

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DETECTION DE PANNES
D'INSTRUMENTS DE MESURE
PAR
REDONDANCE ANALYTIQUE

Proposé par : Mrs BETTAYEB
ARFI

Etudié par : Melles L. SELLAMI
H. ZEPKANI

Dirigé par :
Mr
ARFI



PROMOTION : juin 84

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DETECTION DE PANNES
D'INSTRUMENTS DE MESURE
PAR
REDONDANCE ANALYTIQUE

Proposé par : Mrs BETTAYEB
ARFI

Etudié par : Melles L. SELLAMI
H. ZERKANI

Dirigé par :
Mr ARFI



PROMOTION : juin 84

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à M^R ARFI pour le sujet qu'il nous a proposé, et l'aide qu'il nous a apportée.

Nos remerciements vont aussi à M^{RS} TATAH et BETTAYEB pour nous avoir accueillies au sein du CDCE, ainsi qu'à M^R SELLAL pour nous avoir aidés dans la simulation, et aussi au personnel du service d'informatique, de la photocopie et du tirage.

Que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation veuillent bien trouver dans ce modeste ouvrage l'expression de notre profonde gratitude.

SOMMAIRE

	pages
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I THEORIE DE L'OBSERVATEUR	4
1 Notion d'observabilité	4
1.1 Interet	4
1.2 Critere d'observabilité	5
2 Theorie de l'observateur	6
2.1 observateur d'ordre n	6
2.2 observateur d'ordre reduit	9
CHAPITRE II METHODE ANALYTIQUE DE DETECTION DE PANNES	14
1 Introduction	14
2 Algorithme de detection de pannes	14
3 Algorithme des subroutines	20
3.1 Observabilité	20
3.2 Construction de la matrice M de passage	21
3.3 Calcul du vecteur L	23
3.3.1 Pour un systeme a parametres constants	24
3.3.2 Pour un systeme a parametres variables	29
3.4 Resolution de l'equation de l'observateur	37
3.5 Logique de detection	39
CHAPITRE III ORGANIGRAMMES ET PROGRAMMES	44
CHAPITRE IV SIMULATION	60
1 Test du programme en absence de pannes	61
2 Test du programme en presence de pannes	62
CONCLUSION	78
REFERENCES	

INTRODUCTION

La fiabilité d'un système automatisé et donc sa sécurité repose sur la conception d'un système de détection de pannes qui peuvent survenir dans les instruments de mesure. Traditionnellement, le problème est résolu par une redondance physique de l'instrumentation. Cela consiste à utiliser plusieurs instruments pour mesurer la même grandeur. La détection de l'appareil defectueux est alors assuré par une logique à vote majoritaire, mais cette méthode s'avère vite très coûteuse et encombrante au fur et à mesure que le système est voulu fiable.

L'alternative à cette méthode est fournie par la redondance analytique qui s'obtient par des techniques d'estimation d'état utilisant les observateurs de Luenberger, les filtres de Kalman ou des tests de rapport de vraisemblance.

La redondance analytique permet de créer des signaux redondants à partir d'une ou plusieurs mesures.

Les signaux redondants pourraient être incorporés dans une logique de détection afin d'identifier l'instrument en faute.

L'idée de la détection de pannes dans les instruments de mesure (IFD : instrument failure detection) par redondance analytique a été introduite par BEARD

MEIR et ROSS [1971]. Plusieurs approches du IFD pour des processus linéaires, déterministes ont été développées par CLARCK [1975] qui a introduit le DOS (dedicated observer scheme) en utilisant les observateurs de Luenberger. Une application du IFD avec observateurs réduits a été proposée par CLARCK [1978a], il a de même introduit [1978b] le IFD simplifié utilisant un seul observateur.

CLARCK et SETZER [1980] ont modifié le IFD simplifié en utilisant les filtres de Kalman afin de résoudre le problème de perturbations aléatoires.

Dans le but de réduire les fausses alarmes dues aux variations des paramètres du système, FRANK et KELLER [1980] ont fait l'extension du problème du IFD en dédoublant les observateurs, permettant ainsi de faire la distinction entre les variations des paramètres et les erreurs introduites par les instruments.

Presentation du sujet

d'objectif du travail qui nous a été confié est d'écrire et de programmer un algorithme de détection de fautes dans les instruments de mesure. Nous aurons à développer une approche du IFD pour des processus continus, linéaires, stationnaires et déterministes en utilisant les observateurs réduits de LUENBERGER. Nous essayerons de compléter ce travail en considérant le cas de variations infinitésimales des paramètres du processus.

d'étude que nous allons entamer comportera quatre parties. Dans le premier chapitre, nous avons jugé utile de donner les notions essentielles de la théorie de l'observateur.

Le second chapitre traite la méthode analytique de détection de fautes ainsi que son algorithme.

Les programmes et les principaux organigrammes des sous-routines sont présentés dans le troisième chapitre.

Enfin, nous consacrerons le dernier chapitre à la simulation.

THEORIE DE L'OBSERVATEUR

1 - Notion d'observabilité

1.1 Interêt

La notion d'observabilité est importante dans le problème du choix d'un modèle du type (I) pour représenter l'évolution d'un processus réel. En effet, l'état d'un système est un concept abstrait; sur un processus réel, l'expérimentateur n'a accès qu'aux grandeurs mesurables entrées - sorties. Si l'on choisit a priori un type de modèle pour représenter l'évolution d'un processus, une identification expérimentale ne permettra de déterminer que la partie mesurable qui est la seule qui nous intéresse.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B u(t) \\ Y(t) = C X(t) + D u(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (I)$$

où :

$u(t)$ est le vecteur de commande de dimension p

$Y(t)$ est le vecteur de sortie de dimension m

$X(t)$ est le vecteur d'état du système de dimension n

A est la matrice de transition de dimension $n \times n$

B est la matrice de conduction de dimension $n \times p$

C est la matrice de sortie de dimension $m \times n$

D est la matrice de transmission de dimension $m \times p$

1.2 critère d'observabilité

un système est complètement observable à l'instant t_0 si de l'observation de sa sortie y entre t_0 et t_0+T , on peut déduire l'état du système à l'instant initial t_0 , c'est à dire remonter de la sortie aux conditions initiales qui en sont la cause efficiente. Pour les systèmes invariants, on peut toujours se ramener à $t_0 = 0$.

Considérons le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) \\ Y(t) = C X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

et supposons que $y(t)$ soit dérivable jusqu'à un ordre quelconque, la connaissance de $y(t)$ sur un intervalle de temps quelconque entraîne la connaissance des dérivées successives à un instant de cet intervalle. En particulier pour $t = t_0$, on peut écrire

$$Y_k = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_0^{(1)} \\ Y_0^{(2)} \\ \vdots \\ Y_0^{(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(k-1)} \end{bmatrix} X_0$$

Il faut donc pouvoir déterminer k tel que l'observation de Y_k permette de calculer X_0 de façon unique par la relation : $Y_k = [G] X_0$.

L'observation des sorties pour $k > n$ n'apporte aucune information nouvelle car A^n, A^{n+1}, \dots peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires de $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. Autrement dit les sorties pour $k > n$ peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires de $y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$; ce qui est évident physiquement, le système étant d'ordre n . Donc une condition nécessaire et suffisante pour que le système considéré soit observable est que la matrice G soit de rang n .

2. Théorie de l'observateur

2.1. Observateur d'ordre n

Considérons le système linéaire, observable, décrit par

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

$$\bar{Y}(t) = CX(t) + Du(t)$$

$$X(t_0) = X_0$$

En posant $Y(t) = \bar{Y}(t) - Du(t)$, on se ramène à :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

$$Y(t) = CX(t)$$

$$X(t_0) = X_0$$

Si C est non singulière, le vecteur d'état peut être déterminé facilement à partir de $X(t) = C^{-1}Y(t)$.

Dans le cas contraire, on a recours à des méthodes d'estimation de l'état du système.

Le vecteur de sortie $Y(t)$ et celui de commande $u(t)$ servent d'entrées au système observateur linéaire

décrit par :

$$\dot{Z}(t) = D(t) Z(t) + F(t) X(t) + E(t) u(t)$$

système et observateur étant supposés linéaires, la relation liant X à Z est linéaire et on peut l'écrire sous la forme :

$$Z = TX + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= T\dot{X} + \dot{\varepsilon} = T(AX + Bu) + \dot{\varepsilon} \\ &= D(TX + \varepsilon) + FX + Eu \end{aligned}$$

$$(TA - DT - F)X + (TB - E)u + \dot{\varepsilon} - DE = 0 \quad \forall X(t) \text{ et } u(t)$$

d'où les conditions :

$$- TA - DT = F$$

$$- TB = E$$

$$- \dot{\varepsilon} = DE$$

Si ces conditions sont satisfaites, on aura de plus :

$$\dot{Z} - T\dot{X} = \dot{\varepsilon} = D(Z - TX) = DZ - (TA - F)X \quad (1-1)$$

dont la solution est :

$$Z(t) = TX(t) + e^{D(t-t_0)} (Z_0 - TX_0) \quad (1-2)$$

$$\text{et } \varepsilon(t) = e^{D(t-t_0)} (Z_0 - TX_0) \quad (1-3)$$

En effet, en posant $v(t) = Z(t) - TX(t)$, l'équation (1-1) s'écrit :

$\dot{v}(t) = D v(t)$ dont la solution est

$$v(t) = e^{D(t-t_0)} v(t_0) \quad \text{ou}$$

$$Z - TX = e^{D(t-t_0)} (Z_0 - TX_0) \quad \text{d'où}$$

$$Z(t) = e^{D(t-t_0)} (Z_0 - TX_0) + TX(t) \quad \text{et donc}$$

$$\varepsilon(t) = Z(t) - TX(t) = e^{D(t-t_0)} (Z_0 - TX_0)$$

si A et D n'ont pas de valeurs propres communes, il existe toujours une solution T unique vérifiant l'équation $TA - DT = F$ [1]

d'erreur $E(t)$ sera minimisée en choisissant d'une part les conditions initiales X_0 du système et Z_0 de l'observateur satisfaisant la relation $Z_0 = TX_0$ et d'autre part la dynamique de l'observateur (caractérisée par les valeurs propres de D) plus rapide que celle du système. L'erreur entre $Z(t)$ et $TX(t)$ diminue rapidement au cours du temps, après un certain transitoire, cette erreur pourra être considérée comme négligeable.

La solution la plus simple serait de prendre $T = I_n$ (matrice identité $n \times n$) afin d'avoir l'identité (après les transitoires) entre l'état de l'observateur et celui du système. On a alors :

$$D(t) = A(t) - F(t)$$

$$E(t) = B(t)$$

$$F(t) = G(t) \cdot C(t)$$

et

$$\dot{Z}(t) = [A(t) - F(t)] Z(t) + G(t) C(t) X(t) + B(t) u(t) \quad (1-4)$$

$D(t)$ est choisie de manière à ce que ses valeurs propres soient arbitraires, on les prendra à partie réelle négative pour assurer la stabilité (au sens de Liapunov) de l'observateur. [2]

La matrice $C(t)$ est donnée dans le problème mais

la matrice $F(t)$ ne l'est pas, il faudra donc la déterminer (en fait chercher $F(t)$ revient à chercher $G(t)$ puisque $F(t) = G(t) \cdot C(t)$) de façon à ce que l'erreur E tende vers zéro le plus rapidement (observateur convergent). La structure de l'observateur d'ordre n (voir fig 1-1) possède un degré de redondance puisque l'estimateur est construit pour le vecteur d'état en entier (une partie de l'état est déjà connue par mesure).

Pour éliminer cette redondance, on peut construire un observateur d'ordre réduit (voir fig 1-2). On note que s'il est possible de séparer le système en deux ou plusieurs sous-systèmes, les observateurs de ces derniers seraient plus faciles à déterminer que les observateurs du système complet.

1-2 Observateur d'ordre réduit

Considérons le système linéaire, observable, invariant, décrit par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases} \quad (I)$$

$Y(t)$ est le vecteur de sortie mesurable.

L'estimateur de l'état du système (I) prend la forme générale suivante :

$$\dot{\hat{X}}(t) = K\hat{X}(t) + LY(t) + Bu(t)$$

L'erreur introduite par l'estimateur est donnée par :

$$e(t) = X(t) - \hat{X}(t) \quad \text{et} \quad \dot{e}(t) = \dot{X}(t) - \dot{\hat{X}}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A(t)x(t) + Bu(t) - K\hat{x}(t) - LCx(t) - Bu(t) \\ &= (A - LC)x(t) - K\hat{x}(t) \\ &= (A - LC - K)x(t) + Ke(t) \end{aligned}$$

Il s'agit de construire un estimateur qui introduit une erreur minimale et comme la loi de variation de $e(t)$ est inconnue, on réalise cette condition en supposant que l'espérance mathématique de $e(t)$ est nulle. On a :

$$E(e) = E(\dot{e}) = 0$$

$$E(\dot{e}) = [A(t) - LC(t) - K(t)] E[x(t)] + KE[e(t)] = 0$$

il en découle que :

$$K(t) = A(t) - LC(t) \quad \text{ce qui donne :}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A(t) - LC(t)] \hat{x}(t) + LCx(t) + Bu(t) \quad (1.5)$$

Nous allons maintenant présenter une approche particulière de construction d'un observateur d'ordre réduit, développé par GOPINATH [4]

considérons un système séparé où x_1 est une partie de l'état accessible à la mesure et x_2 l'autre partie que l'on doit estimer.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \dots & \dots \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u(t)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u(t)$$

Au lieu de construire un observateur pour le système

complet, on construit un observateur pour la partie non mesurable de l'état.

x_1 étant connue (mesurable), on peut alors connaître x_2 puisque \dot{x}_1 et u sont connus.

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) = A_{12}x_2(t) \end{cases} \quad (\text{III})$$

Le système (III) est observable ((A_{12}, A_{22}) est observable) car le système (I) est observable. [5]

Les équations (III) sont analogues aux équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

avec

$$Ax(t) \sim A_{22}x_2(t)$$

$$Bu(t) \sim A_{21}x_1(t) + B_2u(t)$$

$$Cx(t) \sim A_{12}x_2(t)$$

Ainsi, par analogie à l'équation (1-5), nous pouvons écrire la relation donnant l'estimateur de l'état pour le système (III).

$$\hat{x}_2 = (A_{22} - LA_{12})\hat{x}_2 + A_{21}x_1 + LA_{12}x_2 + B_2u(t)$$

$$\text{or } A_{12}x_2 = \dot{x}_1 - A_{11}x_1 - B_1u(t)$$

$$\hat{x}_2 = (A_{22} - LA_{12})\hat{x}_2 + (A_{21} - LA_{11})x_1(t) + L\dot{x}_1 + (B_2 - LB_1)u(t) \quad (1-6)$$

Dans le but d'éliminer \dot{x}_1 , on pose $\hat{x}_2 = z + Lx_1$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \dot{z} + L\dot{x}_1 = (A_{22} - LA_{12})\hat{x}_2 + (A_{21} - LA_{11})x_1 + L\dot{x}_1 + (B_2 - LB_1)u(t)$$

$$\dot{z} = (A_{22} - LA_{12})z + [(A_{21} - LA_{11}) + (A_{22} - LA_{12})L]x_1 + (B_2 - LB_1)u(t) \quad (1-7)$$

on a donc ramené le problème de l'estimation de l'état d'un système à la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

Le calcul de la matrice L est basé sur un choix arbitraire des valeurs propres de la matrice $A_{22} - LA_{12}$.

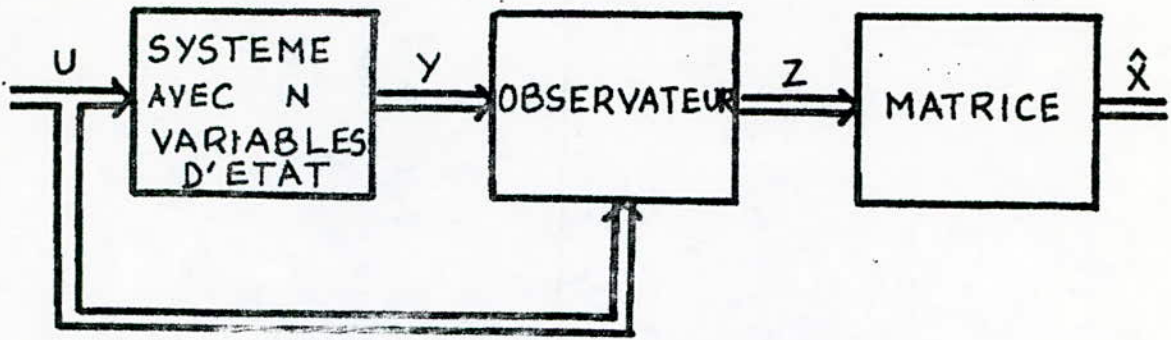


FIG. 1.1 BLOC DIAGRAMME D'UN OBSERVATEUR D'ORDRE N

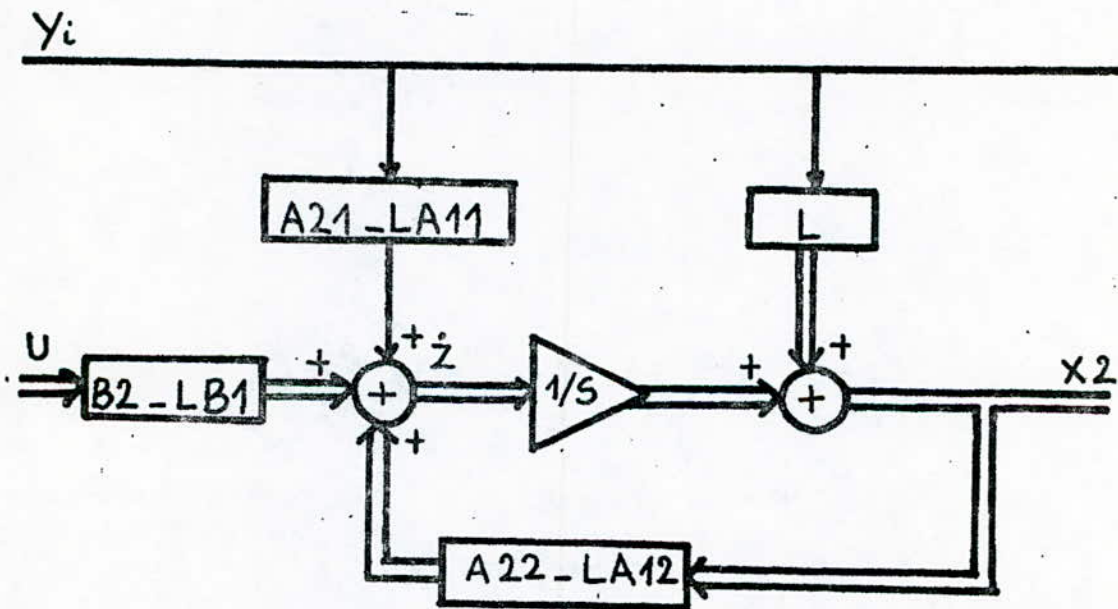


FIG 1.2 BLOC DIAGRAMME D'UN OBSERVATEUR D'ORDRE REDUIT

METHODE ANALYTIQUE DE DETECTION DE PANNES

1. Introduction

la méthode de détection d'anomalies dans les instruments est basée sur la redondance analytique.

Elle provient artificiellement d'un ensemble d'observateurs de LUENBERGER. la sortie de chaque instrument commande un observateur qui estime le vecteur d'état du système.

d'ensemble des observateurs produit une redondance du vecteur d'état et par suite une redondance du vecteur de sortie. des vecteurs de sortie estimés pourraient être alors comparés par une logique à vote majoritaire.

le bloc diagramme du système IFD utilisant plusieurs observateurs est donné par la figure (2-1).

