

MINISTERE AUX UNIVERSITES  
Ecole Nationale Polytechnique  
d'ALGER  
Département de Génie  
Mécanique

مدرسة متعددة التقنيات  
وزارة للجامعات  
بالجزائر

## THESE

Présentée Pour l'Obtention  
de Magister

## THEME

ETUDE DU DELAMINAGE DES MATERIAUX COMPOSITES STRATIFIES  
CARBONE / EPOXY EN MODE I POUR DIFFERENTES  
CONFIGURATIONS D'EPROUVETTES

Présenté par :

Mr K. AZOUAOUI

Devant le jury:

PRESIDENT :	Mr A. GAHMUSSE	(Prof. ENP)
EXAMINATEURS :	Mr A. BALI	(Prof. ENP)
	Mr Y. BELKACEMI	(M. A. ENP)
RAPPORTEURS :	Mr M. BENZEGGAGH	(U. T. Compiègne)
	Mr S. RECHAK	(Prof. ENP)

MINISTERE AUX UNIVERSITES  
Ecole Nationale Polytechnique  
d'ALGER  
Département de Génie  
Mécanique

مدرسة متعددة التقنيات  
وزارة للجامعات  
بالجزائر

## THESE

Présentée Pour l'Obtention  
de Magister

## THEME

ETUDE DU DELAMINAGE DES MATERIAUX COMPOSITES STRATIFIES  
CARBONE / EPOXY EN MODE I POUR DIFFERENTES  
CONFIGURATIONS D'EPROUVETTES

Présenté par :

Mr K. AZOUAQUI

Devant le jury:

PRESIDENT :	Mr A. GAHMOUSSE	(Prof. ENP)
EXAMINATEURS :	Mr A. BALI	(Prof. ENP)
	Mr Y. BELKACEMI	(M. A. ENP)
RAPPORTEURS :	Mr M. BENZEGGAGH	(U. T. Compiègne)
	Mr S. RECHAK	(Prof. ENP)

JUIN 1991

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَالصَّلَاةِ  
وَالسَّكِينِ  
وَمِنْ أَعْيُنِ  
رَبِّ الْعَالَمِينَ

صِدْقُ اللَّهِ الْعَظِيمِ

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance en vers toutes les personnes qui ont rendues possible l'elaboration de ce travail.

Je remercie vivement monsieur M.BENZEGGAGH enseignant-chercheur à la division polymères et composites de l'U.T.C. et monsieur S.RECHAK enseignant à l'E.N.P. pour leurs suivis et leurs précieux conseils.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à la division polymères et composites de l'U.T.Compiègne pour m'avoir accueilli dans leur département.

Que messieurs les membres du jury trouvent ici mes sincères remerciements pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je remercie enfin, la direction du projet P.N.U.D. pour leur aide conséquente sans laquelle la réalisation de ce modeste travail aurait été compromise.

## ملخصي :

يهدف هذا العمل إلى دراسة مدى تأثير مكان الشروخ بالنسبة لعدة إتجاهات في الطبقات على الدلا مناج و خاصة على قيمة الطاقة اللازمة للشروخ باستعمال MLER يمكننا إستنتاج الطاقة اللازمة للشروخ و متابعة نمو هذا الأخير بفضل استعمال تقنيات منحنيات

-- R --

## Résumé :

Le présent travail se propose d'étudier l'influence de la position du défaut par rapport aux différentes orientations des plis sur le délaminage et surtout sur la valeur de la tenacité. L'application de la M.L.E.R. nous permettra :

- de définir et de mesurer la tenacité.
- de mesurer les énergies de rupture et de suivre la croissance d'une fissure en utilisant les techniques de courbes "R".

L'approche expérimentale ne saurait être complète sans l'utilisation de moyens techniques tels que; l'émission acoustique, l'extensométrie, la microfractographie.

## Abstract :

The aim of this work is to study the influence of the position of the crack on the delamination of laminated composites with different sequences.

The application of the fracture mechanics permit us to calculate :

- the elastic energy release rate.
- the energies of fracture and give the amount of crack growth by the R curves.

## SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 - PRESENTATION DES MATERIAUX COMPOSITES -	4
1.1- LA MATRICE	4
1.2- LES ÉLÉMENTS DE RENFORT	6
1.3- LE STRATIFIÉ	6
CHAPITRE 2 - THEORIE DES STRATIFIES -	10
2.1- THEORIE ELASTIQUE DU PLI	10
2.1.1- Relation $\sigma$ - $\varepsilon$ des matériaux E. H. A	10
2.1.1.1- Signification de $S_{11}$ et $S_{21}$	15
2.1.1.2- Signification de $S_{22}$ et $S_{12}$	17
2.1.1.3- Signification de $S_{66}$	19
2.1.2- Formulation des relations $\sigma$ - $\varepsilon$ dans un repère de sollicitation quelconque	19
2.1.3- Micromécanique et loi de mélange	24
2.1.3.1- Détermination de $E_1$	24
2.1.3.2- Détermination de $E_2$	25
2.1.3.3- Détermination de $G_{12}$	26
2.1.3.4- Détermination de $\nu_{12}$	28
2.2- THEORIE ELASTIQUE DU STRATIFIÉ	28
2.2.1- Relations $\sigma$ - $\varepsilon$	29
2.2.2- Equations fondamentales d'un stratifié	32
2.2.2.1- Détermination des constantes d'ingénieur apparentes en flexion d'un stratifié symétrique	37
CHAPITRE 3 - MECANIQUE LINEAIRE ELASTIQUE DE LA RUPTURE (M. L. E. R)	39

3.1-	MATERIAU HOMOGENE ELASTIQUE ISOTROPE	39
3.1.1-	Généralités sur les ruptures	39
3.1.2-	Champ de contraintes et de déplacement au voisinage de l'extrémité d'une fissure	40
3.1.3-	Théorie de Griffith	44
3.1.4-	Modèle d'Irwin	47
3.2-	MATERIAUX HOMOGENES ELASTIQUES ANISOTROPES (COMPOSITE)	49
3.2.1-	Généralités sur les ruptures	49
3.2.2-	Condition d'application de la MLER	50
3.2.3-	Champ de contrainte et de déplacement au voisinage du front de fissure	50
3.3-	RESISTANCE A LA PROPAGATION D'UNE FISSURE, NOTION DE COURBE " R "	53
<b>CHAPITRE 4 - DETERMINATION DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE CRITIQUE MODE I : <math>G_{IC}</math></b>		<b>55</b>
4.1-	METHODES BASEES SUR LA DETERMINATION DE $\left[ \frac{d}{d} \frac{c}{a} \right]$	55
4.1.1-	Méthode se basant sur la théorie des poutres	56
4.1.2-	Méthode de la compliance	59
4.1.3-	Méthode de Berry	59
4.2-	AUTRES METHODES	61
4.2.1-	Méthode des aires	61
4.2.2-	Méthode du clivage	64
4.2.3-	Modèle analytique	64
<b>CHAPITRE 5 - PRESENTATION DES MOYENS ET TECHNIQUES DE L'APPROCHE EXPERIMENTALE</b>		<b>66</b>
5.1-	PRESENTATION DU MATERIAU	66
5.1.1-	Constituants et provenance des éprouvettes	66
5.1.2-	Conditions à respecter lors de la	

réalisation des DPE	67
5.2- DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET D'EXPLOITATION DES RESULTATS	69
5.2.1- Moyens d'essai de sollicitation en mode I	69
5.2.2- Chaine d'E.A	70
5.3- TECHNIQUE EXPERIMENTALE ET EXPLOITATION DES RESULTATS	75
5.3.1- Instrumentation des éprouvettes	75
5.3.2- Procédures suivies lors de l'expérimentation	77
5.3.2.1- Phase essai	77
5.3.2.2- Phase exploitation des résultats	77
<b>CHAPITRE 6 - RESULTATS EXPERIMENTAUX ET DISCUSSION</b>	<b>81</b>
6.1- CARACTERISTIQUES MECANIQUES DU MATERIAU (C/E)	81
6.1.1- Essais de traction	81
6.1.2- Essais de torsion	84
6.2- ANALYSE DES COURBES	85
6.3- DETERMINATION DES ENERGIES D'AMORÇAGE $G_{IC}$	109
6.4- COURBES " R "	112
6.5- ETUDE DES FACIÉS DE RUPTURE, MICROFRACTOGRAPHIE	113
6.6- DISCUSSION	119
<b>CONCLUSION</b>	<b>121</b>
<b>ANNEXES</b>	
<b>REFERENCES</b>	

## TABLE DES TABLEAUX

TABLE-1- Comparatif des propriétés mécaniques de certaines résines et de métaux usuels

TABLE-2- Comparatif des propriétés mécaniques de certaines fibres et des métaux usuels

TABLE-3- Propriétés mécaniques des composites unidirectionnels usuels à matrice epoxy

TABLE-4- Caractéristiques mécaniques du C/E

TABLE-5- Caractéristiques mécaniques des éprouvettes

TABLE-6- Configuration (0°/0°)

TABLE-7- Configuration (90°/90°)

TABLE-8- Configuration (0°/90°)

## TABLES DES FIGURES

- FIG-1.1- Constituants du composite
- FIG-1.2- Couches unidirectionnelles
- FIG-1.3- Stratifié
- FIG-2.1a- Cas isotrope
- FIG-2.1b- Cas du composite
- FIG-2.2- Composite unidirectionnel
- FIG-2.3a- Essai de traction longitudinal
- FIG-2.3b- Déformation résultant de l'essai longitudinal
- FIG-2.4- Essai de traction transversal
- FIG-2.5- Essai de cisaillement
- FIG-2.6- Détermination de  $E_1$
- FIG-2.7- Détermination de  $E_2$
- FIG-2.8- Détermination de  $G_{12}$
- FIG-2.9- Exemple de notation d'un stratifié
- FIG-2.12- Champ de déplacement
- FIG-2.13- Les efforts résultants
- FIG-2.15- Les moments résultants

FIG-3.1- Mode par ouverture (mode I)

FIG-3.2- Glissement droit (mode II)

FIG-3.3- Glissement vis (mode III)

FIG-3.4- Contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure

FIG-3.5- La contrainte  $\sigma_y$  au voisinage de la tête de fissure

FIG-3.6- Distribution normale et critique des contraintes à fond de fissure

FIG-3.7- Modèle d'IRWIN

FIG-4.1- Double poutre encastree (D.P.E.)

FIG-4.2- Encastrement de la D.P.E au niveau de la tête de fissure

FIG-4.3- Courbe des variations de la compliance en fonction de la longueur de fissure initiale

FIG-4.4- Détermination des paramètres  $n$  et  $h$  du matériau

FIG-4.5- Courbe de charge-déplacement, cycles de chargement et déchargement

FIG-5.1- Prélèvement d'éprouvettes sur une plaque composite

FIG-5.2- Sollicitation d'une D.P.E

FIG-5.3- Machine de traction-compression

FIG-5.4- Emplacement des talons (2) sur la D.P.E.

- FIG-5.5- Montage de la D.P.E sur la machine
- FIG-5.6- Chaîne d'E.A et système d'acquisition
- FIG-5.7- Chaîne d'émissions acoustiques
- FIG-5.8- Instrumentation d'une D.P.E
- FIG-5.9- Extrémité de la tête de fissure
- FIG-5.10- Machine de traction-compression + enregistreur graphique à base de temps
- FIG-5.11- Microscope électronique à balayage
- FIG-6.1- Eprouvette à 0°
- FIG-6.2- Eprouvette à 90°
- FIG-6.5- Eprouvette de torsion
- FIG-6.6- Courbe de charge et émission acoustique  
CE (0°/0°) ,  $a_0 = 29,3$  mm
- FIG-6.7- Courbe de charge et émission acoustique  
CE (0°/90°) ,  $a_0 = 52$  mm
- FIG-6.8- Courbe de charge et émission acoustique  
CE (90°/90°) ,  $a_0 = 51,7$  mm
- FIG-6.9- Courbe de charge ,  $a_0 = 51$  mm
- FIG-6.10- Réponse de la jauge 1 ,  $a_0 = 51$  mm
- FIG-6.11- Réponse de la jauge 2 ,  $a_0 = 51$  mm
- FIG-6.12- Réponse de la jauge 3 ,  $a_0 = 51$  mm

- FIG-6.13- Courbe de charge ,  $a_0 = 76$  mm
- FIG-6.14- Réponse de la jauge 1 ,  $a_0 = 76$  mm
- FIG-6.15- Réponse de la jauge 2 ,  $a_0 = 76$  mm
- FIG-6.16- Réponse de la jauge 3 ,  $a_0 = 76$  mm
- FIG-6.17- Courbe de charge ,  $a_0 = 75$  mm
- FIG-6.18- Réponse de la jauge 1 ,  $a_0 = 75$  mm
- FIG-6.19- Réponse de la jauge 2 ,  $a_0 = 75$  mm
- FIG-6.20- Réponse de la jauge 3 ,  $a_0 = 75$  mm
- FIG-6.21- Courbe de charge ,  $a_0 = 66$  mm
- FIG-6.22- Réponse de la jauge 1 ,  $a_0 = 66$  mm
- FIG-6.23- Réponse de la jauge 2 ,  $a_0 = 66$  mm
- FIG-6.24- Réponse de la jauge 3 ,  $a_0 = 66$  mm
- FIG-6.25- Amorçage de la fissure
- FIG-6.26- Etat de l'endommagement dans le domaine  $AA_1$  du  
( $0^\circ/0^\circ$ )
- FIG-6.28- Courbe "R" , CE ( $0^\circ/0^\circ$ )
- FIG-6.29- Courbe "R" , CE ( $90^\circ/90^\circ$ )
- FIG-6.30- Courbe "R" , CE ( $0^\circ/90^\circ$ )
- PHOTO 1- Amas de résine en tête de fissure , CE ( $0^\circ/0^\circ$ )

- PHOTO 2- Fibres rompues au voisinage de la tête de fissure  
CE (0°/0°)
- PHOTO 3- Fibres décollées et cassées en propagation  
CE (0°/0°)
- PHOTO 4- Résine fissurée, fibres décollées en propagation  
CE (0°/0°)
- PHOTO 5- Trajet du délaminage suivant l'épaisseur  
CE (0°/0°)
- PHOTO 6- Paquets de fibres arrachés en tête de fissure  
CE (90°/90°)
- PHOTO 7- Paquets de fibres décollées en propagation  
CE (90°/90°)
- PHOTO 8- Fibres cassées en propagation , CE (90°/90°)
- PHOTO 9- Fibres cassées en propagation , CE (90°/90°)
- PHOTO 10- Formation de deux plans de propagation  
CE (90°/90°)
- PHOTO 11- Empreinte de paquets de fibres décollées  
CE (0°/90°)
- PHOTO 12- Fibres et plis cassés au voisinage de la tête de  
fissure , CE (0°/90°)
- PHOTO 13- Paquets de fibres et plis rompus en propagation  
CE (0°/90°)
- PHOTO 14- Trace de fibres décollées et ponts de résine  
interfibres , CE (0°/90°)

PHOTO 15- Rupture et décollement de fibres transverses et longitudinales , CE (0°/90°)

PHOTO 16- Deux plans de propagation , CE (0°/90°)

PHOTO 17- Propagation de la fissure pratiquement dans le pli 90° , CE (0°/90°)

## INTRODUCTION

Les matériaux occupent une place prépondérante dans la vie quotidienne et jouent un grand rôle sur le plan économique. Dans la période contemporaine, les progrès de la science ont contribué à la mise au point de véritables matériaux nouveaux conçus dans le but de répondre à des besoins industriels de plus en plus exigeants, matériaux obtenus à partir de produits naturels ou synthétiques.

Une connaissance approfondie des propriétés physico-chimiques de la matière a permis la fabrication de matériaux qui répondent à des objectifs et à des performances déterminés. Dans cette catégorie s'inscrivent notamment les matériaux composites qui comme leur nom l'indique, sont composés de plusieurs constituants de façon à améliorer les qualités du produit désiré, spécialement ses propriétés mécaniques, thermiques, diélectriques. Les principales caractéristiques des pièces composites se résument à un gain de masse important ( économie de carburant ), une bonne tenue en fatigue ( durée de vie augmentée ) et une absence de corrosion. Néanmoins, comme tout autre matériau usuel, celui-ci ne peut s'échapper aux différentes causes de dégradations. Le type de détérioration le plus souvent rencontré dans une structure en composite stratifiée est la rupture interlaminaire que l'on appelle délaminage. En effet, ce type de rupture localisée intervient dès que les sollicitations appliquées se traduisent par des contraintes interlaminaires importantes, provoquant de ce fait la propagation de défauts induits au cours de la mise en oeuvre ou lors de la sollicitation situés dans la région interlaminaire et par suite la séparation des couches (dédoublément du matériau). Les propriétés mécaniques du matériau peuvent être considérablement altérées par la présence de ces défauts interlaminaires et un endommagement du matériau peut en résulter, compromettant d'une façon néfaste la longévité de la structure composite.

Le présent travail se propose d'étudier l'influence de la position du défaut par rapport aux différentes orientations des plis sur le délaminage et surtout sur la valeur de la tenacité. Ainsi, un défaut plan peut se trouver entre des couches d'orientation différente, ce qui modifie le champ de contrainte et de déformation en tête de fissure. L'application de la mécanique linéaire élastique de la rupture et de ses prolongements nous permettront:

- de définir et de mesurer la tenacité ;
- de mesurer les énergies de rupture et de suivre la croissance d'une fissure en utilisant les techniques de courbes " R ".

L'approche expérimentale s'effectuera sur des éprouvettes de type double poutre encastree (DPE ou DCB) carbone/epoxy. Ces éprouvettes se présentent sous trois configurations différentes où le défaut artificiel en teflon se situe entre des plis de  $(0^\circ/0^\circ)$ ,  $(0^\circ/90^\circ)$  et  $(90^\circ/90^\circ)$ . Ceci ne sera possible qu'à l'aide de moyens techniques tels que l'émission acoustique ; l'extensometrie, l'observation au microscope électronique à balayage des faciès de rupture qui abordera les aspects microscopiques d'une rupture par délaminage. On terminera enfin notre étude en essayant de mieux cerner et comprendre les mécanismes d'endommagement en tête de fissure et de caractériser la propagation du délaminage et cela pour les trois différentes configurations.

Plusieurs travaux ([34], [25], [35] ...) ont portés sur ce mode de rupture par délaminage dans les matériaux composites stratifiés, vue l'importance sans cesse croissante de ces derniers dans l'industrie aeronautique notamment.

L'application de la M.L.E.R au délaminage a fait l'objet de nombreuses études [11], [14].

Une présentation des matériaux composites a été effectuée dans le chapitre 1, dans lequel quelques propriétés mécaniques de certains matériaux composites et métaux usuels

ont été données.

Le chapitre 2 a été consacré à l'étude élastique du stratifié. Pour cela, l'étude de la couche élémentaire contribue à la connaissance approfondie des lois de comportement élastiques du composite sous sollicitations diverses. Dans la seconde partie relative à la théorie élastique du stratifié, la détermination des équations fondamentales est nécessaire.

Dans le chapitre 3, un bref aperçu est donné sur la validité de l'application de la MLER pour les matériaux composites. Des généralités sur la MLER et les équations de contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure ont été également abordés.

La détermination du taux de restitution d'énergie par différentes méthodes, notamment la méthode de Berry, a été introduit dans le chapitre 4.

L'approche expérimentale ne saurait être possible sans l'utilisation de moyens d'essais adéquats. Une présentation de ces moyens et des procédures suivies lors l'approche expérimentale résume le chapitre 5 consacré à cet effet.

On terminera enfin notre étude par l'exploitation des résultats obtenues par :

- L'analyse des courbes de charge et réponses des jauges;
- Détermination des énergies d'amorçage ;
- Utilisation des techniques de courbes "R" pour le suivi de la croissance de la fissure ;
- Etude des faciès de ruptures.

Une discussion générale cloturera enfin ce chapitre.

## CHAPITRE 1

### PRESENTATION DES MATERIAUX COMPOSITES

On entend par matériau composite, un matériau constitué par l'association de plusieurs composants de manière à améliorer ses propriétés mécaniques par rapport à celles de ses constituants. Ces composants sont essentiellement au nombre de deux ; les éléments de renfort ou fibres et les éléments de support ou matrices ( FIG-1.1 ) Les produits qui peuvent être réalisés par une telle association sont très nombreux, mais le choix de fabrication est guidé par la définition des meilleurs compromis légèreté-rigidité, résistance à la traction, à la torsion, à la corrosion, à la température, tenue en fatigue et au vieillissement sans oublier, par ailleurs, le facteur économique.

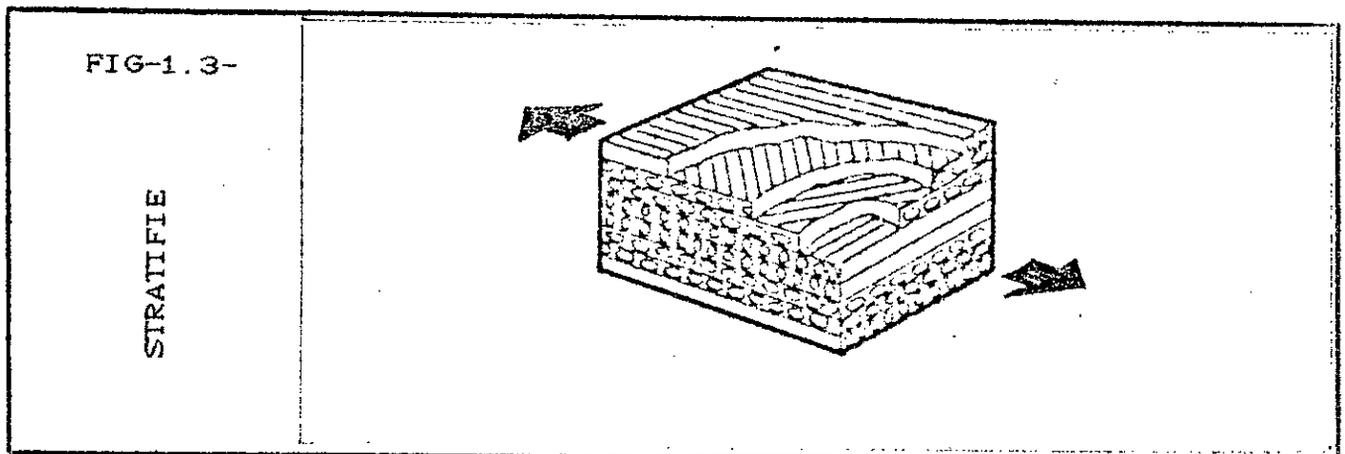
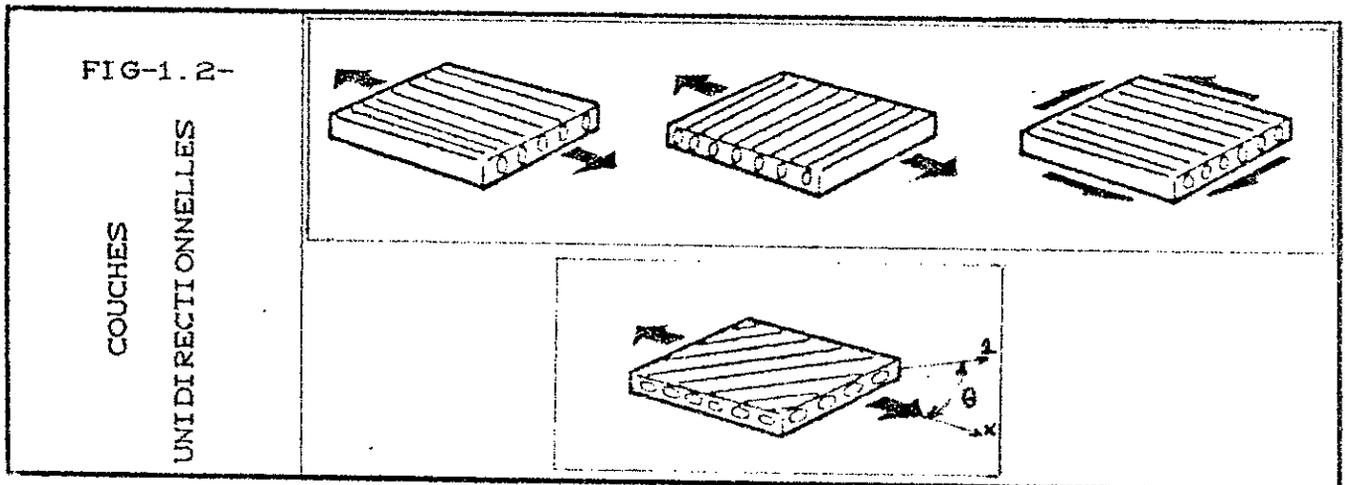
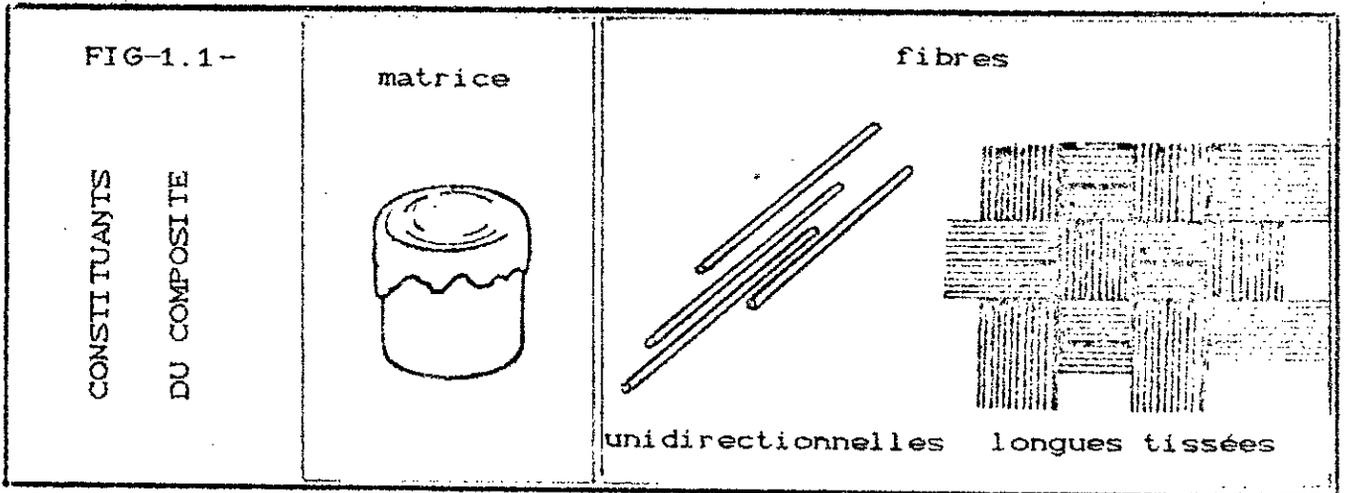
Les constituants du composite, sont destinés à remplir des rôles précis dans l'utilisation future du produit obtenu ; les fibres auront à supporter la sollicitation appliquée alors que la matrice servira de support de protection aux fibres, tout en transmettant les contraintes d'une fibre à l'autre.

#### 1.1- La matrice ( liant ) :

La matrice ( FIG-1.2 ) remplit un rôle complexe vis à vis de la structure composite :

- Elle a comme fonction essentielle de transmettre aux éléments de renfort ( fibres ), les efforts qui s'exercent sur la structure ;

- Elle maintient les distances et les orientations mutuelles des fibres, ce qui participe à la cohésion et à la rigidité de la structure finale ;



- Elle doit assurer une excellente qualité de l'adhérence à l'interface fibres-matrice ;

- Enfin, elle a comme fonction aussi, la protection contre l'attaque des produits chimiques, l'humidité et les chocs mécaniques. Ces derniers étant mal supportés par les éléments de renfort.

Les matériaux de la matrice ( Table-1- ), qui sont souvent utilisés, peuvent être regroupés dans les résines thermodurcissables, telles que : résine époxy, polyester insaturée, phénolique. Les résines thermoplastiques telles que polyamide, sont également utilisées mais d'une façon restreinte.

### 1.2- Les éléments de renfort ( fibres ) :

Les fibres ( FIG-1.1 et FIG-1.2 ) ont pour tâche essentielle de supporter les sollicitations appliquées sur la structure composite, ceci est rendu possible grâce à leurs caractéristiques mécaniques élevées.

On rencontre dans le domaine industriel, les fibres de verre, de carbone, de bore, de kevlar ( Table -2-), etc...

### 1.3- Le stratifié ( multicouche ) :

On entend par stratifié ( FIG-1.3 ), le résultat de la superposition de plusieurs couches ou plis ( FIG-1.2 ) de matériau composite, suivant des orientations et des séquences définies au préalable en fonction des propriétés mécaniques demandées. La couche élémentaire est le produit de l'association d'une matrice et des fibres qui se présentent sous différentes formes ( FIG-1.1 ):

-fibres unidirectionnelles ;

-fibres longues tissées.

L'étude élastique du stratifié revient en premier lieu à

faire l'étude élastique de la couche élémentaire, qui bien entendu joue un rôle important sur les propriétés mécaniques globales du stratifié. La table 3 donne les propriétés mécaniques de matériaux composites unidirectionnels (couche) à matrice epoxy.

Matériau	Module de YOUNG ( GPa )	Résistance à la traction ( MPa )
Polyester	2.5	60
Epoxy	3.5	80
Phénolique	5	
Aluminium	73	620
Acier	207	4100

TABLE-1- Comparatif des propriétés mécaniques de certaines résines et de métaux usuels

Matériau	Diamètre de fibre (µm)	Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	Module de YOUNG (GPa)	Résistance à la traction (GPa)
Bore	100	2520	400	3.4
Verre-E	5-20	2500	72	3.4
Verre-S	5-20	2440	86	4.8
Carbone H. R*	8	1750	200-235	2.6-3.2
Carbone H. M*	8	1950	340-500	2.1-2.6
Kevlar H. R	12	1450	84	3
Kevlar H. M	12	1450	130	
Aluminium		2630	73	0.62
Acier	~ mm (fil)	7800	207	4.1

TABLE-2- Comparatif des propriétés mécaniques de certaines fibres et des métaux usuels-

- \* H. R- Haute résistance
- \* H. M- Haut module

Matériau composite	Type	Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> )	E <sub>1</sub> (GPa)	E <sub>2</sub> (GPa)	G <sub>12</sub> (GPa)
Carbone/Epoxy	T300/5208	1600	181	10.3	7.17
Bore/Epoxy	BC4/5505	2000	204	18.5	5.59
Carbone/Epoxy	As/3501	1600	138	8.96	7.1
Verre/Epoxy	Scotchply/1002	1800	38.6	8.27	4.14
Aramid/Epoxy	Kevlar 49/Epoxy	1450	76	5.5	2.3

TABLE-3- Propriétés des composites unidirectionnels usuels.

M

E<sub>1</sub>- Module d'élasticité longitudinal

E<sub>2</sub>- Module d'élasticité transversal

G<sub>12</sub>- Module de cisaillement

## CHAPITRE 2

### THEORIE DES STRATIFIES

On entend par le terme stratification, la superposition de plusieurs couches élémentaires de matériaux composite, appelés : plis.

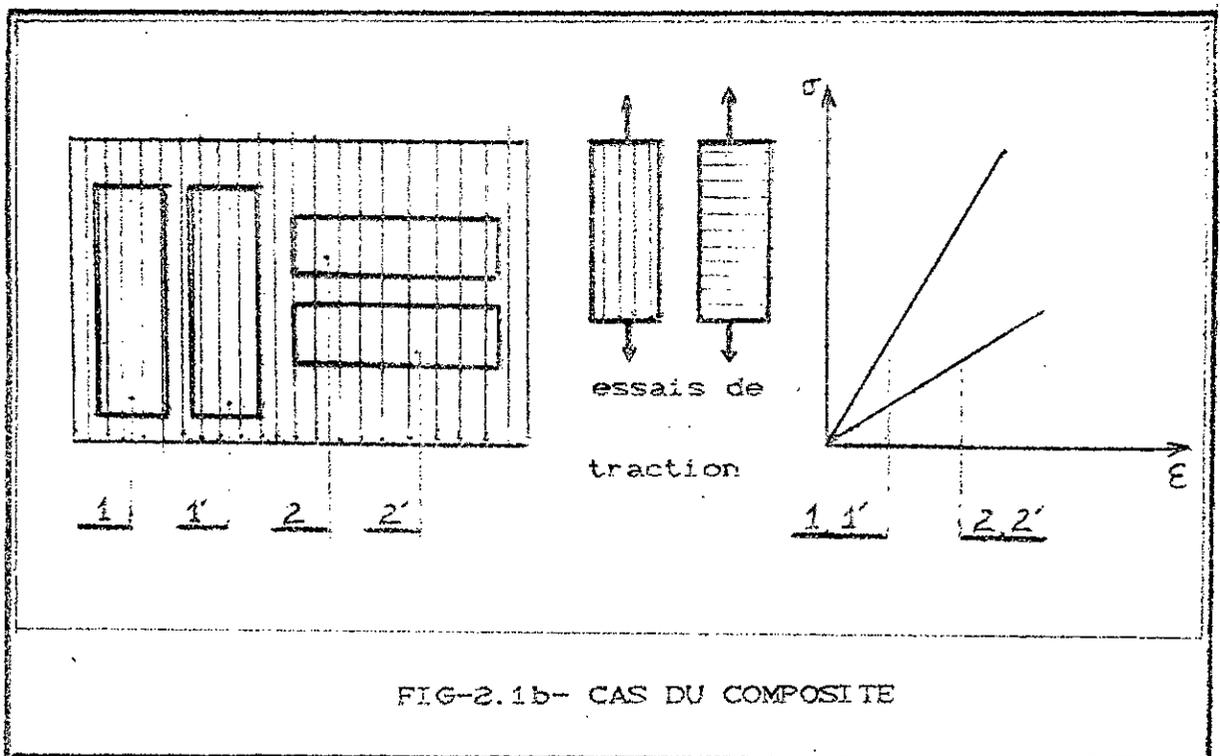
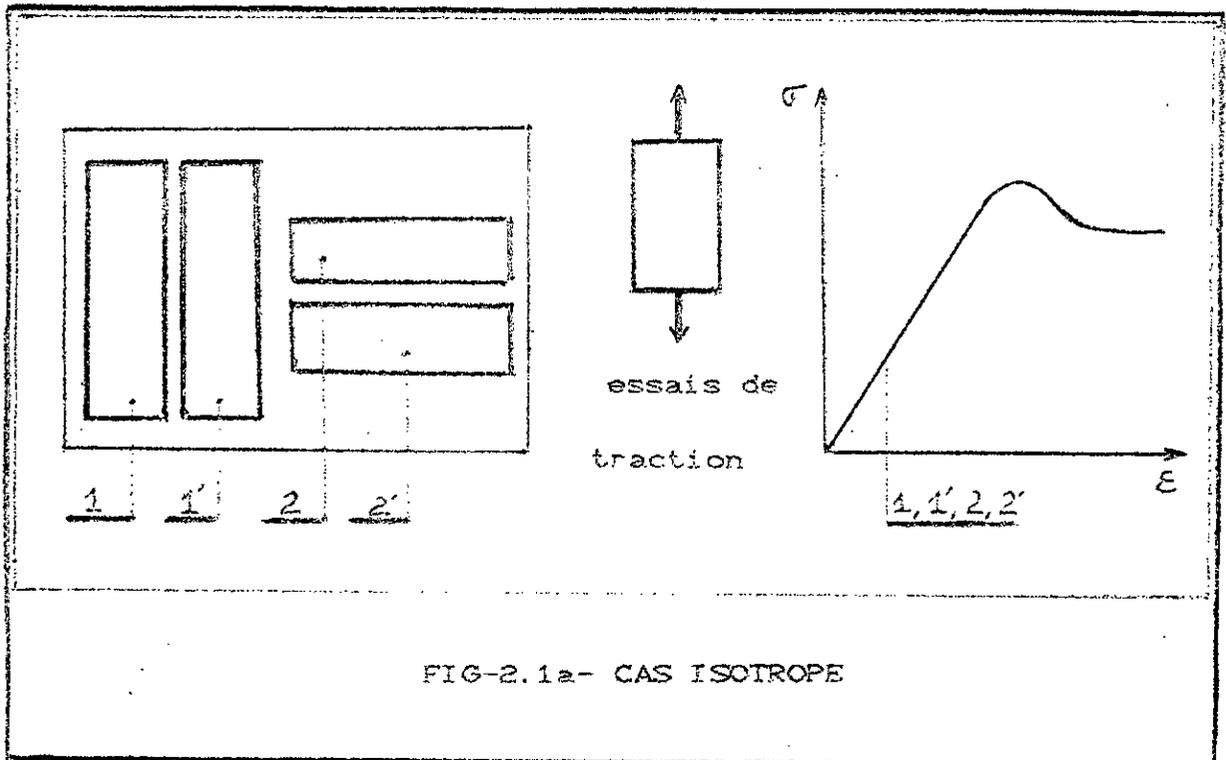
#### 2.1- Théorie élastique du pli :

On a l'habitude, pour les matériaux homogènes isotropes, de déterminer le module d'élasticité :  $E$ , le module de cisaillement :  $G$  et le coefficient de poisson :  $\nu$ , afin de définir les caractéristiques élastiques du matériau. En effet il est aisé d'obtenir ces caractéristiques en réalisant des essais mécanique, relativement simples, sur des éprouvettes prélevées d'une plaque de matériau isotrope ( FIG-2.1-a ). Il est à noter que les quatre courbes contrainte-déformation, relatives aux quatre éprouvettes, sont confondues.

En procédant de la même façon sur une plaque en matériau composite, on relève d'une part, que les courbes des éprouvettes (1) et (1') ( FIG-2.1-b ) sont confondues, ce qui nous permet de considérer le matériau comme homogène, et d'autre part, la non concordance des courbes relatives aux éprouvettes (2) et (2') ( FIG-2.1-b ) avec les premières citées, bien qu'elles soient confondues entre elles, nous suggère de considérer le matériau comme anisotrope. Ainsi, le matériau composite est dit: élastique homogène anisotrope.

