
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil
Laboratoire de Génie Sismique & Dynamique des Structures

Mémoire de Magister

Présenté par :

Faouzi MAATIB

*Ingénieur d'Etat en Travaux Publics
Diplômé de l'Ecole Nationale Supérieure des Travaux Publics*

Thème :

**MODELISATION DES FONCTIONS D'IMPEDANCE
POUR L'ANALYSE DES VIBRATIONS DES MASSIFS
DE FONDATION SUR SOLS MULTICOUCHES**

Soutenu le : 25 / 02 / 2010, devant le jury composé de :

Mr. M.K. BERRAH	Professeur, ENSP	Président
Mr. B. TILIOUINE	Professeur, ENSP	Directeur de Thèse
Mr. M. HAMMOUTENE	Professeur, ENSP	Examineur
Mr. S. BELKACEMI	Maître de Conférences, ENSP	Examineur
M ^{me} . D. CHERID	Chargée de cours, ENSP	Examinatrice
M ^{me} . D. CHENAF	Professeur, EMR Canada	Invitée

ملخص

دوال الممانعة لأساسات صلبة مختلفة الأشكال, موضعة على تربة متعددة الطبقات, قدرت بواسطة استعمال نموذج 'Cone Models'. المعادلات الحركية للجلمة تربة-أساس حسبت بواسطة استعمال مصفوفة الدوال الممانعة ديناميكية. تفاعل الأساسات الصلبة حسبت لحركات الإزاحة و الدوران. أن مقارنة النتائج المحصل عليها مع نتائج الحلول الدقيقة, أثبتت أن استعمال النموذج الفيزيائي المبسط 'Cone Models' يؤدي إلى نتائج جيدة, خاصة في مجال الترددات الضعيفة و المتوسطة, و هذا يبين فائدة استعمال هذا النموذج الفيزيائي المبسط في دراسة اهتزازات أساسات الصلبة الموضعة على تربة متعددة الطبقات.

Résumé

Les fonctions d'impédance des fondations rigides, de forme quelconque, reposant sur des sols multicouches sont approchées en utilisant le concept des modèles de cône. Les équations de mouvement du système sol-massif de fondation sont formulées à l'aide de la matrice des fonctions d'impédance dynamiques. La réponse dynamique du massif de fondation est déterminée pour les modes de vibration de translation (horizontale et verticale), de balancement, et de torsion. La comparaison des résultats obtenus avec les résultats des méthodes rigoureuses, montre que l'utilisation des modèles de cône conduit à une précision adéquate particulièrement pour les domaines des basses et moyennes fréquences, ce qui confirme l'intérêt de ces modèles dans les études de vibration des massifs de fondation sur sols multicouches.

Abstract

The impedance functions for rigid foundations of arbitrary shapes, resting on layered soils are approached using the concept of cone models. The equations of motion of the system soil-foundation block are formulated utilizing the matrix of the dynamic impedance. The dynamic response of the foundation block is determined for all modes of vibration: translational (horizontal and vertical), rocking, and torsional. Comparison of results obtained using those of rigorous solutions, shows a good agreement, particularly for the low and middle frequency ranges, which confirms the interest of cone models for the vibration analysis of foundation block on layered soil.

Mots clés :

Fonction d'impédance; Vibrations; Massif de fondation ; Modèles de Cône; Propagation d'ondes; Sols multicouches.

Remerciements

Je remercie Allah le Tout Puissant de m'avoir donné courage et volonté pour accomplir ce modeste travail.

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **B. TILIOUINE**, mon directeur de thèse, Professeur à l'École Nationale Supérieure Polytechnique (ENSP), pour son aide, sa disponibilité et ses précieux conseils. Sans lui ce travail n'aurait jamais abouti.*

*Les remerciements les plus distingués s'adressent à Monsieur **M. K. BERRAH**, Professeur à l'ENSP, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur **M. HAMMOUÏENE**, Professeur à l'ENSP, pour son aimable collaboration scientifique, à Monsieur **S. BELKACEMI**, Maître de Conférences à l'ENSP, ainsi que Madame **D. CHERID** Chargée de cours à l'ENSP, et Madame **D. CHENAF**, professeur à l'EMR Canada, qui ont tous bien voulu examiner ce travail et participer au Jury d'évaluation de cette thèse.*

Je ferai aussi mention expresse de la contribution significative des personnels de l'ENROS, de COSIDER et de l'INGEROP, pour leurs soutiens moral et leurs encouragements.

Enfin, dans le souci de n'oublier personne, que toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenu de près ou de loin, trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

DEDICACES

*Au nom d'Allah, le Tout Clément, le Très Miséricordieux
Je dédie ce mémoire de Magistère à :*

*Mes très chers parents pour leurs sacrifices
Que Dieu le Tout Puissant les protège et les garde.*

Ma chère fiancée pour sa passion et sa patience

Mes chers frères et sœurs

Toute ma famille

Tous mes proches et amis fidèles

Tous ceux qui m'ont soutenu de près et de loin

MAATIB Faouzi

Table des matières

CHAPITRE I : INTRODUCTION GENERALE.....	14
I.1) INTRODUCTION.....	14
I.2) SYNTHESE DES TRAVAUX ANTERIEURS	16
I.3) OBJECTIFS DE LA THESE	19
I.4) ORGANISATION DE LA THESE	20
CHAPITRE II : CONCEPT DE CONE.....	22
II.1) INTRODUCTION	22
II.2) DEFINITION GENERALE DE L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION.....	22
II.3) IMPEDANCE D'UN OSCILLATEUR SIMPLE A UN DEGRE DE LIBERTE	24
II.4) FORME GENERALE DE L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION.....	24
II.5) IMPEDANCE DES SOLS DE FONDATION.....	25
II.6) METHODES DE DETERMINATION DES FONCTIONS D'IMPEDANCE.....	27
II.6.1) Solutions continues (analytiques)	27
II.6.2) Solutions discrètes (numériques)	28
II.6.3) Méthodes approximatives	28
II.7) MODELES DE CONE POUR LE CALCUL DES FONCTIONS D'IMPEDANCE	30
II.8) PRINCIPE DE CORRESPONDANCE	36
II.9) CONCLUSION	39

Liste des figures

Figure II. 1 : Réponse d'une fondation à une sollicitation harmonique	23
Figure II.2 : Système à un degré de liberté	24
Figure II.3 : Définition des composantes du déplacement	26
Figure II.4 : Modèle de cône correspondant à chaque degré de liberté	30
Figure II.5 : Modèle de cône et modèle discret correspondant. A) cône. B) Modèle discret pour translation. C) Modèle discret pour rotation	31
Figure III.1 : Réflexion et réfraction d'une onde dans une couche d'épaisseur limitée surmontant un demi-espace homogène	41
Figure III.2 : Disque en mouvement vertical sur une couche de sol modélisée par le modèle de cône	44
Figure III.3 : Représentation du modèle d'onde par l'arbre binaire A) Modèle d'onde. B) Arbre d'onde correspondante	50
Figure III.4 : Sols multicouches A) Fondation circulaire sur sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène. B) Fondation circulaire sur sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.	51
Figure III.5 : Coefficients de l'impédance dynamique d'une fondation circulaire sur sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène. A) Horizontal. B) Vertical. C) Balancement. D) Torsion	53
Figure III.6 : Module d'une fondation circulaire sur sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène. A) Horizontal. B) Vertical. C) Balancement. D) Torsion	54
Figure III.7 : Coefficients de l'impédance dynamique d'une fondation circulaire sur sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. A) Horizontal. B) Vertical. C) Balancement. D) Torsion	55
Figure III.8 : Module d'une fondation circulaire sur sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. A) Horizontal. B) Vertical. C) Balancement. D) Torsion	56
Figure III.9 : Caractéristiques géométriques et matérielles de l'exemple	59

Figure III.10 : Fondation de forme arbitraire reposante sur la surface d'un sol monocouche surmontant un substratum rocheux.	60
Figure III.11 : Fondation de forme arbitraire reposante sur la surface d'un sol monocouche surmontant un demi-espace rigide	60
Figure III.12 : Massif de fondation d'une machine vibrante à deux cylindres en surface de sol multicouches	71
Figure III.13 : Mécanisme de mouvement d'une machine à un cylindre	71
Figure III.14 : Mécanisme de mouvement d'une machine à deux cylindres	73
Figure III.15 : Charge dynamique de la machine à deux cylindres. A) Force dynamique verticale $P(t)$. B) Moment dynamique $M(t)$	75
Figure III.16 : Modalisation dynamique de l'interaction sol-Fondation	77
Figure III.17 : Rotation de massif de fondation. A) en utilisant les modèles de cône. B) en utilisant la méthode exacte .C) comparaison de résultantes	79
Figure III.18 : Déplacement horizontal de massif de fondation. A) en utilisant les modèles de cône. B) en utilisant la méthode exacte. C) comparaison de résultantes	80
Figure III.19 : Déplacement vertical de massif de fondation. A) en utilisant les modèles de cône. B) en utilisant la méthode exacte. C) comparaison de résultantes	81
Figure III.20 : Déplacement vertical total à la façade gauche de massif de fondation. A) en utilisant les modèles de cône. B) en utilisant la méthode exacte .C) comparaison de résultantes	82
Figure III.21 : Fondation d'une machine vibrante sur la surface d'un sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.	84
Figure III.22 : A) Fondation de forme arbitraire reposante sur la surface d'un sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. B) Fondation de forme arbitraire reposante sur la surface d'un sol monocouche surmontant un substratum rocheux.	85
Figure IV.1 : Disques avec leurs cônes correspondants .A) disque sur la surface de sol demi-infini. B) Disque dans sol infini	91
Figure IV.2 : Fonction de Green .A) fonction de Green de disque enterrée dans un espace infini avec modèle de double cône. B) fonction de Green de mouvement vertical dans un espace infini	92

Figure IV.3 : Représentation d'une fondation enterrée dans sol multicouches par plusieurs disques	93
Figure IV.4 : Excavation de la masse de sol piège pour le degré de liberté vertical	94
Figure IV.5 : Sols multicouches. A) Fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de deux couches sur demi-espace homogène. B) Fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.	96
Figure IV.6 : Coefficients de l'impédance dynamique d'une fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de deux couches sur demi-espace homogène. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion	98
Figure IV.7 : Module d'une fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de deux couches sur demi-espace homogène. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion	99
Figure IV.8 : Coefficients de l'impédance dynamique d'une fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion	100
Figure IV.9 : Module d'une fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion	101
Figure IV.10 : Fondation circulaire enterrée dans sol demi-infini homogène	103
Figure IV.11 : Variation de module des fonctions d'impédance. A) Vertical. B) Torsion. C) Horizontal. D) Balancement. E) Couplé	105
Figure IV.12 : Facteur de rigidité statique pour une fondation cylindrique enterrée dans un sol homogène	107

Liste des tableaux

Tableau II.1 : Relations entre les paramètres élastiques pour : la mécanique de sol, la dynamique de sol, et les modèles de cône	32
Tableau II.2 : Propriétés des modèles de cône et du modèle d'élément discret	33
Tableau II.3A : Raideur statique d'une fondation superficielle sur un demi-espace homogène : cas des fondations de forme rectangulaire	34
Tableau II.3B : Raideur statique d'une fondation superficielle sur un demi-espace homogène : cas des fondations de forme arbitraire	34
Tableau III.1 : Comparaison entre les coefficients de l'impédance dynamique	67
Tableau III.2 : Comparaison entre les modules des fonctions d'impédance	68
Tableau IV.1A : coefficient et fonction d'impédance dynamique pour les degrés de liberté : Vertical, Torsion et couplé	104
Tableau IV.1B : coefficient et fonction d'impédance dynamique pour les degrés de liberté : Horizontal et Balancement	104

Liste des notations principales

$S(\omega)$: Fonction d'impédance dynamique
$P(t)$: Sollicitation harmonique verticale
$u(t), z(t)$: Déplacement vertical
a_0	: Fréquence adimensionnelle
r_0	: Rayon de risque ou fondation circulaire et cylindrique
ω	: Pulsation de l'excitation harmonique
c	: Vitesse de propagation de l'onde
c_s	: Vitesse de propagation des ondes de cisaillement
C_p	: Vitesse de propagation des ondes longitudinales
$k(a_0)$: Partie réelle de l'impédance représentant l'effet de la masse et de l'inertie du sol
$c(a_0)$: Partie imaginaire de l'impédance représentant l'effet de l'amortissement radiatif
K	: Raideur statique de la fondation
m	: Masse totale de la fondation
I	: Moment d'inertie massique de la fondation par rapport au centre de gravité
h_G, z_G	: Distance du centre de gravité G de la fondation à la surface de contact sol-fondation
R	: Réactions du sol agissant au centre de la fondation
P	: Forces appliqués agissant au centre de gravité de la fondation
M	: Moments appliqués agissant au centre de gravité de la fondation
U	: Déplacements du centre de gravité de la fondation.
θ	: Rotations, du centre de gravité de la fondation.

$[S]$: Matrice d'impédance
$\{u_b\}$: Vecteur déplacement au centre de la fondation Surface de la fondation
A_0	: Aire de la fondation
Z_0	: Hauteur d'apex
ν	: Coefficient de Poisson
G	: Module de cisaillement
E	: Module de Young
ρ	: Masse volumique de sol
I_0	: Moment d'inertie polaire
a, b, h	: Dimension caractéristique de la fondation
ΔM	: Masse renfermée (Trapped mass)
ζ	: Coefficient d'amortissement matériel du sol
$S_\zeta(a_0)$: Impédance dynamique en tenant compte de l'amortissement matériel du sol
$\zeta(a_0)$: Amortissement radiatif
d	: Epaisseur de la couche
f	: Onde incidente
g	: Onde réfléchie
h	: Onde réfracté
$\alpha(\omega)$: Coefficient de réflexion
T	: Paramètre de temps: temps que met l'onde incidente réfléchie pour arriver à la surface libre
k	: Paramètre géométrique caractérisant la profondeur de la couche
ω_c	: Fréquence de coupure
r	: Rayon de coud de triangle
m_{rec}	: Masse de réceptacle

m_{rot}	: Masse rotative
L	: Longueur de la tige d'assemblage
ρ_b	: Densité de béton
e	: Enfoncement de la fondation cylindrique
$g(a,\omega)$: Fonction de Green
Δe	: La distance verticale entre deux disque
$[S^f(\omega)]$: Matrice des raideurs dynamiques pour le cas d'un espace infini
$[G(\omega)]$: Matrice de flexibilité dynamique composée par des éléments $g_{ij}(\omega)$
$\{e\}$: Vecteur correspond à la rotation de corps rigide des disques par rapport au centre de la base de la fondation
$\{u(\omega)\}$: Vecteur des amplitudes des déplacements des disques
$[M]$: Matrice de masse des corps rigides de sol excavé
$ S $: Module de la fonction d'impédance

INTRODUCTION GENERALE

I.1) INTRODUCTION

Les fondations de machines constituent une partie inévitable et relativement coûteuse dans la construction de tout complexe industriel. Par ailleurs, l'industrialisation rapide de certains pays en voie de développement ainsi que le taux rapide de croissance industrielle des pays émergents a contribué à la construction des fondations de machines de nombreux projets industriels.

La conception des massifs de fondation de telles machines requiert toutefois un certain degré d'expertise ainsi que des connaissances approfondies dans les domaines de l'ingénierie structurale et de la dynamique des sols. En Algérie, la conception de cette catégorie particulière d'ouvrages est dans la quasi-totalité des cas étudiés, sous traitée à des bureaux d'études techniques étrangers.

Un aspect important de l'analyse du problème des vibrations des massifs de fondation (ou encore du phénomène d'interaction dynamique sol-structure) réside dans l'établissement de relation d'interaction force – déplacement (impédance dynamique) à l'interface du système sol-fondation, ce qui revient essentiellement à l'évaluation de la matrice des impédances dynamiques de la fondation. Le cas le plus fréquent étant celui d'un sol sous jacent beaucoup plus souple que celui du massif de fondation, il est alors possible de supposer sans perte de généralité, que les dimensions de la fondation ne sont pas altérées sous l'action des vibrations de sorte que six composantes (trois déplacements, et trois rotations) sont suffisantes pour décrire son mouvement.

Pour trouver la fonction d'impédance, un problème de conditions aux limites mixtes doit être résolu, pour lequel des déplacements sont présents au niveau de l'aire de contact sol-fondation, et les vecteurs tractions sont nuls à la surface libre (*A. Pais et E. Kausel, 1988*). Les exigences rigoureuses de sécurité imposées à la conception des ouvrages stratégiques (tels que centrales nucléaires, barrages, réservoirs à gaz liquéfié, etc...) d'une part, et l'apparition de moyens de calcul numérique puissants d'autre part, ont permis de développer des méthodes d'analyse rigoureuses telle que : la Méthode des Eléments Finis (MEF) ou la Méthode des Equations Intégrales aux Frontières (MEIF). Ces méthodes rigoureuses requièrent, néanmoins, une base théorique solide en vue de l'idéalisation du système réel dynamique sol-fondation ainsi qu'un effort laborieux de préparation des données d'entrée notamment pour les études paramétriques susceptibles d'être effectuée. En outre, l'effort d'interprétation des résultats peut être significatif de sorte que l'ingénieur de Génie Civil se trouve souvent intimidé par l'utilisation de telles techniques numériques.

Fort heureusement, des développements théoriques récents ont permis une avancée considérable dans les techniques d'analyses disponibles et dans l'interprétation analytique des effets d'interaction sol-fondation (*Wolf & Meek, 1994a, 1994b, 1994c*). En particulier, la complexité mathématique et le coût induit par l'utilisation des méthodes numériques rigoureuses en vue d'une détermination précise des fonctions d'impédance peuvent être considérablement réduits par le recours à des modèles physiques simplifiés. Ces derniers répondent largement au besoin de calcul et présentent de nombreux avantages tels que : simplicité et clarté, physique, économie et un potentiel de généralisation, nonobstant leur capacité à restituer la réalité physique du phénomène étudié, ce qui semble confirmer tout leur intérêt pour les études de vibrations des massifs de fondation.

Dans la présente étude, les fonctions d'impédance dynamique de fondation sur sols multicouches sont approchées en utilisant le concept des modèles de cône, appliqués à que des massifs rigides soumis à des sollicitations harmoniques généralisées (forces, et/ou moments). La réponse aux efforts transitoires peut être déterminée par décomposition de la sollicitation en séries de Fourier.

Pour la loi de comportement du sol, nous ne nous référons qu'au seul modèle viscoélastique linéaire équivalent. En effet, s'agissant de vibrations de machines, leur bon fonctionnement nécessite une limitation de l'amplitude de leurs déplacements. Par voie de conséquence, les

efforts transmis au sol de fondation sont faibles et celui-ci n'est pratiquement pas sollicité au-delà de son domaine d'élasticité.

I.2) SYNTHÈSE DES TRAVAUX ANTERIEURS

L'étude de la réponse dynamique des fondations superficielles ou enterrées dans un milieu homogène ou stratifié, revêt une importance vitale pour la conception des fondations supportant des machines vibrantes, et plus particulièrement aux problèmes liés à l'interaction sol-structure. La détermination des fonctions d'impédance dynamique constitue une étape clef dans l'analyse dynamique par sous-structures des systèmes sol-fondations soumis à des sollicitations d'origine sismique, ou celles dues aux vibrations des machines.

Ceci a fait que cette discipline a connue beaucoup de progrès ces dernières décennies, plusieurs méthodes ont été développées, à savoir :

- Le modèle à un degré de liberté: masse – ressort – amortisseur l ;
- Théorie du demi-espace élastique ;
- Modèles de cône basés sur le concept de la propagation des ondes ;
- Solutions analytiques ;
- Solutions semi-analytiques ;
- Méthode des éléments aux frontières, nécessitant seulement une discrétisation de la frontière du domaine étudié en éléments finis ;
- Méthodes des éléments finis avec des conditions aux limites appropriées ;

L'étude des vibrations des massifs de fondation a constitué un des premiers objectifs de la mécanique des sols. La solution du "problème de *Boussinesq*" obtenue par *Lamb (1904)*, constitue la base de l'étude des oscillations dues à des charges harmoniques appliquées aux fondations reposant à la surface d'un demi-espace homogène. *Reissner (1936)* est le premier qui a développé une solution analytique pour un disque reposant à la surface d'un demi-espace homogène, soumis à une charge verticale, en supposant que la répartition des contraintes au-dessous de la fondation est uniforme. Plus tard, les travaux de (*Sung 1953, Quinlan 1953, Bycroft 1956, Richart et Hall 1970, Luco et Westman 1971, Nagendra et Sridharan 1984*), ont constitué une extension de la solution de *Reissner*. Ils ont étudié différents modes de vibrations avec différentes manières de présenter la répartition des contraintes à l'interface sol-fondation. *Gazetas (1991 a, 1991 b)* a développé des formules simples et des graphes pour le calcul des fonctions

d'impédance des fondations superficielles ou enterrées pour les différents modes de vibration. Ces formules présentent l'intérêt d'être faciles à exploiter par les ingénieurs.

Pour la plupart des études faites dans ce domaine, le sol au-dessous de la fondation est idéalisé comme un espace semi-infini homogène. En réalité les sols de fondation ne sont que rarement homogènes, un cas d'hétérogénéité typique est créé par la présence, à une faible profondeur, d'une couche de sol nettement plus raide que la couche de surface. La réponse d'une fondation circulaire reposant à la surface d'une couche de sol surmontant un substratum rocheux, soumise à une charge verticale, a été évaluée par *Warburton (1957)*. Il a étudié l'influence de la couche de sol sur la fréquence de résonance de la fondation pour différentes valeurs du coefficient de Poisson

Bycroft (1956) était le premier à présenter une solution pour les vibrations des fondations dans un milieu stratifié. *Gazetas et Rosset (1979)* ont développé une solution de la réponse due aux vibrations verticales d'une fondation filante fondée en surface d'une monocouche surmontant une assise rocheuse. Ils ont démontré que la présence d'une couche de faible profondeur tend à augmenter l'amplitude et la fréquence de résonance, comparé au cas du demi-espace homogène. *Luco (1974)*, *Kausel et Rosset (1975a)*, *Kausel et Rosset (1975b)*, *Hadjian et Luco (1977)*, *Kagawa et Kraft (1981)*, *Tassoulas et Kausel (1983)*, *Gazetas (1983)*, *Wong et Luco (1985)*, *Apsel et Luco (1987)*, *Wolf (1985)*, *Baidya et Sridharan (1994)*, *Ahmad et Rupani (1999)*, *Asik et Vallabhan (2001)*, quelques travaux, cités à titre d'exemple, qui ont considéré la stratification et l'hétérogénéité du sol dans leurs analyses. La majorité des études sont basées sur des approches analytiques ou semi-analytiques.

Gazetas et Stokoe (1991) ont détaillé les différents types d'investigations expérimentales relatives aux vibrations des massifs de fondation, en montrant les avantages et les limitations de chacune. Ils ont qualifié les résultats issus du champ expérimental, comme les plus fiables, à condition que la propagation des ondes ne soit pas interrompue par la présence de frontières artificielles latérales, renvoyant l'énergie transportée par les ondes vers la fondation au lieu d'être dissipée, comme c'est le cas dans les tests effectués aux laboratoires.

Les études de *Sridharan et al (1990)*, *Baidya et Muralikrishna (2000, 2001)*, *Baidya et Sridharan (2002)*, *Mandal et Baidya (2003)*, peuvent être considérées comme les investigations expérimentales, les plus importantes dans le cas des sols stratifiés. Le modèle de cône tronqué demi-infini a été développé à l'origine par *Ehlers (1942)*, pour modéliser une fondation reposant à la surface d'un demi-espace homogène, soumise à des mouvements de translation verticale et horizontale. Le mode de balancement n'était examiné que 30 ans plus tard; *Meek et Veletsos (1974)* ont développé un modèle de masse-ressort-amortisseur (système à un degré de liberté), avec des coefficients indépendants de la fréquence représentant le cône en rotation d'une manière exacte, constituant ainsi la base des modèles à paramètres concentrés. Le mode de torsion a été étudié par *Veletsos et Nair (1974)*, en se basant sur le modèle de cône.

Donc, on constate que les modèles de cône initialement, ne présentaient qu'une simplification de la réalité. Ils étaient employés pour obtenir une signification physique des phénomènes vibratoires (vibrations des massifs de fondation). Le fait que le cône soit dynamiquement équivalent à une interconnexion d'un nombre limité de masses, ressorts et d'amortisseurs, a encouragé certains chercheurs à ajuster les résultats obtenus par les modèles de cône par ceux des méthodes exactes, dans le domaine des fréquences par lissage (*Veletsos et Verbic, 1973*, *Wolf et Somaini, 1986*, de *Barros et Luco, 1990*).

Encore une fois et pendant une longue période de temps, il n'y a pas eu de nouveau concernant les recherches basées sur les modèles de cône, après plus de 15 ans une progression remarquable s'articulant autour des trois points suivants est observée:

1) La formulation basée sur le modèle de cône tronqué demi-infini est devenue plus claire et plus consistante. Le domaine de son application s'est élargi, et les différents aspects liés à cette modélisation sont mieux assimilés ; la formulation pour le demi-espace homogène est réalisée pour tous les degrés de liberté (*Meek et Wolf, 1992a*). Le cas des sols pratiquement incompressibles est étudié par *Meek et Wolf (1993a)*. Ils proposent de limiter la vitesse de propagation des ondes longitudinales et d'introduire la notion de la masse renfermée (Trapped mass). Des réserves contre l'utilisation des modèles de cône ont été prouvées sans fondement par *Meek et Wolf(1993b)*.

2) Les réflexions et réfractions des ondes dues à la discontinuité matérielle correspondant à l'interface couche de sol-substratum rocheux, à travers le cône est modélisée. Le concept des modèles de cône est généralisé pour les fondations reposant à la surface d'une couche de sol surmontant une base rigide par *Meek et Wolf (1992b)*, et au cas d'une monocouche surmontant un demi-espace flexible, pour les modes de translation et de rotation par *Wolf et Meek (1993)*, *Wolf et Meek (1994a)*.

3) Une extension pour les fondations enterrées dans un demi-espace homogène est étudiée au moyen de disque enterré modélisé par doubles cônes. La sollicitation incidente effective à la base de la fondation est déterminée par *Meek et Wolf (1994)*. Enfin, le concept des modèles de cône est étendu au cas des fondations fondées à la surface ou enterrées dans un sol multicouches (sols à stratification horizontale), par *Wolf et Meek (1994b)* en utilisant le cône tronqué, pour la quel, la matrice de rigidité était déterminée. *Jaya et Prasad (2002)* ont déterminé l'impédance dynamique d'une fondation enterrée dans un milieu stratifié en se basant sur le même modèle. L'inconvénient majeur de cette modélisation, c'est les valeurs négatives que peuvent avoir les coefficients d'amortissement pour les basses fréquences, ce qui est physiquement impossible.

Récemment en 2001, le concept physique de la propagation des ondes à travers des segments de cône avec des réflexions et des réfractions aux interfaces, constituant les discontinuités matérielles, est étendu au cas d'un demi-espace multicouches sans aucune hypothèse supplémentaire. Cette nouvelle technique est détaillée dans *Wolf et Presig (2003)*. La précision de ce modèle est très bonne. *Pradhan et Baidya (2003)* ont déterminé la matrice impédance pour une fondation reposant à la surface d'un sol stratifié, en utilisant la même technique. L'inconvénient des modèles de cône tronqué est ainsi surmonté.

I.3) OBJECTIFS DE LA THESE

L'objectif de cette étude est l'étude des vibrations des massifs de fondation en utilisant les méthodes basées sur la résistance des matériaux qui présentent beaucoup d'avantages à savoir; la simplicité et la clarté, économie et la signification physique.

La méthode des modèles de cône, initialement développée par *Ehlers (1942)*, puis modifiée et améliorée par *Meek et Wolf (1992a)*, sera adoptée pour le calcul des fonctions d'impédance dynamique des fondations superficielles reposant sur sols multicouches, ensuite des fondations enterrées dans sols multicouches, pour les degrés de libertés: horizontal, vertical, balancement, torsion, et de couplages.

La validation des coefficients des impédances dynamiques déterminés, sera faite, par comparaison aux résultats des méthodes rigoureuses basées sur une approche analytique ‘ la méthode des couches minces ‘ (*Kausel 1990*), pour les deux cas : fondation superficielle et enterrée. Des applications seront traitées, pour illustrer l'importance des fonctions d'impédance dans la conception des structures.

En fin une étude paramétrique sous forme d'application, sera entreprise, pour le cas d'une fondation circulaire enterrée dans un sol homogène, afin d'étudier l'influence du paramètre d'enfoncement sur la fonction d'impédance.

1.4) ORGANISATION DE LA THESE

La présente thèse est organisée en quatre (04) chapitres comme suit:

Chapitre II : Il fait l'objet d'un rappel général sur les méthodes de calcul des fonctions d'impédance, une importance particulière sera consacrée aux modèles de cône. Les différents développements concernant cette modélisation seront exposés. Ce chapitre construit la base pour la suite de cette étude.

Chapitre III : Il traite le problème de détermination des fonctions d'impédance d'une fondation superficielle reposant sur sols multicouches, ce chapitre est organisé en deux parties, la première est consacrée à la présentation du problème, on commence par l'exposition de la démarche mathématique pour le calcul des fonctions d'impédance, et la validation des fonctions d'impédance déterminées par l'application des modèles de cône, on les comparant aux fonctions d'impédance issues de l'application des méthodes rigoureuses de l'elasto-dynamique dite 'exactes'.

La deuxième partie est consacrée à diverses applications relatives à l'analyse des vibrations des massifs de fondation de machine. La première application, porte sur le calcul des coefficients d'impédance dynamique d'une fondation de forme quelconque reposant sur un sol élastique homogène. La seconde application concerne l'étude de réponse dynamique en déplacement d'un massif de fondation d'un compresseur reposant sur un sol visco-élastique multicouches, montrant de manière détaillée les différentes étapes de calcul d'un massif de fondation d'une machine vibrante. Et enfin la troisième application, porte sur le dimensionnement d'une fondation d'une machine vibrante reposant sur un sol visco-élastique multicouches.

Chapitre VI : est consacré à l'étude proprement dite d'une fondation enterrée dans un sol multicouches, son organisation est identique au chapitre précédent , partagé en deux parties, la première partie est consacrée à la présentation du problème, par l'exposition de la démarche mathématique pour le calcul des fonctions d'impédance, et la validation des fonctions d'impédance déterminées par l'application des modèles de cône, par comparaison aux fonctions d'impédance issues de l'application des méthodes rigoureuses de l'elasto-dynamique dite 'exactes'.

Dans la deuxième partie, on traite une étude paramétrique sous forme d'application, pour le cas d'une fondation circulaire enterrée, en examinant l'influence du paramètre d'enfoncement sur la fonction d'impédance.

Enfin, une conclusion générale de la thèse sera exposée au dernier chapitre.

*La simplicité basée sur la rationalité
est l'ultime sophistication*

A. S Veletsos

CONCEPT DE CONE

II.1) INTRODUCTION

Bien que dans le premier cas, la machine soit en général la source des sollicitations, et dans le second les sollicitations proviennent directement du sol, les objectifs sont identiques : prévoir à partir des sollicitations extérieures les mouvements du massif de fondation, en tenant compte à la fois des caractéristiques de la fondation et du sol support. L'objectif principal de la conception des machines vibrantes est la limitation des amplitudes des sollicitations de tous les modes de vibrations, à un niveau satisfaisant le bon fonctionnement de la machine, et le confort du personnel travaillant dans le milieu environnant immédiat. Dans ce chapitre on présentera en bref, les fondements théoriques des modèles de cône et on exposera les expressions des fonctions d'impédance dynamiques, pour le cas des massifs des fondations rigides soumis à des sollicitations harmoniques.