2. Algorithme de détection de pannes

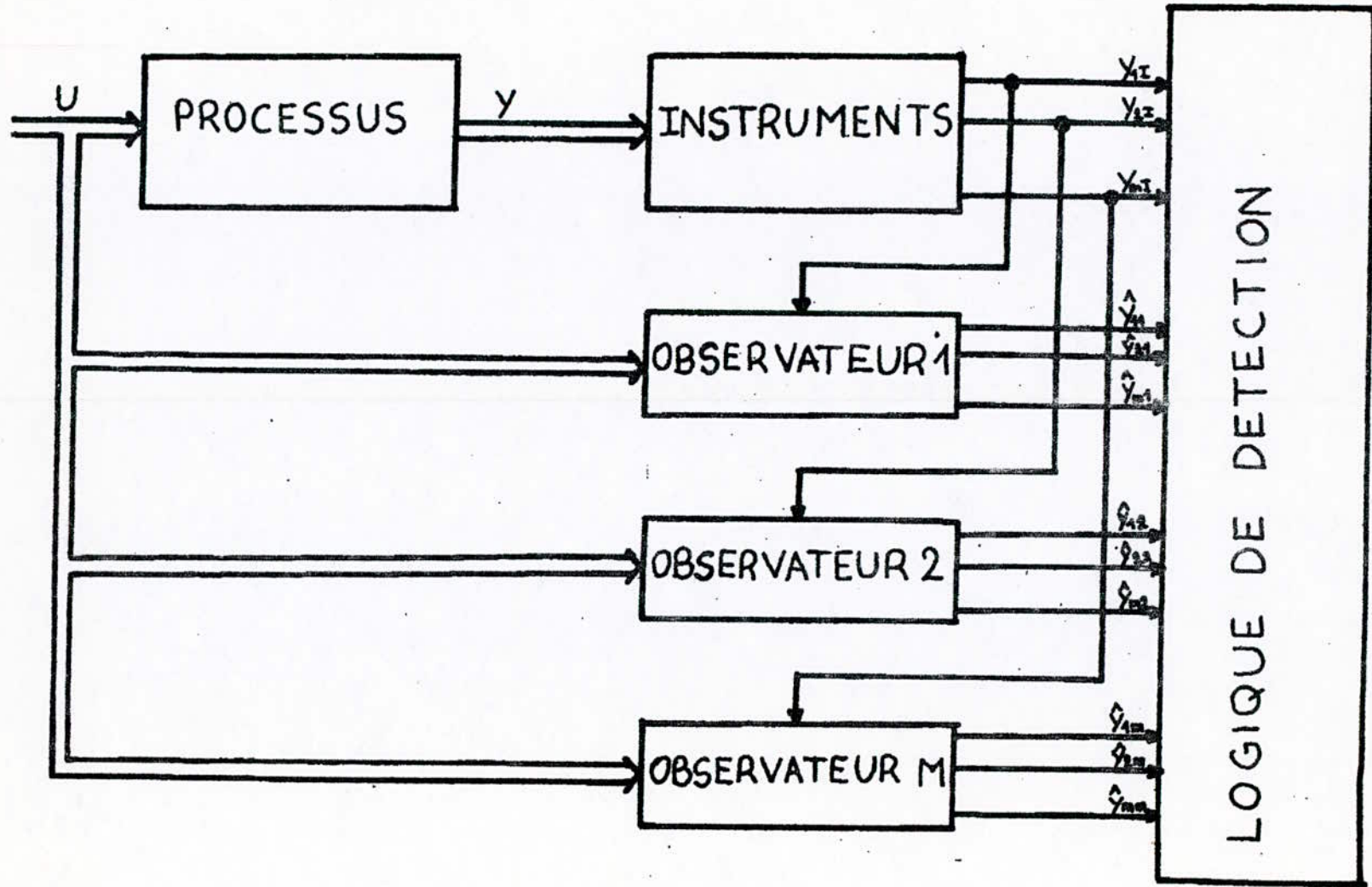
soit le système linéaire invariant, décrit par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) = CX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (I)$$

on suppose que le système (I) est complètement observable.

Nous voulons reconstruire l'état du système à partir

FIG 2.1 - BLOC DIAGRAMME DU SYSTEME IFD UTILISANT M OBSERVATEURS -



d'une seule sortie mesurable.

Pour cela considérons les sous-systèmes

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ Y_i(t) = C_i X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

où C_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de C dont les lignes sont indépendantes.

On supposera de même que les sous-systèmes (II) sont complètement observables.

Le fait que le vecteur de sortie soit accessible à la mesure nous permet de construire un observateur d'ordre réduit.

En effet, en partant de (II) et en faisant le changement de base $\bar{X} = MX$ tel que

$$\bar{C}_i = C_i M^{-1} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

le système (II) prend la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}(t) = \bar{A} \bar{X}(t) + \bar{B} u(t) \\ Y_i(t) = \bar{C}_i \bar{X}(t) \\ \bar{X}(t_0) = M X_0 \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

où

$$\bar{A} = MAM^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{B} = MB$$

La forme particulière de la matrice \bar{C}_i permet de séparer l'état \bar{x} du système dans la nouvelle base en une partie y_i mesurable et en une partie w non mesurable. Il suffit donc de construire un observateur d'ordre $n-1$ pour cette dernière afin de l'estimer.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_i \\ \text{---} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ \text{---} & | & \text{---} \\ A_{21} & | & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \text{---} \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \text{---} \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

avec

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} y_i \\ \text{---} \\ w \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \text{---} \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ \text{---} & | & \text{---} \\ A_{21} & | & A_{22} \end{bmatrix}$$

où W est un vecteur $(n-1) \times 1$; A_{12} vecteur $1 \times (n-1)$;
 A_{21} vecteur $(n-1) \times 1$; A_{22} matrice $(n-1) \times (n-1)$;
 B_1 vecteur $1 \times p$; B_2 matrice $(n-1) \times p$.

$$\dot{y}_i = A_{11} y_i + A_{12} W + B_1 u(t)$$

$$\dot{w} = A_{21} y_i + A_{22} W + B_2 u(t)$$

d'équation de l'estimateur de W est :

$$\hat{w}(t) = (A_{22} - LA_{12}) \hat{w}(t) + (A_{21} - LA_{11}) y_i(t) + L \dot{y}_i(t) + (B_2 - LB_1) u(t)$$

L'équation de l'observateur est :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A_{22} - LA_{12}) z(t) + [(A_{22} - LA_{12})L + A_{21} - LA_{11}] y_i(t) \\ \quad + (B_2 - LB_1) u(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

L est un vecteur d'ordre $n-1$

La résolution de cette équation nécessite la connaissance du vecteur L . Celui-ci sera calculé de telle sorte que les valeurs propres de la matrice $A_{22} - LA_{12}$ soient arbitraires.

Le calcul concerne la construction d'un observateur pour un système dont les paramètres sont supposés constants et parfaitement connus. Cependant, dans la pratique, il existe une différence entre les paramètres actuels et ceux utilisés pour la construction des observateurs. Ceci est dû aux variations des paramètres du système autour d'une valeur nominale ou à une évolution des paramètres dans le temps. Ainsi, si une alarme est déclenchée, on ne peut pas savoir si elle est due aux erreurs de

l'instrument ou bien aux variations des paramètres du processus.

Pour diminuer le risque de fausses alarmes, nous devons construire des observateurs à sorties insensibles aux variations des paramètres du système. Dans ce cas le calcul de L devra satisfaire les deux conditions suivantes:

- les valeurs propres de $A_{22} - LA_{12}$ sont arbitraires
- $z(t)$ est insensible aux variations des matrices A, B et C .

Une fois la solution $z(t)$ calculée en résolvant l'équation de l'observateur, les valeurs de \hat{w} , \bar{x} , \hat{x} et \hat{y} se déduisent facilement à partir des relations suivantes:

$$\hat{w}(t) = z(t) + L y_i(t)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} y_i \\ -w \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = M^{-1} \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{y} = C \hat{x}$$

La sortie estimée étant connue, une logique de détection nous permettra de savoir si l'instrument associé à l'observateur estimant y est en panne ou non.

Cette logique sera basée sur les assertions suivantes:

- si tous les instruments fonctionnent normalement (pas d'erreurs), alors les valeurs mesurées seraient identiques aux valeurs estimées par tous les observateurs.
- si l'instrument qui commande l'observateur i est en faute alors le vecteur de sortie estimé par cet observateur serait différent des $m-1$ autres vecteurs

estimés par les $m-1$ autres observateurs.

3 - Algorithme des sous-routines

Chaque étape de l'algorithme exposé dans le paragraphe précédent va constituer une sous-routine dont on donnera ici l'algorithme.

3.1 Observabilité:

Etant donné le système linéaire, invariant, décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Il est dit observable si et seulement si le rang de la matrice

$$W = \left[C^T \mid A^T C^T \mid A^{T^2} C^T \mid \dots \mid A^{T^{(n-1)}} C^T \right] \text{ est égal à } n.$$

Le test d'observabilité du système appelle deux sous-routines, l'une calcule les produits de matrice $A^T C^T, A^{T^2} C^T, \dots, A^{T^{(n-1)}} C^T$; l'autre détermine le rang de W . Une comparaison de ce rang à n permet de conclure quant à l'observabilité du système.

On fera le même test pour tous les sous-systèmes.

Supposons que l'on ait k vecteurs v_1, v_2, \dots, v_k ; ils sont

linéairement indépendants s'il existe $(\lambda_i)_{i=1}^k$ tels que
 $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_k V_k = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad i=1,2,\dots,k$
 Dans le cas contraire, ils sont linéairement dépendants
 c'est à dire qu'il existe des λ_i non tous nuls tels
 que $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_k V_k = 0$.

Déterminer le rang d'une matrice revient à trouver
 le nombre de vecteurs (lignes ou colonnes) linéai-
 - rement indépendants. La programmation du test
 d'indépendance linéaire utilise comme algorithme
 la formule de GRAM-SCHMIDT. Cet algorithme permet
 de créer une base de vecteurs E_k orthogonaux
 donnés par l'expression suivante :

$$E_k = V_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle V_k, E_i \rangle}{\langle E_i, E_i \rangle} E_i$$

où les V_k sont les vecteurs à tester.

si $E_k = 0$, V_k serait une combinaison linéaire de
 V_1, V_2, \dots, V_{k-1} .

3-2 Construction de la matrice M de passage

la matrice M permet le passage du système

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B u(t) \\ Y_i(t) = C_i X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

au système :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t) \\ y_i(t) = \bar{C}_i \bar{x}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \bar{x}(t) \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Une telle configuration permet de choisir M sous la forme :

$$M_i = \begin{bmatrix} C_i \\ N_i \end{bmatrix} \quad C_i : i^{i\text{eme}} \text{ ligne de } C.$$

Supposons que $C_i = [C_{i1} \ C_{i2} \ \dots \ C_{in}]$

$$M_C = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \dots & M_{mn} \end{bmatrix}$$

Nous avons $C_i = \bar{C}_i \cdot M_i$

$$\begin{aligned} [C_{i1} \ C_{i2} \ \dots \ C_{in}] &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \dots & M_{mn} \end{bmatrix} \\ &= [M_{11} \ M_{12} \ \dots \ M_{1n}] \end{aligned}$$

Le problème revient à trouver la matrice N_i telle que le déterminant de M_i soit non nul, autrement dit trouver N_i telle que les vecteurs de M_i soient linéairement indépendants. Pour cela, on construit une matrice N de

$$[C_{11} \ C_{12} \ \dots \ C_{1n}] = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \dots & M_{mn} \end{bmatrix}$$

dimension $(n-1) \times n$ dont les colonnes seront placées convenablement dans M_i .

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

on recherchera le premier élément C_{ij} de M_i non nul, on placera alors la première colonne de N dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de M_i . Pour illustrer ceci, donnons un exemple.

supposons que C_{i2} soit le premier élément non nul, la matrice M_i correspondante sera :

$$M_i = \begin{bmatrix} C_{i1} & C_{i2} & C_{i3} & \dots & C_{in} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 CALCUL du vecteur L

Pour un système dont les paramètres sont variables le calcul du vecteur L doit satisfaire les deux conditions :

- les valeurs propres de $(A_{22} - LA_{12})$ sont arbitraires
- la sensibilité de $Z(t)$ aux variations des matrices A , B et C du système est minimale.

Pour un système dont les paramètres sont constants, on ne tiendra compte que de la première condition.

3.3-1 Calcul de L pour un système à paramètres constants.

Les valeurs propres du système observateur étant fixées (valeurs propres à partie réelle négative), les coefficients $\tilde{\alpha}_j$ du polynôme caractéristique de $A_{22}-LA_{12}$ sont donc connus :

$$\tilde{\Delta}(s) = \det [sI - (A_{22}-LA_{12})] = \prod_{i=1}^{n-1} (s + \lambda_i)$$

$$\tilde{\Delta}(s) = \tilde{\alpha}_n s^{n-1} + \tilde{\alpha}_{n-1} s^{n-2} + \dots + \tilde{\alpha}_2 s + \tilde{\alpha}_1$$

avec $\tilde{\alpha}_n = 1$

A_{22} est une matrice connue, les coefficients de son polynôme caractéristique seront déterminés par l'algorithme de LEVERRIER [6]

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \alpha_n s^{n-1} + \alpha_{n-1} s^{n-2} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1 \\ &= \det [sI - A_{22}] \end{aligned}$$

avec $\alpha_n = 1$

Pour $j = 0, 1, 2, \dots, n-2$; nous avons

$$\alpha_{n-1-j} = \frac{-1}{j+1} \text{Tr} (A_{22} S_{n-j})$$

$$S_{n-j+1} = \alpha_{n-j-1} I + A S_{n-j}$$

$$S_n = I_n$$

cherchons une relation entre $\tilde{\alpha}_j$ et α_j .

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(s) &= \det [sI - (A_{22} - LA_{12})] \\ &= \det [(sI - A_{22})(I + (sI - A_{22})^{-1} LA_{12})] \\ &= \det [sI - A_{22}] \cdot \det [I + (sI - A_{22})^{-1} LA_{12}] \\ &= \Delta(s) \det (I + dc)\end{aligned}$$

où $d = (sI - A_{22})^{-1} L$ est un vecteur $(n-1) \times 1$ et $c = A_{12}$ est un vecteur $1 \times (n-1)$.

$$\begin{aligned}\det (I + dc) &= \det [e_1 + d_1 c, e_2 + d_2 c, \dots, e_n + d_n c] \\ &= \det (e_1, e_2, \dots, e_n) + d_1 \det (c, e_2, \dots, e_n) \\ &\quad + d_2 \det (e_1, c, \dots, e_n) + \dots + d_n \det (e_1, e_2, \dots, c) \\ &= 1 + d_1 c_1 + d_2 c_2 + \dots + d_n c_n \\ &= 1 + cd\end{aligned}$$

$$[e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] = I_n$$

Donc

$$\det [I + (sI - A_{22})^{-1} LA_{12}] = 1 + A_{12} (sI - A_{22})^{-1} L$$

$$\tilde{\Delta}(s) = \Delta(s) + A_{12} (sI - A_{22})^{-1} L \Delta(s)$$

$$(sI - A_{22})^{-1} = \frac{\Gamma(s)}{\det (sI - A_{22})} = \frac{\Gamma(s)}{\Delta(s)}$$

$$\Gamma(s) = \text{cof} (sI - A_{22})^T$$

$$\tilde{\Delta}(s) = \Delta(s) + A_{12} \Gamma(s) L$$

$$\Gamma(s) = \sum_{i=1}^{n-1} s^{i-1} S_{i+1}$$

où S_{i+1} sont les matrices définies dans l'algorithme de LEVERRIER.

$$\begin{aligned} s^{n-1} + \tilde{\alpha}_{n-1} s^{n-2} + \tilde{\alpha}_{n-2} s^{n-3} + \dots + \tilde{\alpha}_2 s + \tilde{\alpha}_1 &= \\ s^{n-1} + \alpha_{n-1} s^{n-2} + \alpha_{n-2} s^{n-3} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1 + \\ A_{12} (S_2 + S_3 s + S_4 s^2 + \dots + S_n s^{n-2}) L \end{aligned}$$

Par identification, on arrive au résultat :

$$\tilde{\alpha}_{n-1} = \alpha_{n-1} + A_{12} S_n L$$

$$\tilde{\alpha}_{n-2} = \alpha_{n-2} + A_{12} S_{n-1} L$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + A_{12} S_3 L$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + A_{12} S_2 L$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \tilde{\alpha}_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_2 - \alpha_2 \\ \tilde{\alpha}_1 - \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} S_n L \\ A_{12} S_{n-1} L \\ \vdots \\ A_{12} S_3 L \\ A_{12} S_2 L \end{bmatrix}$$

Ecrivons le produit matriciel $A_{12} S_{j+1}$

$$A_{12} S_{j+1} = \begin{bmatrix} v_{1,j+1} & v_{2,j+1} & \dots & v_{n-1,j+1} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} S_{j+1} L = \begin{bmatrix} v_{1,j+1} & v_{2,j+1} & \dots & v_{n-1,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_{n-1} \end{bmatrix}^T$$

$$= v_{1,j+1} L_1 + v_{2,j+1} L_2 + \dots + v_{n-1,j+1} L_{n-1}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} A12 S_n L \\ A12 S_{n-1} L \\ \vdots \\ A12 S_2 L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,n} L_1 + v_{2,n} L_2 + \dots + v_{n-1,n} L_{n-1} \\ v_{1,n-1} L_1 + v_{2,n-1} L_2 + \dots + v_{n-1,n-1} L_{n-1} \\ \vdots \\ v_{1,2} L_1 + v_{2,2} L_2 + \dots + v_{n-1,2} L_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{1,n} & v_{2,n} & \dots & v_{n-1,n} \\ v_{1,n-1} & v_{2,n-1} & & v_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1,2} & v_{2,2} & & v_{n-1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \tilde{\alpha}_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}}_b = \underbrace{\begin{bmatrix} A12 S_n \\ A12 S_{n-1} \\ \vdots \\ A12 S_2 \end{bmatrix}}_A L$$

Le système linéaire $AL = b$ possède une solution unique lorsque A est inversible. Nous allons montrer que dans notre cas A est toujours inversible.

D'après l'algorithme de LEVERRIER, on a:

$$S_{n-1-j} = \alpha_{n-1-j} I + A22 S_{n-j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

$$\begin{aligned}
 S_{n-1} &= \alpha_{n-1} I + A_{22} S_n = \alpha_{n-1} I + A_{22} \quad ; \quad S_n = I_n \\
 S_{n-2} &= \alpha_{n-2} I + A_{22} S_{n-1} = \alpha_{n-2} I + \alpha_{n-1} A_{22} + A_{22}^2 \\
 S_{n-3} &= \alpha_{n-3} I + A_{22} S_{n-2} = \alpha_{n-3} I + \alpha_{n-2} A_{22} + \alpha_{n-1} A_{22}^2 + \\
 &\quad A_{22}^3 \\
 &\vdots \\
 S_2 &= \alpha_2 I + \alpha_3 A_{22} + \alpha_4 A_{22}^2 + \dots + \alpha_{n-1} A_{22}^{n-3} + A_{22}^{n-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A_{12} S_n \\ A_{12} S_{n-1} \\ A_{12} S_{n-2} \\ \vdots \\ A_{12} S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12} \alpha_{n-1} I + A_{12} A_{22} \\ A_{12} \alpha_{n-2} I + A_{12} \alpha_{n-1} A_{22} + A_{12} A_{22}^2 \\ \vdots \\ A_{12} \alpha_2 I + A_{12} \alpha_3 A_{22} + A_{12} \alpha_4 A_{22}^2 + \dots + A_{12} A_{22}^{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\alpha} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12} A_{22} \\ A_{12} A_{22}^2 \\ \vdots \\ A_{12} A_{22}^{n-2} \end{bmatrix}}_G$$

α est une matrice $(n-1) \times (n-1)$ dont le déterminant est égal à 1. G est la matrice d'observabilité du système réduit, son rang est égal à $n-1$, son déterminant est donc non nul.

La matrice A du système linéaire $AL = b$ étant toujours inversible, la solution L est unique.

3.3.2 Calcul de L pour un système à paramètres variables

3.3.2.1 Equations de sensibilité de l'état et de la sortie du système.

Supposons que les variations des matrices A, B et C du système soient infinitésimales et qu'elles ne dépendent que du vecteur de paramètres α dans lequel sont rangés les éléments de A, B et C.

d'équation d'état du système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X}(t, \alpha) = A(\alpha) X(t, \alpha) + B(\alpha) u(t) \\ Y(t, \alpha) = C(\alpha) X(t, \alpha) \end{cases} \quad (\text{III})$$

On définit la sensibilité de l'état (respectivement de la sortie) du système comme étant un changement de cet état (respectivement de la sortie) par rapport aux variations des paramètres.

On obtient alors les équations de sensibilité en prenant les premières dérivées partielles de (III) par rapport à α_j .

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} X(t, \alpha_0) + A(\alpha_0) \left. \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} + \left. \frac{\partial B(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} u(t) \\ \left. \frac{\partial X(t_0, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV})$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial Y(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\partial C(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} X(t, \alpha_0) + C(\alpha_0) \left. \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \\ \left. \frac{\partial Y(t_0, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = 0 \end{cases} \quad (\text{V})$$

L'étude de la sensibilité que nous allons développer ici sera limitée au cas des variations des éléments de A. Elle consistera à minimiser les variations de la sortie des observateurs par rapport aux variations du paramètre critique. Celui-ci sera l'élément de A pour lequel la valeur de la norme I est maximale.