#### 2.1.1- Relation contrainte - déformation des matériaux élastiques homogènes anisotropes :

La mécanique des milieux continus nous permet d'écrire les relations suivantes, pour un milieu élastique linéaire :





$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 2C_{1123} & 2C_{1113} & 2C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 2C_{2223} & 2C_{2213} & 2C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 2C_{3323} & 2C_{3313} & 2C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & 2C_{1323} & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1213} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

La matrice ci-dessus ne présente plus la symétrie de la forme générale ( 9x9 ). On pallie à cet inconvénient en faisant intervenir les distorsions angulaires :

$$\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}, \quad \gamma_{13} = 2\epsilon_{13}, \quad \gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$$

et on note :  $\sigma_{23} = \tau_{23}$ ,  $\sigma_{13} = \tau_{13}$ ,  $\sigma_{12} = \tau_{12}$  (contraintes tangentielles de cisaillement ), d'où l'écriture suivante de la loi de comportement élastique :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & S_{Y_M} & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Un matériau orthotrope a des propriétés différentes dans trois directions perpendiculaires en un point du matériau et en outre, à trois plans de symétrie orthogonaux. Ainsi les propriétés sont fonction de l'orientation en un point [2]. La couche élémentaire présente cette particularité, elle est dite alors : orthotrope.

On montre, dès lors, que le nombre de constantes élastiques indépendantes est réduit à neuf [3].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Une convention a fixé le principe suivant pour l'écriture simplifiée des indices  $ijkl$  afin d'adapter le formalisme matriciel :

Contraintes		Déformations	
Notation tensorielle	Notation contractée	Notation tensorielle	Notation contractée
$\sigma_{11}$	$\sigma_1$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_1$
$\sigma_{22}$	$\sigma_2$	$\epsilon_{22}$	$\epsilon_2$
$\sigma_{33}$	$\sigma_3$	$\epsilon_{33}$	$\epsilon_3$
$\tau_{23} = \sigma_{23}$	$\sigma_4$	$\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$	$\epsilon_4$
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	$\sigma_5$	$\gamma_{31} = 2\epsilon_{31}$	$\epsilon_5$
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	$\sigma_6$	$\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$	$\epsilon_6$

On écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

De même on peut avoir :  $\epsilon_i = S_{ij} \sigma_j$  (2.7)  
avec ;  $S_{ij}$  - Matrice souplesse.

Il nous reste dès à présent, à déterminer les  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$  en fonction des constantes élastiques du composite. Pour

cela, il suffit de procéder à des tests, connaissant la charge ou la contrainte, le résultat du déplacement ou de la déformation, qui en découle, est alors mesurée. Ainsi, les composantes de la matrice souplesse ( $S_{ij}$ ) sont déterminées plus directement que ceux de la matrice rigidité ( $C_{ij}$ ).

#### 2.1.1.1- Signification de $S_{11}$ et $S_{21}$ :

Un essai de traction longitudinal (selon l'axe 1) (FIG-2.3-a) nous donnerait une déformation positive (allongement) suivant l'axe 1 en plus d'une déformation négative (rétrécissement) suivant l'axe 2.

Dans le cas de contraintes bidimensionnelles (coques minces) :

$$\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$$

On aurait eu ainsi, à partir de l'équation (2.7) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

en se plaçant dans les conditions de l'essai sus-indiqué, c'est à dire :  $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$ , l'équation précédente s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_1 = S_{11} \sigma_1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{1}{S_{11}} \varepsilon_1$$

$$\text{on écrit : } \sigma_1 = E_{11} \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad S_{11} = \frac{1}{E_{11}}$$

Le coefficient  $E_{11}$ , appelé module d'élasticité dans la direction des fibres, s'interprète comme le rapport entre une contrainte normale ( $\sigma_1$ ) et la déformation correspondante

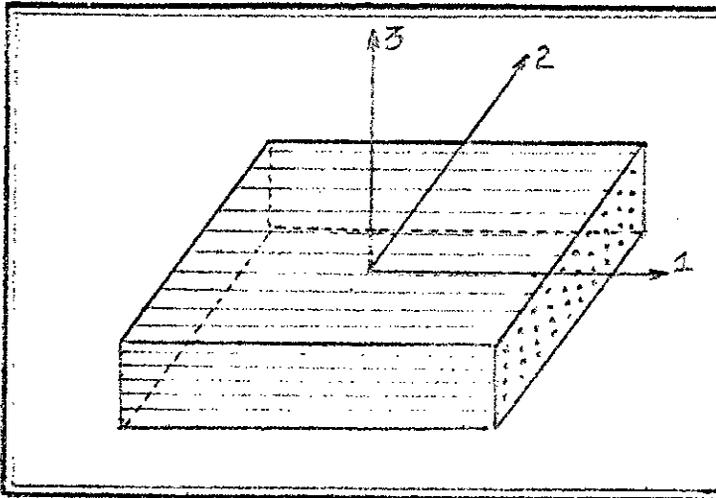


FIG-2.2-

COMPOSITE  
UNI DIRECTIONNEL

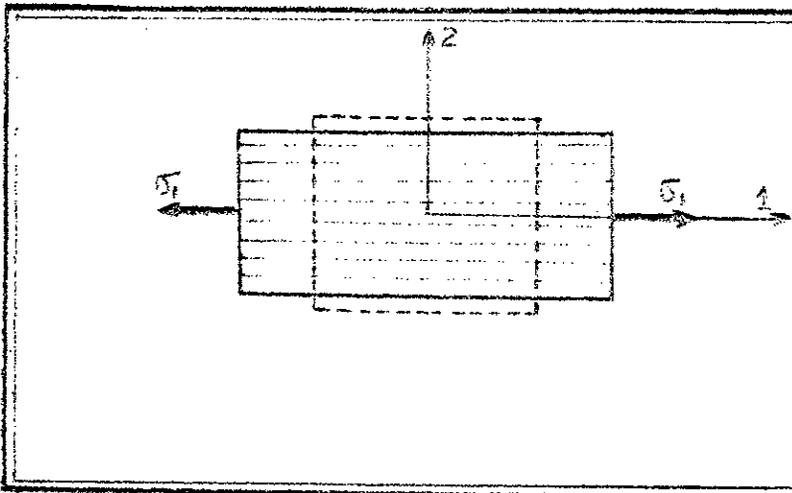


FIG-2.3a-

ESSAI DE  
TRACTION  
LONGITUDINAL

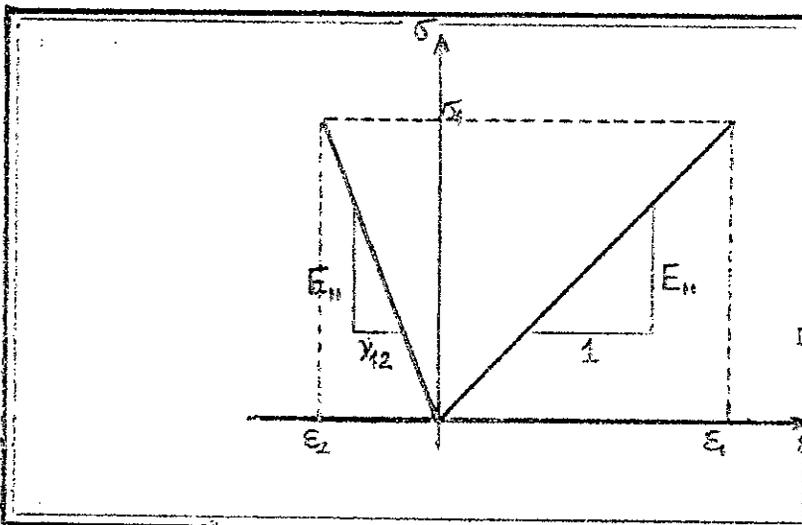


FIG-2.3b-

DEFORMATIONS  
RESULTANT DE  
L'ESSAI LONGITUDINAL

(  $\varepsilon_1$  ) ( FIG-2.3-b ). La contrainte  $\sigma_1$  cause une autre déformation suivant l'axe  $z$  ;  $\varepsilon_2$  dont le module est inférieur à  $\varepsilon_1$  , donc :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \nu = \frac{\sigma_1}{E_{11}} \nu$$

avec  $\nu$  un coefficient inférieur à l'unité, qu'on notera pour le cas d'un essai de traction suivant l'axe  $1$  :  $\nu_{12}$ .

Le coefficient  $\nu_{ij}$  est appelé coefficient de poisson, qui est relatif à une déformation transversale suivant l'axe  $j$ , lors de l'application d'une contrainte suivant la direction  $i$ .

Sachant que  $\varepsilon_2$  est négative :

$$\varepsilon_2 = - \frac{\sigma_1}{E_{11}} \nu_{12} = - \frac{\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_1$$

$$\text{d'où : } S_{21} = - \frac{\nu_{12}}{E_{11}}$$

#### 2.1.1.2- Signification de $S_{22}$ et $S_{12}$ :

Un essai de traction transversal ( selon la direction  $z$  ) ( FIG-2.4-a ) nous donnerait une déformation positive ( allongement ) suivant la direction  $z$  en plus d'une déformation négative ( rétrécissement ) suivant la direction  $x$ . L'équation (2.7) s'écrit pour :  $\sigma_1 = \tau_{12} = 0$ .

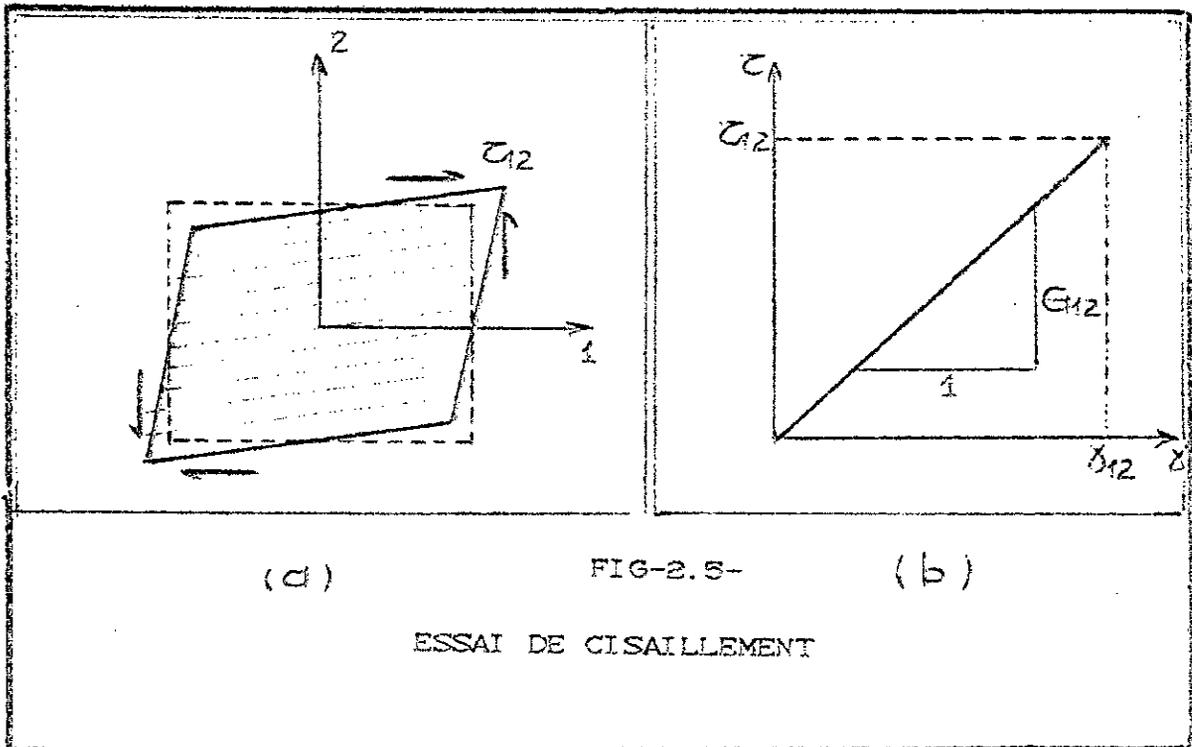
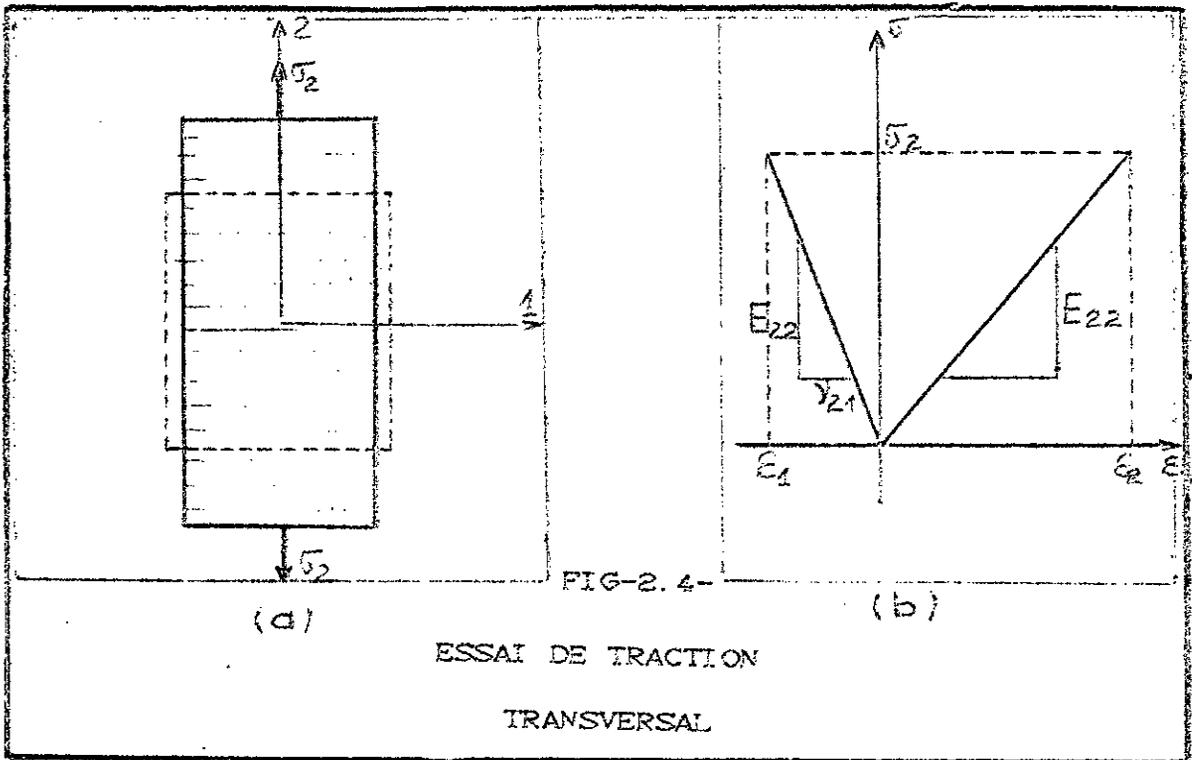
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = S_{22} \sigma_2 = \frac{1}{E_{22}} \sigma_2$$

$E_{22}$  : module d'élasticité transversal et s'interprète comme étant le rapport entre une contrainte normale (  $\sigma_2$  ) et la déformation correspondante (  $\varepsilon_2$  ) ( FIG-2.4-b ).

On a également :

$$\varepsilon_2 = S_{12} \sigma_2 = - \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \sigma_2$$



$$\text{d'où : } S_{12} = - \frac{\nu_{21}}{E_{22}}$$

### 2.1.2.3- Signification de $S_{66}$ :

Un essai de cisaillement selon le plan ( 1, 2 ) ( FIG-2.5-a ) nous permettrait d'écrire l'équation ( 2.7 ) sachant que  $\alpha_1 = \alpha_2$ , comme suit :

$$\Rightarrow \gamma_{12} = S_{66} \tau_{12} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{12}$$

$$\text{donc : } S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Le coefficient  $G_{12}$  appelé module de cisaillement dans le plan ( 1, 2 ) caractérise un rapport entre une contrainte de cisaillement (  $\tau_{12}$  ) et la déformation angulaire (  $\gamma_{12}$  ) correspondante ( FIG-2.5-b ).

La matrice souplesse s'écrit alors :

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

et la matrice [ C ] serait ( par inversion de [ S ] ) :

$$[Q] = [C] = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & \frac{E_{22}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_{11}\nu_{21}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

### 2.1.2- Formulation des relations $\sigma$ - $\epsilon$ dans un repère de sollicitation quelconque :

Les relations contrainte-déformation décrites

précédemment ne sont valables que dans le plan d'orthotropie ( $\vec{R}_{1,2}$ ), c'est à dire uniquement lorsque les directions des efforts se confondent avec les axes d'orthotropie, ce qui n'est pas le cas en général. En effet, les axes des sollicitations appliquées à un pli quelconque ne coïncident pas obligatoirement avec les axes d'orthotropie du pli. Il faudrait alors effectuer une rotation du repère  $\vec{R}_{1,2}$  au repère de sollicitation  $\vec{R}_{x,y}$  (off-axis).

Les plans (1,2), (1,3) et (2,3) sont des plans de symétrie, on appellera alors les axes 1, 2 et 3 axes d'orthotropie. Les axes 1 et 2 étant les axes principaux.

connaissant les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  dans  $\vec{R}_{x,y}$ , qu'en serait-il des contraintes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\tau_{12}$  dans  $\vec{R}_{1,2}$  ?

notons par :  $m = \cos(\theta)$

$n = \sin(\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 m - \tau_{12} n = \sigma_x \frac{b}{L} + \tau_{xy} \frac{a}{L} \\ \sigma_1 n - \tau_{12} m = \sigma_y \frac{a}{L} + \tau_{xy} \frac{b}{L} \end{cases}$$

d'où les équations :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_x m^2 + \sigma_y n^2 + 2 m n \tau_{xy} \\ \tau_{12} = -m n \sigma_x + m n \sigma_y + (m^2 - n^2) \tau_{xy} \end{cases} \quad (2.8)$$

et :

$$\begin{cases} \sigma_2 = n^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y - 2 m n \tau_{xy} \\ \tau_{12} = -m n \sigma_x + m n \sigma_y + (m^2 - n^2) \tau_{xy} \end{cases} \quad (2.9)$$

l'écriture matricielle des équations (2.8) et (2.9) donne :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

[T] étant la matrice de passage de  $\vec{R}_{1,2}$  à  $\vec{R}_{x,y}$ .

Nous procéderons de la même façon que pour les contraintes dans le cas des déformations. Partant de la connaissance de  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  dans  $\vec{R}_{x,y}$ , comment peut-on passer à  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  et  $\gamma_{12}$  dans  $\vec{R}_{1,2}$  et inversement ?

ainsi on aurait :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

sachant que :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Introduisons à ce stade une matrice [R] appelée matrice Reuter.

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On a :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [R] [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= [R] [T] [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(2.12)

avec :

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos(2\theta) + U_3 \cos(4\theta)$$

$$\bar{Q}_{12} = U_4 - U_3 \cos(4\theta)$$

$$\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cos(2\theta) + U_3 \cos(4\theta)$$

$$\bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} U_2 \sin(2\theta) + U_3 \sin(4\theta)$$

$$\bar{Q}_{26} = \frac{1}{2} U_2 \sin(2\theta) - U_3 \sin(4\theta)$$

$$\bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cos(4\theta)$$

sachant que :

$$U_1 = \frac{3 Q_{11} + 3 Q_{22} + 2 Q_{12} + 4 Q_{66}}{8}$$

$$U_2 = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2}$$

$$U_3 = \frac{Q_{11} + Q_{22} - 2 Q_{12} - 4 Q_{66}}{2}$$

$$U_4 = \frac{Q_{11} + Q_{22} + 6 Q_{12} - 4 Q_{66}}{8}$$

$$U_5 = \frac{Q_{11} + Q_{22} - 2 Q_{12} + 4 Q_{66}}{8}$$

Les  $U_i$  sont appelés les invariants ( Tsai et Pagano )

et

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] [T]^{-1} [R]^{-1} [S] [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

où :

$$S_{11} = \frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_1} m^4 + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) n^2 m^2 + \frac{1}{E_2} n^4$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} (n^4 + m^4) + \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) n^2 m^2$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_y} = \frac{1}{E_1} n^4 + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) n^2 m^2 + \frac{1}{E_2} m^4$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{G_{12}} (n^4 + m^4) + 2 \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) n^2 m^2$$

$$S_{16} = \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) n m^3 - \left( \frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) n^3 m$$

$$S_{26} = \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) n^3 m - \left( \frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) n m^3$$

avec :

$E_x, E_y, G_{xy}$  et  $\nu_{xy}$  - Constantes d'ingénieur apparentes d'un pli orthotrope sollicité suivant les axes non principaux  $xy$ .

$\eta_{xy,x}, \eta_{xy,y}$  - Coefficients d'influence mutuels ( termes introduits par Lekhnitski ).

### 2.1.3- Micromécanique et loi de mélange :

Lors de notre étude, on a considéré le matériau composite comme étant un matériau homogène anisotrope ( ceci du point de vue macroscopique ), mais en réalité et du point de vue microscopique, notre matériau est hétérogène anisotrope. Ce qui nous suggère de déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de celles de ses constituants ( fibres, résine ). Les caractéristiques exactes du matériau sont bien entendu déterminées par les essais.

Les composantes des matrices rigidité et souplesse, vont-être ainsi écrites en fonction des paramètres suivants :  $E_f$ ,  $E_m$ ,  $G_f$ ,  $G_m$ ,  $\nu_f$ ,  $\nu_m$ ,  $V_f$  et  $V_m$   $\left[ V_f + V_m = \frac{\nu_f}{\nu_c} + \frac{\nu_m}{\nu_c} = 1 \right]$ .

On examinera dans ce qui suit une association de deux matériaux (matrice et fibres ) de caractéristiques distinctes dans le but d'estimer les caractéristiques élastiques du matériau équivalent, c'est à dire du composite. Pour cela l'analyse mécanique est effectuée en admettant que les fibres sont rassemblées en bloc lequel est assemblé " par collage " au bloc matrice.

#### 2.1.3.1- Détermination de $E_1$ :

On suppose qu'on est en présence d'une interface excéente qui n'autorise aucun glissement entre fibres et matrice dans le sens longitudinal, ceci nous permet de faire l'hypothèse suivante :

La déformation longitudinale  $\epsilon_1$  est identique pour la matrice ( m ) et les fibres ( f ). De plus, les sections droites de l'élément sont supposées planes au cours de la déformation.

$$\epsilon_c = \epsilon_m = \epsilon_f = \epsilon$$

La loi de HOOKE donne :

$$\begin{aligned} \sigma_f &= E_f \varepsilon \\ \text{et} \quad \sigma_m &= E_m \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi les efforts supportés par les fibres et la matrice s'écrivent, respectivement :

$$\begin{aligned} F_f &= \sigma_f S_f = E_f S_f \varepsilon \\ F_m &= \sigma_m S_m = E_m S_m \varepsilon \end{aligned}$$

où  $S_f$  et  $S_m$  représentent les aires des sections occupées respectivement par les fibres et par la matrice.

L'effort résultant appliqué sur le composite, devient donc :

$$F_c = F_f + F_m \quad (2.14)$$

En introduisant le module de YOUNG global  $E_c$  du composite, en tenant compte des relations ci-dessus, il vient que :

$$\begin{aligned} E_c &= E_f \frac{S_f}{S_c} + E_m \frac{S_m}{S_c} \\ \Rightarrow E_c &= E_f V_f + E_m V_m \end{aligned} \quad (2.15)$$

et puisque l'effort exercé est suivant le sens longitudinal des fibres :  $E_c = E_1$  ( FIG-2.6- ) :

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2.16)$$

$E_1$  étant le module de YOUNG dans la direction des fibres pour le matériau homogénéisé.

L'expérience montre que la formule ci-dessus constitue une bonne approximation pour l'évaluation du module de YOUNG  $E_1$ .

#### 2.1.3.2- Détermination de $E_2$ :

On suppose que tous les composants du matériau subissent la même contrainte  $\sigma$ .

La déformation global du composite devient ( FIG-2.7- ).

donc :

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta(e_m + e_f)}{e_m + e_f} = \frac{\Delta e_m}{e_m} V_m + \frac{\Delta e_f}{e_f} V_f$$

$$\Rightarrow V_c \varepsilon_c = V_m \varepsilon_m + V_f \varepsilon_f \quad (2.17)$$

Soit  $E_c$  le module de YOUNG du composite :

$$\frac{1}{E_c} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$

Etant donné que le composite est sollicité transversalement dans la direction  $z$  orthogonale aux fibres, on en déduit le module d'élasticité transversal du matériau homogénéisé.

$$\frac{1}{E_z} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (2.18)$$

### 2.1.2.3- Détermination de $G_{12}$ :

On suppose que tous les composants du matériau subissent la même contrainte tangentielle :  $\tau_{12}$ .

La déformation  $\gamma_{12}$  du matériau ( FIG-2.8- ) est déterminée comme suit :

$$V_c \gamma_{12} = V_f \gamma_{12}^f + V_m \gamma_{12}^m \quad (2.19)$$

La loi de Coulomb permet d'exprimer les déformations dans la fibre, la matrice et le composite :

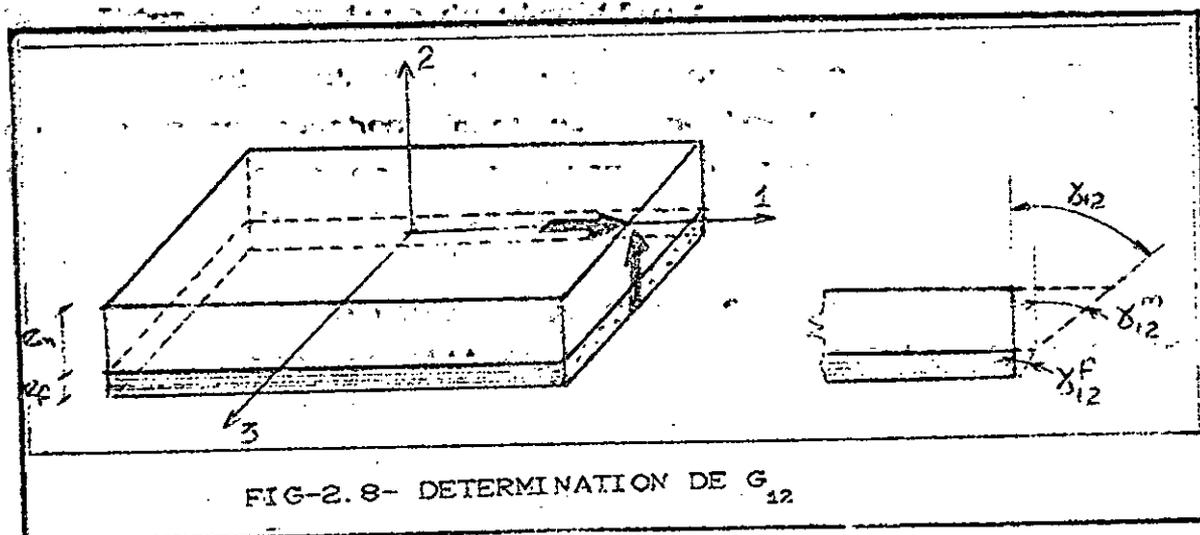
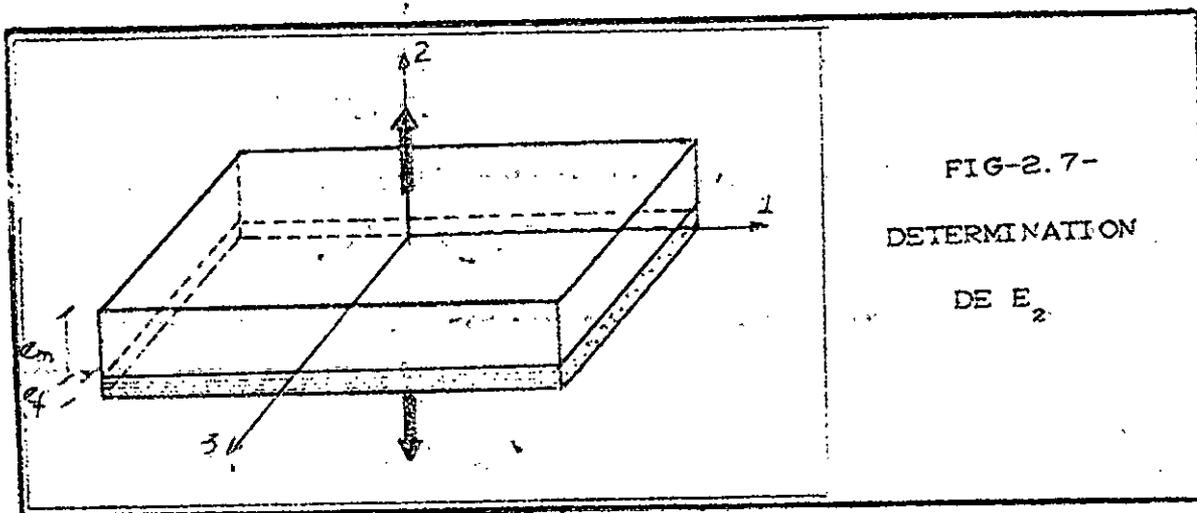
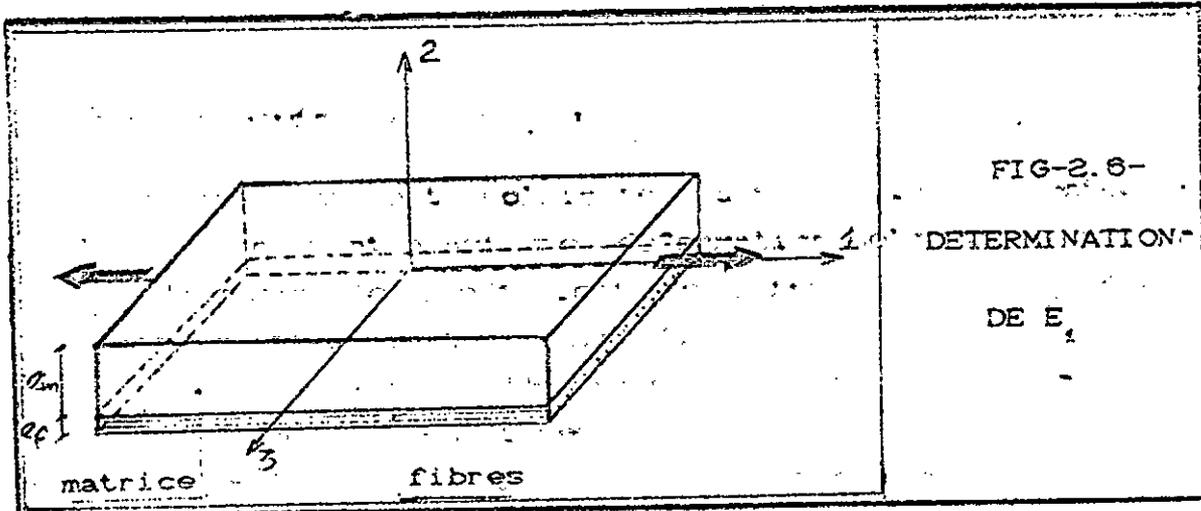
$$\gamma_{12}^f = \frac{\tau_{12}}{G_f}$$

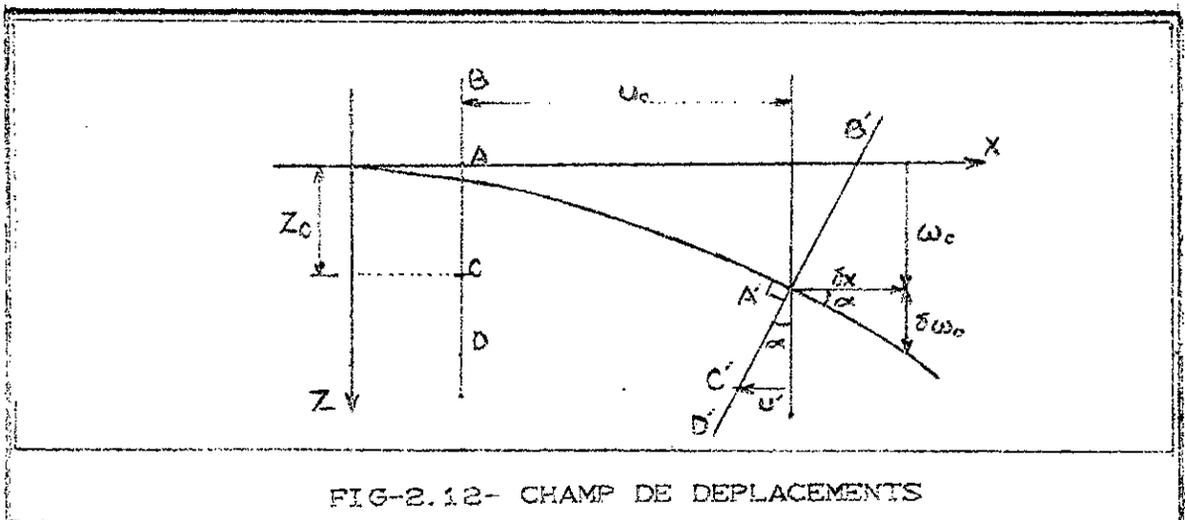
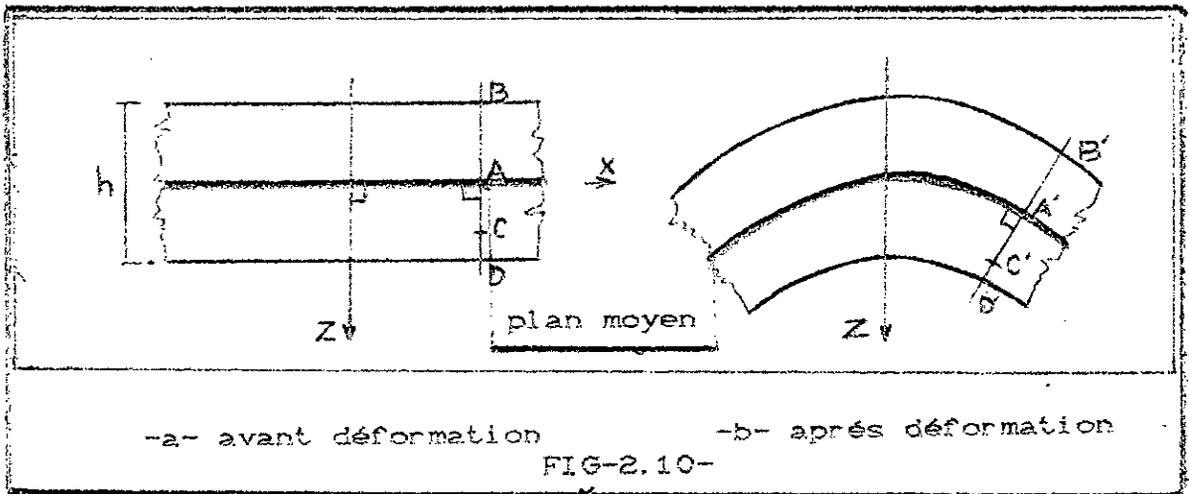
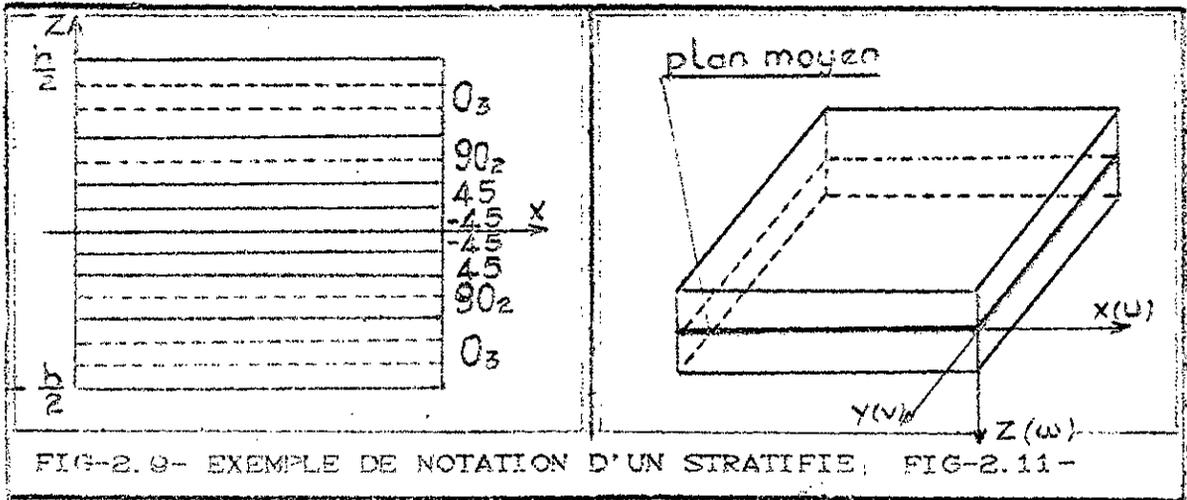
$$\gamma_{12}^m = \frac{\tau_{12}}{G_m}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

Par conséquent les expressions des déformations dans le composite conduisent à la relation suivante :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (2.20)$$





$$\text{avec : } u' = z_0 \alpha \quad \left( \sin(\alpha) \approx \alpha = \frac{u'}{z_0} \right)$$

$$\text{or : } \operatorname{tg}(\alpha) \approx \alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

De la même façon, on peut avoir  $v_0$  ; et ainsi le champ des déplacements de tout point de côté  $z$  dans le stratifié s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w = w_0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

On déduit de (2.25) les déformations non nulles correspondantes, ceci pour les petites déformations (linéaires élastiques).

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \\ \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Les relations déformation-déplacement ci-dessus peuvent être écrites en fonction des déformations du plan moyen ( $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ ) et des courbures du plan moyen ( $k_x, k_y, k_{xy}$ ) définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

et

$$\begin{cases} k_x = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ k_y = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ k_{xy} = - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.28)$$

Ce qui donne en définitif :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

On a enfin les relations contraintes-déformations qui peuvent ainsi s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ S_{YM} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

### 2.2.2- Equations fondamentales d'un stratifié :

On considère un stratifié soumis à des sollicitations notées  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$ , telle que : ( FIG-2.13- )

$N_x$  : Effort résultant dans la direction x par unité de largeur ( suivant la direction y ).

$$\frac{F_x}{l} = N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (2.31)$$

$N_y$  : Effort résultant dans la direction y par unité de largeur ( suivant la direction x )

$$\frac{F_y}{l} = N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad (2.32)$$

$N_{xy}$  : Effort de cisaillement dans le plan ( x, y ) par unité de largeur.

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad (2.33)$$

Notre stratifié étant également soumis à des moments notés  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  ( FIG-2.15- ) tels que :

$M_x$  : moment fléchissant d'axe y dû aux contraintes  $\sigma_x$  par unité de largeur ( suivant la direction y ).