On note que l'amplitude du déplacement du massif de fondation d'une machine vibrante est limité, dans le cas d'un chargement dynamique il est de l'ordre d'un dixième de millimètre (Pecker, 1984), comparé au déplacement limite de quelques centimètres dans le cas d'un chargement statique. Par conséquent, les efforts transmis au sol de fondation sont faibles, et celui-ci n'est pratiquement pas sollicité dans le domaine plastique (pas de déformation permanente).

II.2) DEFINITION GENERALE DE L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION

Les fonctions d'impédance sont utilisées pour l'analyse des vibrations des massifs de fondation, et plus généralement pour les problèmes de l'interaction sol-structure.

Considérons une fondation de forme quelconque reposant sur la surface d'un milieu semi-infini et soumise à une sollicitation harmonique $P_0 \exp(i\omega t)$ (figure II.1). Outre la sollicitation appliquée, les forces s'exerçant sur la fondation sont les forces d'inertie et les forces

de réaction de sol $R(t)$. Il en résulte, en régime stationnaire, un déplacement $Z_0 \exp(i\omega t)$ de la fondation. Associons à la fondation réelle une fondation fictive de même caractéristiques géométriques mais de masse nulle. Soit $Z(t)$ son déplacement lorsqu'elle est soumise à la force appliquée $P(t)$. Par définition, on appelle impédance de la fondation le quotient de la force appliquée au déplacement de la fondation sans masse (Pecker, 1984) :

$$S(t) = \frac{P(t)}{Z(t)} \quad (\text{II.1a})$$

Il est évident que, les forces d'inertie de la fondation étant nulles, l'impédance est égale au quotient de la réaction $R(t)$ exercée par le sol sur la fondation au déplacement de celle-ci :

$$S(t) = \frac{R(t)}{Z(t)} \quad (\text{II.1b})$$

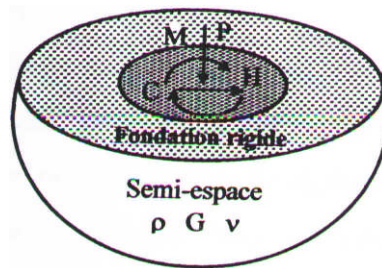


Figure II.1 : Réponse d'une fondation à une sollicitation harmonique

Dans le cas d'une fondation partiellement enterrée, la réaction $R(t)$ se compose des efforts développés sous la base de la fondation et des efforts développés le long des faces latérales en contact avec le sol.

A partir de l'équation (II.1a ou 1b), on peut définir l'impédance d'une fondation pour les modes de translation (horizontale ou verticale), de balancement et de torsion. Notons que l'application d'une force horizontale donnant naissance à la fois à un déplacement horizontal et à une rotation, il existe également une impédance couplée rotation-déplacement horizontal. Celle-ci se définit comme le rapport de la force (ou du moment) appliquée à la rotation (ou au déplacement horizontal) résultant.

II.3) IMPEDANCE D'UN OSCILLATEUR SIMPLE A UN DEGRE DE LIBERTE

On considère un oscillateur simple à un degré de liberté (figure II.2), constitué d'une masse m , d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de caractéristique c , afin d'illustrer la forme générale des fonctions d'impédance. L'équation d'équilibre dynamique de cet oscillateur soumis à une excitation harmonique $P_0 e^{i\omega t}$ s'écrit :

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = P_0 e^{i\omega t} \quad (\text{II.2})$$

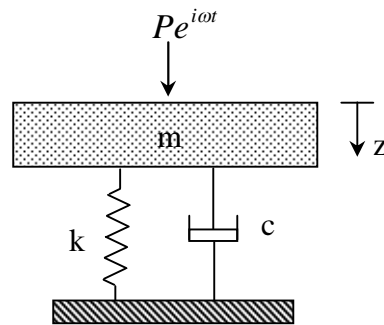


Figure II.2 : Système à un degré de liberté

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$z(t) = \frac{P e^{i\omega t}}{(k - m\omega^2) + i\omega c} \quad (\text{II.3})$$

A partir de l'équation (II.3), on peut définir l'impédance dynamique de cet oscillateur :

$$S(\omega) = (k - m\omega^2) + i\omega c \quad (\text{II.4})$$

II.4) FORME GENERALE DE L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION

Pour la représentation des fonctions d'impédance, on définit la fréquence adimensionnelle :

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{c_s} \quad (\text{II.5})$$

Ou:

ω : Pulsation de l'excitation

r_0 : dimension caractéristique de la fondation

c_s : vitesse de propagation des ondes de cisaillement

Par analogie à l'équation (II.4), l'impédance peut s'écrire sous la forme:

$$S(a_0) = K[k(a_0) + ia_0c(a_0)] \quad (\text{II.6})$$

$k(a_0)$: Partie réelle représentant l'effet de la masse et de l'inertie du sol.

$c(a_0)$: Partie imaginaire représentant l'effet de l'amortissement radiatif résultant de la dissipation d'énergie due à la propagation des ondes loin de la fondation.

K : Raideur statique de la fondation, disponible dans la littérature.

II.5) IMPEDANCE DES SOLS DE FONDATION

Pour un massif de fondation rigide présentant deux plans de symétrie verticaux, les degrés de liberté associés à la translation verticale et à la torsion autour d'un axe vertical sont découplés, par contre les degrés de liberté associés au balancement autour d'un axe horizontal et à la translation horizontale sont couplés. Les équations d'équilibre d'un tel massif sont, en prenant les axes au centre de gravité du massif :

$$m\ddot{z} + R_z(t) = Q_z(t) \quad (\text{II.7a})$$

$$m\ddot{x} + R_x(t) = Q_x(t) \quad (\text{II.7b})$$

$$I_y\ddot{\phi} + R_\phi(t) - R_x(t)z_c = M_y(t) \quad (\text{II.7c})$$

$$I_z\ddot{\theta} + R_\theta(t) = M_z(t) \quad (\text{II.7d})$$

Les deux équations supplémentaires concernant le déplacement suivant y et le balancement autour de x sont obtenues en permutant les indices x et y dans les deuxième et troisième équations de la relation (II.7).

Avec :

m : Masse totale de la fondation ;

I_z, I_x : Moment d'inertie massique de la fondation par rapport à un axe horizontal passant par le centre de gravité ;

z_c : Distance du centre de gravité G de la fondation à la surface de contact sol-fondation ;

$R(t)$: Réactions du sol au centre de gravité géométrique de la surface de contact;

Q, M : Sollicitations (Force, moment) agissant au centre de gravité de la fondation ;

z, x : Déplacements vertical, horizontal du centre de gravité respectivement ;

θ, ϕ : Rotations autour d'un axe vertical, horizontal passant par le centre de gravité.

Pour des sollicitations harmoniques de pulsations ω , et par analogie avec l'oscillateur simple, l'impédance des réactions à la base de la fondation est définie par :

$$\{R\} = [s]\{u_b\} \quad (\text{II.8})$$

[s]: désigne la matrice d'impédance formée de termes complexes;

$\{u_b\}$: vecteur déplacement du centre de gravité de la base de la fondation.

Les équations du mouvement s'écrivent alors sous forme matricielle :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [S]\{u\} = \{Q\} \quad (\text{II.9})$$

Où:

[S]: désigne la matrice déduite de la matrice d'impédance.

[M]: Matrice de masse.

$\{u\}$: vecteur déplacement généralisé.

$\{Q\}$: vecteur des sollicitations généralisées (forces et moments appliqués).

$$S = \begin{Bmatrix} S_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_x & S_{x\phi} - S_x z_c & 0 \\ 0 & S_{x\phi} - S_x z_c & S_\phi - 2S_{x\phi} z_c + S_x z_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_\theta \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{Bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Il est à noter que [S] et [M] sont des matrices de dimension 6x6. Il convient de compléter la relation (II.10) en ajoutant deux lignes et deux colonnes par permutation des indices x et y.

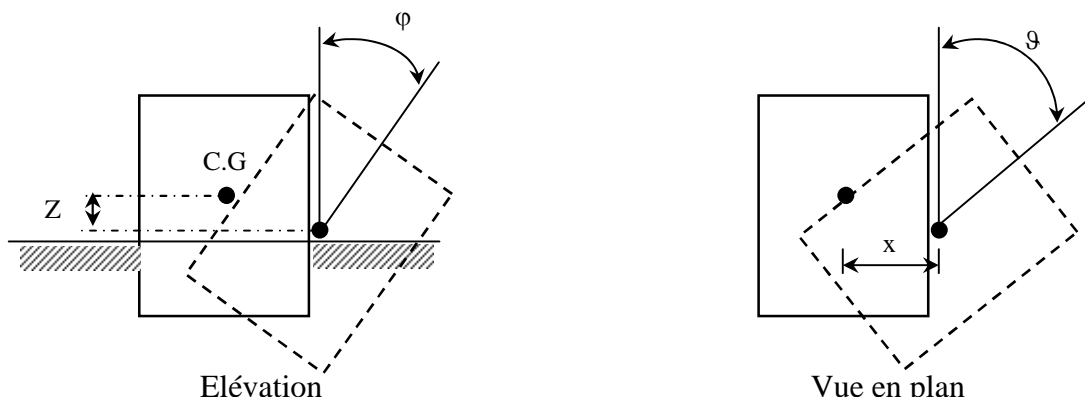


Figure II.3 : Définition des composantes du déplacement

II.6) METHODES DE DETERMINATION DES FONCTIONS D'IMPEDANCE

La méthode de détermination de la fonction d'impédance doit refléter à la fois les caractéristiques de la fondation et du sol support à savoir :

- La forme de la fondation (circulaire, rectangulaire, arbitraire) ;
- Profil du sol (demi-espace homogène, couche de sol surmontant un substratum rocheux, sol stratifié ...) ;
- L'enfoncement de la fondation (superficielle, enterrée, pile ...).

Actuellement, différentes procédures sont employées pour la détermination des impédances de fondation. Il est donc important de connaître les limitations et les avantages de chacune d'entre elles, pour choisir la mieux adaptée au problème posé. Selon la classification de *Gazetas (1993)*, on peut distinguer:

II.6.1) Solutions continues (analytiques)

Ces solutions sont obtenues à partir des résolutions analytiques des équations de l'élastodynamique. Selon la façon dont est traitée la condition aux limites à l'interface sol-fondation, on peut distinguer les solutions entièrement analytiques et solutions semi-analytiques (*Pecker, 1984*).

Les solutions analytiques ne peuvent être obtenues qu'en simplifiant la condition de contact, les contraintes de cisaillement sont supposées nulles à l'interface, pour les mouvements de translation verticale et de balancement autour d'un axe horizontal, les contraintes normales sont supposées nulles pour le mouvement de translation horizontale. Les solutions de ce type ont été obtenues pour les fondations circulaires, filantes, rectangulaires, et sur des sols stratifiés.

Les solutions semi-analytiques constituent un compromis entre les solutions numériques et analytiques. Elles sont obtenues par discrétisation de la surface de contact. L'avantage principal de ces méthodes, est de prendre correctement en compte l'aspect tridimensionnel du problème, mais dès que la stratification devient trop importante, ou bien pour les fondations enterrées, ces méthodes deviennent moins efficaces.

II.6.2) Solutions discrètes (numériques)

La plupart des solutions sont obtenues par la méthode des éléments finis (MEF), pour résoudre les problèmes complexes qui ne peuvent pas être résolus par des formulations analytiques. L'ensemble sol-fondation est modélisé par un maillage d'éléments finis. La difficulté principale pour la mise en œuvre des solutions numériques réside dans la simulation des conditions aux limites. Pour éviter la réflexion d'ondes heurtant les bords du modèle, des frontières absorbantes sont associées à ces limites, simulant de façon exacte la présence au delà de la frontière d'un milieu infini.

Ces méthodes sont bien adaptées au traitement des problèmes plans ou axisymétriques. Aucune limitation n'existe concernant les hétérogénéités du sol, ou de l'enfoncement de la fondation. Les problèmes tridimensionnels sont par contre mal appréhendés. La méthode des équations intégrales aux frontières (MEIF) récemment développée, bénéficie de la puissance des approches analytique et numérique (*Gazetas, 1993a*). Cette méthode transforme les équations de l'élastodynamique en relations d'intégrales entre le vecteur déplacement et vecteur contrainte. Elle nécessite la discrétisation des frontières du domaine étudié en éléments finis. Les conditions de radiation des ondes à l'infini sont incluses dans la formulation de manière inhérente.

II.6.3) Méthodes approximatives

Ces méthodes sont basées sur des techniques simples, qui simplifient l'interprétation physique du problème, et qui donnent des résultats satisfaisants. Elles peuvent donner des solutions pour des situations très compliquées, qu'on ne peut pas résoudre d'une manière exacte (*Wolf 1994, Wolf 1985, Meek et Veletsos 1974*). Dans notre cas, on a utilisé le modèle de cône, qui a été introduit il y'a plus d'un siècle par *Ehlers (1942)*. Ces modèles offre beaucoup d'avantages:

1- Signification physique:

La complexité des solutions rigoureuses obscurées souvent l'aspect physique du problème à analyser. Par ailleurs, le recours aux méthodes basées sur des modèles simples, permet une conception plus claire, et une maîtrise meilleure de la physique du phénomène.

2-Simplicité:

En raison de la simplification physique du problème, l'analyse de ce dernier devient plus simple, et la résolution des équations mathématiques qui en résultent est plus facile et rigoureuse.

3-Généralisation :

Les modèles physiques simples peuvent couvrir l'ensemble des configurations, même les plus compliquées, qui existent en pratique, à savoir :

- La forme de la fondation (interface sol-fondation) : circulaire, rectangulaire, ou de forme quelconque, modélisée comme un disque équivalent ou réel.
- La nature du profil de sol: demi-espace homogène, couche surmontant un demi-espace flexible, couche surmontant un demi-espace rigide, ainsi que les sols stratifiés.
- Mode d'encastrement: fondations superficielles, enterrées (entièrement ou partiellement), les fondations en piles (pieux) peuvent être aussi modélisées.

4-Précision :

L'utilisation des modèles physiques simples conduit à quelques pertes de précision en les comparant aux méthodes dites 'rigoureuses', telles que les méthodes numériques basées sur les éléments finis, mais ceci est compensé par les nombreux avantages qu'elles présentent. On note qu'en général, ces méthodes offrent une précision suffisante de point de vue d'ingénieur.

Le recours aux modèles physiques simples (modèles de cône), permet l'étude des vibrations des massifs de fondation, et de l'interaction sol-structure, ce qui rend ces méthodes très pratiques. Néanmoins, certains chercheurs ont mis des réserves contre l'utilisation de ces modèles (*Wolf et Meek 1993*), pour les trois raisons suivantes:

- Ils sont basés sur la résistance des matériaux et non pas sur la théorie rigoureuse du demi-espace élastique.
- L'espace négligé en dehors du domaine de cône. (paragraphe II.7.1)
- Les modèles de cône ne peuvent pas présenter l'influence des ondes de surface de Rayleigh.

II.7) MODELES DE CONE POUR LE CALCUL DES FONCTIONS D'IMPEDANCE

Le sol est considéré comme un milieu semi-infini homogène, linéairement élastique, ayant une masse volumique ρ et sans amortissement matériel (voir paragraphe II.9, pour l'introduction de l'amortissement matériel ζ).

Soit une plaque circulaire rigide de rayon r_0 , sans masse, appelée disque, reposant à la surface du sol, dans le cas général pour les fondations de forme quelconque, on définit un rayon équivalent r_0 , ayant la même surface A_0 pour les modes de translation, et le même moment d'inertie I_0 pour les modes de rotation.

Le sol est associé à un cône élastique tronqué semi-infini ayant pour chaque degré de liberté sa propre dimension caractéristique par Z_0 , appelée hauteur d'apex (Wolf, 1994 ; Wolf & Meek, 1994c). Le rapport Z_0/r_0 détermine l'angle d'ouverture du cône, qui ne dépend que du coefficient de Poisson du sol. L'angle d'ouverture du cône n'est pas choisi d'une manière arbitraire, il est déduit, dans le cas d'un disque sur un demi-espace homogène pour les basses fréquences, par égalisation, pour chaque degré de liberté, le coefficient de la raideur statique issue de modèle de cône, avec la valeur qui lui correspond issue de la théorie rigoureuse du demi-espace élastique.

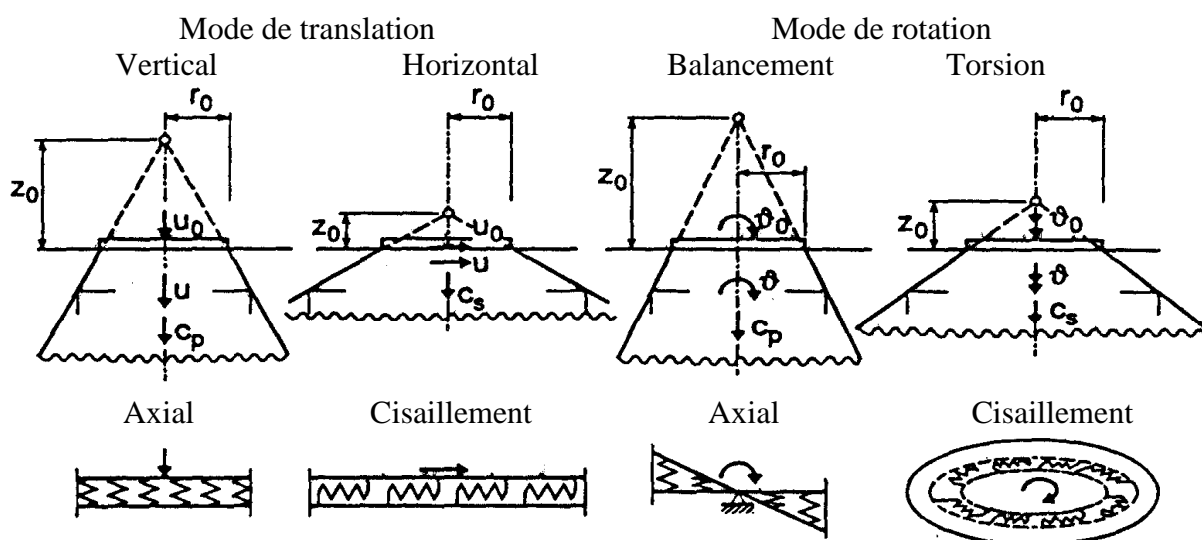


Figure II.4 : Modèle de cône correspondant à chaque degré de liberté

L'application d'une charge sur le disque, transmettra au sol des efforts exercés sur la surface de contact, qui augmente avec la profondeur, représentée approximativement à travers le cône. L'espace situé en dehors du domaine de cône n'est pas pris en compte (Wolf, 1994 ; Zhang & Wolf, 1998 ; Wolf & Deeks, 2004).

Le recours à une modélisation du sol par un modèle physique simplifié, permet de remplacer le schéma compliqué de la propagation des ondes à travers le demi-espace, qui est essentiellement tridimensionnel, par une propagation unidimensionnelle de l'onde à travers le cône (Wolf, 1997). Il est nécessaire de faire la distinction entre le cône en translation associé aux mouvements vertical et horizontal et le cône en rotation associé aux mouvements de balancement et de torsion (Fig.II.5).

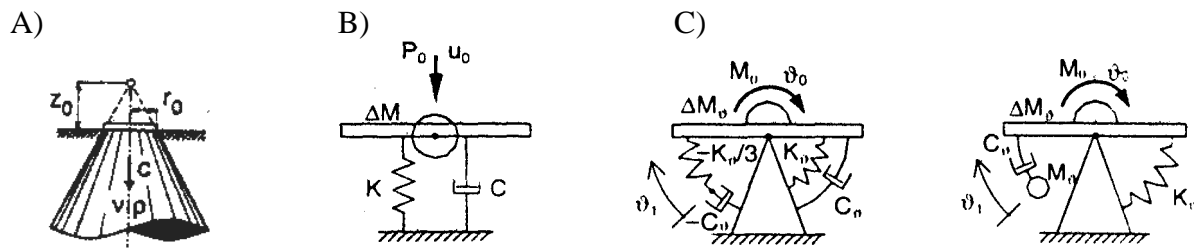


Figure II.5 : Modèle de cône et modèle discret correspondant. A) cône. B) Modèle discret pour translation. C) Modèle discret pour rotation

Les vitesses de propagation d'onde 'c' correspondantes sont : $c = c_s$ pour les cônes en translation horizontale et en torsion, et $c = c_p$ pour les cônes en translation verticale et en balancement. La même densité massique ρ pour le demi-espace homogène est utilisée pour tous les modèles de cône. Dans le cas où $\nu = 0.5$, la vitesse de propagation des ondes longitudinales c_p tend vers l'infini (tableau II.1), d'où la limitation de cette vitesse pour des valeurs élevées de ν : $(1/3 < \nu \leq 0.5)$ à $2 C_s$ (Wolf, 1994, Wolf, 1998, Wolf, 2004).

Les tableaux ci-dessous résument les propriétés des modèles de cône et le modèle d'élément discret nécessaire pour la modélisation d'une fondation de forme arbitraire, reposant sur la surface d'un sol semi-infini, homogène.

Tableau II.1 : Relations entre les paramètres élastiques pour la mécanique de sol, la dynamique de sol, et les modèles de cône

	E_c	ν	G	ν	c_s	c_p
$E_c =$	E_c		$2G \frac{1-\nu}{1-2\nu}$			ρc_p^2
$\nu =$		ν		ν	$\frac{\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 - 2}{2\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 - 2}$	
$G =$	$\frac{E_c}{2} \frac{1-2\nu}{1-\nu}$		G		ρc_s^2	
$\nu =$		ν		ν	$\frac{\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 - 2}{2\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 - 2}$	
$c_s =$	$\sqrt{\frac{E_c}{2\rho} \frac{1-2\nu}{1-\nu}}$		$\sqrt{\frac{G}{\rho}}$		c_s	
$c_p =$	$\sqrt{\frac{E_c}{\rho}}$		$\sqrt{2 \frac{G}{\rho} \frac{1-\nu}{1-2\nu}}$			c_p

Tableau II.2. Propriétés des modèles de cône et du modèle d'élément discret

Mouvement	Horizontal	vertical		Balancement		Torsion
Rayon équivalent r_0	$\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$		$\sqrt[4]{\frac{4I_0}{\pi}}$		$\sqrt[4]{\frac{2I_0}{\pi}}$
Rapport d'apex z_0/r_0	$\frac{\pi}{8}(2-\nu)$	$\frac{\pi}{4}(1-\nu)\left(\frac{c}{c_s}\right)^2$		$\frac{9\pi}{32}(1-\nu)\left(\frac{c}{c_s}\right)^2$		$\frac{9\pi}{32}$
Coefficient de Poisson ν	Toutes les valeurs de ν	$\leq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < \nu \leq \frac{1}{2}$	$\leq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < \nu \leq \frac{1}{2}$	Toutes les valeurs de ν
Vitesse de l'onde c	c_s	c_p	$2c_s$	c_p	$2c_s$	c_s
Masse attachée	0	0	$2.4\left(\nu - \frac{1}{3}\right)\rho A_0 r_0$	0	$1.2\left(\nu - \frac{1}{3}\right)\rho I_0 r_0$	0
Model d'élément-discret	$k = \rho c^2 A_0 / z_0$ $c = \rho c A_0$			$k_g = 3\rho c^2 I_0 / z_0$ $c_g = \rho c I_0$ $M_g = \rho I_0 z_0$		

Pour déterminer les dimensions de cône, le rayon équivalent r_0 est déterminé en premier lieu par égalisation de l'aire A_0 ou du moment d'inertie I_0 , respectivement pour les mouvements de translation et de rotation d'une fondation de forme arbitraire aux valeurs correspondantes associées à un disque circulaire de rayon r_0 , présentant une aire et une inertie identiques. Les résultats sont spécifiés dans le tableau (II.2). Pour le calcul de la rigidité statique, des expressions pratiques sont données dans le tableau (II.3) (A. Pais et E. Kausel, 1988). La première colonne concerne les raideurs statiques d'un disque, la deuxième donne les expressions des raideurs statiques pour une section rectangulaire de longueur $2a$ et de largeur $2b$ ($2b \leq 2a$). Et le tableau (II.3A) donne les expressions des raideurs statiques pour une fondation de forme arbitraire (Gazelas, 1991 a, 1991 b).

Tableau II.3A : Raideur statique d'une fondation superficielle sur un demi-espace homogène : cas des fondations de forme rectangulaire

	Disque (r_0)	Fondation rectangulaire	
		Autour de l'axe latéral (2b)	Autour de l'axe longitudinal (2a)
Horizontal	$\frac{8Gr_0}{2-\nu}$	$\frac{Gb}{2-\nu} \left[6.8 \left(\frac{a}{b} \right)^{0.65} + 0.8 \frac{a}{b} + 1.6 \right]$	$\frac{Gb}{2-\nu} \left[6.8 \left(\frac{a}{b} \right)^{0.65} + 2.4 \right]$
vertical	$\frac{4Gr_0}{1-\nu}$	$\frac{Gb}{1-\nu} \left[3.1 \left(\frac{a}{b} \right)^{0.75} + 1.6 \right]$	
Balancement	$\frac{3Gr_0^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{Gb^3}{1-\nu} \left[3.73 \left(\frac{a}{b} \right)^{2.4} + 0.27 \right]$	$\frac{Gb^3}{1-\nu} \left[3.2 \frac{a}{b} + 0.8 \right]$
Torsion	$\frac{16Gr_0^3}{3}$	$Gb^3 \left[4.25 \left(\frac{a}{b} \right)^{2.45} + 4.06 \right]$	

Tableau II.3B : Raideur statique d'une fondation superficielle sur un demi-espace homogène : cas des fondations de forme arbitraire

	Disque (r_0)	Fondation de forme arbitraire	
		Autour de l'axe latéral (2b)	Autour de l'axe longitudinal (2a)
Horizontal	$\frac{8Gr_0}{2-\nu}$	$\frac{2Ga}{2-\nu} \left[2 + 2.5 \left(\frac{A_0}{4a^2} \right)^{0.85} \right] (= k_h)$	$k_h - \frac{0.2Ga}{0.75-\nu} \left[1 - \frac{b}{a} \right]$
vertical	$\frac{4Gr_0}{1-\nu}$	$\frac{2Ga}{1-\nu} \left[0.73 + 1.54 \left(\frac{A_0}{4a^2} \right)^{0.75} \right]$	
Balancement	$\frac{3Gr_0^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{2.9G}{1-\nu} I_{0b}^{0.75} \left(\frac{a}{b} \right)^{0.15}$	$\frac{G}{1-\nu} I_{0b}^{0.75} \left(\frac{a}{b} \right)^{0.25} \left[2.4 + 0.5 \frac{b}{a} \right]$
Torsion	$\frac{16Gr_0^3}{3}$	$3.5GI_0^{0.75} \left(\frac{a}{b} \right)^{0.4} \left(\frac{I_0}{b^4} \right)^{0.2}$	

D'après le tableau (II.2), on remarque que pour les modes verticaux et de balancements qui ont les valeurs du coefficient de Poisson compris entre $1/3 < \nu \leq 1/2$, le sol est pratiquement incompressible. La vitesse de propagation des ondes de compression est limitée à $2c_s$:

$$\begin{cases} c = c_p & \text{pour } \nu \leq 1/3 & \text{(II.11a)} \\ c = 2c_s & \text{pour } 1/3 < \nu \leq 1/2 & \text{(II.11b)} \end{cases}$$

Une masse renfermée (trapped mass) qui croit linéairement avec le coefficient de Poisson est introduite, pour tenir compte d'une partie du sol sous la fondation qui se déplace en phase comme un corps rigide avec la fondation :

$$\text{Pour le mouvement vertical : } \begin{cases} \Delta M = \mu \rho r_0^3 & \text{(II.12a)} \\ \mu = 2.4\pi(\nu - 1/3) & \text{(II.12b)} \end{cases}$$

$$\text{Pour le mouvement balancement : } \begin{cases} \Delta M_g = \mu_g \rho r_0^5 & \text{(II.13a)} \\ \mu_g = 0.3\pi(\nu - 1/3) & \text{(II.13b)} \end{cases}$$

II.7.1) Expressions des coefficients de l'impédance dynamique

Dans le cas des modèles de cône, des expressions analytiques pour les coefficients de l'impédance dynamique $S(a_0)$ en fonction de la fréquence adimensionnelle (a_0), sont les suivants : (Wolf, 1994; Zhang, 1998; Wolf, 2004)

A. Mode de translation :

$$S(a_0) = K[k(a_0) + ia_0 c(a_0)] \quad \text{(II.14)}$$

Où:

$$a_0 = \frac{\omega z_0}{c} \quad \text{(II.15a)}$$

$$k(a_0) = 1 - \frac{\mu}{\pi} \frac{z_0}{r_0} \frac{c_s^2}{c^2} a_0^2 \quad \text{(II.15b)}$$

$$c(a_0) = \frac{z_0}{r_0} \frac{c_s}{c} \quad \text{(II.15c)}$$

Pour le mouvement horizontal $c = c_s$ et $\mu = 0$, quelque soit la valeur du coefficient de Poisson ν , le rapport (z_0/r_0) est tiré du tableau (II.2).

Concernant le mouvement vertical $c = c_p$ et $\mu = 0$ pour $\nu \leq 1/3$, et pour les valeurs de coefficient de Poisson ν comprises entre $1/3 < \nu \leq 1/2$, $c = 2 c_s$, quand à μ et le rapport (z_0/r_0) sont tirés du tableau (II.2).

B. Mode de rotation:

$$S_g(a_0) = K_g [k_g(a_0) + ia_0 c_g(a_0)] \quad (\text{II.16})$$

Où:

$$k_g(a_0) = 1 - \frac{4}{3} \frac{\mu_g}{\pi} \frac{z_0}{r_0} \frac{c_s^2}{c^2} a_0^2 - \frac{1}{3} \frac{a_0^2}{\left(\frac{r_0 c}{r_0 c_s}\right)^2 + a_0^2} \quad (\text{II.17a})$$

$$c_g(a_0) = \frac{z_0}{3r_0} \frac{c_s}{c} \frac{a_0^2}{\left(\frac{r_0 c}{z_0 c_s}\right)^2 + a_0^2} \quad (\text{II.17b})$$

Pour la torsion $c = c_s$ et $\mu_g = 0$ pour toutes les valeurs de v , le rapport z_0/r_0 est tiré du tableau(II.2).

Pour le mouvement de balancement $c = c_p$, $\mu_g = 0$ pour $v \leq 1/3$, et pour les valeurs de coefficient de Poisson v comprises entre $1/3 < v \leq 1/2$, $c = 2 c_s$, quand à μ_g et le rapport (z_0/r_0) sont tirés du tableau (II.2).