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \sigma_j^T Q \sigma_j dt$$

où Q est une matrice de pondération symétrique définie positive. et $\sigma_j = \left. \frac{\partial Y(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}$

3.3.2.2 Equations de sensibilité de la sortie des observateurs

En utilisant les abréviations suivantes

$$F = A_{22} - LA_{12} \quad ; \quad B = B_2 - LB_1 \quad \text{et}$$

$$H = (A_{22} - LA_{12})L + (A_{21} - LA_{11})$$

l'équation de l'observateur va s'écrire

$$\dot{Z}(t, \alpha) = F Z(t, \alpha) + H Y_i(t, \alpha) + G u(t)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{X}}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = M^{-1} \left. \frac{\partial \bar{X}}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = M^{-1} \left[\left. \frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \left| \left(\left. \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \right)^T \right]^T$$

$$= M^{-1} \left[\left. \frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \left(\left. \frac{\partial Z}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} + L \left. \frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} \right)^T \right]^T$$

$$\left. \frac{\partial \dot{Z}(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = F \left. \frac{\partial Z(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} + H \left. \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{Z}(t_0, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = 0$$

Posons $\bar{z}(t, \alpha_0) = \left. \frac{\partial Z(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}$ et $\delta_i(t, \alpha_0) = \left. \frac{\partial \gamma_i(t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}$

nous aurons alors

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}(t, \alpha_0) = F \bar{z}(t, \alpha_0) + H \delta_i(t, \alpha_0) \\ \bar{z}(t_0, \alpha_0) = 0 \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial \hat{x}}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0} = M^{-1} \left[\begin{array}{c} \delta_i \\ (\bar{z} + L \delta_i)^T \end{array} \right]^T$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha_j} = C \frac{\partial \hat{x}}{\partial \alpha_j}$$

3.3.2.3 Formulation mathématique du problème d'optimisation

de calcul de L satisfaisant les conditions déjà énoncées revient à un problème d'optimisation de la fonction de coût J .

$$\min_L J(L) = \min_L \int_{t_0}^{t_f} \hat{\sigma}_j^T R \hat{\sigma}_j dt$$

$$\hat{\sigma}_j = \left. \frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}$$

R est une matrice de pondération symétrique définie positive.

avec les contraintes

$$\dot{z}(t, \alpha_0) = F z(t, \alpha_0) + H \delta_i(t, \alpha_0)$$

$$z(t_0, \alpha_0) = 0$$

$$D_{\max} - \text{tr}(LA12) = \delta_1^2$$

$$\text{Tr}(LA12) - D_{\min} = \delta_2^2$$

Remarque :

Le calcul du vecteur L permettra aussi de situer les valeurs propres de $(A22 - LA12)$ dans un intervalle que l'on se fixe au départ.

La propriété $\text{Tr} A = \sum \lambda_i$ permet d'écrire

$$(n-1) \lambda_{\min} \leq \text{Tr}(A22 - LA12) \leq (n-1) \lambda_{\max}$$

Comme $\lambda_i \in [\text{inf}, \text{sup}] \quad i = 1, n-1$

$$\lambda_{\max} \leq \text{sup} \quad \text{et} \quad \lambda_{\min} \geq \text{inf}$$

$$(n-1) \text{inf} \leq \text{Tr}(A22 - LA12) \leq (n-1) \text{sup}$$

$$\text{Tr} A22 - (n-1) \text{sup} \leq \text{Tr} LA12 \leq \text{Tr} A22 - (n-1) \text{inf}$$

$$D_{\min} \leq \text{Tr} LA12 \leq D_{\max}$$

Nous avons deux contraintes inégalités que l'on transformera en contraintes égalités.

$$\text{Tr}(LA12) \leq D_{\max} \quad \text{et} \quad \text{Tr}(LA12) \geq D_{\min}$$

$$D_{\max} - \text{Tr}(LA12) \geq 0 \quad D_{\max} - \text{Tr}(LA12) = \delta_1^2$$

$$\text{Tr}(LA12) - D_{\min} \geq 0 \quad \text{Tr}(LA12) - D_{\min} = \delta_2^2$$

Minimiser la fonction $J(L)$ revient à minimiser la fonction Hamiltonienne de LAGRANGE [7] définie par

$$H(L, p, \delta_1^2, \delta_2^2, \Delta_1, \Delta_2, \bar{z}) = \hat{\sigma}_j^T R \hat{\sigma}_j + p^T (F\bar{z} + H\delta_i - \dot{\bar{z}}) + \Delta_1 [D_{\max} - \text{Tr}(LA12) - \delta_1^2] + \Delta_2 [\text{Tr}(LA12) - D_{\min} - \delta_2^2]$$

calculons $\hat{\sigma}_j^T R \hat{\sigma}_j$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_j^T R \hat{\sigma}_j &= [\delta_i \mid (\bar{z} + L\delta_i)^T] (CM^{-1})^T R (CM^{-1}) [\delta_i \mid (\bar{z} + L\delta_i)^T]^T \\ &= [\delta_i \mid (\bar{z} + L\delta_i)^T] \Sigma [\delta_i \mid (\bar{z} + L\delta_i)^T]^T \end{aligned}$$

$$\Sigma [\delta_i \mid (\bar{z} + L\delta_i)^T]^T = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \bar{z} + L\delta_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta_i \Sigma_{11} + \Sigma_{12}(\bar{z} + L\delta_i) \\ \delta_i \Sigma_{21} + \Sigma_{22}(\bar{z} + L\delta_i) \end{bmatrix}$$

Σ est une matrice $n \times n$; $\Sigma_{11} : 1 \times 1$; $\Sigma_{21} : n-1 \times 1$

$\Sigma_{12} : 1 \times n-1$; $\Sigma_{22} : n-1 \times n-1$

$$\hat{\sigma}_j^T \Sigma \hat{\sigma}_j = [\delta_i \mid (\bar{z} + L\delta_i)^T] \begin{bmatrix} \delta_i \Sigma_{11} + \Sigma_{12}(\bar{z} + L\delta_i) \\ \delta_i \Sigma_{21} + \Sigma_{22}(\bar{z} + L\delta_i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \delta_i^2 \Sigma_{11} + \delta_i \Sigma_{12} \bar{z} + \bar{z}^T \Sigma_{21} \delta_i + \bar{z}^T \Sigma_{22} \bar{z} \\ &\quad + \delta_i^2 \Sigma_{12} L + \delta_i \bar{z}^T L + \delta_i^2 L^T \Sigma_{21} \\ &\quad + \delta_i L^T \Sigma_{22} \bar{z} + \delta_i^2 L^T \Sigma_{22} L \end{aligned}$$

les conditions de minimalité sont:

$$\frac{\partial H}{\partial L_i} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{z} - Fz - H\delta_i = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta_1} = D_{max} - \text{Tr}(LA12) - \delta_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta_2} = \text{Tr}(LA12) - D_{min} - \delta_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \delta_2^2} = -\Delta_2 = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \delta_1^2} = -\Delta_1 = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \dot{p}$$

calculons $\frac{\partial H}{\partial L}$ et $\frac{\partial H}{\partial z}$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} (\hat{\sigma}_j^T R \hat{\sigma}_j) + \frac{\partial}{\partial L} p^T (\dot{z} - Fz - H\delta_i) +$$

$$\frac{\partial}{\partial L} \Delta_1 (D_{max} - \text{Tr}(LA12) - \delta_1^2) +$$

$$\frac{\partial}{\partial L} \Delta_2 (\text{Tr}(LA12) - D_{min} - \delta_2^2)$$

En utilisant les propriétés de dérivation suivantes

$$\frac{\partial}{\partial X} (AX) = A^T ; \quad \frac{\partial}{\partial X} (X^T A) = A ; \quad \frac{\partial}{\partial X} \text{Tr}(XA) = A^T$$

$$\frac{\partial}{\partial X} (X^T A X) = (A^T + A) X \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial X} (A X B X) = (A^T B + B^T A) X$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial L} = & \delta_i^2 (\Sigma_{12}^T + \Sigma_{21}) + \delta_i \left[(\Sigma_{22}^T + \Sigma_{22}) \bar{z} - A_{22}^T p \right. \\ & \left. + p A_{11} \right] + p A_{12} \bar{z} + \left[\delta_i^2 (\Sigma_{22}^T + \Sigma_{22}) + \right. \\ & \left. \delta_i (p A_{12} + A_{12}^T p^T) \right] L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = & \delta_i \left[\Sigma_{12}^T + \Sigma_{21} + \Sigma_{22} L + \Sigma_{22}^T L \right] - F^T p + \\ & (\Sigma_{22} + \Sigma_{22}^T) \bar{z} = \dot{p} \end{aligned}$$

le vecteur L doit satisfaire simultanément les conditions suivantes

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\bar{z}} = F \bar{z} + H \delta_i \\ \bar{z}(t_0, \alpha_0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = 0 \quad F_1(p) + F_2(p) L = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \dot{p} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_3(L) + F_4(\bar{z}) - F^T(L) p = \dot{p} \\ p(t_f) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta_1} = 0 \quad D_{\max} - \text{Tr}(L A_{12}) \geq 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta_2} = 0 \quad \text{Tr}(L A_{12}) - D_{\min} \geq 0$$

3.3.2.4 Methode de resolution

Pour ce genre de problèmes, il convient d'utiliser des méthodes itératives qui convergeraient vers la solution optimale. Dans notre cas, nous allons déterminer le vecteur L par la méthode du gradient [8] :

a/ Initialiser L à L_0 .

b/ Avec cette valeur de L , résoudre

$$\begin{cases} \dot{z} = F(L)z + H(L)\delta_i \\ z(t_0, \alpha_0) = 0 \end{cases}$$

c/ Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{p} = F_3(L) + F_4(z) + F^T(L)p \\ p(t_f) = 0 \end{cases}$$

d/ Incrémenter L .

$$L_{j+1} = L_j - K_N \frac{\partial H}{\partial L}$$

e/ Refaire les étapes b, c et d jusqu'à ce que l'écart entre L_{j+1} et L_j soit inférieur à une certaine précision.

3.4 Résolution de l'équation de l'observateur

$$\dot{Z}(t) = (A_{22} - LA_{12}) Z(t) + [(A_{22} - LA_{12})L + A_{21} - LA_{11}] y_i(t) + (B_2 - LB_1) u(t)$$

$$\dot{Z}(t) = F Z(t) + H y_i(t) + G u(t)$$

On sait que la solution de l'équation

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad X(t_0) = X_0 \text{ est de la}$$

forme :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Cette solution est discrétisée dans le but de la mettre sous une forme itérative appropriée à l'ordinateur

$$X(kT+T) = e^{AT} X(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Le changement de variable $\tau_1 = \tau - kT$, conduit à

$$X(kT+T) = e^{AT} X(kT) + \theta(T) u(kT)$$

avec

$$\theta(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau_1)} B u(\tau_1 + kT) d\tau_1$$

Pour $0 < \tau_1 < T$, le signal $u(t)$ est constant, on

$$\text{a alors : } u(\tau_1 + kT) = u(kT)$$

$$\text{et } \theta(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau_1)} B u(kT) d\tau_1$$

En faisant le changement de variable $v = T - \tau_1$

$$\theta(T) \text{ devient } \theta(T) = \int_0^T e^{Av} dv B$$

Pour calculer cette intégrale, on utilisera le développement en série de :

$$e^{Av} = I + Av + \frac{A^2 v^2}{2!} + \frac{A^3 v^3}{3!} + \dots + A^k \frac{v^k}{k!} + \dots$$

$$\int_0^T e^{Av} dv = \int_0^T I dv + A \int_0^T v dv + \dots + A^k \int_0^T \frac{v^k}{k!} dv + \dots$$

$$= T \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{(i+1)!}$$

De façon analogue, la solution $z(t)$ de l'équation de l'observateur va s'écrire :

$$z(t) = e^{F(t-t_0)} z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} H y_i(\tau) d\tau +$$

$$\int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau$$

Cette équation est discrétisée avec une période T dont le choix sera un compromis entre l'augmentation du nombre d'itérations et la perte d'informations sur le signal $z(t)$.

$$z(kT+T) = e^{FT} z(kT) + \int_0^T e^{F(T-\tau_1)} H y_i(kT) d\tau_1$$

$$+ \int_0^T e^{F(T-\tau_1)} G u(kT) d\tau_1$$

$$e^{FT} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(FT)^i}{i!} \quad \text{et} \quad \int_0^T e^{F(T-\tau_1)} d\tau_1 = T \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(FT)^i}{(i+1)!}$$

La sommation s'arrête lorsque la valeur absolue du plus grand terme de la matrice $\frac{(FT)^i}{i!}$ devient inférieure à une certaine valeur fixée comme une précision à atteindre.

3.5 Logique de détection

La fonction du système IFD est de déclencher une alarme indiquant qu'une panne vient de se produire au niveau d'un instrument spécifié immédiatement après son apparition.

Il y a plusieurs procédés de détection dépendant chacun de la structure du IFD et du type de comparaison à faire [9], [10]. Dans ce qui suit, nous allons exposer deux procédés de détection de pannes.

3.5.1 Procédé 1.

Le principe de cette logique consiste à associer à chaque instrument une fonction scalaire utilisée comme fonction de détection. Celle-ci fait la comparaison entre les sorties estimées et les sorties mesurées. Pour un système à m sorties, ces fonctions sont notées $\Delta_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, m$ et sont fonctions des composantes de la fonction vecteur suivante :

$$\Delta Y^i = \begin{bmatrix} \Delta Y_1^i \\ \Delta Y_2^i \\ \vdots \\ \Delta Y_m^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1I} - \hat{Y}_{1i} \\ Y_{2I} - \hat{Y}_{2i} \\ \vdots \\ Y_{mI} - \hat{Y}_{mi} \end{bmatrix}$$

où les \hat{Y}_{ji} sont les sorties estimées par le $i^{\text{ème}}$ observateur. Les termes Y_{1I}, \dots, Y_{mI} sont simplement les sorties des instruments. On définit notre fonction scalaire de la manière suivante :

$$\Delta_i(t) = \left| \Delta Y_1^i \quad \Delta Y_2^i \quad \dots \quad \Delta Y_{i-1}^i \quad \Delta Y_{i+1}^i \quad \dots \quad \Delta Y_m^i \right|$$

le terme Δy_i^i ne figure pas dans $\Delta_i(t)$ car pour le $i^{\text{ème}}$ observateur $y_{ii} = y_{i\pi}$.

si l'instrument i est en bon état, nous aurons

$$\Delta y^i = \begin{bmatrix} y_{1\pi} - \hat{y}_{1i} = 0 \\ y_{2\pi} - \hat{y}_{2i} = 0 \\ \vdots \\ y_{i\pi} - \hat{y}_{ii} = 0 \\ \vdots \\ y_{m\pi} - \hat{y}_{mi} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Delta_i(t) = |\Delta y_1^i \cdot \Delta y_2^i \dots \Delta y_{i-1}^i \quad \Delta y_{i+1}^i \dots \Delta y_m^i| = 0$$

supposons maintenant que l'instrument i est en faute,

$$\Delta y^i = \begin{bmatrix} y_{1\pi} - \hat{y}_{1i} \neq 0 \\ y_{2\pi} - \hat{y}_{2i} \neq 0 \\ \vdots \\ y_{i\pi} - \hat{y}_{ii} = 0 \\ \vdots \\ y_{m\pi} - \hat{y}_{mi} \neq 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } \Delta_i(t) \neq 0$$

Ce qui a été dit précédemment peut se faire en supposant que les paramètres dynamiques du modèle sont fixes et connus parfaitement (pas d'incertitudes sur les éléments des matrices A, B et C) et qu'il n'existe pas de perturbations extérieures. Ces hypothèses ne reflètent pas bien sûr la réalité; en effet les Δy_j^i $j=1, m$ $i=1, m$ sont sûrement non nuls même si aucun des instruments n'est en faute. Si les Δy_j^i sont plus sensibles aux erreurs introduites par les instruments qu'à celles introduites par les petites variations des paramètres du système, l'estimation et l'algorithme, l'étude serait aussi valable à condition d'établir

les seuils adéquats pour chaque fonction de détection $\Delta_i(t)$. Celle-ci est continuellement comparée à la valeur seuil choisie pour chaque instrument. Si durant la manoeuvre, $\Delta_i(t)$ dépasse le seuil, l'alarme correspondant à l'instrument i est déclenchée.

Cette logique permet de détecter au maximum $m-2$ fautes simultanées dans m appareils différents sans provoquer de fausses alarmes.

3-5-2 Procédé 2

On commence par déterminer les sorties y_{ji} les plus sensibles aux erreurs d'instruments.

$j = 1, 2, \dots, m$ - caractérise l'observateur

$i = 1, 2, \dots, m$ caractérise la sortie

On définit pour y_{ji} , les différences suivantes :

$$\psi_1 = |\hat{y}_{1i} - \hat{y}_{2i}|$$

$$\psi_2 = |\hat{y}_{1i} - \hat{y}_{3i}|$$

...

$$\psi_{m-1} = |\hat{y}_{1i} - y_{mi}|$$

$$\psi_m = |\hat{y}_{2i} - \hat{y}_{3i}|$$

$$\psi_{m+1} = |\hat{y}_{2i} - \hat{y}_{4i}|$$

...

$$\psi_{2m-2} = |\hat{y}_{2i} - \hat{y}_{mi}|$$

$$\psi_{2m-1} = |\hat{y}_{3i} - \hat{y}_{4i}|$$

$$\psi_{2m} = |\hat{y}_{3i} - \hat{y}_{5i}|$$

...

$$\psi_{3m-3} = |\hat{y}_{3i} - \hat{y}_{mi}|$$

} observateur 1

} observateur 2

} observateur 3

$$\Psi_{(m-1)(m-1)} = \left| \hat{y}_{m-1,i} - \hat{y}_{m,i} \right| \quad \text{observateur } m-1$$

A partir de ces différences, on construit les produits:

$$\eta_1 = \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \dots \Psi_{m-1}$$

$$\eta_2 = \Psi_1 \Psi_m \Psi_{m+1} \dots \Psi_{2m-2}$$

$$\eta_3 = \Psi_2 \Psi_m \Psi_{3m-1} \dots \Psi_{3m-3}$$

⋮

$$\eta_m = \Psi_{m-1} \Psi_{2(m-1)} \dots \Psi_{(m-1)(m-1)}$$

si l'instrument 1 est en panne, les sorties estimées par l'observateur 1 sont fausses et par suite toutes les différences Ψ_k $k = 1, 2, \dots, m-1$ seront non nulles.

On aura alors $\eta_j = 0$ sauf pour $j=1$.