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (2.34)$$

$M_y$  : moment fléchissant d'axe x dû aux contraintes  $\sigma_y$  par unité de largeur ( suivant la direction x ).

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (2.35)$$

$M_{xy}$  ( ou  $M_{yx}$  ) : moment de torsion d'axe ( ou y ) dû aux contraintes  $\tau_{xy}$  par unité de largeur ( suivant la direction y ( ou x ) ).

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (2.36)$$

Etant donné que pour chaque pli d'épaisseur (  $h_k - h_{k-1}$  ) ( FIG-2.14-a ) on a les mêmes contraintes et d'autant plus, que les contraintes sont discontinues le long de l'axe z ( FIG-2.14-b ), il vient :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{\text{pli } h_{k-1}}^{\text{pli } h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.37)$$

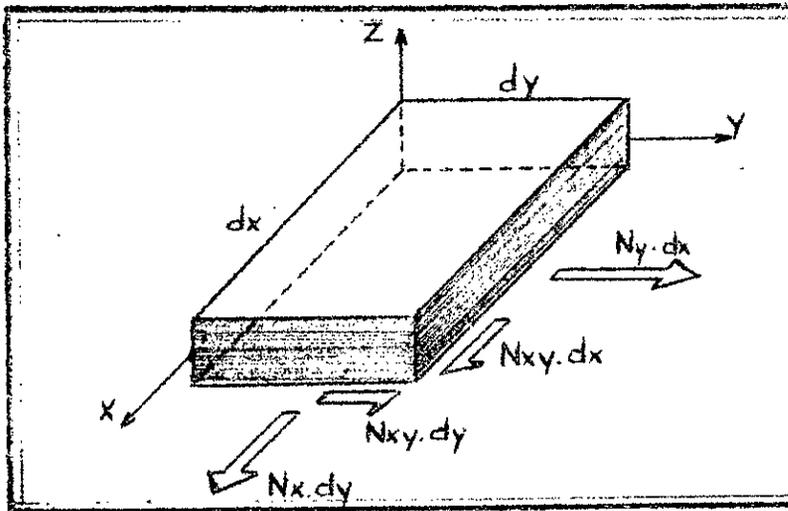
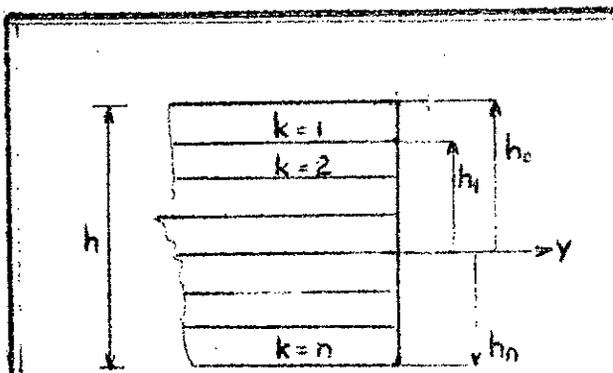
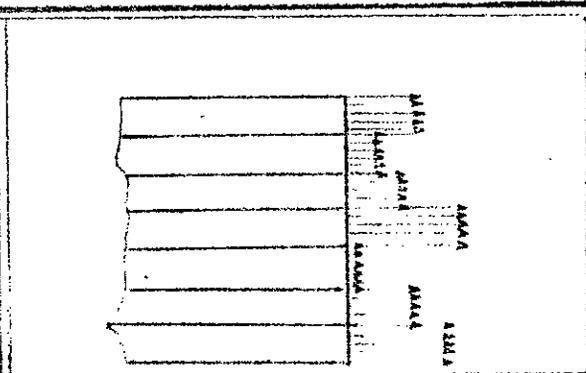


FIG-2.13-

LES EFFORTS  
RESULTANTS



-a-



-b- état de contrainte  
par couche

FIG-2.14-

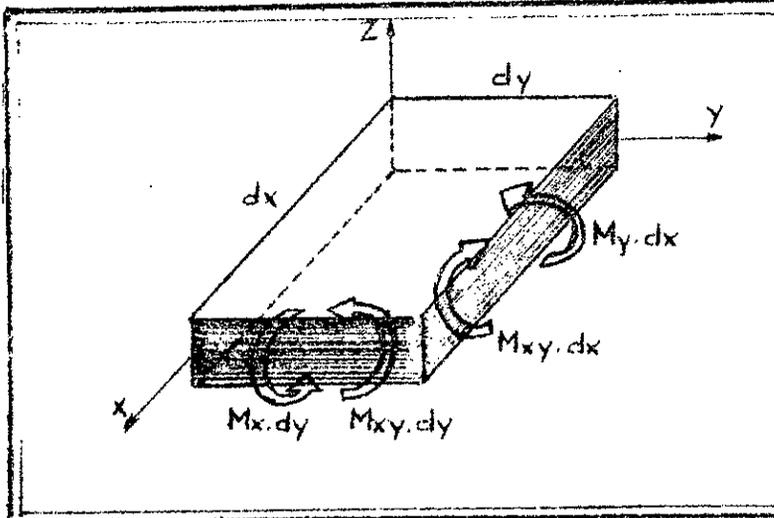


FIG-2.15-

LES MOMENTS  
RESULTANTS

en faisant intervenir l'expression des contraintes exprimée en ( 2.30 ), il est évident d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{matrix} \text{ième} \\ \text{pli} \end{matrix} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^k z dz \quad (2.38)$$

car : \*  $[\bar{Q}]_k$  dépend du numéro du pli uniquement non de la côte z.  
 \*  $[\varepsilon^0]$  et  $[k]$  sont des caractéristiques du stratifié donc indépendant de z.

d'où l'équation finale des efforts résultants :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{matrix} \text{ième} \\ \text{pli} \end{matrix} (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \begin{matrix} \text{ième} \\ \text{pli} \end{matrix} (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

En procédant de même pour les moments, on a :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{matrix} \text{ième} \\ \text{pli} \end{matrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.40)$$

Ainsi l'équation finale des moments résultants devient :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

avec :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \overset{\text{même pli}}{Q_{ij}}_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

On peut écrire les efforts et moments résultants sous une forme condensée, obtenue en combinant les équations ( 2.39 ) et ( 2.41 ), pour enfin avoir les équations fondamentales d'un stratifié :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Pour obtenir l'autre forme désirée des équations fondamentales d'un stratifié, les équations de [ N ] et de [ M ] sont considérées séparément.

De l'équation ( 2.39 ) on tire [  $\varepsilon^0$  ] qu'on injecte dans l'équation ( 2.41 ), ce qui nous donne les courbures [ k ] :

$$[k] = [D^{*-1}] [M] - [D^{*-1}] [C^{*-1}] [N] \quad (2.43)$$

En substituant dans l'équation de [  $\varepsilon^0$  ], on a :

$$[k] = ( [A^*] - [B^*] [D^{*-2}] [C^{*-1}] ) [N] + [B^*] [D^{*-1}] [M] \quad (2.44)$$

d'où en combinant les équations ( 2.43 ) et ( 2.44 ) sous la forme condensée :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline B' & D' \end{array} \right] \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

avec :

$$\begin{aligned} [A'] &= [A^*] - [B^*] [D^{*-1}] [C^{*-1}] \\ [B'] &= [B^*] [D^{*-1}] \\ [C'] &= - [D^{*-1}] [C^{*-1}] \\ [D'] &= [D^{*-1}] \end{aligned}$$

sachant que :

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A^{-1}] \\ [B^*] &= - [A^{-1}] [B] \\ [C^*] &= [B] [A^{-1}] \\ [D^*] &= [D] - [B] [A^{-1}] [B] \end{aligned}$$

### 2.2.2.1- Détermination des constantes d'ingénieur effectives en flexion d'un stratifié symétrique :

Pour un stratifié symétrique sollicité en flexion, la relation ( 2.45 ) nous permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = [D'] \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

où :  $[D'] = [D^{-1}]$

On peut maintenant définir les constantes d'ingénieur en flexion à partir de la relation ( 2.46 ). Sous chargement d'un moment résultant  $M$  suivant l'axe  $x$ , le résultat de la courbure le long de l'axe  $x$  serait :

$$k_x = M_x D'_{11} = D'_{11} \frac{M}{B}$$

$B$  étant la largeur de la poutre.

Sachant de la RDM élémentaire qu'une poutre soumise à une flexion plane et simple l'expression de la courbure est :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{EI}$$

en combinant les deux relations précédentes on peut écrire :

$M$  et  $M_f$  - moment de flexion

$\frac{1}{\rho}$  et  $k_x$  - courbure  
 $\frac{1}{EI}$  et  $\frac{D'_{11}}{B}$  - rigidité.

et par suite :

$$\frac{1}{EI} = \frac{D'_{11}}{B} \rightarrow D'_{11} = \frac{B}{EI}$$

$$\rightarrow E = E_x^f = \frac{B}{D'_{11} I} \quad \text{avec } I = \frac{B h^3}{12}$$

d'où le module de flexion suivant la direction x du stratifié homogénéisé :

$$E_x^f = \frac{12}{D'_{11} h^3} \quad (2.47)$$

en procédant de même on tire le restant des modules de flexion apparents :

$$E_y^f = \frac{12}{D'_{22} h^3} \quad (2.48)$$

$$G_{xy}^f = \frac{12}{D'_{66} h^3} \quad (2.49)$$

et 
$$\nu_{xy}^f = - \frac{D'_{12}}{D'_{22}} \quad (2.50)$$

### CHAPITRE 3

## MECANIQUE LINEAIRE ELASTIQUE DE LA RUPTURE ( M.L.E.R )

Les concepts de base de la M.L.E.R ont été formulés pour les ruptures brutales classées selon deux types ; les ruptures fragiles et les ruptures semi-fragiles ( ou ductiles : ruptures avec une faible déformation plastique ). A l'origine de chaque rupture brutale se trouve un défaut, un vide ou une fissure. Il apparaît donc que les calculs habituels de la mécanique des milieux continus ne peuvent prévoir la rupture puisqu'ils supposent l'absence de tout défaut [7 ].

Ainsi, le but essentiel de la M.L.E.R c'est de caractériser la résistance d'un matériau à la rupture à partir d'un défaut.

On va examiner dans ce qui suit l'application de la M.L.E.R pour les cas des matériaux isotropes et anisotropes.

#### 3.1- Matériau homogène élastique isotrope :

##### 3.1.1- Généralités sur les ruptures :

A l'échelle macroscopique, les surfaces de rupture sont loin d'avoir des formes simples, on peut cependant considérer deux modes principaux de rupture : la rupture plate et la rupture inclinée. Le premier cas de rupture se retrouve généralement dans des ruptures se produisant avec une faible déformation plastique ( ruptures fragiles ). Quand le plan de rupture est incliné, la rupture s'accompagne d'une forte déformation plastique. Dans la plus part des cas, la rupture est une combinaison des deux types élémentaires précédents.

On montre que l'état le plus général de propagation d'une fissure peut être ramené à la superposition de trois modes simples :

- mode I ou mode par ouverture ( FIG-3.1- )  
 les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre.

- mode II ou mode par glissement droit ( FIG-3.2- )  
 les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan perpendiculairement au front de fissure.

- mode III ou mode par glissement vis ( FIG-3.3- )  
 les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan, parallèlement au front de fissure.

Il est à signaler que les ruptures dangereuses sont généralement des ruptures de mode I. C'est la raison pour laquelle la plupart des études de la mécanique de la rupture ont porté sur ce mode.

On s'intéressera dans ce qui suit uniquement au cas du mode I.

### 3.1.2- Champ de contrainte et de déplacement au voisinage de l'extrémité d'une fissure :

La présence d'une fissure dans une structure perturbe énormément le champ de contrainte. Pour rendre le problème plus simple, la structure est supposée être élastique linéaire isotrope, et le problème est plan.

En se basant sur la théorie de l'élasticité, G.R.IRWIN (1956) a pu établir les équations de contraintes et de déplacements au voisinage du front de fissure pour un point de coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  ( FIG-3.4- ).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) [ \chi - 1 + 2 \sin^2(\theta/2) ] \\ \sin(\theta/2) [ \chi - 1 - 2 \cos^2(\theta/2) ] \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

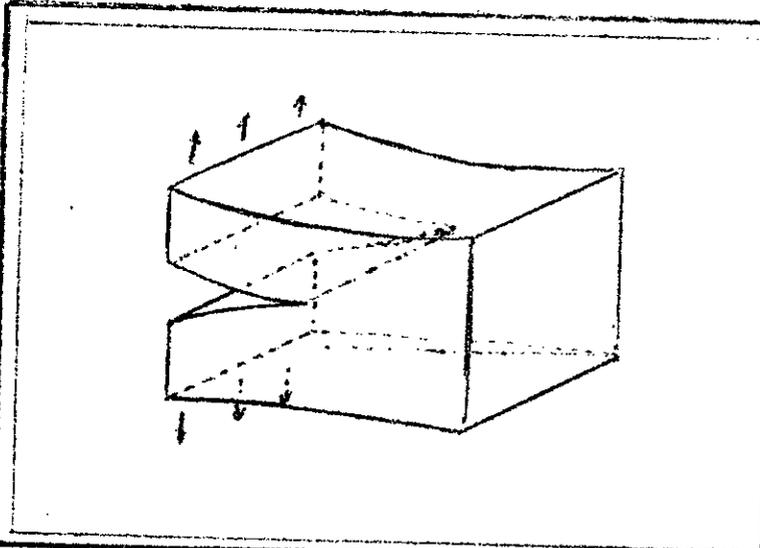


FIG-3.1-

MODE PAR OUVERTURE

( MODE I )

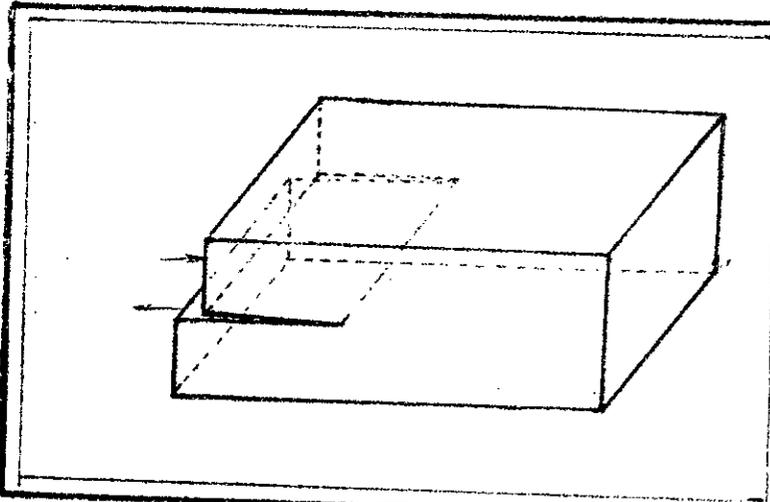


FIG-3.2-

GLISSEMENT DROIT

( MODE II )

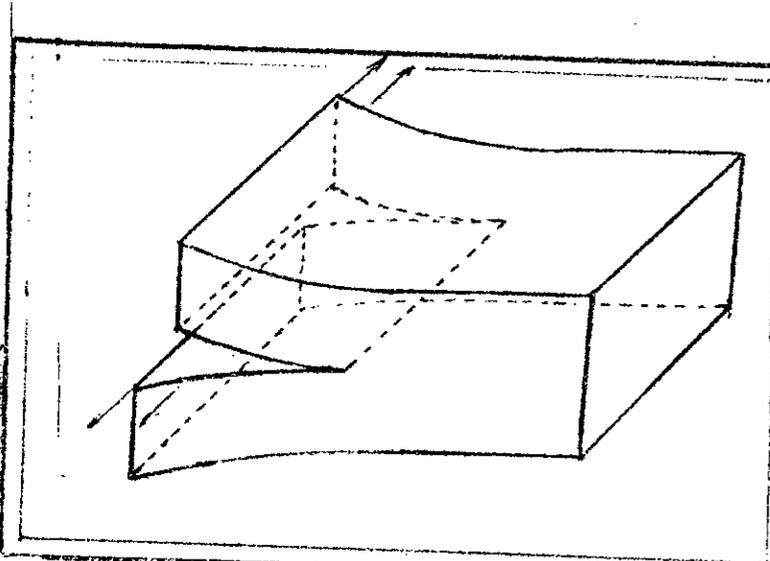


FIG-3.3-

GLISSEMENT VIS

( MODE III )

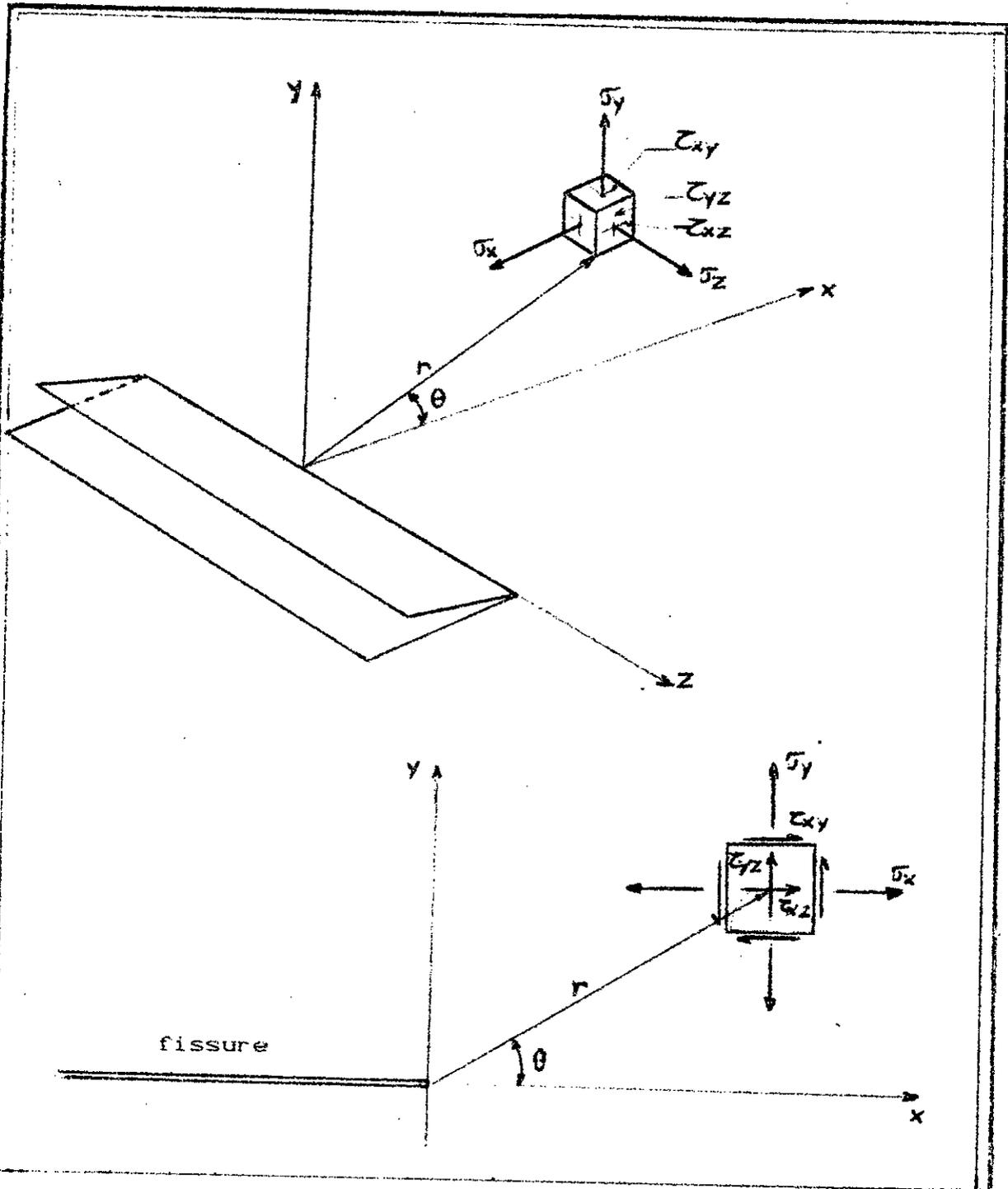


FIG-3.4- CONTRAINTES AU VOISINAGE DE L'EXTREMITÉ D'UNE FISSURE

Avec :

$\mu$  - Module de cisaillement ;

$\chi = 3 - 4\nu$  : déformation plane (  $\varepsilon_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  )

$\chi = \frac{3 - 4\nu}{1 + \nu}$  : contrainte plane (  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  )

$\nu$  étant le coefficient de poisson.

Les contraintes varient proportionnellement à  $\left(\frac{1}{r}\right)^{(1/2)}$  et tendent vers l'infini à l'extrémité de la fissure, quand  $r$  devient petit. La distribution de la contrainte  $\sigma_y$  est illustrée dans la figure (3.5) pour  $\theta = 0$ .

Pour de grandes valeurs de  $r$  la contrainte  $\sigma_y$  tend vers zéro, alors qu'elle doit tendre vers la valeur de la contrainte extérieure  $\sigma$  ( contrainte appliquée à "l'infini" sur la structure ). Apparemment les équations (3.1) sont valables uniquement dans une zone limitée autour de la tête de fissure.

Les formules ci-dessus (3.1) et (3.2) sont toutes de la même forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Elles montrent que les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure ont toujours la même forme quelles que soient la géométrie de la pièce et la façon dont elle est chargée. Cette analyse a permis à G.R. IRWIN [16] de mettre en évidence un facteur indépendant des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ , faisant la synthèse de la géométrie et du chargement, qu'il appela : facteur d'intensité de contrainte, facteur unique :  $K$ . Ce facteur  $K$  qui traduit en fait, l'état de contrainte au voisinage du fond de fissure admet une valeur critique notée :  $K_c$ , pour laquelle l'amorçage de la fissure survient ( FIG-3.6- ).

### 3.1.3- Théorie de GRIFFITH :(approche énergétique) [17]

Un défaut de faible rayon de courbure produit des concentrations de contraintes considérables, il est alors logique de s'attendre à une fragilité de tous les corps contenant des microfissures, ce qui est le cas général. Or, une structure fissurée n'est pas systématiquement fragilisée. Le mérite de l'explication de ce fait revient à A.A.GRIFFITH (1921). Il a en effet, montré qu'il fallait étudier la variation d'énergie de la structure quand la fissure se propage, en d'autres termes la fissure peut se propager à la condition que le système composé des forces extérieures et du corps fissuré fournissent l'énergie nécessaire à un accroissement de la fissure.

La somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique restant constante, permet d'écrire une condition de propagation :

$$\frac{1}{B} \frac{d}{da} (W - U) = \frac{1}{B} \frac{dT}{da} \quad (3.5)$$

Où : B - épaisseur de la plaque ;  
a - longueur de la fissure ;  
T - énergie consommée par la propagation de la fissure ;  
W - travail des forces extérieures ;  
U - énergie de déformation élastique contenue dans la plaque ( énergie emmagasinée par la plaque ).

\* Le terme  $\frac{1}{B} \frac{d}{da} (W - U)$  caractérise l'énergie disponible pour faire avancer la fissure, on l'appelle force d'extention de fissure ( crack extension force ) ou taux de restitution d'énergie ( strain energy release rate ) que l'on note par : G.

\* Le terme  $\frac{1}{B} \frac{dT}{da}$  caractérise l'énergie requise pour que la fissure se propage, ou résistance à la fissuration ; notée R, qui est une constante du matériau.

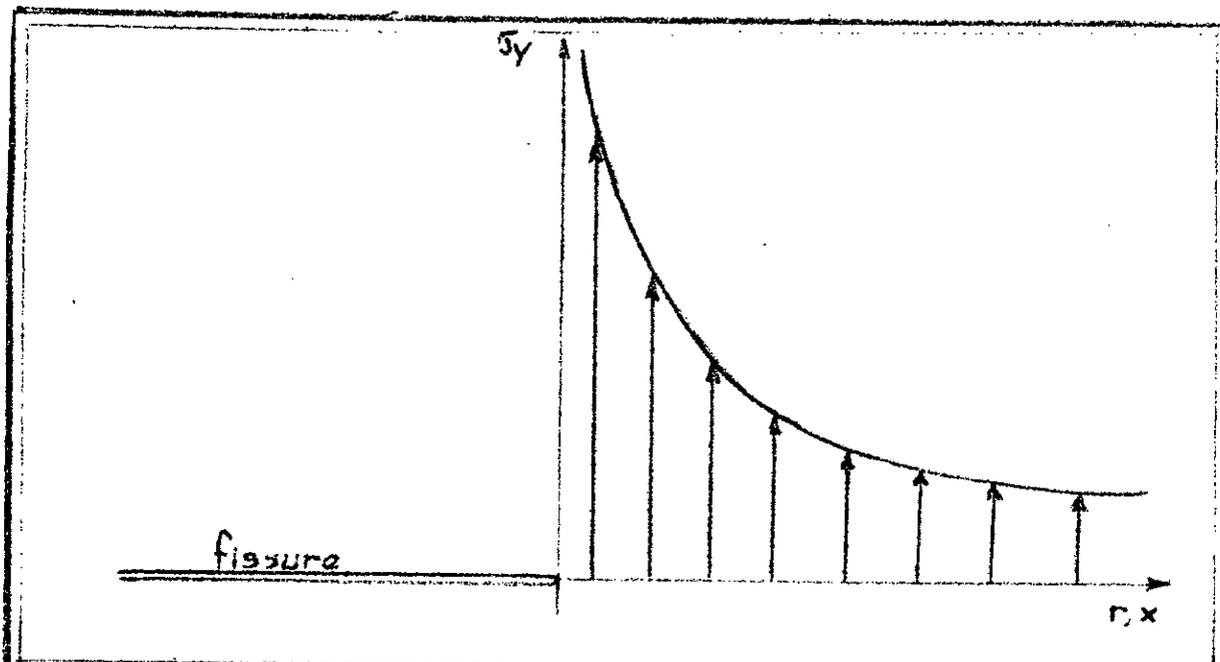


FIG-3.5- LA CONTRAINTE  $\sigma_y$  AU VOUSINAGE DE LA TETE DE FISSURE

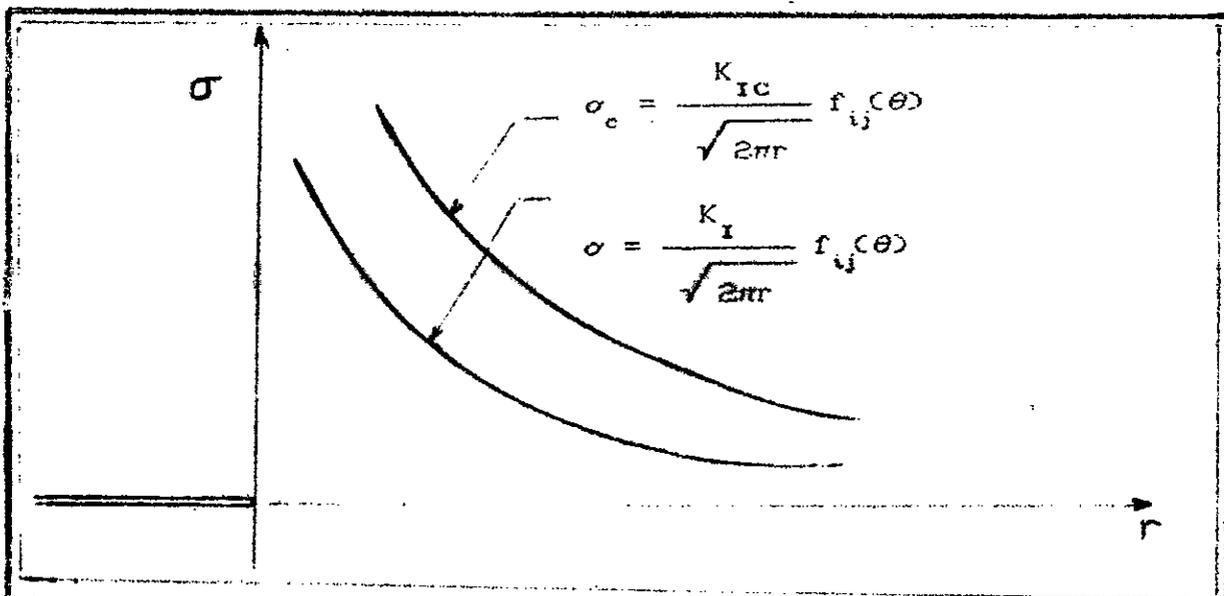


FIG-3.6- DISTRIBUTION NORMALE ET CRITIQUE DES CONTRAINTES A FOND DE FISSURE

### 3.1.4- Modèle d'IRWIN :

Comme énoncé en (3.1.3), l'analyse précédente concerne les matériaux élastiques. G.R. Irwin [22] a pu lier son approche avec celle énergétique de A.A. Griffith avec présence d'une zone plastique en fond de fissure.

En considérant l'équation (3.3), un problème se pose pour la valeur de  $r = 0$ , pour laquelle le champ de contrainte est infini. Ce qui est impossible étant donné que la limite est  $\sigma_y$  : seuil d'écoulement.

G.R. Irwin a proposé un modèle ( FIG-3.7- ) de telle façon que :

$$\sigma_y = \sigma_y \quad 0 < x < R \quad (\text{zone plastique})$$

et

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad x > R \quad (\text{zone élastique})$$

L'extension de la zone plastique, considérée circulaire dans le plan de la fissure, est donnée par la relation :

$$R = 2 r_y = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{K_I}{\sigma_y} \right]^2 \quad \text{contrainte plane} \quad (3.9)$$

$$R = 2 r_y = \frac{1}{3 \pi} \left[ \frac{K_I}{\sigma_y} \right]^2 \quad \text{déformation plane} \quad (3.10)$$

Le profil de contrainte est alors celui qui correspondrait à une fissure fictive de longueur  $( a + r_y )$  ( FIG-3.7 ) tronqué à la valeur :  $\sigma = \sigma_y$ .

L'expression du facteur d'intensité de contrainte pour le cas d'une plaque infinie, renfermant une fissure de longueur  $2 a$ , et soumise à une contrainte perpendiculaire au plan de la fissure est :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.11)$$

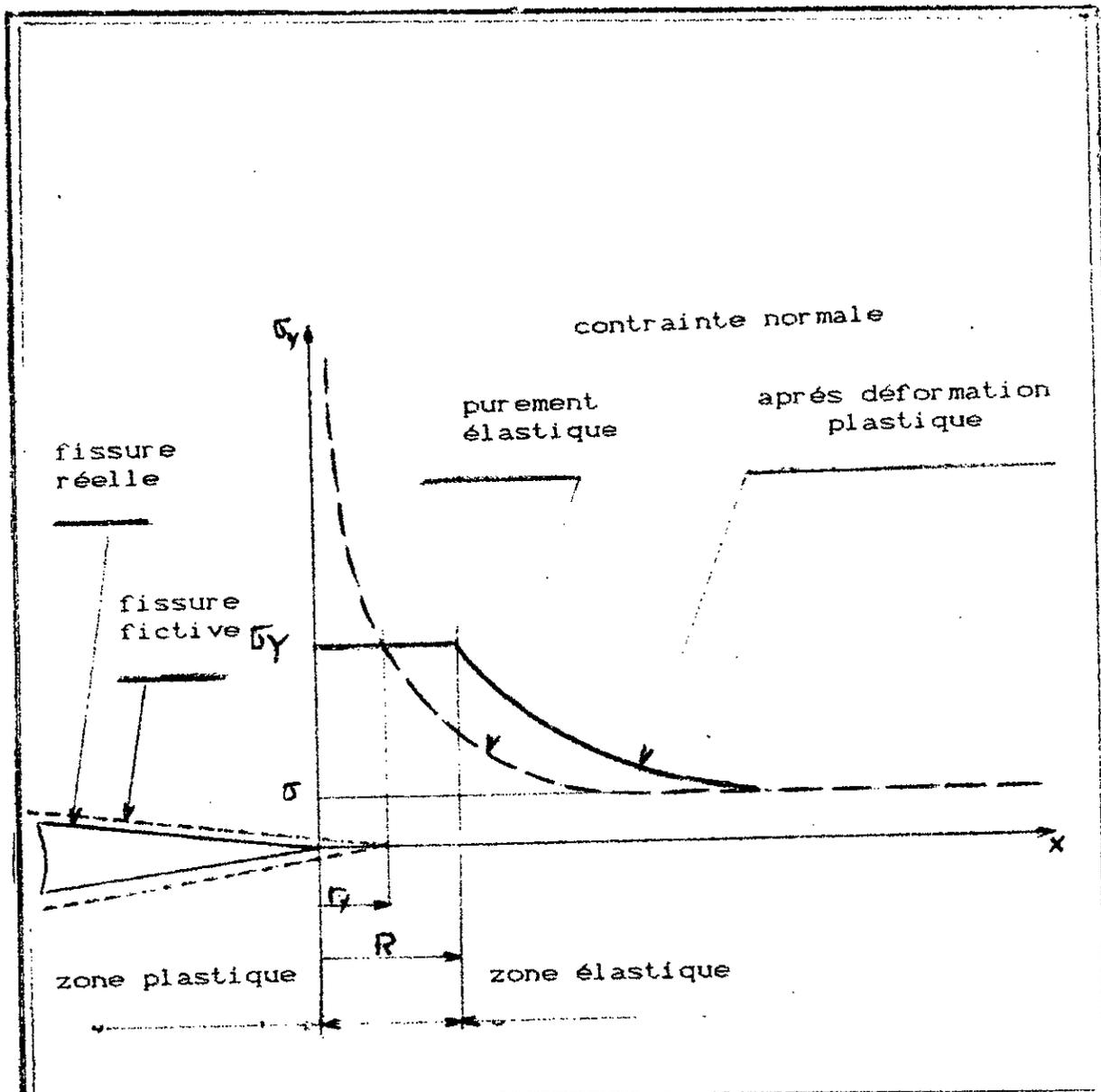


FIG-3.7- MODELE D'IRWIN

Dans le cas d'une éprouvette de dimensions finies, certains auteurs ([18], [19]) ont utilisé un facteur géométrique  $Y$  fonction du rapport :

$$Y = \frac{a}{W}$$

$a$  = longueur de la fissure  
 $W$  = longueur de l'éprouvette dans la direction de propagation

$$K_I = Y \sigma \sqrt{a} \quad (3.12)$$

### 3.2- Matériau homogène élastique anisotrope ( composite ) :

#### 3.2.1- Généralités sur les ruptures :

Le comportement mécanique des matériaux composites à hautes performances est au plan macroscopique, linéaire quasi-élastique, toutefois la rupture de ceux-ci est précédée par un endommagement microscopique au développement lent.

Cet endommagement microscopique, qui prend naissance par des microfissures, rend ainsi l'aspect de la zone endommagée au fond de fissure des plus complexes en comparaison avec les matériaux isotropes qui en général présentent une zone plastique en fond de fissure.

La diversité des modes de ruptures, présente lors de la rupture des matériaux composites, rend l'étude de ceux-ci encore plus difficile :

- Rupture de la matrice parallèle aux fibres ;
- Rupture de la matrice perpendiculaire aux fibres ;
- Rupture des fibres ;
- Décollement de l'interface fibres-matrice.

On distingue également le processus de délaminage ; rupture interlaminaire. Le délaminage est un type d'endommagement propre aux matériaux composites stratifiés. Il se caractérise par une séparation qui prend forme entre deux couches adjacentes ( ou une décohésion plane interlaminaire qui produit un dédoublement du composite ). Cette séparation provient de la multiplication des fissures dans la zone endommagée, tendant vers une densité critique et entraînant

où :

$$\left. \begin{array}{l} s \\ t \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \mu_1 p_2 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)} \right) \right] \\ \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \mu_1 q_2 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)} \right) \right] \end{array} \right\}$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des variables complexes.

$$\begin{aligned} \text{avec :} \quad p_j &= S_{11} \sigma_j^2 + S_{12} - S_{16} \mu_j \\ q_j &= S_{12} \mu_j + \frac{S_{22}}{\mu_j} - S_{26} \end{aligned}$$

Les équations (3.13) et (3.14) se présentent sous la même forme, soit :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} f_{ij}(\theta, S_{lm}) \quad (3.15)$$

$$u_i = K_I \sqrt{2r} g_i(\theta, S_{lm}) \quad (3.16)$$

P.C. Paris et G.C. Sih [23] montrent que le facteur d'intensité de contrainte du matériau anisotrope est équivalent à celui des matériaux isotropes si la fissure se propage dans son plan en respectant une direction principale de symétrie élastique (plan d'orthotropie) comme le montre les équations (3.13).

Ainsi, le facteur d'intensité de contrainte en mode I s'exprime :

$$K_I = Y \sigma \sqrt{a}$$

T.H.H.Pian [24] précise que le facteur géométrique Y est une fonction du rapport  $\frac{a}{w}$  des éléments de la matrice souplesse  $S_{ij}$  et de la géométrie  $\alpha$  de l'éprouvette.

$$K_I = Y \left( \frac{a}{w}, S_{ij}, \alpha \right) \sigma \sqrt{a} \quad (3.17)$$

Ce qui nous suggère que pour chaque matériau et chaque géométrie d'éprouvette, il nous faut un coefficient de forme Y, par suite donc un facteur d'intensité de contrainte. De ce fait, il nous est impossible ou plutôt délicat de travailler avec le  $K_I$  en composite.

Pour les matériaux composites, l'approche mécanique  $K_I$  est beaucoup plus délicate que l'approche énergétique  $G_I$ . On précise que dans le cas général d'anisotropie,  $G_{Ic}$  et  $K_{Ic}$  (tenacité) sont reliés par la relation suivante :

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E^*} \quad (3.18)$$

où  $E^*$  représente le module effectif.

$E^*$  a pour expression, dans le cas particulier d'orthotropie, selon G.C.Sih, P.C.Paris et G.R.Irwin [21] :

$$E^* = \left[ \frac{X_{11} X_{22}}{2} \right]^2 \left[ \left[ \frac{X_{22}}{X_{11}} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{2 X_{12} + X_{66}}{2 X_{11}} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

$$\text{en déformation plane : } X_{ij} = S_{ij} - S_{i3} \frac{S_{j3}}{S_{33}} \quad (3.20)$$

$$\text{en contrainte plane : } X_{ij} = S_{ij} \quad (3.21)$$

3.2- Résistance à la propagation d'une fissure, notions de courbes " R " :

La M.L.E.R développée par A.A.Griffith, G.R.Irwin et Cowan explique parfaitement la rupture brutale dans les structures fragiles, dont l'épaisseur est suffisamment importante pour être en déformation plane.