II.8) PRINCIPE DE CORRESPONDANCE

La présence de l’amortissement matériel induit en général une perte d’énergie, cette dernière appelée perte hystérétique linéaire de l’énergie est indépendante de la fréquence. La seule modification résultant de la prise en compte de l’amortissement matériel, est la modification des constants élastiques. L’amortissement matériel est introduit dans la solution pour un chargement harmonique, en utilisant ‘principe de correspondance de Biot’, en multipliant les constantes élastiques avec un facteur complexe $(1 + 2i\zeta)$ (Wolf, 1985 ; Wolf 1994; Meek & Wolf,1994a):

$$G \rightarrow G(1 + 2i\zeta) \quad (\text{II.18a})$$

$$Ec \rightarrow Ec (1 + 2i\zeta) \quad (\text{II.18b})$$

Dans le cas des modèles de cône, l’application du principe de correspondance, pour une excitation harmonique, se traduit par la modification des coefficients de l’impédance dynamique, en introduisant les constantes élastiques complexes suivantes:

$$c_s \rightarrow c_s \sqrt{1+2i\zeta} \approx c_s (1+2i\zeta) \quad (\text{II.19a})$$

$$c_p \rightarrow c_p \sqrt{1+2i\zeta} \approx c_p (1+2i\zeta) \quad (\text{II.19b})$$

et la fréquence adimensionnelle:

$$a_0 \rightarrow a_0^* = \frac{a_0}{\sqrt{1+2i\zeta}} \approx a_0 (1-2i\zeta) \quad (\text{II.20})$$

Pour un système amorti l'expression de l'impédance (éq.II.6) devient:

$$S_\zeta(a_0) = K[k_\zeta(a_0) + ia_0 c_\zeta(a_0)] \quad (\text{II.21})$$

Appliquant le principe de correspondance à l'expression de l'impédance dans le cas non amorti :

$$S(a_0^*) = S_\zeta(a_0) = K(1-2i\zeta)[k(a_0^*) + ia_0^* c(a_0^*)] \quad (\text{II.22})$$

Dans les modèles de cône, on peut facilement introduire l'effet de l'amortissement matériel pour un chargement harmonique dans les expressions analytiques des coefficients de l'impédance dynamique qui existe déjà. Cependant pour mieux refléter l'aspect physique des équations, on exprime linéairement, les coefficients d'impédance dynamique avec amortissement matériel en fonction des coefficients d'impédance dynamique non amorti, pour les mêmes fréquences. Ceci en égalant les coefficients complexes amortis $k(a_0^*), c(a_0^*)$ à leurs parties réelles non amorties $k(a_0), c(a_0)$. En utilisant les équations (II.20) et (II.22), on obtient :

$$S_\zeta(a_0) = K(1-2i\zeta)[k(a_0) + ia_0(1-i\zeta)c(a_0)] \quad (\text{II.23})$$

Donc :

$$k_\zeta(a_0) = k(a_0) - \zeta a_0 c(a_0) \quad (\text{II.24a})$$

$$c_\zeta(a_0) = c(a_0) + 2\frac{\zeta}{a_0} k(a_0)$$

(II.24b)

Le coefficient d'amortissement $c_\zeta(a_0)$ augmente avec l'augmentant de ζ , par contre la raideur $k(a_0)$ diminue.

En négligeant l'effet de l'amortissement matériel sur les coefficients de raideur, l'impédance dynamique est approximée comme suit:

$$S_{\zeta}(a_0) = K \left[k(a_0) + ia_0 \left(c(a_0) + 2 \frac{\zeta}{a_0} k(a_0) \right) \right] \quad (\text{II.25})$$

$$\Rightarrow S_{\zeta}(a_0) = Kk(a_0)[1 + 2i\zeta(a_0) + 2i\zeta] \quad (\text{II.25})$$

$\zeta(a_0)$ désigne l'amortissement radiatif dans le cas d'un sol sans amortissement matériel ζ

$$\zeta(a_0) = \frac{a_0 c(a_0)}{2k(a_0)} \quad (\text{II.26})$$

Pour les basses et moyennes fréquences (le domaine le plus important dans la pratique), la seconde approximation des fonctions d'impédance amorties (éq.II.25) est suffisamment précise (Wolf 1994). Et qu'au dessous de la fréquence de coupure, correspondant à la fréquence fondamentale de la couche, égale à $\pi/2$ dans la direction horizontale, et π dans la direction verticale, le coefficient d'amortissement ne s'annule pas, comme dans le cas non amorti (résonance parfaite). La fréquence de coupure dans le cas d'un sol amorti n'existe pas.

II.9) CONCLUSION

Après avoir défini l'impédance dynamique d'une fondation rigide sans masse, de forme générale, et exposée brièvement les différentes méthodes de détermination des fonctions d'impédance, tout en indiquant les avantages et les limitations de chacune d'elle, On a présenté le fondement théorique des modèles de cône, et les expressions des fonctions d'impédance pour tous les degrés de liberté translation et rotation, pour le cas d'une fondation circulaire rigide reposant sur sol demi fini élastique et homogène. Les détails nécessaires à la compréhension sont résumés dans les tableaux donnés.

Enfin, on a exposé les fonctions d'impédance qui permettent la prise en compte de l'amortissement matériel du sol 'principe de correspondance', Ces fonctions approximatives sont suffisamment précise, en plus ont l'avantage de refléter au mieux l'aspect physique.

Ce chapitre constitue la base pour la compréhension de la suite de la thèse, la détermination des fonctions d'impédance pour le cas de sols multicouches, est faite simplement par des manipulations mathématiques, en effet, la propagation des ondes à travers les segment de cône avec des réflexions et des réfractions aux interfaces des discontinuités mécaniques, est étendu au cas d'un sol multicouches sans aucune hypothèse supplémentaire.

IMPEDANCE D'UNE FONDATION SUPERFICIELLE SUR SOLS MULTICOUCHES

III.1) INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la détermination des fonctions d'impédance d'une fondation superficielle reposant sur sols multicouches ainsi que la validation des résultats, il est divisé en deux parties.

La première partie, consacrée à une brève description de la démarche mathématique pour le calcul des fonctions d'impédance, en effet l'évaluation de la réponse d'une couche de sol à des sollicitations constitue l'un des problèmes fondamentaux dans l'analyse des vibrations des massifs de fondation. Il s'agit de déterminer les caractéristiques du mouvement au voisinage de la surface du sol, cette évaluation est indispensable pour tous les problèmes ayant trait au comportement du sol de fondation. Mathématiquement le problème à résoudre est celui de la propagation d'ondes dans un milieu continu. Il devient rapidement d'une grande complexité si l'on désire tenir compte de la stratification de sol. Après un bref rappel sur les propagations d'ondes et de coefficient de réflexion, on expose les expressions des fonctions d'impédance par ordre de complexité : le cas d'une couche surmontant un substratum rocheux, suivi par le cas d'un monocouche surmontant un demi-espace, et enfin, le cas d'un sol multicouches.

La première partie est également consacrée à la validation des modèles de cône, en comparant les coefficients de l'impédance dynamique obtenus par l'application des modèles de cône avec ceux obtenus par l'application de la méthode des couches mince (*Kausel, 1990*). Deux cas sont étudiés ; le cas d'une fondation circulaire sur sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène et celui d'une fondation circulaire sur sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.

La deuxième partie est consacrée à diverses applications, trois applications tirées de la vie d'ingénieur. La première application, porte sur le calcul des coefficients d'impédance dynamique d'une fondation de forme quelconque reposant sur un sol visco-élastique homogène. La seconde application concerne l'étude de réponse dynamique en déplacement d'un massif de fondation d'un compresseur reposant sur un sol visco-élastique multicouches, montrant de manière détaillée les différentes étapes de calcul d'un massif de fondation d'une machine vibrante. La troisième application, porte sur le dimensionnement d'une fondation d'une machine vibrante reposant sur un sol visco-élastique multicouches.

III.2) COEFFICIENT DE REFLEXION

Le mécanisme d'onde généré au niveau d'une interface dans un cône correspondant à une interface entre deux couches est illustré dans la figure III.1. A titre illustratif, le degré de liberté vertical d'un disque reposant sur la surface d'une couche d'épaisseur d , caractérisée par un coefficient de Poisson ν , de vitesse de propagation de l'onde longitudinale C_p , de masse volumique ρ , surmontant un demi-espace de propriétés physiques respectives ν' , ρ' , et C_p' , est considéré.

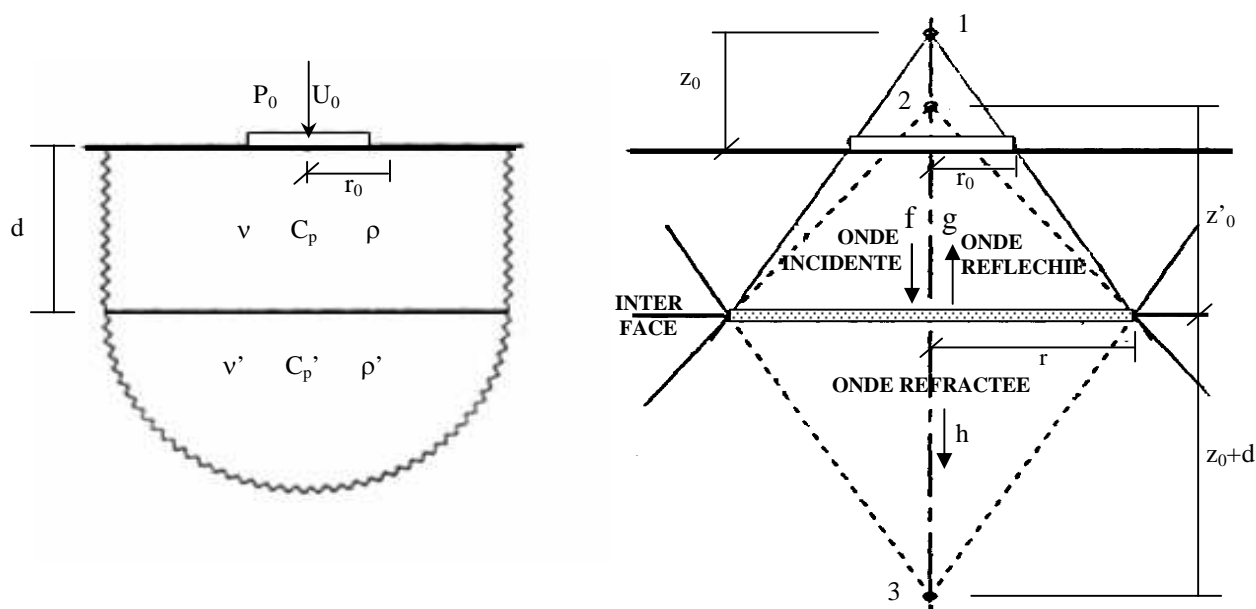


Figure III.1 : Réflexion et réfraction d'une onde dans une couche d'épaisseur limitée surmontant un demi-espace homogène

Dans un sol multicouches, lorsque l'onde commence à se propager, elle heurte après une distance 'd' une surface de discontinuité des caractéristiques mécaniques séparant deux milieux

appelé : interface (figure III.1). L'onde se propage loin de disque (fondation circulaire) dans une section de cône vers le bas appelé : l'onde incidente f , le sommet de la hauteur d'apex est désigné par '1' dans la figure III.1, le cône et la hauteur d'apex sont déterminés comme dans le cas d'un demi-espace homogène avec les propriétés ρ , v et C_p . Quand l'onde heurte une discontinuité des caractéristiques mécaniques (correspondant a une interface entre deux couches), se développe une source de trouble conceptualisée comme un disque fictif, de l'onde incidente 'f', découlera une onde réfractée 'h' qui se propage vers le bas et une onde réfléchie 'g' qui se propage vers le haut, les deux ondes se propagent loin de l' interface entre deux couches.

Les conditions de continuité, de la contrainte et du déplacement, fournissent les équations nécessaires à la détermination des amplitudes des ondes, réfléchies et réfractées. Le rayon de disque fictif à l'interface est $r = ((z_0+d)/z_0)r_0$. L'onde réfractée 'h' se propage dans son propre cône, le sommet de la hauteur d'apex désigne par '2', déterminé par les caractéristiques mécaniques ρ' , v' et C'_p , et la hauteur d'apex z'_0/r . L'onde réfléchie 'f' se propage aussi dans son propre cône, le sommet de la hauteur d'apex désigne par 3, déterminé par les caractéristiques mécaniques ρ , v et C_p , et la hauteur d'apex $(z_0+d)/r$. (figure III.3), la relation entre l'onde réfléchie 'g', l'onde incidente 'f', et l'onde réfractée 'h' est décrite par l'éq.III.1.

$$f(\omega) + g(\omega) = h(\omega) \quad \text{(III.1)}$$

Dans le cadre de notre travail, on s'est limité à donner les expressions des Coefficients de réflexions, calculées en utilisant les modèle de cône développés et présentés par *Wolf (1994)* sans montrer tous les développements de leurs formulations.

Le coefficient de réflexion $-\alpha(\omega)$ est un coefficient complexe dépendant de la fréquence, défini comme le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur l'onde incidente (éq.III.1)

A. Mode de translation

L'expression de Coefficients de réflexions est :

$$-\alpha(\omega) = \frac{g(\omega)}{f(\omega)} = \frac{\beta - \beta'}{\beta + \beta'} \quad (\text{III.2})$$

Ou :

$$\beta = \rho c^2 \left(\frac{1}{z_0 + d} + i \frac{\omega}{c} \right) \quad (\text{III.3a})$$

$$\beta' = \rho' c'^2 \left(\frac{1}{z_0' + d} + i \frac{\omega}{c'} \right) \quad (\text{III.3b})$$

Des équations éq.III.1 et éq.III.2 on déduit :

$$g(\omega) = -\alpha(\omega)h(\omega) \quad (\text{III.4})$$

$$h(\omega) = (1 - \alpha(\omega))f(\omega) \quad (\text{III.5})$$

Les ondes réfléchies et réfractées déterminent l'amplitudes $u_0(\omega)$ de la nouvelle onde incidente f qui se propage dans son cône.

Pour une interface rigide (rocheuse) $c' \gg c$, d'où $-\alpha(\omega) = -1$, donc l'amplitude de l'onde réfractée égale à celle de l'onde incidente et en direction opposé éq.III.6

$$g(\omega) = -f(\omega) \quad (\text{III.6})$$

Pour une interface souple $c' \ll c$, d'où $-\alpha(\omega) = +1$, donc l'amplitude de l'onde réfractée égale à celle de l'onde incidente éq.III.7

$$g(\omega) = f(\omega) \quad (\text{III.7})$$

B. Mode de rotation

L'expression de coefficients de réflexions est :

$$-\alpha(\omega) = \frac{g(\omega)}{f(\omega)} = \frac{\beta - \beta'}{\beta + \beta'} \quad (\text{III.8})$$

Ou :

$$\beta = \frac{3\rho c^2}{z_0 + d} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\frac{\omega^2}{c^2}(z_0 + d)^2}{1 + \frac{\omega^2}{c^2}(z_0 + d)^2} + i \frac{\omega(z_0 + d)}{3c} \frac{\frac{\omega^2}{c^2}(z_0 + d)^2}{1 + \frac{\omega^2}{c^2}(z_0 + d)^2} \right) \quad (\text{III.9a})$$

$$\beta' = \frac{3\rho'c'^2}{z_0} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\frac{\omega^2}{c'^2} z_0}{1 + \frac{\omega^2}{c'^2} z_0^2} + i \frac{\omega z_0}{3c'} \frac{\frac{\omega^2}{c'^2} z_0}{1 + \frac{\omega^2}{c'^2} z_0^2} \right) \quad (\text{III.9b})$$

Les équations III.6 et III.7 concernant le mode de translation reste valable pour le mode de rotation.

III.4) CALCUL DES FONCTIONS D'IMPEDANCE

III.4.1) Cas d'une couche de sol surmontant un substratum rocheux

La figure (III.2) montre la génération des ondes dans le modèle de cône, pour le cas d'un disque rigide, sans masse, de rayon r_0 , reposant à la surface d'un monocouche surmontant un substratum rocheux.

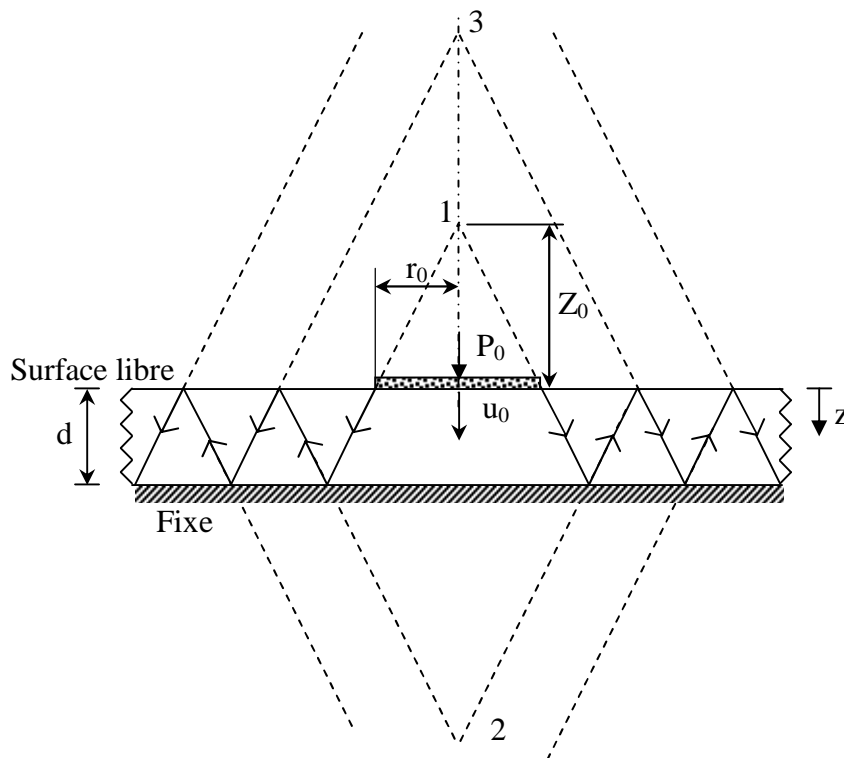


Figure III.2 : Disque en mouvement vertical sur une couche de sol modélisé par le modèle de cône

Soit une force (par exemple verticale) appliquée au disque, une onde incidente se produit et se propage depuis le disque vers la profondeur, le long de cône avec une hauteur Z_0 (apex 1), (la même que dans le cas d'un demi-espace). A l'interface entre la couche de sol et le substratum, l'onde incidente est totalement réfléchiée et se propage dans la direction opposée en créant son propre cône (apex 2). Un autre cône est alors créé quand cette onde se réfléchira à la surface libre (apex 3). Le processus se poursuit, l'amplitude des ondes dans la couche diminue, en raison de la dispersion de l'énergie due à la propagation des ondes vers l'infini dans direction horizontale. Les autres degrés de liberté peuvent être traités de la même manière.

La fonction d'impédance dynamique est déterminée en fonction des paramètres de l'onde l'incident initial, appelé l'onde génératrice. Cette approche est aussi appliquée dans le cas d'une fondation reposante à la surface d'une monocouche surmontant un demi-espace flexible.

L'expression de l'impédance dynamique est une somme de séries en j , qui converge après un nombre fini de terme, comme l'amplitude du déplacement due aux ondes qui s'annule après un nombre limité de cycles.

A.) Mode de translation

L'expression de l'impédance dynamique dans le cas d'une couche de sol surmontant une assise rocheuse pour le mode de translation :

$$S(\omega) = K \frac{1 + i \frac{\omega T}{k}}{1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{e^{-j\omega T}}{1 + jk}} \quad (\text{III.10})$$

B.) Mode de rotation

L'expression de l'impédance dynamique dans le cas d'une couche de sol surmontant une assise rocheuse pour le mode de rotation :

$$S_g(\omega) = K_g \frac{1 + \frac{1}{3} \frac{(\omega T)^2}{\kappa^2 + (\omega T)^2} + i \frac{\omega T}{3\kappa} \frac{(\omega T)^2}{\kappa^2 + (\omega T)^2}}{1 + \frac{2}{1 + i \frac{\omega T}{\kappa}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{e^{-ij\omega T}}{(1 + j\kappa)^3} + i \frac{\omega T}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{e^{-ij\omega T}}{(1 + j\kappa)^2} \right)} \quad (\text{III.11})$$

Avec:

K, K_g : Raideurs statiques d'un disque sur un demi-espace homogène ayant les propriétés mécaniques du monocouche. On note que les expressions de ces coefficients, disponibles dans la littérature (*Gazetas, 1983 ; Sieffert, 1993 ; Wolf, 1994 ...*), ne sont pas utilisées pour le calcul du rapport z_0/r_0 déterminant l'angle d'ouverture de cône, comme dans le cas du demi-espace.

T : Paramètre de temps (temporel) : le temps que met l'onde réfléchie pour arriver à la surface libre (intervalle d'écho).

$$T = \frac{2d}{c} \quad (\text{III.12})$$

k : Paramètre géométrique adimensionnel caractérisant la profondeur de la couche.

$$k = \frac{2d}{z_0} \quad (\text{III.13})$$

c : vitesse de propagation de l'onde

d : profondeur de la couche

C) Notion de la fréquence de coupure

Le comportement d'une fondation reposant sur un demi-espace homogène est très différent de celui d'une fondation reposant sur une couche de sol surmontant un substratum rocheux (sol stratifié en général). En plus des valeurs élevées de la raideur statique dans le cas du monocouche, en particulier pour le mode de translation, comparés à ceux du demi-espace, l'amortissement

radiatif est nettement plus important dans le cas demi-espace (la réponse du disque décroît d'une manière exponentielle) (Wolf, 1994 ; Meek & Wolf, 1991).

Dans le cas d'une couche de sol surmontant une assise rocheuse, une fréquence dite de coupure ' ω_c ' existe, au-dessous de laquelle il n'y a pas de dissipation d'énergie. Le coefficient d'amortissement radiatif est faible ou nul. Ce phénomène s'explique en notant que les ondes diffractées par la fondation sont totalement réfléchies lorsqu'elles heurtent le substratum rigide; l'énergie n'est pas transportée à l'infini dans le demi-espace mais renvoyée vers la fondation, ce n'est que lorsque la fréquence est supérieure à la fréquence de coupure que la dissipation d'énergie prend place (Pecker, 2004). Pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure, les coefficients d'amortissement pour un disque reposant sur un demi-espace et sur une monocouche sont comparables.

On peut montrer que la fréquence de coupure correspond à la fréquence propre de vibration de la couche de sol ($\omega_c = c_s/4 d$) pour les mouvements horizontal et de torsion. Pour les mouvements vertical et de balancement, la fréquence ω_c est prise égale à la fréquence fondamentale de la couche ($c_p/4 d$).

Les résultats précédents mettent clairement en évidence, le risque de la sous-évaluation de la réponse d'une structure, encouru en assimilant le sol de fondation à un demi-espace homogène quand la fréquence du système couplé sol-structure est inférieur à ω_c . La seule modification de la raideur statique de la fondation ne permet pas de prendre correctement en compte la présence de l'assise rocheuse. Donc la structure doit être dimensionnée en conséquence (Pecker., 1984).

III.4.2) Cas d'une couche de sol surmontant un demi-espace homogène.

Le cas d'une couche de sol surmontant un demi-espace homogène est étudié de la même manière que la cas d'une couche de sol surmontant un substratum rocheux, toutes les formules développées dans le cas d'une assise rocheuse reste valable pour le présent cas moyennant des correspondances sur le coefficients de réflexion, en effet, pour tenir compte des ondes réfractées à l'interface, la seule modification consiste à remplacer dans les équations, la constante de coefficients de réflexions (-1) associée à la assise rocheuse par de coefficients de réflexions ($-\alpha$).

A.) Mode de translation

L'expression de l'impédance dynamique dans le cas d'une couche de sol surmontant un demi-espace homogène pour le mode de translation :

$$S(\omega) = K \frac{1 + i \frac{\omega T}{k}}{1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-\alpha(\omega))^j \frac{e^{-ij\omega T}}{1 + jk}} \quad (\text{III.14})$$

B.) Mode de rotation

L'expression de l'impédance dynamique dans le cas d'une couche de sol surmontant un demi-espace homogène pour le mode de rotation :

$$S_g(\omega) = K_g \frac{1 + \frac{1}{3} \frac{(\omega T)^2}{\kappa^2 + (\omega T)^2} + i \frac{\omega T}{3\kappa} \frac{(\omega T)^2}{\kappa^2 + (\omega T)^2}}{1 + \frac{2}{1 + i \frac{\omega T}{\kappa}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-\alpha(\omega))^j \frac{e^{-ij\omega T}}{(1 + j\kappa)^3} + i \frac{\omega T}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} (-\alpha(\omega))^j \frac{e^{-ij\omega T}}{(1 + j\kappa)^2} \right)} \quad (\text{III.15})$$

III.4.3) Cas d'un sol multicouches

Dans un sol multicouches se produit un grand nombre de réflexions et réfractions (chacune des ondes se propage dans son propre cône loin des interfaces des couches), en principe chaque onde de réflexion ou réfraction est considéré comme une onde incidente supplémentaire, qui développe ses propre ondes de réflexion et réfraction, lorsque elle heurte une discontinuité des caractéristiques mécaniques de sol. (figure III.3A)

Le processus se poursuit, l'amplitude des ondes dans les couches diminue en raison de la dispersion de l'énergie due à la propagation des ondes vers l'infini dans la direction horizontale. Les autres degrés de liberté sont traités avec le même principe.

Les relations entre les ondes incidentes sont indiquées dans la figure III.3A, et représentées par la structure illustrée dans la figure III.3B. Dans les sciences numériques (informatique), une telle structure des données se produit fréquemment, et est appelée 'système binaire'. L'intersection des branches de l'arbre sont appelées les nœuds. Dans cette configuration chaque nœud représente une onde incidente qui se propage à travers une couche, produisant des ondes de réflexion et réfraction quand elle heurte une interface.

Le calcul de la fonction d'impédance ne peut être fait manuellement. Cependant, un programme de calcul relativement simple permet de traiter rapidement et facilement un tel problème. Le programme informatique doit traiter chaque nœud par une procédure itérative, et cumuler les contributions de chaque onde à l'amplitude du déplacement de fondation. Le principe d'implémentation de la procédure numérique est illustré dans la figure III.3.

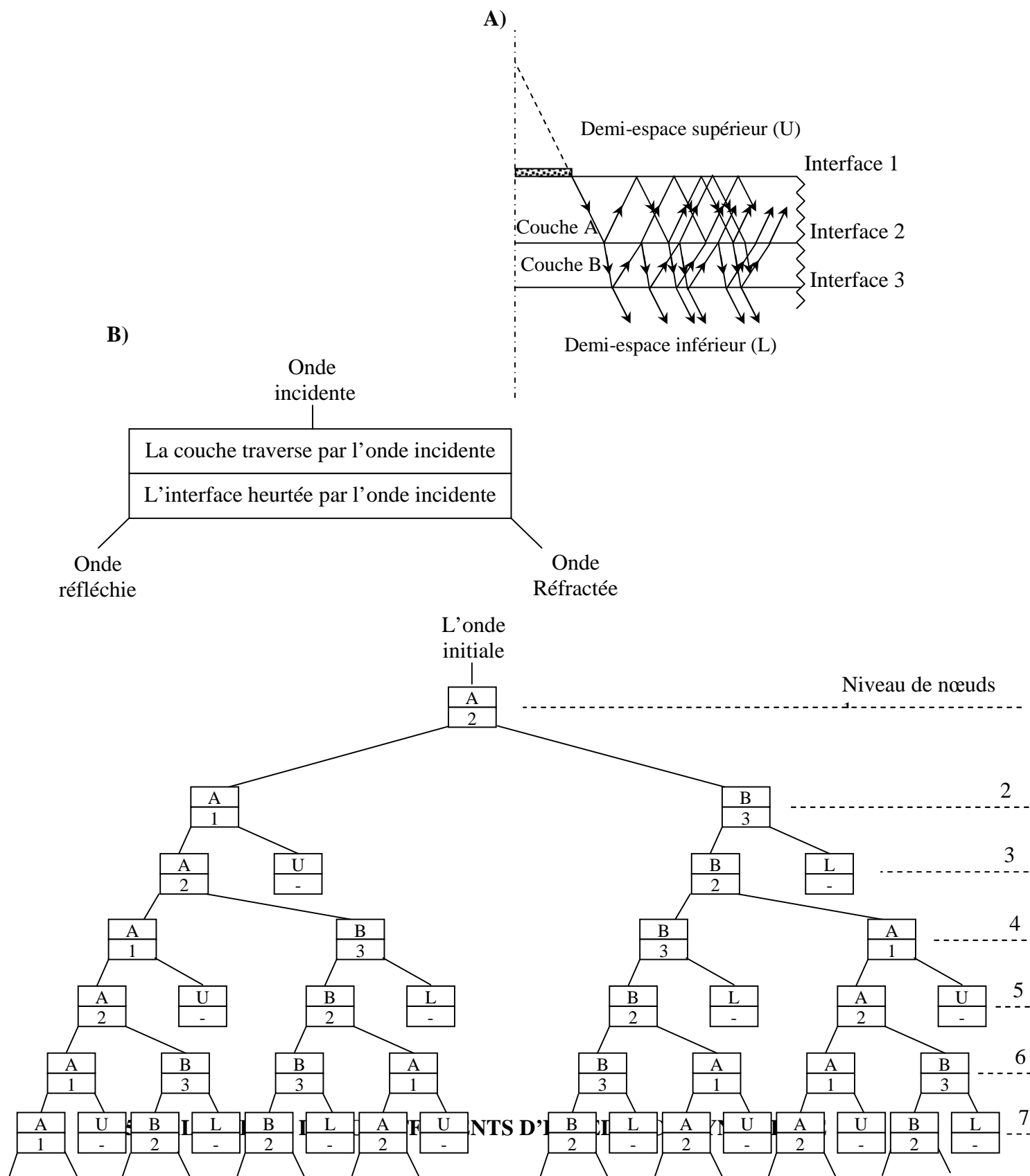


Figure III.3 : Représentation du modèle d'onde par l'arbre binaire A) Modèle d'onde. B) Arbre d'onde correspondant

Afin de valider l'approximation des fonctions d'impédance d'une fondation circulaire de rayon r_0 superficielle reposante sur la surface d'un sol multicouches, on a calculé les coefficients de rigidité dynamique $k(a_0)$ et d'amortissement $c(a_0)$ pour tous les degrés de liberté, en vue de les comparer aux coefficients des méthodes dites 'rigoureuses', deux types de profil de sol sont étudiés, le premier cas est un sol multicouches surmontant un demi-espace homogène (figure III.4A), le second cas est un sol multicouches surmontant un substratum rocheux (figure III.4.B). Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées dans la figure III.4 (Wolf et Deeks, 2004).

Les valeurs des coefficients de rigidité dynamique $k(a_0)$ et d'amortissement $c(a_0)$ issues de l'application de modèle de cône sont représentées dans les figures III.5 et III.7, en fonction de la fréquence adimensionnelle a_0 correspondantes, et comparées aux résultats exacts obtenus de l'application de la méthode des couches minces (Kausel, 1990). Ceux correspondant à la méthode des couches minces sont représentés par des points distincts.

Chaque coefficient dynamique de la fonction d'impédance est décomposé et normalisé conformément à l'équation III.16

$$S(a_0) = K[k(a_0) + ia_0(c)] \quad (III.16)$$

Avec:

a_0 : Fréquence adimensionnelle calculée en fonction de l'onde de cisaillement de la première couche ;

K : Raideurs statiques d'un disque sur un demi-espace homogène ayant les propriétés mécaniques de première couche.

