A}^T}{\partial \beta} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \beta} W + \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad (5)$$

En multipliant (5) par P et en prenant la trace on trouve:

$$-2 \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta} P \bar{A} \right) = 2 \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \beta} W P \right) + \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial S}{\partial \beta} P \right) \quad (6)$$

En remplaçant (6) dans (4) on aura :

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = 2 \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \beta} W P \right) + \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial S}{\partial \beta} P \right) + \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial R}{\partial \beta} W \right) \quad (7)$$

- Dérivation de J/f (élément de F).

$$\frac{\partial J}{\partial f} = 2 \operatorname{Tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F}{\partial f} \end{bmatrix} W P = 2 \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} (W_{12}^T P_{12} + W_{22} P_{22}) \right\}$$

$\frac{\partial F}{\partial f}$ est une matrice nulle sauf à la position f où elle est égale à 1.

- Dérivation de J/g (élément de G_1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial g} &= \operatorname{Tr} \left[\frac{\partial S}{\partial g} P \right] = \operatorname{Tr} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial g} \begin{pmatrix} B B^T & B G^T \\ G B^T & G G^T \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \frac{\partial G^T}{\partial g} \\ \frac{\partial G}{\partial g} B^T & \frac{\partial G}{\partial g} G^T + G \frac{\partial G^T}{\partial g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\partial J}{\partial g} &= \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\partial G^T}{\partial g} (P_{12}^T B + P_{22} G) + \frac{\partial G}{\partial g} (B^T P_{12} + G^T P_{22}) \right\} \\ &= 2 \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\partial G}{\partial g} (P_{12}^T B + P_{22} G) \right\} \end{aligned}$$

- Dérivation de J/h (élément de H)

$$\frac{\partial J}{\partial h} = \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial R}{\partial h} W \right)$$

de la même manière on trouve $\frac{\partial J}{\partial h} = 2 \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\partial H}{\partial h} (W_{22} H^T - W_{12}^T C^T) \right\}$

- Démonstration de : $F = T_1 A T_2$.

En tenant compte de la partition de W et P , et de l'expression de G ($G = -P_{22}^{-1} P_{12}^T B$), l'équation de Lyapunov

$\bar{A}W + W\bar{A}^T + S = 0$ peut s'écrire :

$$\begin{cases} A W_{12} + W_{12} F^T - B B^T P_{12}^T P_{22}^{-1} = 0 & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F W_{22} + W_{22} F^T + P_{22}^{-1} P_{12}^T B B^T P_{12} P_{22}^{-1} = 0 & (9) \end{cases}$$

En multipliant (8) par $P_{22}^{-1} P_{12}^T$ et en l'additionnant à (9) on obtient:

$$P_{22}^{-1} P_{12}^T A W_{12} + F W_{22} + (W_{22} + P_{22}^{-1} P_{12}^T W_{12}) F^T = 0 \quad (10)$$

En transposant l'équation $W_{12}^T P_{12} + W_{22} P_{22} = 0$ (voir dém $\frac{\partial J}{\partial F}$)

$$\text{On obtient: } P_{12}^T W_{12} + P_{22} W_{22} = 0 \quad (11)$$

$$\Rightarrow P_{22}^{-1} P_{12}^T W_{12} + W_{22} = 0 \quad (12)$$

En remplaçant (12) dans (10) on obtient:

$$P_{22}^{-1} P_{12}^T A W_{12} + F W_{22} = 0 \Rightarrow F = -P_{22}^{-1} P_{12}^T A W_{12} W_{22}^{-1} = T_1 A T_2.$$

* Calcul du gradient du critère dans le cas multivariable :

Le système et son modèle réduit sont décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases} \quad (1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{z} = Fz + Gu \\ \hat{y} = Hz \end{cases} \quad (2)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, $y, \hat{y} \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^r$.

et, de façon à limiter le nombre de paramètres libres, le

modèle (2) est choisi sous la forme canonique de Popov:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & F_1 \\ \text{---} & \text{---} \\ I_{m-r} & F_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} I_r \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad H = (H_1 \mid H_2)$$

- Expression générale du critère :

Le critère quadratique à minimiser est :

$$J = \sum_{i=1}^r \int_0^{\infty} \|y^i - \hat{y}^i\|^2 dt. \quad (3)$$

avec les contraintes:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y^i(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{y}^i(t)) \quad i = 1, \dots, r \quad (4)$$

qui, compte tenu de la forme choisie pour (F, G, H) , sont pour une réponse indicielle, équivalentes à fixer la structure de H :

$$H = \underbrace{(H_1 \mid H_1 F_2 + C A^{-1} B F_1)}_{m-r \quad r} \quad (5)$$

En utilisant la même procédure qu'au paragraphe (3.1.2) le critère de réduction devient alors :

$$J = \text{trace}(RW) \quad (6)$$

$$\text{avec } R = \bar{C}^T \bar{C}$$

W solution de l'équation de Lyapunov

$$AW + WA^T + W_0 = 0$$

$$\text{et } W_0 = \begin{bmatrix} x_0 x_0^T & x_0 z_0^T \\ \text{---} & \text{---} \\ z_0 x_0^T & z_0 z_0^T \end{bmatrix}, \quad x_0 = A^{-1}B, \quad z_0 = \begin{bmatrix} -F_2 F_1^{-1} \\ \text{---} \\ F_1^{-1} \end{bmatrix}$$

Le problème est donc le suivant : minimiser / aux sous matrices F_1, F_2, H_1 le critère équivalent :

$$J_e = \text{trace}(RW) + \text{trace} \{ P(\bar{A}W + W\bar{A}^T + W_0) \} \quad (7)$$

P étant une matrice de multiplicateurs de Lagrange qui à l'optimum est solution de :

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + R = 0 \quad (8)$$

Les dérivées partielles sont obtenues en utilisant les règles de dérivation des traces de matrice. Les calculs sont rendus en raison des partitions imposées par les structures de F et H . Seul le calcul / H_1 est partiellement développé ; pour F_1 et F_2 les résultats s'obtiennent de façon analogue.

- Gradient / H_1 :

H_1 n'intervient que dans le 1^{er} terme de (7) qui est égal, en reprenant les partitions déjà introduites en (3.1.2), \bar{a}

$$J_e = \text{Tr}(R_{11} W_{11}) + \text{Tr}(R_{12} W_{22}) + 2 \text{Tr}(R_{12} W_{12}^T) \quad (9)$$

La dépendance des R_{ij} avec H_1 est la suivante :

$$R_{12} = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{-C^T H_1}_{m-r} & \underbrace{-C^T H_1 F_2 - C^T H_3}_r \end{array} \right] \Bigg\} n$$

$$R_{22} = \left[\begin{array}{c|c} H_1^T H_1 & H_1^T H_1 F_2 + H_1^T H_3 \\ \hline \underbrace{(H_1^T H_1 F_2 + H_1^T H_3)^T}_{m-r} & \underbrace{(H_1 F_2 + H_3)^T (H_1 F_2 + H_3)}_r \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} m-r \\ \} r \end{array} \right.$$

$$H_3 = CA^{-1}BF_3,$$

Le développement de (9) avec ces partitions donne :

$$\begin{aligned} J_e = & \text{Tr} \left\{ R_{11} \tilde{W}_{11} + H_1^T H_1 \tilde{W}_{22,1} + H_3^T H_3 \tilde{W}_{22,3} + (H_1 F_2)^T H_1 F_2 \tilde{W}_{22,3} \right\} \\ & - \text{Tr} \left\{ C^T H_1 \tilde{W}_{12,1} + C^T H_1 F_2 \tilde{W}_{12,2} + C^T H_3 \tilde{W}_{12,2} \right\} \\ & + 2 \text{Tr} \left\{ H_1^T H_1 F_2 \tilde{W}_{22,2} + H_1^T H_3 \tilde{W}_{22,2} + F_2^T H_1^T H_3 \tilde{W}_{22,3} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

avec :

$$\tilde{W}_{12} = \left(\underbrace{\tilde{W}_{12,1}}_{m-r} \quad \underbrace{\tilde{W}_{12,2}}_r \right), \quad \tilde{W}_{22} = \left[\begin{array}{cc} \tilde{W}_{22,1} & \tilde{W}_{22,2} \\ \dots & \dots \\ \underbrace{\tilde{W}_{22,2}^T}_{m-r} & \underbrace{\tilde{W}_{22,3}}_r \end{array} \right] \begin{array}{l} m-r \\ r \end{array}$$

La dérivée partielle / H_1 est donc égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial H_1} = & 2 H_1 (\tilde{W}_{22,1} + F_2 \tilde{W}_{22,2} + \tilde{W}_{22,2} F_2^T + F_2 \tilde{W}_{22,3} F_2^T) \\ & + 2 H_3 (\tilde{W}_{22,2} + \tilde{W}_{22,3} F_2^T) - 2 C (\tilde{W}_{12,1} + \tilde{W}_{12,2} F_2^T) \end{aligned} \quad (11)$$

Il faut préciser que les termes en facteur de H_1 , H_3 et C apparaissent comme partition des produits matriciels $F \tilde{W}_{22} F^T$ et $W_{12} F^T$. Cette remarque permet de diminuer le nombre de manipulations nécessaires au calcul numérique du gradient.