La rupture brutale, prévue par la M.L.E.R survient dès que la fissure est amorcée ( fissuration instable ).

Le problème, à présent, se pose pour les structures minces fissurées ( contrainte plane ) ayant une zone plastique non confinée en tête de fissure. En effet, la propagation de la fissure s'effectue d'une manière stable, ce qui permet à celle-ci de s'arrêter après l'amorçage et de se propager de nouveau pour une charge supérieure à la précédente jusqu'à atteindre une charge critique pour laquelle la rupture survient.

Pour concrétiser la propagation d'une fissure, le tracé des courbes de résistance à la propagation d'une fissure ou courbe " R ", est nécessaire. Ces courbes représentent la variation du taux de restitution d'énergie en propagation  $G_{Ip}$ , en fonction de la longueur de fissure effective :  $a_{eff}$ , qui tient compte de l'influence de la zone plastique en zone endommagée ( en tête de fissure )

$$a_{eff} = a + r_y \quad (3.22)$$

où :  $r_y$  : rayon de la zone plastique ( G.R.Irwin )

la technique des courbes " R " permet ainsi la généralisation de la théorie de M.L.E.R.

## CHAPITRE 4

### DETERMINATION DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE CRITIQUE EN MODE I : $G_{Ic}$

Le taux de restitution d'énergie critique  $G_{Ic}$ , qui caractérise l'énergie nécessaire pour l'amorçage d'une fissure, représente dans le cas de notre étude l'énergie d'amorçage du délaminage.

L'utilisation de l'éprouvette de type D.P.E ( FIG-4.1- ) (double poutre encastree) ou D.C.B ( double cantilever beam) dans le cas du délaminage en mode I est très répandue ([25] , [26] ... ) .vu la simplicité de sa réalisation et son aptitude à caractériser le délaminage en mode d'ouverture.

On retrouve dans la littérature plusieurs méthodes pour la détermination du taux de restitution d'énergie  $G_{Ic}$  d'une D.P.E ( théoriques et expérimentales ). On verra, à cet effet, quelques unes de ces méthodes.

#### 4.2-Méthodes basées sur la détermination du terme $( \frac{d c}{d a} )$ : ( terme provenant de la formule de Irwin-Kies )

Soit la formule du taux de restitution d'énergie  $G_{Ic}$  proposée par G.R. Irwin et J.A. Kies [27]

$$G_{Ic} = \frac{P_c^2}{2B} \frac{d c}{d a} \quad (4.1)$$

avec :  $P_c$  : Effort critique d'amorçage  
 $B$  : Largeur de l'éprouvette  
 $a$  : Longueur de fissure

$$c = \frac{\delta}{P} \quad (4.2)$$

où :  $C$  : Compliance  
 $\delta$  : Déplacement

On présentera dans ce qui suit trois méthodes de détermination du terme  $\left( \frac{dC}{da} \right)$

#### 4.1.1- Méthode se basant sur la théorie des poutres :

La théorie élastique des poutres homogènes isotropes, alliée à celle de Griffith nous permettent la détermination de  $G_{Ic}$ . (travaux de J.J.Gilman [28] )

On considère dans cette méthode, qu'il y a un encastrement au niveau de la tête de fissure de la D.P.E ( FIG-4.2- ).

Notre travail se résumera donc au calcul du déplacement  $\frac{\delta}{2}$  sous l'effet de la charge P, d'une simple poutre encastree ( S.P.E ).

Soit U l'énergie de déformation élastique de la S.P.E :

$$U = \int_0^a \frac{M_f^2}{2 E I_y} dx \quad (4.3)$$

où :  $M_f$  : moment de flexion  
 $I_y$  : moment d'inertie de la S.P.E

Le déplacement  $\frac{\delta}{2}$  du point A soumis à l'effort P, s'exprime alors :

$$\frac{\delta}{2} = \int_0^a \frac{M_f}{E I_y} \frac{\partial M_f}{\partial P} dx \quad (4.4)$$

avec :  $M_f(x) = - P x$

d'où :  $\frac{\partial M_f}{\partial P} = - x$

$$\text{alors : } \frac{\delta}{2} = \frac{P}{E I_y} \frac{a^3}{3} \quad (4.5)$$

L'équation (4.2) de la compliance nous permet d'écrire :

$$C = \frac{2}{3} \frac{a^3}{E I_y} \quad (4.6)$$

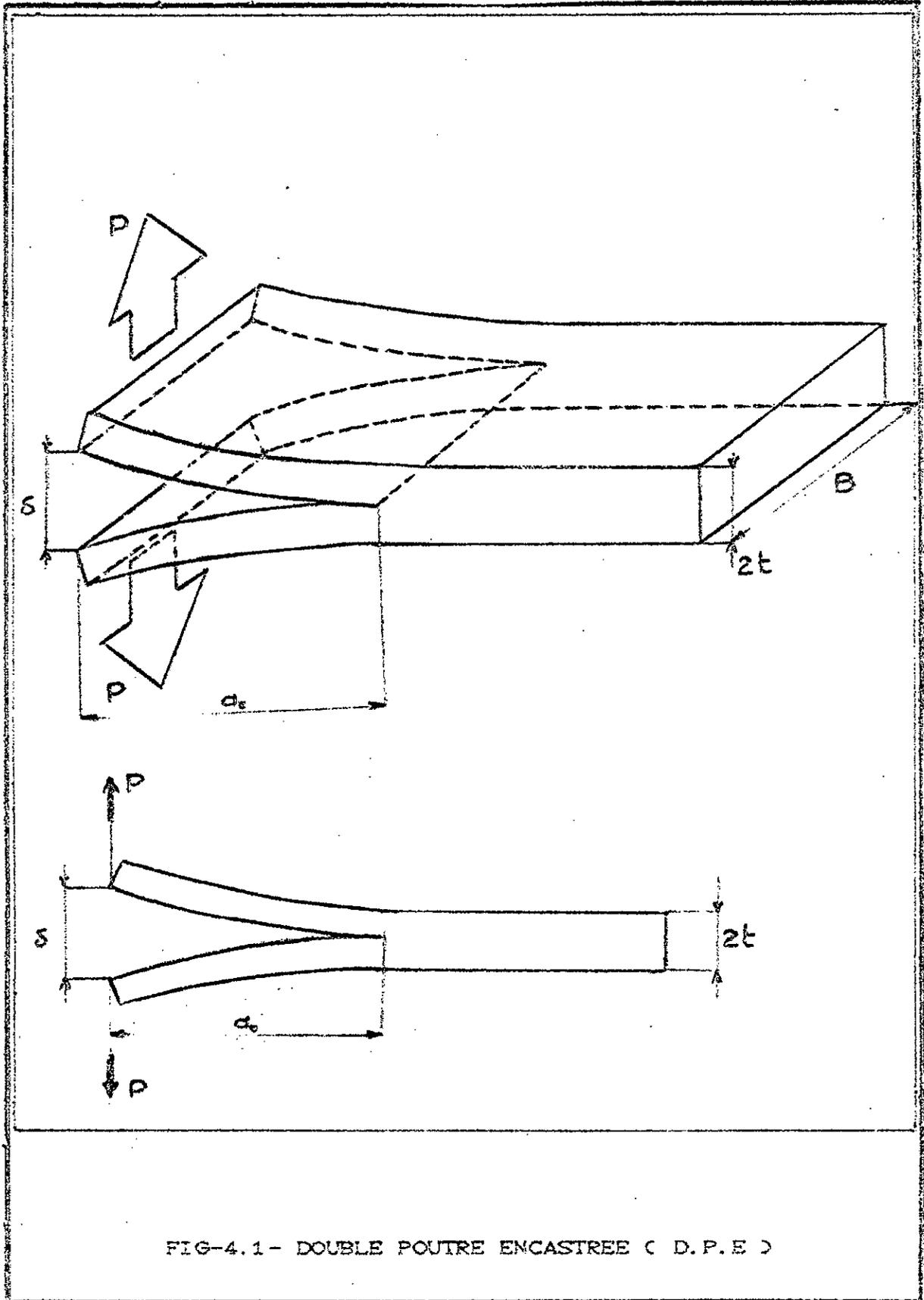


FIG-4.1 - DOUBLE POUTRE ENCASTREE ( D.P.E )

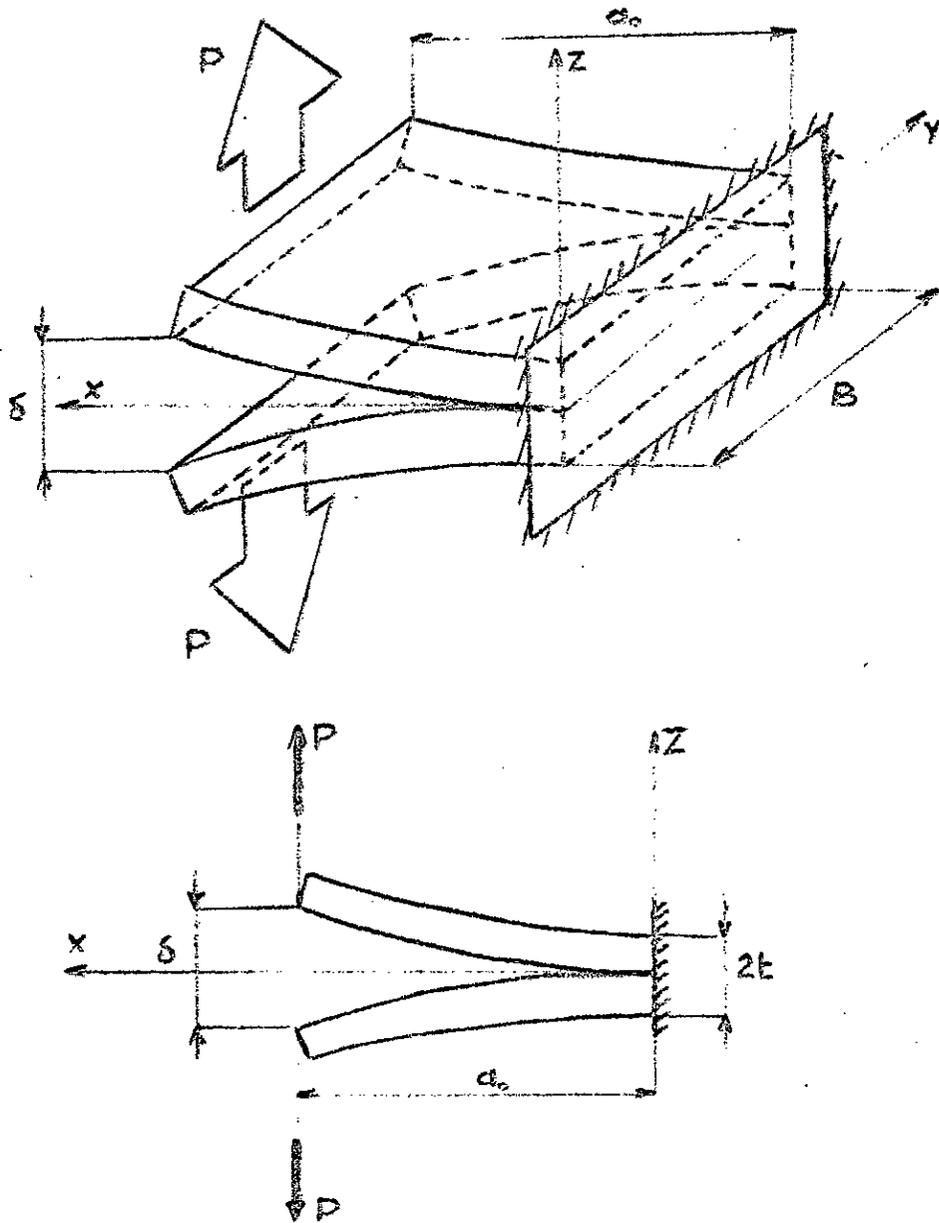


FIG-4. 2- ENCASTREMENT DE LA D.P.E AU NIVEAU DE LA TETE DE FISSURE

En remplaçant  $I_y$  par son expression  $\left( \frac{B t^3}{12} \right)$ , il vient :

$$G_{Ic} = \frac{12 P_c^2 a^2}{E B^2 t^3} \quad (4.7)$$

ou :

$$G_{Ic} = \frac{3}{2} \frac{P_c \delta}{B a} \quad (4.8)$$

avec :  $t$  : demi-épaisseur de la D.P.E  
 $E$  : module d'élasticité de flexion

#### 4.1.2-Méthode de la compliance :

La formule de  $G_{Ic}$  suggère une méthode expérimentale de détermination du taux de restitution d'énergie. Elle consiste à mesurer la déformation d'éprouvettes identiques mais contenant des fissures de longueurs différentes  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Ainsi sont déterminées les compliances  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . La pente de la courbe  $C = f(a)$  ( FIG-4.3- ) donne la force d'extension de fissure ou énergie de délaminage recherchée  $G_{Ic}$  en fonction de la charge  $P_c$  et la longueur de fissure  $a$ . La détermination graphique de la valeur  $\frac{\partial C}{\partial a}$  ( pente de la courbe  $C = f(a)$  ) est entachée d'erreur. C'est pour cette raison qu'il est préférable d'utiliser la méthode de Berry.

#### 4.1.3- Méthode de Berry :

J.P. Berry [29] propose une approche identique à celle de J.J. Gilman [28] en introduisant par analogie à la flèche d'une poutre encastrée l'expression de l'ouverture  $\delta$  d'une éprouvette de type D.P.E.

$$\delta = \frac{P a^n}{h} \quad (4.9)$$

où :  $n$  et  $h$  - paramètres constants du matériau.  
 Les compliances seront alors :

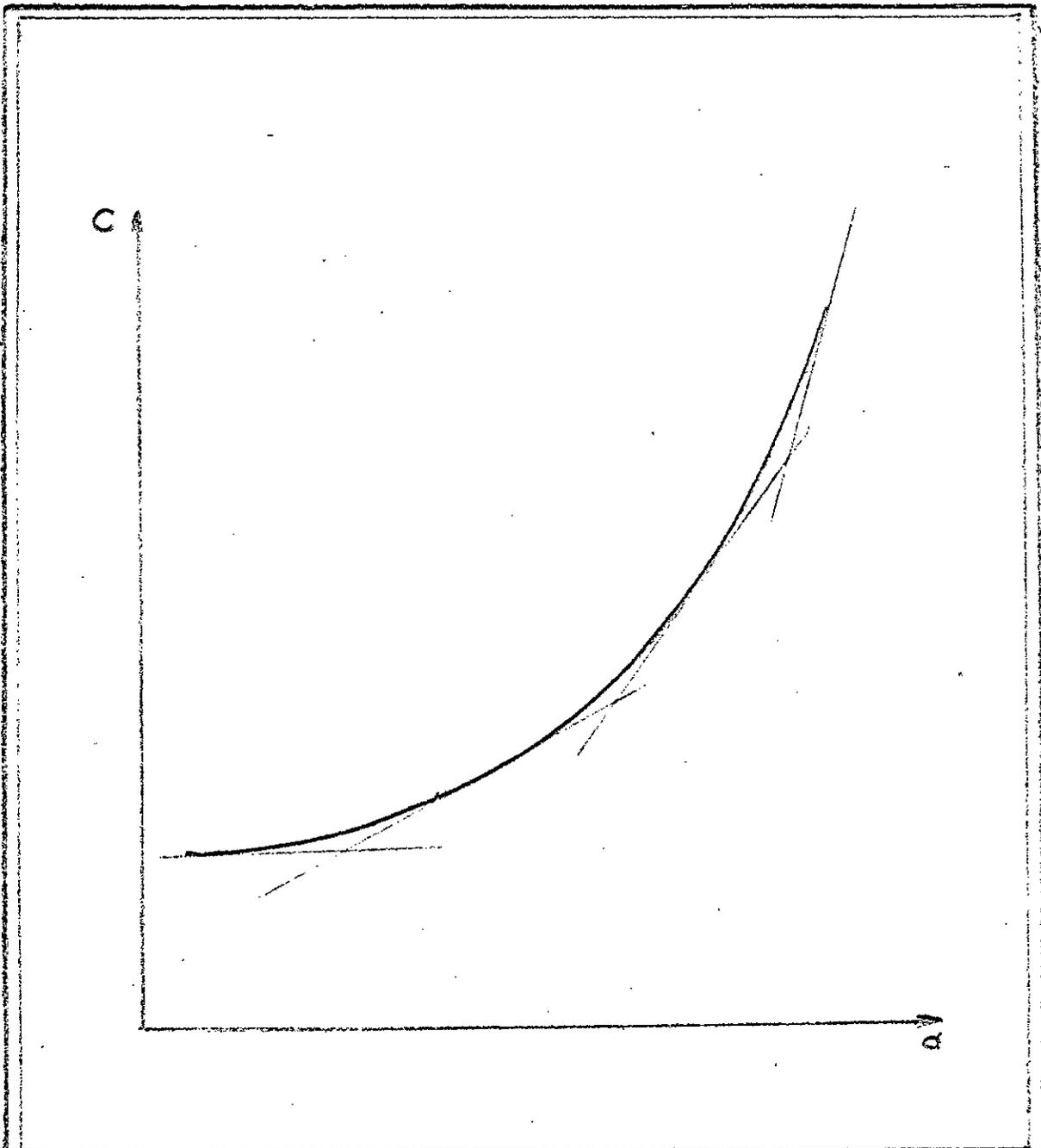


FIG-4. 3- COURBE DES VARIATIONS DE LA COMPLIANCE  
EN FONCTION DE LA LONGUEUR  
DE FISSURE INITIALE

$$C = \frac{a^n}{h} \quad (4.10)$$

d'où le taux de restitution d'énergie :

$$G_{Ic} = \frac{n P_c^2 a^{n-1}}{2 B h} \quad (4.11)$$

ou

$$G_{Ic} = \frac{n P_c \delta}{2 B a} \quad (4.12)$$

Les constantes n et h du matériau sont obtenues en traçant la courbe  $C = f(a)$  en coordonnées logarithmiques, c'est à dire en utilisant l'équation (4.10) qui donne la courbe :

$$\text{Log } C = n \text{ Log } a - \text{Log } h \quad (\text{FIG-4.4})$$

#### 4.2- Autres méthodes :

##### 4.2.1- Méthode des aires :

Cette méthode est basée sur une représentation graphique, proposée par J.M. Whitney [25]. Elle consiste à lier l'aire sous la courbe charge-déplacement à la surface de fissure créée après propagation. l'application de cette méthode nécessite plusieurs cycles de charge et décharge ( FIG-4.5-) pour lesquels un  $G_{Ic}$  est déterminé à chaque fois. La méthode des aires consiste à approximer l'équation (3.5) vue au paragraphe ( 3.1.3 ) du chapitre 3 par :

$$G = \frac{1}{B} \frac{\Delta W - \Delta U}{\Delta a} \quad (4.13)$$

avec :  $\Delta W$  - travail des forces extérieures qui font déplacer la fissure de  $a$  à  $( a + \Delta a )$ .

$\Delta U$  - énergie de déformation élastique contenue dans l'éprouvette lorsque la fissure atteint la longueur  $( a + \Delta a )$ .

ainsi le taux de restitution d'énergie  $G_{Ic}$  s'écrit :

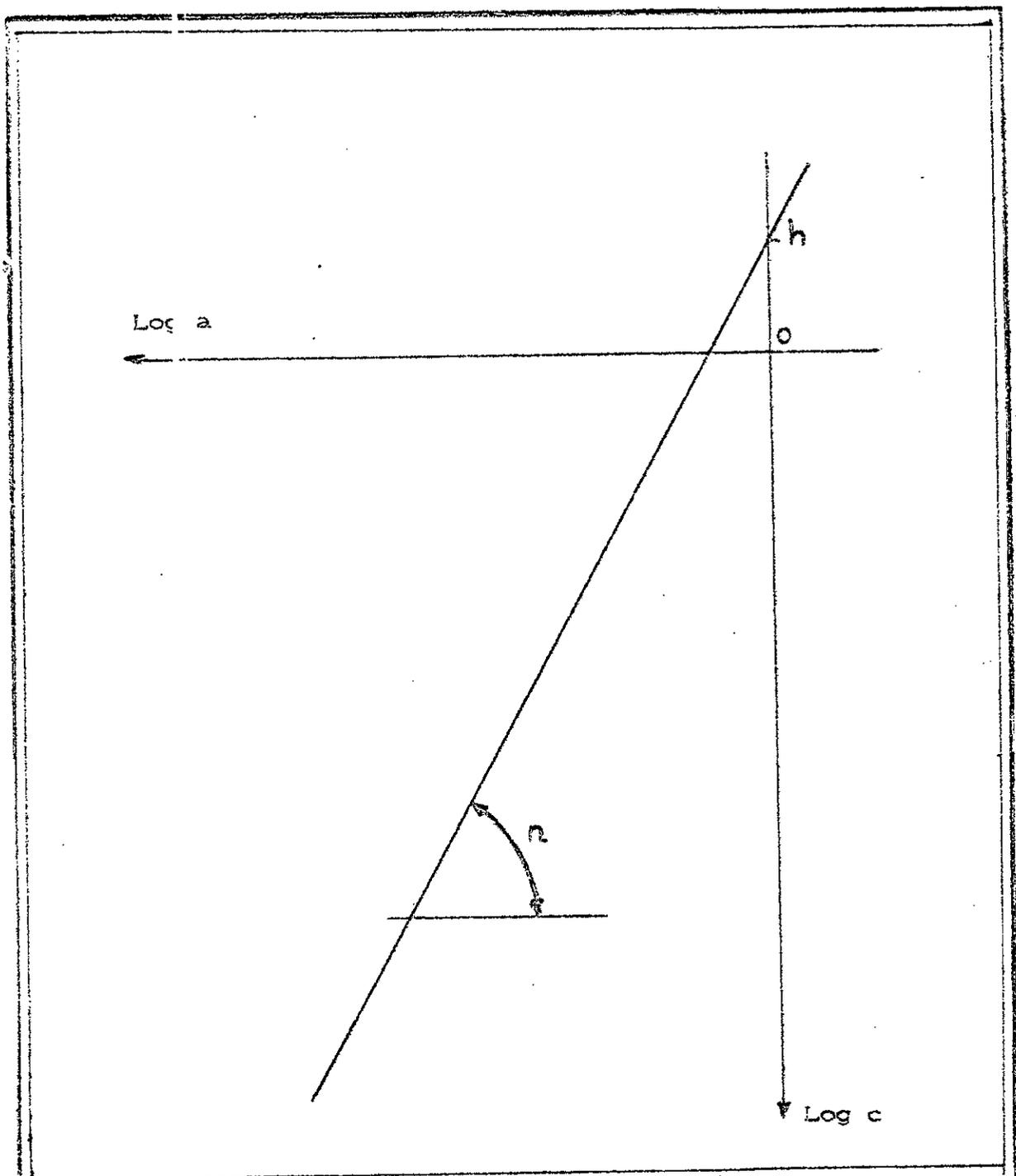


FIG-4.4- DETERMINATION DES PARAMETRES  $n$  ET  $h$   
DU MATERIAU

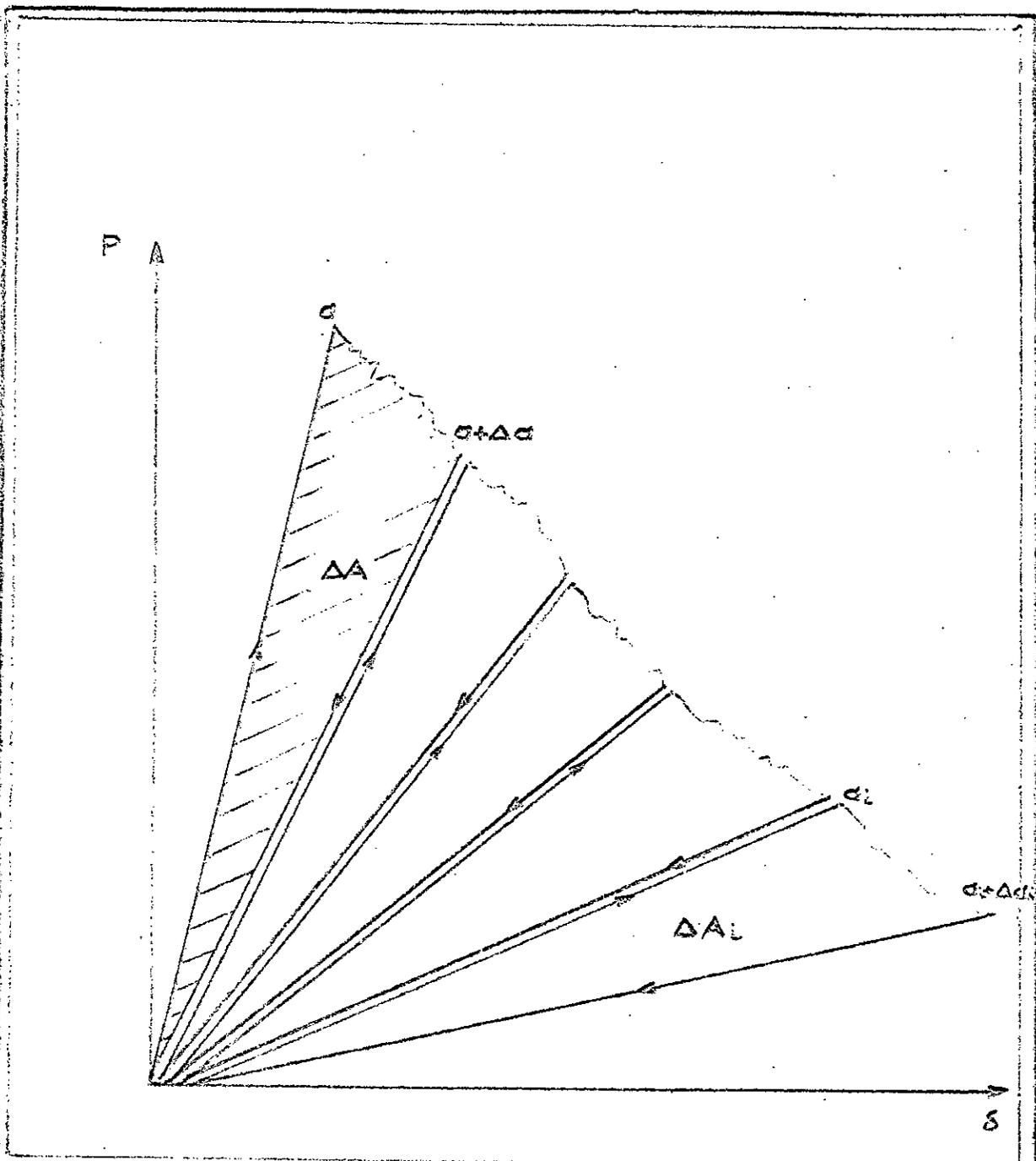


FIG-4.5- COURBE DE CHARGE-DEPLACEMENT  
CYCLES DE CHARGEMENT  
ET DECHARGEMENT

$$G_{Ic} = \frac{1}{B} \frac{\Delta A}{\Delta a} \quad (4.14)$$

(  $\Delta A$  peut être mesurée par planimétrie à partir de la courbe expérimentale )

#### 4.2.2- Méthode du clivage :

Certains auteurs reprènnent les travaux de J.J. Gilman [28] pour exprimer une énergie de déformation plus exacte, ils tiennent compte en plus de l'énergie de déformation due au moment de flexion, celle relative aux efforts de cisaillement et d'une déformation en tête de fissure.

Parmi les équations de  $G_{Ic}$ , on citera celles proposées par :

- Gillis-Gilman [26] :

$$G_{Ic} = \frac{12 P_c^2 a^2}{E B^2 t^3} \left[ 1 + 1.335 \frac{t}{a} + 0.446 \frac{t^2}{a^2} \right] \quad (4.15)$$

- Gross-Srawley [30] :

$$G_{Ic} = \frac{12 P_c^2 a^2}{E B^2 t^3} \left[ 1 + 1.32 \frac{t}{a} + 0.542 \frac{t^2}{a^2} \right] \quad (4.16)$$

- Mostovoy, Crosley et Rippling [31] :

$$G_{Ic} = \frac{4 P_c^2}{E B^2 t^3} \left[ 3 + (a + 0.6 t)^2 + t^2 \right] \quad (4.17)$$

#### 4.2.3- Modèle analytique :

Le taux de restitution d'énergie  $G_{Ic}$  peut être déterminé à partir de modèles analytiques dont celui de M.F. Kanninen [32]. Il considère une poutre de dimension finie pour sa partie libre et l'autre partie est simulée par une fondation élastique. Il trouve alors l'expression suivante pour  $G_{Ic}$  :

$$G_{Ic} = \frac{12 P_c^2 a^2}{E B^2 t^3} \left[ 1 + 1.28 \frac{t}{a} + 0.406 \frac{t^2}{a^2} \right] \quad (4.18)$$

## CHAPITRE 5

### PRESENTATION DES MOYENS ET TECHNIQUES DE L'APPROCHE EXPERIMENTALE

Ce présent travail est consacré à l'étude des mécanismes d'endommagement des matériaux composites stratifiés ( carbone / Epoxy ), selon un mode de rupture propre aux composites : le délaminage.

Les éprouvettes d'essai utilisées pour caractériser le délaminage en mode I, sont de type double poutre encastree ( D.P.E ou D.C.B ). Ces éprouvettes se présentent sous trois configurations différentes, où le défaut artificiel en teflon, qui est positionné à mi-épaisseur des D.P.E se situe entre des plis de (  $0^\circ / 0^\circ$  ), (  $0^\circ / 90^\circ$  ) et (  $90^\circ / 90^\circ$  ).

On notera, par ailleurs, les différentes longueurs des défauts qui sont au nombre de cinq par configuration.

L'approche expérimentale s'est basée sur des moyens techniques tels que : l'émission acoustique, l'extensométrie, l'observation des faciés de rupture au microscope électronique à balayage, afin de mieux cerner la notion d'amorçage et de propagation d'une fissure, comprendre les mécanismes d'endommagement en tête de fissure. La technique de la courbe " R " nous renseignera sur l'évolution de l'énergie de rupture au cours de la croissance de la fissure.

#### 5.1- Présentation du matériau :

##### 5.1.1- Constituants et provenance des éprouvettes :

Le matériau composite stratifié utilisé dans cette étude se compose d'une matrice organique de type epoxy : M10 et d'éléments de renfort sous forme de fibres unidirectionnelles de carbone T300.

L'ensemble des éprouvettes est prélevé sur trois ( 3 ) plaques composites présentant des séquences de stratification

différentes, dans lesquelles sont placés à mi-épaisseur, lors de la mise en oeuvre des défauts artificiels en téflon de 110 mm de largeur. Ces éprouvettes sont obtenues après plusieurs découpes de manière à avoir des longueurs de défauts initiales différentes, telles que décrites par la figure -5.1-

#### 5.1.2-Conditions à respecter lors de la réalisation des D.P.E :

L'utilisation des D.P.E, comme précisé dans le chapitre 4 est très répandue. Néanmoins, certaines conditions doivent-être respectées lors de la stratification pour obtenir uniquement le mode I pendant l'essai de délaminage. Les équations fondamentales d'un stratifié sont données par les relations (2.45) :

Les deux bras de la D.P.E ( FIG-5.2- ), lors de l'essai d'ouverture sont sollicités en flexion.

Donc :

$$\left\{ M \right\} = [ B ] \left\{ e^o \right\} + [ D ] \left\{ k \right\} \quad (5.1)$$

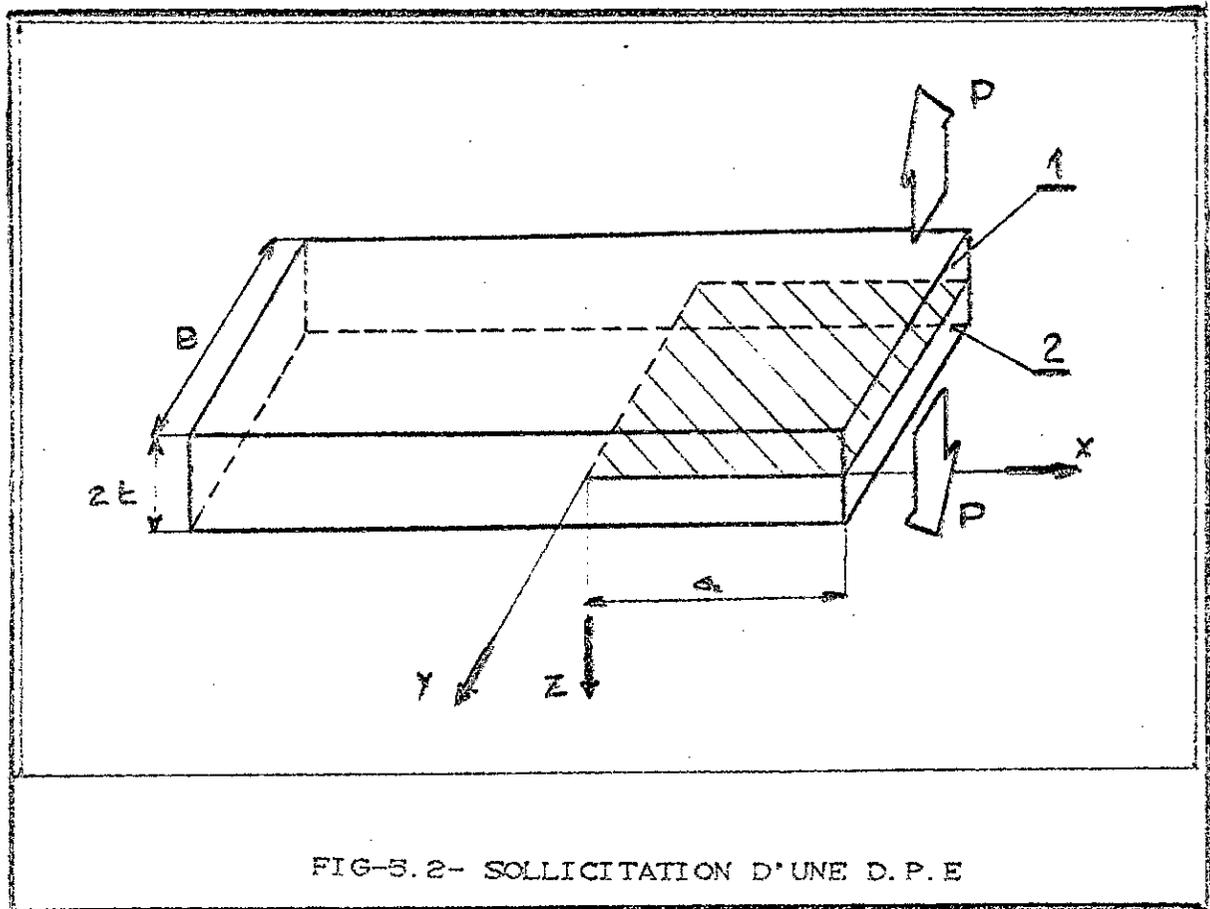
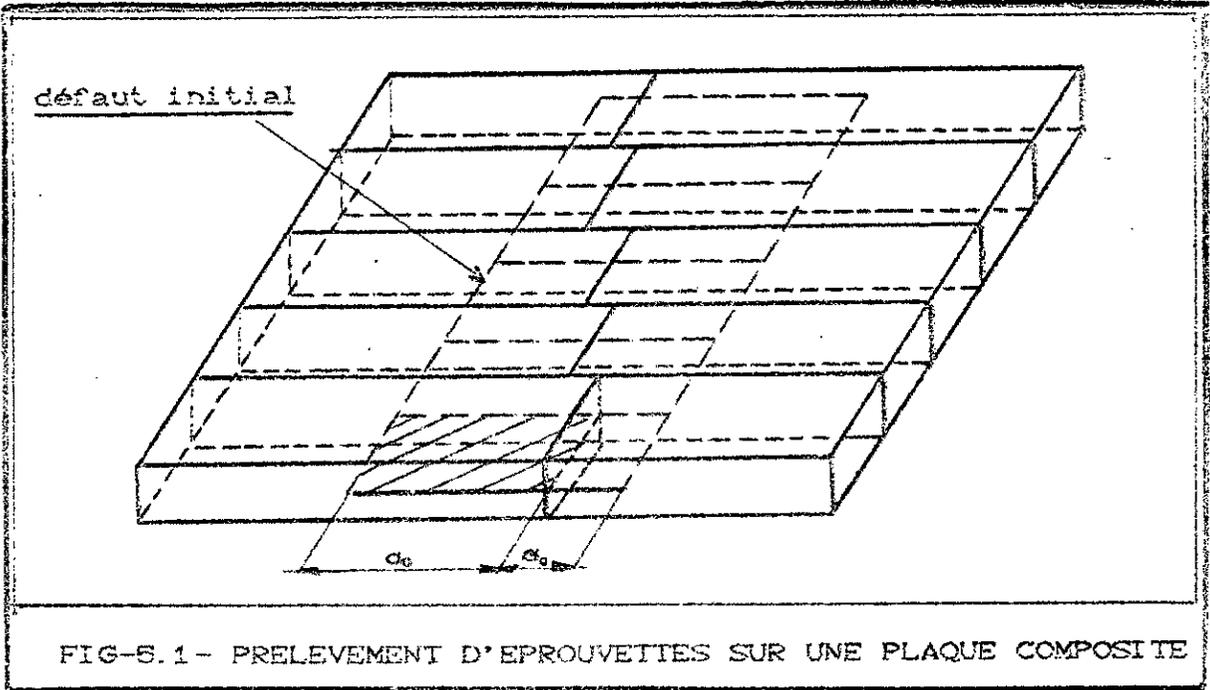
D'autre part, le comportement mécanique de part et d'autre du plan moyen ( où est incrusté le défaut artificiel ) doit-être le même, ce qui exige :

$$[ B ]_1 = [ B ]_2$$

et

$$[ D ]_1 = [ D ]_2$$

Le mode I de rupture est, par définition, caractérisé par le déplacement perpendiculaire des surfaces de la fissure l'une par rapport à l'autre [8] ; Ainsi pour éviter que tout autre mode de rupture n'apparaisse lors de l'essai, en particulier l'apparition du vrillage et dans le but d'éliminer l'effet



de couplage en flexion. Les bras de la D.P.E doivent-être des stratifiés symétriques, ce qui annule la matrice [ B ]. On dit alors que le stratifié a le comportement en flexion.