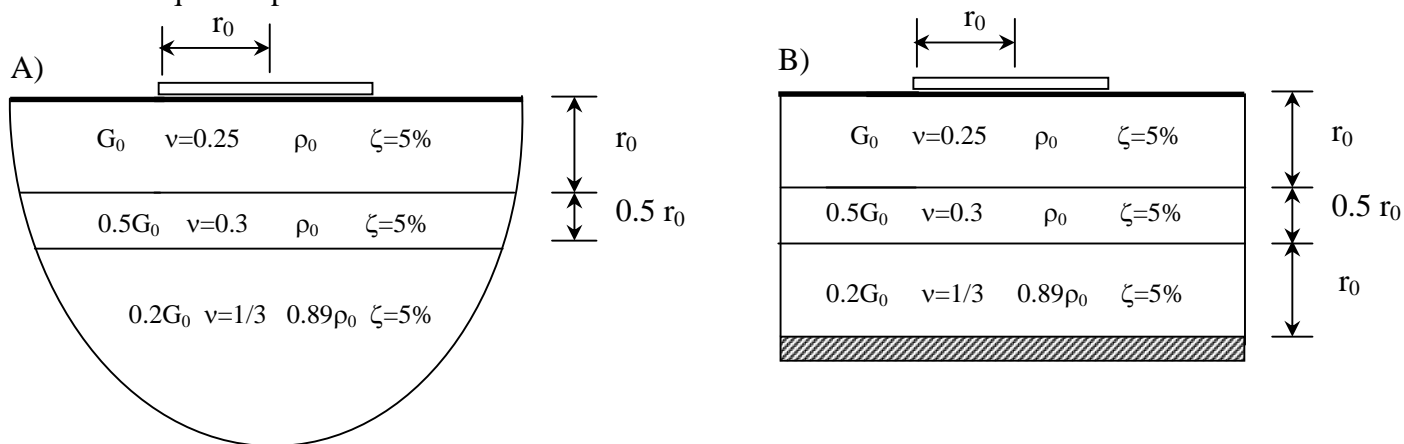


Figure III.4 : Sol multicouches A) Fondation circulaire sur sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène. B) Fondation circulaire sur sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.

Le module $\sqrt{k^2(a_0) + a_0^2 c^2(a_0)}$ associé à chaque degré de liberté est représenté en fonction de la fréquence adimensionnelle a_0 , dans les figures III.6 et III.8

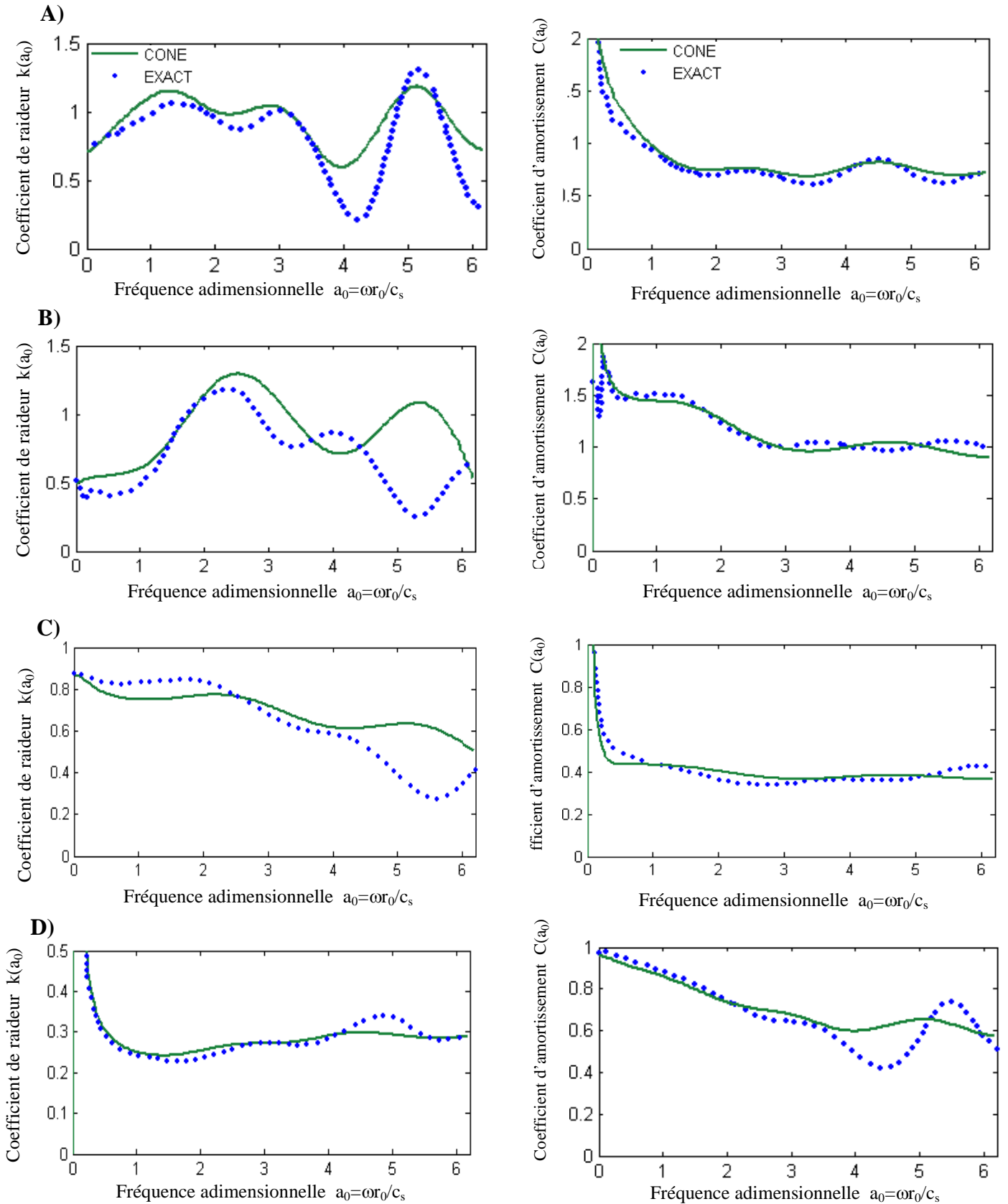


Figure III.5 : Coefficients de l'impédance dynamique d'une fondation circulaire sur sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène. A) Horizontal. B) Vertical. C) Balancement. D) Torsion

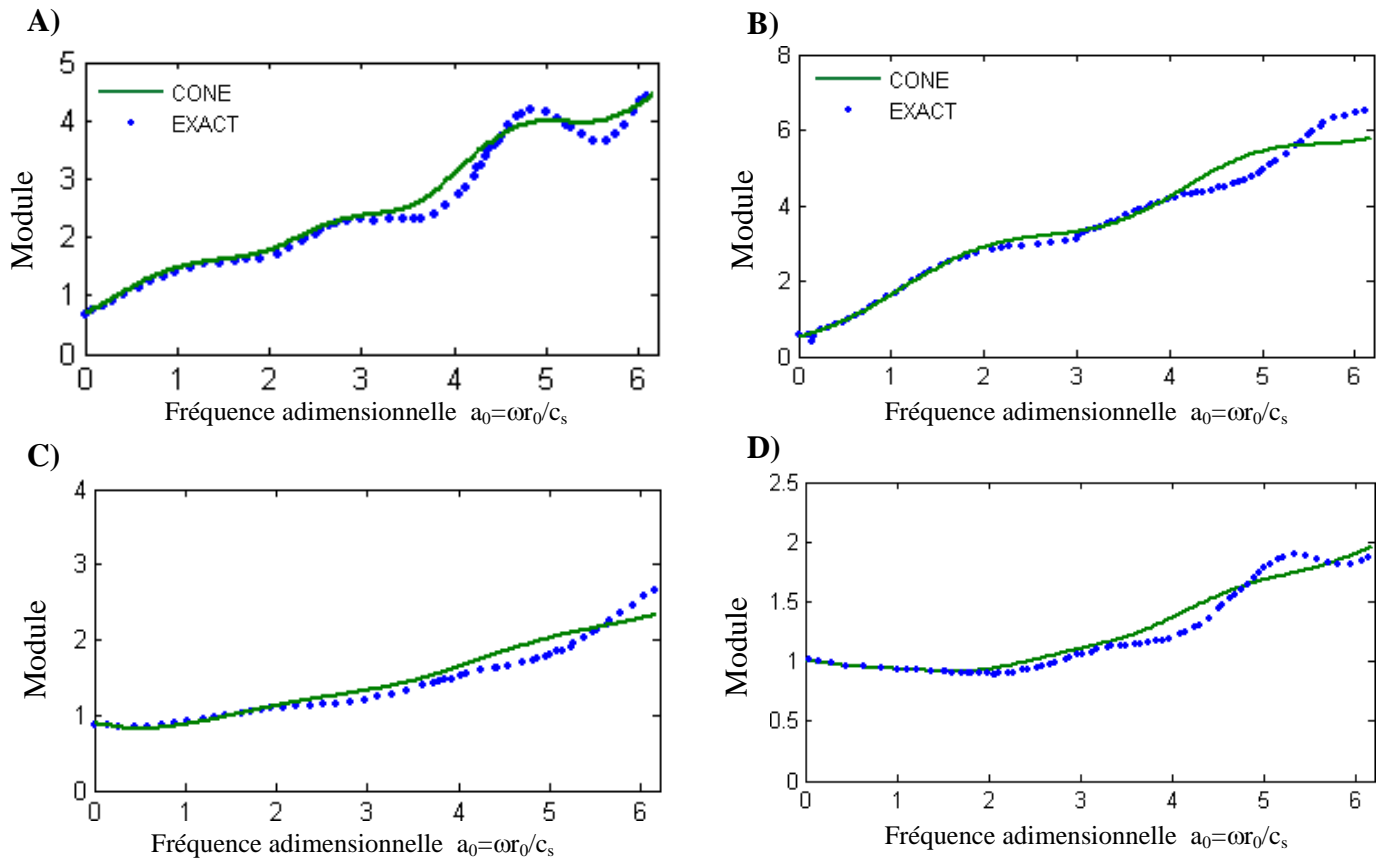


Figure III.6 : Module d'une fondation circulaire sur sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène. A) Horizontal. B) Vertical. C) Balancement. D) Torsion

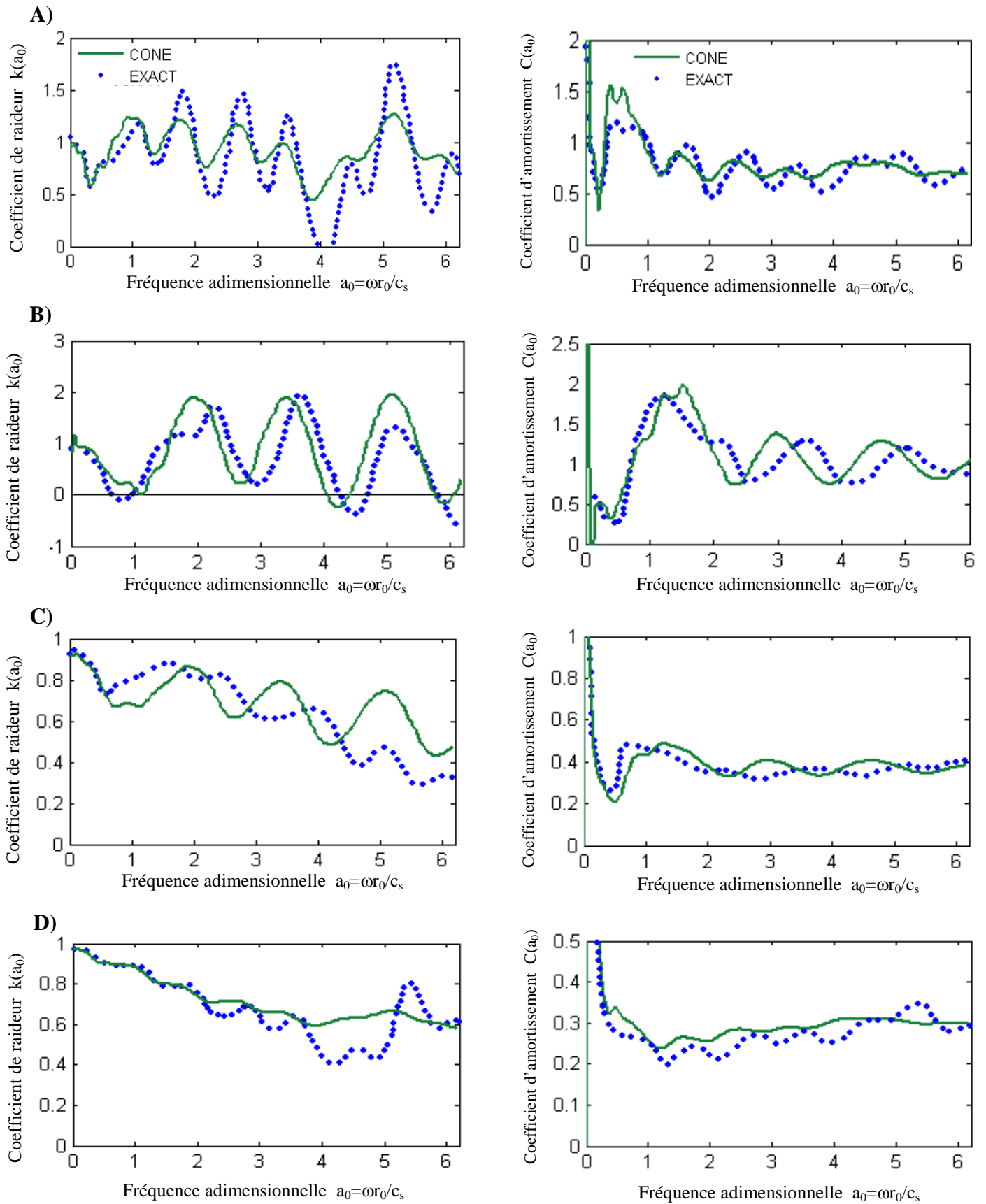


Figure III.7 : Coefficients de l'impédance dynamique d'une fondation circulaire sur sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. A) Horizontal. B) Vertical. C) Balancement. D) Torsion

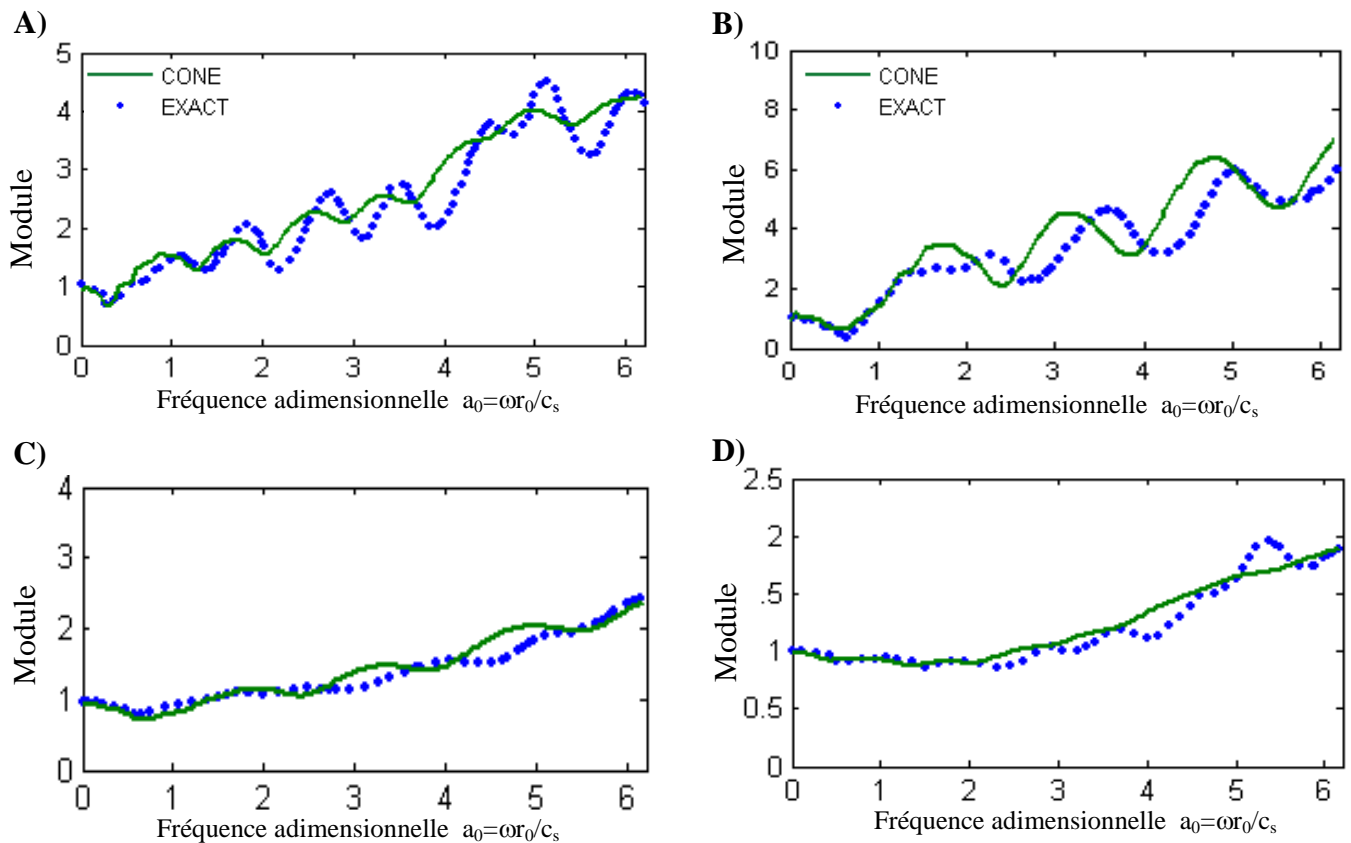


Figure III.8 : Module d'une fondation circulaire sur sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. A) Horizontal. B) Vertical. C) Balancement. D) Torsion

Malgré les formes erratiques des coefficients d'impédance dynamique déterminées par la méthode rigoureuse des couches minces et les modèles de cône, les courbes correspondantes présentent une bonne concordance, particulièrement pour les coefficients d'amortissement dans le cas d'un bicouche reposant sur un demi-espace infini.

Pour les coefficients de raideur $k(a_0)$ on constate une différence considérable dans la plage des grandes fréquences. Ces divergences diminuent fortement si l'on considère les variations du module de la fonction d'impédance. On note aussi que les modules des fonctions d'impédance est pratiquement identique pour le domaine des faibles fréquences ($a_0 < 1$). En général la déviation maximale des modules dans le domaine des hautes fréquences demeure inférieure à $\pm 20\%$, ce qui représente un ordre de grandeur typique acceptable en ingénierie.

III.6) FREQUENCE DE COUPURE

Pour les sols multicouches surmontant un substratum rocheux et avec amortissement matérielle, il existe une fréquence de coupure, en dessous et au-dessus de cette valeur, il existe deux comportements dynamiques de sol complètement différents. En dessous la fréquence du coupure, l'amortissement radiatif correspondant au coefficient d'amortissement s'annule.

La fréquence de coupure est égale à la fréquence fondamentale de la couche fixe a sa base, les difformités correspondantes: pour les degrés de mouvement horizontal et de tension dans le cisaillement et pour les degrés de mouvement vertical et de basculement dans la dilatation (*Wolf et Deeks, 2004*).

Pour les sols multicouches surmontant un substratum rocheux et avec $\zeta=0$ une bonne concordance est observé entre les modèles de cône et la méthode des couches mince pour déceler la fréquence de coupure. En particulier, en dessous la fréquence de coupure au l'amortissement radiatif correspondant au coefficient d'amortissement s'annule (*Wolf et Deeks, 2004*).

Donc, les modèles de cône qui utilise l'approche résistance des matériaux, prédise correctement le comportement en dessous de la fréquence de coupure, où la partie imaginaire dans l'expression de la fonction d'impédance s'annule approximativement.

III.7) EXEMPLES D'APPLICATIONS :

La détermination de la fréquence et de l'amplitude à la résonance d'une fondation soumise à une charge dynamique, a fait l'objet de certaines recherches ces dernières années. Vu l'importance de ces deux paramètres pour la conception des fondations soumises aux vibrations de machines, et bien entendu la conception des ouvrages soumis à des sollicitations sismiques, tels que les centrales nucléaires, barrages ... etc.

L'étape la plus importante dans la détermination de ces deux grandeurs, est l'estimation des fonctions d'impédance (coefficients de raideur et d'amortissement). En utilisant les méthodes appropriées de l'analyse dynamique, à l'aide de ces fonctions, l'amplitude de vibration peut être calculée en utilisant l'équation du mouvement.

La plus part des études faites, traites le cas d'un sol au-dessous de la fondation supposé homogène. Par contre, les études sont limitées pour le cas d'une assise infiniment rigide (rocheuse) à une faible profondeur.

Pour illustrer l'importance et la manière d'utilisation des fonctions d'impédance dynamique dans le calcul des réponses et le dimensionnement des massifs de fondation, la présente partie de chapitre est consacrée à diverses applications, la première application, porte sur le calcul des coefficients d'impédance dynamique d'une fondation de forme quelconque reposant sur un sol visco-élastique homogène. La seconde application concerne l'étude de réponse dynamique en déplacement d'un massif de fondation d'un compresseur reposant sur un sol visco-élastique multicouches, montrant de manière détaillée des différentes étapes de calcul d'un massif de fondation d'une machine vibrante. La troisième application, porte sur le dimensionnement d'une fondation d'une machine vibrante reposant sur un sol visco-élastique multicouches.

III.7.1) APPLICATION N°1 : Calcul des coefficients d'impédance dynamique d'une fondation de forme arbitraire

L'exemple suivant montre deux manières de calculer les coefficients d'impédance dynamique d'une fondation de forme arbitraire (figure III.9). La première méthode basée sur des graphes et des tables donnant des résultats de bonne précision (*Gazetas, 1991a, 1991b*), tout en étant simples et clair. Les résultats obtenus par cette méthode sont comparés à ceux calculés par l'application des modèles de cône (cas d'un demi-espace homogène, en utilisant les données du tableau II.2). Les notations sont gardées comme elles qui sont utilisées pour chaque méthode.

Par la suite on étudie l'évolution des coefficients d'impédance dynamique par les modèles de cône, en fonction des différents types de sol, deux cas en plus sont étudiés : le premier cas représente la fondation de forme arbitraire reposante sur la surface d'un sol monocouche surmontant un substratum rocheux, illustré en figure III.10, les caractéristiques mécaniques et physiques de la monocouche sont identiques au demi-espace homogène illustré en figure III.9. Le deuxième cas représente la fondation de forme arbitraire reposante sur la surface d'un sol monocouche surmontant un demi-espace rigide, les caractéristiques mécaniques et physiques de profil de sol sont illustrées en figure III.11.

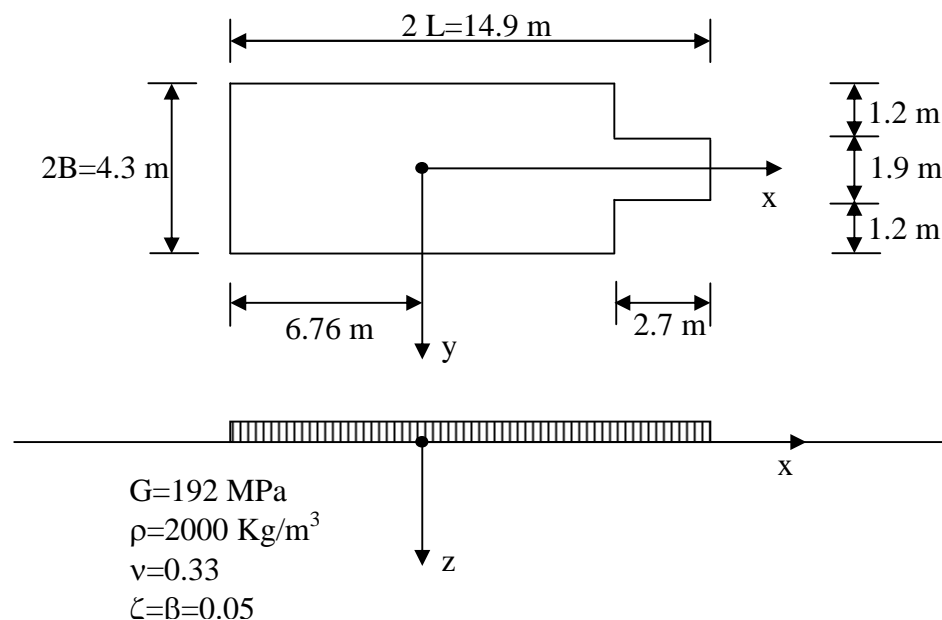


Figure III.9: Caractéristiques géométriques et matérielles de l'exemple

$$L/B=3.5, A_b(A_0)=57.6\text{m}^2, I_{bx}=82.4\text{m}^4, I_{by}=904\text{m}^4, \omega=2\pi f=188.5 \text{ s}^{-1}, \\ a_0=1.3, V_s(c_s)=310 \text{ m/s}, V_{la}=500 \text{ m/s}, \chi=0.26 \text{ m}.$$

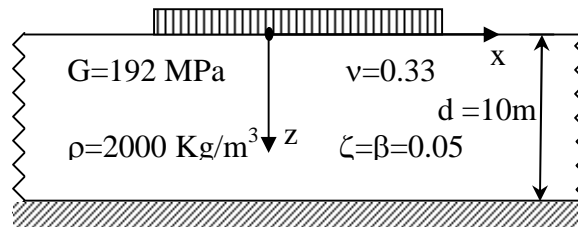


Figure III.10 : Fondation de forme arbitraire reposante sur la surface d'un sol monocouche surmontant un substratum rocheux

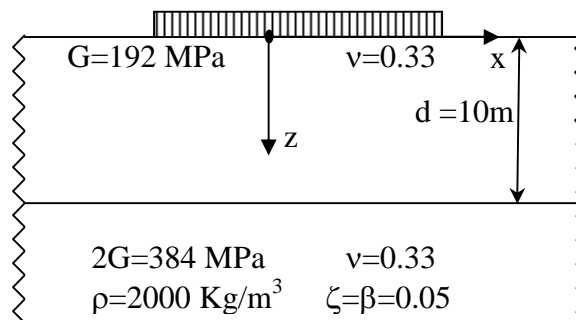


Figure III.11 : fondation de forme arbitraire reposante sur la surface d'un sol monocouche surmontant un demi-espace rigide

Calcul des coefficients de l'impédance dynamique

III.7.1.1) Premier cas : Fondation superficielle de forme arbitraire reposant sur un demi-espace (figure III.9)

La raideur dynamique $\bar{K}(\omega)$ est le produit de la raideur statique K , et le coefficient de la raideur dynamique $k(\omega)$:

$$\bar{K}(\omega) = K \cdot k(\omega) \quad (\text{III.17})$$

L'amortissement total (matériel + radiatif) :

$$C(\text{total}) = C(\text{radiatif}) + \frac{2\bar{K}(\omega)}{\omega} \beta \quad (\text{III.18})$$

A) Mode vertical :

Gazetas :

Raideur statique : $K_z = \frac{2GL}{1-\nu} (0,73 + 1,54\chi^{0,75})$, avec : $\chi = \frac{A_b}{4L^e}$

$$K_z = \frac{2 \times 192000 \times 7,45}{1 - 0,33} (0,73 + 1,54(0,26)^{0,75})$$

$$K_z = 5,5 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

Coefficient de la raideur dynamique : $k_z = k_z(L/B ; \nu ; a_0) = 0,93$ (à partir du graphe)

$$\Rightarrow K_z = 0,93 \times 5500 \cdot 10^3 = 5,1 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

Amortissement radiatif : $C_z = (\rho V_{La} A_b) c_z$, $c_z = c_z(L/B ; \nu ; a_0) = 1$

$$= 2 \cdot 500 \times 57,1 \times 1 = 5,8 \cdot 10^4 \text{ KN.s/m}$$

Avec : $V_{La} = \frac{3,4}{\pi(1-\nu)} V_s$: vitesse analogue de lysmer, définie comme la vitesse apparente de la

propagation des ondes de compression au dessous de la fondation .