- Gradient / F_1 et F_2 :

De façon analogue nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial F_1} = & (CA^{-1}B)^T \left\{ H_1 (\tilde{W}_{22,2} + F_2 \tilde{W}_{22,3}) + CA^{-1}B F_1 \tilde{W}_{22,3} - C \tilde{W}_{12,2} \right\} \\ & + \pi_{12} + \theta_{12} - (z_0^T P_{12} X_0 + z_0^T P_{22} z_0) F_1^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial F_2} = & H_1^T H_1 (\tilde{W}_{22,2} + F_2 \tilde{W}_{22,3}) + H_1^T H_3 \tilde{W}_{22,3} + \pi_{22} + \theta_{22} \\ & + P_{22,1} F_2 F_1^{-1} F_1^{-T} - P_{22,2} F_1^{-1} F_1^{-T} - P_{12,1} X_0 F_1^{-T} - H_1^T C \tilde{W}_{12,2} \end{aligned} \quad (13)$$

où π et θ notent les produits :

$$\pi = P_{12}^T \tilde{W}_{12}$$

$$\theta = P_{22} \tilde{W}_{22}$$

et les partitions utilisées pour P_{12} d'une part, et P_{22} , π , θ d'autre part, sont analogues respectivement à celles de \tilde{W}_{12} et \tilde{W}_{22} .

*Algorithme de résolution de l'équation de Lyapunov:

description de la méthode :

Soit l'équation matricielle à résoudre :

$$PA + A^T P = -Q \quad (1)$$

où Q : une matrice symétrique ($N \times N$)

A : matrice ($N \times N$)

P : une matrice symétrique ($N \times N$)

Le système (1) est convertit en M ($M = N \cdot \frac{N+1}{2}$) équations algébriques linéaires par la relation :

$$U P v = -R v \quad (2)$$

où $R v$: est un vecteur de dimension M formé des éléments appartenant à la partie triangulaire supérieure de la matrice Q .

$$R v = \{ r_m \} = \{ q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1N}, q_{22}, \dots, q_{2N}, \dots, q_{(N-1)(N-1)}, q_{(N-1)N}, q_{NN} \}$$

$P v$: est un vecteur de dimension M constitué des éléments correspondant à la partie triangulaire supérieure de la matrice inconnue P .

$$P v = \{ p_m \}$$

$U = \{ u_{nm} \}$: est une matrice dépendant de A de dimensions ($M \times M$)

La matrice U est obtenue par l'application d'un algorithme qui se résume dans les trois étapes suivantes :

1^{ère} étape : Construire la matrice symétrique L ($N \times N$) donnée

par :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N \\ 2 & N+1 & N+2 & \dots & 2N-1 \\ \cdot & N+2 & 2N & 2N+1 & \dots & 3N-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & M-2 & M-1 \\ N & 2N-1 & 3N-3 & \dots & M-3 & M \end{bmatrix}$$

Pour le cas $N=3$, L devient :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2^{ème} étape: Construire la matrice $V = \{U_{nm}\}$ de dimensions $(M \times M)$

$$\text{tq } U_{nm} = a_{ji} \quad (3) \quad \text{où } n, m = 1, 2, \dots, M.$$

n et m sont donnés par les éléments de la matrice auxiliaire L :

$$n = L_{ik}, \quad m = L_{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N. \quad (4).$$

3^{ème} étape: La matrice U est obtenue en multipliant par 2

toutes les lignes de la matrice V dont les indices correspondent aux éléments diagonaux de la matrice L .

Ces indices sont: $1, N+1, 2N, 3N-2, \dots, M-2, M$.

Le tableau ci dessous donne les valeurs de $n = n(i, j, k)$ et $m = m(i, j, k)$

pour le cas $N=3$ et $M=6$. Notons que dans ce tableau, les 2 lignes dénotés par $X(i=1, j=1, k=2)$ et $X(i=2, j=2, k=1)$ mènent à la même paire $(n=2, m=2)$

dans ce cas en appliquant la relation (3), l'élément U_{22} devrait être

calculé par: $U_{22} = a_{11} + a_{22}$.

Le même cas s'applique pour y et z .

Cas $N=3$.

i	j	k	n	m	
1	1	1	1	1	
		2	2	2 ← X	
		3	3	3 ← Y	
	2	1	4	1	2
		2	2	2	4
		3	3	3	5
2	1	1	1	3	
		2	2	4	
		3	3	5	
	2	1	2	2 ← X	2
		2	4	4	4 ← Y
		3	5	5	5 ← Z
3	1	1	1	4	
		2	2	5	
		3	3	6	
	2	1	2	2	2
		2	4	4	4
		3	5	5	5
3	1	3	3	3 ← Y	
	2	4	4	4 ← Z	
	3	5	5	5 ← X	

Minimisation d'une fonction sans contraintes par la méthode de Fletcher - Powell.

Il s'agit de rechercher le minimum local d'une fonction $f(x)$ à plusieurs variables ($x \in \mathbb{R}^n$). Le principe de cette méthode est basé sur le développement de Taylor d'ordre 2 avec un choix de la direction de descente optimal donnant une caractéristique de convergence quadratique.

Soient: f : une fonction scalaire à plusieurs variables

$$g: \text{le gradient de } f \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$G: \text{le hessien de } f \quad G(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Le développement de Taylor du second ordre donne:

$$f(x+dx) = f(x) + g(x) dx + \frac{1}{2} dx^T G(x) dx.$$

$$\Rightarrow f(x+dx) - f(x) = g(x) dx + \frac{1}{2} dx^T G(x) dx$$

On veut chercher un dx qui minimise $[f(x+dx) - f(x)]$.

$$\min_{dx} (f(x+dx) - f(x)) = \min_{dx} \left\{ \frac{g(x) dx + \frac{1}{2} dx^T G(x) dx}{h(x)} \right\}$$

$$\text{Le minimum est obtenu pour } \frac{dh(x)}{dx} = 0 \Rightarrow g(x) + G(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow dx = -G(x)^{-1} g(x).$$

Alors la variable x s'incrmente ainsi: $x^{i+1} = x^i + dx^i$.

La méthode de Fletcher - Powell tend à déterminer $G(x)^{-1}$

sans avoir à calculer le hessien et cela en approxinant

l'opérateur H ($H(x) = G^{-1}(x)$) de mieux en mieux à l'aide d'une

suite H^k tq $H^k = H^{k-1} + A^k$; $H^0 = I$

avec:

$$A^k = - \frac{1}{(v^k)^T H^{k-1} v^k} H^{k-1} v^k (H^{k-1} v^k)^T + \frac{1}{(u^k)^T v^k} v^k (u^k)^T.$$

où $\begin{cases} u^k = x^k - x^{k-1} \\ v^k = g^k - g^{k-1} \end{cases}$; Une fois H^k est connu on détermine x^{k+1} (itération suivante), $x^{k+1} = x^k + dx^k$ avec $dx^k = -H^k g^k$

L'arrêt des itérations se fait tq g (à l'itération H^k) = 0 d'où $x^{i+1} = x^i + H^k g^i$

- Démonstration de : $z_0 = K X_0$ (Vecteur conditions initiales).

Calcul de K :

$$\text{soit } J = \int_0^{\infty} e^T e \, dt = \int_0^{\infty} \bar{x}^T R \bar{x} = \bar{x}_0^T P \bar{x}_0 = \text{Tr} (P \bar{x}_0 \cdot \bar{x}_0^T)$$

$$\text{sachant que : } \bar{A}^T P + P \bar{A} + R = 0$$

En développant \bar{x} et \bar{z} en partitions, J devient :

$$J = X_0^T P_{11} X_0 + 2 X_0^T P_{12} z_0 + z_0^T P_{22} z_0$$

Connaissant X_0 , calculons z_0 à l'optimum.

L'optimum s'obtient quand la dérivée de J/z_0 est nulle, c'est

$$2 X_0^T P_{12} + 2 P_{22} z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = -P_{22}^{-1} P_{12}^T X_0.$$

CH.4

- Démonstration de : $\frac{\partial J}{\partial H} = 2(H L_0 W L_0^T - C W L_0^T) \stackrel{?}{=} 0$

En utilisant les règles de dérivation des traces de matrices

nous pouvons écrire à partir de :

$$\begin{aligned} J &= \text{Tr} \left\{ (C - H L_0)^T \cdot (C - H L_0) W \right\} = \text{Tr} \left\{ (C^T - L_0^T H^T) \cdot (C - H L_0) W \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ C^T C W - C^T H L_0 W - L_0^T H^T C W + L_0^T H^T H L_0 W \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ C^T C W \right\} - \text{Tr} \left\{ C^T H L_0 W \right\} - \text{Tr} \left\{ L_0^T H^T C W \right\} + \text{Tr} \left\{ L_0^T H^T H L_0 W \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial H} &= 0 - L_0 W C^T - C W L_0^T + \frac{\partial}{\partial H} \left(\text{Tr} \left\{ H L_0 W L_0^T H^T \right\} \right) \\ &= 0 - L_0 W C^T - C W L_0^T + H (L_0 W L_0^T)^T + H (L_0 W L_0^T) \\ &= -L_0 W C^T - C W L_0^T + H L_0 W L_0^T + H L_0 W L_0^T \\ &= 2 (H L_0 W L_0^T - C W L_0^T). \end{aligned}$$