L'équation (5.1) devient donc :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & S_Y M & D_{26} \\ & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

et sachant que le moment s'exerçant sur les bras de la D.P.E, dans le cas du mode I, c'est le moment de flexion  $M_x$  ( cf 2.2.2 ), il s'en suit :

$$M_x = D_{11} k_x + D_{12} k_y + D_{16} k_{xy} \quad (5.3)$$

\* Pour éviter une torsion  $k_{xy}$  ( vrillage ), le terme  $D_{16}$  doit-être nul ou à la limite le plus petit possible. Cette condition étant vérifiée puisque les éprouvettes sont constituées uniquement de couches unidirectionnelles à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  (  $\Rightarrow D_{16} = 0$  ).

\* La courbure  $k_y$  est d'autant plus importante que le terme  $D_{12}$  correspondant est important, ce qui exige de minimiser le plus possible ce terme en question.

En définitif, l'équation fondamentale régissant le comportement des stratifiés 1 et 2 ( bras de la D.P.E ) lors de l'essai de délaminage en mode I, est donnée par :

$$M_x = D_{11} k_x + D_{12} k_y \quad (5.4)$$

avec :  $D_{12}$  petit devant  $D_{11}$

## 5.2- Description du dispositif expérimental et d'exploitation des résultats :

### 5.2.1- Moyens de sollicitation en mode I :

Les essais d'ouverture des éprouvettes D.P.E ont été

réalisé sur une machine de traction-compression de type INSTRON modèle 1186 ( FIG-5.3- ), avec une vitesse transverse ( constante pendant l'essai ) de 2 mm / mn.

On notera au passage la variété de vitesses de déplacement de la traverse mobile, proposée par ce genre de machine ( de 0.02 mm/mn à 500 mm/mn ).

Un dispositif de sollicitation d'ouverture ( talons ) est collé par utilisation de l'araldite à l'extrémité des lèvres de la D.P.E ( FIG-5.4- ), complétant ainsi le montage de l'essai de mode I sur la machine ( FIG-5.5- ).

La charge est transmise par des goupilles qui permettent une libre rotation des talons pendant l'essai ( FIG-5.6- ).

#### 5.2.2- Chaîne d'émission acoustique ( E.A ) ( FIG-5.6- ) :

On définit une E.A par une libération d'ondes de contrainte émises dans les matériaux lors des processus d'endommagement irréversibles [11].

Ces ondes sont détectées par un capteur de type piézoélectrique qui est en contact avec la D.P.E, comme le montre la figure -5.7-. Cette émission étant très sensible aux instabilités locales ( microfissuration , permet la détection de l'amorçage et de la propagation d'une fissure, grâce à la chaîne d'émission acoustique ( FIG-5.7- ).

La méthode d'analyse consiste à comptabiliser les signaux d'amplitude supérieure à un seuil fixé à l'avance. Celui-ci est choisi de façon à définir le meilleur compromis entre, d'une part éliminer les bruits parasites ( bruits des machines environnantes entre autres ... ) et d'autre part éviter d'ignorer les signaux de faible amplitude qui, dans certains cas, proviennent d'un endommagement du matériau.

L'isolement de l'éprouvette lors de l'essai, l'utilisation de filtres dans la chaîne d'E.A et le choix d'un seuil d'amplitude assez faible contribuent à un meilleur procédé d'analyse.

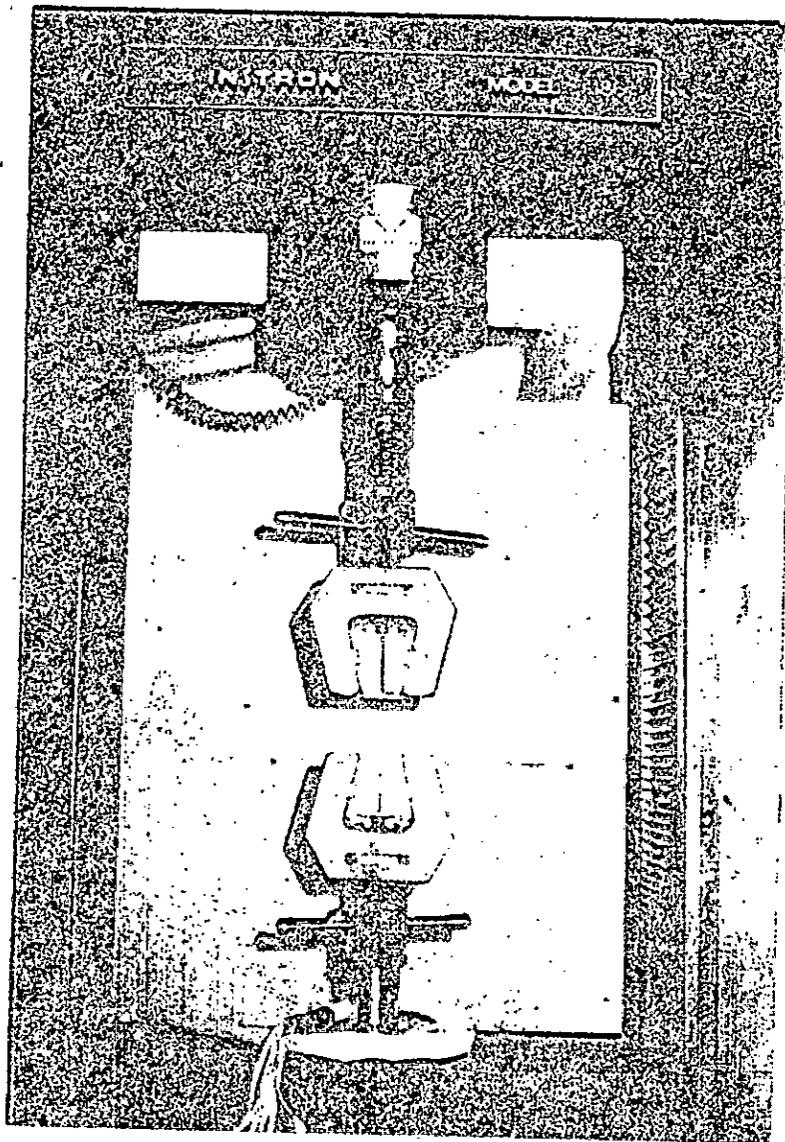


FIG-5.3- MACHINE DE TRACTION - COMPRESSION

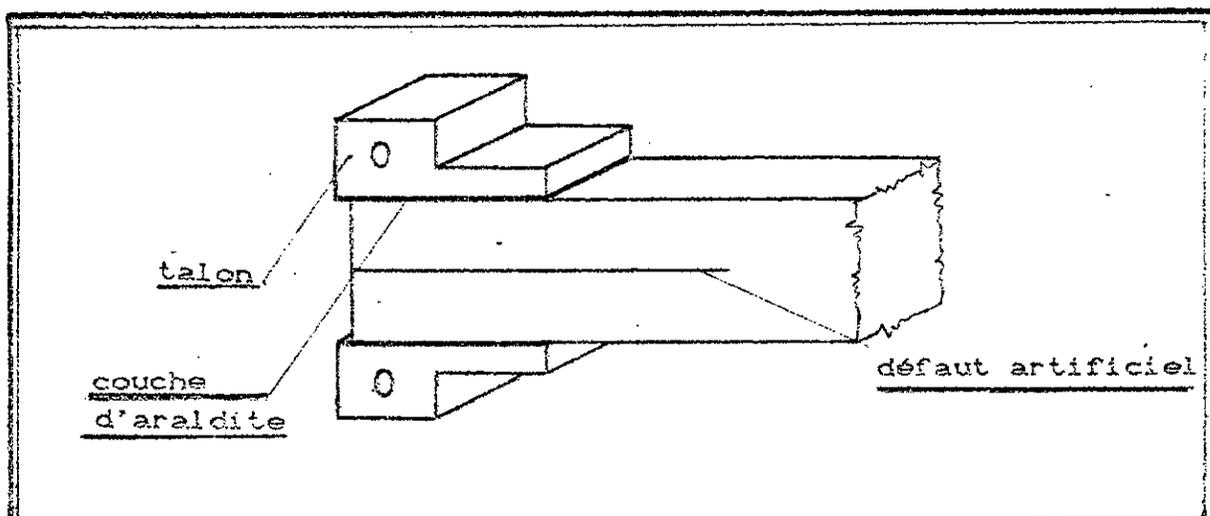


FIG-5.4- EMPLACEMENT DES TALONS ( 2 ) SUR LA D.P.E

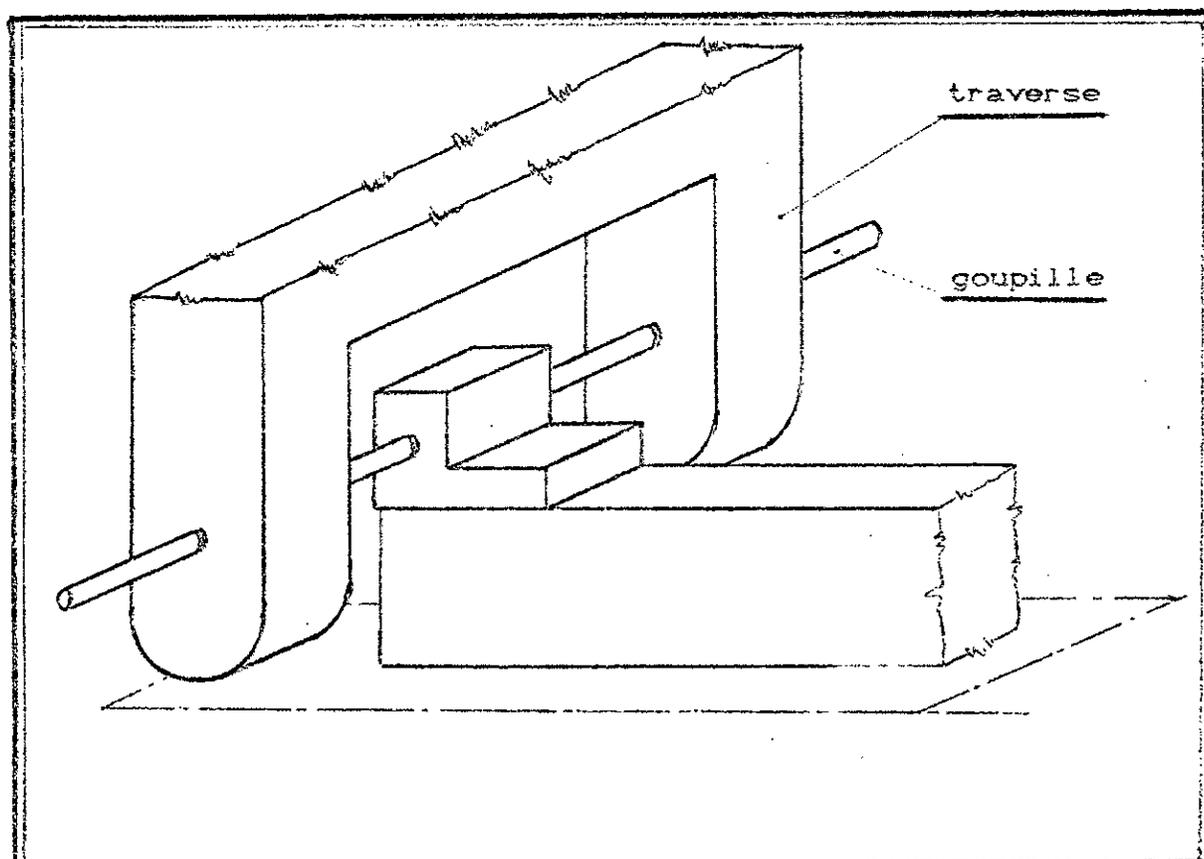


FIG-5.5- MONTAGE DE LA D.P.E SUR LA MACHINE

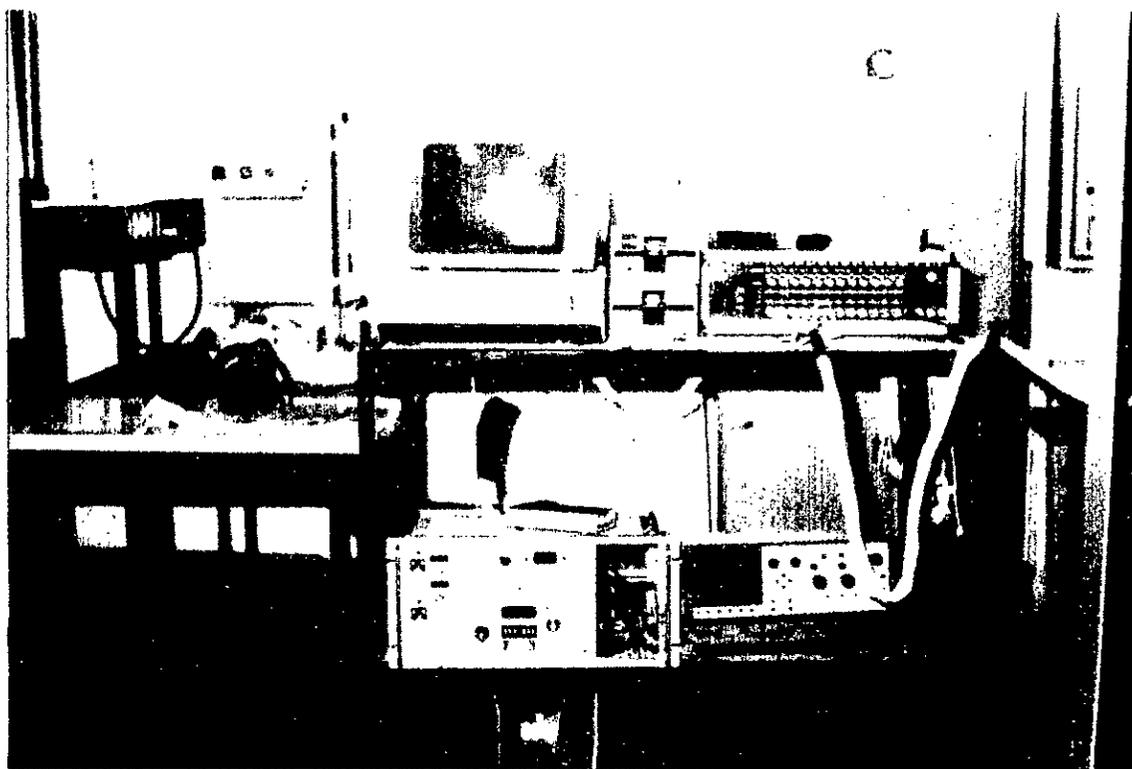


FIG-5.6- CHAINE D'E. A ET SYSTEME D'ACQUISITION

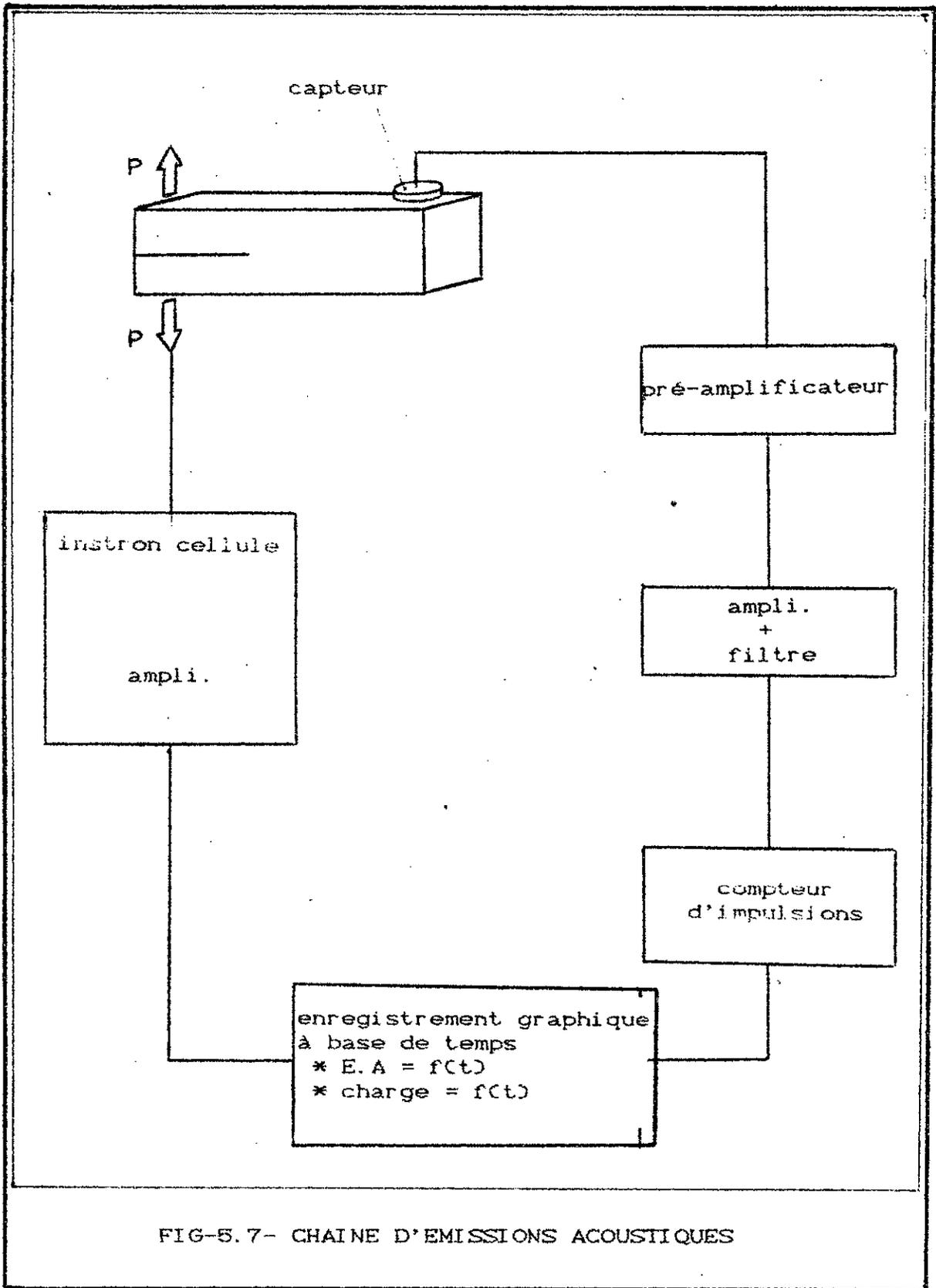


FIG-5.7- CHAINE D'EMISSIONS ACOUSTIQUES

L'inhomogénéité et l'anisotropie du matériau influencent les mécanismes de rupture des composites. Ainsi, les sources d'E.A sont diverses et se résument par :

- rupture et microfissuration de la matrice ;
- rupture des fibres ;
- rupture des interfaces fibres-matrice ;
- rupture des interfaces entre couches.

## 5.2- Technique expérimentale et exploitation des résultats :

### 5.2.1- Instrumentation des éprouvettes :

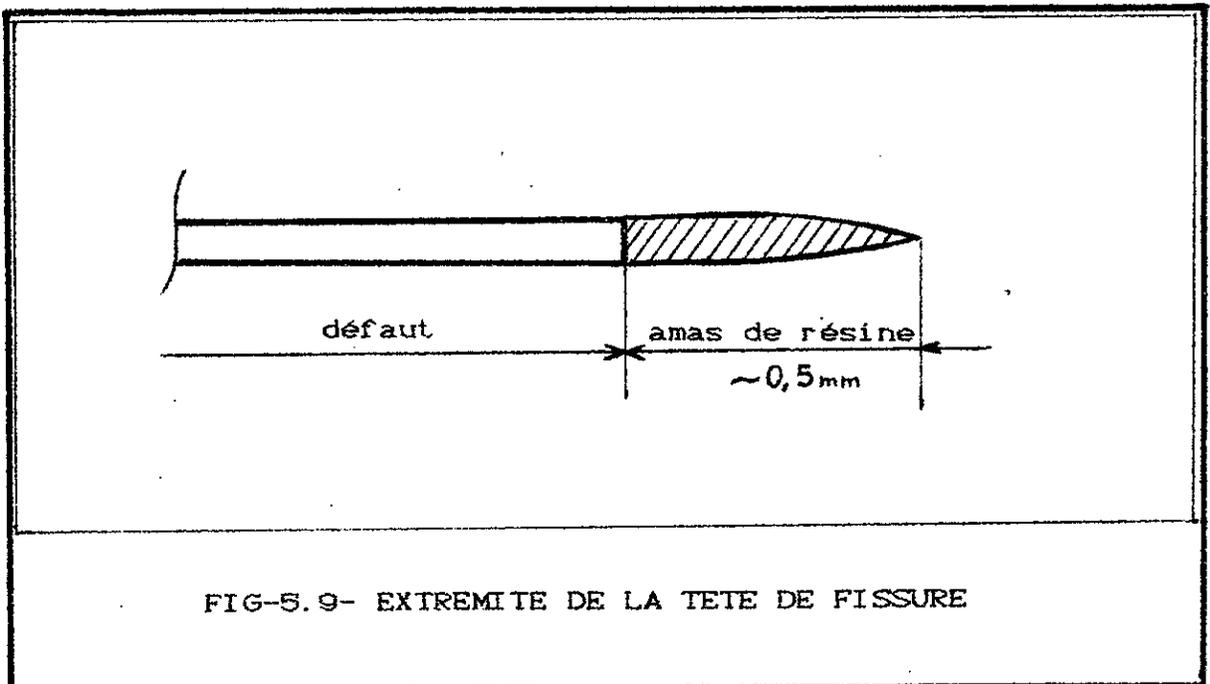
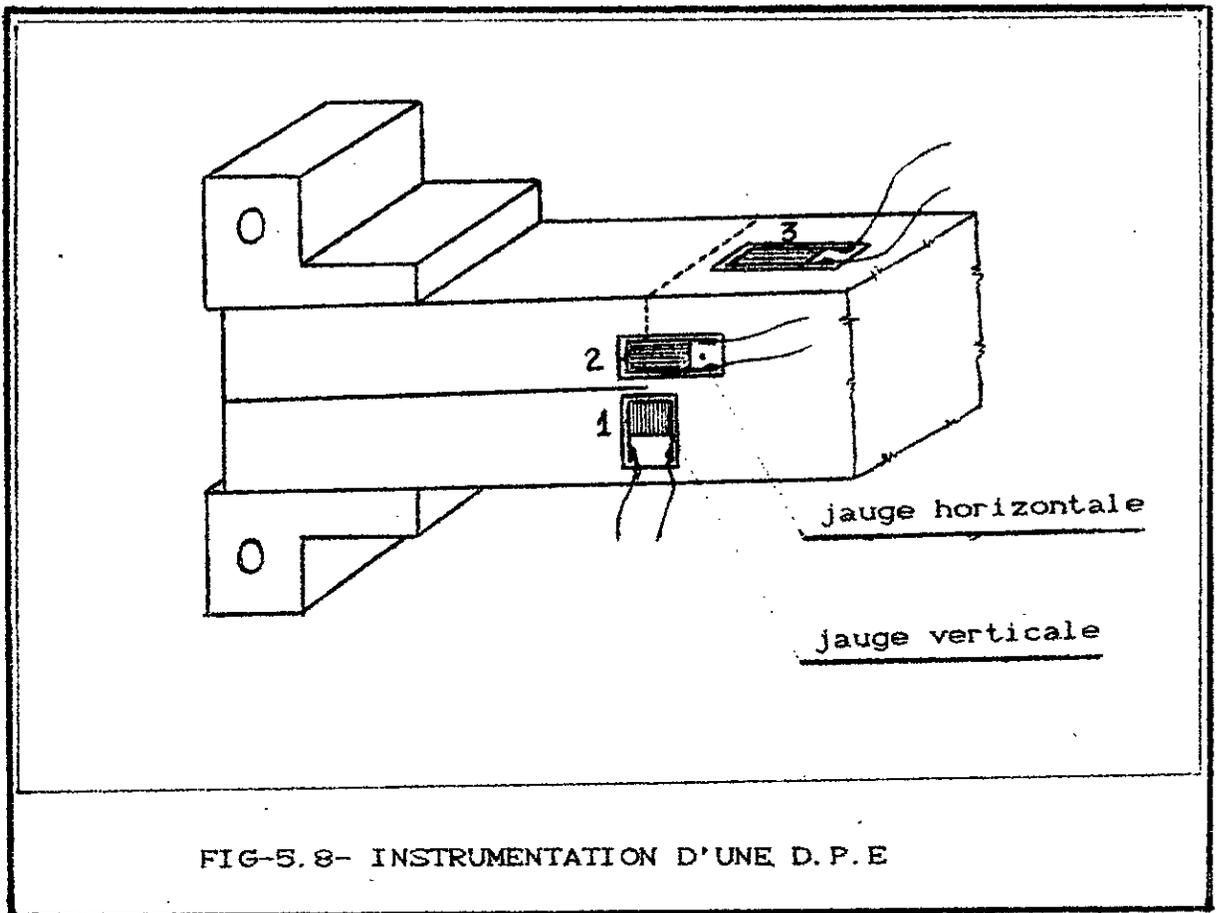
Les éprouvettes utilisées sont de type D.P.E ( cf. chapitre 4 ) vue leurs aptitudes à caractériser le délaminage en mode d'ouverture.

Une quinzaine d'éprouvettes ont été testées ( cinq par configuration ) de dimension :  $L \times 20 \times 6.5 \text{ mm}^3$  ; Les longueurs  $L$  des D.P.E étant différentes ( cf.paragraphe 5.1.1 ).

Le découpage des éprouvettes, comme le montre la figure -5.1-, a permis l'obtention de plusieurs longueurs du défaut initial (  $a_0$  (mm) = 30, 52, 65, 75, 75 ). L'utilisation de la technique d'extensométrie, par le collage approprié de jauges de déformation au voisinage de la tête de fissure, permet en collaboration avec les informations de la chaîne d'E.A, de détecter l'amorçage de la fissure et suivre l'évolution de celle-ci avec les différentes étapes d'endommagement.

Le comportement au voisinage de l'extrémité de la tête de fissure a fait l'objet d'une instrumentation " complète ", tel que représenter sur la figure -5.8-. Les jauges de déformation placées sur l'une des surfaces de la D.P.E

( jauge n° 3 ) sont des jauges de 2 mm et 5 mm, alors que les jauges au niveau immédiat de la tête de fissure ( n° 1 et n° 2 ) sont des jauges de 1 mm, 1.5 mm et 2 mm. Ces deux dernières doivent être collées par utilisation d'un



microscope optique ( type : WILD M8 HEERBRUGG grossissant jusqu'à 50 fois ) afin de situer avec exactitude leurs positions par rapport à l'extrémité de la tête de fissure.

Bien que les défauts artificiels soient parfaitement visibles ( sauf pour le cas (0°/ 90°) grâce à ce procédé, l'extrémité de la tête de fissure est difficilement reconnaissable pour les configurations (0°/ 0°) et (0°/90°) à cause de l'amas de résine qui est à la tête de fissure ( FIG-5.9- cas du [ 0°/ 0° ] ).

L'étude des réponses des jauges verticale ( n° 1 ) et horizontale ( n° 2 ) associées à celle de la déformation de la jauge n° 3, permet en liaison avec les courbes de charge et du taux d'émission acoustique de contribuer à une meilleure compréhension des phénomènes de délaminage.

### 5.3.2- Procédures suivies lors du travail expérimental :

#### 5.3.2.1- Phase essai :

Le montage de l'éprouvette dans la machine de traction-compression étant réalisé, on effectue ensuite la connection des jauges de déformation avec le système d'acquisition ( FIG-5.6 ) à l'aide de relais ( soudés auparavant sur les éprouvettes ). Un micro-ordinateur de marque Apple 2e ( FIG-5.6- ), interfacé à ce système, permet l'introduction des paramètres d'essai et la sauvegarde des résultats des mesures sur une disquette ( qui sera exploitée en phase finale de tracé des courbes ). Il est à noter que, simultanément avec le déroulement de l'essai, un enregistreur graphique ( FIG-5.10- ) à base de temps ( type : IFELEC 5000 ) exécute en même temps les tracés des courbes : charge-temps (dep) et taux d'émission acoustique-temps (dep).

#### 5.3.2.2- Phase exploitation des résultats :

Le tracé des courbes a été réalisé sur une table traçante ( type : WATANABE MP 1000 ). Ces courbes nous

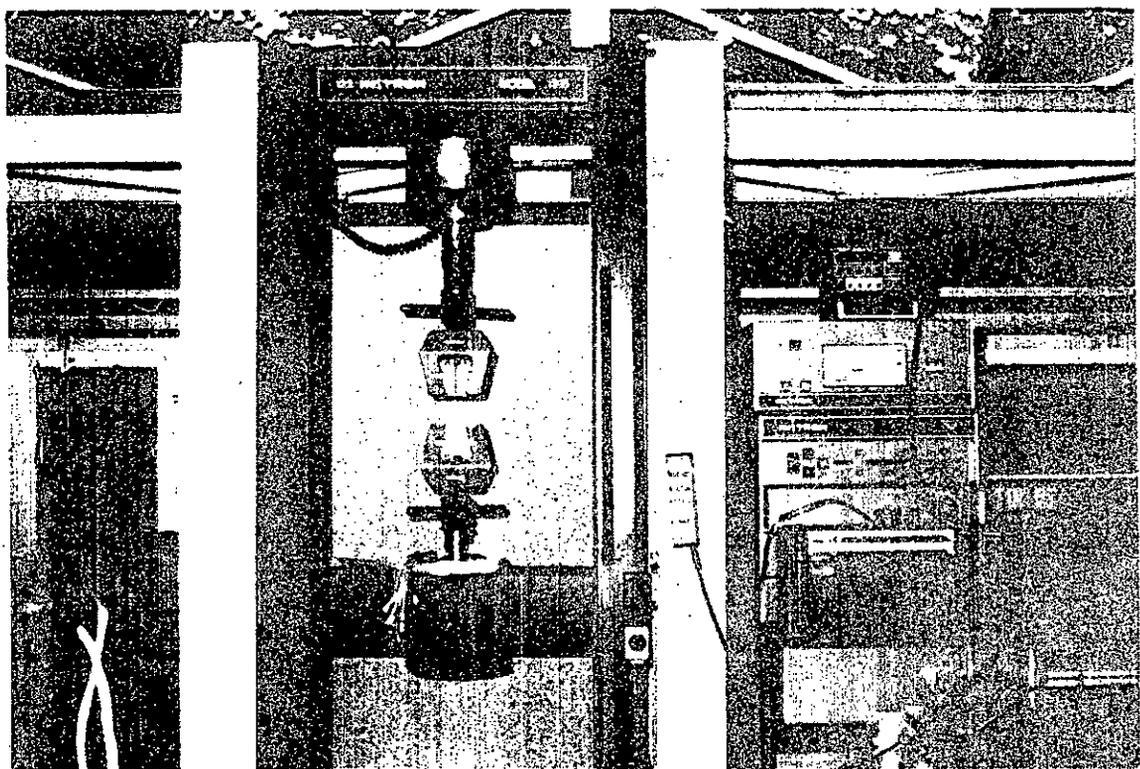


FIG-5.10- MACHINE DE TRACTION-COMPRESSION + ENREGISTREUR  
GRAPHIQUE A BASE DE TEMPS

permettent la connaissance de l'évolution du champ de déformation avant et après amorçage, au voisinage de l'extrémité de la tête de fissure. Elles nous informeront, par ailleurs, sur les points d'amorçage et par suite sur les valeurs des couples charge-déplacement ( P- $\delta$  ), avec lesquels la détermination des tenacités  $G_{Ic}$  du matériau pour les trois configurations, est possible.

( Il est à noter que la détermination des énergies de délaminage (  $G_{Ic}$  ) et le tracé des courbes de résistance à la fissuration ( courbes R ), ont été exécutées par l'intermédiaire d'un Macintosh S.E.

Quelques échantillons découpés à la scie circulaire diamantée ( type: SOMEREC ), sur certaines éprouvettes, après rupture, ont été examinés au microscope électronique à balayage ( FIG-5.11- ) de type CAMBRIDGE. Ces échantillons ont subi au préalable une métallisation des faciés de rupture à examiner grâce à un appareil comprenant une feuille d'or qui, par pulvérisation cathodique, procède à la fixation de la métallisation des faciés ( l'épaisseur de métallisation est de l'ordre de 80 à 100 Å ).

L'étude, la compréhension et l'interprétation des différentes courbes obtenues associées à l'observation des faciés de rupture, permet l'explication du phénomène de rupture par délaminage.

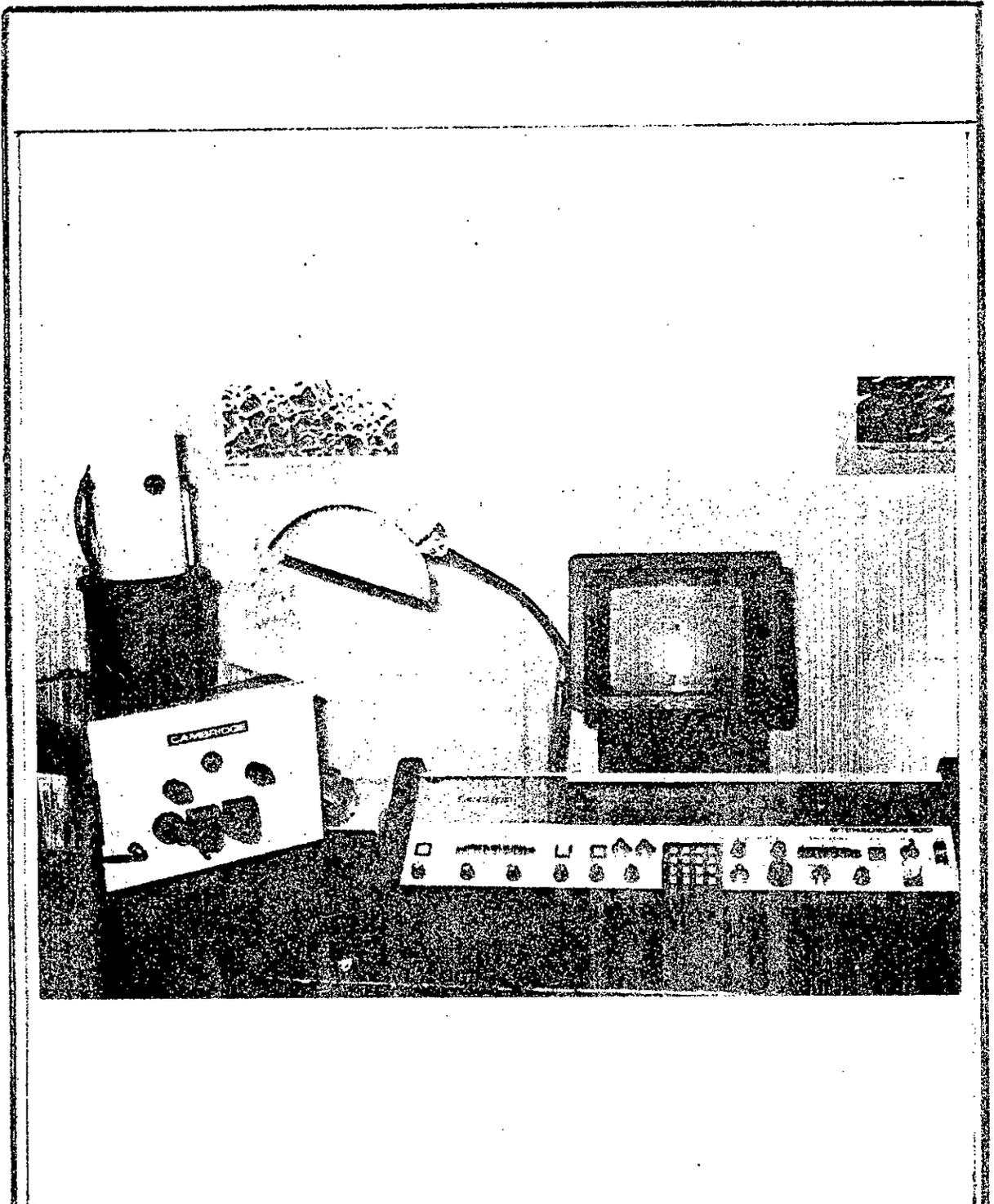


FIG-5.11 - MICROSCOPE ELECTRONIQUE A BALAYAGE

## CHAPITRE 6

### RESULTATS EXPERIMENTAUX ET DISCUSSION

#### 2.1- Caractéristiques mécaniques du matériau ( C/E ) :

La détermination des caractéristiques mécaniques appelées usuellement constantes d'ingénieur du matériau, nécessite la réalisation d'essais mécaniques tels que les essais de traction et de torsion [15].

Un pendule de torsion permet l'exécution de l'essai de torsion.

##### 6.1.1- Essais de traction :

Les éprouvettes d'essais de traction se présentent sous deux formes différentes ; des éprouvettes dont les fibres sont orientées à  $0^\circ$  ( FIG-6.1- ) ( traction à  $0^\circ$  : sens des fibres parallèle à la direction de sollicitations ) et des éprouvettes à  $90^\circ$  ( FIG-6.2- ).

L'essai de traction réalisé sur le premier type d'éprouvettes permet de mesurer  $E_{11}$  ; le module d'élasticité longitudinal ( module de YOUNG dans le sens des fibres ) ainsi que  $\nu_{12}$  ; le coefficient de poisson. L'essai de traction sur les éprouvettes à  $90^\circ$  ( traction à  $90^\circ$  : sens des fibres perpendiculaire à la direction des sollicitations ) permet de mesurer  $E_{22}$  ; le module d'élasticité transversal.