Amortissement total : $C_z = 5,8 \cdot 10^4 + \frac{2 \times 5,1 \times 10^6}{188,5} \times 0,05 = 6 \times 10^4 \text{ KN.s/m}$

Modèle de cône :

Rayon équivalent : $r_0 = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{57,6}{3,14}} = 4,28 \text{ m}$

Hauteur d'apex : $\frac{z_0}{r_0} = \frac{\pi}{4} (1-\nu) \left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 \Rightarrow z_a = 4,28 \times \frac{\pi}{4} (1-0,33) \times 4 = 9 \text{ m}$ (Tableau II.2)

Raideur statique : $K_v = \frac{\rho c_p^2 A_0}{z_0} = \frac{2 \times 620^2 \times 57,6}{9} = 4,92 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$

Coefficient de l'impédance dynamique : $k_v(a_0) = 1$, $c_v(a_0) = 1,044$

Avec : $a_0 = a_0 = \frac{\omega r_0}{c_s} = \frac{188,5 \times 4,28}{310} = 2,6$ fréquence adimensionnelle

Raideur dynamique : $K_v = 4,92 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$

Amortissement radiatif : $C_v = \frac{r_0}{C_s} K_v c_v(a_0) = \frac{4,28}{310} \times 4,92 \times 10^6 \times 1,044 = 7,09 \cdot 10^4 \text{ KN.s/m}$

Amortissement total : $C_v = 7,09 \cdot 10^4 + \frac{2 \times 4,92 \times 10^6}{188,5} \times 0,05 = 7,35 \times 10^4 \text{ KN.s/m}$

B) Mode Horizontal :

Gazetas :

$$\text{Raideur statique : } K_z = K_y - \frac{0.2}{0.75 - \nu} G L \left(1 - \frac{B}{L}\right)$$

$$K_y = \frac{2GL}{1 - \nu} (2 + 2.5 \chi^{0.85}) = \frac{2 \times 192000 \times 7.45}{2 - 0.33} (2 + 2.5 (0.26)^{0.85})$$

$$K_y = 4.79 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\Rightarrow K_x = 4.79 \cdot 10^6 - \frac{0.2}{0.75 - 0.33} \times 192000 \times 7.45 \left(1 - \frac{2.15}{7.45}\right) = 4.30 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Coefficient de la raideur dynamique : } k_x \approx 1 \Rightarrow K_z = 4.3 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Amortissement radiatif : } C_x = \rho V_s A_b = 2 \times 310 \times 57.6 = 3.57 \cdot 10^4 \text{ KN.s/m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_x = 3.57 \times 10^4 + \frac{2 \times 4.3 \times 10^6}{188.5} \times 0.05 = 3.8 \times 10^4 \text{ KN.s/m}$$

Modèle de cône :

$$\text{Hauteur d'apex : } r_0 = \frac{\pi}{8} (2 - \nu) \Rightarrow z_0 = 2.8 \text{ m}$$

$$\text{Raideur statique : } K_h = \frac{\rho c_s^2 A_0}{z_0} = \frac{2 \times 310^2 \times 57.6}{9} = 3.94 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Coefficient de l'impédance dynamique : } a_0 = 2.6 ; k_h(a_0) = 1, c_h(a_0) = 0.66$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_h = 3.94 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Amortissement radiatif : } C_h = \frac{r_0}{C_s} K_h c_h(a_0) = \frac{4.28}{310} \times 3.94 \times 10^6 \times 0.66 = 3.6 \cdot 10^4 \text{ KN.s/m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_h = 3.6 \cdot 10^4 + \frac{2 \times 3.94 \times 10^6}{188.5} \times 0.05 = 3.81 \times 10^4 \text{ KN.s/m}$$

C) Mode de balancement (autour de l'axe longitudinal)

Gazetas :

$$\text{Raideur statique : } K_{rx} = \frac{G}{1-\nu} I_{bx}^{0.75} \left(\frac{L}{B} \right)^{0.25} \left(2.4 + 0.5 \frac{B}{L} \right)$$

$$K_{rx} = \frac{192000}{1-0.33} 82^{0.75} (3.5)^{0.25} \left(2.4 + \frac{0.5}{3.5} \right) = 2.7 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Coefficient de la raideur dynamique : } k_{rx} = 1 - 0.2 a_0 = 0.74$$

$$\Rightarrow K_{rx} = 0.74 \times 2.7 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^6 \text{ KN.m}$$

$$\text{Amortissement radiatif : } C_{rx} = (\rho V_{La} I_{bx}) c_{rx}, c_{rx} = c_{rx} (L/B; a_0) = 0.5$$

$$= 2 \times 500 \times 82 \times 0.5 = 4.1 \cdot 10^4 \text{ KN.s.m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_{rx} = 4.1 \cdot 10^4 + \frac{2 \times 2 \cdot 10^6}{188.5} \times 0.05 = 5.2 \cdot 10^4 \text{ KN.s.m}$$

Modèle de cône :

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt[4]{\frac{4I_0}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{4 \times 82}{3.14}} = 3.2 \text{ m}$$

$$\text{Hauteur d'apex : } \frac{z_0}{r_0} = \frac{9\pi}{32} (1-\nu) \left(\frac{c_p}{c_s} \right)^2 \Rightarrow z_0 = 3.2 \times 9 \frac{\pi}{32} (1-0.33) \times 4 = 7.6 \text{ m}$$

$$\text{Raideur statique : } K_r = \frac{3\rho c_p^2 I_0}{z_0} = \frac{3 \times 2 \times 620^2 \times 82}{7.2} = 2.5 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Coefficient de l'impédance dynamique : } a_0 = 1.94 ; k_r(a_0) = 0.721, c_r(a_0) = 0.327$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_r = 0.721 \times 2.5 \cdot 10^7 = 1.8 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Amortissement radiatif : } C_r = \frac{r_0}{C_s} K_r c_r(a_0) = \frac{3.2}{310} \times 2.5 \times 10^7 \times 0.327 = 8.44 \cdot 10^4 \text{ KN.s.m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_r = 8.44 \cdot 10^4 + \frac{2 \times 1.8 \times 10^7}{188.5} \times 0.05 = 9.4 \cdot 10^5 \text{ KN.s.m}$$

D) Mode de torsion :

Gazetas :

Raideur statique : $K_t = G J_b^{0.75} \left[4 + 11 \left(1 - \frac{B}{L} \right)^{10} \right]$, avec $J_b = I_{bx} + I_{by}$ (moment d'inertie polaire)

$$K_t = 192000 \times 985^{0.75} \times \left[4 + 11 \left(1 - \frac{1}{3.5} \right)^{10} \right] = 1.5 \cdot 10^8 \text{ KN.m}$$

Coefficient de la raideur dynamique : $k_{rx} = 1 - 0.14 a_0 = 1 - 0.14 \times 1.3 = 0.82$

Raideur dynamique : $K_t = 0.82 \times 1.5 \cdot 10^8 = 1.2 \cdot 10^8 \text{ KN.m}$

Amortissement radiatif : $C_t = (\rho V_s J_b) c_t$, $c_t = c_t(L/B; a_0) = 0.9$

$$= 2 \times 310 \times 985 \times 0.9 = 5.5 \cdot 10^5 \text{ KN.s.m}$$

Amortissement total : $C_t = 5.5 \cdot 10^5 + \frac{2 \times 1.2 \times 10^8}{188.5} \times 0.05 = 6.1 \times 10^5 \text{ KN.s.m}$

Modèle de cône :

Rayon équivalent : $r_0 = \sqrt[4]{\frac{2I_0}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{2 \times 985}{3.14}} = 5 \text{ m}$

Hauteur d'apex : $\frac{z_0}{r_0} = \frac{9\pi}{32} \Rightarrow z_0 = \frac{9 \times \pi}{32} \times 5 = 4.42 \text{ m}$

Raideur statique : $K_t = \frac{3\rho c_s^2 I_0}{z_0} = \frac{3 \times 2 \times 310^2 \times 985}{4.42} = 1.28 \cdot 10^8 \text{ KN.m}$

Coefficient de l'impédance dynamique : $a_0 = 3$; $k_t(a_0) = 0.721$, $c_t(a_0) = 0.258$

Raideur dynamique : $K_t = 0.71 \times 1.28 \cdot 10^8 = 9.09 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$

Amortissement radiatif : $C_t = \frac{r_0}{C_s} K_t c_t(a_0) = \frac{5}{310} \times 1.28 \times 10^8 \times 0.258 = 5.33 \cdot 10^5 \text{ KN.s.m}$

Amortissement total : $C_t = 5.33 \cdot 10^5 + \frac{2 \times 9.09 \times 10^7}{188.5} \times 0.05 = 5.81 \cdot 10^5 \text{ KN.s.m}$

III.7.1.2) Deuxième cas : Fondation superficielle de forme arbitraire reposant sur la surface d'un sol monocouche surmontant un substratum rocheux (figure III.10)

Les calculs sont faits par un programme développé sur logiciel MATLAB

A) Mode vertical :

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{57.6}{3.14}} = 4.28m$$

$$\text{Raideur statique : } K_v = 8.12 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_v = 4.98 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_v = 20.66 \cdot 10^6 \text{ KN.s/m}$$

B) Mode horizontal :

$$\text{Raideur statique : } K_h = 4.71 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_h = 3.66 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_{vh} = 8.04 \cdot 10^6 \text{ KN.s/m}$$

C) Mode de balancement (autour de l'axe longitudinal)

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt[4]{\frac{4I_0}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{4 \times 82}{3.14}} = 3.2m$$

$$\text{Raideur statique : } K_r = 2.59 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_r = 1.81 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_r = 1.99 \cdot 10^7 \text{ KN.s.m}$$

D) Mode de torsion :

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt[4]{\frac{2I_0}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{2 \times 985}{3.14}} = 5m$$

$$\text{Raideur statique : } K_t = 1.29 \cdot 10^8 \text{ KN.m}$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_t = 8.63 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_t = 1.14 \cdot 10^8 \text{ KN.s.m}$$

III.7.1.3) Troisième cas : Fondation superficielle de forme arbitraire reposant sur la surface d'un sol monocouche surmontant un demi-espace raide (figure III.11)

Les calculs sont fait par un programme développé sur logiciel MATLAB

A) Mode vertical :

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{57.6}{3.14}} = 4.28m$$

$$\text{Raideur statique : } K_v = 5.92 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_v = 4.59 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_v = 14.97 \cdot 10^6 \text{ KN.s/m}$$

B) Mode Horizontal :

$$\text{Raideur statique : } K_h = 4.23 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_h = 3.63 \cdot 10^6 \text{ KN/m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_h = 7.29 \cdot 10^6 \text{ KN.s/m}$$

C) Mode de balancement (autour de l'axe longitudinal)

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt[4]{\frac{4I_0}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{4 \times 82}{3.14}} = 3.2m$$

$$\text{Raideur statique : } K_r = 2.53 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_r = 1.77 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_r = 1.85 \cdot 10^7 \text{ KN.s.m}$$

D) Mode de torsion :

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt[4]{\frac{2I_0}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{2 \times 985}{3.14}} = 5m$$

$$\text{Raideur statique : } K_t = 1.28 \cdot 10^8 \text{ KN.m}$$

$$\text{Raideur dynamique : } K_t = 8.64 \cdot 10^7 \text{ KN.m}$$

$$\text{Amortissement total : } C_t = 1.10 \cdot 10^8 \text{ KN.s.m}$$

III.7.1.4) Interprétation des résultats

Tableau III.1 : Comparaison entre les coefficients de l'impédance dynamique

		<i>Gazetas</i> Premier cas	MODELES DE CONE		
			Premier cas	Deuxième cas	Troisième cas
Mode vertical	Raideur statique	5.5 10 ⁶ KN/m	4.92 10 ⁶ KN/m	8.12 10 ⁶ KN/m	5.92 10 ⁶ KN/m
	Raideur dynamique	5.1 10 ⁶ KN/m	4.92 10 ⁶ KN/m	4.98 10 ⁶ KN/m	4.59 10 ⁶ KN/m
	Amortissement total	6 10 ⁴ KN.s/m	7.35 10 ⁴ KN.s/m	20.66 10 ⁶ KN.s/m	14.97 10 ⁶ KN.s/m
Mode Horizontal	Raideur statique	4.3 10 ⁶ KN/m	3.94 10 ⁶ KN/m	4.71 10 ⁶ KN/m	4.23 10 ⁶ KN/m
	Raideur dynamique	4.3 10 ⁶ KN/m	3.94 10 ⁶ KN/m	3.66 10 ⁶ KN/m	3.63 10 ⁶ KN/m
	Amortissement total	3.8 10 ⁴ KN.s/m	3.81 10 ⁴ KN.s/m	8.04 10 ⁶ KN.s/m	7.2910 ⁶ KN.s/m
Mode de balancement	Raideur statique	2.7 10 ⁷ KN.m	2.5 10 ⁷ KN.m	2.59 10 ⁷ KN.m	2.53 10 ⁷ KN.m
	Raideur dynamique	2 10 ⁷ KN.m	1.8 10 ⁷ KN.m	1.81 10 ⁷ KN.m	1.77 10 ⁷ KN.m
	Amortissement total	5.2 10 ⁴ KN.s.m	9.4 10 ⁴ KN.s.m	1.99 10 ⁷ KN.s.m	1.85 10 ⁷ KN.s.m
Mode de torsion	Raideur statique	1.5 10 ⁸ KN.m	1.28 10 ⁸ KN.m	1.29 10 ⁸ KN.m	1.2810 ⁸ KN.m
	Raideur dynamique	1.2 10 ⁸ KN.m	9.09 10 ⁷ KN.m	8.63 10 ⁷ KN.m	8.64 10 ⁷ KN.m
	Amortissement total	6.1 10 ⁵ KN.s.m	5.81 10 ⁵ KN.s.m	1.14 10 ⁸ KN.s.m	1.10 10 ⁸ KN.s.m

Afin de donner plus de sens physique pour les coefficients d'impédance, et en se basant sur les valeurs des rigidités dynamiques et d'amortissements, on calcule le module de la fonction d'impédance pour chaque degré de liberté (tableau III.2), l'amplitude est donnée par l'expression suivante : $\sqrt{\bar{K}^2 + C^2}$

Tableau III.2 : Comparaison entre les modules des fonctions d'impédance

	<i>Gazetas</i> Premier cas	MODELES DE CONE		
		Premier cas	Deuxième cas	Troisième cas
Mode Vertical	$5,10 \cdot 10^6$	$4,92 \cdot 10^6$ KN/m	$21,25 \cdot 10^6$ KN/m	$15,65 \cdot 10^6$ KN/m
Mode Horizontal	$4,30 \cdot 10^6$	$3,94 \cdot 10^6$ KN/m	$8,83 \cdot 10^6$ KN/m	$8,14 \cdot 10^6$ KN/m
Mode de Balancement	$2,00 \cdot 10^7$	$1,80 \cdot 10^7$ KN.m	$2,69 \cdot 10^7$ K.Nm	$2,56 \cdot 10^7$ KN.m
Mode de Torsion	$12,01 \cdot 10^7$	$9,09 \cdot 10^7$ KN.m	$14,30 \cdot 10^7$ KN.m	$13,99 \cdot 10^7$ KN.m

On constate que les résultats obtenus par les deux méthodes sont très proches, surtout pour les modes de torsion et horizontal, par contre dans le cas du mouvement vertical et balancement, on constate qu'il y'a une surestimation de l'amortissement radiatif dans les modèles de cône. Cette différence peut être aussi justifiée par le remplacement de la section de forme quelconque de la fondation, par une section circulaire de rayon équivalent r_0

Dans le cas des vibrations verticales, l'amortissement total du système sol-fondation peut atteindre des valeurs élevées, dues à l'apport de l'amortissement radiatif résultant de la dispersion géométrique des ondes qui se propagent depuis l'interface sol-fondation vers l'infini, tous les points de cette interface se déplacent en phase, les ondes émises se propagent très loin de la fondation, ceci induit une perte très importante d'énergie d'où la valeur élevée de l'amortissement radiatif, contrairement au mouvement de balancement, où deux points situés symétriquement et de cotés opposés de l'interface sol-fondation émettent des ondes déphasés de 180° . Ainsi ces ondes tendent à se compenser, donc peu d'énergie se dissipe, L'amortissement qui en résulte sera faible.

D'après le tableau III.2, on remarque que le module des fonctions d'impédance obtenues en utilisant les formules de *Gazetas* est plus élevé que celle obtenue en utilisant les modèles de cône. La différence observée est acceptable en ingénierie.

On note aussi que les modèles de cône reflètent bien la variation du module des fonctions d'impédance (même la rigidité), particulièrement pour le mode vertical, en fonction des types des profils des sols, en effet, le module des fonctions d'impédance (même la rigidité) pour le cas d'un sol monocouche surmontant un demi-espace rigide (3^{ème} cas) est plus grande à celle d'un demi-espace homogène (1^{er} cas), cela s'explique par la grande raideur de demi-espace sous la monocouche qui fait l'augmenté la rigidité de système. Cette observation est aussi valable pour le cas d'un sol monocouche surmontant un substratum rocheux fixes à la base (2^{ème} cas), qui développe le plus grand module, dû à l'existence d'une base infiniment rigide.

III.7.2) APPLICATION N°2 : Etude des vibrations d'un massif de fondation d'une machine vibrante

Afin d'illustrer l'importance et utilité des fonctions d'impédance dans la détermination des réponses d'une fondation (déplacements et rotations), due au chargement dynamique, on étudie dans le cadre de cet exemple, la réponse dynamique (déplacement, amplitude), de la fondation d'une machine vibrante, reposant sur sols multicouches (figure III.12) (*Wolf et Deeks, 2004*), par l'application des modèles de cône, le calcul des excitations harmonique développé par la machine et la modalisation de système dynamique sol-fondation est détaillé dans l'application. La validation des résultats est examinée en comparant la réponse calculée aux résultats obtenus par l'application de la méthode des couches mince (*Kausel, 1990*).

III.7.2.1) Charge dynamique d'une machine à un cylindre

En premier, on étudie le cas d'une machine à mouvement rotative à un cylindre seul. Le mécanisme de la manivelle de base (Figure.III.13) consiste en un piston qui se déplace verticalement dans un cylindre, fixé à une tige de longueur 'L' et au triangle de la manivelle, de rayon 'r' qui tourne au tour de coude d'arbre, avec une fréquence ω .

La masse de la tige peut être remplacée par deux masses, mises en bloc, une qui se déplace verticalement avec le piston et l'autre en rotation avec le triangle de la Manivelle.

La masse totale de réceptacle m_{rec} et la masse total rotative m_{rot} , se déduisent en ajoutant la demi-masse de la tige respectivement au piston et au triangle de la manivelle.

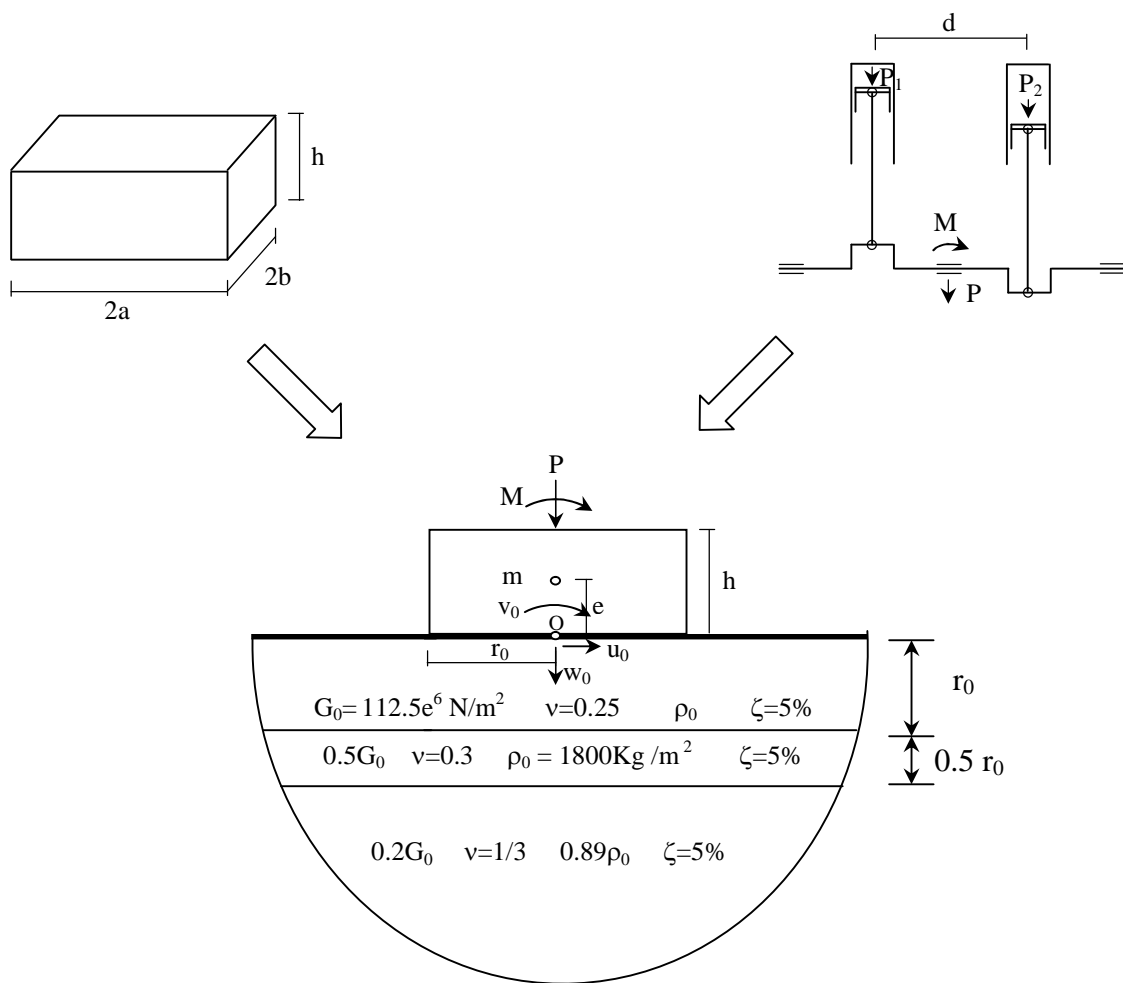


Figure III.12 : Massif de fondation d'une machine vibrante à deux cylindres en surface de sol multicouches

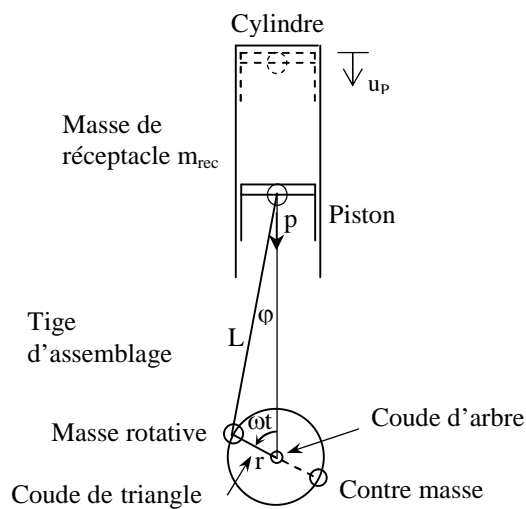


Figure III.13 : Mécanisme de mouvement d'une machine à un cylindre

L'effet de l'inertie de masse rotative est éliminée par l'installation d'une contre masse identique à la masse rotative, à un angle de 180° (Figure.III.13). Donc, il reste seulement la force vertical 'P' due au mouvement rotative de la masse m_{rec} .

Une rotation ' ω ' la manivelle résulte un déplacement vertical du piston de $U_p(t)$.

D'après les relations géométriques on a :

$$u_p(t) + L \cos \varphi(t) + r \cos \omega t = L + r \quad (\text{III.19})$$

$$L \sin \varphi(t) = r \sin \omega t \quad (\text{III.20})$$

Introduisant $\cos \varphi(t)$ dans l'équation III.19 :

$$\cos \varphi(t) = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi(t)} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \omega t} \quad (\text{III.21})$$

On a $r^2/L^2 \ll 1$, appliquant l'expansion de la série à deux termes, l'équation devient :

$$\cos \varphi(t) = 1 - \frac{r^2}{2L^2} \sin^2 \omega t \quad (\text{III.22})$$

Substituant l'équation III.22 dans l'équation III.19 :

$$u_p(t) = r(1 - \cos \omega t) + \frac{r^2}{4L}(1 - \cos 2\omega t) \quad (\text{III.23})$$

D'où :

$$\ddot{u}_p(t) = r\omega^2 (\cos \omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t) \quad (\text{III.24})$$

La charge verticale d'inertie dans la direction de piston est :

$$P(t) = m_{rec} \ddot{u}_p(t) \quad (\text{III.25})$$

Donc :

$$P(t) = m_{rec} r \omega^2 \cos \omega t + m_{rec} \frac{r^2}{L} \omega^2 \cos 2\omega t \quad (\text{III.26})$$

La charge dynamique consiste, en un premier chargement harmonique de fréquence angulaire ω et un second chargement harmonique de fréquence angulaire 2ω .

III.7.2.2) Charge dynamique d'une machine à deux cylindres avec déphasage à 90°

On étudie une machine à deux cylindres de mouvement rotative, les deux pistons montés sur le coude d'arbre horizontal, se déplace verticalement avec un déphasage angulaire de 90° (figure III.14).

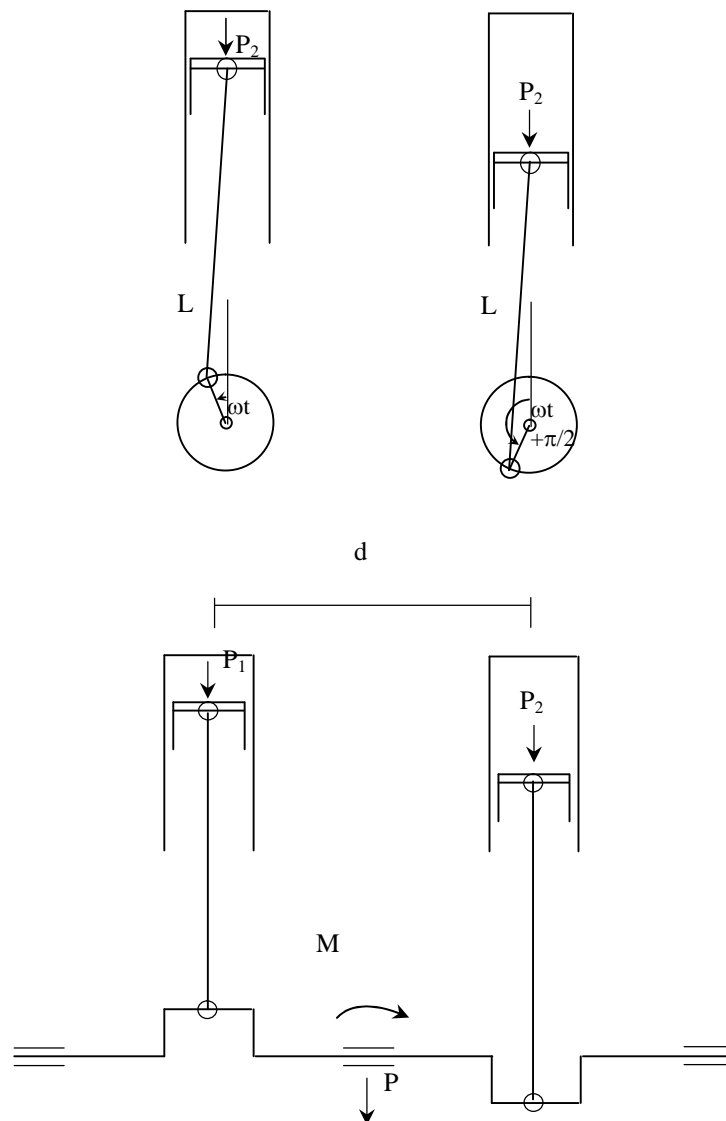


Figure III.14 : Mécanisme de mouvement d'une machine à deux cylindres

A chaque instant 't', l'angle de la manivelle ' ω ' définit la place relative des pistons dans les cylindres. De ce fait, la charge dynamique des pistons est déterminée par superposition des contributions des deux cylindres.

La charge dynamique du premier cylindre avec un angle de la manivelle ω est :

$$P_1(t) = m_{rec} r \omega^2 \cos \omega t + m_{rec} \frac{r^2}{L} \omega^2 \cos 2\omega t \quad (\text{III.27})$$

La charge dynamique du deuxième cylindre avec un angle de la manivelle $\omega + \frac{\pi}{2}$ est :

$$P_2(t) = m_{rec} r \omega^2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + m_{rec} \frac{r^2}{L} \omega^2 \cos 2(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{III.28})$$

Donc :

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) \quad (\text{III.29A})$$

$$M(t) = -\frac{d}{2} P_1(t) + \frac{d}{2} P_2(t) \quad (\text{III.29B})$$

D'où :

$$P(t) = \sqrt{2} m_{rec} r \omega^2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \quad (\text{III.30A})$$

$$M(t) = -\sqrt{2} m_{rec} r \omega^2 d \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) - m_{rec} \frac{r^2}{L} \omega^2 d \cos 2\omega t \quad (\text{III.30B})$$

On note que, le moment est une contribution de deux charges harmoniques des deux fréquences distinguées $\omega_j(j=1,2)$, ω et 2ω .

Caractéristique de la machine : la masse de piston est 12kg, la masse de la tige d'assemblage est de 6 kg et sa longueur est de 0.5m, le rayon de coude est de 0.2m et l'entraxe 'd' entre les deux pistons est de 1m. La masse totale de réceptacle m_{rec} est $12+0.5 \times 6=15$ kg.

La machine a une masse totale y compris la masse de réceptacle m_{rec} de 4000kg, et de fréquence 10Hz ($\omega=62.83$ rad/s).

La force dynamique, verticale $P(t)$ et les moments fondamentaux et secondaires sont tracés respectivement dans la figure III.15.

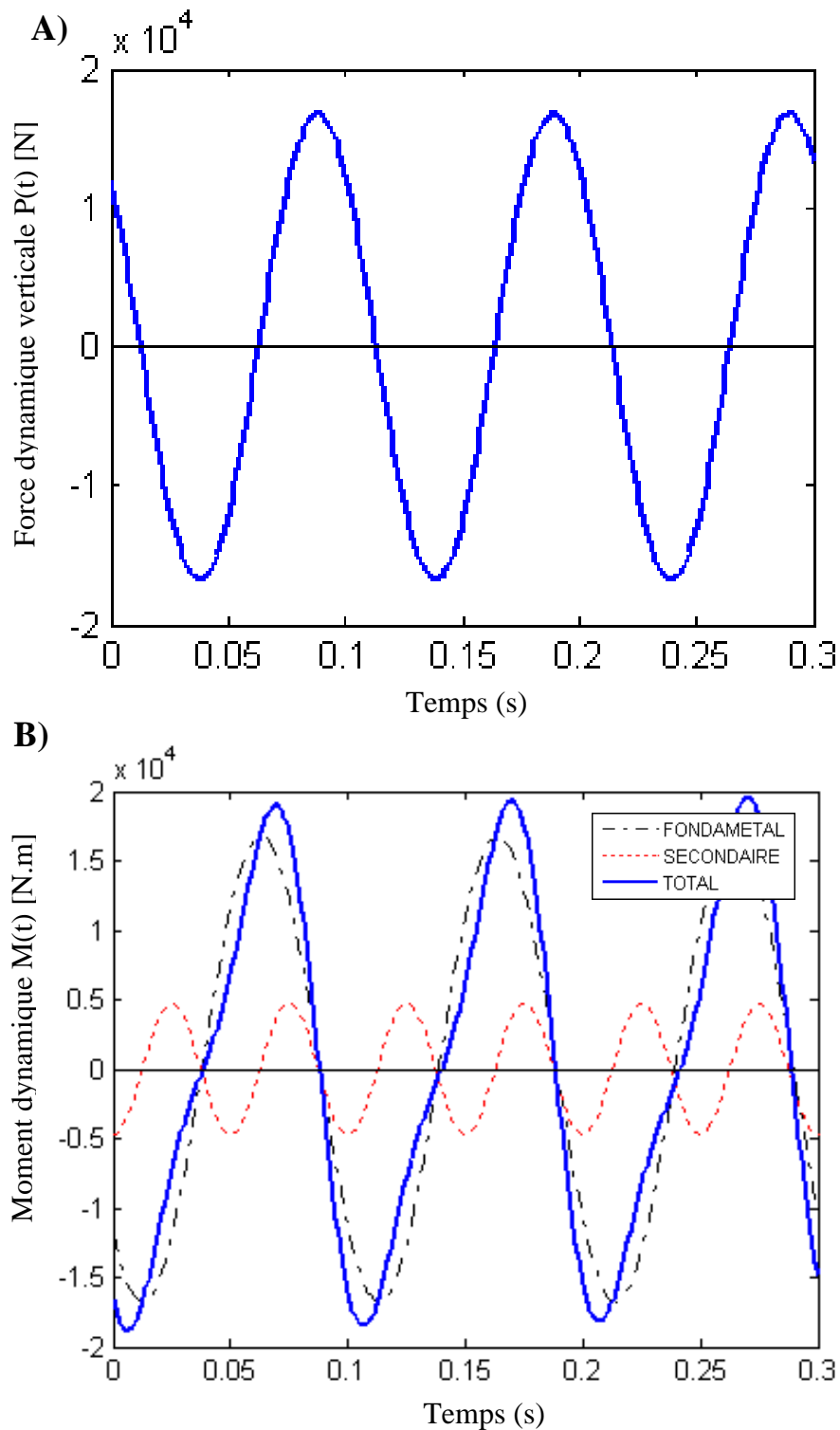


Figure III.15 : Charge dynamique de la machine à deux cylindres. A) Force dynamique verticale $P(t)$. B) Moment dynamique $M(t)$

III.7.2.3) Système dynamique

Le massif de fondation est modalisé comme un corps rigide. Il représente la structure dans le système d'analyse d'interaction sol-structure.

Les propriétés inertielles du massif de fondation y compris la machine : le centre de la masse (centre de gravité), la masse 'm', le moment d'inertie massique 'I' et le rayon équivalent 'r₀' de l'aire du contact de bloc de la fondation avec le sol, sont facilement déterminables et nécessaires pour la modalisation de l'interface sol-structure.

Le massif de la fondation en béton de densité $2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, de dimension $2a=3\text{m}$, $2b=2.5\text{m}$ et de hauteur $h = 1.5\text{m}$, d'ou masse m_f est $=28.125 \times 10^3 \text{ kg}$, ajouté à cela la masse de la machine (4000 kg), donc $m=32.125 \times 10^3 \text{ kg}$. Le moment d'inertie massique de bloc de fondation égale à : $I_f = \frac{m_f}{12[(2a)^2 + h^2]} = 26.367 \text{ kgm}^2$, additionner à cela la contribution de la machine supposer en surface de bloc de fondation d'excentricité $h/2$ égale à $0.75^2 \times 4000 = 2.25 \times 10^3 \text{ kg/m}^2$, donc $I=28.617 \times 10^3 \text{ kg/m}^2$

Le chargement dynamique consiste en une la force verticale P (t) et un moment M(t) agissant au centre de gravité de bloc de la fondation illustré dans la Figure III.15 .

Les propriétés dynamiques du sol multicouches (figure III.12), sont décrites par les coefficients d'impédance dynamique.

Excepté les degrés de libertés, évidentes : vertical $w_0(t)$ et de balancement $v_0(t)$, lesquels dominant la réponse dynamique, le degré de liberté horizontal $u_0(t)$ excité aussi. En effet, le centre de gravité de du massif de fondation est à une distance $e = 0.5h$ de l'interface sol-structure 'o'(figure III.16), donc l'effet de couplage entre le degré de liberté de balancement et horizontal, produit un déplacement horizontal $u_0(t)$ de faible ampleur .