Quand il ya des perturbations (bruit dans les instruments, inexactitude des paramètres de l'observateur), les produits η_j seront tous non nuls et la détection ne sera pas bonne. Il convient donc de normaliser les produits η_j comme suit :

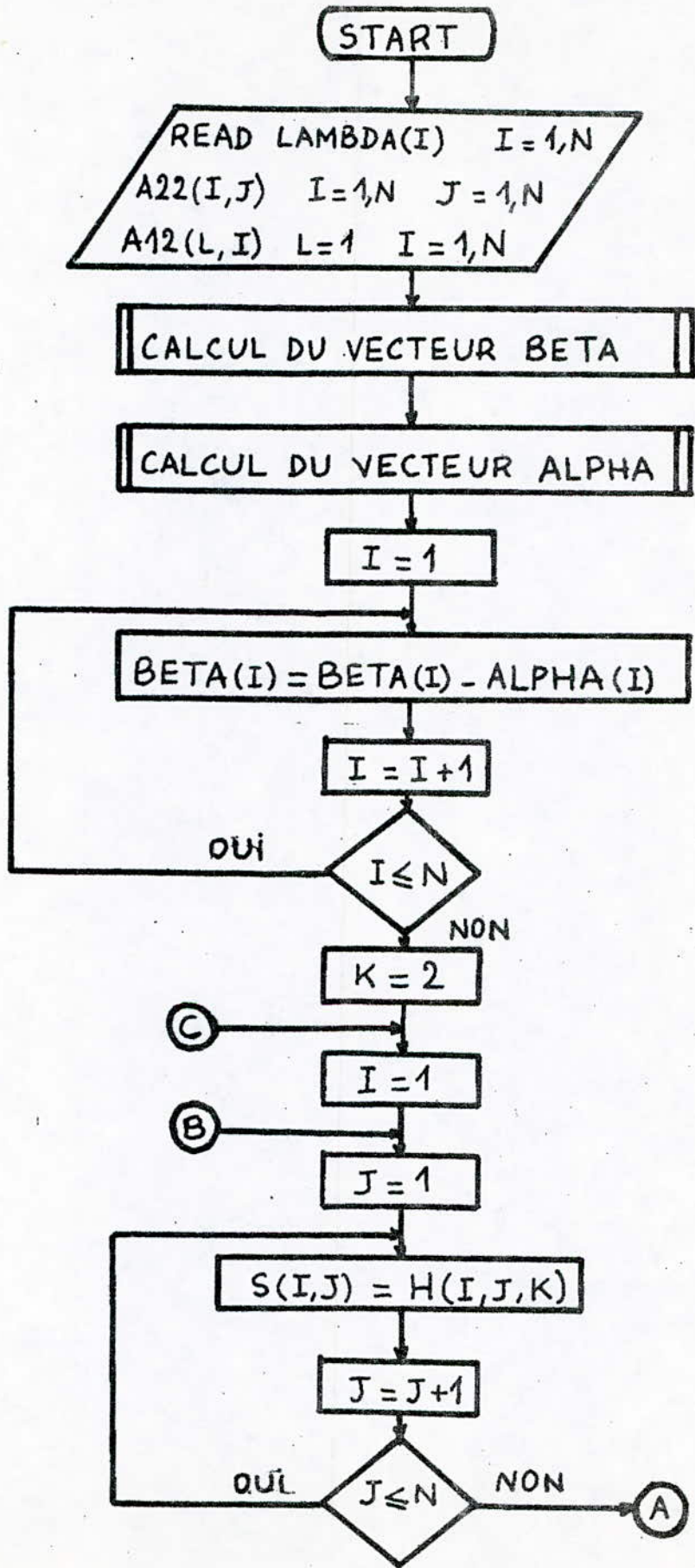
soit $\eta_H = \text{Max} \{ \eta_j \}_{j=1,2,\dots,m}$, les produits

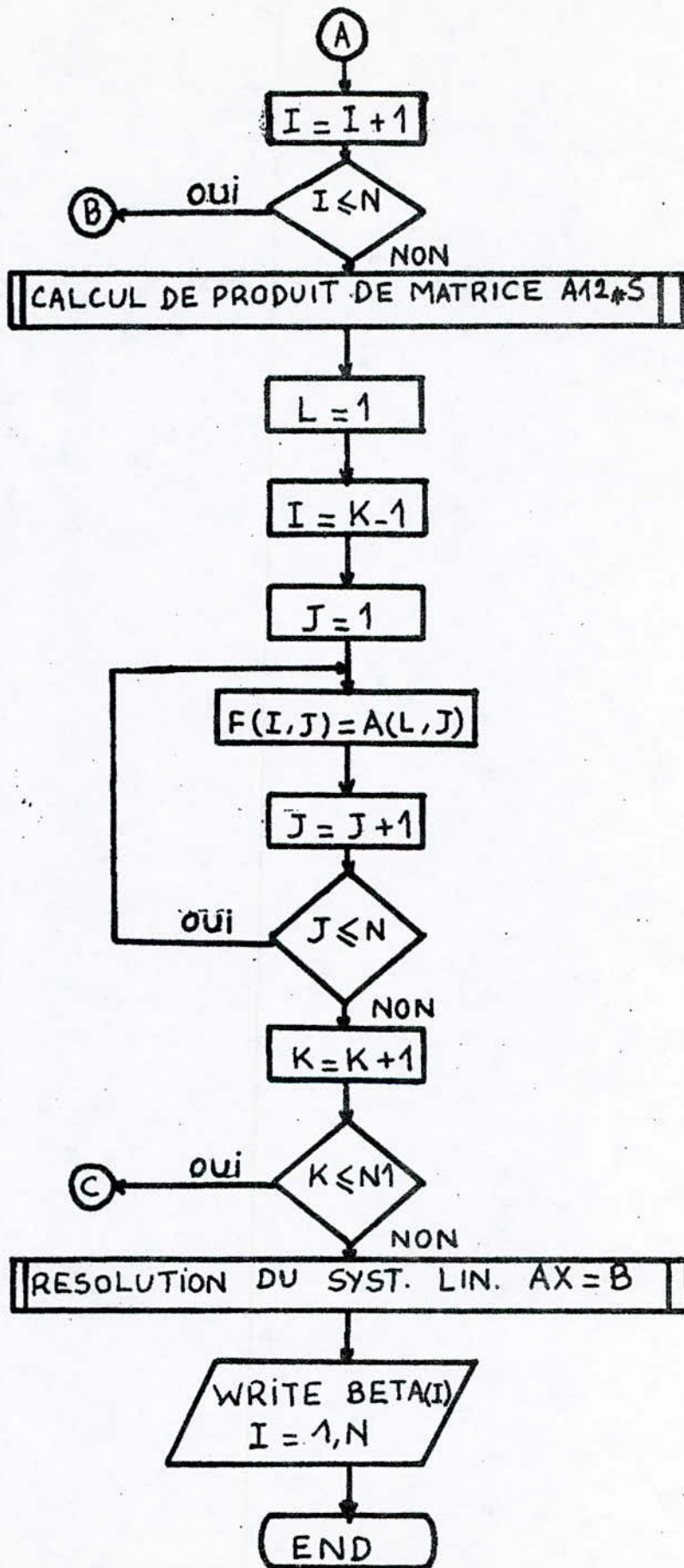
normalisés sont alors donnés par $\mu_j = \frac{\eta_j}{\eta_{\max}}$ $j=1, m$

A chaque fois, l'un des μ_j est égal à 1, tandis que les autres lui sont inférieurs. Si l'instrument j est en panne, μ_j serait égal à 1 et l'alarme pourrait être déclenchée. Cependant, si aucun des instruments n'est en panne, l'un des μ_j serait encore égal à 1 et on

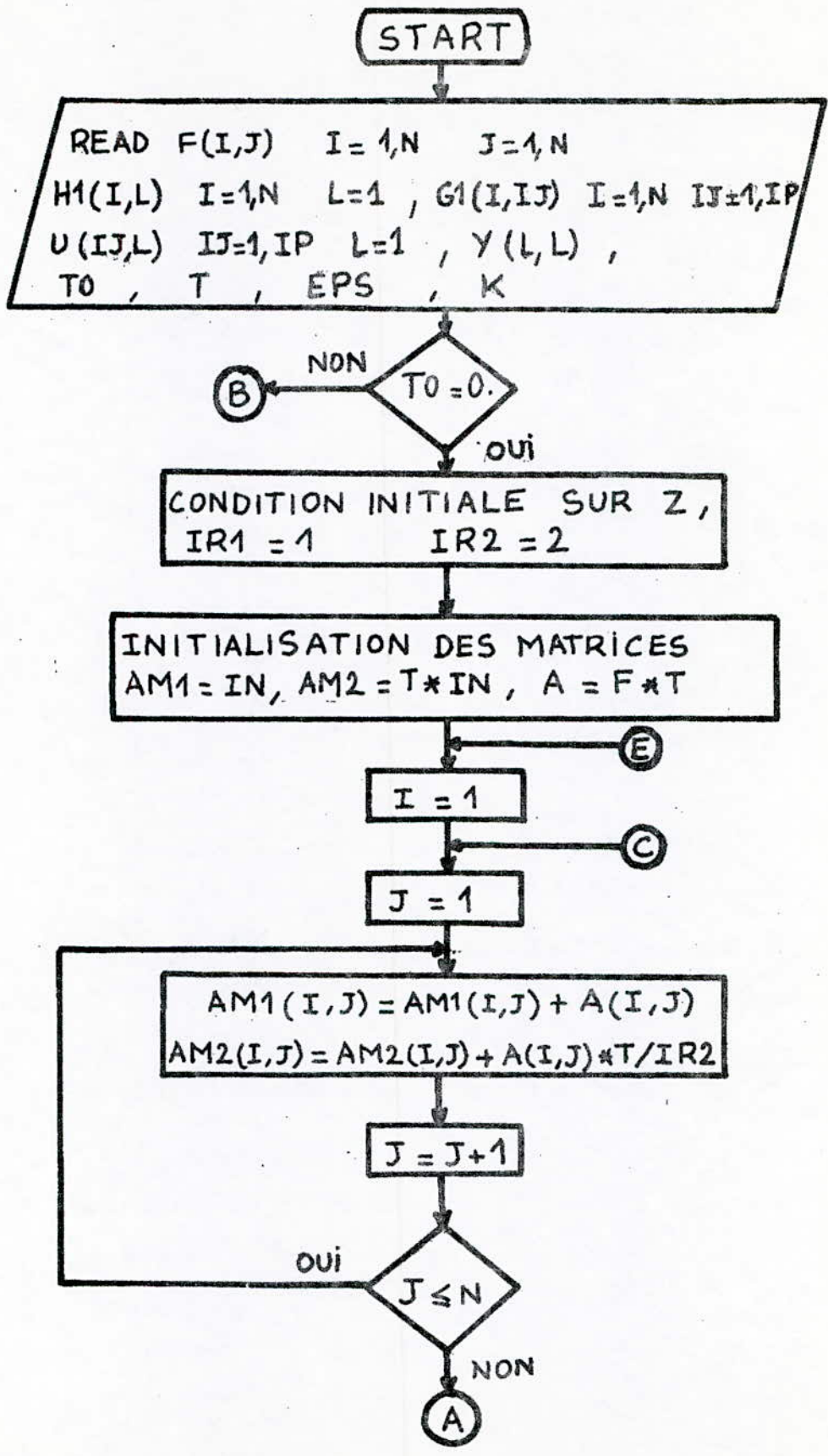
ne pourra pas identifier le type d'alarme (fausse ou bonne). Par conséquent si cette logique de détection consistait seulement à identifier le plus grand des μ_j et déclencher l'alarme correspondante, le système serait dans un état continu de fausses alarmes. Pour éviter cela, on comparera à un seuil le η_j correspondant au plus grand des μ_j et l'alarme ne sera déclenchée que si η_j dépasse le seuil fixé.

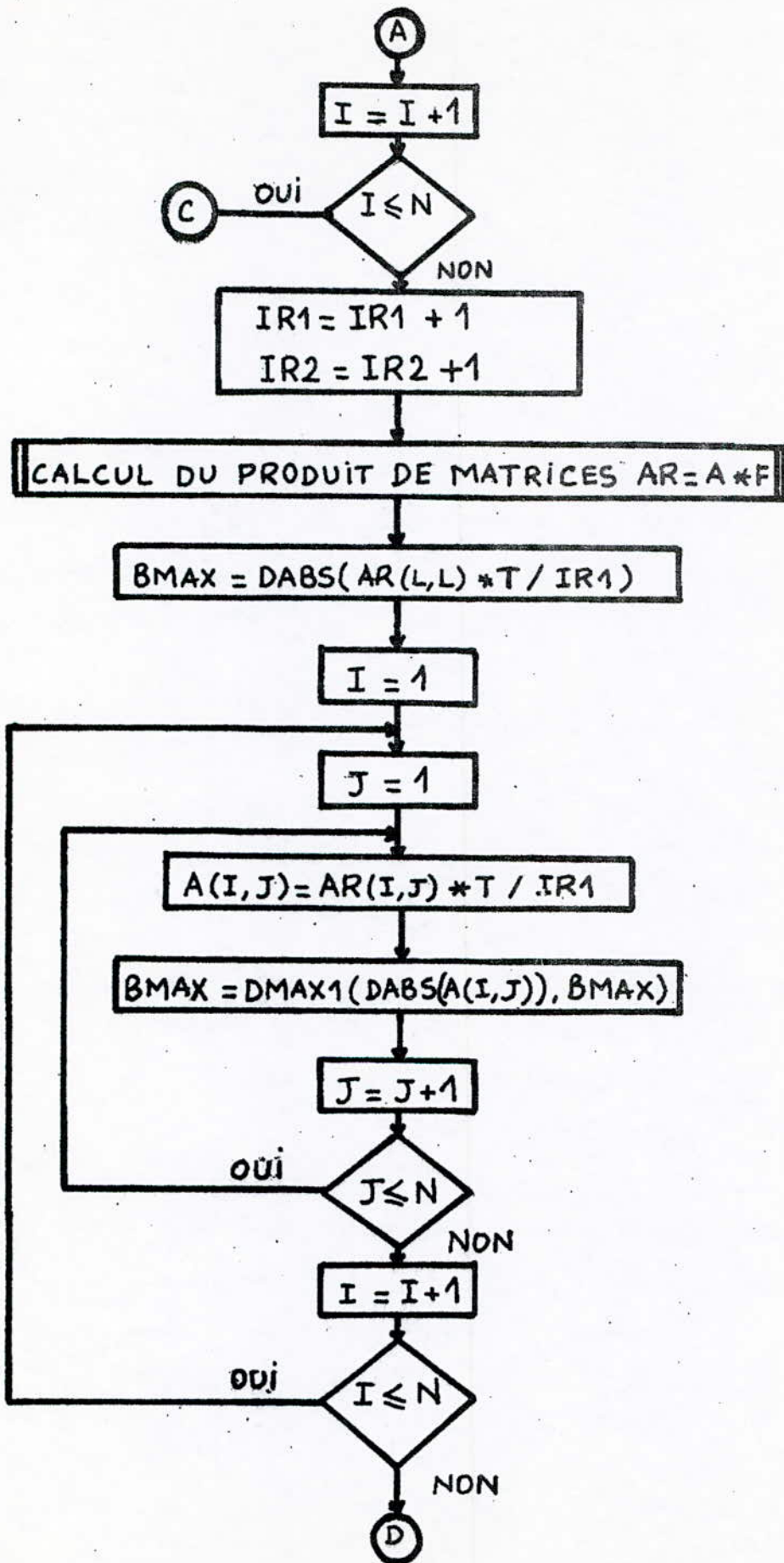
CALCUL DU VECTEUR L TEL QUE LES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE (A22-LA12) SOIENT ARBITRAIRES.

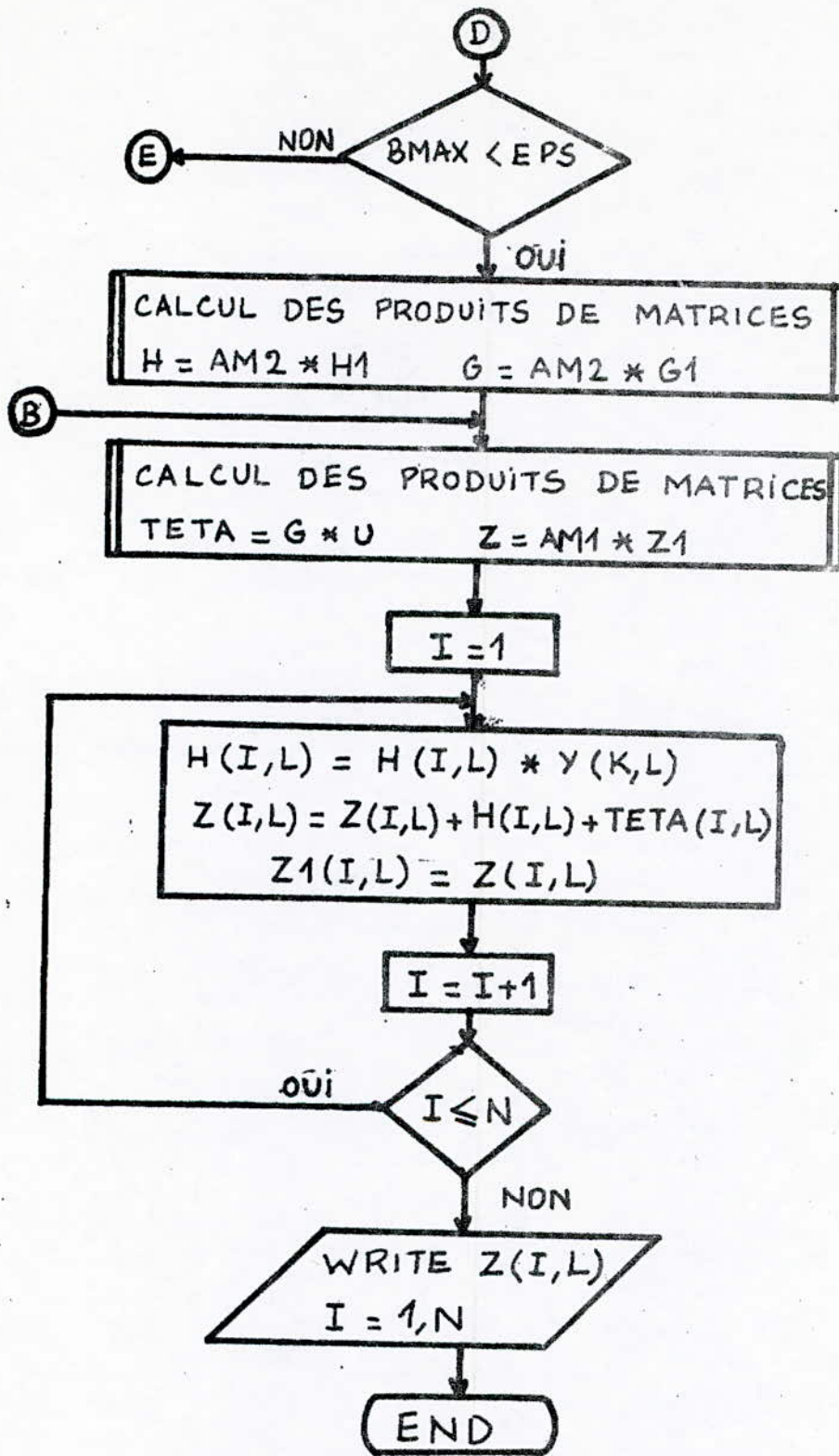




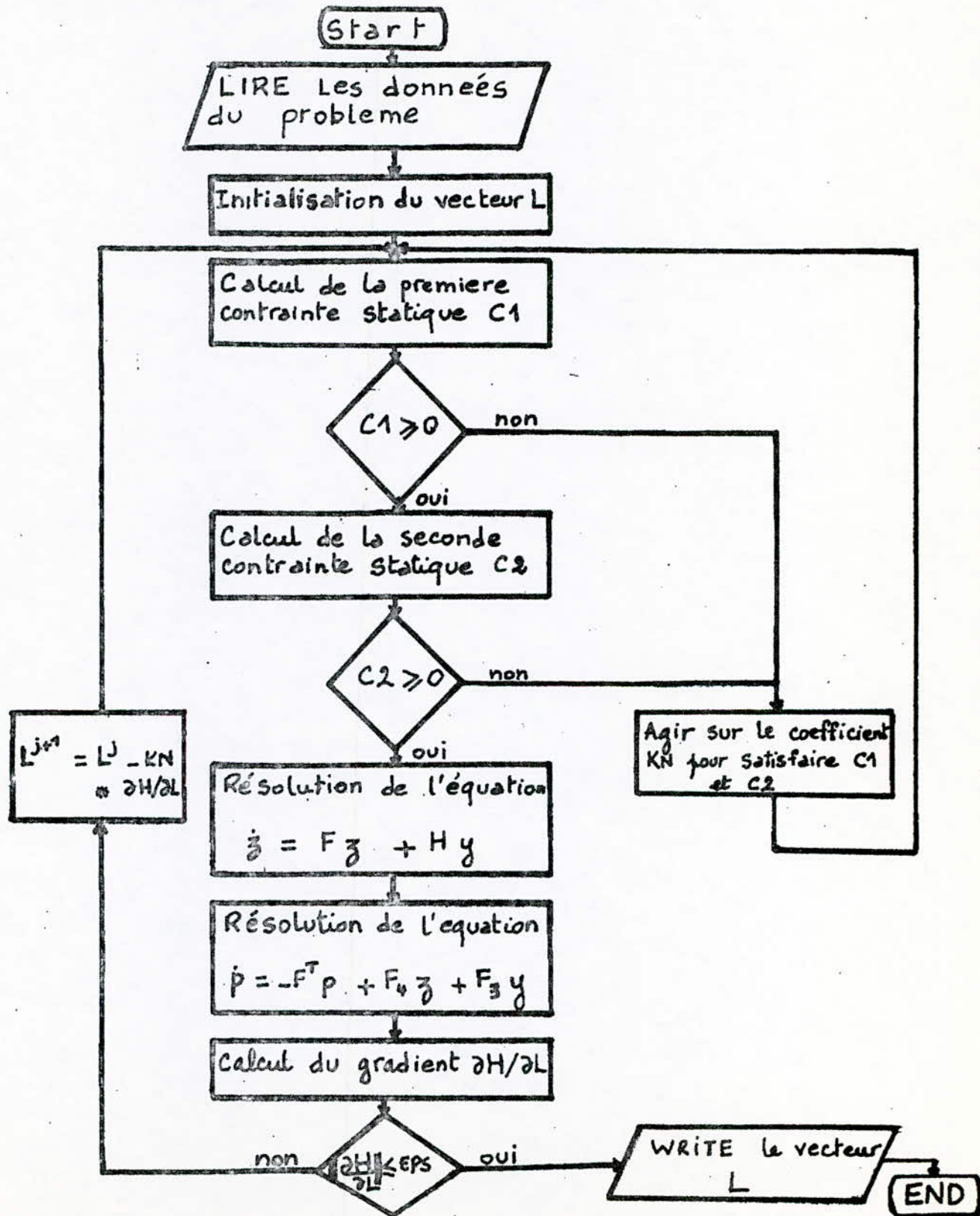
RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE
 $\dot{Z}(t) = FZ(t) + H1Y(t) + G1U(t)$







CALCUL DU VECTEUR L TEL QUE LA SENSIBILITE DE L'OBSERVATEUR AUX VARIATIONS DES PARAMETRES DU SYSTEME SOIT MINIMALE LES VALEURS PROPRES DE A22-LA12 SOIENT ARBITRAIRES.