- Démonstration de : $\frac{\partial J'_0}{\partial H} = 2 (H L_0 \tilde{W} L_0^T - C \tilde{W} L_0^T - P X_0^T L_0^T) \stackrel{?}{=} 0$

$$\text{soit } J'_0 = J_0 + 2 \text{Tr} \left\{ P^T (C - H L_0) X_0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial J'_0}{\partial H} &= \frac{\partial J_0}{\partial H} + \frac{\partial}{\partial H} \left(2 \text{Tr} \left\{ P^T (C - H L_0) X_0 \right\} \right) \\ &= 2 (H L_0 \tilde{W} L_0^T - C \tilde{W} L_0^T) - 2 P X_0^T L_0^T \\ &= 2 (H L_0 \tilde{W} L_0^T - C \tilde{W} L_0^T - P X_0^T L_0^T) \end{aligned}$$

— BIBLIOGRAPHIE —

- [1] Control of large scale dynamic systems by aggregation
(MASANAO AOKI, IEEE, AC 13 N°3, ANNEE 68, p 246-253)
- [2] Representation of linear dynamical systems by aggregated models (J.M. SIRET, G. MICHAÏLESCO, P. BERTRAND, INT. JOURNAL OF CONTROL, VOL 26 N°1, ANNEE, p 121-128).
- [3] Approximation des systèmes complexes par des modèles de dimension réduite (THESE D'ETAT, G.P. MICHAÏLESCO, PARIS-SUD ORSAY N° D'ORDRE 2121, ANNEE 79)
- [4] A method for simplifying linear dynamic systems.
(E.J. DAVISSON, IEEE, TAC, AC 11, ANNEE 66, p 93-101)
- [5] A new method for simplifying large linear dynamic systems.
(E.J. DAVISSON, IEEE, TAC, AC 13, ANNEE 68, p 214-215).
- [6] An alternate approach to expanding $PA + A^T P = -Q$.
(S.P. BINGULAC, IEEE, TAC, AC 15, ANNEE 70, p 135-137).
- [7] Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques
(P. BERNHARD, COLLECTION DUNOD AUTOMATIQUE p 139-149).
- [8] Commande des systèmes multidimensionnelle.
(ANDRE. FOSSARD, DUNOD (Techniques de l'automatisme)).
- [9] Aperçu des méthodes algébriques pour l'étude de la commande des systèmes linéaires (J.M. DION et I.D. LANDAU RAIRO AUTOMATIQUE, VOL 11 N°3, ANNEE 77, p 239-249).
- [10] Optimum solution of model reduction problem.
(D.A. WILSON, proc IEEE, VOL 117 N°6, ANNEE, p 1161-1165).
- [11] Canonical forms for linear multivariable systems.
(DAVID, G. LUENBERGER, IEEE, TAC, AC 12, ANNEE 67, p 290-293).

- [12] Reduced orders models, canonical forms and observers.
(AMI.ARBEL, EDISON TSE, INT JOURNAL OF CONTROL VOL 30 N° 3
ANNEE 79, p 513-531).
- [13] Optimal approximation of high order systems subject
to polynomial inputs (J.M. SIRET, G.P. MICHAILESCO,
P. BERTRAND, INT JOURNAL, VOL 20 N° 1, ANNEE 77, p 963-971).
- [14] Model reduction for multivariable systems.
(D.A. WILSON, INT JOURNAL OF CONTROL VOL 20 N° 1, ANNEE 74, p 57-64).
- [15] On optimal approximation of high order linear systems
by low order models (G. HIRZINGER, G. KREISSELMEIER,
INT JOURNAL OF CONTROL VOL 22 N° 3, ANNEE 75, p 399-408)
- [16] Some canonical forms for linear multivariable systems.
(N.K. SINHA, P. ROSA, INT JOURNAL OF CONTROL VOL 23, ANNEE 76, p 868-883).
- [17] Topics in mathematical systems theory.
(R.E. KALMAN, P.L. FALB, M.A. ARBIB, MC. GRAW HILL. 69)
- [18] On a method of simplifying linear dynamic systems.
(M.R. CHIDAMBARA, IEEE TAC, AC 12 ANNEE 67 p 119-121).
- [19] Two simple techniques for the simplification of dynamic
systems (M.R. CHIDAMBARA, Proc J. Acc UNIVERSITY COLORADO 69
P 669-674)
- [20] Further remarks on simplifying linear dynamic systems.
(M.R. CHIDAMBARA, IEEE TAC, AC 12 ANNEE 67, p 213-214)
- [21] Approximation of linear systems: New approaches
based on singular value decomposition
(M. BETTAYEB, university of southern california)


```

EXTERNAL FCNC
COMMON/ET/A(6,6),B(6),H(1,6)
DIMENSION CK(2),BR(6,1)
DIMENSION AI(6,6),IL2(6),IC2(6),CAR(1,1),FI(8,8),IL3(8)
DIMENSION IC3(8),FIT(8,8),FIR(8,8),FE(8,8),RT22(2,2)
DIMENSION RM(8,8),FT12(2,6),FT22(2,2),FIF(2,6),FIPI(2,6)
DIMENSION FT(8,8),F(8,8),G(8),R(8,8),S(2,8),S1(36),CAI(1,6)
DIMENSION V1(36,36),VF(6),WR1(6),CO(2),CA(2),AR(2,2),PR(2)
DIMENSION L1(8,8),RI2(6,2),P22(2,2),RI22(2,2),IL1(2),IC1(2)
DIMENSION P22(2,2),FI12(2,6),RP(2,2),PF1(2,2),RP2(2,2)
DIMENSION V(1,8),VT(8,1),VMB(8,8),P(8,8),GG(2),P12(6,2)
DIMENSION HH(20),X(2),XPO(2),XC(6),HR(1,2),PRI(1,2),GI(2)
ITMAX=40
KODE=1
N=6
M1=20
M=2
IC=1
MP=M-1
MN=M+N
NN=N+1
MI=M*N*(M+1)/2
EPS=1.E-06
READ(105,414)(XC(I),I=1,N)
414 FORMAT(6F3.1)
READ(105,300)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
300 FORMAT(6F9.4)
READ(105,302)(H(I),I=1,N)
302 FORMAT(6F9.4)
READ(105,303)((H(I,J),J=1,N),I=1,IG)
303 FORMAT(6F3.1)
WRITE(108,305)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
305 FORMAT(4X,'MATRICE A'///,6(2X,F9.4)/)
WRITE(108,306)(B(I),I=1,N)
306 FORMAT(2X,'MATRICE B'///,6(2X,F9.4))
WRITE(108,307)((H(I,J),J=1,N),I=1,IG)
307 FORMAT(2X,'MATRICE C'///,6(2X,F10.6)/)
IF(KODE.EQ.0)GOTO301
GOTO341
301 READ(105,304)(WR(I),I=1,N)
304 FORMAT(6F10.6)
DO1I=1,N
WR1(I)=-WR(I)
1 CONTINUE
KKR=-1
32 KKR=KKR+1
CALLCOEF(M,WR1,CO)
MK=M+1
DO2I=1,M
J=MK-I
CA(I)=CO(J)
2 CONTINUE
GO TO 957
341 READ(105,340)(CA(I),I=1,M)
340 FORMAT(2F8.4)

```



```

C     FORMATION DE AR
957  DO 3 I=1,N
      DO 3 J=1,M
      AR(I,J)=0.
      3  CONTINUE
      DO 4 I=1,M
      J=M+1-I
      AR(I,J)=-CA(I)
      4  CONTINUE
      II=1
      JJ=2
      5  AR(II,JJ)=1.
      II=II+1
      JJ=JJ+1
      IF(JJ.LE.N)GOTO5
C     FORMATION DE BR
      DO 6 I=1,M
      BR(I)=0.
      6  CONTINUE
      BR(M)=1.
C     FORM DE F
      DO 7 I=1,M
      DO 7 J=1,M
      F(I,J)=0.
      7  CONTINUE
      DO 8 I=1,N
      DO 8 J=1,M
      F(I,J)=A(I,J)
      8  CONTINUE
      L=1
      DO 40 I=1,M,I=N
      K=1
      DO 41 J=1,M,I=N
      F(I,J)=AR(L,K)
      K=K+1
      41 CONTINUE
      L=L+1
      40 CONTINUE
C     FORMATION DE G
      DO 11 I=1,N
      G(I)=F(I)
      11 CONTINUE
      L=1
      DO 12 I=1,M,I=N
      G(I)=BR(L)
      L=L+1
      12 CONTINUE
C     FORM DE S
      DO 13 I=1,M
      DO 13 J=1,M
      S(I,J)=G(I)*G(J)
      13 CONTINUE
C     CHARG DE S DANS R
      DO 18 I=1,M
      DO 18 J=1,M
      R(I,J)=S(I,J)
      18 CONTINUE