La pente de la courbe contrainte-déformation (  $\sigma_1 - \epsilon_1$  ) ( partie linéaire de la courbe ) nous renseignera sur le module d'élasticité longitudinal (  $E_{11}$  ) ( FIG-6.3- ) alors que le coefficient de poisson  $\nu_{12}$  est obtenu en faisant le rapport des déformations  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_1$  correspondantes à la même charge ( table 4 ). Les deux relations proviennent des équations de comportement élastique pour un chargement

$$\text{particulier } \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

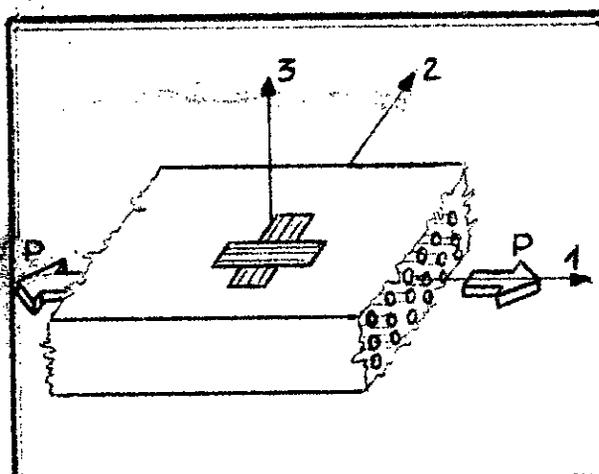


FIG-6.1- EPROUVETTE A 0°

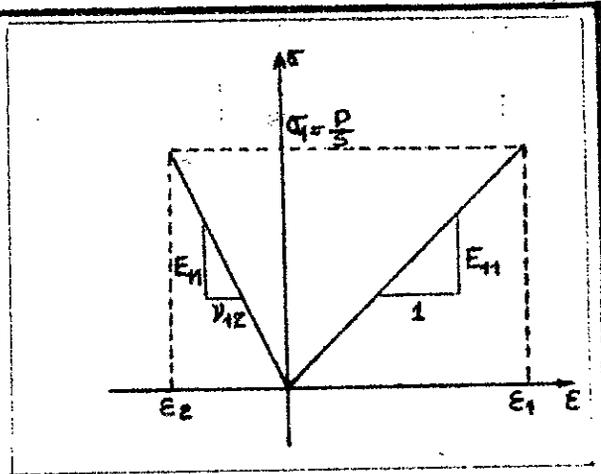


FIG-6.3.

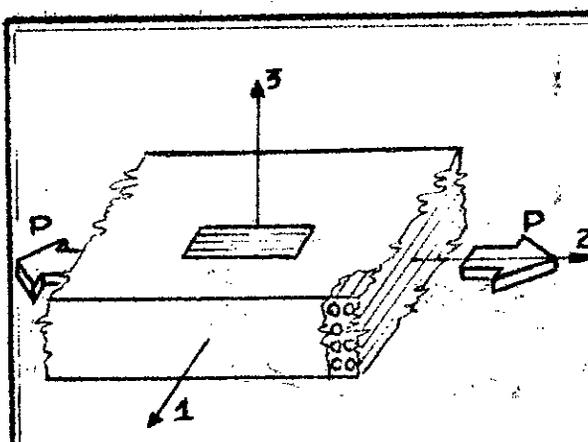


FIG-6.2- EPROUVETTE A 90°

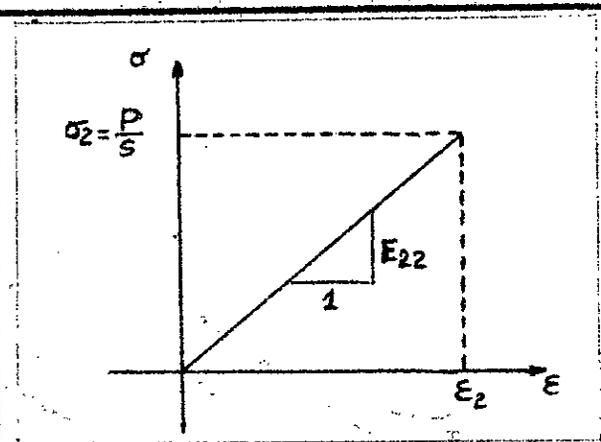


FIG-6.4-

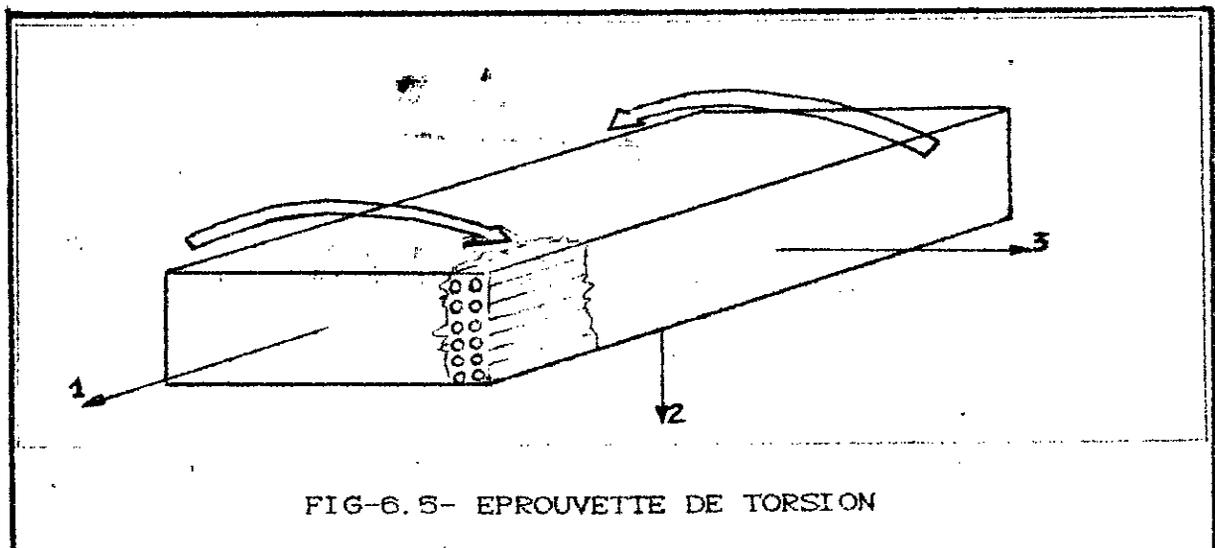


FIG-6.5- EPROUVETTE DE TORSION

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{1}{E_{11}} \sigma_1 \quad \Rightarrow \quad E_{11} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad (6.2)$$

d'autre part :

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \sigma_1 = -\nu_{12} \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (6.3)$$

de même un chargement  $\begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$  nous donnerait :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{1}{E_{22}} \sigma_2$$

$$\Rightarrow \quad E_{22} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \quad (6.5)$$

L'équation (6.5) nous suggère de tirer  $E_{22}$  ( table 4 ) à partir de la courbe contrainte-déformation (  $\sigma_2 - \varepsilon_2$  ) ( FIG-6.4- )

### 6.1.2- Essai de torsion :

Un essai de torsion sur des éprouvettes à 0° ( FIG-6.5 ) permet la détermination du module de cisaillement :  $G_{12}$  ( table 4 ), par utilisation de la relation suivante [14] :

$$G_{12} = \frac{M \cdot L}{B \cdot h^3 \cdot \theta \cdot \beta(c)} \quad (6.6)$$

où : M - couple de torsion  
 L - longueur éprouvette  
 B - largeur éprouvette  
 h - épaisseur éprouvette  
 $\theta$  - angle de torsion ( relatif à chaque couple M )  
 $\beta(c)$  - paramètre d'anisotropie

avec :

$$\beta(c) = 32 \frac{c^2}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left[ 1 - \frac{2c}{n\pi} \operatorname{th} \left( \frac{n\pi}{2c} \right) \right] \quad (6.7)$$

et :

$$c = \frac{B}{h} \sqrt{\frac{G_{13}}{G_{12}}} \cong \frac{B}{h} \quad (6.8)$$

pour les matériaux composites unidirectionnels, la simplification suivante est généralement prise en compte :

$$G_{12} = G_{13}$$

$E_{11}$ ( GPa )	$E_{22}$ ( GPa )	$G_{12}$ ( GPa )	$\nu_{12}$
128.68	8.99	3.77	0.22

Table-4- Caractéristique mécanique du C/E

Les caractéristiques mécaniques des différentes configurations étudiées sont présentées dans la table-5-

	$E_x$ ( GPa )	$E_y$ ( GPa )	$G_{xy}$ ( GPa )	$\nu_{xy}$
(0°/0°)	123.68	8.99	3.77	0.22
(0°/90°)	85.73	47.37	3.77	0.04
(90°/90°)	95.30	37.78	3.77	0.05

Table-5- Caractéristiques mécaniques des éprouvettes

## 6.2- Analyse des courbes :

L'analyse primaire de ces courbes montre trois domaines distincts relatifs aux différents comportements du matériau lors de l'essai. Ces trois phases se répartissent comme suit

- 1- Déformation élastique ( zone OA ) ;
- 2- Microfissuration et amorçage de fissure ( zone AB ) ;
- 3- Propagation de délaminage ( zone BC ).

Les courbes de charge et réponses des jauges sont données par les figures (6.6) à (6.21).

### \* Domaine OA :

Cette zone est caractérisée par une partie linéaire des courbes de charge et de déformation, se traduisant par :

- La croissance de la charge ;
- La traction des jauges n°1 et n°2 (  $\epsilon_{1v}$  et  $\epsilon_{2h}$  augmentent en traction ) ;
- la compression de la jauge n°3 (  $\epsilon_3$  augmente en compression ).

Ce comportement des jauges traduit la présence d'un champs de déformation élastique en tête de fissure, expliquant ainsi l'absence de l'émission acoustique ( E.A ). Il est à noter par contre la présence de pics dispersés de l'E.A (FIG-6.6-, FIG-6.7- et FIG-6.8-) dûs probablement :

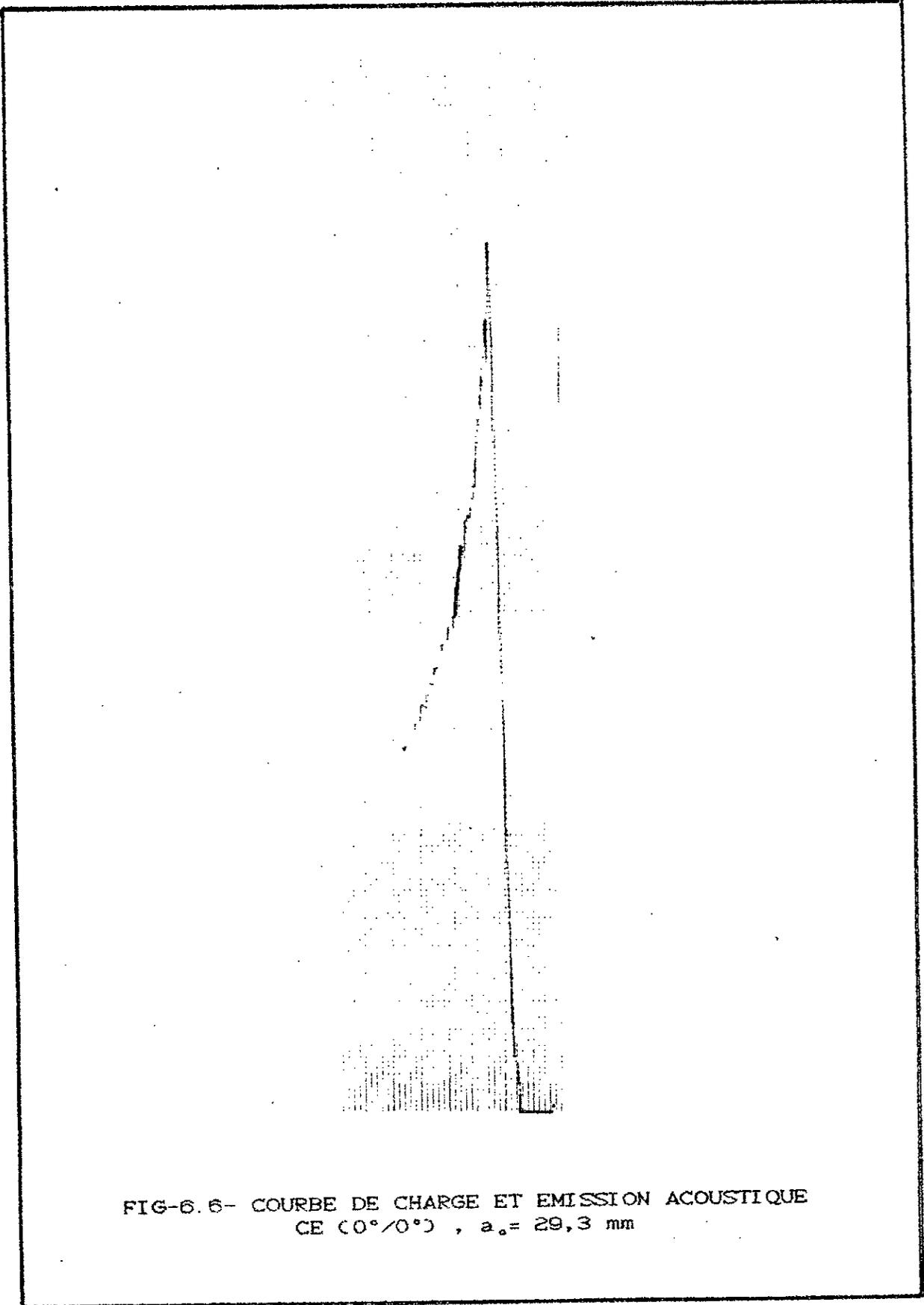


FIG-6.6- COURBE DE CHARGE ET EMISSION ACOUSTIQUE  
CE (0°/0°) , a<sub>0</sub> = 29,3 mm

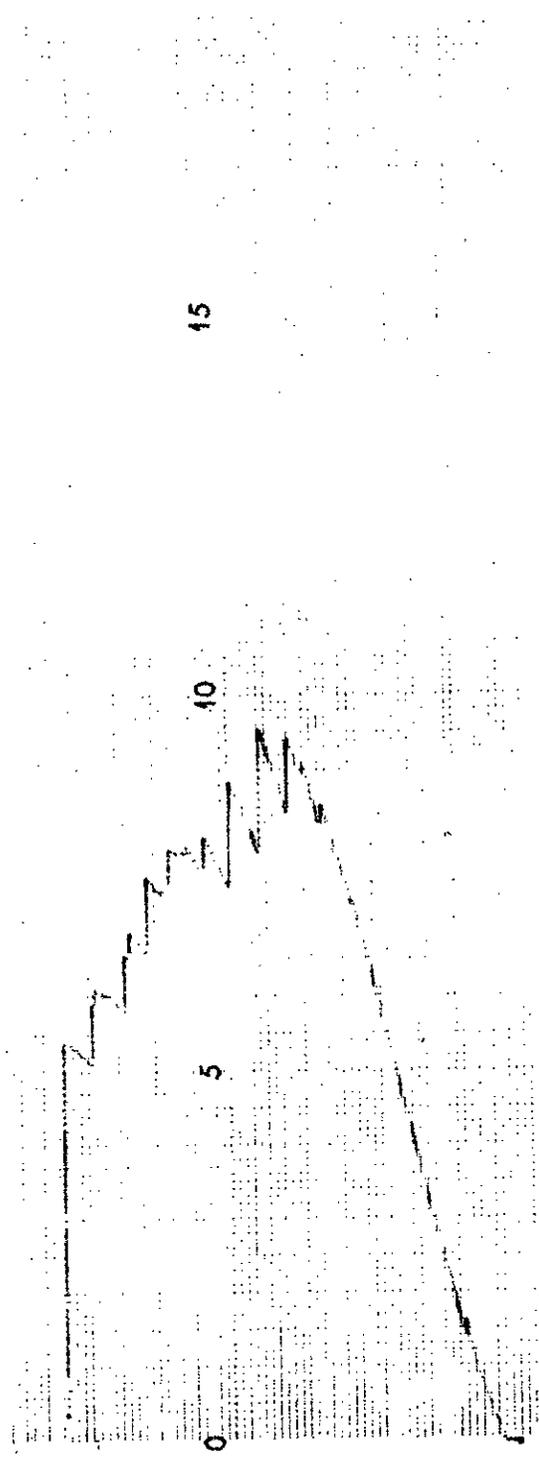


FIG-6.7- COURBE DE CHARGE ET EMISSION ACOUSTIQUE  
CE (0°/90°) , a<sub>0</sub> = 52 mm

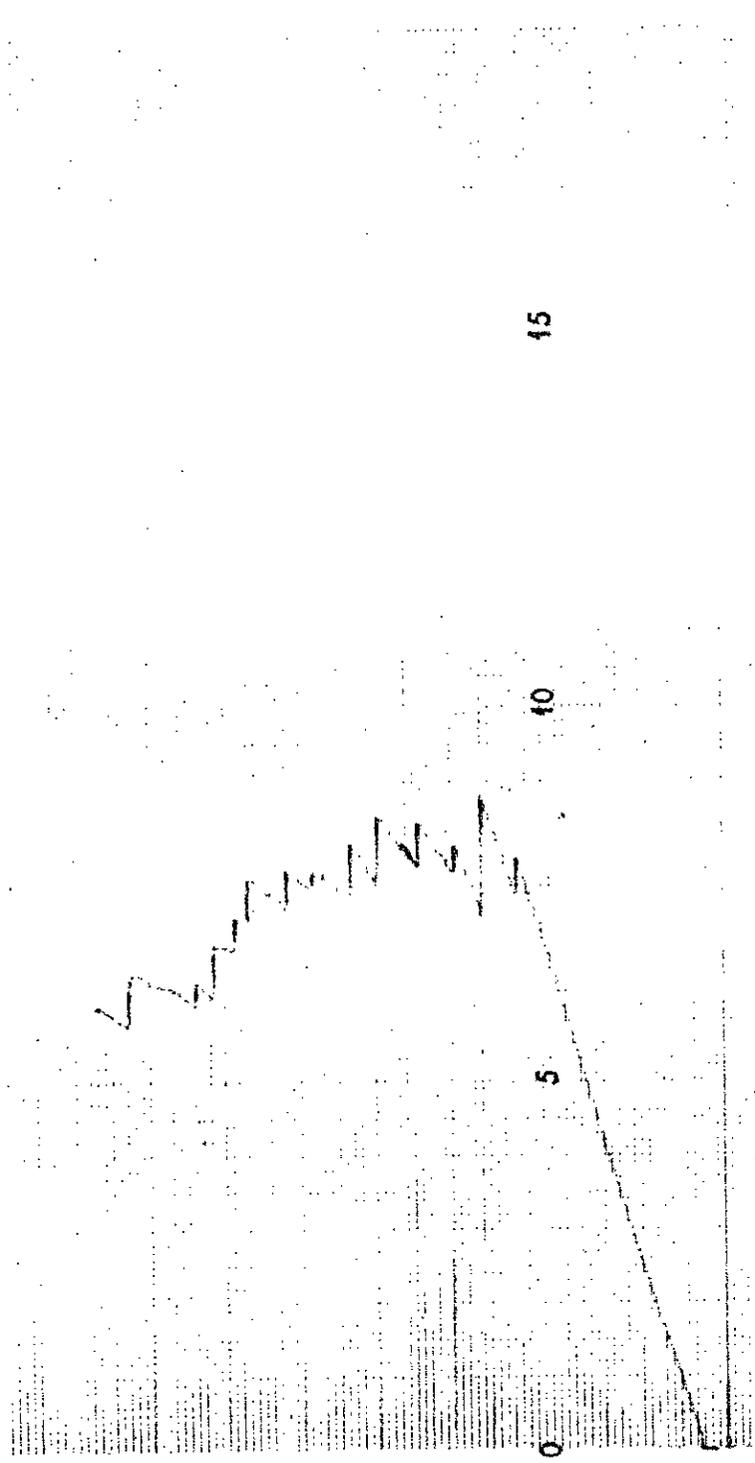


FIG-6.8- COURBE DE CHARGE ET EMISSION ACOUSTIQUE  
CE (90°/90°) ,  $a_s = 51,7$  mm

- A la colle sur les bords de l'éprouvette liant les deux brins de la DPE ; ( la présence de cette colle provient du collage des jauges de déformation et des talons )
- Au décollement du teflon de l'une des deux faces.

\* Domaine AB :

Cette partie est marquée par la fin de la linéarité des courbes avec naissance de pics continus de l'E.A ( à partir du point A\* pour la configuration (0°/ 0°) ), traduisant de ce fait, l'endommagement irréversible du matériau ( FIG-6.6- FIG-6.7- et FIG-6.8- ).

Il est à noter qu'une analyse des courbes en fonction des différentes configurations fait apparaître une décroissance de la charge dans le cas du (0°/ 0°), alors qu'une augmentation de la charge est constatée dans les autres configurations. Ceci s'explique par la présence des plis à 90° dans le plan de propagation qui se présentent comme un obstacle à la propagation de la fissure.

Cette partie est caractérisée dans le cas des configurations (90°/ 90°), (0°/ 90°) et (90°/ 0°) par :

- Une augmentation de la charge ;
- Une augmentation de la déformation  $\epsilon_{2h}$  ;
- Une diminution de la déformation  $\epsilon_{1v}$  ;
- une croissance en compression de la déformation  $\epsilon_g$ .

L'augmentation des déformations  $\epsilon_{2h}$  et  $\epsilon_g$  et le relâchement de la jauge n°1 correspondant à la croissance de la charge à partir du point d'amorçage ( point A ) jusqu'au point de début du délaminage ( point B ) marqué par la première chute de la charge. Des microfissures induites au voisinage de la tête de fissure apparaissent dans la résine expliquant de ce fait le comportement des jauges de déformation.

Dans le cas de la configuration (0°/ 0°), cette partie se

divise en deux phases AA\* et A\*B.

La phase AA\* se caractérise par :

- Une augmentation de la charge ;
- Une augmentation des déformations  $\epsilon_{2h}$  et  $\epsilon_{1v}$  ;
- Une compression de la jauge n°3.

La croissance de la charge traduit une zone endommagée du type plastique. L'absence d'E.A montre que la décohésion n'est pas encore atteinte. Cette plastification étant localisée à l'interface fibre/matrice entraîne une zone endommagée parallèle aux fibres, expliquant ces allures.

En effet, si cet endommagement ( FIG -6.25- ) se caractérise par une zone plastifiée au voisinage de la fibre, l'étirement de cette zone entraîne selon une nouvelle pente une croissance importante de la déformation  $\epsilon_{1v}$ , ainsi que la déformation  $\epsilon_{2h}$  qui se traduit par une augmentation avec changement d'allure.

La phase A\*B se divise quant à elle en deux zones distinctes A\*A<sub>1</sub> et A<sub>1</sub>B différenciées par les comportements respectifs des jauges de déformation.

Dans la zone A\*A<sub>1</sub>, on relève :

- Une diminution de la charge ;
- Une traction des jauges n°1 et n°2 ;
- Une compression de la jauge n°3.

La décroissance de la charge peut être expliquée par l'apparition d'une zone fortement étirée ( FIG -6.26- ), mettant toutefois les jauges de déformation  $\epsilon_{1v}$  et  $\epsilon_{2h}$  continuellement en tension.

Il apparaît simultanément à ces étirements des microruptures ( FIG -6.26- ) sources d'E.A. Néanmoins la zone endommagée n'est pas en totale décohésion ce qui justifie l'allure croissante ( en compression ) de la jauge n°3.

La zone A<sub>1</sub>B est caractérisée par :

- Une diminution de la charge ;
- Un relachement des jauges N°1 et n°3 ;
- Une croissance de la déformation  $\epsilon_{2h}$ .

Le nombre de microruptures présentes dans la zone étirée au voisinage de la tête de fissure, augmente considérablement ce qui provoque des microfissurations dans la résine permettant ainsi une accélération de la déformation  $\epsilon_{2h}$  et un relachement brusque avec changement d'allure de la jauge n°1 ainsi que la jauge n°3.

\* Domaine BC :

On relève dans cette partie :

- La chute évidente de la charge ( accompagnée de temps à autre par la croissance de la charge pour les configurations (90°/90°), (0°/90°) et (90°/0°) ) ;
- La diminution de la déformation :  $\epsilon_{1v}$  ;
- La croissance de la déformation :  $\epsilon_{2h}$  ;
- Le relachement de la jauge N°3 ( entrecoupé, au même titre que la charge, par une reprise de son activité en compression ).

Le début de cette zone représente le déclanchement du processus de délaminage ( amorçage macroscopique ) confirmé par le comportement de la jauge n°3 et l'activité intense de l'E.A. La grande rigidité du carbone fait que celui-ci ait une très faible densité d'endommagement. En effet, il suffit pour cela d'un nombre restreint de microfissures pour que le processus de délaminage se déclanche. Les interfaces endommagées se libèrent mettant de plus en plus la zone en tête de fissure en situation de flexion ( domaine tendu : voir remarque ) ce qui se traduit par la croissance brusque de  $\epsilon_{2h}$  et la chute importante de  $\epsilon_{1v}$ . En effet, les microfissures induites au voisinage de la tête de fissure se

manifestent par un allongement rapide dans le sens longitudinal ce qui accélère la déformation  $\epsilon_{2h}$  et atténue la concentration de contrainte dans cette zone et par suite décharge la jauge n°1.

L'amorçage macroscopique nous révèle deux comportements distincts du matériau : le comportement du (0°/0°) et celui des configurations (90°/90°), (0°/90°) et (90°/0°).

Ce comportement du matériau pour le cas du (0°/0°) se manifeste par une chute franche de la charge qui libère toute l'énergie emmagasinée en tête de fissure ce qui permet à la fissure de se propager de façon continue "sans arrêt" jusqu'à la rupture finale ( on dit alors que la propagation de la fissure s'effectue d'une manière stable ). Ce comportement traduit la faible résistance au délaminage de cette configuration.

La propagation de la fissure dans le cas des configurations (90°/90°), (0°/90°) et (90°/0°) est marquée par l'augmentation "intermittante" de la charge après amorçage macroscopique. En effet, les plis à 90° présents dans le plan de propagation s'opposent à la propagation de délaminage. La charge chute à chaque fois que l'énergie accumulée en tête de fissure atteint une valeur suffisante pour propager le délaminage. Il est à noter que lors de l'essai sur ces types de configurations, des fibres ( par paquets ) restent liés aux deux faces de la DPE après avoir délaminé, formant ainsi des ponts de fibres qui contribuent dans la résistance à la propagation du délaminage. ( la propagation du délaminage dans ces configuration est dit instable )

Ce comportement traduit la bonne résistance de ces configurations au délaminage.

Remarques :

1- Les comportements des jauges n°1 et n°2 nous rappellent en fait, leurs comportements dans le cas simple d'un essai de flexion, ceci par compression de la jauge n°1 simultanément avec la traction de la jauge n°2 .

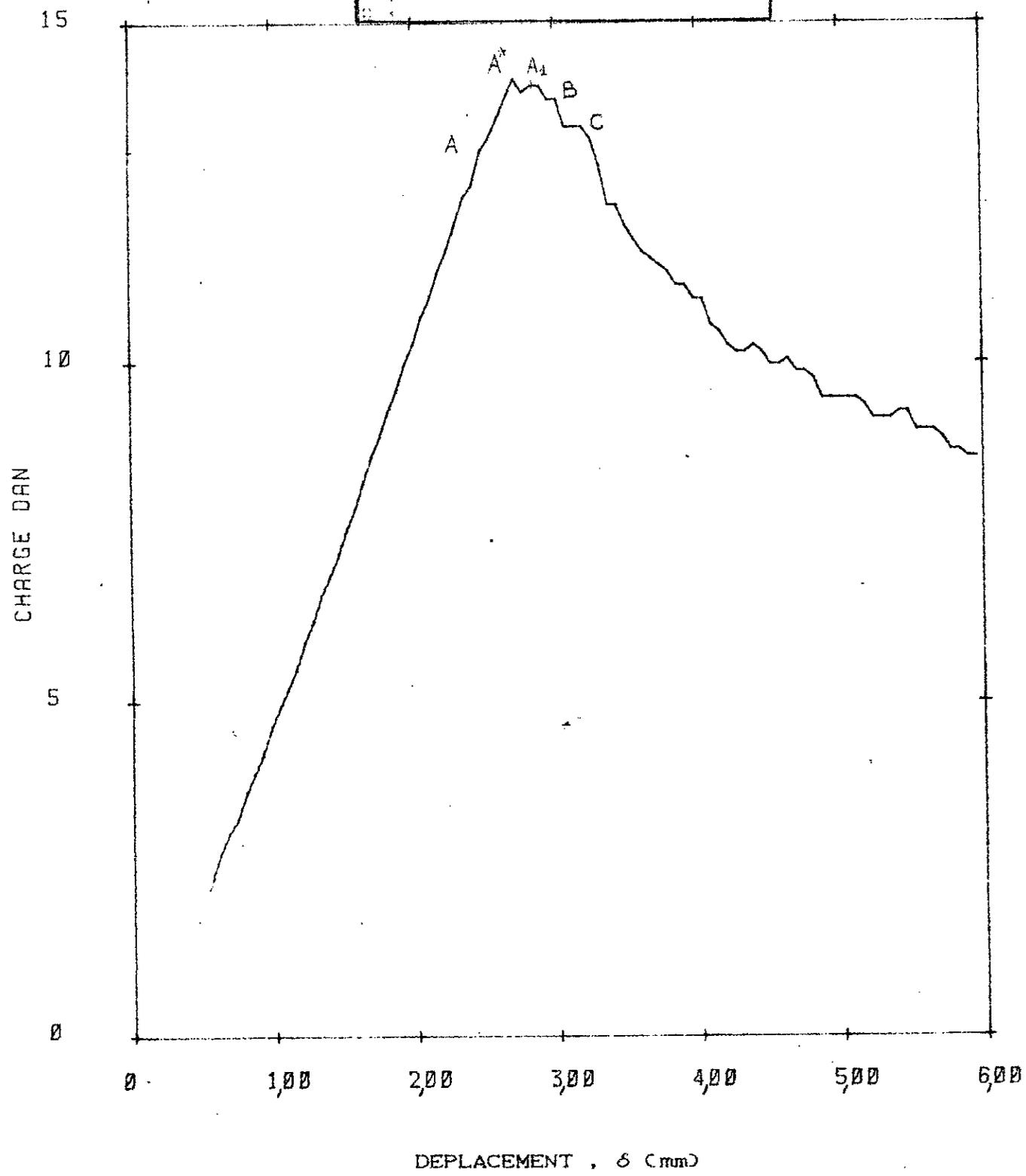
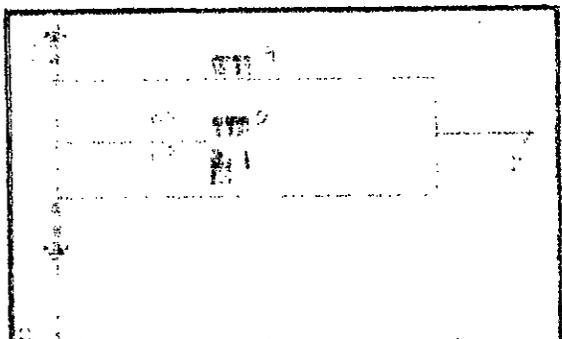