C
C
C
C
C
C
C

CALCUL DU RANG DE LA MATRICE W EN UTILISANT L'ALGORITHME DE GRAM-SCHMIDT. LES VECTEURS LINEAIREMENT INDEPENDANTS DE W SONT STOCKES DANS NR. LES VARIABLES E, D, F, E1, E2 SONT DES TABLEAUX PROPRES A LA SUBROUTINE. EPS EST LE SEUIL AU DESSOUS DU QUEL E1 EST CONSIDERE COMME NULL.

```

SUBROUTINE INDV(N,MN,W,E,WR,D,P,E1,E2,EPS)
COMMON IS
DOUBLE PRECISION W(MN,MN),E(N,MN),WR(N,MN),D(N),P(N),E1(N),E2(N,MN)
DOUBLE PRECISION SOM,SOM1,EPS
SOM1=0.D00
NR=1
J=1
DO 1 I=1,N
WR(I,1)=W(I,J)
E(I,J)=W(I,J)
SOM1=SOM1+E(I,J)*E(I,J)
1 CONTINUE
DO 12 I=1,N
E2(I,J)=E(I,J)/SOM1
12 CONTINUE
DO 2 J=2,MN
J1=J-1
DO 17 I=1,N
17 D(I)=0.D00
DO 3 L=1,J1
SOM=0.D00
DO 4 I=1,N
SOM=SOM+W(I,J)*E(I,L)
4 CONTINUE
DO 5 I=1,N
P(I)=SOM*E2(I,L)
5 CONTINUE
DO 6 I=1,N
D(I)=D(I)+P(I)
6 CONTINUE
3 CONTINUE
DO 7 I=1,N
E1(I)=W(I,J)-D(I)
7 CONTINUE
DO 8 I=1,N
IF(DABS(E1(I)).GT.EPS) GO TO 10
8 CONTINUE
DO 13 I=1,N
13 E2(J,J)=0.D00
GO TO 30
10 NR=NR+1
SOM1=0.D00
DO 9 I=1,N
WR(I,NR)=W(I,J)
SOM1=SOM1+E1(I)*E1(I)
9 CONTINUE
DO 14 I=1,N
E2(I,J)=E1(I)/SOM1
14 CONTINUE
30 DO 18 I=1,N
18 E(I,J)=E1(I)
2 CONTINUE
RETURN
END

```



```

C
C
C
CALCUL DU PRODUIT DE DEUX MATRICES A(N,M) ET C(M,K1). LE RESULTAT S
E TROUVE DANS LA MATRICE F(N,K1).
SUBROUTINE FROMAT (N,M,K1,A,C,F)
DOUBLE PRECISION A(N,M),C(M,K1),F(N,K1),SOM
DO 1 J=1,K1
DO 1 I=1,N
SOM=0.0
DO 2 K=1,M
2 SOM=SOM+A(I,K)*C(K,J)
F(I,J)=SOM
1 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C
C
CONSTRUCTION D'UNE MATRICE RM NON SINGULIERE .

```

```

SUBROUTINE MATM(N,N1,V,D,RM)
DOUBLE PRECISION D(N1,N),V(N),RM(N,N)
K=1
DO 1 J=1,N
RM(K,J)=V(J)
1 CONTINUE
J=1
DO 5 I=1,N1
5 D(I,J)=0.D00
DO 6 J=2,N
J1=J-1
DO 6 I=1,N1
IF(I.EQ.J1) GO TO 20
D(I,J)=0.D00
GO TO 6
20 D(I,J)=1.D00
6 CONTINUE
DO 2 J=1,N
IF(RM(K,J))10,2,10
2 CONTINUE
10 DO 3 J1=1,N
DO 4 K=2,M
K1=K-1
RM(K,J)=D(K1,J1)
4 CONTINUE
J=J+1
IF(J=N)12,12,13
12 GOTO 3
13 J=1
3 CONTINUE
RETURN
END

```


C
C CALCUL DES COEFFICIENTS D'UN POLYNOME PN(S) CONNAISSANT SES RACINE
C LE VECTEUR LAMBDA CONTIENT CELLES CI PRECEDEES D'UN SIGNE MOINS. LE
C S COEFFICIENTS DE PN(S) SONT RANGES DANS BETA SUIVANT LES PUISSANC
C ES CROISSANTES.

```
      SUBROUTINE COEFF(N,LAMBDA,BETA)
      DOUBLE PRECISION LAMBDA(N),BETA(N)
      J=1
      I=J
      BETA(I)=1.D00
      BETA(I)=BETA(I)*LAMBDA(J)
      DO 3 J=2,N
      I=J
      BETA(I)=1.D00
30    I1=I-1
      BETA(I)=BETA(I)*LAMBDA(J)+BETA(I1)
      I=I-1
      IF(I-2) 10,15,15
15    GO TO 30
10    I=1
      BETA(I)=BETA(I)*LAMBDA(J)
3    CONTINUE
      RETURN
      END
```

C
C CALCUL DES COEFFICIENTS DU POLYNOME CARACTERISTIQUE D'UNE MATRICE
C A REELLE QUELCONQUE EN UTILISANT L'ALGORITHME DE LEVERBIER. LES COE
C FFICIENTS SONT RANGES DANS ALPHA SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTE
C S, IN, S, F, H, TR SONT DES VARIABLES PROPRES A LA SUBROUTINE.

```
      SUBROUTINE COEFFP(N,N1,A,IN,S,F,H,ALPHA)
      DOUBLE PRECISION IN(N,N),A(N,N),S(N,N),F(N,N),H(N,N,N1),ALPHA(N),T
      *R
      DO 1J=1,N
      DO 1 I=1,N
      IF(I-J) 15,10,15
10    IN(I,J)=1.D00
      GO TO 1
15    IN(I,J)=0.D00
1    CONTINUE
      K=N1
      DO 2 J=1,N
      DO 2 I=1,N
      H(I,J,K)=IN(I,J)
      S(I,J)=IN(I,J)
2    CONTINUE
      DO 3 J=1,N
      I=N+1-J
      CALL PROMAT(N,N,N,A,S,F)
      TR=0.D00
      DO 4 L=1,N
      TR=TR+F(L,L)
4    CONTINUE
      ALPHA(I)=-TR/J
      K=I
      DO 5 L=1,N
      DO 5 IL=1,N
      S(IL,L)=ALPHA(I)*IN(IL,L)+F(IL,L)
      H(IL,L,K)=S(IL,L)
5    CONTINUE
3    CONTINUE
      RETURN
      END
```

```

C
C   RECHERCHE DU VECTEUR L TEL QUE LES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE (A
C   22-LA12) SOIENT ARBITRAIRES.
C
C   SUBROUTINE CALVEL(N,LAMBDA,BETA,N1,A22,IN,S,F,H,ALPHA,M,A,A12,KOD,
12 EPS)
C   DOUBLE PRECISION BETA(N),A22(N,N),S(N,N),F(N,I),H(N,N,N1),ALPHA(N)
C   *,A12(M,N),A(M,N),IN(N,N),LAMBDA(N),EPS
C
C   CALCUL DES COEFFICIENTS D'UN POLYNOME PN(S) CONNAISSANT SES RACINES
C
C   CALL COEFF(N,LAMBDA,BETA)
C
C   CALCUL DES COEFFICIENTS D'UN POLYNOME CARACTERISTIQUE D'UNE MATRICE
C
C   CALL COEFFP(N,N1,A22,IN,S,F,H,ALPHA)
C
C   CONSTRUCTION DU VECTEUR B STOCKE DANS BETA
C
C   DO 12 I=1,N
12 BETA(I)=BETA(I)-ALPHA(I)
C
C   CONSTRUCTION DE LA MATRICE F
C
C   DO 13 K=2,N1
C   DO 15 I=1,N
C   DO 15 J=1,N
C   S(I,J)=H(I,J,K)
15 CONTINUE
C   CALL PROMAT(M,N,N,A12,S,A)
C   L=1
C   I=K-1
C   DO 14 J=1,N
C   F(I,J)=A(L,J)
14 CONTINUE
13 CONTINUE
C
C   RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE AX=B
C
C   CALL DRESOL(F,BETA,N,KOD,EPS)
C   RETURN
C   END

```

C RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $Z' = F \cdot Z + H \cdot Y + C \cdot U$ EN UTILISAN
 C T LE DEVELOPPEMENT EN SERIE DE LA MATRICE $\exp(FT)$. LA SOLUTION DE C
 C ETTE EQUATION SE TROUVE DANS Z.EPS EST LE SEUIL AU DESSOUS DUQUEL
 C LES TERMES DE LA SERIE SONT CONSIDERES COMME NULS.

C SUBROUTINE SOLZED(N,L,M,IP,F,G1,H1,G,H,U,Y,Z1,Z,AM1,AM2,A,AR,TETA,
 *T,TO,EPS,K)
 C DOUBLE PRECISION F(N,N),G(N,IP),H(N,L),U(IP,L),Y(N,L),Z(N,L),AM1(N
 *N),AM2(N,N),A(N,N),TETA(N,L),G1(N,IP),H1(N,L),Z1(N,L),AR(N,N)
 C DOUBLE PRECISION BMAX,EPS

C INITIALISATION DES MATRICES AM1 ET AM2

C IF (TO.EQ.0.) GO TO 11
 C GO TO 12
 11 DO 1 I=1,M
 DO 1 J=1,M
 IF (I-J) 20,81,80
 81 AM1(I,J)=1.0
 AM2(I,J)=T
 GO TO 1
 80 AM1(I,J)=0.0
 AM2(I,J)=0.0
 1 CONTINUE

C CALCUL DE LA MATRICE $\exp(F \cdot T)$

C DO 2 I=1,M
 C DO 2 J=1,M
 C A(I,J)=F(I,J)*T
 2 CONTINUE
 IR1=1
 IR2=2
 30 DO 3 I=1,M
 DO 3 J=1,M
 AM1(I,J)=AM1(I,J)+A(I,J)
 AM2(I,J)=AM2(I,J)+A(I,J)*T/IR2
 3 CONTINUE
 IR1=IR1+1
 IR2=IR2+1
 CALL PRGMAT(N,N,N,A,F,AR)
 BMAX=CMAX(CABS(AR(L,L)*T/IR1))
 DO 4 I=1,M
 DO 4 J=1,M
 A(I,J)=AR(I,J)*T/IR1
 BMAX=CMAX1(CABS(A(I,J)),BMAX)
 4 CONTINUE
 IF (BMAX.LT.EPS) GO TO 10
 GO TO 30
 10 CALL PRGMAT(N,N,L,AM2,H1,H)
 CALL PRGMAT(N,N,IP,AM2,G1,G)
 12 CALL PRGMAT(N,IP,L,G,U,TETA)
 CALL PRGMAT(N,N,L,AM1,Z1,Z)
 DO 7 I=1,M
 H1(I,L)=F(I,L)*Y(K,L)
 Z(I,L)=Z(I,L)+H1(I,L)+TETA(I,L)
 Z1(I,L)=Z(I,L)
 7 CONTINUE
 RETURN
 END

C
 C RECHERCHE DU VECTEUR L TEL QUE LA SENSIBILITE DE LA SORTIE DE L'OP
 C SERVATEUR AUX VARIATIONS DES PARAMETRES DU SYSTEME SOIT MINIMISEE.
 C LES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE (A22-LA12) SOIENT ARBITRAIRES.
 C

SUBROUTINE SENSIT(F,Y1,G,SIGMA,AR,V,SIGMA1,SIGMA22,SIGMA21,SIGMA12,H1
 *,F,C1,Z1,7,AM1,AM2,AB,AC,TETA,S,IN,P1,P2)
 COMMON L,M1,N1,M,L,T,J,EPS,KN1,INF,SLP,A,Y,C,POND,POND1,VECTL,A12
 COMMON A11,A22,DA,AT1,AT2,RM,PM1,CT1,CT,C1,AD,AF,C11,PACRM,A21
 DOUBLE PRECISION A(4,4),X(4,1),C(4,4),POND(4,4),POND1(4,4),VECTL(3
 *,1),A12(1,3),A11(1,1),A22(3,3),DA(4,4),AT1(4,4),AT2(4,4),RM(4,4)
 DOUBLE PRECISION PM1(4,4),CT1(4,4),CT(4,4),C1(4,4),H(4,1),Y1(4,1),
 *IN(3,3),P1(3,1),P2(3,1),SIGMA22(3,3),SIGMA21(3,1),SIGMA12(1,3)
 DOUBLE PRECISION H1(3,1),F(3,3),G1(3,3),Z1(3,1),7(3,1),C11(3,1),RM
 *CRM(16),BMAX,DMAX,DMIN,TR,INF,SUP,EPS,A21(3,1)
 DOUBLE PRECISION AR(3,3),AC(3,3),AD(3,3),AF(3,3),TETA(3,1),S(3,3),
 *G(4,4),SIGMA(4,1),AR(4,4),V(4,1),SIGMA1(4,1),AM1(3,3),AM2(3,3)

C
 C CALCUL DE LA DERIVEE DE LA MATRICE A PAR RAPPORT A CHACUN DE SES
 C ELEMENTS.
 C

DO 94 J2=1,I
 K1=0
 DO 95 J1=1,I
 CALL DERIV(I,DA,J1,J2)
 DO 96 I=1,M
 F(I,L)=0.0
 SIGMA(I,L)=0.0

96 CONTINUE

C
 C RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DONNANT LES VARIATIONS DE
 C L'ETAT DU SYSTEME PAR RAPPORT AUX VARIATIONS DE CHACUN DES ELEMENT
 C S DE A
 C

T0=0.
 CALL SOLZED(M,L,M,N,A,DA,F,G,H,X,Y1,SIGMA,F,AT1,AT2,PM,AR,V,T,T0,F
 *PS,J)

C
 C CALCUL DE S VARIATIONS DE LA SORTIE DU SYSTEME PAR RAPPORT AUX VAR
 C IATIONS DE CHACUN DES ELEMENTS DE A.
 C

CALL PROMAT(M,N,L,C,SIGMA,Y1)
 CALL PROMAT(M,N,L,POND,Y1,SIGMA1)

C
 C CALCUL DE LA NORME I POUR CHAQUE PARAMETRE.
 C

K2=K1+J1
 RNDOM(K2)=0.
 DO 97 I=1,M
 97 RNDOM(K2)=RNDOM(K2)+I*SIGMA1(I,L)*Y1(I,L)
 95 CONTINUE
 K1=K1+N
 94 CONTINUE
 BMAX=DABS(RNDOM(L))
 DO 98 I=1,N1
 IF(DABS(RNDOM(I)).GT.BMAX) GO TO 205
 10=I-1
 GO TO 98

205 10=T

BMAX=DABS(RFORM(I0))

98 CONTINUE

C IDENTIFICATION DU PARAMETRE CRITIQUE.

C
C
C
REST=I0-INT(I0/N)*N
IF(REST.EQ.0.0) GO TO 206
J2=INT(I0/N)+1
J1=INT(REST)
GO TO 207

206 J2=I0/N
J1=I

207 CALL DERIV(N,DA,J1,J2)

C
C
C
C
C
C
C
C
CALCUL DES VARIATIONS DE L'ETAT DU SYSTEME PAR RAPPORT AUX VARIATIONS DU PARAMETRE CRITIQUE

CALL SOLZED(N,L,M,N,A,DA,H,G,H,X,Y1,SIGMA,F,AT1,AT2,RM,AF,V,T,TO,E
*FS,J)
CALL PROMAT(N,N,L,C,SIGMA,SIGMA1)

C
C
C
C
C
C
C
C
CALCUL DE LA MATRICE SIGMA ET DE SES PARTITICES

CALL PART(N,N1,L,M,C,RM1,POND1,CT1,CT,C1,AT1,SIGM22,SIGM21,SIGM12)

C
C
C
C
C
C
C
C
CALCUL DE DMAX ET DMIN.

TR=0.
DO 99 I=1,M1
99 TR=TR+A22(I,I)
DMAX=TR-M1*INF
DMIN=TR-M1*SUP

C
C
C
C
C
C
C
C
TRANSPOSITION DES MATRICES SIGM12,SIGM22,A22

DO 35 I=1,M1
CI1(I,L)=SIGM12(L,I)
SIGM21(I,L)=SIGM21(I,L)+CI1(I,L)
DO 35 IJ=1,M1
S(I,IJ)=SIGM22(IJ,I)
IF(I,IJ)=A22(IJ,I)

35 CONTINUE
DO 36 I=1,M1
DO 36 IJ=1,M1
36 SIGM22(I,IJ)=SIGM22(I,IJ)+S(I,IJ)

C
C
C
C
C
C
C
C
TEST DES CONTRAINTES STATIQUES

70 DO 46 M2=1,7
CALL PROMAT(N1,L,M1,VECTL,A12,F)
TR=0.0
DO 26 I=1,M1
26 TR=TR+F(I,I)
DMAX=DMAX-TR
IF(DMAX.LT.0.0) GO TO 209
DMIN=TR-DMIN
IF(DMIN.GE.0.0) GO TO 208

209 KN=KN1*2**M2
DO 45 I=1,M1
45 VECTL(I,L)=VECTL(I,L)-KN*P2(I,L)


```

46 CONTINUE
STOP
C
C
C CONSTRUCTION DES MATRICES F ET H1
208 DO 37 I=1,M1
DO 37 IJ=1,M1
37 F(I,IJ)=A22(I,IJ)-F(I,IJ)
CALL PROMAT(N1,M1,L,F,VECTL,F1)
DO 38 I=1,M1
38 H1(I,L)=F1(I,L)+A21(I,L)-VECTL(I,L)*A11(L,L)
C
C RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DONNANT LES VARIATIONS DE
C Z PAR RAPPORT AUX VARIATIONS DU PARAMETRE CRITIQUE
C
DO 39 I=1,M1
Z1(I,L)=0.
DO 39 IJ=1,M1
G1(I,IJ)=0.0
AD(I,IJ)=0.0
39 CONTINUE
CALL SOLZED(N1,L,M,N1,F,G1,H1,AD,P1,Y1,SIGMA1,Z1,Z,AM1,AM2,AB,AC,
*ETA,T,T0,EPS,J)
C
C CONSTRUCTION DES MATRICES DE L'EQUATION DONNANT F
C
CALL PROMAT(N1,M1,L,SIGM22,VECTL,C11)
DO 40 I=1,M1
C11(I,L)=C11(I,L)+SIGM21(I,L)
P1(I,L)=0.0
DO 40 IJ=1,M1
S(I,IJ)=-F(IJ,I)
40 CONTINUE
C
C RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DONNANT LE COEFFAT F
C
CALL SOLZED(N1,L,M,N1,S,SIGM22,C11,G1,Z,Z1,SIGMA1,P1,P2,AB,AC,AD,
*F,TETA,T,T0,EPS,J)
C
C CALCUL DES MATRICES F1(P),F2(P)
C
CALL PROMAT(N1,M1,L,SIGM22,Z1,TETA)
CALL PROMAT(N1,M1,L,IN,P1,P2)
CALL PROMAT(N1,L,M1,P1,A12,AD)
CALL PROMAT(N1,M1,L,AD,Z1,Z)
DO 41 I=1,M1
DO 41 IJ=1,M1
P2(I,L)=SIGMA1(J,L)*SIGMA1(J,L)*SIGM21(I,L)+SIGMA1(J,L)*TETA(I,L)-
*P2(I,L)+P1(I,L)*A11(L,L)+Z(I,L)
AF(I,IJ)=SIGM22(I,IJ)*SIGMA1(J,L)*SIGMA1(J,L)+(AD(I,IJ)+AD(IJ,I))*
*SIGMA1(J,L)
41 CONTINUE
CALL PROMAT(N1,M1,L,AF,VECTL,Z)
C
C CALCUL DU GRADIENT
C
BMAX=DABS(P2(L,L)+Z(L,L))
DO 42 I=1,M1
P2(I,L)=P2(I,L)+Z(I,L)
BMAX=DMAX1(DMAX,DABS(P2(I,L)))

```



```

42 CONTINUE
   IF (DMAX.LE.EPS) GO TO 43

```

C
C
C

```

   CALCUL DU NOUVEAU VECTL

```

```

   DO 44 I=1,N1
44  VECTL(I,L)=VECTL(I,L)-KN*P2(I,L)
   GO TO 70
43 RETURN
   END

```

C
C
C
C

CALCUL DE LA DERIVEE D'UNE MATRICE PAR RAPPORT A CHACUN DE SES ELE-
MENTS.CELX CI ETANT STOCKES DANS UN VECTEUR D'ORDRE N1.

```

SUBROUTINE DERIV(N,DA,J1,J2)
  DOUBLE PRECISION DA(N,N)
  DO 96 I=1,N
  DO 96 J=1,N
  IF (I.NE.J1) GO TO 10
  IF (J.NE.J2) GO TO 10
  DA(I,J)=1.0
  GO TO 96
10 DA(I,J)=0.0
96 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE PART(N,N1,L,M,C,RM1,POND1,CT1,CT,C1,AT1,SIGM22,SIGM21,S
*IGM12)
  DOUBLE PRECISION C(M,N),RM1(N,N),POND1(M,M),CT1(N,N),CT(N,M),C1(M,
*N),AT1(L,L),SIGM22(N1,N1),SIGM21(N1,L),SIGM12(L,N1)

```

C
C
C

CALCUL DE SIGMA

```

  CALL PROMAT(M,N,N,C,RM1,C1)
  DO 26 I=1,M
  DO 26 IJ=1,L
26  CT1(I,IJ)=C1(I,IJ)
  CALL PROMAT(N,M,M,CT1,POND1,CT)
  CALL PROMAT(N,M,N,CT,C1,AT1)

```

C
C
C

CONSTRUCTION DES MATRICES SIGM12,SIGM21,SIGM22

```

  DO 33 IJ=2,L
  I=IJ-1
  SIGM12(L,I)=AT1(L,IJ)
  SIGM21(I,I)=AT1(IJ,L)
33 CONTINUE
  DO 34 I=2,N
  DO 34 IJ=2,N
  KJ=IJ-1
  KI=I-1
34 SIGM22(KI,KJ)=AT1(I,IJ)
  RETURN
  END

```

C
C
C
C
C
C
C

SUBROUTINE DE SIMULATION DE PANNES. Y EST LE VECTEUR DE SORTIE DU SYSTEME, YM LE VECTEUR DE SORTIE MESURE, ER1 UNE MATRICE CARACTERISANT LES INSTRUMENTS, DER UN VECTEUR PERMETTANT D'INTRODUIRE UNE ERREUR AU NIVEAU D'UN INSTRUMENT SPECIFIE, TEST EST UN VECTEUR SPECIFIANT LES INSTRUMENTS EN FAUTE.