```

```

C      FORM DE FT
      DO21I=1,M
      DO21J=1,M
      FT(J,I)=F(I,J)
21     CONTINUE
C      FORMATION DE P
      CALL LIAP(FT,F,MN,MI,S1,V1,L1,EPS)
      CALL PRIMV(F,F1,MN,KOD,DET,EPS,IL3,IC3)
      DO 900 I=1,M
      DO 900 J=1,M
      FTI(J,I)=FI(I,J)
900    CONTINUE
      CALL PROD(FI,P,FTP,MN,MN,MN)
      CALL PROD(FIR,FTI,FE,MN,MN,MN)
      DO 901 I=1,MN
      DO 901 J=1,MN
      R(I,J)=FE(I,J)
901    CONTINUE
      L=1
      DO14I=1,M
      K=NI
      DO 47 J=1,M
      R12(I,J)=R(L,K)
      K=K+1
47     CONTINUE
      L=L+1
14     CONTINUE
      L=MN
      DO 15 I=1,M
      K=NI
      DO 56 J=1,M
      R22(I,J)=R(L,K)
      K=K+1
56     CONTINUE
      L=L+1
15     CONTINUE
      CALL MRIMV(R22,PI22,P,KOD,DET,EPS,IL1,IC1)
      DO 902 I=1,M
      DO 902 J=1,M
      RT22(J,I)=PI22(I,J)
902    CONTINUE
      CALL PROD(H,R12,PRI,IQ,N,M)
      CALL PROD(HRI,RT22,HR,IQ,M,M)
C      FORMATION DE V
      DO16J=1,M
      DO16I=1,IQ
      V(I,J)=H(I,J)
16     CONTINUE
      L=1
      DO 17 I=1,IQ
      K=1
      DO 57 J=MN,MN
      V(I,J)=-HR(L,K)
      K=K+1
57     CONTINUE

```



```

L=L+1
17 CONTINUE
DO 85 I=1,IG
DO 85 J=1,M
VT(J,I)=V(I,J)
85 CONTINUE
CALL PROC(VT,V,VME,MN,IG,MN)
C CHARG DE ME DANS P
DO20I=1,M
DO20J=1,M
P(I,J)=VME(I,J)

```

DERICH..

```

20 CONTINUE
C CALCUL DE P
CALL LIAP(F,P,MN,M1,S1,V1,L1,EPS)
C CALCUL DE I=SOM
CALL PROC(P,V1P,RM,MN,MN,MN)
SOMC=0.
DO22I=1,M
SOMC=SOMC+RM(I,I)
22 CONTINUE
WRITE(108,903)SOMC
903 FORMAT(2X,F15.7)
CALL FLPCNE(FCONC,M,M1,CA,SCM,GG,SOMC,EPS,ITMAX,IER,HH,KOVRT)
IF(MODE.NE.0)GOTO30
DO 100 I=1,M
KK=I+1+KKK
WF(I)=-WF(KK)
100 CONTINUE
NF=N-1
IF(KK.LE.NP)GOTO32
30 WRITE(108,70)(CA(I),I=1,M)
70 FORMAT(4X,'LE VECTEUR CA FINALE EST ',2(2X,F15.8))
WRITE(108,90)SCM
90 FORMAT(2X,F15.7)
C FORMATION DE AR
DO 217 I=1,M
DO 217 J=1,M
AR(I,J)=0.
217 CONTINUE
DO 216 I=1,M
J=M+1-I
AR(I,J)=-CA(I)
216 CONTINUE
II=1
JJ=2
218 AR(II,JJ)=1.
II=II+1
JJ=JJ+1
IF(JJ.LE.N)GOTO218
WRITE(108,82)((AR(I,J),J=1,M),I=1,M)
82 FORMAT(10X,'LA MATRICE F FINALE EST '//,2(2X,E14.7))

```

```

C      FORMATION DE BR
      MN=M-1
      DO 89 I=1,MN
      BR(I)=0.
28     CONTINUE
      BR(M)=1.
      WRITE(108,23)(BR(I),I=1,M)
83     FORMAT(10X,'LA MATRICE C FINALE EST '//,2(2X,F15.7))
C      FORM DE F
      DO 200 I=1,MN
      DO 200 J=1,MN
      F(I,J)=0.
200    CONTINUE
      DO 201 I=1,M
      DO 201 J=1,M
      F(I,J)=A(I,J)
201    CONTINUE
      L=1
      DO 202 I=1N,MN
      K=1
      DO 212 J=1N,MN
      F(I,J)=AR(L,K)
      K=K+1
212    CONTINUE
      L=L+1
202    CONTINUE
C      FORMATION DE G
      DO 205 I=1,M
      G(I)=F(I)
205    CONTINUE
      L=1
      DO 206 I=1N,MN
      G(I)=BR(L)
      L=L+1
206    CONTINUE
C      FORMATION DE S
      DO 207 I=1,MN
      DO 207 J=1,MN
      S(I,J)=G(I)*G(J)
207    CONTINUE
C      CHARG DE S DS R
      DO 208 I=1,MN
      DO 208 J=1,MN
      R(I,J)=S(I,J)
208    CONTINUE
C      FORMATION DE R
      CALL LIAP(FT,F,MN,MI,S1,V1,L1,EPS)
C      FORMATION DE HR
      CALL PRINV(G,FI,MN,KOD,DET,EPS,IL3,IC3)
      DO 431 I=1,MN
      DO 431 J=1,MN
      FIT(J,I)=FI(I,J)
431    CONTINUE

```



```

CALL PROC(FI,C,FIR,MI,MN,MO)
CALL PROC(FIR,FIT,FE,MN,MI,MO)
DO 433 I=1,M
DO 433 J=1,M
      F(I,J)=FE(I,J)
433 CONTINUE
L=1
DO 209 I=1,M
K=NI
DO 215 J=1,M
R12(I,J)=F(L,K)
K=K+1
215 CONTINUE
L=L+1
209 CONTINUE
L=NI
DO 210 I=1,M
K=NI
DO 211 J=1,M
R22(I,J)=F(L,K)
K=K+1
211 CONTINUE
L=L+1
210 CONTINUE
CALL MTRINV(R22,RI22,M,KOD,DET,EPS,IL1,IC1)
DO 905 I=1,M
DO 905 J=1,M
RT22(J,I)=RI22(I,J)
905 CONTINUE
CALL PROC(H,R12,HRT,IQ,N,M)
CALL PROC(HRT,RT22,HR,IQ,M,M)
CALL MTRINV(A,AI,N,KOD,DET,EPS,IL2,IC2)
CALL PROC(H,AI,CAI,IQ,N,N)
DO 450 I=1,N
PB(I,1)=B(I)
450 CONTINUE
CALL PROC(CAI,PB,CAB,IQ,N,J)
DO 412 I=1,IQ
HR(I,1)=-CA(N)*CAB(I,1)
412 CONTINUE
WRITE(108,318)((HR(I,J),J=1,M),I=1,IQ)
318 FORMAT(10X,'LA MATRICE H FINALE EST '//,2(1X,E14.7))
C FORM DE V
DO 400 I=1,IQ
DO 400 J=1,N
V(I,J)=H(I,J)
400 CONTINUE
L=1
DO 401 I=1,IQ
K=1
DO 402 J=MN,MN
V(1,J)=-PB(L,K)
K=K+1
402 CONTINUE
L=L+1
401 CONTINUE

```

```

DO 403 I=1,IC
DO 403 J=1,IM
VT(J,I)=V(I,J)
403 CONTINUE
CALL PRGD(VT,V,VMB,MM,IC,MM)
C CHARG DE FB DS P
DO 404 I=1,IM
DO 404 J=1,IM
F(I,J)=VMB(I,J)
404 CONTINUE
C CALCUL DE F
CALL LIAP(F,P,MM,MI,S1,V1,L1,EPS)
L=1
DO 405 I=1,N
K=NI
DO 406 J=1,P
P12(I,J)=F(L,K)
K=K+1
406 CONTINUE
L=L+1
405 CONTINUE
L=NI
DO 407 I=1,P
K=NI
DO 408 J=1,I
P22(I,J)=F(L,K)
K=K+1
408 CONTINUE
L=L+1
407 CONTINUE
DO 409 I=1,N
DO 409 J=1,P
PT12(J,I)=P12(I,J)
409 CONTINUE
CALL MRINV(P22,PI22,M,KOF,DET,EPS,IL1,IC1)
CALL PRGD(PI22,PT12,PIP,M,M,N)
DO 410 I=1,I
DO 410 J=1,I
PIPI(I,J)=-PIPI(I,J)
410 CONTINUE
CALL PRGD(PIPI,XO,XRO,M,N,1)
WRITE(108,416)(XRO(I),I=1,M)
416 FORMAT(2X,'LE VECT INITIAL REDUIT XRC'//,2E14.7)
STOP
END

```



```

SUBROUTINE FONC(M,CA,SOM,GG)
COMMON/ET/A(6,6),B(6),H(1,6)
DIMENSION HRT(2,1),H1(6,1),R2H(2,1),R1H(2,1),RH(2,1)
DIMENSION FT(8,8),F(8,8),G(8),R(8,8),S(2,8),S1(36)
DIMENSION V(1,8),VT(8,1),VMB(8,8),P(8,8),GG(2),P12(6,2)
DIMENSION V1(36,36),CA(2),AR(2,2),BR(2),FR(1,2),FRI(1,2)
DIMENSION IL3(8),IC3(8),FIT(8,8),FIR(8,8),FF(8,8),RT22(2)
DIMENSION U1(6,2),L2(2,2),RU(2,2),UP(6,6),LP2(2,2),F1(8,
DIMENSION RHF(2,6),A1(6,6),IL2(6),IC2(6),RB(6,1),AIB(6,1)
DIMENSION L1(8,8),R12(6,2),R22(2,2),R122(2,2),IL1(2),IC1
DIMENSION P22(2,2),R112(2,6),RF(2,2),RF1(2,2),RF2(2,2)
DIMENSION NM(8,8),PT12(2,6),PI22(2,2)
IG=1
M=2
N=6
MM=M-1
NN=M+1
EPS=1.E-06
MN=M+N
MI=MN*(MN+1)/2
C FORMATION DE AR
DO3I=1,M
DO3J=1,M
AR(I,J)=0.
3 CONTINUE
DO 4 I=1,M
J=M+1-I
AR(M,J)=-CA(I)
4 CONTINUE
II=1
JJ=2
5 AR(II,JJ)=1.
II=II+1
JJ=JJ+1
IF(JJ.LE.M)GOTO5
C FORMATION DE BR
DO6I=1,MM
BR(I)=0.
6 CONTINUE
BR(M)=1.
C FORM DE F
DO 7 I=1,MM
DO7J=1,MN
F(1,J)=0.
7 CONTINUE
DO8I=1,N
DO8J=1,M
F(I,J)=A(I,J)
8 CONTINUE
L=1
DO 40 I=MM,MN
K=1
DO 41 J=MM,MN
F(I,J)=AR(L,K)
K=K+1
41 CONTINUE
L=L+1
40 CONTINUE
C FORMATION DE G