FIG-6.9- COURBE DE CHARGE ,  $a_0 = 51$ mm

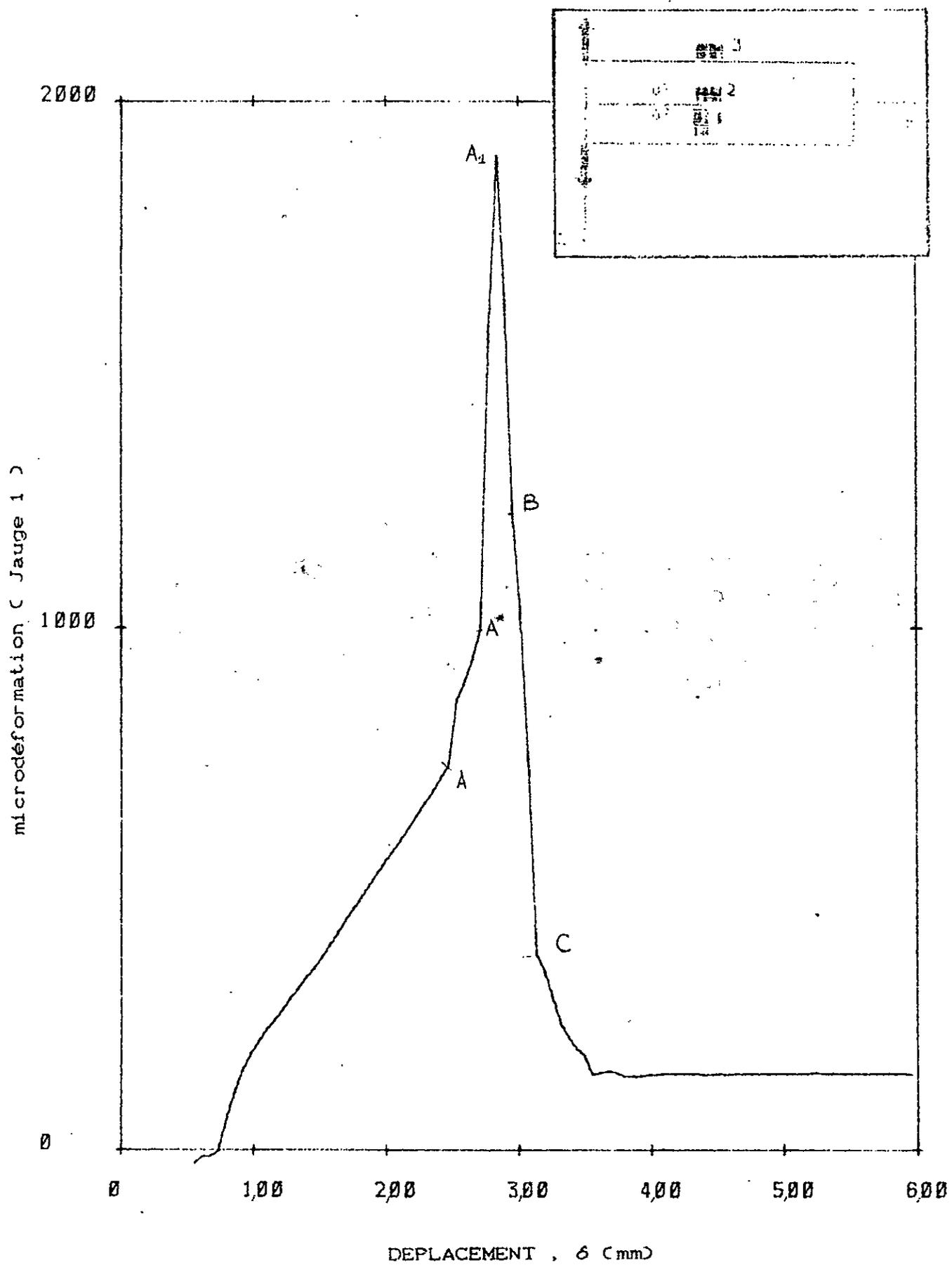


FIG-6.10- REPONSE DE LA JAUGE 1 ,  $a_0 = 51$  mm

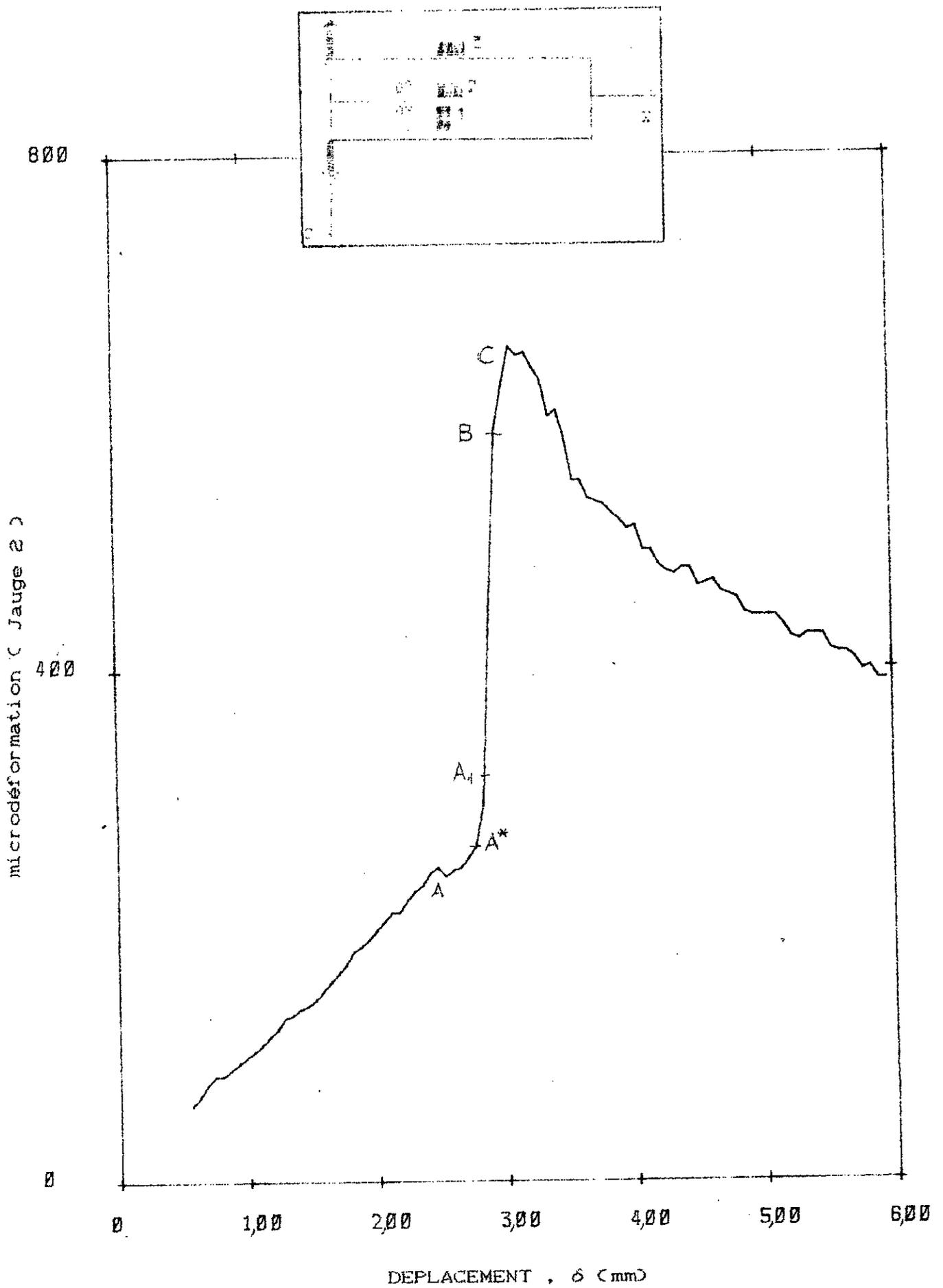


FIG-6.11- REponse DE LA JAUGE 2 .  $a_0 = 51\text{mm}$

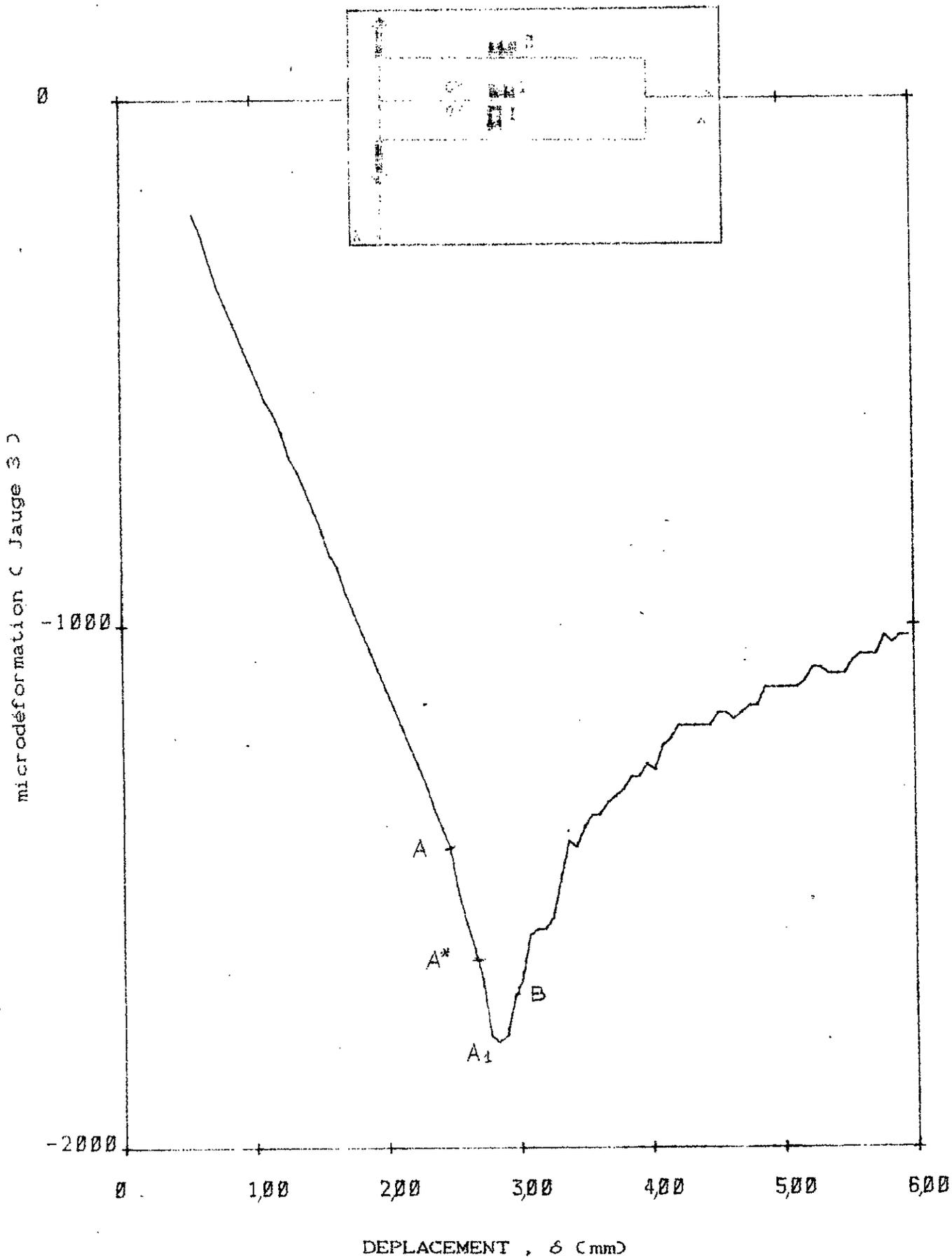


FIG-6.12- REPONSE DE LA JAUGE 3 ,  $a_0 = 51$  mm

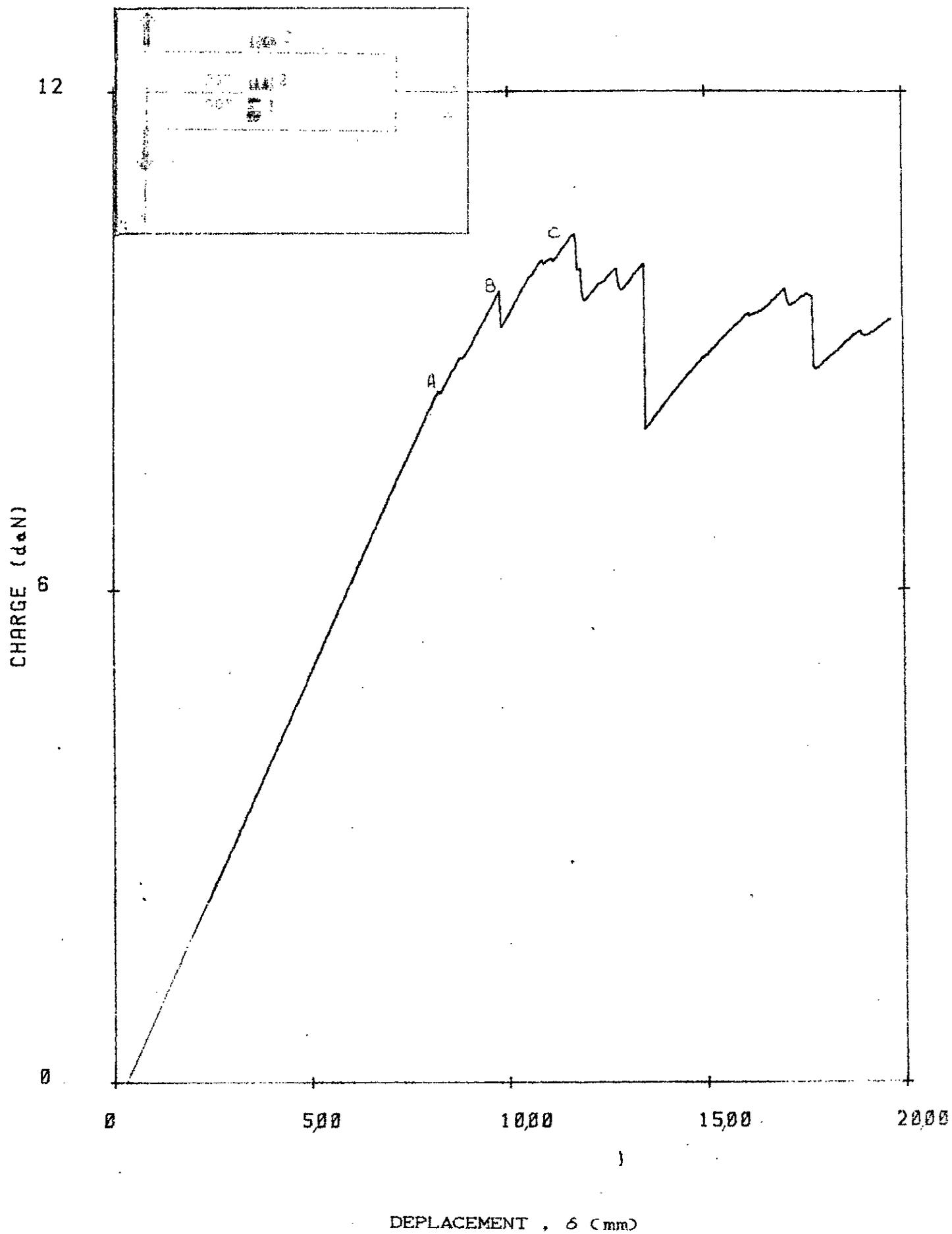


FIG-6.13- COURBE DE CHARGE ,  $a_0 = 76\text{mm}$

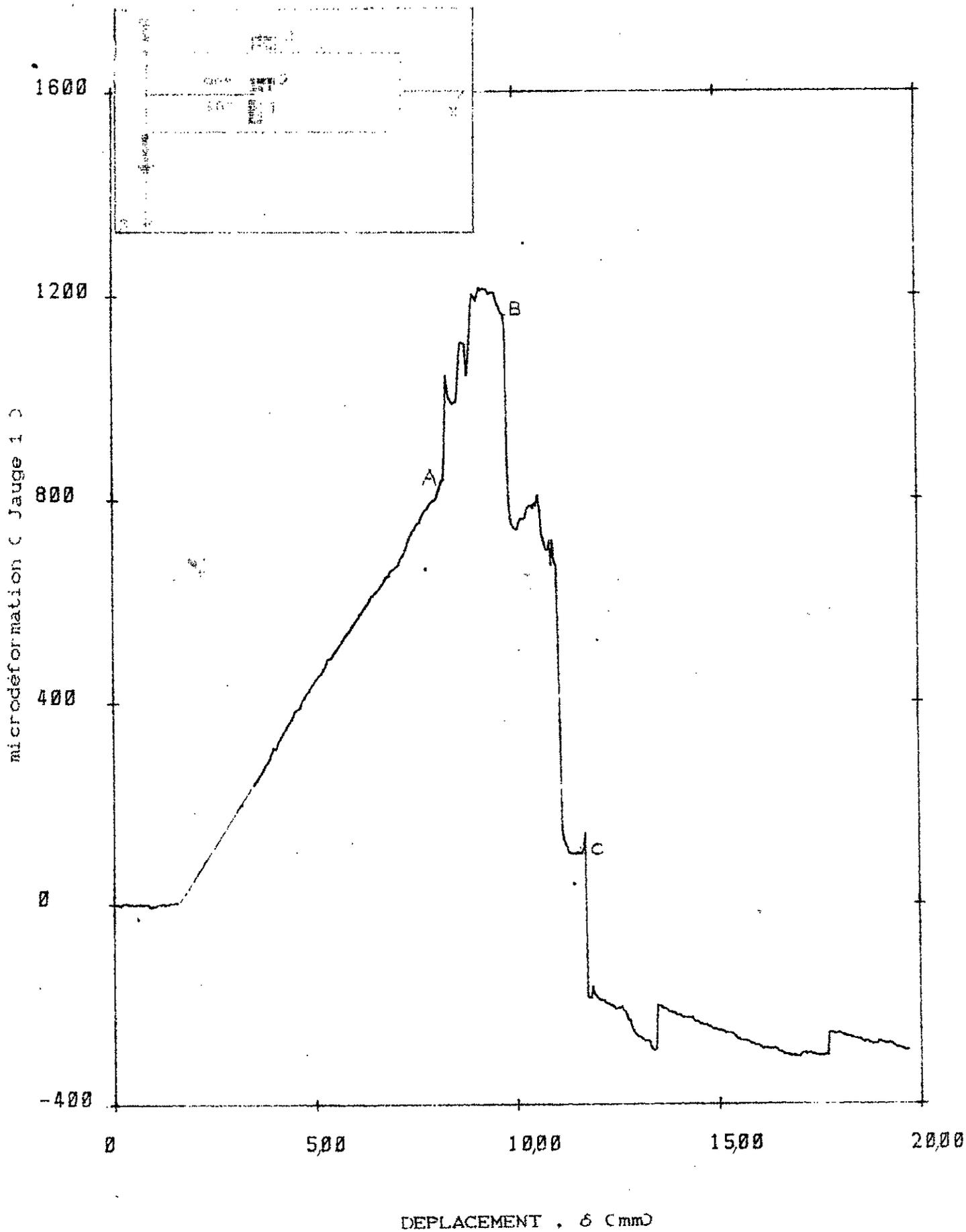


FIG-6.14- REPOSE DE LA JAUGE 1 ,  $a_0 = 76\text{mm}$

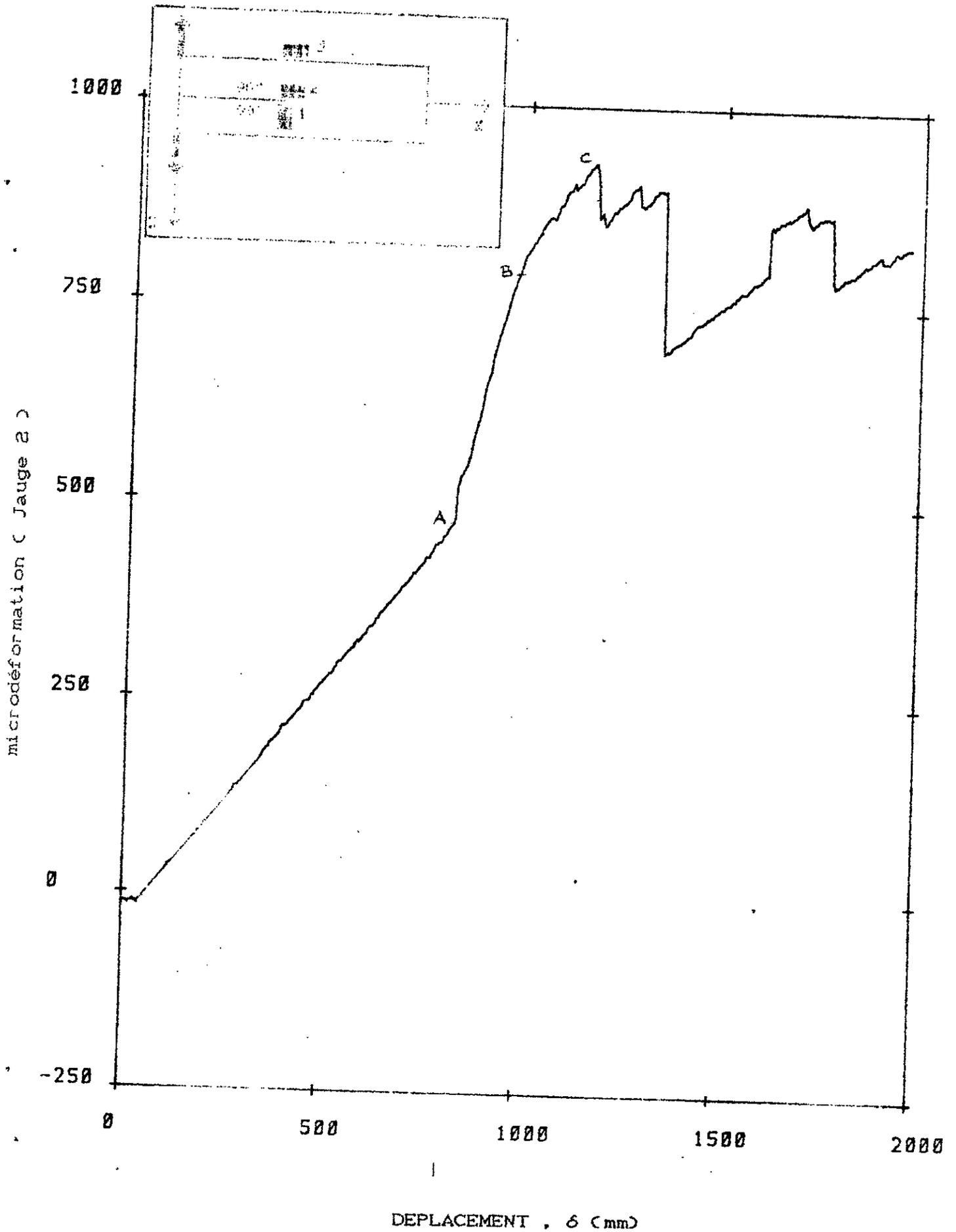


FIG-6.15- REPONSE DE LA JAUGE 2 ,  $a_0 = 76\text{mm}$

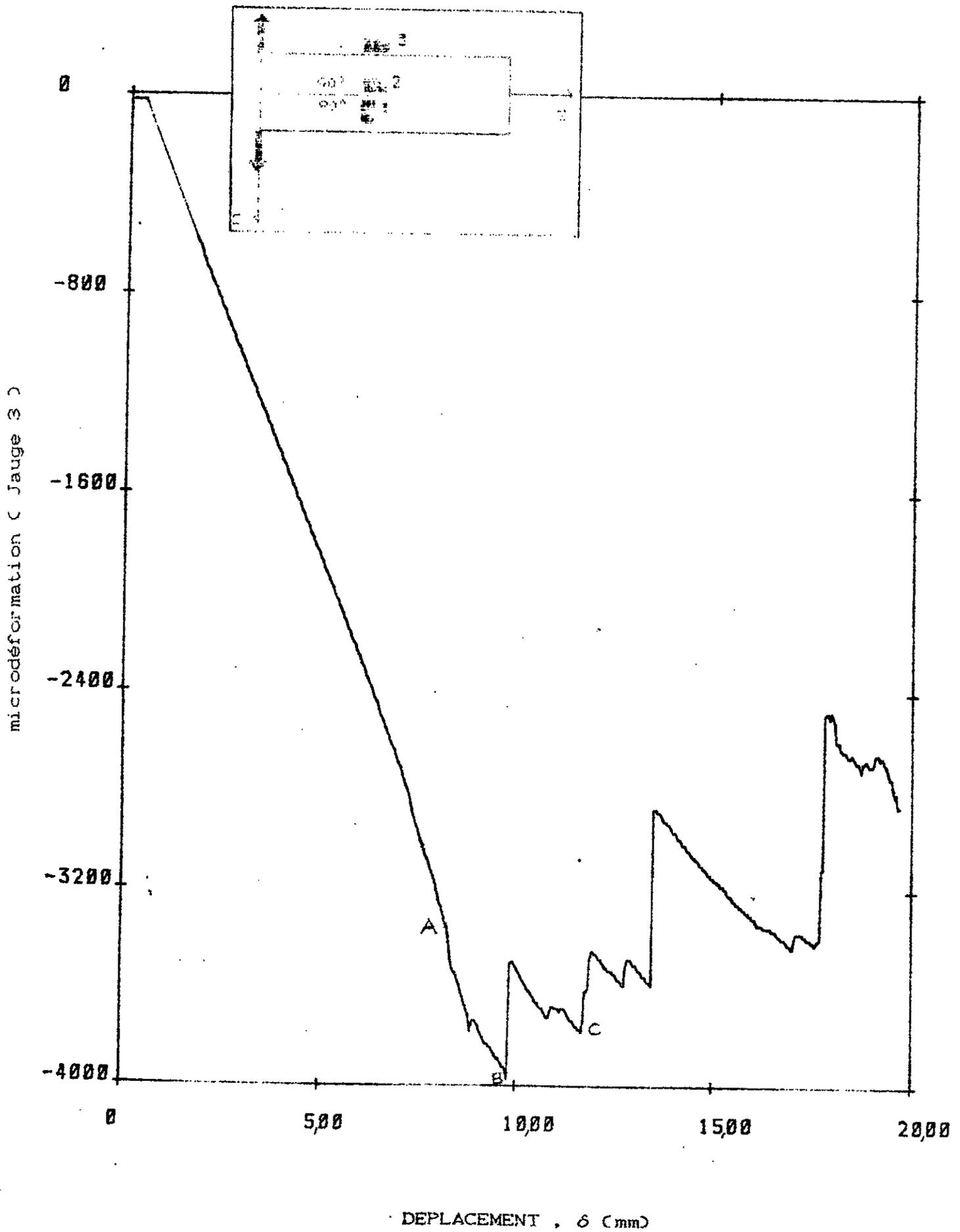


FIG-6.16- REPOSE DE LA JAUGE 3 ,  $a_0 = 76\text{mm}$

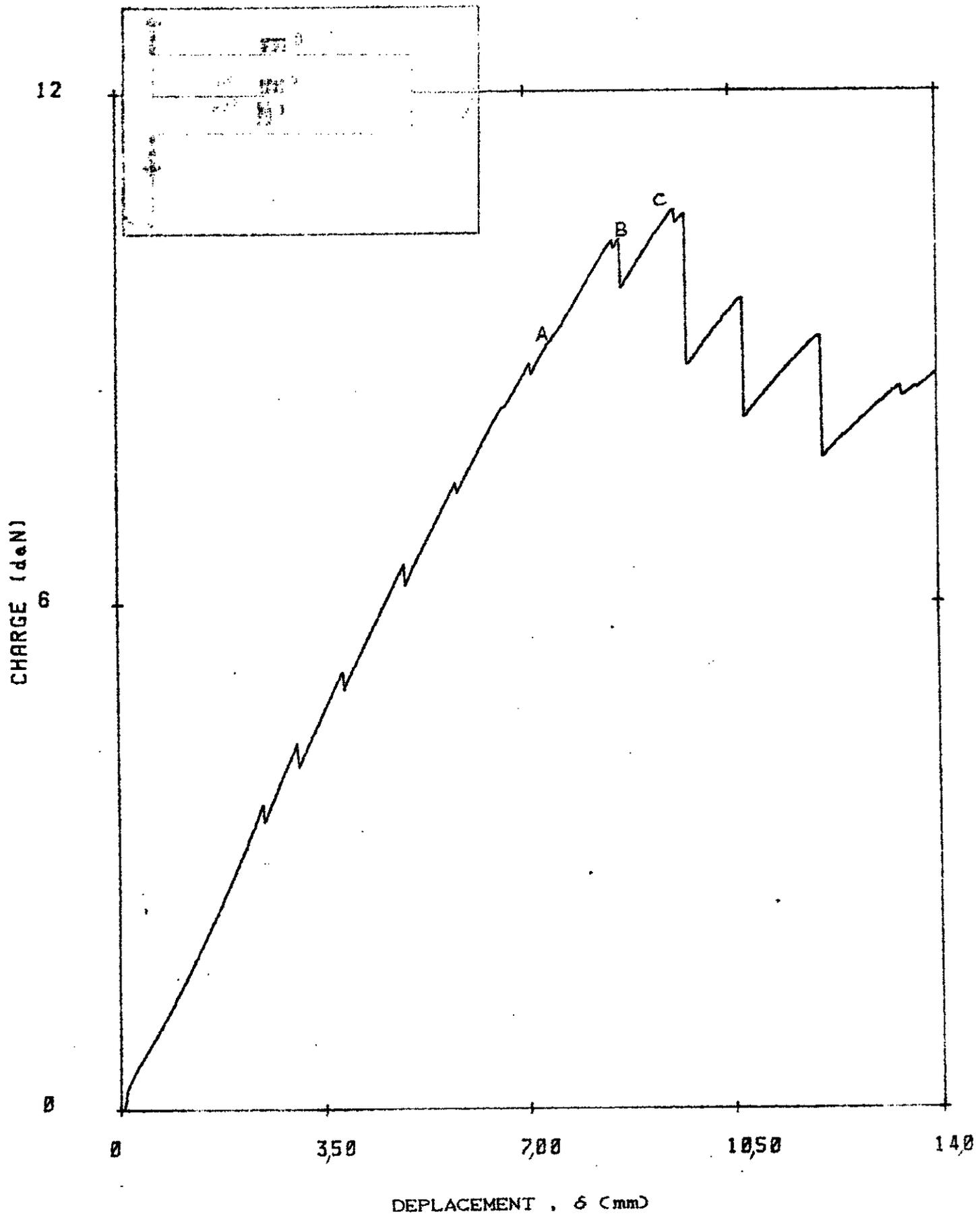


FIG-6.17- COURBE DE CHARGE .  $a_0 = 75\text{mm}$

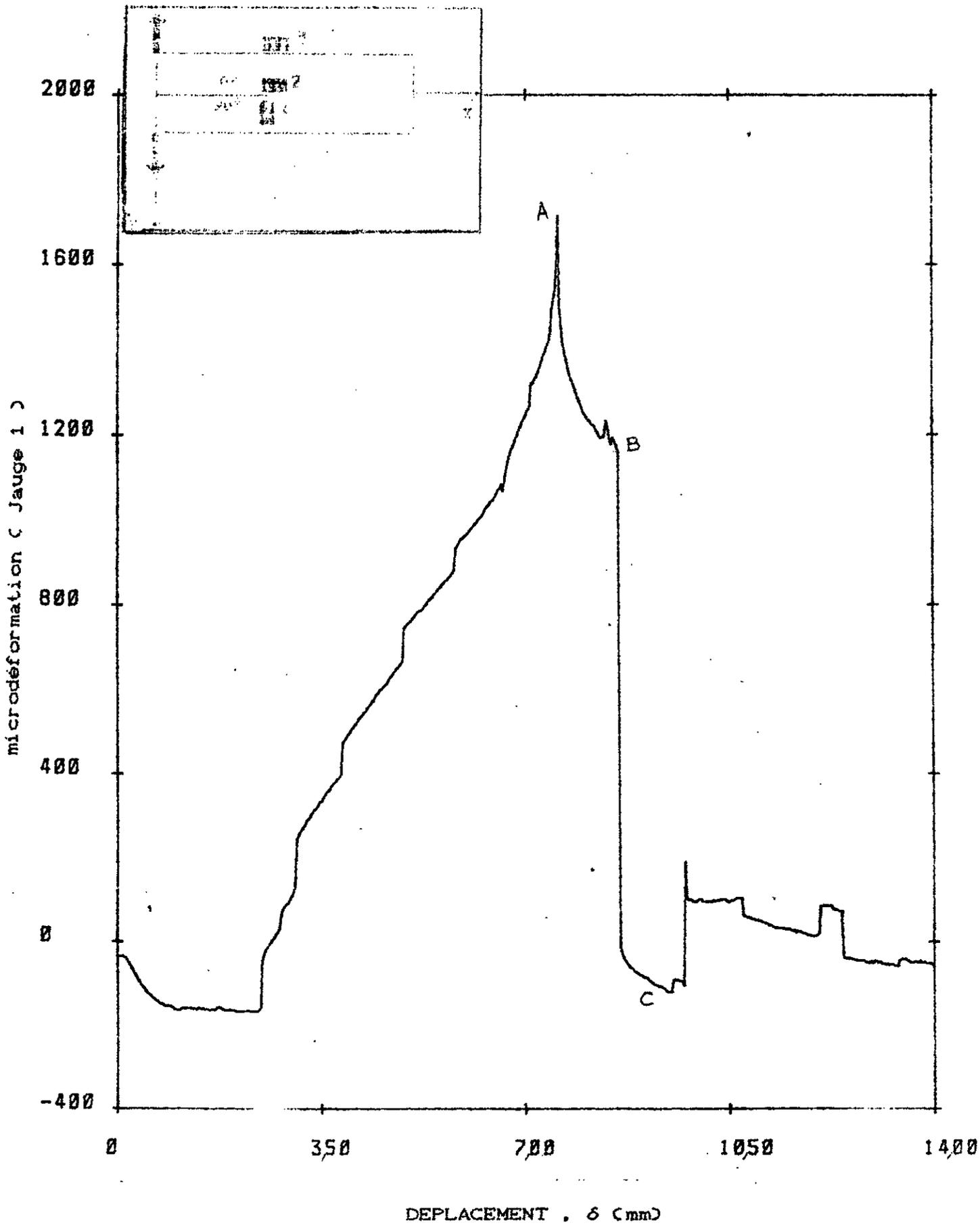


FIG-6.18- REPONSE DE LA JAUGE 1 .  $a_0 = 75\text{mm}$

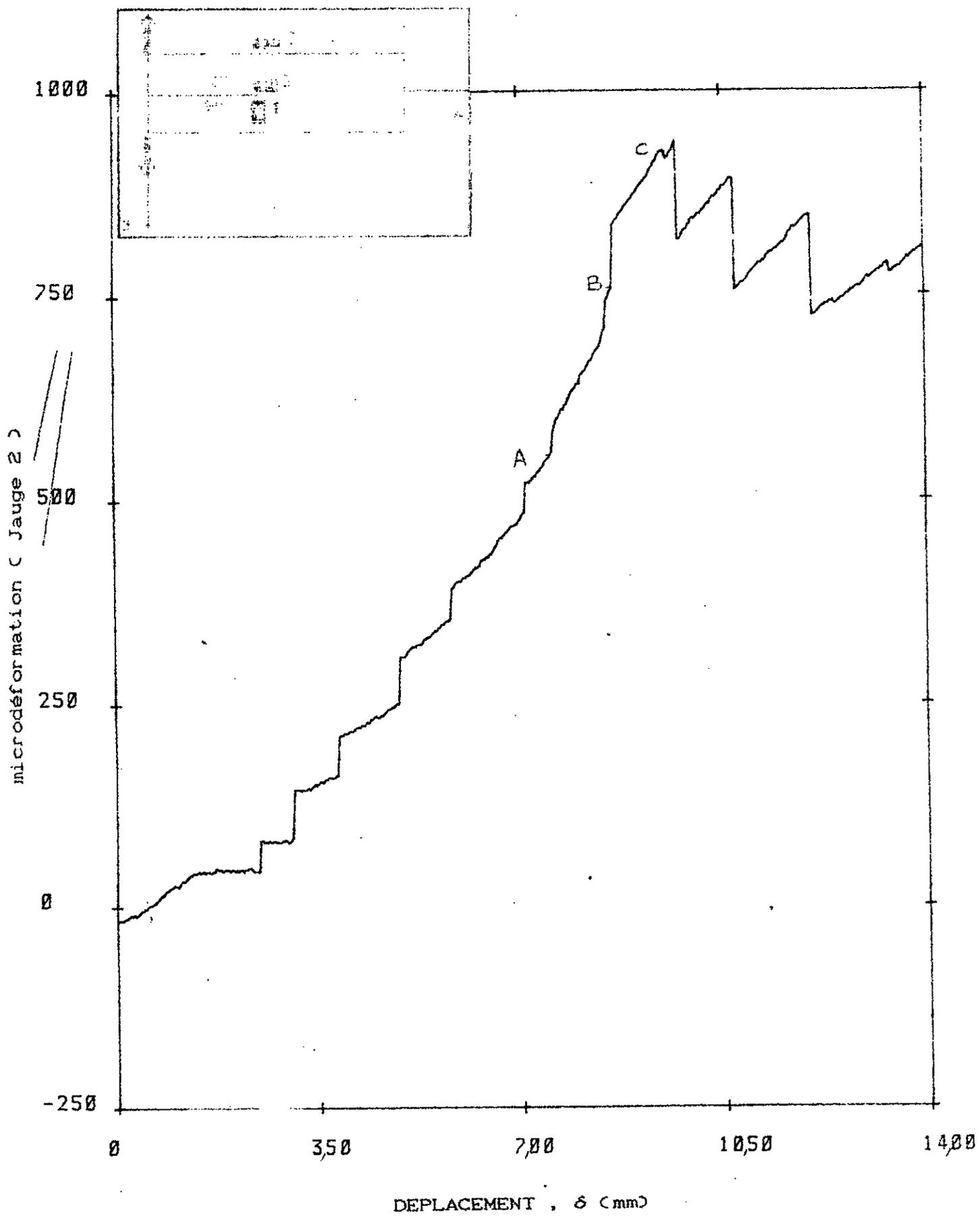


FIG-6.19- REPONSE DE LA JAUGE 2 ,  $a_0 = 75\text{mm}$

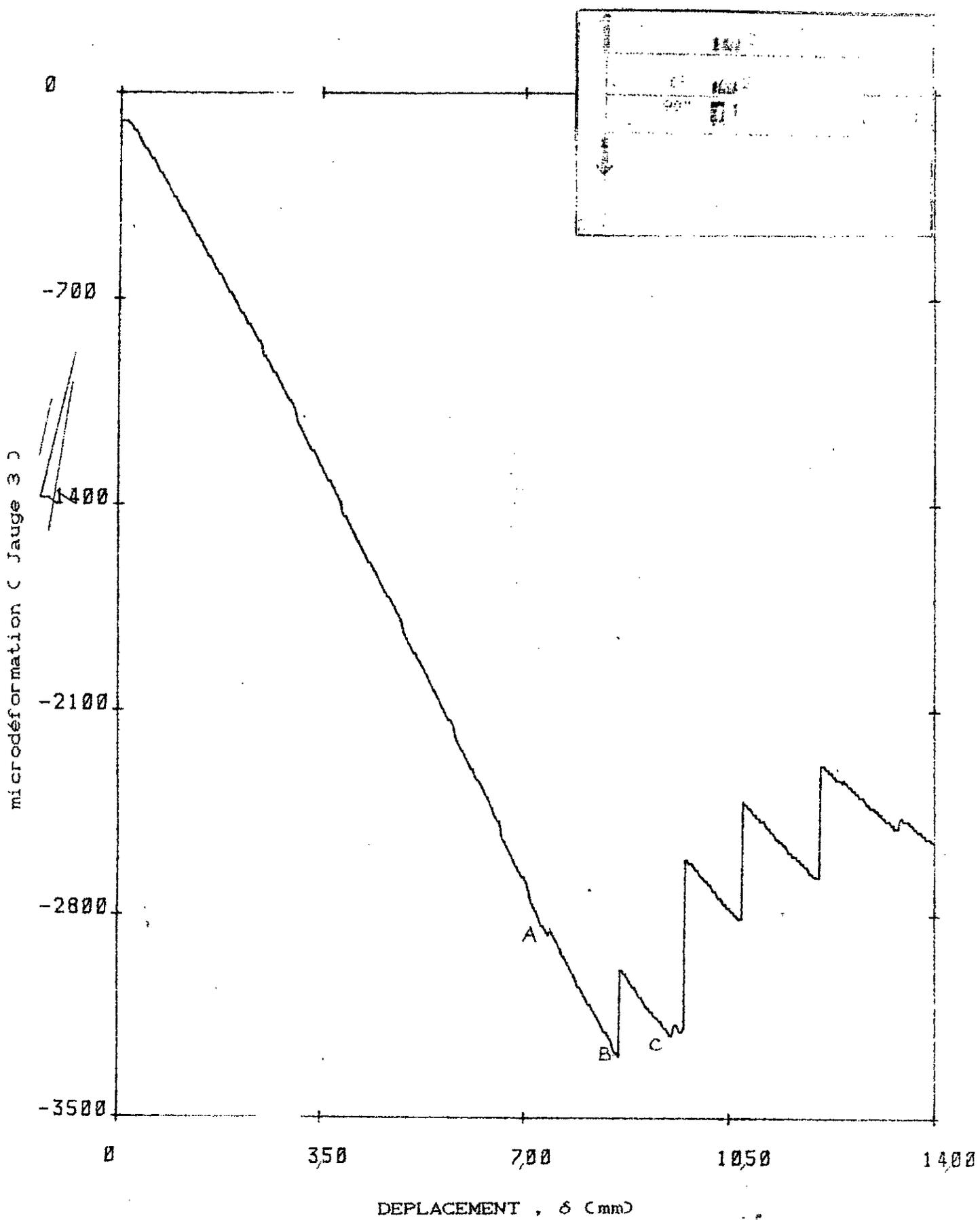


FIG-6.20- REPOSE DE LA JAUGE 3 ,  $a_0 = 75\text{mm}$

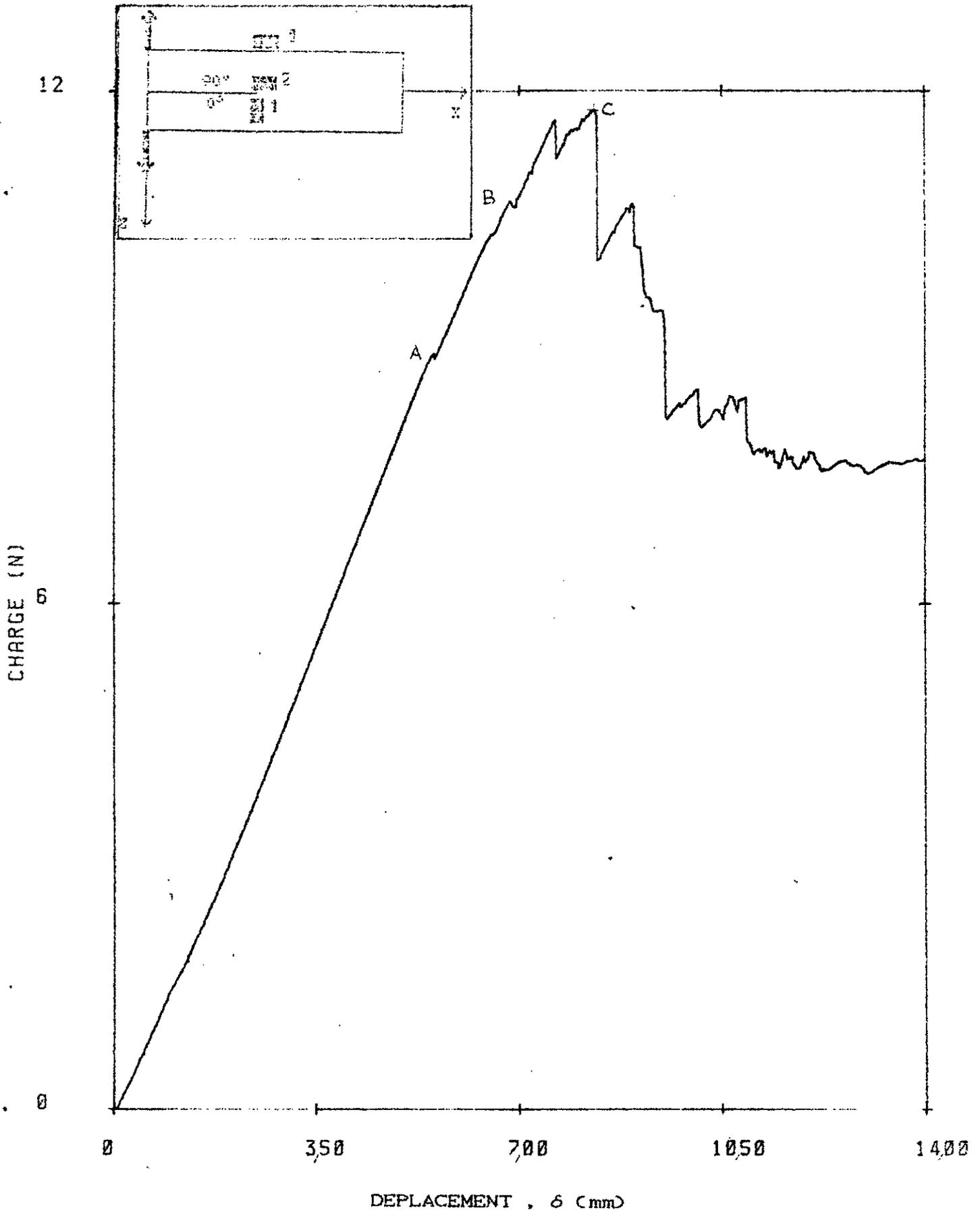


FIG-6.21 - COURBE DE CHARGE ,  $a_0 = 66\text{mm}$

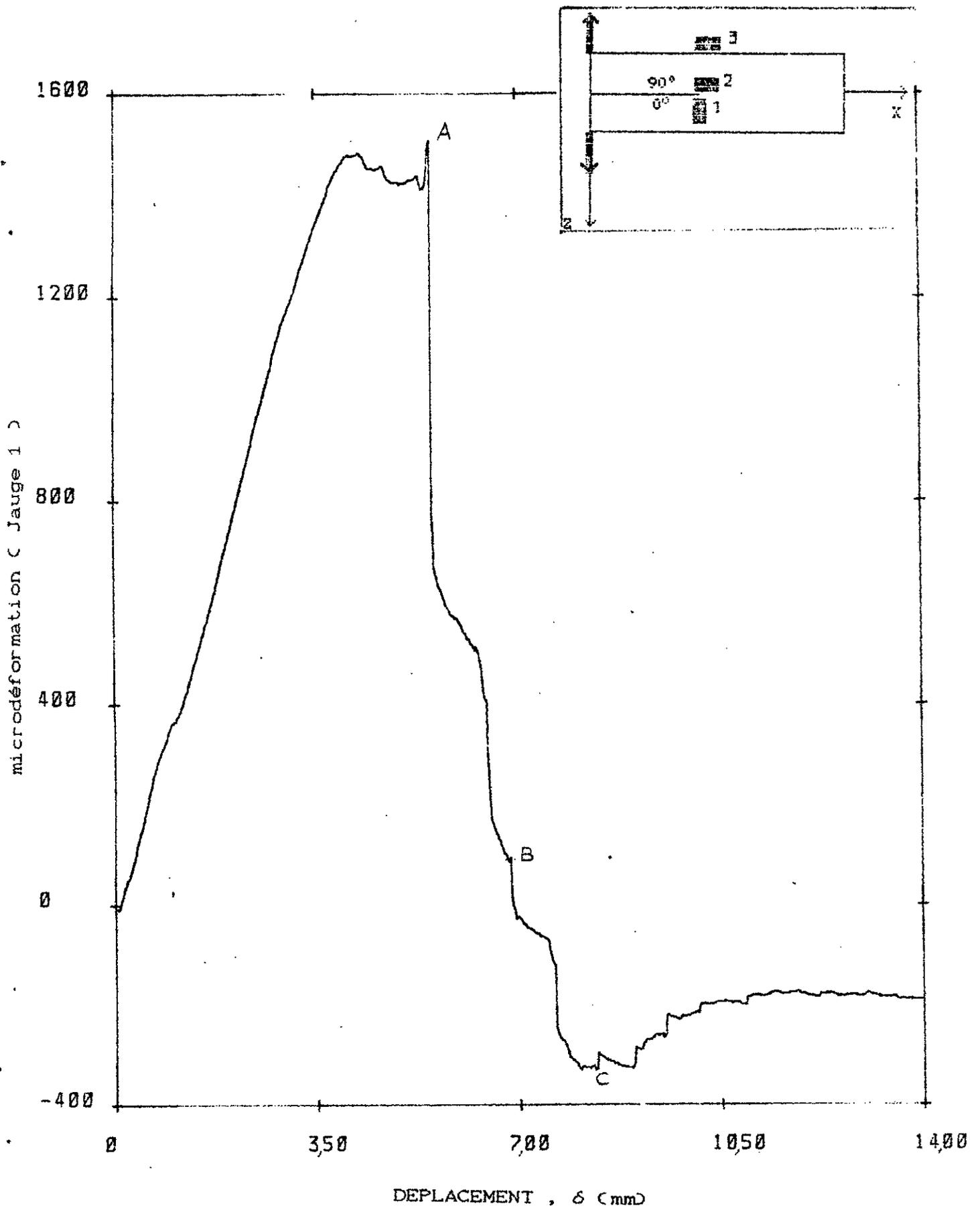


FIG-6.22- REPONSE DE LA JAUGE 1 ,  $a_0 = 66\text{mm}$

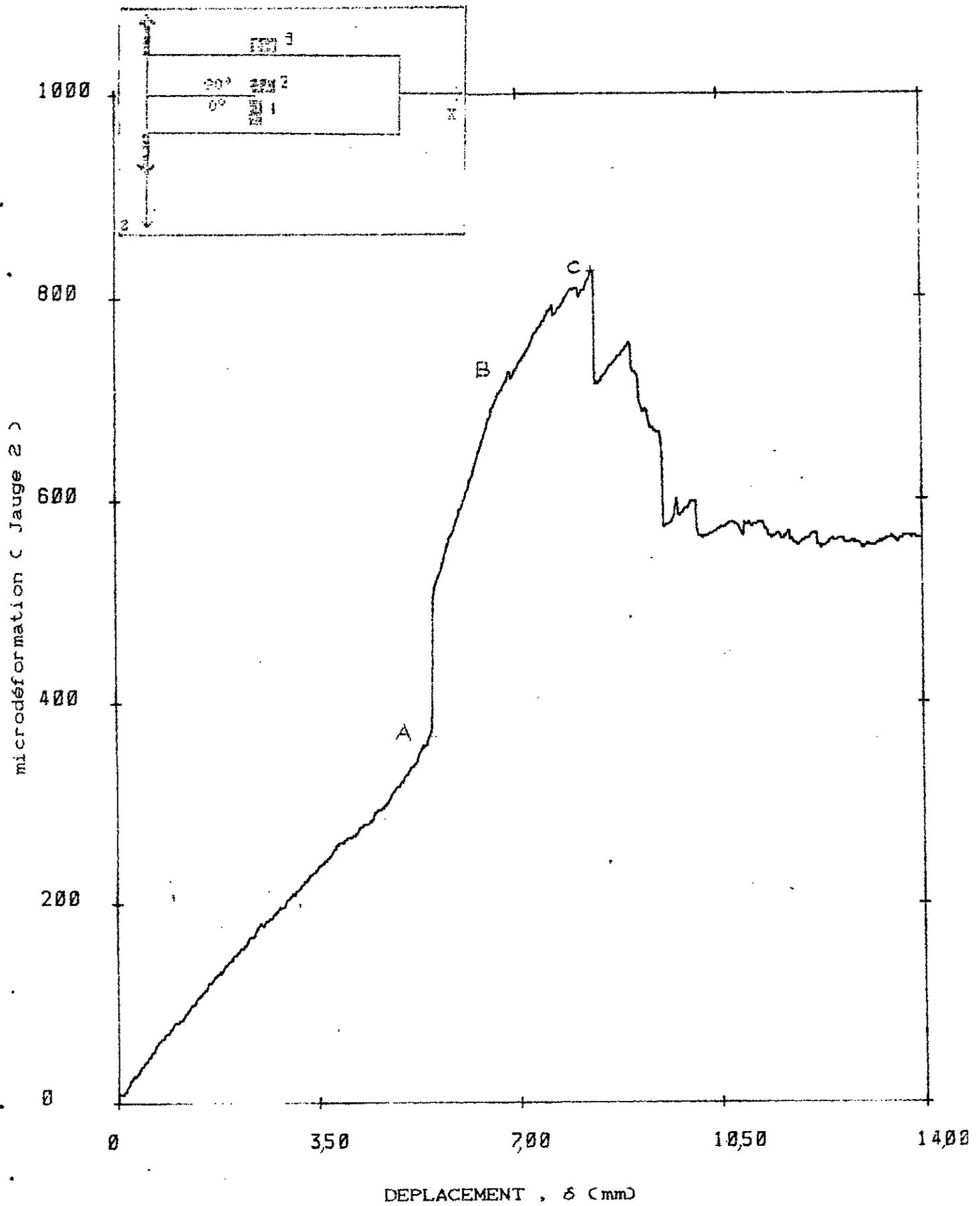


FIG-6.23- REPONSE DE LA JAUGE 2 ,  $a_0 = 66\text{mm}$

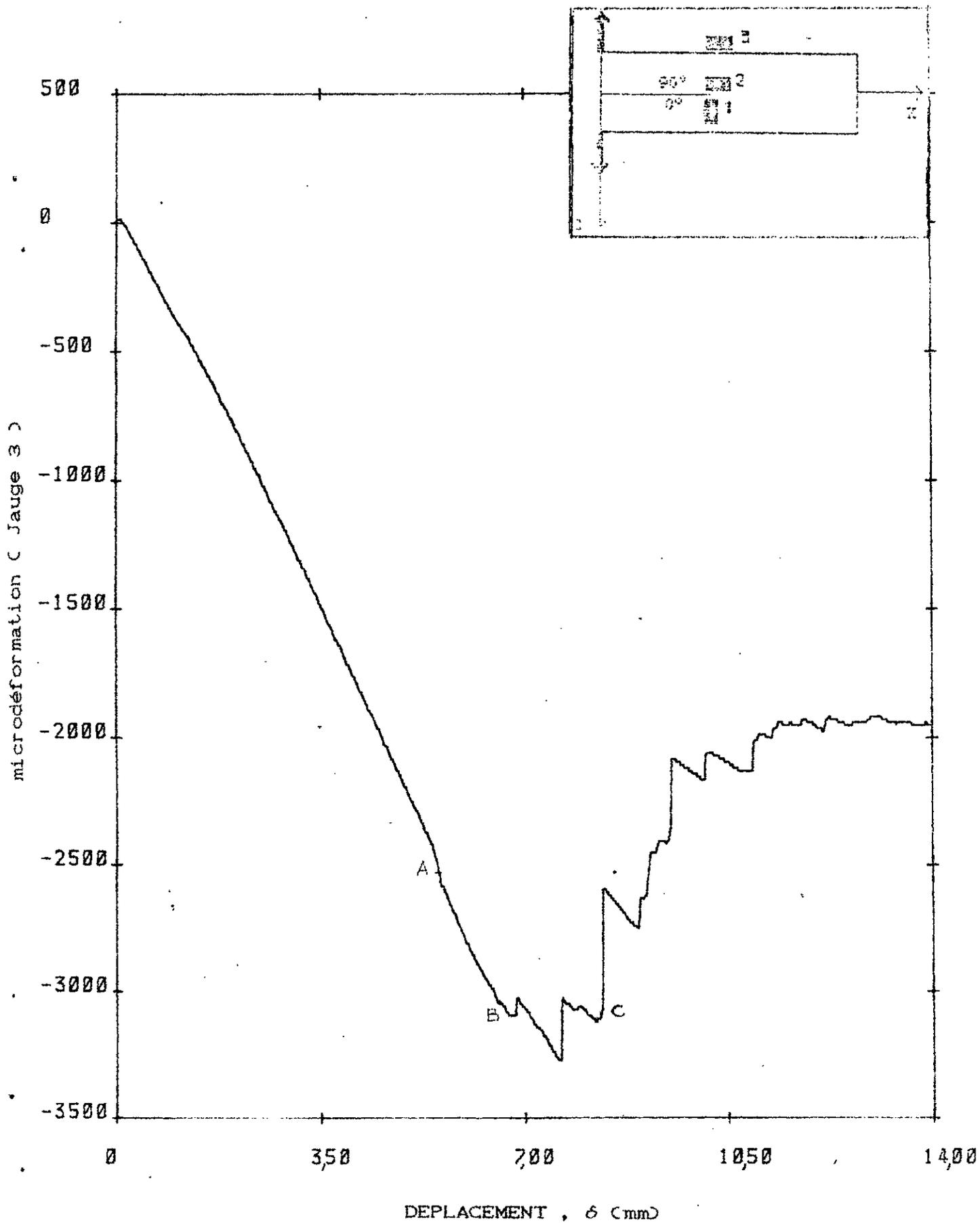


FIG-6.24- REPONSE DE LA JAUGE 3 ,  $a_0 = 66\text{mm}$

2- Au fur et à mesure que le fond de fissure s'éloigne des jauges, il s'en suit un relâchement progressif de celles-ci, notamment de la jauge n°2 ( horizontale ) ( FIG -6.27- ). Ce relâchement montre que la fissure en se propageant laisse derrière elle le matériau non sollicité.

3- Cette analyse nous permet de distinguer deux comportements du matériau selon le type de configuration des éprouvettes :

- Le comportement de la configuration (0°/ 0°) ;
- Le comportement des configurations (90°/90°), (0°/90°) et (90°/0°).

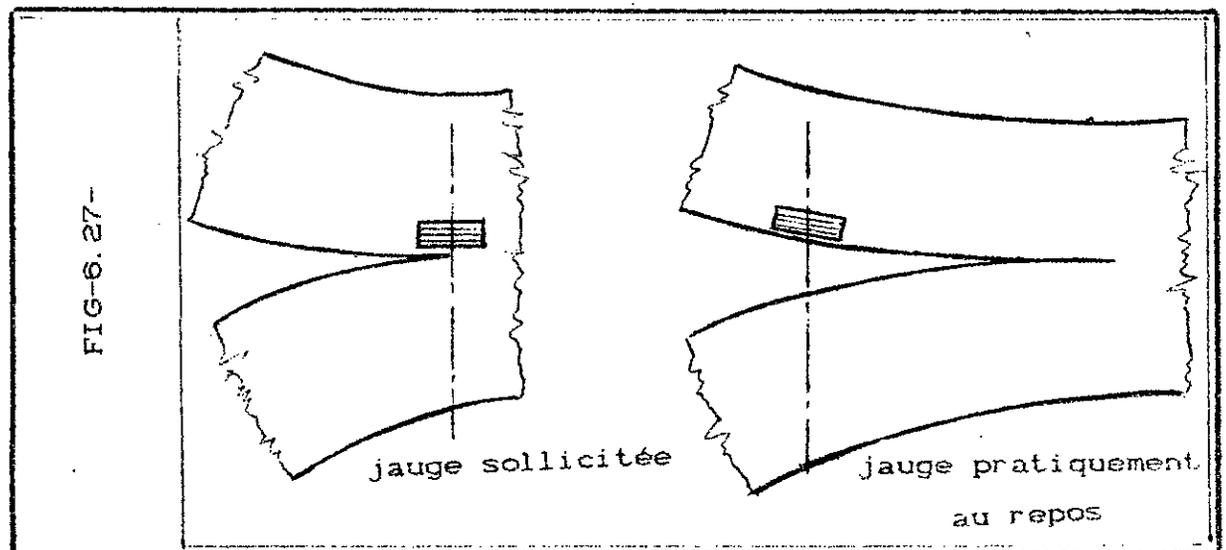
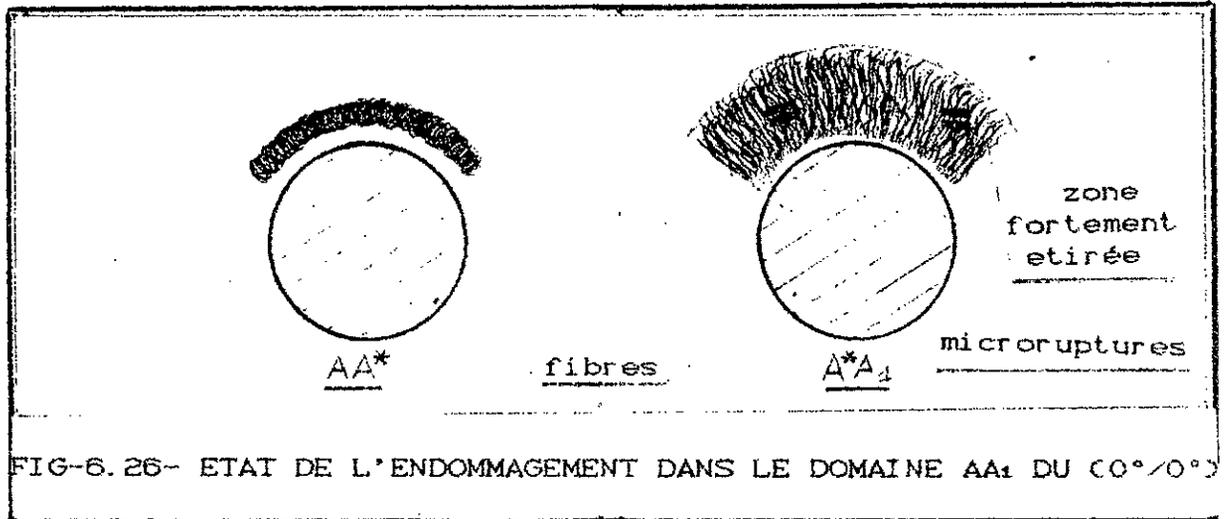
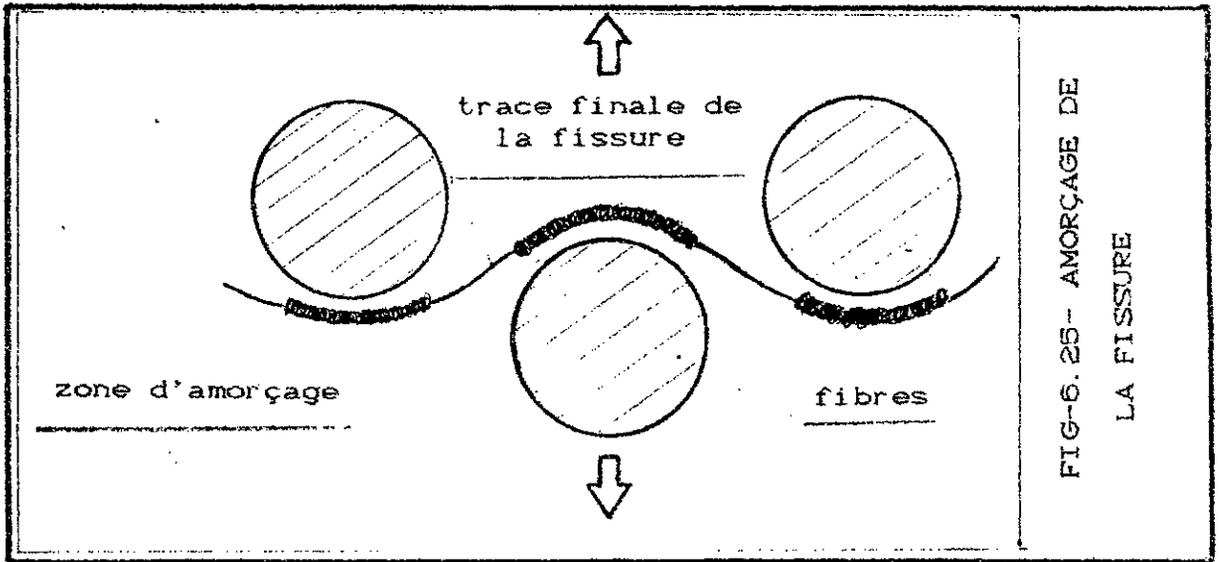
#### 6.a- Détermination des énergies d'amorçages : $G_{IC}$

Les essais de délaminage en mode I ont été répartis en trois étapes. Dans la première partie, six éprouvettes ont été testées ; dans la seconde partie cinq éprouvettes et enfin le reste des éprouvettes ont été testées dans la dernière partie des essais.

La mise en place du scotch sur les six premières éprouvettes pour éviter tout contact électrique avec le carbone ( conducteur ) a faussé complètement les résultats numériques des  $G_{IC}$ , ceci à cause des valeurs importantes des charges à l'amorçage relevées à partir des courbes de charges obtenues. Il est à noter que ce problème n'a pas eu d'influence sur les allures des courbes. En effet, les courbes obtenues ont les mêmes allures que celles des autres essais.

A cet effet, on prendra en compte uniquement les valeurs des énergies d'amorçage déterminées à partir des autres essais.

La détermination des énergies d'amorçage ( taux de restitution d'énergie critique ) :  $G_{IC}$ , nécessite la connaissance des charges à l'amorçage qu'on relève sur les



courbes de charges ( voir chapitre 4 ). Plusieurs méthodes de calcul ont été utilisées pour la détermination de  $G_{IC}$ . Les résultats de ces calculs sont présentés dans les tableaux 6 à 8.

Méthode	$G_{IC}$ moyen ( $J/m^2$ )
RIPLING, MOSTOVOY et PATRICK	424.46
GILLIS et GILMAN	427.47
GROSS et SRAWLEY	426.56
KANNINEN	448.80
BERRY	464.32

Table -6- Configuration du 0° / 0°

Méthode	$G_{IC}$ moyen ( $J/m^2$ )
RIPLING, MOSTOVOY et PATRICK	342.51
GILLIS et GILMAN	344.87
GROSS et SRAWLEY	344.14
KANNINEN	348.42
BERRY	514.38

Table-7- Configuration 90° / 90°

Méthode	$G_{ic}$ moyen ( $J/m^2$ )
RIPLING, MOSTOVOY et PATRICK	431.58
GILLIS et GILMAN	434.63
GROSS et SRAWLEY	433.71
KANNINEN	436.82
BERRY	605.33

Table -8- Configuration 0°/ 90°

La croissance de l'énergie d'amorçage  $G_{ic}$  suivant le type de configuration de (0°/0°), (90°/90°) puis (0°/90°), montre en fait la grande résistance à l'amorçage du délaminage dans les configurations renfermant des plis à 90°.

#### 6.4- Courbes " R " ( Energies de propagation ) :

Après amorçage de la fissure, la rupture brutale ne survient pas ( cf 3.3 ). En effet, la fissure ne se propage que lorsque l'énergie accumulée dans la zone endommagée en tête de fissure atteint une valeur suffisante de propagation. Le comportement du matériau, lors de la propagation de la fissure, diffère d'une configuration à l'autre. Pour concrétiser cette différence de comportement on trace les courbes " R " relatives à chaque configuration. Ces courbes " R " représentent la variation de l'énergie de propagation  $G_{ip}$ , en fonction de la longueur de fissure effective qui tient compte de la zone endommagée en tête de fissure  $a_p$ . Le taux de restitution d'énergie en propagation est donnée par la relation suivante ; découlant de la méthode de Berry

$$G_{ip} = \frac{n P \delta}{2 B a_p} \quad (6.9)$$

avec :  $a_p = (h C_p)^{1/n}$  (6.10)

sachant que :  $C_p = \frac{\delta}{P}$  (6.11)

où : n et h - paramètres du matériau ;

P et  $\delta$  - valeurs de la charge et du déplacement en propagation ;

B - Largeur de l'éprouvette .

Les courbes " R " de la configuration (0°/0°) ( Fig-6.28- ) montrent une décroissance évidente et continue de l'énergie de propagation ce qui explique la faible résistance à la propagation du délaminage de cette configuration.