SUBROUTINE SIMUL(Y, YM, ER1, ER2, DER, TEST, L, M)
DOUBLE PRECISION Y(M, L), YM(M, L), ER1(M, M), ER2(M, M), DER(M, L), TEST(M, *L)

```
DO 1 I=1, M
IF (TEST(I, L).NE.1.0) GO TO 10
DO 2 J=1, M
IF (I.EQ.J) GO TO 20
ER2(I, J)=ER1(I, J)
GO TO 2
20 ER2(I, J)=ER1(I, J)+DER(I, L)
2 CONTINUE
GO TO 1
10 DO 3 J=1, M
ER2(I, J)=ER1(I, J)
3 CONTINUE
1 CONTINUE
CALL PROMAT(M, M, L, ER2, Y, YM)
RETURN
END
```

C
C
C
C
C
C
C

LOGIQUE DE DETECTION D'INSTRUMENTS EN FAUTE.
Y EST LE VECTEUR DE SORTIE ESTIME, YM LE VECTEUR DE SORTIE MESURE. ON ASSOCIE A CHAQUE INSTRUMENT UNE FONCTION DE DETECTION DELTA ET UNE VALEUR SEUIL. UNE ALARME SERA DECLENCHEE SI DELTA DEPASSE LE SEUIL.

SUBROUTINE LOGIC(J, L, M, Y, YM, DELTAY, SEUIL)
DOUBLE PRECISION Y(M, L), YM(M, L), DELTAY(M, L), SEUIL(M, L), DELTA

```
DO 1 I=1, M
1 DELTAY(I, L)=YM(I, L)-Y(I, L)
DELTA=1.0
DO 2 I=1, M
IF (I.EQ.J) GO TO 2
DELTA=ABS(DELTA*DELTAY(I, L))
2 CONTINUE
IF (DELTA.LE.SEUIL(J, L)) GO TO 10
WRITE(108, 17) J
17 FORMAT(50X, I1, 2X, 'INSTRUMENT EN PANNE')
10 RETURN
1 END
```


SIMULATION

Le test du programme se fera sur un modèle de bateau hydrofoil. Les équations du mouvement des axes de ce dernier, linéarisés autour d'un point nominal, sont :

$$\dot{p} = -11p - 0.8\phi - 2.4R + 29v + 5.7\delta_p - 5.7\delta_s - 10\delta_r$$

$$\dot{\phi} = p$$

$$\dot{R} = -0.48p + 0.041\phi - 4.8R + 1.7v - 0.07\delta_p + 0.07\delta_s + 3.2\delta_r$$

$$\dot{v} = 0.9p + 0.56\phi - R - 3.4v + 1.2\delta_r$$

$$a_s = 0.23\dot{p}$$

$$\phi = \phi$$

$$R = R$$

$$a_L = \dot{v} + 3\dot{R}$$

où p et R sont les vitesses angulaires des axes du bateau (deg/s)

ϕ : déviation des axes (deg)

v : composante tangentielle de la vitesse du bateau (ft/s)

$\delta_p, \delta_s, \delta_r$ sont respectivement les déflexions du fort, du tribord et du gouvernail (deg).

a_L : accélération tangentielle à la position du bateau (ft/s²)

a_s : accélération normale à la position du flanc du tribord (ft/s²)

En combinant ces équations et en posant $X = [p \ \phi \ R \ v]^T$,

$$Y1 = [a_s \ \phi \ R \ a_L]^T, \quad u = [\delta_p \ \delta_s \ \delta_r]^T$$

On arrive à une représentation sous forme d'équations d'état

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases} \quad \text{qui peut se ramener à} \quad \begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases}$$

1. Test du programme en absence de pannes

La première partie du programme vérifie l'observabilité du système complet ainsi que l'observabilité des sous-systèmes, construit la matrice M et détermine le vecteur L pour chaque observateur.

Les résultats de cette première partie sont résumés dans un tableau (voir page 64).

La seconde partie s'exécute en temps réel et consiste à déterminer les sorties estimées par chaque observateur.

Elle calcule en chaque période T la solution Z de l'équation de l'observateur $\dot{Z} = FZ + Hy_i + Gu$, la valeur de l'estimateur $\hat{W} = Z + Ly_i$, les états $\bar{X} = \begin{bmatrix} X \\ \hat{W} \end{bmatrix}$, $\hat{X} = M^{-1}\bar{X}$ et la sortie estimée $\hat{Y} = C\hat{X}$.

Ces calculs nécessitent la connaissance des sorties mesurées y_i que l'on obtiendra en résolvant le système

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$$

pour une entrée $u(t) = \begin{bmatrix} -u_s(t) & u_s(t) & 0 \end{bmatrix}^T + KX(t)$

(voir fig 4.1)

Les résultats de cette seconde partie sont donnés sous

forme de courbes (voir figures 4.2, 4.3, 4.4, 4.5) représentant chaque sortie estimée par les 4 observateurs. Les résultats montrent que la convergence des observateurs est bonne. En agissant sur les valeurs propres de ces derniers, nous avons pu obtenir une bonne estimation de la sortie, ceci après un transitoire dont la durée varie de 1 à 4 secondes suivant les observateurs.

A quelques iterations du transitoire, l'erreur relative d'estimation s'évalue à 1%, elle est pratiquement nulle (10^{-5} %) pour les dernières.

2. Test du programme en présence de pannes.

La panne d'un instrument sera ici simulée par une erreur que l'on introduira volontairement au niveau d'une sortie spécifiée y_i .

Nous essayerons de choisir des seuils pour les fonctions Δ_i de façon à ce qu'il n'y ait pas mauvaise détection durant le temps de convergence des observateurs. Nous tolérerons une erreur relative d'estimation maximale de 20% pour les sorties y_1 ,

y_3 et y_4

$$\Delta_1 = \frac{|(y_{21} - \hat{y}_{21})(y_{31} - \hat{y}_{31})(y_{41} - \hat{y}_{41})|}{|y_{21} - \hat{y}_{21}|} \leq 20\% |y_{31}| 20\% |y_{41}|$$

$$\text{SEUIL 1} = 20\% |y_{31}| 20\% |y_{41}| |y_{21} - \hat{y}_{21}|$$

$$\Delta_2 = |(y_{11} - \hat{y}_{11})(y_{31} - \hat{y}_{31})(y_{41} - \hat{y}_{41})| \leq 3\% |y_{41}| 4\% |y_{31}| 5\% |y_{11}|$$

$$\text{SEUIL 2} = 3\% |Y_{42}| \cdot 4\% |Y_{32}| \cdot 5\% |Y_{12}|$$

$$\Delta_3 = |(Y_{12} - \hat{Y}_{13})(Y_{22} - \hat{Y}_{23})(Y_{42} - \hat{Y}_{43})| \leq 20\% |Y_{12}| \cdot 20\% |Y_{42}| \cdot |Y_{22} - \hat{Y}_{23}|$$

$$\text{SEUIL 3} = 20\% |Y_{12}| \cdot 20\% |Y_{42}| \cdot |Y_{22} - \hat{Y}_{23}|$$

$$\Delta_4 = |(Y_{12} - \hat{Y}_{14})(Y_{22} - \hat{Y}_{24})(Y_{32} - \hat{Y}_{34})| \leq 20\% |Y_{12}| \cdot 20\% |Y_{32}| \cdot |Y_{22} - \hat{Y}_{24}|$$

$$\text{SEUIL 4} = 20\% |Y_{12}| \cdot 20\% |Y_{32}| \cdot |Y_{22} - \hat{Y}_{24}|$$

L'effet de l'erreur introduite au niveau de Y_2 sur les sorties Y_1, Y_2, Y_3 et Y_4 est illustré par les graphes des figures 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9.

Le test montre que durant la période où Y_{22} est faussé, les sorties Y_1, Y_2, Y_3 et Y_4 estimées par l'observateur 2 s'écartent nettement des sorties réelles. Par contre les sorties estimées par les autres observateurs ne sont nullement affectées par cette erreur.

Conclusion :

d'emplacement des valeurs propres a un effet direct sur le calcul du vecteur L et donc sur la précision des observateurs ainsi que leur temps de convergence; la construction d'un observateur précis nécessiterait alors plusieurs essais en agissant par tâtonnement sur les valeurs propres.

Pour éviter les fausses alarmes pendant le transitoire, nous ferons la détection après que le régime permanent soit établi.

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -0.8 & -2.4 & 29 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.48 & 0.041 & -4.8 & 17 \\ 0.9 & 0.56 & -1 & -3.4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5.7 & -5.7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.07 & 0.07 & 5.2 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2.5 & -0.18 & -0.55 & 6.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.28 & 0.61 & -7.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.2 & -9.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & 9.4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.24 & 0.24 \end{bmatrix}$$

O.L	M	L	valeurs propres
1	$\begin{bmatrix} -2.5 & -0.18 & -0.55 & 6.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	44.09805 2.01842 18.05614	-5 -10 -15
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	-43.3048 10.5911 27.8	-12 -15 -20
3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	-5.01081 -10.16461 30.22820	-3 -4 -5
4	$\begin{bmatrix} 0.28 & 0.61 & -7.2 & -1.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	99.20553 4.60055 54.89482	-12 -15 -20