```

```

DO11I=1,N
G(I)=B(I)
11 CONTINUE
L=L+1
DO12I=NN,MN
G(I)=BR(L)
L=L+1
12 CONTINUE
C FORM DE S
DO13I=1,MN
DO13J=1,MN
S(I,J)=G(I)*G(J)
13 CONTINUE
C CHARG DE S DANS R
DO18I=1,MN
DO 18 J=1,MN
R(I,J)=S(I,J)
18 CONTINUE
C FORM DE FT
DO21I=1,MN
DO21J=1,MN
FT(J,I)=F(I,J)
21 CONTINUE
C FORMATION DE R
CALL LIAP(FT,R,MN,MI,S1,V1,L1,EPS)
CALL MRINV(F,FI,MN,KOD,DET,EPS,IL3,IC3)
DO 950 I=1,MN
DO 950 J=1,MN
FIT(J,I)=FI(I,J)
950 CONTINUE
CALL PROD(FI,R,FIR,MN,MN,MN)
CALL PROD(FIR,FIT,FE,MN,MN,MN)
DO 951 I=1,MN
DO 951 J=1,MN
R(I,J)=FE(I,J)
951 CONTINUE
C FORMATION DE HR
L=L+1
DO14I=1,M
K=NN
DO 47 J=1,M
R12(I,J)=F(I,K)
K=K+1
47 CONTINUE
L=L+1
14 CONTINUE
L=NN
DO 56 I=1,M
K=NN
DO 56 J=1,M
R22(I,J)=F(L,K)
K=K+1
56 CONTINUE
L=L+1
15 CONTINUE
CALL MRINV(R22,RI22,M,KOD,DET,EPS,IL1,IC1)
DO 952 I=1,M
DO 952 J=1,M
RT22(I,J)=RI22(2,2)
952 CONTINUE
CALL PROD(F,R12,HRI,IQ,N,M)
CALL PROD(HRI,RT22,HR,IQ,M,M)

```



```

C      FORMATION DE V
      DO 16 J=1, N
      DO 16 I=1, IC
      V(I, J)=U(I, J)
16     CONTINUE
      L=1
      DO 17 I=1, IC
      K=1
      DO 17 J=MN, MN
      V(I, J)=-FF(L, K)
      K=K+1
57     CONTINUE
      L=L+1
      17 CONTINUE
      DO 30 I=1, IC
      DO 30 J=1, M
      VT(J, I)=V(I, J)
30     CONTINUE
      CALL PROD(VT, V, VMB, MN, IC, MN)
C      CHARG DE MP DANS P
      DO 20 I=1, MN
      DO 20 J=1, M
      P(I, J)=VMB(I, J)
20     CONTINUE
C      CALCUL DE P
      CALL LIAP(F, P, MN, MI, S1, V1, L1, EPS)
C      CALCUL DE J=SOM
      CALL PROD(R, VMB, RM, MN, MN, MN)
      SOM=0.
      DO 22 I=1, M
      SOM=SOM+RP(I, I)
22     CONTINUE
      DO 23 I=1, M
      DO 23 J=1, M
      RT12(J, I)=R12(I, J)
23     CONTINUE
      L=1
      DO 24 I=1, N
      K=MN
      DO 24 J=1, M
      P12(I, J)=F(L, K)
      K=K+1
58     CONTINUE
      L=L+1
24     CONTINUE
      L=MN
      DO 25 I=1, M
      K=MN
      DO 25 J=1, M
      P22(I, J)=F(L, K)
      K=K+1
59     CONTINUE
      L=L+1
25     CONTINUE
      CALL PROD(RT12, P12, RP1, M, M, M)
      CALL PROD(R22, P22, RP2, M, M, M)
      DO 26 I=1, M
      DO 26 J=1, M
      RP(I, J)=RP1(I, J)+RP2(I, J)
26     CONTINUE
C      FORMATION DU GRADIENT DJ/DAI
      BK1=-2.*FF(1, M)

```

```

DO 27 I=2,M
GG(I)=-2.*RF(I,M)
27 CONTINUE
DO 700 I=1,IG
DO 700 J=1,M
FR1(J,I)=FR(I,J)
700 CONTINUE
DO 701 I=1,IG
DO 701 J=1,I
HT(J,I)=F(I,J)
701 CONTINUE
CALL PROC(P22,FR1,R2H,M,N,IG)
CALL PROC(RT12,HT,R1H,M,N,IG)
DO 702 I=1,I
DO 702 J=1,IG
RR(I,J)=R2H(I,J)-R1H(I,J)
702 CONTINUE
CALL PROC(RR,R,RRH,M,IG,N)
CALL MRINV(A,AI,N,KOD,DET,EPS,IL2,IC2)
DO 953 I=1,I
RR(I,1)=R(I)
953 CONTINUE
CALL PROC(AI,RR,AIB,N,N,1)
DO 703 I=1,M
DO 703 J=1,M
L1(I,J)=0.
703 CONTINUE
DO 704 I=1,M
U1(I,1)=AIB(I,1)
704 CONTINUE
CALL PROC(RRH,U1,RL,M,N,M)
BK2=0.
DO 705 I=1,M
DO 705 J=1,M
BK2=BK2+RL(I,I)
705 CONTINUE
DO 709 I=1,M
DO 709 J=1,M
U2(I,J)=0.
709 CONTINUE
U2(1,1)=1.
DO 706 I=1,I
DO 706 J=1,I
PT12(J,I)=P12(I,J)
706 CONTINUE
CALL PROC(U1,PT12,UP,N,M,I)
BK3=0.
DO 707 I=1,I
DO 707 J=1,I
BK3=BK3+UP(I,I)
707 CONTINUE
CALL PROC(U2,P22,UF2,M,M,M)
BK4=0.
DO 708 I=1,I
DO 708 J=1,I
BK4=BK4+UF2(I,I)
708 CONTINUE
GG(M)=BK1-2.*BK2+2.*BK3/(CA(M)**2)-2.*BK4/(CA(M)**3)
RETURN
END

```



```

C   AGREGATION OPTIMALE
    DIMENSION A(6,6),Z1(6,6),BG(6,6),L(6,6),ZI(6,6),ZT(6,6)
    DIMENSION TI(6,6),ZQ(6,6),GZ(6,6),G(6,6),ZA(6,6),A7(6,6),H4(6,6)
    DIMENSION TPJ(6,6),A1(6,6),AT(6,6),AP(6,6),S(21),V(21,21)
    DIMENSION ZF(6,6),B(6,1),D(1,1),BT(1,6),ZB(6,1),B1(6,1),X0(6,1)
    DIMENSION HX(1,1),FO(1,1),C(1,6),OM(1,6),OT(6,1),F(1,2),W1(1,6)
    DIMENSION W2(1,2),F1(1,6),F2(1,6),F3(6,1)
    DIMENSION PZ(2,6),PT(6,2),W3(2,6)
    DIMENSION W4(2,2),WR(6),WI(6),TL(6),TC(6),WA(6),WB(6),VPR(6)
    DIMENSION VFI(6),VR(6),VT(6),VR1(6),VI1(6)
    DIMENSION X0(6,1),ZC(2,1)
    READ(105,111)((A(I,J),J=1,6),I=1,6)
    READ(105,112)((B(I,J),J=1,1),I=1,6)
    READ(105,113)((C(I,J),J=1,6),I=1,1),((D(I,J),J=1,1),I=1,1)
    READ(105,114)((Z1(I,J),J=1,6),I=1,6)
    READ(105,115)(WP(I),I=1,6)
    READ(105,116)(WI(I),I=1,6)
    READ(105,117)((X0(I,J),J=1,1),I=1,6)
111  FORMAT(6F9.4)
112  FORMAT(6F9.4)
113  FORMAT(7F3.1)
114  FORMAT(6F7.4)
115  FORMAT(6F8.4)
116  FORMAT(6F8.4)
117  FORMAT(6F3.1)
    N=6
    M=21
    LP=1
    LR=1
    MR=2
    EPS=1.E-06
C   MATRICES A,B,C,D, DU SYSTEME REEL:
    WRITE(108,153)
153  FORMAT(5X,'MATRICES A,B,C,D, DU SYSTEME REEL :')
    WRITE(108,120)((A(I,J),J=1,6),I=1,6)
120  FORMAT(5X,'MATRICE A'///,6(5X,F9.4)/)
    WRITE(108,151)
151  FORMAT(5X,'MATRICE B')
    WRITE(108,121)((B(I,J),J=1,1),I=1,6)
121  FORMAT((5X,F9.4)/)
    WRITE(108,122)((C(I,J),J=1,6),I=1,1)
122  FORMAT(5X,'MATRICE C'///,6(5X,F3.1))
    WRITE(108,152)((D(I,J),J=1,1),I=1,1)
152  FORMAT(5X,'MATRICE D'///,5X,F3.1)
C   CALCUL DES VALEURS PROPRES ET DE LA MATRICE MODALE T:
    WRITE(108,30)(WP(I),I=1,N),(WI(I),I=1,N)
30   FORMAT(5X,'VALEURS PROPRES'///,6(5X,F8.4)/)
    WRITE(108,150)((Z1(I,J),J=1,6),I=1,6)
150  FORMAT(5X,'MATRICE MODALE T'///,6(5X,F7.4)/)
C   CALCUL DE W
    DO2I=1,N
    DO2J=1,LR
    BT(J,I)=B(I,J)
2    CONTINUE
    DO 60 I=1,N
    DO 60 J=1,N
60   AT(J,I)=A(I,J)
    CALL PROD(B,BT,BQ,N,LR,N)