III.7.2.4) Équations de mouvement

L'interprétation physique du système dynamique est représenté en figure III.16 . L'équation III.16 décrit la relation force - déplacement pour chaque degré de liberté, par le coefficient de

raideur dynamique et le coefficient d'amortissement dynamique modalisé parallèle au mouvement correspondant. Ce modèle dynamique est valable pour chacune des deux fréquences de chargement dynamique $\omega_j(j=1,2)$, ω et 2ω , et respectivement pour le coefficient de raideur dynamique $k(\omega_j)$ et le coefficient d'amortissement dynamique $c(\omega_j)$.

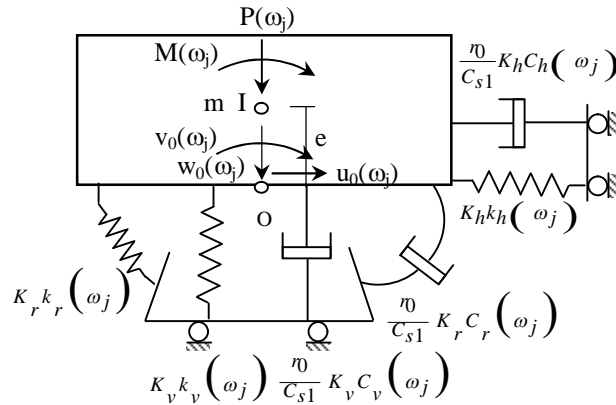


Figure III.16 : Modalisation dynamique de l'interaction sol-Fondation

Les degrés de liberté sont définis au centre de l'interface sol-massif de fondation dénoté 'o' (voir figure III.16), avec les amplitudes $w_0(\omega_j)$ ($j=1$) dans la direction verticale, $u_0(\omega_j)$ ($j=1,2$) dans la direction horizontale et $v_0(\omega_j)$ ($j=1,2$) pour balancement. Ainsi que les amplitudes de la charge dynamique sont $P(\omega_j)$ ($j=1$) pour la force verticale et $M(\omega_j)$ ($j=1,2$) pour le moment.

D'après les équations d'équilibres, formulées dans le domaine fréquentielle (ω_j) au centre de gravité du bloc de fondation, on a :

Dans la direction verticale :

$$m\ddot{w}_0(\omega_j) + S_v(\omega_j)w_0(\omega_j) = P(\omega_j) \quad j = 1 \quad (\text{III.31})$$

Dans la direction horizontale et balancement:

$$m(\ddot{u}_0(\omega_j) + e\ddot{v}_0(\omega_j)) + S_h(\omega_j)u_0(\omega_j) = 0 \quad j = 1,2 \quad (\text{III.32a})$$

$$I\ddot{v}_0(\omega_j) - eS_h(\omega_j)u_0(\omega_j) + S_r(\omega_j)v_0(\omega_j) = M(\omega_j) \quad j = 1,2 \quad (\text{III.32b})$$

Substituant $\ddot{w}_0(\omega_j) = -\omega_j^2 w_0(\omega_j)$, etc. dans les équations III.31 et III.32,

D'où les équations deviennent :

$$(-\omega_j^2 m + S_v(\omega_j))w_0(\omega_j) = P(\omega_j) \quad j = 1 \quad (\text{III.33})$$

$$(-\omega_j^2 m + S_h(\omega_j))u_0(\omega_j) - \omega_j^2 emv_0(\omega_j) = 0 \quad j = 1,2 \quad (\text{III.34a})$$

$$-\omega_j^2 emu_0(\omega_j) + (-\omega_j^2 (I + e^2 m) + S_r(\omega_j))v_0(\omega_j) = M(\omega_j) \quad j = 1,2 \quad (\text{III.34b})$$

L'équation III.33, de déplacement vertical est résolue pour $j=1$, et les équations couplées de déplacement horizontal et balancement (éq.III.34) sont résolues pour $j=1,2$; $u_0(\omega)$, $v_0(\omega)$ et $u_0(2\omega)$, $v_0(2\omega)$. Le déplacement total est donné par la superposition des réponses des deux excitations harmoniques.

Les rotations $v(t)$, les déplacements horizontaux $u(t)$ et verticaux $w(t)$ sont tracés respectivement sur les figures III.17, III.18 et III.19, en fonction de temps.

Les graphes A représentent les mouvements (rotation, déplacement) calculés en appliquant les fonctions d'impédance issues des modèles de cône. Les graphes B représentent les mouvements (rotation, déplacement) calculées en appliquant les fonctions d'impédance issues de la méthode rigoureuse dite 'exacte' issue de la méthode des couches minces.

Les courbes correspondant à l'excitation harmonique fondamentale (ω) sont tracées en trait d'axe noir, Les courbes correspondant à l'excitation harmonique secondaire (2ω) sont tracées en trait discontinue rouge, et les courbes correspondant aux résultantes (TOTAL) des deux excitations harmoniques sont tracées en trait bleu fort.

Les graphes C représentent une comparaison des résultantes (TOTAL) des mouvements (rotation, déplacement) calculés en appliquant les fonctions d'impédance issues des modèles de cône, en trait bleu fort, et celle issue de la méthode rigoureuse dite 'EXACTE' issue de la méthode des couches minces, en trait discontinu noir fort

Le déplacement total vertical provoqué par le chargement dynamique vertical $P(t)$ et moment $M(t)$ à la façade gauche est tracé en figure III.20.

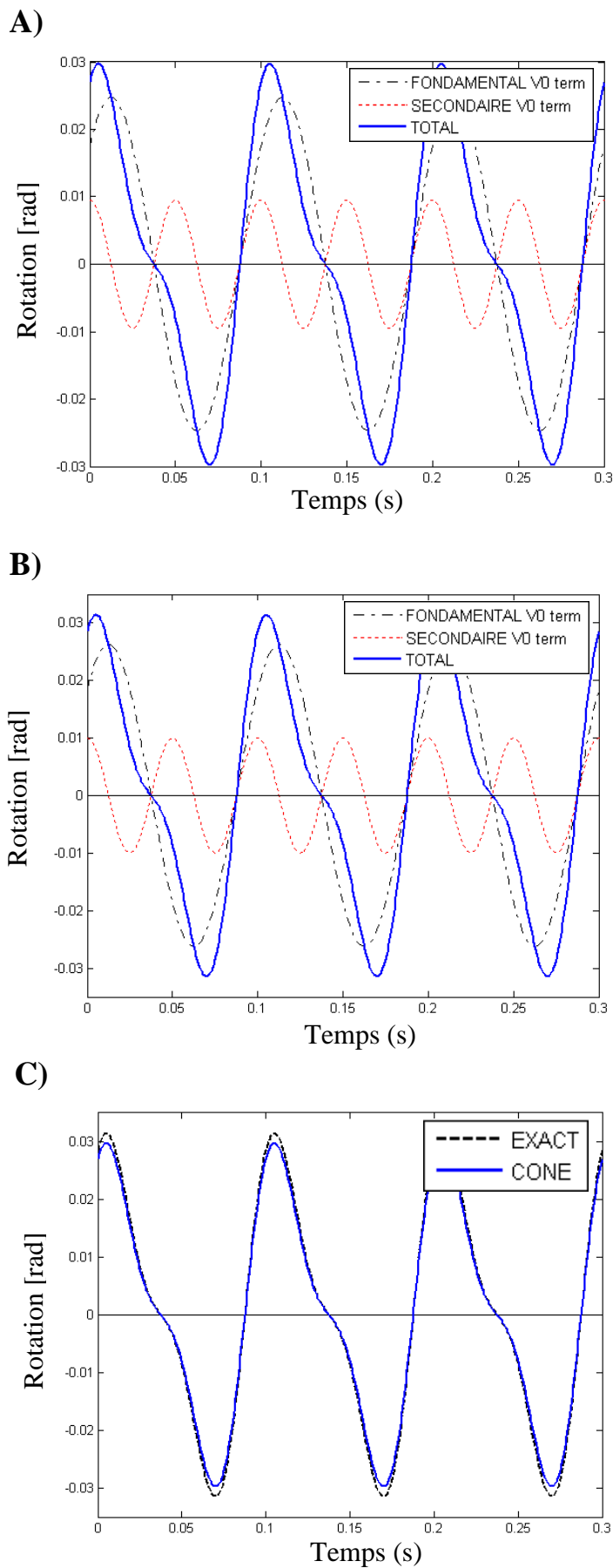


Figure III.17 : Rotation de massif de fondation. A) en utilisant les modèles de cône. B) en utilisant la méthode exacte .C) comparaison de résultantes

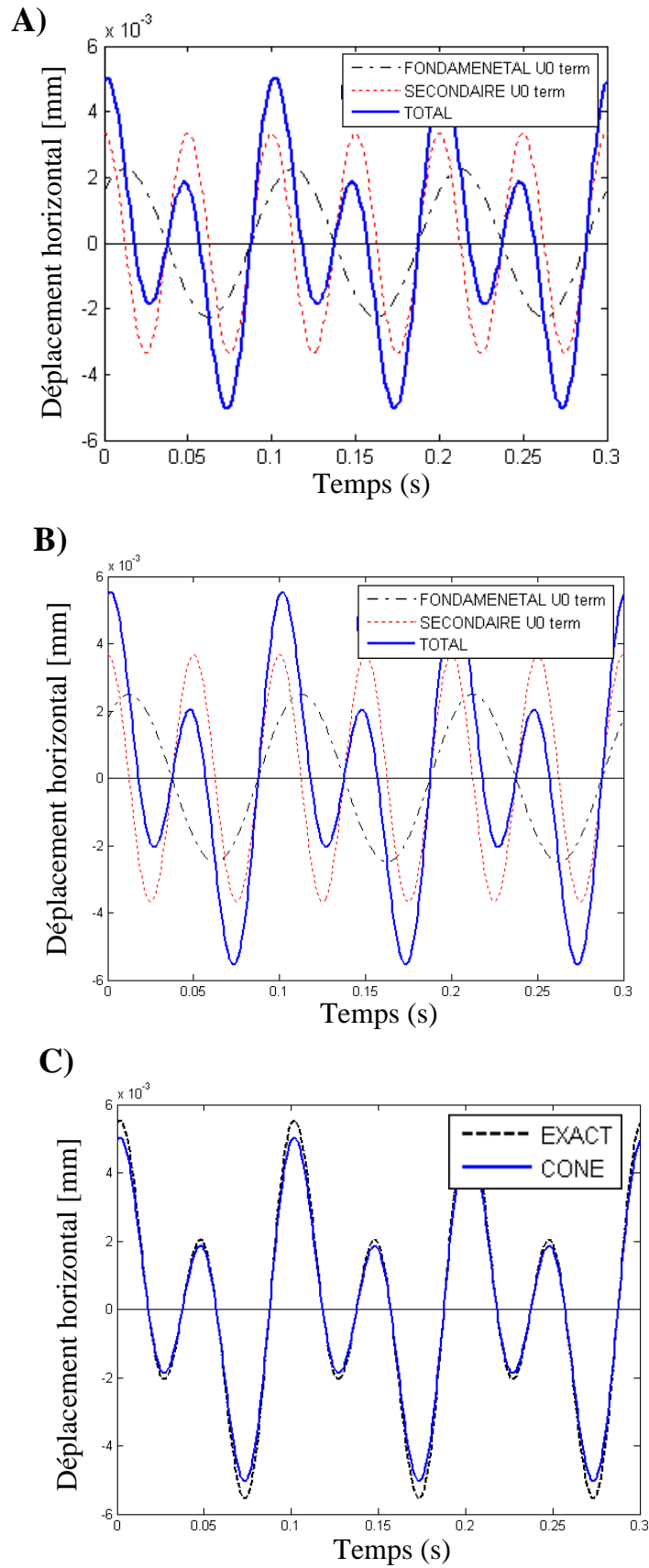


Figure III.18 : Déplacement horizontal de massif de fondation. A) en utilisant les modèles de cône. B) en utilisant la méthode exacte .C) comparaison de résultantes

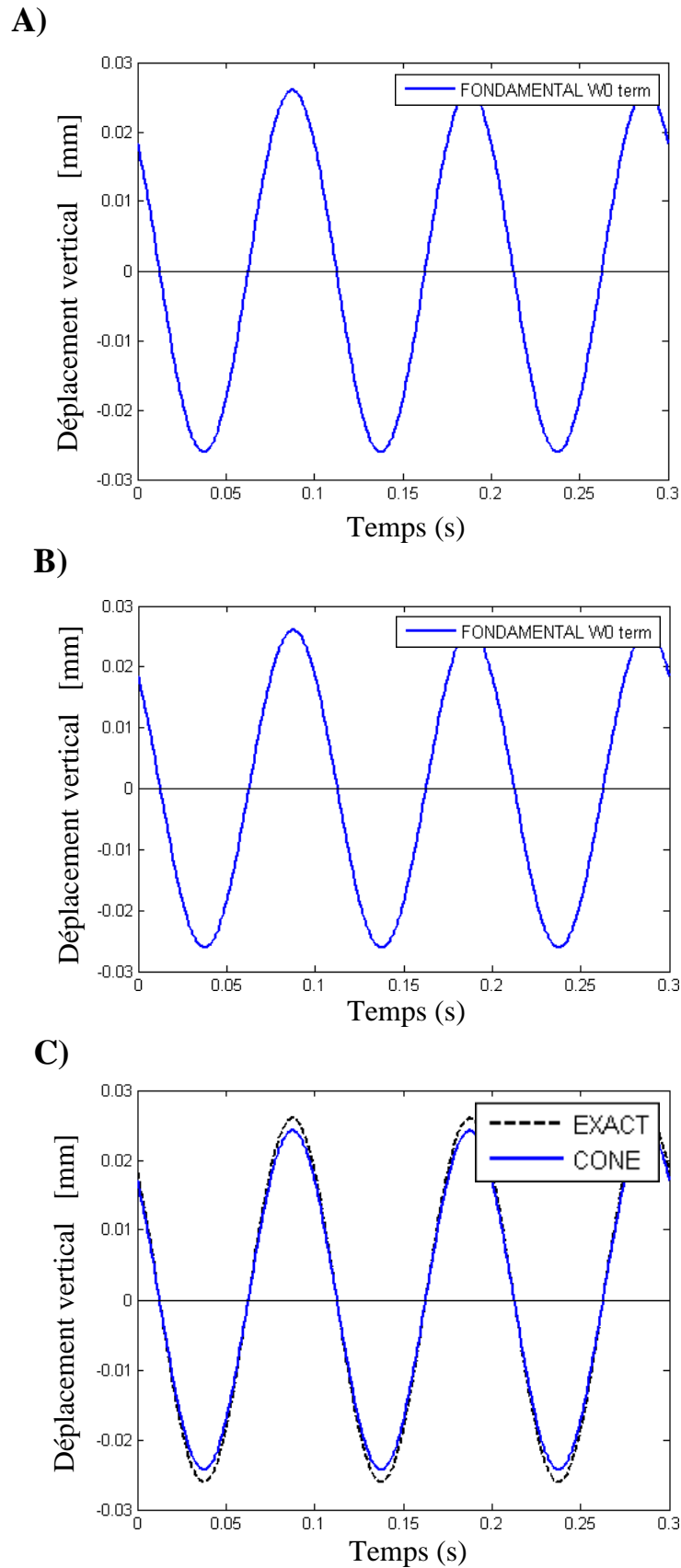


Figure III.19 : Déplacement vertical de massif de fondation. A) en utilisant les modèles de cône. B) en utilisant la méthode exacte .C) comparaison de résultantes

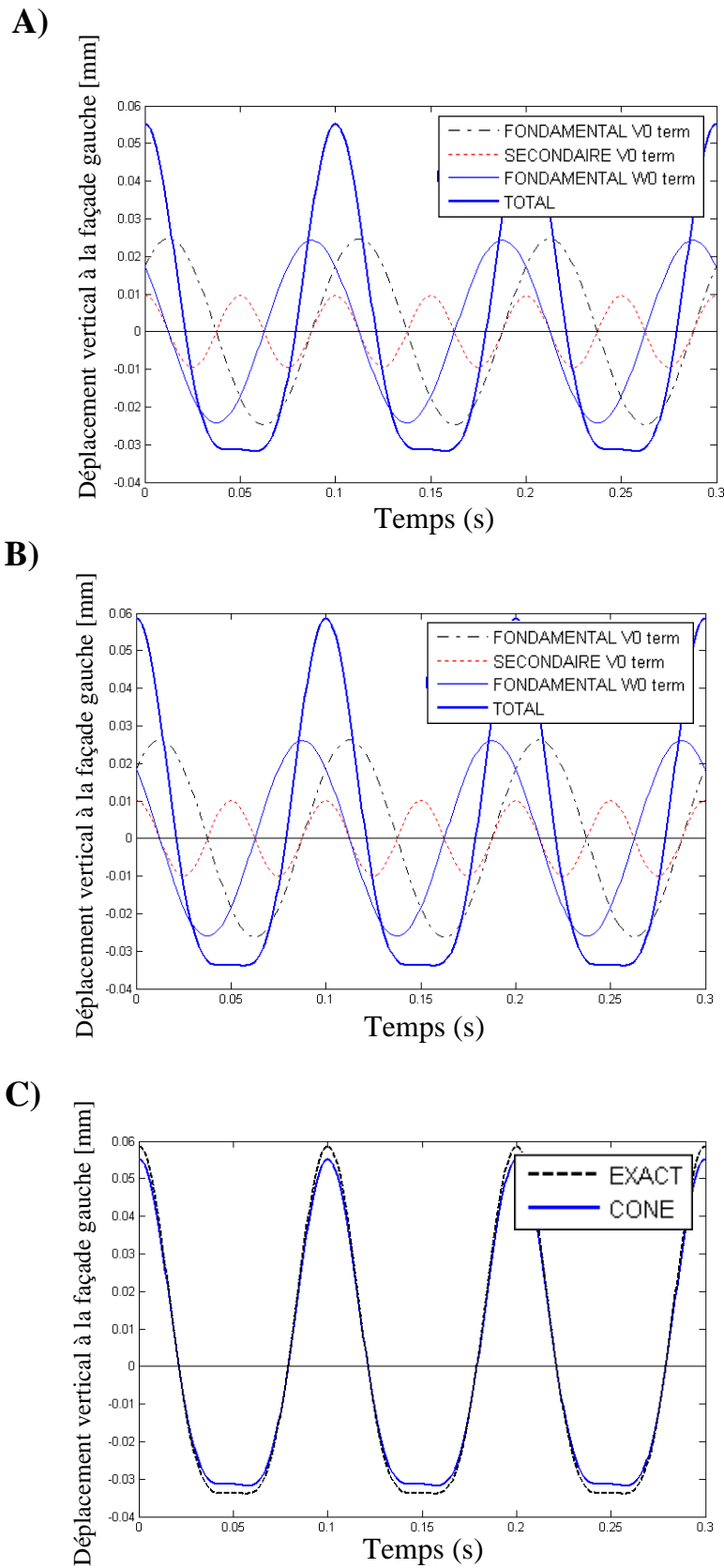


Figure III.20 : Déplacement vertical total à la façade gauche de massif de fondation. A) en utilisant les modèles de cône. B) en utilisant la méthode exacte .C) comparaison de résultantes

On constate que les courbes des résultantes de chaque mouvement (rotation, déplacement) issues de l'application des modèles de cône et celles issues de l'application de la méthode exacte sont pratiquement identiques, on note aussi que le déplacement vertical total du massif de fondation calculé par les modèles de cône est identique à celui calculé par la méthode exacte, une faible différence est constatée au pic, cette différence est inférieure à 6% , cette différence observée reste acceptable en ingénierie.

Le déplacement de sommet - à - sommet est égal à 0.88mm, cette valeur satisfait le critère de conception limité à 0.1mm.

III.7.3) APPLICATION N°3 : Dimensionnement de la fondation d'une machine vibrante

Afin d'illustrer l'importance de la détermination théorique de la fréquence de résonance, pour le dimensionnement et la conception des fondations destinées à supporter des machines vibrantes, on s'inspire de l'application traitée par *Baidya et Murali (2000)*, en utilisant les mêmes caractéristiques de la machine. Les valeurs de la rigidité statique et les dimensions de la fondation issues de l'application des modèles de cône sont comparées aux résultats exacts obtenus de l'application de la méthode des couches minces (figurant entre parenthèses) (*Kausel, 1990*).

Soit une fondation 3m x 2.5m en béton ($\rho_b = 24 \text{KN/m}^3$), reposant sur la surface de sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux, les caractéristiques géométriques, mécaniques et physiques sont présentées dans les figure III.21. La fondation supporte une machine vibrante dont le poids est supposé égal à 10% de son propre poids et de fréquence opérationnelle de 3000tpm.

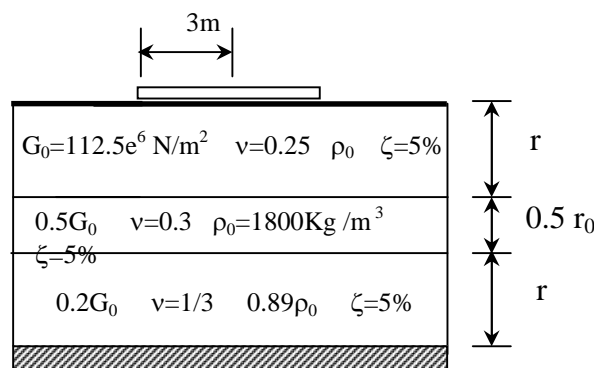


Figure III.21 : Fondation d'une machine vibrante sur la surface d'un sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.

Et pour évaluer le risque qu'encourt la fondation, en faisant des simplifications sur la stratification de sol sous la fondation, deux cas sont étudiés : premier cas en assimilant le sol sous la fondation (par le principe d'équivalence) à une monocouche surmontant un substratum rocheux, illustré en figure III.22, et le second cas en assimilant le sol de fondation à un demi-espace homogène.

Le but principal dans la conception d'une fondation de machine est de maintenir la fréquence propre du système sol-fondation, inférieure à la fréquence opérationnelle de la machine, pour éviter la résonance. En règle générale, la fréquence propre est maintenue égale à la moitié de la fréquence opérationnelle, lorsque le système est sous ajusté est le double lorsqu'il est sur ajusté.

III.7.3.1) Cas sous ajusté

Comme la fréquence opérationnelle de la machine est égale à 1000 tpm, la fréquence propre du système est prise égale à 500 tpm.

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt{\frac{a^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2.5 \times 3}{\pi}} = 1.545m$$

$$\text{Donc : } k_v = 7.9986 \times 10^8 \text{ N/m (} 7.99 \times 10^8 \text{)}$$

$$\omega_v^2 = \frac{K_v}{m} = \left(\frac{1500 \times 2\pi}{60}\right)^2 = \frac{7.9986 \times 10^8 \times 9.81}{\pi \times 1.545^2 \times h \times 24000 \times 1.1} \Rightarrow h = 1.65m(1.65m).$$

Si les trois couches au dessous de la fondation sont considérées, en appliquant la méthode de système équivalent, comme une seule couche homogène (figure III.19), les résultats resteront sensiblement identiques.

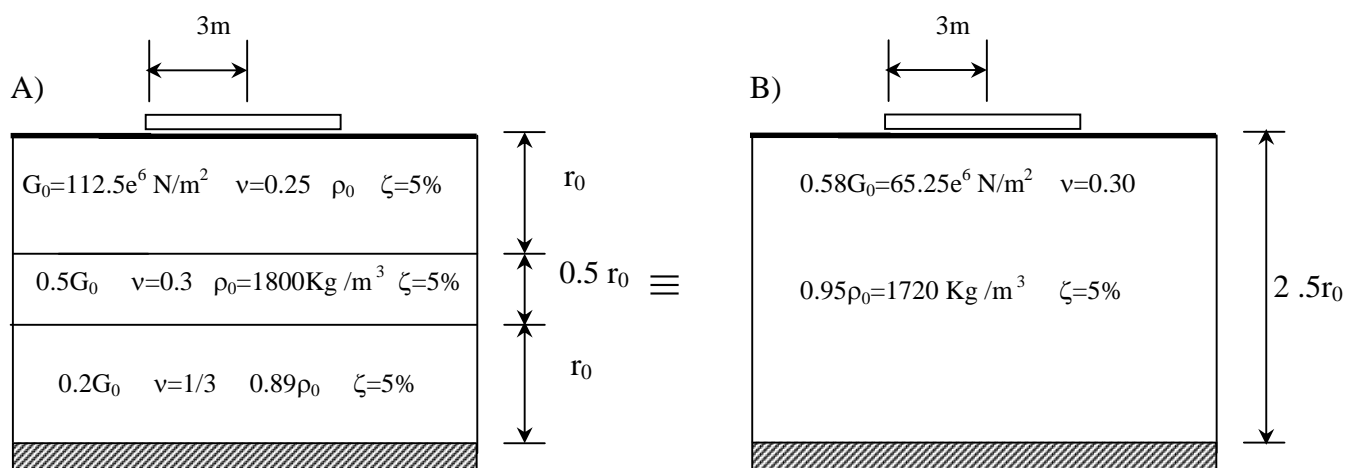


Figure III.22 : A) Fondation d'une machine sur la surface d'un sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. B) Fondation d'une machine sur la surface d'un sol monocouches surmontant un substratum rocheux.

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt{\frac{a^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2.5 \times 3}{\pi}} = 1.545m$$

$$\text{Donc: } k_v = 9.0117 \times 10^8 \text{ N/m}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1500 \times 2\pi}{60}\right)^2 = \frac{9.0117 \times 10^8 \times 9.81}{\pi \times 1.545^2 \times h \times 24000 \times 1.1} \Rightarrow h = 1.81m$$

Et si la monocouche au dessous de la fondation est considérée comme un demi-espace homogène, les résultats seront fortement modifiés.

$$\text{Rayon équivalent : } r_0 = \sqrt{\frac{a^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2.5 \times 3}{\pi}} = 1.545m$$

$$\text{Donc: } k_v = 5.7606 \times 10^8 \text{ N/m}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1500 \times 2\pi}{60}\right)^2 = \frac{5.7606 \times 10^8 \times 9.81}{\pi \times 1.545^2 \times h \times 24000 \times 1.1} \Rightarrow h = 1.15m.$$

On constate que la raideur statique K_v dans le cas d'un sol constitué de trois couches fixes à la base est pratiquement le double de la raideur correspondante au demi-espace homogène, et approximativement égale à la raideur correspondant à une monocouche fixe à la base.

Les résultats mettent clairement en évidence le risque encouru par la sous-évaluation de la réponse, en assimilant le sol de fondation à un demi-espace homogène, en effet, supposer le sol au dessous de la fondation comme un demi-espace homogène, dériver un sous dimensionnement de la fondation, réduction de la hauteur de la fondation presque par moitié (1.65m/1.15m), et supposer l'espace au dessous de la fondation comme un monocouche fixe à la base, conduit à un léger surdimensionnement de la fondation.

III.7.3.2) Cas sur ajusté

Quand la fréquence opérationnelle de la machine est faible, la fondation peut être dimensionnée en considérant le système comme sur ajusté, en supposant la fréquence propre du système égale au double de la fréquence opérationnelle de la machine = 3000tpm.

La hauteur de la fondation est calculée en suivant la même procédure. Les coefficients de raideur restent les mêmes donc $h = 0.1 \text{ m}$ (0.1m), 0.11 m , 0.07 m , correspondant respectivement à une fondation sur la surface d'un sol constitué de trois couches fixes à la base, une fondation sur la surface d'un sol monocouche fixes à la base et pour le cas d'un demi-espace homogène.

Même remarque concernant le risque de sous dimensionnement de la fondation, en assimilant les couches de sol à un demi-espace homogène, et surdimensionnement de la fondation dans le cas de sol monocouche fixes à la base.

Donc la détermination de la fréquence propre du système sol fondation joue un rôle déterminant dans le dimensionnement des fondations vibrantes. On note que les résultats obtenus par l'application des modèles de cône comparés aux résultats issus de l'application de la méthode des couches minces sont identiques.

III.8) CONCLUSION :

La validation des coefficients de l'impédance dynamique est effectuée par comparaison des résultats obtenus par l'application des modèles de cône avec ceux obtenus de l'application de la méthode des couches minces, pour deux cas de profil de sol ; le cas d'une fondation circulaire sur sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène et celui d'une fondation circulaire sur sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.

D'après les résultats on peut conclure :

Dans le cas du demi-espace homogène, les coefficients de l'impédance dynamique calculés par les modèles de cône, présentent une bonne approximation comparés aux résultats exacts, spécialement pour les degrés de liberté horizontale et de torsion, pour les degrés de liberté de balancement et vertical, les modèles de cône ont tendance à surestimer l'amortissement radiatif observé pour les basses fréquences.

Pour les sols multicouches les résultats nous ont montré que, malgré les formes erratiques des coefficients d'impédance dynamique, déterminées par la méthode rigoureuse des couches minces et les modèles de cône, les courbes correspondantes présentent une bonne concordance, particulièrement pour les coefficients d'amortissement dans le cas d'un bicouche reposant sur un demi-espace infini. Pour les coefficients de raideur $k(a_0)$ on constate une différence considérable dans la plage des grandes fréquences. Ces divergences diminuent fortement si l'on considère les variations des modules des fonctions d'impédance. On note aussi que les modules des fonctions d'impédance sont pratiquement identique pour le domaine des faibles fréquences ($a_0 < 1$). La déviation maximale dans le domaine des hautes fréquences demeure dans des proportions acceptables pour toutes fins pratiques (inférieure à $\pm 20\%$ dans tous les cas étudiés).

Concernant le cas des sols multicouches surmontant un substratum rocheux, le modèle de cône, prédisait correctement le comportement en dessous de la fréquence de coupure, où l'amortissement radiative s'annule approximativement.

Enfin, les trois applications traitées montrent la bonne concordance entre les réponses obtenues par les modèles de cône et celles obtenues par les méthodes rigoureuses, ce qui augmente le niveau de confiance de modèle de cône. En outre, la seconde application, qui concerne l'étude de réponse dynamique en déplacements d'un massif de fondation d'un compresseur reposant sur un sol visco-élastique multicouches, montre de manière détaillée des différentes étapes de calcul d'un massif de fondation d'une machine vibrante en utilisant les équations de mouvement.

IMPEDANCE D'UNE FONDATION ENTERREE DANS UN SOL MULTICOUCHES

IV.1) INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré pour l'étude de La réponse dynamique d'un massif de fondation rigide enterrée dans un sol multicouches, pour tous les mouvements, ainsi que la validation des résultats. Les modèles de cône basés sur la résistance des matériaux sont simple, tout en restant précis et claire comparé aux procédures rigoureuses d'élastodynamiques à trois dimensions. Le concept des modèles de cône est étendu aux fondations enterrées sans hypothèse supplémentaire, mais l'analyse d'une fondation enterrée est plus compliquée que le calcul d'une fondation superficielle. Les calculs manuels ne sont plus faisables.

Le principe de la procédure consiste par la représentation d'un disque rigide enterrée par un modèle de double cône (section IV.2) dans l'espace élastique. Son champ du déplacement est définit approximatif par la fonction de Green, utilisé dans la formulation de la matrice de mécaniques structurelles basée sur la méthode des forces.

En première partie, on décrit brièvement le concept du double cône suivi par l'exposition des équations de Green pour les modèles de cône, et enfin la description de la démarche mathématique pour le calcul des fonctions d'impédance.

De la même façon que le chapitre précédant, la validation s'effectue par la comparaison des résultats des coefficients de l'impédance dynamique issue de l'application des modèles de cône à ceux obtenus de l'application de la méthode des couches minces. Deux cas sont étudiés ; le cas d'une fondation circulaire enterrée dans sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène et celui d'une fondation circulaire enterrée dans sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.

En deuxième partie, une étude paramétrique sous forme d'une application est traitée, pour le cas d'une fondation circulaire enterré dans un sol homogène semi-infini, afin d'examiner l'influence de paramètre d'enfoncement sur la fonction d'impédance.