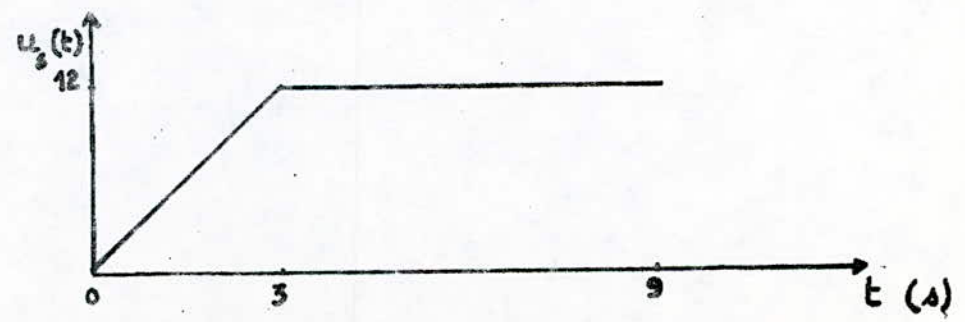


Fig 4-1

ESTIMATION DE LA PREMIERE SORTIE Y1
PAR LES 4 OBSERVATEURS

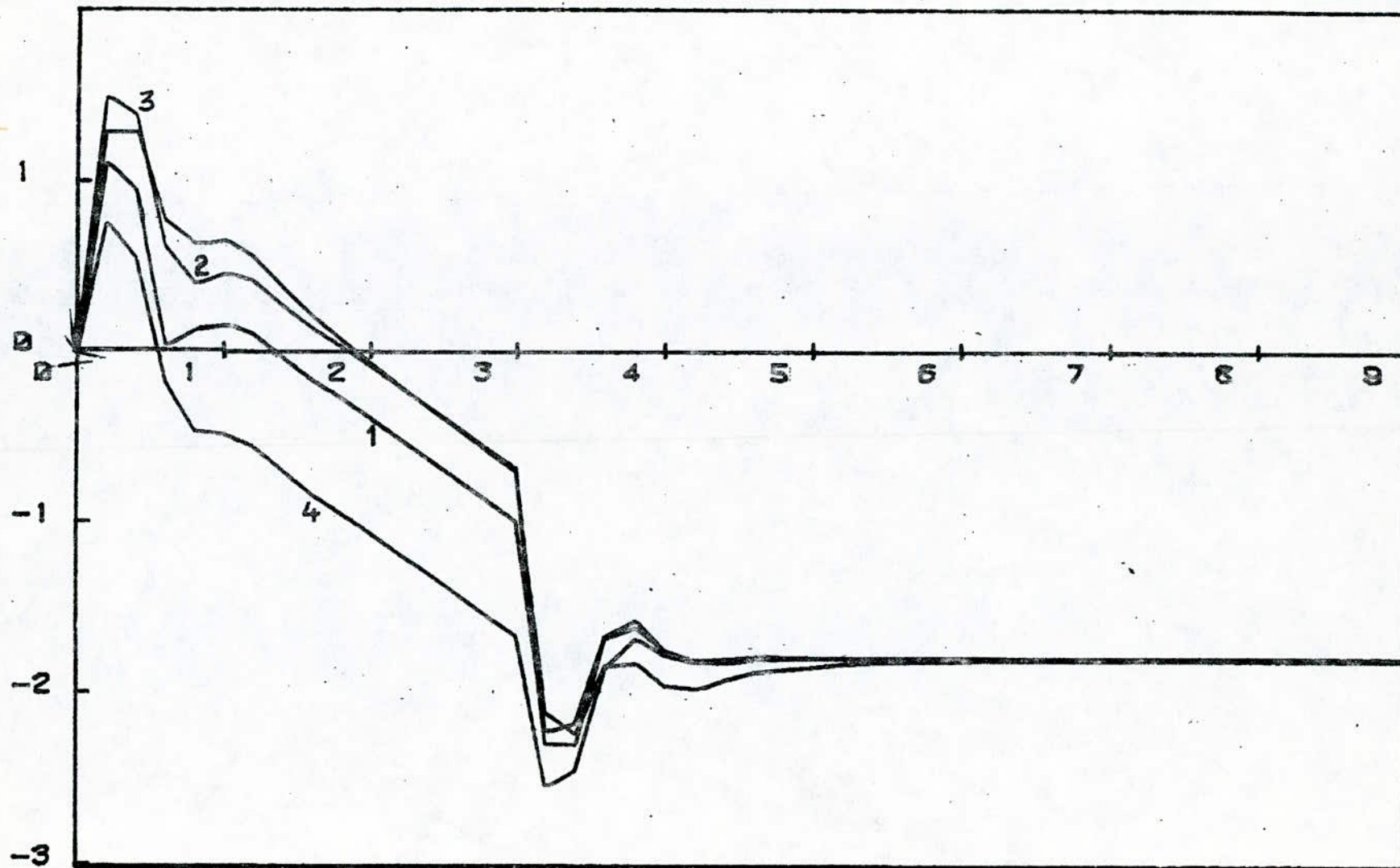


FIG. 4.1

ESTIMATION DE LA DEUXIEME SORTIE Y2
PAR LES 4 OBSERVATEURS

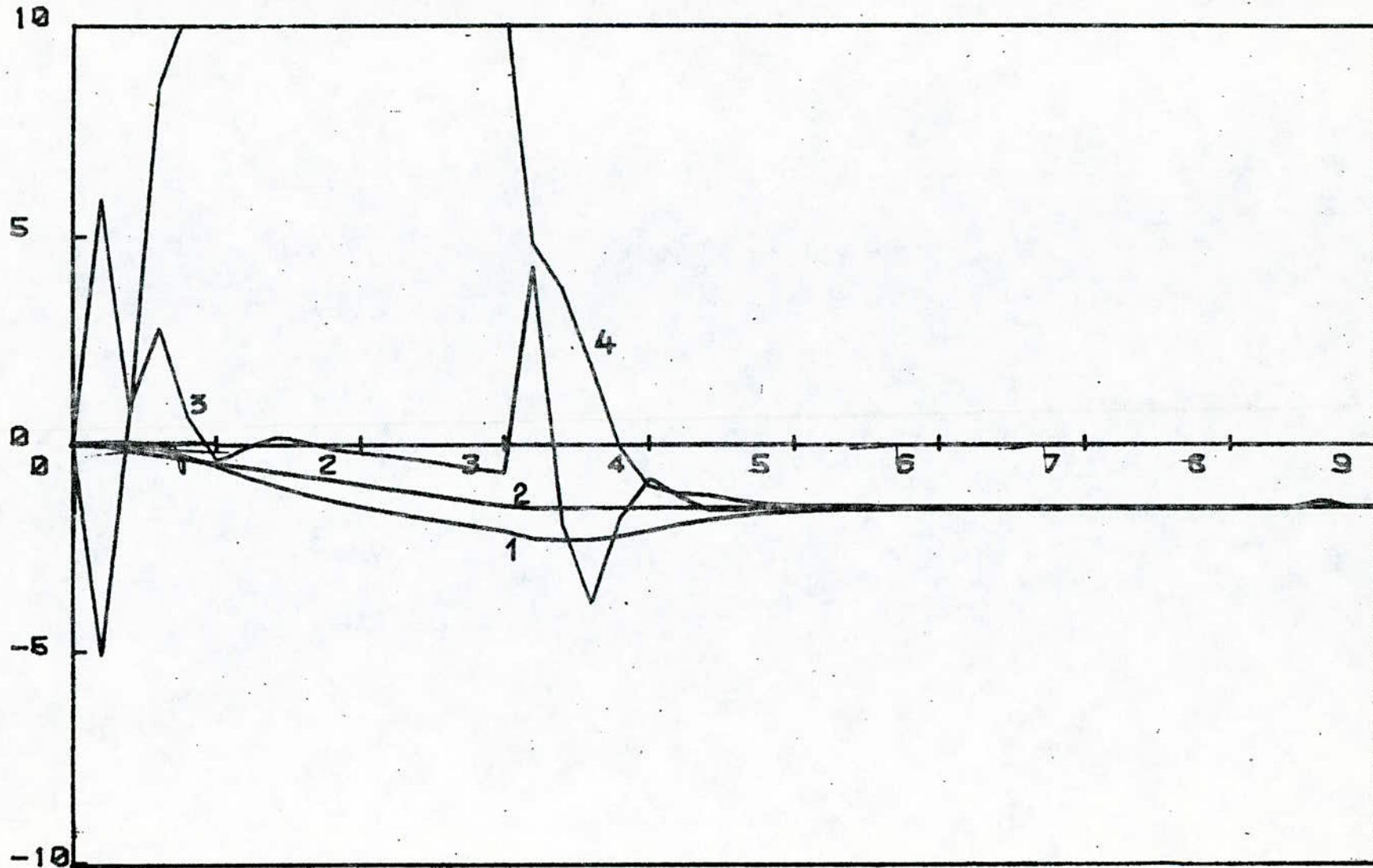


FIG. 4.2

ESTIMATION DE LA TROISIEME SORTIE Y3
PAR LES 4 OBSERVATEURS

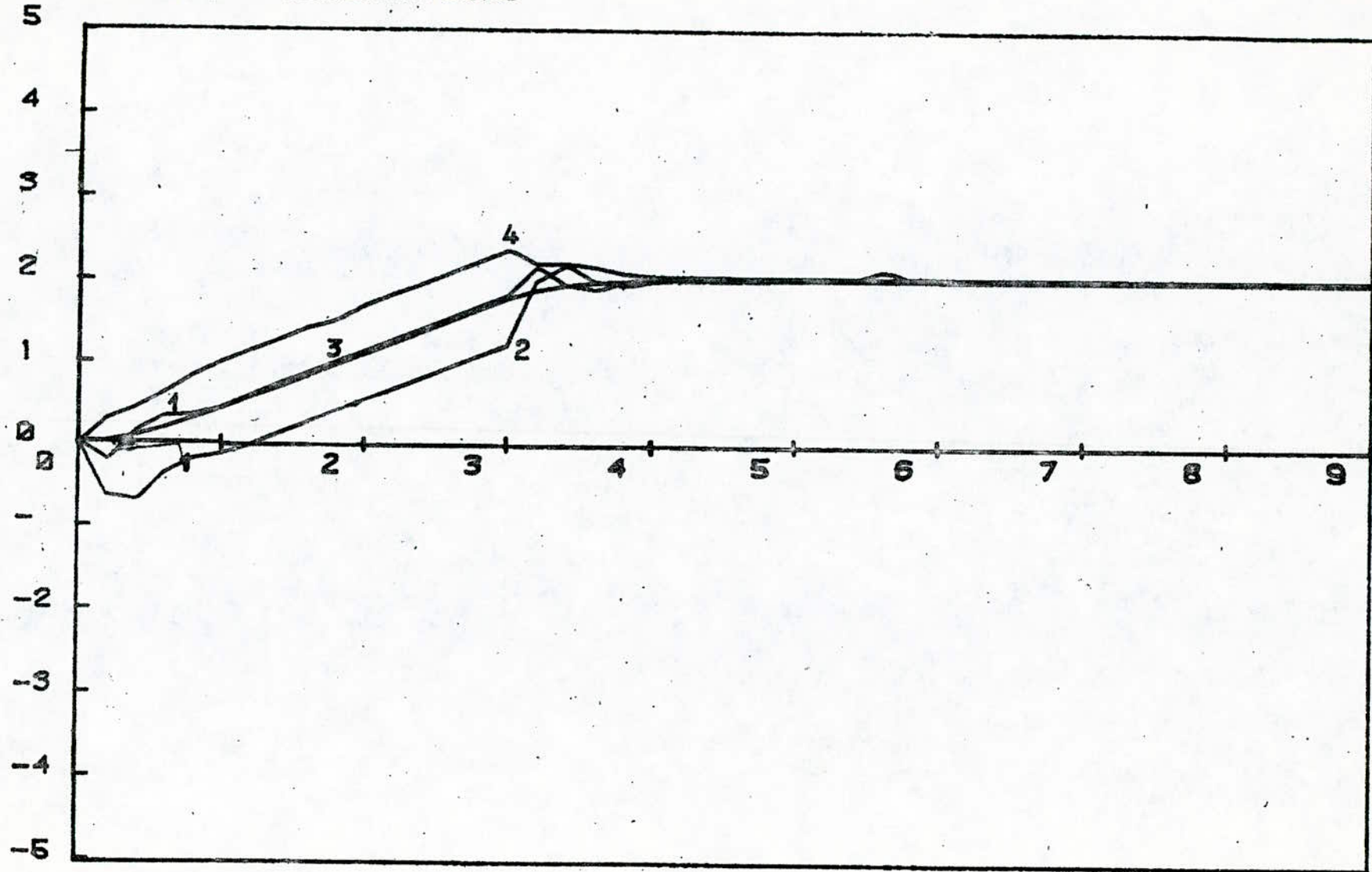


FIG 4.3

ESTIMATION DE LA QUATRIEME SORTIE Y4
PAR LES 4 OBSERVATEURS

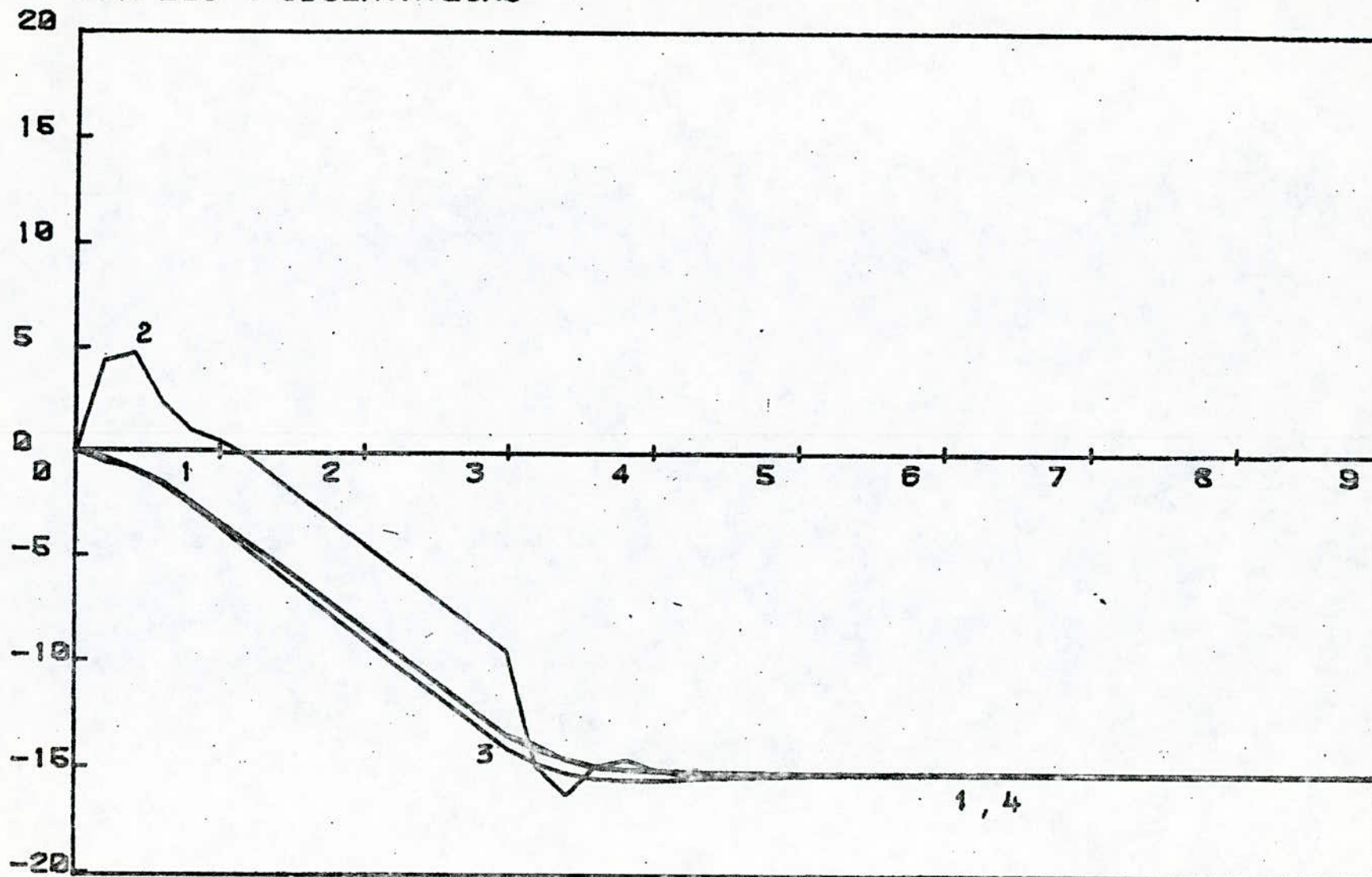


FIG. 4.4

*** ESTIMATION DE LA PREMIERE SORTIE PAR L'OBSERVATEUR 2 ***

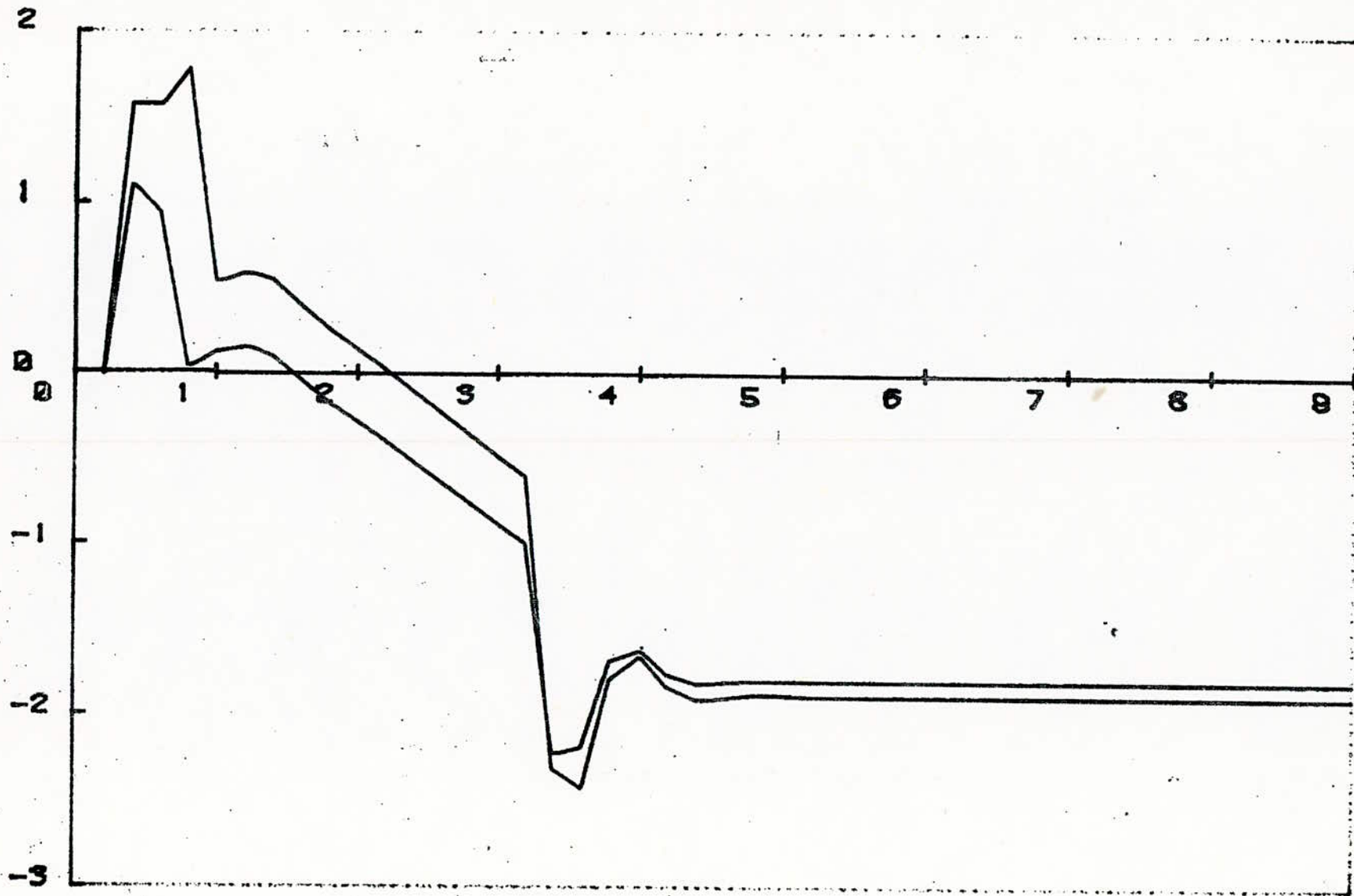


FIG 4.6

*** ESTIMATION DE LA DEUXIEME SORTIE PAR L'OBSERVATEUR 2 ***

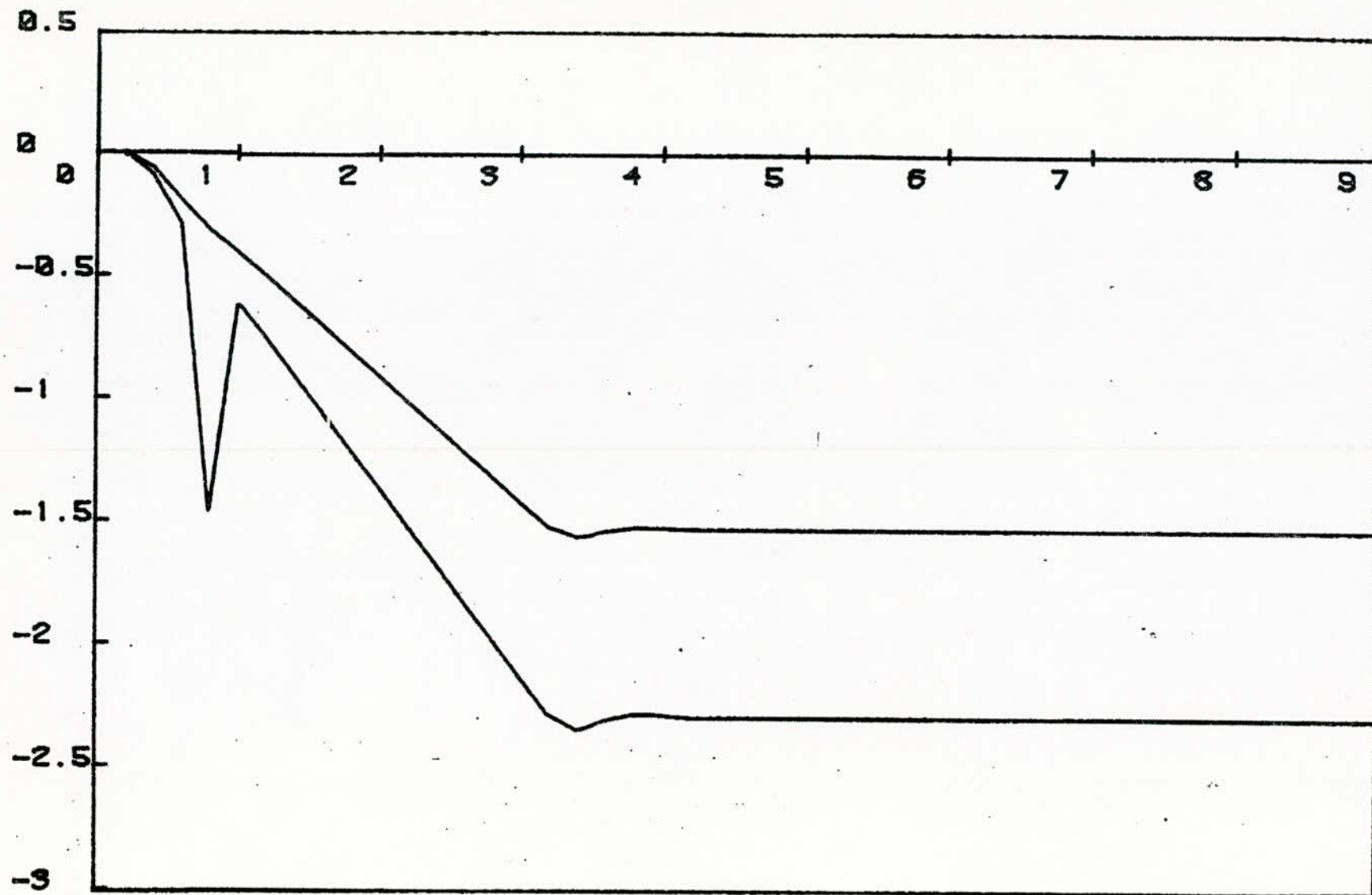


FIG 4.7

*** ESTIMATION DE LA TROISIEME SORTIE PAR L'OBSERVATEUR 2 ***

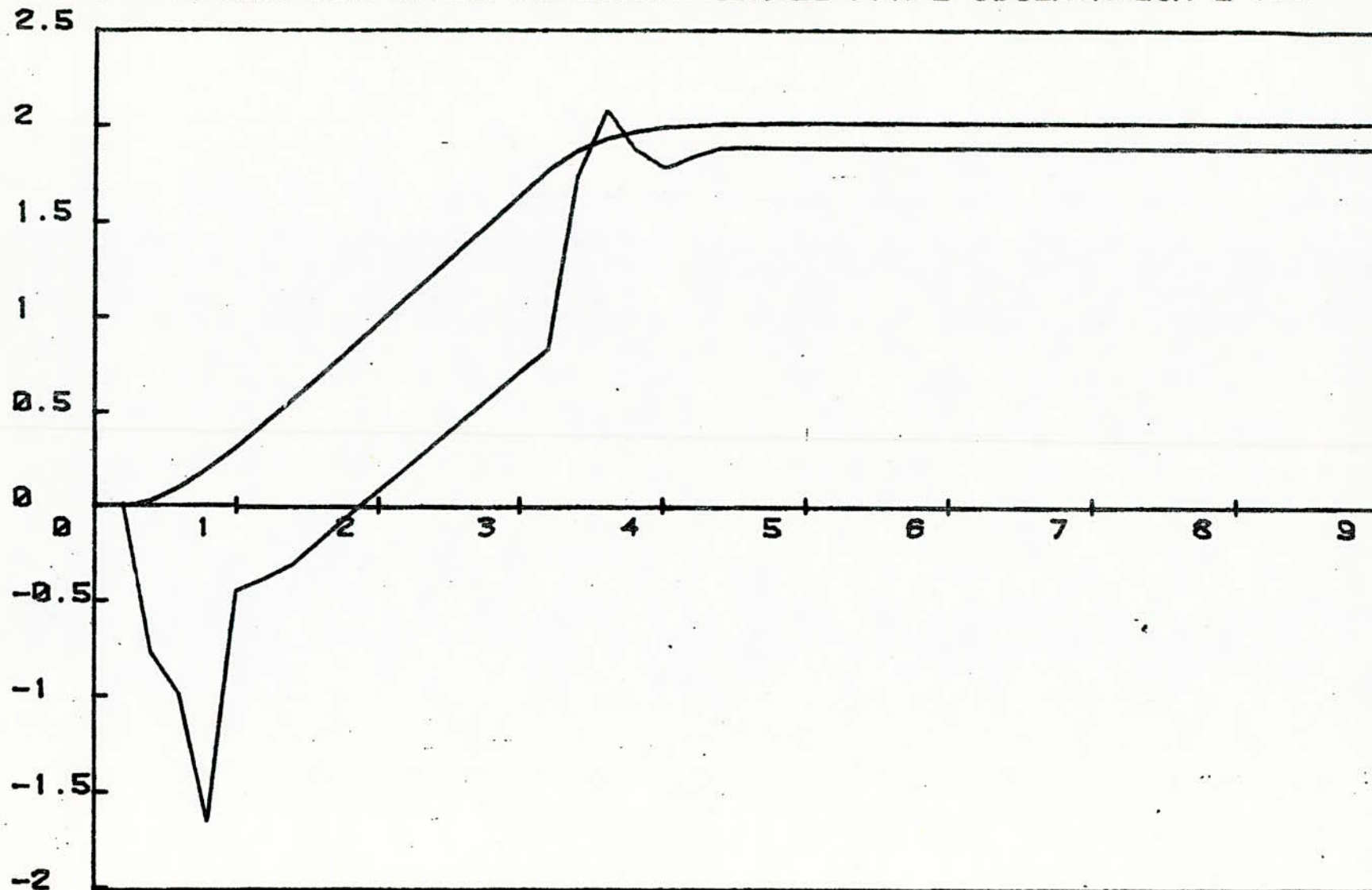


FIG 4.8

*** ESTIMATION DE LA QUATRIEME SORTIE PAR L'OBSERVATEUR 2 ***

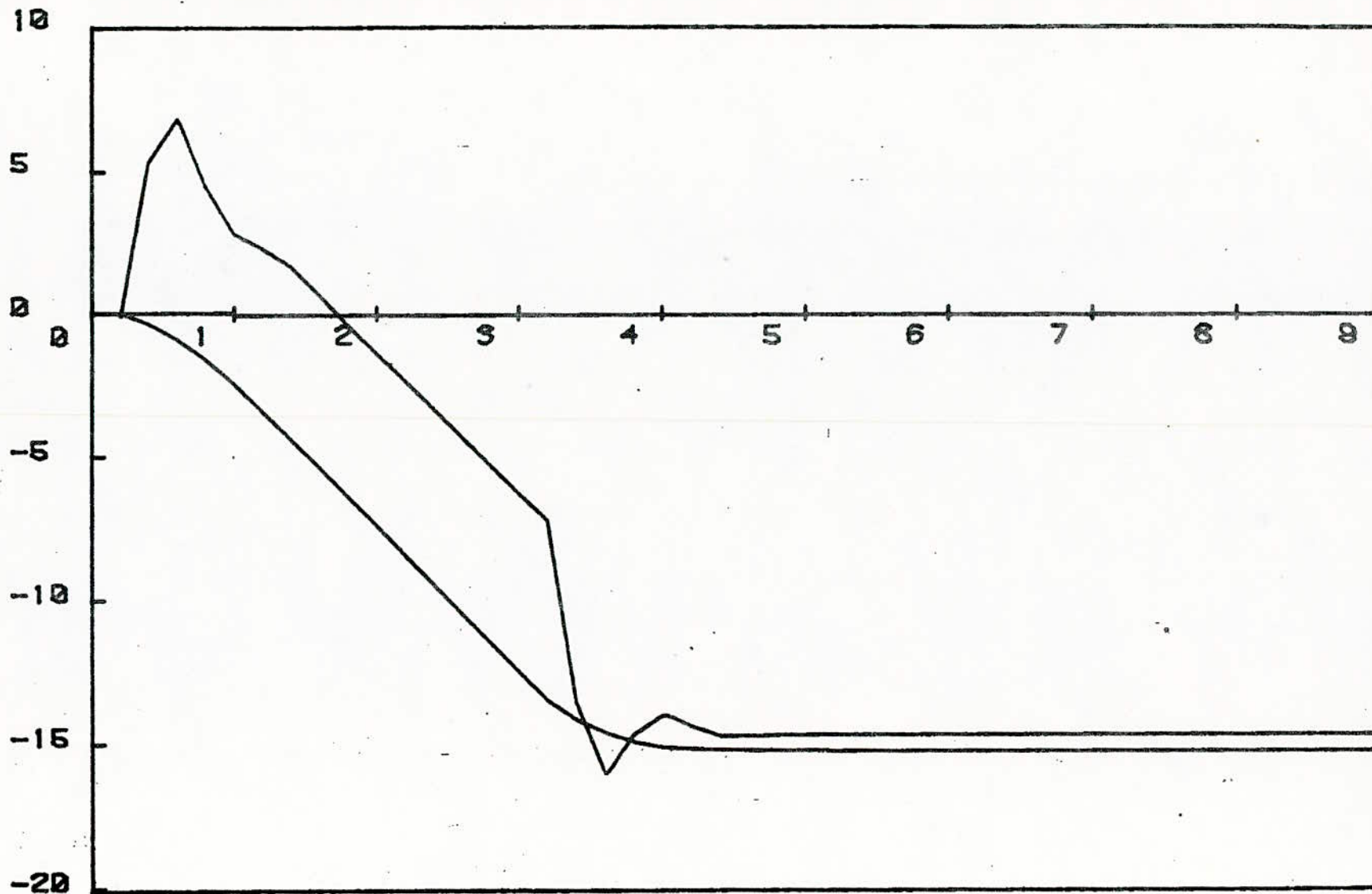


FIG 4.9

C
C
C
C
C
C
C
C

```

*****
*
*          DETECTION DE PANNES D'INSTRUMENTS DE MESURE          *
*                                PAR                                *
*                                REDONDANCE ANALYTIQUE            *
*
*****

```

```

COMMON NR
DIMENSION IL(4),IC(4)
DOUBLE PRECISION A(4,4),P(4,3),C(4,4),W(4,16),F(4,16),WR(4,16),D(4
*) ,P(4),F1(4),E2(4,16),AT(4,4),CT(4,4),CI(4,1),RM(4,4),RM1(4,4),V(4
*) ,A11(1,1),A12(1,3),A21(3,1),A22(3,3),B1(1,3),B2(3,3),BETA(3),S(3,
*) ,F(3,3),F(3,3,4),ALPHA(3),A1(1,3),CT1(4,4),CI1(4,1),B3(4,3)
DOUBLE PRECISION YM(4,1),ER1(4,4),ER2(4,4),DER(4,1),TEST(4,1),SEUI
*) L(4,1),AT1(4,4),AT2(4,4),RK(3,4),U1(3,1)
DOUBLE PRECISION H1(4,1),HT(4,1),G(4,3),U(3,1),Y(4,1),X1(4,1),X(4,
*) ,TETA(4,1)
DOUBLE PRECISION G1(3,3),H3(3,1),VECTL(3,1),Z1(3,1),Z(3,1),SIGM22(
*) ,SIGM21(3,1),XB(4,1),YC(4,1)
DOUBLE PRECISION LAMBDA(3),RL(3,4),IN(3,3),DET,DI(3,4),STC(4,4),WT
*) (3,1),XP(4,1),EPS,EPS1,EPS3

```

```

N=4
M=4
IP=3
L=1
M1=M*N
N1=N-1
M11=M*N1
T=0.1
M1=1
EPS=1.0-05
EPS1=1.0-15
EPS3=1.0-08

```

```

100 READ(105,100)((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
100 FORMAT(8D10.3)
111 READ(105,111)((B(I,K),K=1,IP),I=1,N)
111 FORMAT(6D9.2)
101 WRITE(108,101)
101 FORMAT(15X,'MATRICE A',50X,'MATRICE B')
DO 90 I=1,N
WRITE(108,102)(A(I,J),J=1,N),(B(I,K),K=1,IP)
102 FORMAT(5X,4(F7.3,1X),32X,3(F6.2,1X))
90 CONTINUE
112 READ(105,112)((C(IJ,J),J=1,N),IJ=1,M)
112 FORMAT(8D8.2)
113 WRITE(108,113)
113 FORMAT(45X,'MATRICE C')
DO 93 IJ=1,M
WRITE(108,114)(C(IJ,J),J=1,N)
114 FORMAT(39X,4(F5.2,1X))
93 CONTINUE
104 READ(105,104)((RL(I,J),J=1,M),I=1,N1)
104 FORMAT(6D7.1)
52 READ(105,52)((RK(T,J),J=1,N),I=1,IP)
52 FORMAT(6D9.2)
106 WRITE(108,106)
106 FORMAT(12X,'VALEURS PROPRES',41X,'MATRICE K')
DO 92 I=1,3

```

```

WRITE(108,107) (RL(I,J),J=1,4),(RK(I,J),J=1,4)
107 FORMAT(5X,4(F5.1,2X),32X,4(F5.2,1X))
92 CONTINUE

```

C
C
C
C
C

TEST D'OBSERVABILITE DU SYSTEME (C,A)
TRANSPOSITION DES MATRICES A ET C

```

DO 1 I=1,M
DO 1 J=1,M
1 AT(I,J)=A(J,I)
DO 2 I=1,M
DO 2 J=1,M
2 CT(J,I)=C(I,J)
IG=0
30 DO 3 J1=1,M
J=J1+IG
DO 3 I=1,M
W(I,J)=CT(I,J1)
3 CONTINUE
CALL PROMAT(N,M,M,AT,CT,CT1)
DO 23 K=1,M
DO 23 KL=1,M
23 CT(K,KL)=CT1(K,KL)
IG=IG+M
IF(IG.LE.M*N) GO TO 30
CALL INDV(N,M,W,E,WR,D,P,E1,E2,EPS)
IF(NR.EQ.N) GO TO 12
WRITE(108,17)
18 FORMAT(50X,'LE SYSTEME (C,A) EST OBSERVABLE',/)
STOP
12 WRITE(108,18)

```

C
C
C

TEST D'OBSERVABILITE DES SOUS SYSTEMES (CI,A)

```

DO 4 J=1,M
DO 4 I=1,M
5 CI(I,L)=C(J,I)
DO 6 K=1,M
DO 6 I=1,M
7 W(I,K)=CI(I,L)
CALL PROMAT(N,M,L,AT,CI,CI1)
KL=0
DO 24 KI=1,M
24 CI(KI,KL)=CI1(KI,KL)
6 CONTINUE
CALL INDV(N,M,W,E,WR,D,P,E1,E2,EPS)
IF(NR.EQ.N) GO TO 13
WRITE(108,19)
19 FORMAT(50X,'LE SOUS SYSTEME (CI,A) EST NON OBSERVABLE')
17 FORMAT(50X,'LE SYSTEME (C,A) EST NON OBSERVABLE',/)
STOP
13 WRITE(108,16)
16 FORMAT(50X,'LE SOUS SYSTEME (CI,A) EST OBSERVABLE')

```

C
C
C

CHANGEMENT DE BASE ET RECHERCHE DE LA MATRICE RM DE PASSAGE

```

DO 8 I=1,M
8 V(I)=C(J,I)
CALL MATM(N,N1,V,D1,RM)

```



```

PRINT 400
400 FORMAT(20X,'MATRICE M')
DO 39 I=1,4
29 PRINT 31,(RM (I,KJ),KJ=1,4)
31 FORMAT((5X,4(F9.4)),/)

C
C
C      CALCUL DES MATRICES A ET B DANS LA NOUVELLE BASE

CALL DMRINV(RM,PM1,N,KOD,DET,EPS1,IL,IC)
CALL PROMAT(N,N,N,FM,A,AT1)
CALL PROMAT(N,N,N,AT1,RM1,AT2)
CALL PROMAT(N,N,IP,RM,B,B3)

C
C
C      DETERMINATION DES MATRICES A11,A12,A21,A22,B1 ET B2

A11(L,L)=AT2(L,L)
DO 6 IJ=2,N
I=IJ-1
A12(L,I)=AT2(L,IJ)
9 A21(I,L)=AT2(IJ,L)
DO 10 I=2,N
DO 10 IJ=2,I
KL=IJ-1
KJ=I-1
10 A22(I,KL)=AT2(I,IJ)
DO 11 IJ=1,IP
11 B1(I,IJ)=B3(L,IJ)
DO 12 I=2,N
DO 20 IJ=1,IP
KJ=I-1
20 B2(IJ,IJ)=B3(I,IJ)

C
C
C      RECHERCHE DU VECTEUR L TEL QUE LES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE (A
C      22-A12) SOIENT ARBITRAIRES.

DO 21 I=1,N1
21 LAMBDA(I)=-RL(I,J)
CALL CALVEL(N1,LAMBDA,BETA,N,A22,IN,S,F,H,ALPHA,L,A1,A12,KOD,EPS1)
WRITE(108,109)
109 FORMAT(15X,'VECTEUR L')
DO 22 I=1,N1
WRITE(108,110) BETA(I)
110 FORMAT(15X,(F9.5,1X),/)
22 CONTINUE
DO 45 I=1,N1
45 VECTL(I,L)=BETA(I)

C
C
C      CONSTRUCTION DES MATRICES F,G ET H DU SYSTEME OBSERVATEUR.CES MATRI
C      CES SONT STOCKEES RESPECTIVEMENT DANS F G1 ET H3.

CALL PROMAT(N1,L,N1,VECTL,A12,F)
DO 27 I=1,N1
DO 27 IJ=1,N1
37 F(I,IJ)=A22(I,IJ)-F(I,IJ)
CALL PROMAT(N1,N1,L,F,VECTL,H3)
DO 38 I=1,N1
38 H3(I,L)=H3(I,L)+A21(I,L)-A11(L,L)*VECTL(I,L)
CALL PROMAT(N1,L,IP,VECTL,H1,G1)
DO 39 I=1,N1
DO 39 IJ=1,IP

```


39 G1(I,IJ)=P2(I,IJ)-G1(I,IJ)

C
C
C

RESOLUTION DE L'EQUATION D'ETAT DU SYSTEME

T0=0.

DO 46 I=1,N1

Z1(I,L)=0.0

46 CONTINUE

DO 309 I=1,M

309 Y(I,L)=0.

DO 300 I=1,N

F1(I,L)=0.

X1(I,L)=0.

XM(I,L)=0.0

300 CONTINUE

C
C
C

ECHANTILLONAGE DE L'ENTREE U

DO 301 KM=1,M1

I=1

I1=I+1

I2=I1+1

TK=(KM-1)*T

IF(TK.LE.3.) GO TO 306

U(I,L)=-12.

U(I1,L)=-U(I,L)

U(I2,L)=0.

GO TO 308

306 U(I,L)=-4*TK

U(I1,L)=-U(I,L)

U(I2,L)=0.

308 CALL PROMAT(IP,N,L,RK,X1,L1)

DO 304 I=1,IP

304 U(I,L)=U(I,L)+L1(I,L)

CALL SOLZED(N,L,M,IP,A,B,F1,G,HT,U,Y,X1,X,AT1,AT2,RM,STC,TETA,T,TO
*,EPS3,J)

CALL PROMAT(M,N,L,C,X,Y)

TEST(1,1)=0.0

TEST(2,1)=1.0

TEST(3,1)=0.0