```



```

CALL LIAP(AT,PG,N,M,S,V,L,EPS)
WRITE(108,32)((PG(I,J),J=1,N),I=1,N)
32 FORMAT(5X,'MATRICE W'///,6(5X,F16.4)/)
C
CALCUL DE G
CALL MATG(C,Z1,RQ,G,CM,OT,4I,ZT,TR,ZR,RZ,IL,JC,N,IP)
WRITE(108,33)((G(I,J),J=1,N),I=1,N)
33 FORMAT(5X,'MATRICE G'///,6(5X,F16.4)/)
I=1
K=1
5
IF(WI(I).EQ.0.0) GOTO3
LL=I+1
WA(I)=G(I,I)+C(I,LL)+G(LL,I)+C(LL,LL)
WB(K)=WA(I)
VPR(K)=WR(I)
VPI(K)=WJ(I)
I=I+2
GOTO4
3
WA(I)=G(I,I)
WB(K)=WA(I)
VPR(K)=WR(I)
VPI(K)=WJ(I)
I=I+1
4
L2=K
K=K+1
IF(I.LE.N) GOTO5
CALL TRI(WB,VPR,VPI,L2)
WRITE(108,62)
62 FORMAT(5X,'ENERGIES CLASSEES PAR ORDRE DECROISSANT')
WRITE(108,34)(WB(K),K=1,L2)
34 FORMAT(5X,F16.4/)
WRITE(108,63)
63 FORMAT(5X,'PARTIES REELLES DES MODES CORRESPONDANT AUX ENERGIES')
WRITE(108,53)(VPR(K),K=1,L2)
53 FORMAT(5X,F16.4/)
WRITE(108,64)
64 FORMAT(5X,'PARTIES IMAGIN DES MODES CORRESPONDANT AUX ENERGIES')
WRITE(108,52)(VPI(K),K=1,L2)
52 FORMAT(5X,F16.4/)
K=1
JR=1
JK=1
15
J=K+1
X=(WB(K)-WB(J))/WB(K)
IF(X.GT.0.1) GOTO6
Y=ABS((VPR(K)-VPR(J))/VPR(K))
IF(Y.GT.0.1) GOTO6
IF(VPI(K).NE.0.0) GOTO7
IF(VPI(J).NE.0.0) GOTO8
MM=1
GOTO10
8
MM=2
GOTO10
7
IF(VPI(J).EQ.0.0) GOTO9
MM=3
GOTO10
9
MM=4
10
LI=K
II=1
68
I=1
IF(VPI(LI).EQ.0.) GOTO46

```

```

61 IF(VI(I).EQ.0.) GOTO96
   IF(VPR(LI).NE.WP(I)) GOTO96
   IF(VPI(LI).NE.WI(I)) GOTO96
   GOTO 95
96 I=I+1
   GOTO 61
46 IF(VI(I).NE.0.) GOTO 66
   IF(VPR(LI).NE.WP(I)) GOTO 66
95 IF(II.NE.1) GOTO 67
   KK=I
   II=II+1
   LI=J
   GOTO 68
66 I=I+1
   GOTO 46
67 JJ=I
   GOTO(72,73,74,75),MM
72 WG=G(KK,JJ)
   GOTO 76
73 KJ=JJ+1
   WG=G(KK,JJ)+G(KK,KJ)
   GOTO 76
74 KL=KK+1
   KJ=JJ+1
   WG=G(KK,JJ)+G(KL,KL)+G(KK,KJ)+G(KL,JJ)
   GOTO 76
75 KL=KK+1
   WG=G(KK,JJ)+G(KL,JJ)
76 IF(WG.LT.0.) GOTO 11
6 VR(JK)=VPR(K)
  VI(JK)=VPI(K)
  IF(VI(JK).EQ.0.0) GOTO12
  JR=JR+2
  GOTO13
12 JF=JR+1.
13 L1=JK
   K=K+1
   JK=JK+1
   GOTO14
11 K=K+2
14 LZ=L2-1
   IF(K.EQ.L3) GOTO47
   IF(JR.LE.NR) GOTO15
47 IF(NR.EQ.L1) GOTO16
   JK=1
   K=1
18 VR1(K)=VR(JK)
   VI1(K)=VI(JK)
   IF(VI(JK).EQ.0.0) GOTO17
   IF(K.EQ.NR) GOTO 77
   K=K+1
   VI1(K)=-VI(JK)
   VR1(K)=VR(JK)
17 K1=K
   JK=JK+1
   K=K+1
   IF(JK.LE.L1) GOTO18
   WRITE(108,35)(VR1(K),K=1,K1),(VI1(K),K=1,K1)
35 FORMAT(5X,'VALEURS PROPRES RETENUES'///,2(5X,F8.4)/)
   GOTO19
16 DO 20 JK=1,L1
   VR1(JK)=VR(JK)
   VI1(JK)=VI(JK)
20 CONTINUE
   IF(VI1(L1).NE.0.) GOTO 77
   K1=L1
   WRITE(108,36)(VR1(K),K=1,K1),(VI1(K),K=1,K1)
36 FORMAT(5X,'VALEURS PROPRES RETENUES'///,2(5X,F8.4)/)
19 CALL RANGE(Z1,ZE,NR,WI,VR1,VI1,N,K1)
   CALL PRINT(ZE,ZI,N,KOD,DET,FPS,IL,IC)

```



```

CALL PROC(ZI,A,ZA,N,N,N)
CALL PROC(ZA,ZE,AZ,N,N,N)
WRITE(108,37)((AZ(I,J),J=1,MR),I=1,MR)
37  FORMAT(5X,'TAU1'///,2(5X,F16.4)/)
CALL PROC(ZI,P,ZB,N,N,LR)
WRITE(108,65)
65  FORMAT(5X,'GAMMA 1')
WRITE(108,38)((ZB(I,J),J=1,LP),I=1,MR)
38  FORMAT(5X,F16.4/)
WRITE(108,39)((ZI(I,J),J=1,N),I=1,MR)
39  FORMAT(5X,'MATRICE LC'///,6(5X,F16.4)/)
DO24 I=1,MR
DO24 J=1,L
PZ(I,J)=ZI(I,J)
24  CONTINUE
CALL PROC(PZ,X0,Z0,MR,N,1)
WRITE(108,78)
78  FORMAT(5X,'CONDITIONS INITIALES DU MODELE REDUIT')
WRITE(108,79)((Z0(I,J),J=1,1),I=1,MR)
79  FORMAT(5X,F10.4/)
DO25 I=1,MR
DO25 J=1,L
PT(J,I)=PZ(I,J)
25  CONTINUE
C  ENTREE IMPULSION
WRITE(108,70)
70  FORMAT(5X,'ENTREE IMPULSION')
WRITE(108,40)((D(I,J),J=1,LP),I=1,LP)
40  FORMAT(5X,'MATRICE K'///,5X,F16.4/)
CALL HODT(C,BQ,PZ,PT,H,W1,W2,W3,W4,LP,N,MR)
WRITE(108,41)((H(I,J),J=1,MR),I=1,LP)
41  FORMAT(5X,'MATRICE H'///,2(5X,F16.4))
CALL TRACE(C,H,PZ,BQ,TR,F1,H2,H3,H4,TRJ,LP,MR,N)
WRITE(108,42) TR
42  FORMAT(5X,'CRITERE DE REDUCTION:',1X,E12.4)
C  ENTREE ECHELON
WRITE(108,71)
71  FORMAT(5X,'ENTREE ECHELON')
CALL PRINV(A,A,N,KCD,DET,EFS,IL,IC)
DO21 I=1,N
DO21 J=1,L
A1(J,I)=A(I,J)
21  CONTINUE
CALL PROC(A,BQ,AB,N,N,N)
CALL PROC(AB,A1,BQ,N,N,N)
CALL PROC(A,B,B1,N,N,LR)
DO 22 I=1,N
DO 22 J=1,LP
X0(I,J)=-B1(I,J)
22  CONTINUE
CALL HOPT(C,BQ,PZ,PT,H,W1,W2,W3,W4,LP,N,MR)
WRITE(108,43)((H(I,J),J=1,MR),I=1,LP)
43  FORMAT(5X,'MATRICE H'///,2(5X,F16.4))
CALL PROC(H,PZ,H1,LP,MR,N)
CALL SCUM(C,H1,H2,LP,N)
CALL PROC(H2,X0,HX,LP,N,LR)
DO 23 I=1,LP
DO 23 J=1,LP
H0(I,J)=HX(I,J)+D(I,J)
23  CONTINUE
WRITE(108,44)((H0(I,J),J=1,LP),I=1,LP)
44  FORMAT(5X,'MATRICE K'///,5X,F16.4/)
CALL TRACE(C,H,PZ,BQ,TR,F1,H2,H3,H4,TRJ,LP,MR,N)
WRITE(108,45) TR
45  FORMAT(5X,'CRITERE DE REDUCTION:',1X,E12.4)
GOTO 81
77  WRITE(108,80)
80  FORMAT(5X,'AUGMENTER LA DIMENSION DU MODELE REDUIT DE 1')
81  STOP

```

**SOUS-PROGRAMMES
UTILISES**

1. subroutine PROD (A, B, C, M, N, L)

Ce programme fait le produit de 2 matrices $A(M \times N) \times B(N \times L)$, le résultat est stocké en $C(M \times L)$.