IV.2) DOUBLE CONE

La figure IV.1 illustre Un disque rigide de rayon r_0 (ou équivalent), enterré dans espace-infini avec chargement harmonique vertical, cette situation est modalisé par le modèle de double cône, pour tous les mouvements, avec les mêmes propriétés de modèle de cône seule, la hauteur d'apex z_0/r_0 , le coefficient de raideur statique K sont donnés dans le tableau II.2.

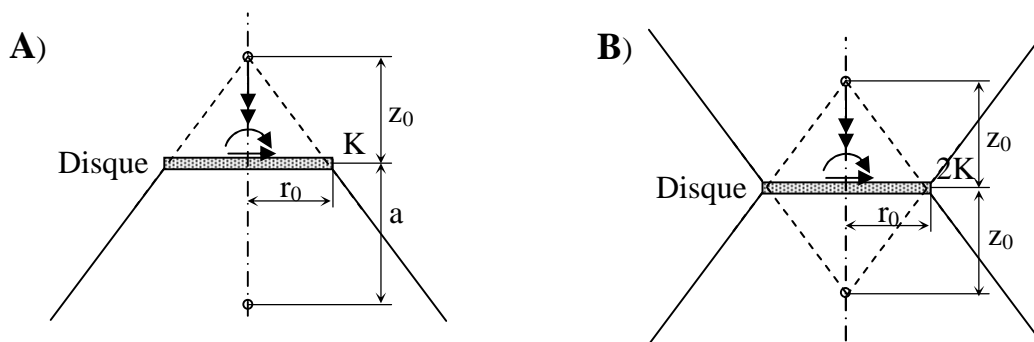


Figure IV.1 : Disques avec leurs cônes correspondants .A) disque sur la surface de sol semi-infini. B) Disque dans sol infini

Le demi-espace supérieur développe une résistance due à la traction de sol contre la charge verticale, et le demi-espace inférieur développe une résistance due à la compression de sol, par conséquent la raideur de cône est exactement le double, et c'est aussi valable pour les autres mouvements. Ainsi Le coefficient de raideur statique de modèle de double cône est le double de celui de cône unilatéral et donc est égal à $2K$. Les dimensionnels des coefficients de raideur $k(a_0)$ et d'amortissements $c(a_0)$ reste inchangé.

IV.3) FONCTIONS DE GREEN

L'aspect clé dans le calcul du comportement dynamique d'une fondation enterrée consiste dans la détermination de la fonction du Green pour un disque rigide enterré dans un espace infini. La fonction du Green dans le domaine du temps est définie comme étant le déplacement ou rotation en fonction de temps, au point récepteur, localisé à une distance 'a', loin du disque de la source de charge, qui est excité en temps égale à '0' par une unité d'impulsion. La distance 'a' est toujours positif (Wolf et Deeks, 2004).

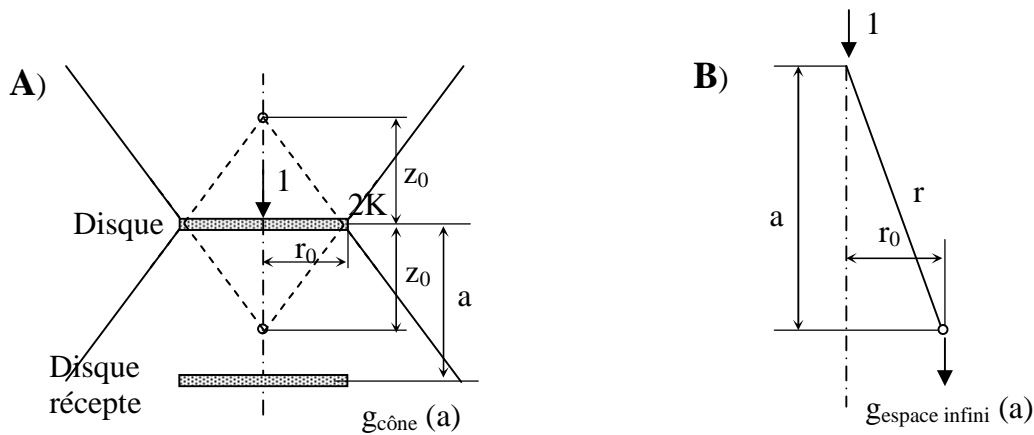


Figure IV.2 : fonction de Green .A) fonction de Green de disque enterrée dans un espace infini avec modèle de double cône. B) fonction de Green de mouvement vertical dans un espace infini

Les fonctions du Green de double cône qui correspond au disque rigide peuvent être utilisées pour tous les mouvements (Figure. IV.2). Ils sont égaux aux fonctions de Green de cône seul, en doublant le coefficient de la raideur statique (Eq. IV.1 pour la translation, Eq IV.2 pour la rotation).

$$g(a, \omega) = \frac{1}{2k} \frac{1}{1 + \frac{a}{z_0}} \frac{e^{-i\frac{\omega a}{c}}}{1 + i\frac{\omega z_0}{c}} \quad (IV.1)$$

$$g_g(a, \omega) = \frac{3}{2k_g} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{a}{z_0}\right)^3} + i\frac{\omega z_0}{c} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{z_0}\right)^2} \right) \frac{1}{3 + 3i\frac{\omega z_0}{c} + \left(i\frac{\omega z_0}{c}\right)^2} e^{-i\frac{\omega z_0}{c}} \quad (IV.2)$$

IV.4) CALCUL DES FONCTIONS D'IMPEDANCE

Afin d'illustrer le concept de la procédure de calcul de la raideur dynamique d'une fondation enterrée, considérons à titre illustratif le degré de liberté vertical, le figure IV.3 présente une fondation cylindrique de rayon r_0 , enterrée dans un sol multicouche a une profondeur 'e'.

La fondation est discrétisée en plusieurs disques dans l'axe de la direction vertical. Le nombre de disques doit être suffisant pour représenter la réponse harmonique à une fréquence spécifiée. La distance verticale entre deux disques Δe doit être telle que :

$$\Delta e \leq \pi c/5\omega \quad (IV.3)$$

ω représente la plus grande fréquence du modale dynamique, et c la vitesse de propagation d'onde (en général l'onde de cisaillement c_s),

En Exprimant l'équation (IV.3), en fonction de la fréquence adimensionnelle a_0 , et $c=c_s$ elle devient :

$$\Delta e \leq \frac{\pi r_0}{5 a_0} \quad (IV.4)$$

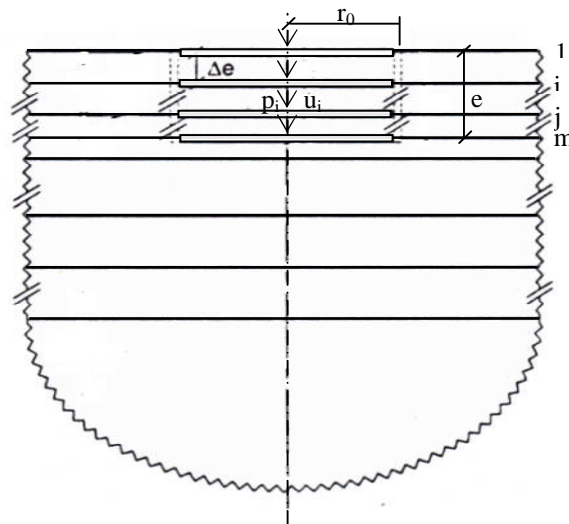


Figure IV.3 : Représentation d'une fondation enterrée dans sol multicouches par plusieurs disques

Le sol piégé entre deux disques est conçu comme un sandwich, contraint de se déplacer avec les disques de fondation et se comportant comme un corps rigide. Pour chaque degré de liberté : vertical, horizontal, balancement et torsion, Les efforts sont appliqués au centre des disques, comme illustré dans la figure IV.3. Chaque disque est chargé par une force d'amplitude $P_i(\omega)$ ($i=1,2,3 \dots$), et modélisé par un double cône propageant des ondes de réflexion et réfraction au niveau des interfaces, seul le disque de surface est modélisé par un seul cône. Ces efforts engendrent des déplacements $U_i(\omega)$ ($i=1,2,3 \dots$) correspondant à chaque disque. Il en résulte que, la force appliquée à la fondation est égale à la somme de toutes les forces verticales agissant sur les disques permettant ainsi d'établir la relation force-déplacement. Le sol piégé est analytiquement "excavé", en soustrayant la masse de sol (voir figure IV.4) ce qui permet l'établissement de la matrice dynamique de flexibilité.

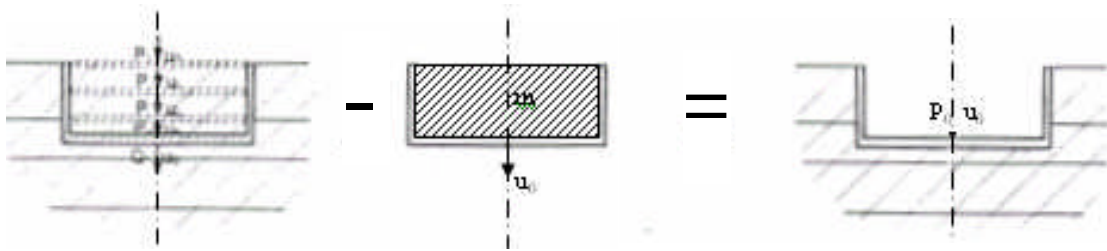


Figure IV.4 : Excavation de la masse de sol piégée pour le degré de liberté vertical

Dans le cadre de notre travail, on s'est limité à donner les expressions des fonctions d'impédance, présenté par *Wolf (1994)* sans montrer tous les développements de leurs formulations.

A.) Mode de translation verticale

$$S_h(\omega) = \{1\}^T [S^f(\omega)]_h \{1\} + \omega^2 m \tag{IV.5a}$$

B.) Mode de translation horizontale

$$S_v(\omega) = \{1\}^T [S^f(\omega)]_v \{1\} + \omega^2 m \tag{IV.5b}$$

C.) Mode de balancement

$$S_r(\omega) = \{e\}^T [S^f(\omega)]_h \{e\} + \omega^2 \frac{me^2}{3} + \{1\}^T [S^f(\omega)]_v \{1\} + \omega^2 \frac{mr_0^2}{4} \tag{IV.5c}$$

D.) Mode de couplage horizontal-basculement

$$S_{hv}(\omega) = S_{vh}(\omega) = \{e\}^T [S^f(\omega)]_h \{1\} + \omega^2 \frac{me}{2} \quad (\text{IV.5d})$$

E.) Mode de torsion

$$S_t(\omega) = \{1\}^T [S^f(\omega)]_t \{1\} + \omega^2 \frac{m_0^2}{2} \quad (\text{IV.5e})$$

Où :

m : La masse de sol piégé

ω : La fréquence

r_0 : Rayon de la fondation

$[S^f(\omega)]$: Matrice des raideurs dynamiques pour le cas d'un espace infini, respectivement pour les modes de vibration : horizontal, vertical, balancement et torsion

$$[S^f(\omega)] = [G(\omega)]^{-1} \quad (\text{IV.6})$$

$[G(\omega)]$: Matrice de flexibilité dynamique composée par des éléments $g_{ij}(\omega)$ de la fonction de greens.

$\{e\}$: Vecteur correspond à la rotation de corps rigide des disques par rapport au centre de la base de la fondation, définir par :

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e \\ e - \Delta e \\ e - 2\Delta e \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

IV.5) VALIDATION DES COEFFICIENTS D'IMPEDANCE DYNAMIQUE

Afin de valider l'approximation des fonctions d'impédance d'une fondation circulaire de rayon r_0 enterrée dans sols multicouches, on a calculé les coefficients de rigidité dynamique $k(a_0)$ et d'amortissement $c(a_0)$ pour tous les degrés de liberté, en vue de les comparer aux coefficients issues de l'application des méthodes rigoureuses, et pour deux profils de sol : cas de sol multicouches surmontant un demi-espace homogène (figure IV.5A), et le second cas, sol multicouches surmontant un substratum rocheux (figure IV.5B). Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées dans la figure IV.5 (Wolf et Deeks, 2004).

Les valeurs des coefficients de rigidité dynamique $k(a_0)$ et d'amortissement $c(a_0)$ issues de l'application de modèle de cône sont représentées dans les figures IV.6 et IV.8, en fonction de la fréquence adimensionnelle a_0 correspondante, et comparées aux résultats exacts obtenus de l'application de la méthode des couches minces (Kausel, 1990). Ceux correspondant à la méthode des couches minces sont représentés par des points distincts.

Chaque coefficient dynamique de la fonction d'impédance est décomposé et normalisé conformément à l'équation III.16

Le module $\sqrt{k^2(a_0) + a_0^2 c^2(a_0)}$ associé à chaque degré de liberté est représenté en fonction de la fréquence adimensionnelle a_0 , dans les figures IV.7 et IV.9

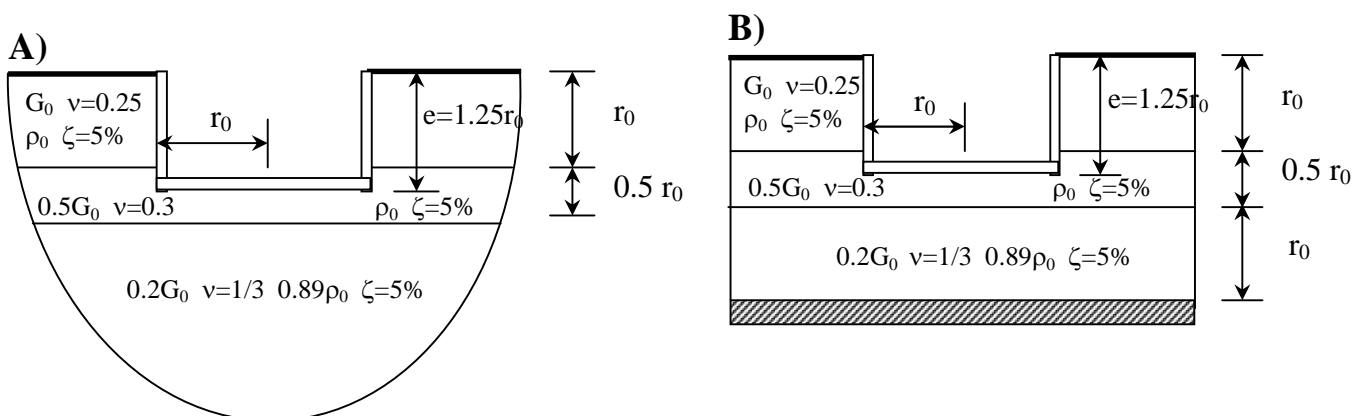


Figure IV.5 : Sols multicouches. A) Fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de deux couches sur demi-espace homogène. B) Fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux.

La première chose à faire avant de lancer les calculs est de déterminer le nombre de disque de la fondation enterrée par l'application de l'équation IV.3, on a la plus grande fréquence $\omega_0=2\pi$, d'où $\Delta e=r_0/10$, donc on trouve 10 disques pour la première couche, de fait que vitesse d'onde de cisaillement de la deuxième couche égale la moitié de vitesse de l'onde de la première couche on trouve $\Delta e = \frac{r_0}{10\sqrt{2}}$, donc 4 disques pour la deuxième couche soit en total 15 disques.

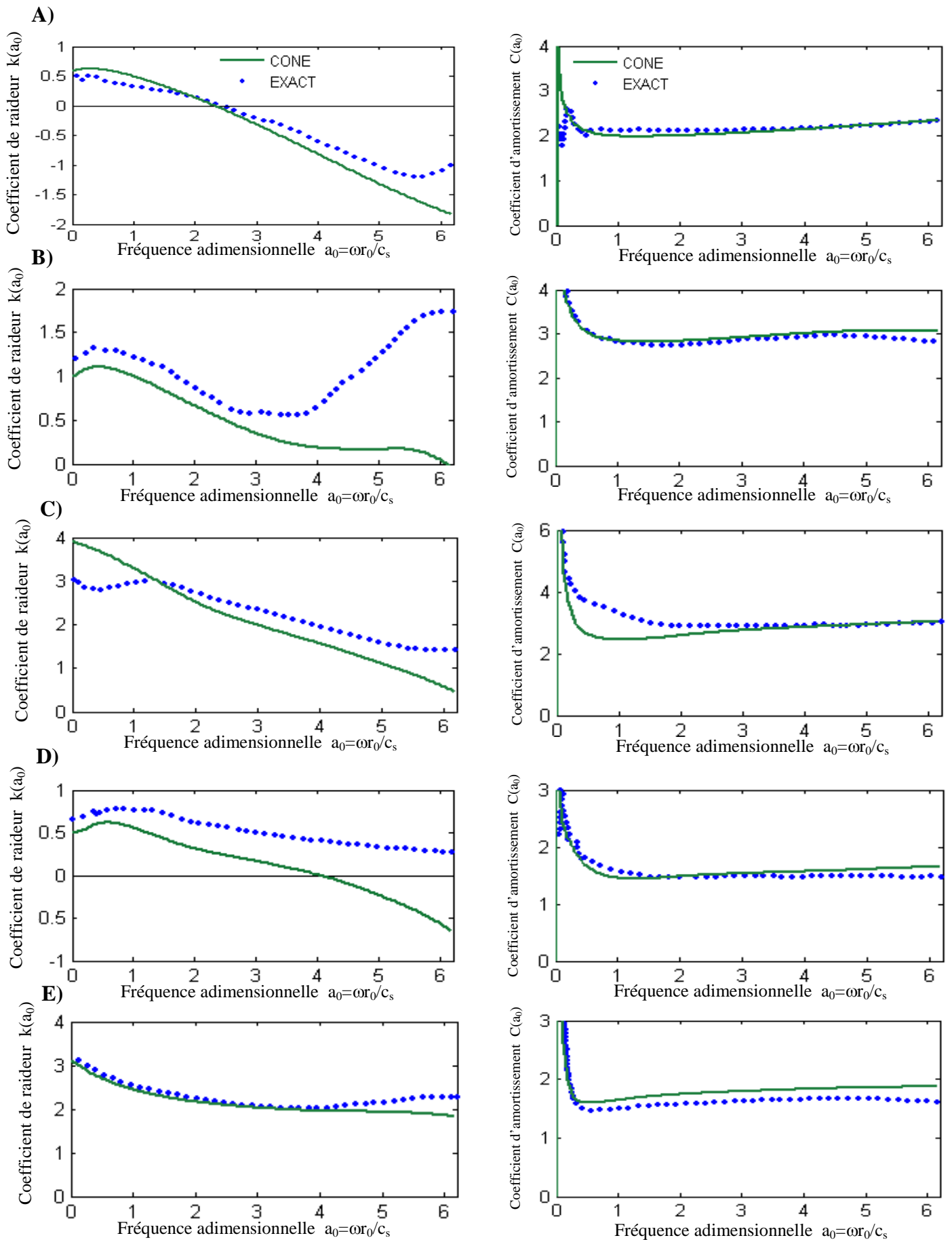


Figure IV.6 : Coefficients de l'impédance dynamique d'une fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de deux couches sur demi-espace homogène. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion

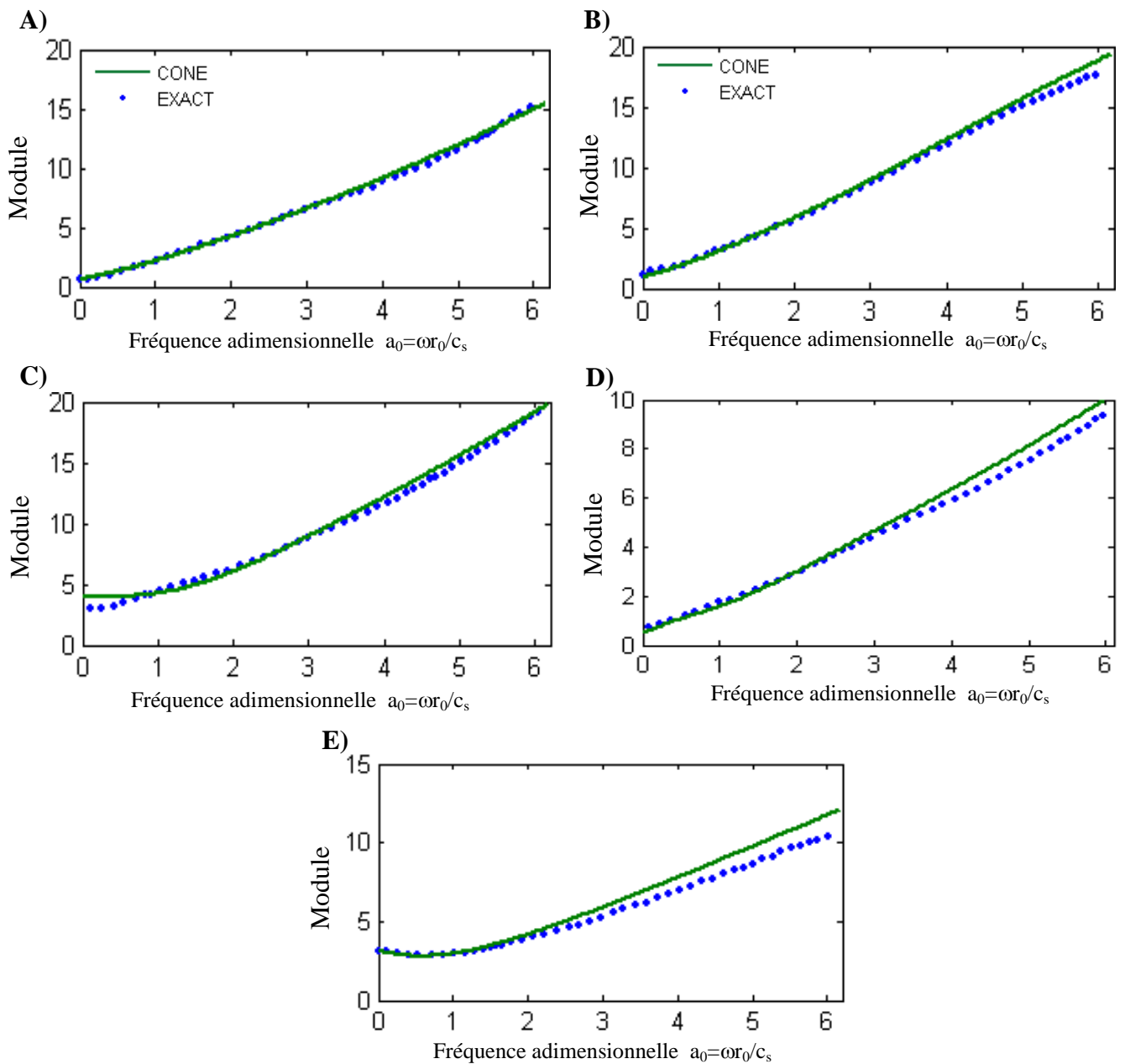


Figure IV.7 : Module d'une fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de deux couches sur demi-espace homogène. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion

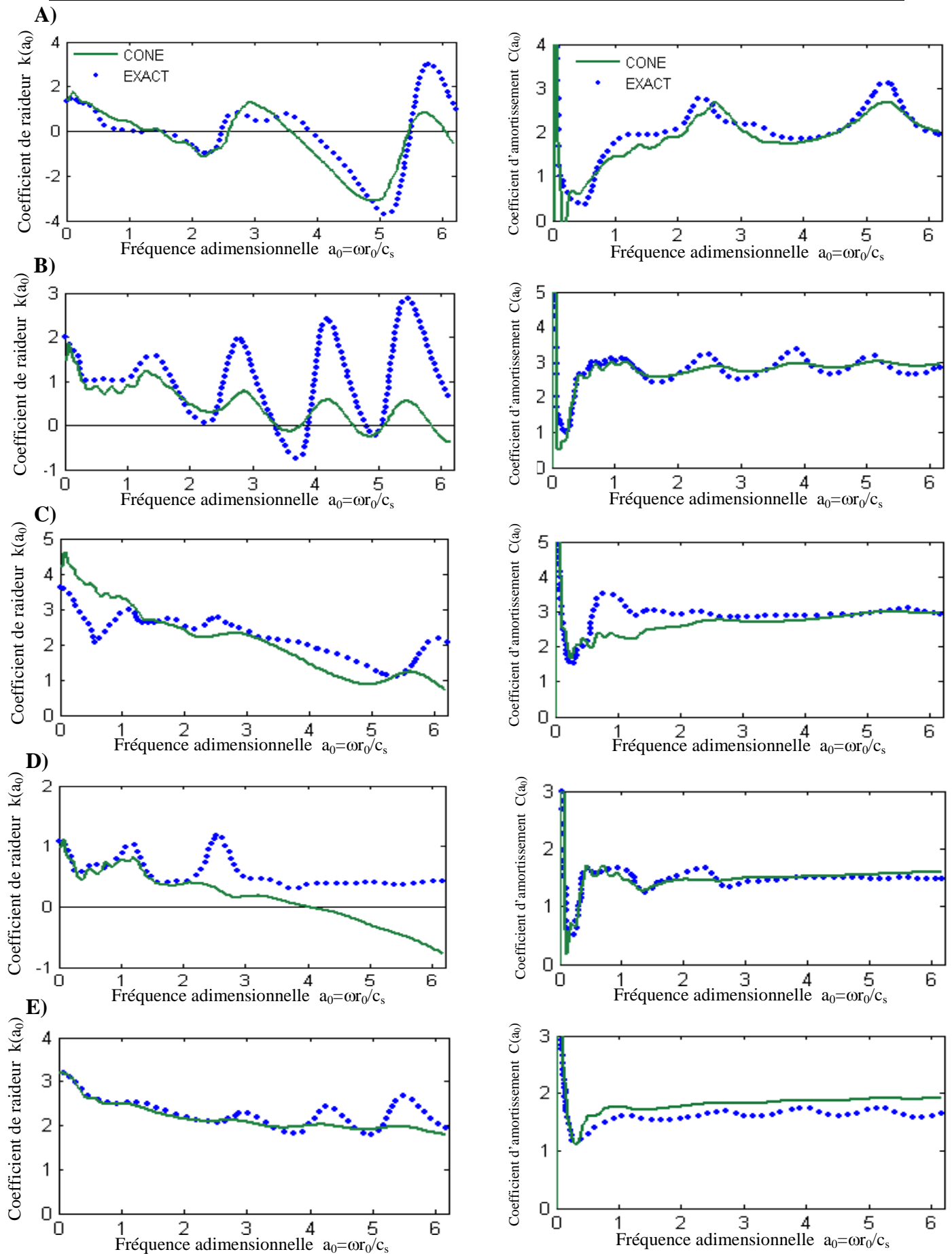


Figure IV.8 : Coefficients de l'impédance dynamique d'une fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion

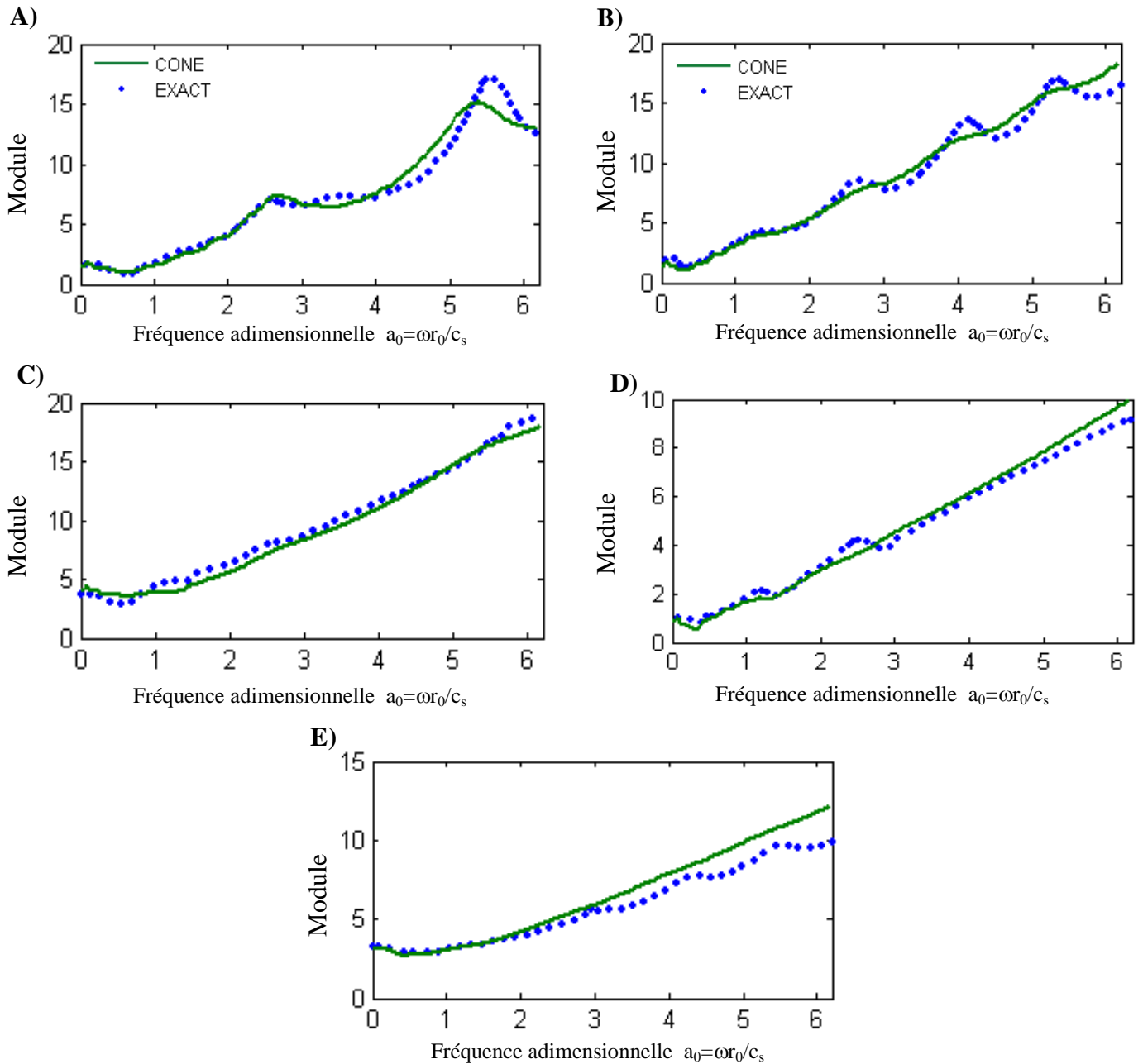


Figure IV.9 : Module d'une fondation cylindrique enterrée dans sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion

Le degré de précision des coefficients d'impédance dynamique entre les modèles de cône et la méthode des couches minces (associés aux degrés de liberté : vertical, horizontal, basculement, torsion, et couplage horizontal-basculement) de la fondation enterrée, pour les deux profils de sols, est pratiquement similaire à celui obtenu dans le cas d'une fondation superficielle. La déviation maximale des modules des fonctions d'impédance dans le domaine des hautes

fréquences demeure inférieure à $\pm 20\%$, ce qui représente un ordre de grandeur typique acceptable en Ingénierie.

En résumé, et par rapport à la fondation superficielle, l'enfoncement se traduit par une augmentation de la raideur statique (en particulier pour les modes de rotation), ainsi que par un accroissement de l'amortissement radiatif et par une augmentation sensible du couplage balancement – translation horizontale. La variation avec la fréquence de l'impédance dynamique est en général différente de celle de la fondation superficielle.

IV.6) APPLICATION : Etude paramétrique d'une fondation cylindrique enterrée dans un sol homogène demi-infini.