TEST(4,1)=0.0

DO 310 I=1,M

DER(I,L)=0.5

DO 310 IJ=1,M

IF(I.EQ.IJ) GO TO 311

ER1(I,IJ)=0.0

GO TO 310

311 ER1(I,IJ)=1.0

310 CONTINUE

CALL SIMUL(Y,YM,ER1,ER2,DER,TEST,L,M)

DO 322 I=1,I

322 Y(I,L)=YM(I,L)

PRINT 323

323 FORMAT(83X,'SORTIES MESUREES')

DO 305 I=1,M

305 PRINT 303,YM(I,L)

303 FORMAT(83X,D16.10)

C
C
C

RECHERCHE DE LA SOLUTION Z DE L'EQUATION DE L'OBSERVATEUR

CALL SOLZED(N1,L,M,IP,F,G1,H3,B2,A21,U,Y,Z1,Z,A22,S,IN,SIGM22,SIGM
*21,T,T0,EPS3,J)

C
C CALCUL DE L'ESTIMATEUR WI DE LA PARTIE NON MESURABLE DE L'ETAT DU
C SYSTEME DANS LA NOUVELLE BASE
C

DO 41 I=1,M1
41 WI(I,L)=Z(I,L)+VECTL(I,L)*Y(J,L)

C
C CALCUL DE L'ETAT ESTIME DANS LA NOUVELLE BASE. LE RESULTAT EST STO
C CKE DANS XP.
C

XP(L,L)=Y(J,L)
DO 42 I=2,M
I1=I-1
42 XP(I,L)=WI(I1,L)

C
C CALCUL DE L'ETAT DU SYSTEME ESTIME PAR CHAQUE OBSERVATEUR .LE RESU
C LTAT EST STOCKE DANS XM.
C

CALL PROMAT(N,N,L,FM1,XP,XM)

C
C CALCUL DE LA SORTIE ESTIMEE PAR CHAQUE OBSERVATEUR.LE RESULTAT EST
C STOCKE DANS YC.
C

CALL PROMAT(M,N,L,C,XM,YC)
PRINT 324
324 FORMAT(50X,'SORTIES ESTIMEES')
DO 43 I=1,M
PRINT 44,YC(I,L)

43 CONTINUE
44 FORMAT((50X,D16.10),/)
SEUIL(1,1)=0.2**2*DABS(YM(3,1)*YM(4,1)*(YM(2,1)-YC(2,1)))
SEUIL(2,1)=0.03*0.04*0.05*DABS(YM(3,1)*YM(4,1)*YM(1,1))
SEUIL(3,1)=0.2**2*DABS(YM(1,1)*YM(4,1)*(YM(2,1)-YC(2,1)))
SEUIL(4,1)=0.2**2*DABS(YM(1,1)*YM(3,1)*(YM(2,1)-YC(2,1)))
CALL LOGIC(J,L,M,YC,YM,TEST,SEUIL)
T0=1.

301 CONTINUE
4 CONTINUE
END

CONCLUSION

l'idée générale qui a guidé ce travail a été d'écrire et de programmer en langage FORTRAN un algorithme de détection de pannes d'instruments de mesure pour un système travaillant en son point nominal.

Cette étude montre qu'il est possible, sans avoir recours, à la redondance physique de détecter des pannes.

Le programme que nous avons élaboré a été testé sur un système d'ordre 4 et a permis d'obtenir des résultats assez corrects. Il présente une certaine simplicité au niveau de son utilisation. L'utilisateur n'aura à introduire comme données que les matrices A, B, C du processus, les valeurs propres des observateurs, l'entrée et les conditions initiales.

Le plus gros problème a été pour nous de choisir les valeurs propres qui nous assurent la convergence rapide de tous les observateurs. L'utilisateur devra donc faire plusieurs essais qui lui permettront d'ajuster ces valeurs propres.

Dans le but de tester l'algorithme sur l'exemple considéré dans la simulation, nous avons choisi des seuils qui tiennent compte de l'erreur d'estimation. Dans un cas pratique, le choix des seuils est un problème beaucoup plus compliqué puisqu'ils doivent

permettre d'une part la détection de n'importe quel instrument en panne et d'autre part éviter les fausses alarmes.

Cette étude montre également qu'en présence des variations des paramètres du processus, l'algorithme peut donner de bons résultats, il suffit pour cela d'insérer le sous-programme SENSIT qui minimise les variations des sorties des observateurs par rapport aux variations de la matrice A . Le IFD en présence de ces variations n'a pu être testé par manque de temps.

Remarquons que l'étude de la sensibilité se réduit à un problème d'optimisation dont la formulation et les méthodes de résolution dépendent du système et de l'objectif qu'on veut atteindre.

Le test du IFD sur les systèmes d'ordre élevé peut causer des problèmes tels qu'un dépassement de capacité de l'ordinateur et des problèmes relatifs aux méthodes numériques utilisés.

Notons que si le système s'avère non observable, il convient de refaire sa modélisation. Si un (ou plusieurs) sous-système n'est pas observable, on peut soit l'éliminer soit lui construire un observateur avec une liberté moindre dans le choix de ses valeurs propres.

Les améliorations qui peuvent être apportées concernent :

- la convergence des observateurs

- d'étude de la sensibilité
 - * Prendre en consideration les variations de tous les paramètres du système
 - * Perfectionner les méthodes d'optimisation
 - * Formuler le problème d'optimisation autrement
- Utiliser d'autres techniques d'estimation d'état.

References

BEARD, R.V, [1971] Failure accomodation in Linear systems through self reorganisation, MAN VEHICLE LAB., CAMBRIDGE, MASS ..

[9] CLARK, R.N, FOSTH, DC and WALTON, V.M [1975] Detecting instrument malfunctions in contrld systems IEEE Transactions. Aerospace electron. syst. VOL AES-11, pp 465-473

CLARK, R.N., and SETZER, W. [1980]. Sensor fault detection in a system with random disturbances. IEEE Trans. on Aeospace and electronic systems VOL AES - 15, N°4, pp 468 - 473

FRANK, P.M, and KELLER, L. 1980. Sensitivity discriminating observer design for instrument failure detection. IEEE Trans on Aerospace and electron. syst., VOL AES 16, N°4, pp 460-467

[10] R.N CLARK. Instrument fault detection, IEEE Trans. on Aerosp. and electron. syst, VOL AES -14, N°3, pp 456-465, May [1978 a]

R.N CLARK [1978 b] Simplified instrument failure detection. IEEE Transactions on Aerospace and electronic systems, N°4, VOL AES 14

- [1] F.R GANTMACHER , "The theory of matrices" ,
Chelsea, NEW YORK , vol. 1. , especially pp 215 -425.
- [2] W.M WONHAM "On pole assignement in multi-
input controlable linear systems" , IEEE Trans -Autom.
control , vol AC-12 , pp 660 -665 , Dec 1967.
- [3] D.G LUENBERGER " Observers for multivariable
systems" IEEE Trans -Autom. Control , vol AC-11 , pp 190.
-197 , Apr 1966
- [4] B. GOPINATH "On the control of linear multiple
input -output syst." Bell syst. Tech.5 , Mar 1971
- [5] D.G LUENBERGER "An introduction to observers",
IEEE Trans. on Autom. Control , vol AC -16 , N° 6 ,
Dec 1971 pp 596 - 602.
- [6] R.W BASS and I. GURA , Guidance and controls
division , Aerospace group HUGHES AIRCRAFT COMPANY
Culver City , CALIFORNIA . High order system design
via state -space considerations pp 311 - 317
- [7], [8] ANDREW P. SAGE , Chelsea C. White III
"Optimum systems control" Second edition , PRENTICE.
HALL, INC, Englewood chiffs , New Jersey 07632
pp 53 - 82 , pp 300 - 326