2. subroutine PRODI (AA, BB, CC, M, N)

Ce programme exécute le produit direct de 2 matrices $AA(M \times N) \otimes BB(N, M)$, le résultat est stocké en $CC(M, N)$.

3. subroutine SOUM (AA, BB, CC, N, M)

Ce programme fait la soustraction de 2 matrices $AA(N \times M) - BB(N \times M)$, le résultat est stocké en $CC(N \times M)$.

4. subroutine TRI (VA, VB, VC, N)

Ce programme fait le triage par ordre décroissant de trois vecteurs VA, VB et VC de dimensions N.

Ex: $(VA(1) \gg VA(2) \gg \dots \gg VA(N))$.

5. subroutine FLPOWE (FONC, LD, M1, FVEC, COUT, GRDVEC, COUTO, EPS, ITER, IER, H, KOUNT)

Ce programme calcule le minimum local d'une fonction à plusieurs variables.

LD : nombre de variables.

$$M1 = \frac{LD(LD+7)}{2}$$

FVEC : vecteur des variables de dimension LD.

COUT : fonction scalaire à minimiser.

GRDVEC : vecteur de dimension LD représentant le gradient de COUT / vecteur FVEC.

COUTO : valeur initiale de la fonction cout (à donner par l'utilisateur).

EPS : précision à partir de laquelle, le gradient est considéré comme nul.

ITER : nombre d'itérations maximal que peut exécuter l'algorithme (à donner par l'utilisateur)
le minimum peut ou pas être obtenu pour un nombre d'itérations choisi.

Notons que ce programme fait appel à un autre prog FONC (LD, FVEC, COUT, GRDVEC) calculant la valeur de la fonction COUT et le gradient de cette fonction.

6. subroutine TRACE (PP, H, PR, PQ, TR, H1, H2, H3, H4, TRJ, LP, M, N)

Ce programme calcule le critère de réduction J donné par :

$$J = \text{trace} \{ (C - H L_0)^T (C - H L_0) W \}$$

le résultat est stocké dans TR.

7. subroutine MATG (PP, ZZ, PQ, G, OM, OT, ZI, ZT, TM, ZQ, QZ, IL, IC, N, LP)

Ce programme exécute le calcul de la matrice \bar{G}

des énergies donnée par :

$$\bar{G} = (CT)^T (CT) \otimes (T^{-1} W T^{-T})$$

le résultat obtenu du prog est stocké dans G

8. subroutine COEF (N, L, B)

$$\text{soit } (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_1$$

Ce prog sert à fournir à partir des λ_i contenues dans le tableau L, les coeff du polynôme caract contenus dans le tableau B.

9. subroutine HOPT (PP, PQ, PR, RP, H, W1, W2, W3, W4, LP, N, M)

Ce programme fait le calcul de la matrice de sortie H du modèle réduit qui est donnée par :

$$H = CWL_0^T (L_0 W L_0^T)^{-1}$$

le résultat obtenu est stocké dans H .

10. subroutine RANGE (Z, ZE, WRR, WII, VRR, VII, N, K1) .

Ce programme sert au réarrangement des colonnes de la matrice modale T selon l'ordre dans lequel sont retenues les valeurs propres du modèle réduit .

Z: contient la matrice modale T,

ZE: " " " T réarrangée,

WRR: Tableau contenant les parties réelles des val. prop du syst initial,

WII: " " " imag " " "

VRR: " " " réelles " " réduit

VII: " " " imag " " "

N : dimension du système réel (initial) .

K1 : " " " réduit.

11. subroutine LIAP (A, Q, N, M, S, V, L, EPS)

Ce programme exécute la résolution de l'équation de Lyapunov: $WA + A^T W + Q = 0$.

A: tableau de dim (N x N) contenant la matrice A

Q: " " " " " Q au départ,

à la fin du prog il est occupé par la solution de l'équation W.

S: vecteur de dimension M ($M = \frac{N(N+1)}{2}$)

V: tableau de dim (M x M)

EPS: Précision de calcul (EPS = 1.E-06)

Ce programme fait appel à un sous-prog de la bibliothèque de l'ordinateur 'MITRA 125' dit: RESOL.

- Sous-prog de la bibliothèque -
de l'ordinateur 'MITRA 125'

12. subroutine RESOL (V, S, M, KOD, EPS)

Ce prog sert à la résolution du système: $VX = S$

S: vecteur de dimension M

V: tableau de dimension (MxM)

EPS: Précision du calcul (Ex: EPS = 1.E-06)

KOD: 0 solution normale

KOD: 1 solution singulière

13. subroutine MRINV (A, B, N, KOD, DET, EPS, IL, IC)

Ce prog calcule l'inverse d'une matrice A, le résultat est stocké dans B.

A: tableau de dim (NxN)

B: " " " contenant (A⁻¹).

N: ordre de la matrice A.

IL, IC: tableaux monodimensionnés de dim N.

DET: contient le déterminant de A.

KOD = 1 solution singulière

KOD = 0 solution normale.


```

SUBROUTINE FANCE(Z,ZE,WRR,WII,VRR,VII,N,K1)
DIMENSION Z(N,N),WRR(N),WII(N),VRR(N),VII(N),ZE(N,N)
K=1
14 I=1
   J=1
   IF(VII(K).EQ.0.) GOTO1
2   IF(WII(I).EQ.0.) GOTO3
   IF(VRR(K).NE.WRR(I)) GOTO3
   IF(VII(K).NE.WII(I)) GOTO3
5   IF(Z(J,I).NE.0.) GOTO4
   J=J+1
   IF(J.LE.N) GOTO5
3   I=I+1
   IF(I.GT.N) GOTO6
   J=1
   GOTO2
4   J=1
7   ZE(J,K)=Z(J,I)
   J=J+1
   IF(J.LE.N) GOTO7
   J=1
8   Z(J,I)=0.
   J=J+1
   IF(J.LE.N) GOTO8
   GOTO6
1   IF(WII(I).NE.0.) GOTO9
   IF(VRR(K).NE.WRR(I)) GOTO9
11  IF(Z(J,I).NE.0.) GOTO10
   J=J+1
   IF(J.LE.N) GOTO11
9   I=I+1
   IF(I.GT.N) GOTO6
   J=1
   GOTO 1
10  J=1
12  ZE(J,K)=Z(J,I)
   J=J+1
   IF(J.LE.N) GOTO12
   J=1
13  Z(J,I)=0.
   J=J+1
   IF(J.LE.N) GOTO13
6   K=K+1
   IF(K.LE.K1) GOTO14
   I=1
   K2=K1+1
16  J=1
20  IF(Z(J,I).EQ.0.)GOTO 17
   J=1
18  ZE(J,K2)=Z(J,I)
   J=J+1
   IF(J.LE.N)GOTO 18
   K2=K2+1
   GOTO 19
17  J=J+1
   IF(J.LE.N)GOTO20
19  I=I+1
   IF(I.LE.N)GOTO 16
   RETURN
   END

```

```

SUBROUTINE PRODI(AA,BB,CC,M,N)
DIMENSION AA(M,N),BB(N,M),CC(M,N)
DO10 I=1,M
DO10 J=1,N
CC(I,J)=AA(I,J)*BB(J,I)
10  CONTINUE
   RETURN
   END

```

```

SUBROUTINE LIAP(A,Q,N,M,S,V,L,EPS)
DIMENSION A(N,N),Q(N,N),S(M),V(M,M),L(N,N)
K=0
DO1I=1,N
DO1J=1,I
IF(J.LT.I)GOTO1
K=K+1
S(K)=-Q(I,J)
1 CONTINUE
K=1
DO2I=1,N
DO2J=1,I
IF(J.LT.I)GOTO2
L(I,I)=K
L(J,I)=K
K=K+1
2 CONTINUE
DO3I=1,M
DO3J=1,M
3 V(I,J)=0.
DO4I=1,N
DO4J=1,N
DO4K=1,K
I1=L(I,K)
I2=L(J,K)
4 V(I1,I2)=A(J,I)+V(I1,I2)
DO5I=1,I
I3=L(I,I)
DO5J=1,M
5 V(I3,J)=2.*V(I3,J)
CALL RESOL(V,S,M,KOD,EPS)
K=0
DO7I=1,N
DO7J=1,K
IF(J.LT.I)GOTO7
K=K+1
Q(I,J)=S(K)
Q(J,I)=S(K)
7 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FOPT(PP,PG,PR,RP,H,W1,W2,W3,W4,LP,N,M)
DIMENSION PP(LP,N),PG(N,N),PR(M,N),RP(N,M),W1(LP,N)
DIMENSION W2(LP,M),W3(M,N),W4(M,M),H(LP,M)
DIMENSION IL(2),IC(2)
EPS=1.E-06
CALL PROD(PP,PG,W1,LP,N,N)
CALL PROD(W1,RP,W2,LP,N,M)
CALL PROD(PR,PG,W3,M,N,N)
CALL PROD(W3,RP,W4,M,N,M)
CALL MRINV(W4,W4,M,KOD,DET,EPS,IL,IC)
CALL PROD(W2,W4,H,LP,M,M)
RETURN
END