IV.6.1) Etude de l'influence de coefficient d'enfoncement (e/r_0) sur la fonction d'impédance

Dans cette application on examine l'effet de l'enfoncement d'une fondation circulaire enterrée dans sol semi-infini homogène sur les fonctions d'impédance dynamiques. Pour l'ensemble des modes de vibration considérés. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées dans la figure IV.10.

Les variations du module de la fonction d'impédance en fonction de la fréquence adimensionnelle a_0 , pour les degrés de libertés : vertical, torsion, horizontal, balancement et couplage horizontal-basculement, sont représentées dans la figure IV.11. Les paramètres adimensionnels caractérisant l'enfoncement de la fondation retenus pour l'étude paramétrique sont : $e/r_0=0$, $e/r_0=0.5$, $e/r_0=1$, $e/r_0=2$. Les valeurs issues de l'application des modèles de cône sont comparées aux résultats obtenus en utilisant la méthode approchée détails dans le tableau IV.1 (A. Pais et E. Kausel, 1988).

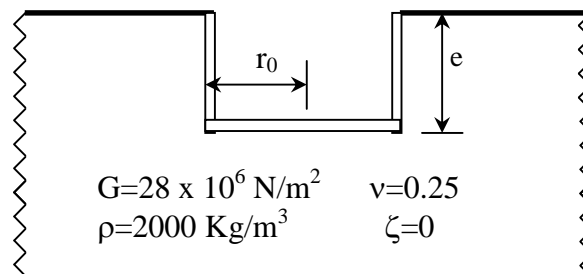


Figure IV.10 : Fondation circulaire enterrée dans sol demi-infini homogène

Le module de la fonction d'impédance est donné par l'expression suivante :

$$|S| = K \sqrt{k^2(a_0) + a_0^2 c^2(a_0)} \quad (\text{IV.8})$$

Ou :

$k(a_0)$: Coefficient rigidités dynamique,

$c(a_0)$: Coefficient d'amortissement,

a_0 : Fréquence adimensionnelle,

K : rigidité statique

Tableau IV.1A : coefficient et fonction d'impédance dynamique pour les degrés de libertés : Vertical, Torsion et couplé

Vertical	Torsion	Couplé
$\bar{K}_V^d = K_V^s(k + ia_0c)$	$\bar{K}_t^d = K_t^s(k + ia_0c)$	$\bar{K}_{Rh}^d = (0.4e/r_0 - 0.03)\bar{K}_h^d$
$K_V^s = K_V^0(1 + 0.54e/r_0)$	$K_t^s = K_t^0(1 + 2.67e/r_0)$	$K_{Rh}^s = (0.4e/r_0 - 0.03)K_h^s$
$K_V^0 = \frac{4Gr_0}{1-\nu}$	$K_t^0 = \frac{16Gr_0^3}{3}$	
k=1	$k = 1.0 - \frac{0.35a_0^2}{1.0 + a_0^2}$	
$c = \frac{\pi(\alpha + 2.0 \frac{e}{r_0})}{K_V^s / Gr_0}$	$c = \frac{\frac{\pi}{2}(1 + 4.0 \frac{e}{r_0}) \frac{a_0^2}{b + a_0^2}}{K_t^s / Gr_0^3}$	
$\alpha = c_t/c_s$	$b = \frac{1}{0.37 + 0.87(e/r_0)^{2/3}}$	

Tableau IV.1B : coefficient et fonction d'impédance dynamique pour les degrés de libertés : Horizontal et Balancement

Horizontal	Balancement
$\bar{K}_h^d = K_h^s(k + ia_0c)$	$\bar{K}_R^d = K_R^s(k + ia_0c)$
$K_h^s = K_h^0(1 + e/r_0)$	$K_R^s = K_R^0(1 + 2.3e/r_0 + 0.58(e/r_0)^3)$
$K_h^0 = \frac{8Gr_0}{2-\nu}$	$K_R^0 = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}$
k=1	$k = 1.0 - \frac{0.35a_0^2}{1.0 + a_0^2}$
$c = \frac{\pi \left[1.0 + (1.0 + \alpha) \frac{e}{r_0} \right]}{K_h^s / Gr_0}$	$c = \frac{\pi \left[\frac{\alpha}{4} + e/r_0 + \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \frac{2}{3} (e/r_0)^3 \right] \frac{a_0^2}{b + a_0^2} + 0.84(1 + \alpha)(e/r_0)^{2.5} \frac{b}{b + a_0^2}}{K_R^s / Gr_0^3}$
	$b = \frac{2}{1 + e/r_0}$

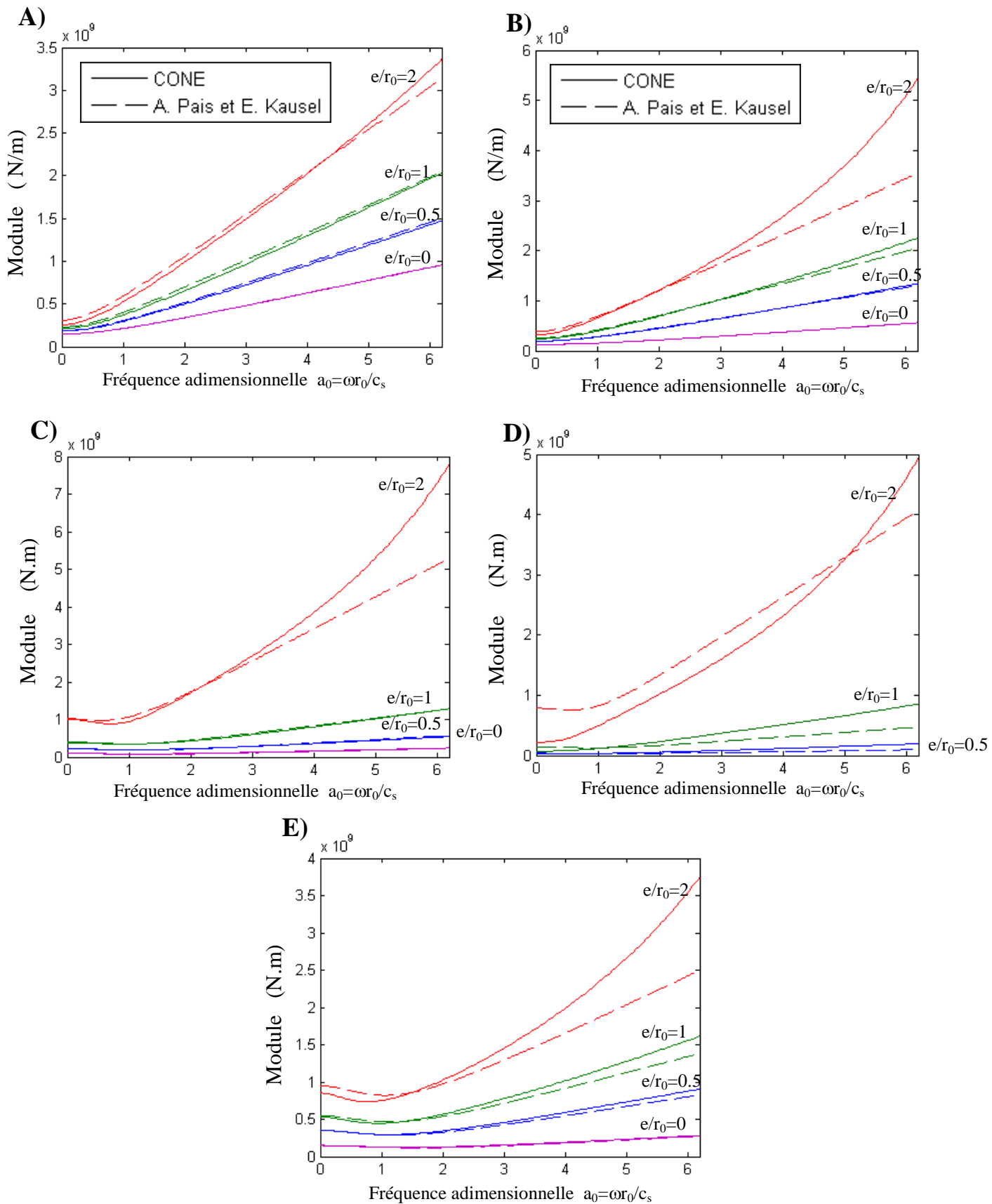


Figure IV.11 : Variation de module des fonctions d'impédance. A) Vertical. B) Horizontal. C) Balancement. D) Couplage horizontal-basculement. E) Torsion.

On constate que le module de fonction d'impédance est variable en fonction de coefficient d'enfoncement e/r_0 , l'augmentation du module de la fonction d'impédance est particulièrement accentuée dans la plage des hautes fréquences notamment pour le rapport $e/r_0=2$.

Pour tous les modes de vibration, les résultats des deux méthodes sont concordants, voire pratiquement identiques dans le domaine des basses fréquences, particulièrement pour les valeurs $e/r_0 \cong 0$ pour les quelles les deux courbes se confondent. La différence constatée entre les résultats des deux méthodes est minime, et n'est visible seulement que dans la plage des hautes fréquences, pour les mouvements : torsion, horizontal, balancement, pour la valeur de $e/r_0=2$, ce qui confirme l'intérêt des modèles de cône dans les études des vibrations des massifs de fondation

IV.6.2) Etude de la variation de facteur de rigidité statique des fondations enterrées

Dans cette application on étudie pour l'ensemble des modes de vibration considérés, la variation de facteur de rigidité statique d'une fondation circulaire enterrée dans sol demi-infini homogène en fonction de coefficient d'enfoncement e/r_0 . Le facteur de rigidité statique est défini comme le ratio de la rigidité statique d'une fondation enterrée sur la rigidité statique d'une fondation superficielle considérée. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont celle présentées dans la figure IV.10.

Les variations de facteur de rigidité statique en fonction de coefficient d'enfoncement e/r_0 , pour les degrés de libertés : vertical, torsion, horizontal, balancement, sont représentées dans la figure IV.12. Les paramètres adimensionnels caractérisant l'enfoncement de la fondation retenus pour l'étude paramétrique sont : $e/r_0=0.5$, 1, et $e/r_0=2$. Les valeurs issues de l'application des modèles de cône sont comparées aux résultats obtenus en utilisant la méthode rigoureuse (*Apsel et Luco, 1987*), ainsi que aux résultats obtenus en utilisant la méthode approchée détaillée dans le tableau IV.1 (*A. Pais et E. Kausel, 1988*).

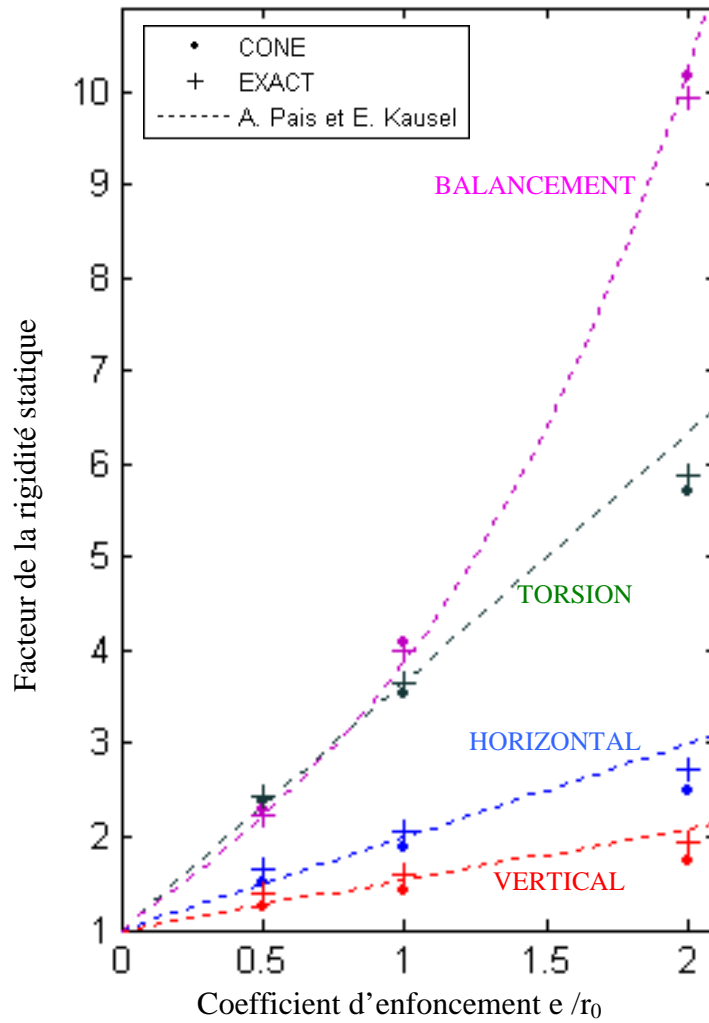


Figure IV.12 : Facteur de rigidité statique pour une fondation cylindrique enterrée dans un sol homogène

Le degré de précision des facteurs de la rigidité statique entre les trois méthodes, associés aux mode de vibration : vertical, horizontal, basculement, torsion, est excellent, particulièrement pour le mode complexe de balancement.

IV.7) CONCLUSION :

Le concept des modèles de cône est étendu aux fondations enterrées sans hypothèse supplémentaire, la validation des coefficients de l'impédance dynamique est faite de la même manière que le chapitre précédent, en comparant les coefficients de l'impédance dynamique déterminés par l'application des modèles de cône avec ceux obtenus de l'application de la méthode des couches mince. Deux cas de profil de sol sont étudiés, à savoir, le cas d'une fondation cylindrique enterrée dans un sol constitué de deux couches surmontant demi-espace homogène et celui d'une fondation cylindrique enterrée dans un sol constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux, les résultats aboutissent aux mêmes conclusions pour le chapitre précédent, la plus importante est que, les modules des fonctions d'impédance obtenus par l'application des modèles des cône, et ceux obtenus par l'application de la méthodes des couches mines, sont pratiquement identique pour le domaine des faibles fréquences ($a_0 < 1$). La déviation maximale dans le domaine des hautes fréquences demeure inférieure à $\pm 20\%$, ce qui représente un ordre de grandeur typique acceptable en ingénierie.

Les résultats de l'étude paramétrique montrent aussi que, le module de fonction d'impédance est variable en fonction de coefficient enfoncement e/r_0 , l'augmentation du module de la fonction d'impédance est particulièrement accentuée dans la plage des hautes fréquences notamment pour le rapport $e/r_0=2$. En outre, La différence entre les résultats obtenus de l'application des modèles de cône avec ceux obtenus en utilisant la méthode approchée (A. Pais et E. Kausel, 1988), est minime, et n'est visible seulement que dans la plage des hautes fréquences, pour les mouvements : torsion, horizontal, balancement, pour la valeur de $e/r_0=2$, ce qui confirme l'intérêt des modèles de cône dans les études des vibrations des massifs de fondation.

Et enfin, par rapport à la fondation superficielle, l'enfoncement se traduit par une augmentation de la raideur statique (en particulier pour les modes de rotation), ainsi que par un accroissement de l'amortissement radiatif et par une augmentation sensible du couplage balancement – translation horizontale. La variation avec la fréquence de l'impédance dynamique est en général différente de celle de la fondation superficielle.

CONCLUSION GENERALE

Une étape primordiale pour le problème d'analyse dynamique d'un massif de fondation d'une machine vibrante consiste en l'évaluation de la matrice des impédances dynamiques de la fondation. Le problème à résoudre est en fait un problème aux conditions aux limites mixtes : contrainte nulle à la surface du sol en dehors de l'emprise de la fondation ; déplacement plan sous la surface de l'appui de la fondation.

En reprenant la classification de *Gazetas (1983)* on peut distinguer :

- les solutions obtenues à partir d'une formulation continue du problème conduisant à des solutions analytiques ou semi-analytiques.
- Les solutions obtenues à partir d'une formulation discrétisée du problème : méthode des éléments finis et plus rarement des différences finies.

Néanmoins la complexité mathématique et le coût induit par l'utilisation des méthodes numériques rigoureuses en vue d'une détermination précise des fonctions d'impédance peuvent limiter considérablement leurs applications pour les études des vibrations des massifs de fondation sur sols multicouches.

Dans la présente étude, nous avons opté pour l'utilisation d'un modèle simplifié basé sur les modèles de cône, rendu possible par les développements théoriques récents, qui ont permis une avancée considérable dans les techniques d'analyses disponibles et dans l'interprétation analytique des effets d'interaction sol fondation.

La présente étude comporte deux volets principaux. Le premier concerne l'évaluation et la validation de la matrice des impédances, dans les cas d'une fondation rigide superficielle ainsi que dans le cas d'une fondation rigide enterrée dans des sols multicouches pour les modes de

vibration correspondant aux modes de translation (verticale, horizontale) et de rotation (balancement, torsion).

Le deuxième volet est consacré à diverses applications relatives à l'analyse des vibrations des massifs de fondation de machine. La première application, porte sur le calcul des coefficients d'impédance dynamique d'une fondation de forme quelconque reposant sur un sol Visco-élastique homogène. La seconde application concerne l'étude de réponse dynamique en déplacement d'un massif de fondation d'un compresseur reposant sur un sol visco-élastique multicouches, montrant de manière détaillée des différentes étapes de calcul d'un massif de fondation d'une machine vibrante. La troisième application, porte sur le dimensionnement d'une fondation d'une machine vibrante reposant sur un sol visco-élastique multicouches.

On outre, une étude paramétrique a été également effectuée en vue d'examiner l'effet de l'enfoncement de la fondation sur les fonctions d'impédance dynamiques de la fondation pour l'ensemble des modes de vibration considérés.

Les résultats obtenus montrent que, malgré les formes erratiques des coefficients d'impédance dynamique déterminées en utilisant les méthodes rigoureuses et les modèles de cône, une bonne concordance est observée en général (particulièrement pour les coefficients d'amortissement dans le cas d'un bicouche reposant sur un demi-espace infini). On note aussi que les modules des fonctions d'impédance sont pratiquement identique pour le domaine des faibles fréquences ($a_0 < 1$). La déviation maximale dans le domaine des hautes fréquences demeure dans des proportions acceptables pour toutes fins pratiques (inférieure à $\pm 20\%$ dans tous les cas étudiés).

Par rapport à la fondation superficielle, l'enfoncement se traduit par une augmentation de la raideur statique (en particulier pour les modes de rotation), ainsi que par un accroissement de l'amortissement radiatif et par une augmentation sensible du couplage balancement – translation horizontale. La variation avec la fréquence de l'impédance dynamique est en général différente de celle de la fondation superficielle.

Les résultats obtenus montrent aussi que, le module de la fonction d'impédance est variable en fonction de coefficient enfoncement e/r_0 . L'augmentation du module de la fonction d'impédance est particulièrement sensible dans la plage des hautes fréquences, notamment pour le rapport $e/r_0=2$.

En conclusion, les résultats obtenus montrent clairement que l'utilisation des modèles de cône pour l'étude des vibrations des massifs de fondation sur sols multicouches, dans le cas des fondations, de forme quelconque, aussi bien superficielles qu'enterrées, constitue une alternative de calcul pratique relativement simple et efficace, comparativement aux méthodes numériques rigoureuses de calcul basées sur les équations tridimensionnelle d'elasto-dynamique.

La méthode des impédances dynamique est suffisamment simple pour être préférée à toute autre méthode. Il convient cependant, de ne pas oublier que la validité des résultats obtenus pour l'évaluation du mouvement d'une fondation dépend, essentiellement, de la bonne connaissance et de la prise en compte correcte des caractéristiques du problème: stratigraphie caractéristiques mécaniques des sols, schématisation de la fondation ... etc. Une méconnaissance, ou une connaissance imparfaite, de ces paramètres est souvent responsable des écarts mentionnés entre mouvements calculés et mouvements observés.

BIBLIOGRAPHIE

- Ahmad, S., Rupani, A. K., 1999,** ‘*Horizontal Impedance of Square Foundation in Layered Soil*’, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 18, 59-69
- Apse, R. J. and Luco, J. E., 1987,** ‘*Impedance Functions for Foundations Embedded in a Layered Medium: An Integral Equation Approach*’, Earthquake Engineering and structural Dynamics, 15,213-231.
- Asik, M. Z. and Vallabhan, C. V. G., 2001,** ‘*A Simplified Model for the Analysis of Machine Foundations on a Non Saturated Elastic and Linear Soil Layer*’, computers and structures, 79,2717-2726.
- Ait Baziz, O. O., 2007,** ‘*Etude de la Performance d’un Modèle Dynamique Equivalent pour l’Analyse des Systèmes Sol-Structures*’, Thèse de Magister, USTHB, encadré par **Tiliouine, B.**, Algérie.
- Baidya, D. K. and Sridharan, A., 2002,** ‘*Foundation Vibration on Layered Soil*’, Indian Geotechnical Journal, Vol.32(2), 235-257.
- Baidya, D. K. and MuraliKrishna, G., 2001,** ‘*Investigation of Resonant Frequency and Amplitude of Vibration Footing Resting on a Layered Soil System*’, Geotechnical Testing Journal, ASTM, Vol. 24, No.4, 409-417.
- Baidya, D. K. and MuraliKrishna, G., 2000,** ‘*Dynamic Response of Foundation on Finite Stratum-an Experimental Investigation*’, Indian Geotechnical Journal, 30(4), 328-350.
- Baidya, D. K. and Sridharan, A., 1994,** ‘*Stiffness of the Foundations Embedded in to Elastic Stratum*’, Indian Geotechnical Journal, Vol. 24(4), 353-367.
- Bielak, J., 1971,** ‘*Earthquake Response of Building-foundation Systems*’, Report EERL 71-04, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Bycroft, G. N., 1956,** ‘*Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum*’, Philosophical Transactions of Royal Society of London, Vol. 248, Series A, 248,327.
- De Barros, F. C. P. and Luco, J. E., 1990,** ‘*Discrete Models for Vertical Vibration of Surface and Embedded Foundations*’, Earthquake Engineering and structural Dynamics, 19 (2),289-303.
- Ehlers, R. J., 1942,** ‘*The Effect of Soil Flexibility on Vibrating Systems*’, Beton und Eise,41,197-203.

- Gardenas, M., Bard, P. Y., J-Chaves-Garcia, F. et Guenguen, P., 1999**, “ *Modélisation des Fonctions d’Impédance pour une Etude d’Interaction Sol-Structure, Application des Modèles de cône* ”, 5^{ème} Colloque National AFPS, Cachan (France).
- Gazetas, G., 1991a**, “*Foundations Vibrations in Foundations Engineering Handbook*”, 2nd Edition, Edited by H-Y-Fang, Chapter 15, pp 553-593, (New York Van Nostrand Reinhold).
- Gazetas, G., 1991b**, “*Formulas and Charts for Impedances of Surface and Embedded Foundations*”, J. Geotech. Engng., ASCE, 117(9), 1363-1381.
- Gazetas, G. and Stokoe, K. H., 1991**, “*Vibration of Embedded Foundations: Theory versus experiment*”, J. Geotech. Engng., ASCE, 117(9), 1382-1401.
- Gazetas, G., 1983**, “*Analysis of machine Foundation Vibrations: State of the Art*”, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 1, No.1, 2,1-41
- Gazetas, G., and Rosset, J. M., 1979**, “ *Vertical Vibration of Machine Foundations*”, J. Geotech. Engng., ASCE, 105(12), 1435-1454.
- Hadjian, A. H. and Lucot, J. E., 1977**, “*On the Importance of Layering on Impedance Functions*”, Proc. 6th WCEE, New Delhi, pp. 1675-1680.
- Jaya, K. P. and Prasad, A. M., 2002**, “*Embedded Foundation in Layered Soil Under Dynamics Excitations*”, J. Soil dynamics and Earthquake Engineering, 22,485-498.
- Kagawa, T. and Kraft, L. M., 1981**, “ *Machine Foundations on Layered Soil Deposits*”, Proc. Tenth Int. Conf. Soil Meeh. and foundation Engg., Stockholm, Vol. 3, 249-252.
- Kausel, E., Rosset, J. M. and Wass, G., 1975a**, “*Dynamic Analysis of Footings on Layered Media*”, J. of Engineering Mech., ASCE, Vol.101, No. EM5, 679-693.
- Kausel, E., Rosset, J. M., 1975b**, “*Dynamic Stiffness of Circular Foundations*”, J. of Engineering Mech., ASCE, Vol.101, No. EM6, 771-785.
- Lamb, H., 1904**, “*On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid*”, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, A 203, 1-42.
- Luco, J. E., 1998**, “ *A Simplified Model for Structural Control Including Soil-Structure Interaction Effects*”, Earthquake Engineering and structural dynamics, Vol 27, 225-242.
- Luco, J. E. and Mita, A., 1987**, “Response of Circular Foundation on a Uniform Half Space to Elastic Waves”, Earthquake Engineering and structural Dynamics, 15,105-118.
- Luco, J. E., 1980**, “ *Soil-structure Interaction and Identification of Structural Models*”, Proc. ASCE Specialty Conference, Knoxville, Tennessee.
- Luco, J. E., 1974**, “*Impedance Functions for a Rigid Foundations on a Layered Medium*”, Nuclear Engineering and Design, 31,204-217.
- Luco, J. E. and Westmann, R. A., 1971**, “ *Dynamic Response of Circular Footings*”, J. Engng. Mech. Div., ASCE, 97, 1381-1395.

- Mandal, A. and Baidya, D. K., 2003**, “*The Influence of Rigid Boundary on the Dynamic Response of the Foundation – An Experimental Investigation*”, *Electronic journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 8, Bundle B.
- Meek, J. W. and Wolf, J. P., 1994a**, “*Materiel Damping for Lumped-Parameter Models of Foundation*”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 23, 349-369.
- Meek, J. W. and Wolf, J. P., 1994b**, “*Cone Models for an Embedded Foundation*”, *J. Geotech. Engng., Div. ASCE*, 120, 60-80.
- Meek, J. W. and Wolf, J. P., 1993a**, “*Cone Models for Nearly incompressible Soil*”, *Earthquake Engineering and structural Dynamics*, 22, 649-663.
- Meek, J. W. and Wolf, J. P., 1993b**, “*Why Cone Models Can Represent the Elastic Half-Space*”, *Earthquake Engineering and structural Dynamics*, 22, 759-771.
- Meek, J. W. and Wolf, J. P., 1992a**, “*Cone Models for Homogeneous Soil*”, *J. Geotech. Engng., Div. ASCE*, 118(5),667-685.
- Meek, J. W. and Wolf, J. P., 1992b**, “*Cone Models for Soil Layer on Rigid Rock*”, *J. Geotech. Engng., Div. ASCE*, 118(5),686-703.
- Meek, J. W. and Wolf, J. P., 1991**, “*Insight of Cutoff Frequency for Foundation on Soil Layer*”, *Earthquake Engineering and structural Dynamics*, 20, 651-665.
- Meek, J. W. and Veletsos, A. S., 1974**, “*Simple Models for Foundations in Lateral and Rocking Motion*”, *Proc.5th World congress on Earthquake Engineering*, Rome, Vol.2,2610-2613
- Nagendra, M. V. and Sridharan, A., 1984**, “*Footing Response to Horizontal Vibration*”, *J. Engineering Mech., ASCE*, Vol. 110, No. 4, 648-654.
- Pais Artur, Kausel E., 1988**, “*Approximate formulas for dynamic stiffnesses of rigid foundations*”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 7, No. 4
- Pecker, A., 1984**, “*Dynamique Des Sols*”, Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Pradhan, P. K., Baidya, D. K. and Ghosh, D. P., 2004**, “*Dynamic Response of Foundations Resting on Layered Soil by Cone Model*”, *Soil dynamics and Earthquake Engineering*, Vol 24, 425-434.
- Pradhan, P. K., Baidya, D. K. and Ghosh, D. P., 2003**, “*Impedance functions of Circular Foundation Resting on Layered Soil Using Cone Model*”, *Electr. J. Geotech. Engng.*, 8(B).
- Quinlan, P. M., 1953**, “*The Elastic Theory of Soil Dynamics*”, *Symp. On Dyn. Test of Soils*, ASTM-SPT No. 156, 3-34.
- Reissner, E., 1936**, “*Station are axialsymmetrice druch eine elastischen halb raues*”, *Ingenieur Archiv*, Vol. 7, Part-6, 381-396.
- Richart, F. E., Woods, R. D. et Hall, J. R., 1970**, “*Vibrations of Soils and Foundations*”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Sieffert, J. G. and Cevaer, F., 1993, ‘*Hand Book of Impedance Functions, Surface Foundations*’, OUEST Edition Presses Académiques.

Sridharan, A., Gandhi, N. S. V. V. S. J., and Suresh, S., 1990, ‘*Stiffness Coefficients of Layered Soil System*’, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 116, No. 4, 604-624.

Stewart, J. D. and Fenves, G. L., 1998, ‘*System Identification for Evaluating Soil-Structure Interaction Effects in Buildings from Strong Motion Recordings*’, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol 27, 869-885.

Sung, T. Y., 1953, ‘*Vibrations in Semi-infinite Solids due to Periodic Surface loading*’, Sc. D. Thesis, Harvard University.

Tassoulas, J. L. and Kausel, E., 1983, ‘*Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Strata*’, Int. Jr. for Num. Meth. In Engng., Vol. 19,1005-1032.

Tiliouine, B., 2000, ‘*Dynamique des structures*’, Tome 1 : Aspect Vibratoires, GECOTEC, Algerie.

Veletsos, A. S. and Verbic, B., 1974, ‘*Basic Response Functions For Elastic Foundations*’, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 100, 189-202.

Veletsos, A. S. & Nair, V. D., 1974, ‘*Response of Torsionally Excited Foundations*’, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 100, 476-482.

Veletsos, A. S. and Verbic, B., 1973, ‘*Vibration of Viscoelastic Foundations*’, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2, 87-102.

Veletsos, A. S. and Wei, Y. T., 1971, ‘*Lateral and Rocking Vibration of Footings*’, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 97, 1227-1248.

Warburton, G. B., 1957, ‘*Forced Vibration of a Body on an Elastic Stratum*’, J Appl Mech, Trans ASME, 55-58.

Wolf, J. P. and Deeks, A.,J., 2004, ‘*Foundation Vibration Analysis: A Strength of Materials Approach*’, Elsevier.

Wolf, J. P. and Preisig, M., 2003, ‘*Dynamic Stiffness of Foundation Embedded in Layered Half-Space Based on Wave Propagation in Cones*’, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 32, 1075-1098.

Wolf, J. P., 1997, ‘*Spring-Dashpot-Mass Models for Foundation Vibrations*’, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 26,931-949.

Wolf, J.P., 1994, ‘*Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models*’, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Wolf, J. P. and Meek, L W., 1994a, ‘*Rotational Cone Models for a Soil Layer on Flexible Half-Space*’, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 23,909-925.

Wolf, J. P. and Meek, J. W., 1994b, ‘*Dynamic Stiffness of Foundation on Layered Soil Half-Space Using Cone Frustums*’, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 23, 1079- 1095.

Wolf, J. P. and Meek, J. W., 1994c, “*Insight of 2D- versus 3D- Modeling of Surface Foundations via Strength of Material Solutions for Soil Dynamics*”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 23,91-112.

Wolf, J. P. and Meek, J. W., 1993, “*Cone Models for a Soil Layer on Flexible Rock Half Space*”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 22, 185-193.

Wolf, J. P. and Somaini, D. R., 1986, “*Approximate Dynamic Model of Embedded Foundation in Time Domain*”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics,14(5), 683-703.

Wolf, J. P., 1985, “*Dynamic Soil-Structure Interaction*”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Wong, H. L. and Luco, J. E., 1985, “*Tables of Impedance Functions for Square Foundation on Layered Media*”, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 4, 64-81.

Wu, W. H., 1997, “*Equivalent Fixed Base Models for Soils Structure Interaction Systems*”, Soil Dynamics and Earthquake Engineering,16, 323-336.