```



```

SUBROUTINE TRI(VA,VB,VC,N)
DIMENSION VA(N),VB(N),VC(N)
NN=N-1
DO20 K=1,NN
  JJ=N-K
  DO10 IL=1,JJ
  IF(VA(IL).GE.VA(IL+1)) GOTO 10
  TA=VA(IL)
  VA(IL)=VA(IL+1)
  VA(IL+1)=TA
  TE=VB(IL)
  VB(IL)=VB(IL+1)
  VB(IL+1)=TE
  TI=VC(IL)
  VC(IL)=VC(IL+1)
  VC(IL+1)=TI
10 CONTINUE
20 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE TRACE(PF,H,PR,PG,TR,H1,H2,H3,H4,TRJ,LP,M,N)
DIMENSION PF(LP,N),H(LP,N),PR(M,N),PG(N,N),H1(LP,N)
DIMENSION H2(LP,N),H3(N,LP),H4(N,N),TRJ(N,N)
CALL PRGD(H,PR,H1,LP,M,N)
CALL SCUM(PF,H1,H2,LP,N)
DO1 I=1,LP
  DO1 J=1,N
  H3(J,I)=H2(I,J)
1 CONTINUE
CALL PRGD(H3,H2,H4,N,LP,N)
CALL PROD(H4,PG,TRJ,N,N,N)
TR=0
DO2 I=1,N
  TR=TR+TRJ(I,I)
2 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SCUM(AA,BB,CC,N,M)
  DIMENSION AA(N,M),BB(N,M),CC(N,M)
  DO10 I=1,N
  DO10 J=1,M
  CC(I,J)=AA(I,J)-BB(I,J)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MATG(PF,ZZ,PG,G,CM,OT,ZI,ZT,TM,ZQ,GZ,IL,IC,N,LP)
DIMENSION PF(LP,N),ZZ(N,N),PG(N,N),G(N,N),CM(LP,N),OT(N,LP)
DIMENSION ZI(N,N),ZT(N,N),TM(N,N),ZQ(N,N),GZ(N,N),IL(N),IC(N)
EPS=1.E-06
CALL PROD(PF,ZZ,OM,LP,N,N)
DO3 I=1,LP
  DO3 J=1,N
  OT(J,I)=CM(I,J)
3 CONTINUE
CALL MRINV(ZZ,ZI,N,KOD,DET,EPS,IL,IC)
DO4 I=1,N
  DO4 J=1,N
  ZT(J,I)=ZI(I,J)
4 CONTINUE
CALL PROD(OT,CM,TM,N,LP,N)
CALL PROD(ZI,PG,ZQ,N,N,N)
CALL PROD(ZQ,ZT,GZ,N,N,N)
CALL PRODI(TM,GZ,G,N,N)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FLPCWE (FONC,LD,N1,FVEC,COLT,GRDVEC,COUTC,EPS,
1 IITD,IFF,F,KOUNT)
DIMENSION F(1),FVEC(LD),GRDVEC(LD)
CALL FONC(LD,FVEC,COLT,GRDVEC)
IER=0
KOUNT=0
N2=LD+LD
N3=N2+LD
N31=N3+1
1 K=N31
DO 4 J=1,LD
F(K)=1.
NJ=LD-J
IF (NJ)5,5,2
2 DO 3 L=1,NJ
KL=K+L
3 F(KL)=0.
4 K=KL+1
5 KOUNT=KOUNT+1
CLDF=COUT
DO 9 J=1,LD
K=LD+J
F(K)=GRDVEC(J)
K=K+LD
F(K)=FVEC(J)
K=J+N3
TO=0.
DO 8 L=1,LD
TO=TC-GRDVEC(L)*F(K)
IF (L-J)6,7,7
6 K=K+LD-L
GOTO8
7 K=K+1
8 CONTINUE
9 H(J)=TO
DY=0.
HARM=0.
GNRM=0.
DO 10 J=1,LD
HARM=HARM+ABS(F(J))
GNRM=GNRM+ABS(GRDVEC(J))
10 DY=DY+F(J)*GRDVEC(J)
IF (DY)11,51,51
11 IF (HARM/GNRM-EPS)51,51,12
12 FY=COUT
ALFA=2.*(COUTC-COUT)/DY
AMBDA=1.
IF (ALFA)15,15,13
13 IF (ALFA-AMBDA)14,15,15
14 AMBDA=ALFA
15 ALFA=0.
16 FX=FY
CX=DY
DO 17 I=1,LD
17 FVEC(I)=FVEC(I)+AMBDA*H(J)
CALL FONC(LD,FVEC,COUT,GRDVEC)
FY=COUT
DY=0.
DO 18 I=1,LD

```



```

18 DY=DY+GRDVEC(I)*H(I)
   IF(DY)19,36,22
19 IF(FY-FX)20,22,22
20 AMBDA=AMBDA+ALFA
   ALFA=AMBDA
   IF(HNRM*AMBDA-1.E10)16,16,21
21 IER=2
   RETURN
22 TO=0.
23 IF(AMBDA)24,36,24
24 ZT=3.*(FX-FY)/AMBDA+DX+DY
   ALFA=AMAX1(ABS(ZT),ABS(DX),ABS(DY))
   DALFA=ZT/ALFA
   DALFA=DALFA*DALFA-DX/ALFA*DY/ALFA
   IF(DALFA)51,25,25
25 W=ALFA*SGRT(DALFA)
   ALFA=(DY+W-ZT)*AMBDA/(DY+2.*W-DX)
   DO 26 I=1,LD
26 FVEC(I)=FVEC(I)+(TC-ALFA)*F(I)
   CALL FCON(LD,FVEC,COU,GRDVEC)
   IF(COU-FX)27,27,28
27 IF(COU-FY)36,36,28
28 DALFA=0.
   DO 29 I=1,LD
29 DALFA=DALFA+GRDVEC(I)*H(I)
   IF(DALFA)30,33,33
30 IF(COU-FX)32,31,33
31 IF(DX-DALFA)32,36,32
32 FX=COU
   DX=DALFA
   TO=ALFA
   AMBDA=ALFA
   GOTO23
33 IF(FY-COU)35,34,35
34 IF(DY-ALFA)35,36,35
35 FY=COU
   DY=DALFA
   AMBDA=AMBDA-ALFA
   GOTO22
36 DO 37 J=1,LD
   K=LD+J
   F(K)=GRDVEC(J)-H(K)
   K=LD+L
37 F(K)=FVEC(J)-H(K)
   IF(OLDF-COU+EPS)51,38,38
38 IER=0
   IF(KOUNT-LD)42,39,39
39 TO=0.
   ZT=0.
   DO 40 J=1,LD
   K=LD+J
   W=H(K)
   K=K+LD
   TO=TO+ABS(F(K))
40 ZT=ZT+W*F(K)
   IF(HNRM-EPS)41,41,42
41 IF(TC-EPS)56,56,42
42 IF(KOUNT-ITER)43,50,50
43 ALFA=0.
   DO 47 J=1,LD

```

```

K=J+N3
W=0.
DO 46 L=1,LD
KL=LD+L
W=W+H(KL)*H(K)
IF(L-J) 44,45,45
44 K=K+LD-L
GOTO46
45 K=K+1
46 CONTINUE
K=LD+J
ALFA=ALFA+W*H(K)
47 H(J)=K
IF(ZT*ALFA)48,1,48
48 K=N31
DO 49 L=1,LD
KL=N2+L
DO 49 J=L,LD
NJ=N2+J
H(K)=H(K)+H(KL)*H(NJ)/ZT-H(L)*H(J)/ALFA
49 K=K+1
GOTO5
50 IER=1
RETURN
51 DO 52 J=1,LD
K=N2+J
52 FVEC(J)=H(K)
CALL FCON(LD,FVEC,COU,GRDVEC)
IF(CNFM-EPS)55,55,53
53 IF(IEF)56,54,54
54 IER=-1
GOTO1
55 IER=0
56 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COEF(N,L,B)
DIMENSIONAL(I),B(N)
REAL L
J=1
I=J
B(I)=1.
B(I)=B(I)*L(J)
DO3J=2,N
I=J
B(I)=1.
30 I1=I-1
B(I)=B(I)*L(J)+B(I1)
I=I-1
IF(I-2)10,15,15
15 GOTO30
10 I=1
B(I)=B(I)*L(J)
3 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FROD(A,B,C,M,N,L)
DIMENSIONA(M,N),B(N,L),C(M,L)
DO10I=1,M
DO10J=1,L
SB=0.
DO20K=1,N
20 SB=SB+A(I,K)*B(K,J)
10 C(I,J)=SB
RETURN
END

```