Les configurations (90°/90°) et (0°/90°) présentent, quant à elles, une bonne résistance à la propagation du délaminage, confirmée par la croissance importante de l'énergie de propagation à partir du point d'amorçage ( FIG-6.29- et FIG-6.30- ).

Ces résultats confirment ceux déjà obtenus dans le paragraphe 6.2, relatifs à la résistance au délaminage observée sur les courbes de charge.

On conclue par le fait que la présence de plis à 90° dans le plan de propagation d'une fissure, accroît la résistance au délaminage de la structure considérée.

#### 6.5- Etude des faciès de rupture, microfractographie :

L'examen des faciès de rupture à l'aide d'un microscope électronique à balayage, associé à l'étude précédente des mécanismes d'amorçage et de propagation, complète la compréhension du phénomène de délaminage.

Les photos prises sur les différents échantillons montrent l'excellente qualité de l'interface et la bonne adhérence des fibres de carbone à la matrice époxy. En effet, la rupture est beaucoup plus localisée dans la résine qu'à l'interface, d'ailleurs l'absence de fibres lisses est significative.

Les photos 1 et 2 relatives à la configuration ( $0^{\circ}/0^{\circ}$ ) montrent l'état de l'endommagement au voisinage de la tête de fissure.

La première photo présente un amas de résine en tête de fissure provoquant ainsi des faiblesses locales en ces endroits riches en résine et permettant de ce fait à la fissure d'emprunter ces chemins de faible résistance.

La deuxième photo montre la rupture de quelques fibres et la fissuration de la résine.

Les photos 3 et 4, prises dans la zone de propagation, révèle les traces de fibres décollées et les amas de résine, expliquant la faible résistance rencontrée par la fissure. La présence des fibres rompues et de résine fissurée témoigne des quelques résistances rencontrées par la propagation de la fissure en certains endroits.

Les photos prises sur les échantillons de configuration ( $90^{\circ}/90^{\circ}$ ) montrent le déchaussement et la cassure des fibres par paquet au voisinage de la tête de fissure (photo 6).

La coaléscence des microruptures qui prennent naissance dans la résine, forment un front de fissure parallèle aux fibres et perpendiculaire au sens de propagation de la fissure ( Zoom photo 6 ) provoquant ainsi le décollement puis la cassure des fibres.

Les fragments de résine et de fibres présents dans cette zone témoignent de la grande énergie dissipée pour faire avancer la fissure. Les photos 7, 8, 9 prises dans la zone de propagation, montrent le décollement et la rupture des fibres par paquets.

La photo 10 nous permet de comprendre les raisons de ces décollements et ruptures. En effet, la fissure en essayant de contourner les fibres à  $90^{\circ}$ , qui constituent un obstacle à son avancée, emprunte de nouveaux plans de propagation lesquels changements de plans se font en cassant des fibres. L'observation des faciès de rupture dans le cas de la configuration ( $0^{\circ}/90^{\circ}$ ) montre au voisinage de la tête de fissure des empreintes de fibres décollées accompagnées de débris de résines et des fragments de fibres, donnant un

aperçu sur la grande résistance rencontrée par la fissure pour se propager (pour se frayer un chemin entre les plis à 0° et 90°) ce qui justifie la valeur importante de l'énergie  $G_{IC}$  calculée (photos 11, 12).

En propagation, les photos 13, 14 et 15 font apparaître la rupture des plis ainsi que des paquets de fibres longitudinales et transversales (cassures). On note par ailleurs, des zones riches en résine provenant des ponts de résine interfibres (photo 14).

La fissure (le délaminage) en empruntant des chemins de moindres résistances forme différents plans de propagation (photo 16). Ces changements des plans de propagation sont responsables de la rupture des fibres transversales et longitudinales par paquets.

La photo 17 montre " l'ampleur des dégats " occasionnée par la fissure en se propageant. La fissure en prenant naissance entre deux plis de 0° et 90° (plan défini par le défaut artificiel) a tendance à se propager dans le pli à 90° (photo 17). Ceci s'explique par le fait que les microfissures induites dans la résine la plus fortement sollicitée ; résine du pli à 90° , en coaléscant (parallèlement aux fibres) permettent à la fissure de changer de plan en se propageant dans le pli à 90° ; chemin de moindre résistance.

L'observation des différents faciès de rupture permet de distinguer plusieurs types d'endommagement, dans le cas d'une rupture par délaminage et se résumant comme suit :

- Décollement (déchaussement) des fibres par paquets ;
- Rupture des fibres ;
- Microfissuration de la résine ;
- Rupture de la résine.

Pour conclure, on peut affirmer que l'état de dommage subit par les surfaces de rupture nous renseigne énormément sur l'importance de la résistance à la propagation du délaminage (des différentes configurations étudiées). En effet, la



PHOTO 1- AMAS DE RESINE EN TETE DE FISSURE  
CE (0°/0°)

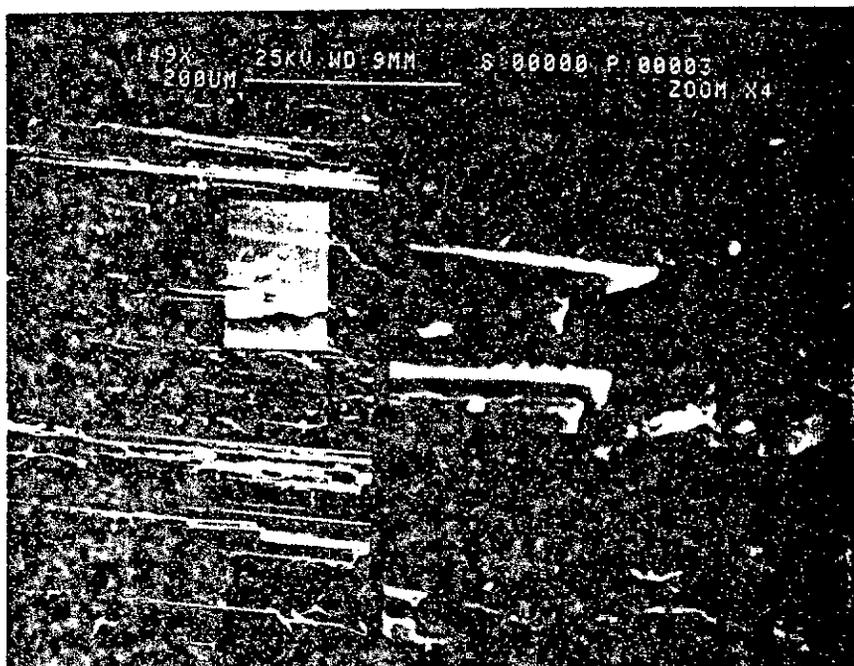


PHOTO 2- FIBRES ROMPUES AU VOISINAGE DE LA TETE DE FISSURE  
CE (0°/0°)

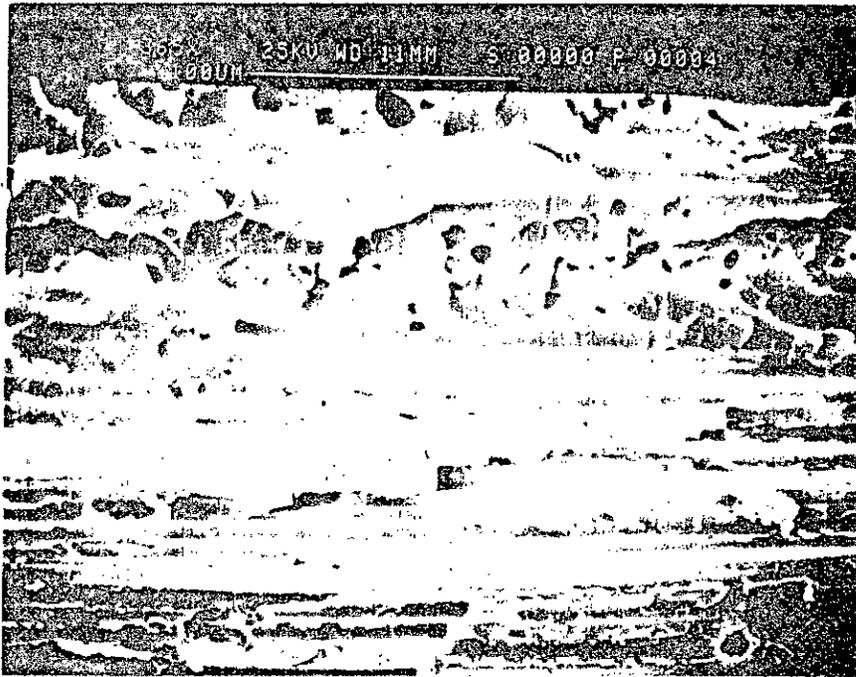


PHOTO 3- FIBRES DECOLLEES ET CASSEES EN PROPAGATION  
CE (0°/0°)

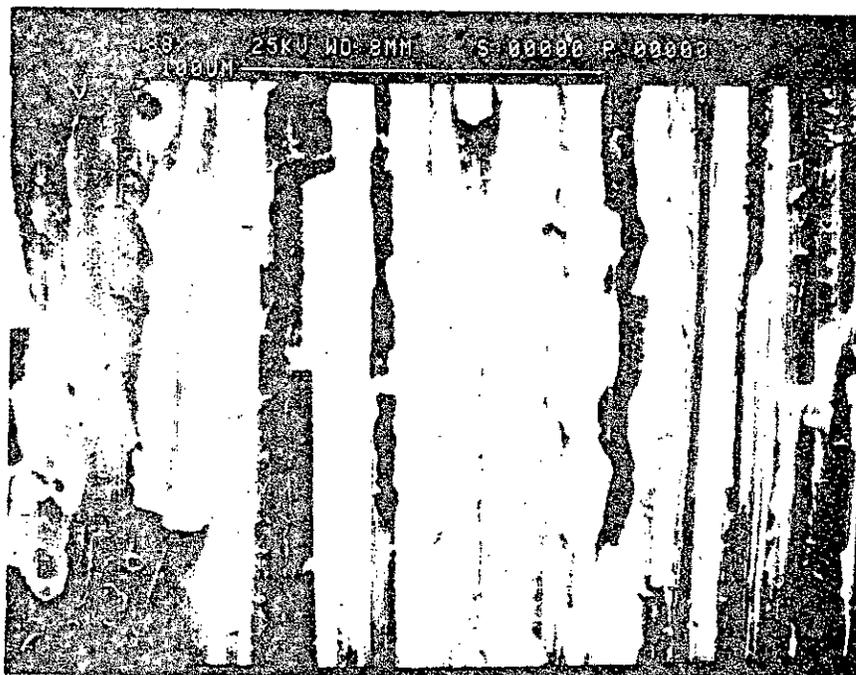


PHOTO 4- RESINE FISSUREE, FIBRES DECOLLEES EN PROPAGATION  
CE (0°/0°)

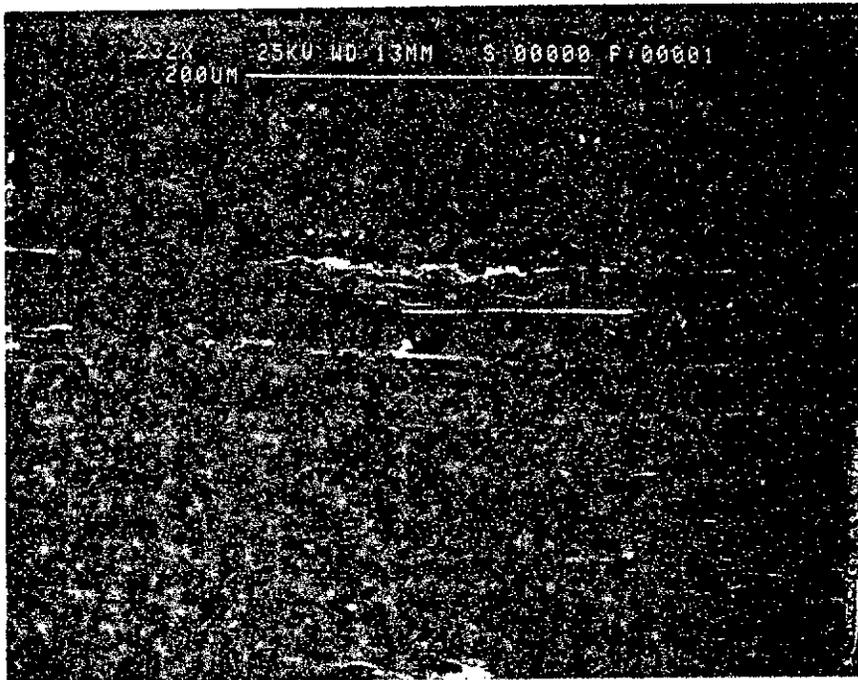


PHOTO 5- TRAJET DU DELAMINAGE SUIVANT L'ÉPAISSEUR  
CE (0°/0°)



PHOTO 6- PAQUETS DE FIBRES ARRACHÉS EN TÊTE DE FISSURE  
CE (90°/90°)

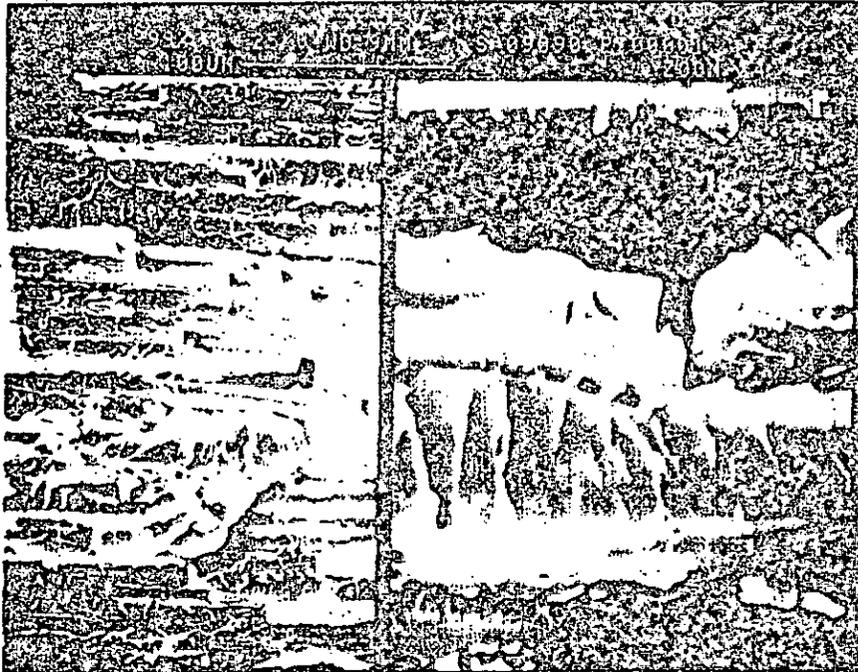


PHOTO 7- PAQUETS DE FIBRES DECOLLEES EN PROPAGATION  
CE (90°/90°)

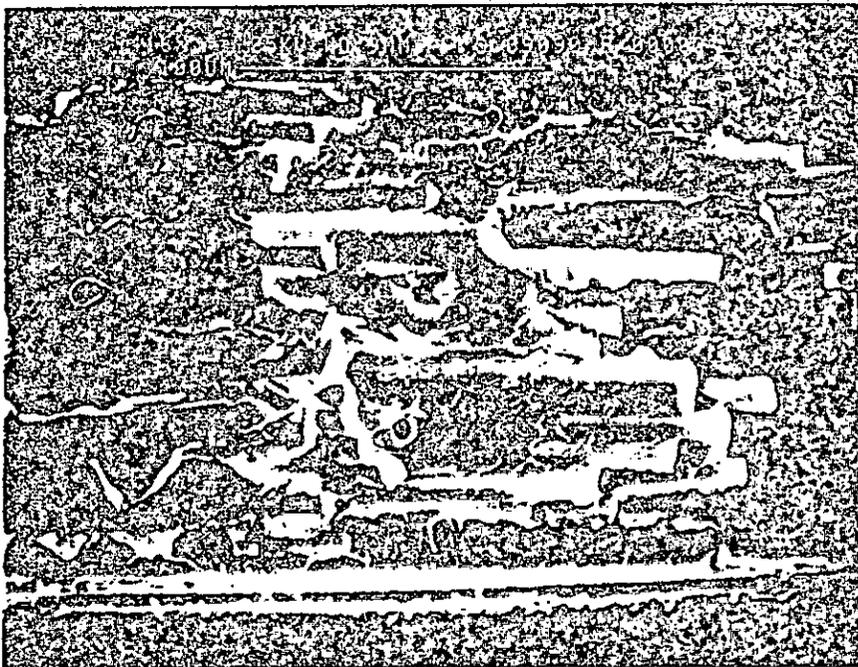


PHOTO 8- FIBRES CASSEES EN PROPAGATION  
CE (90°/90°)

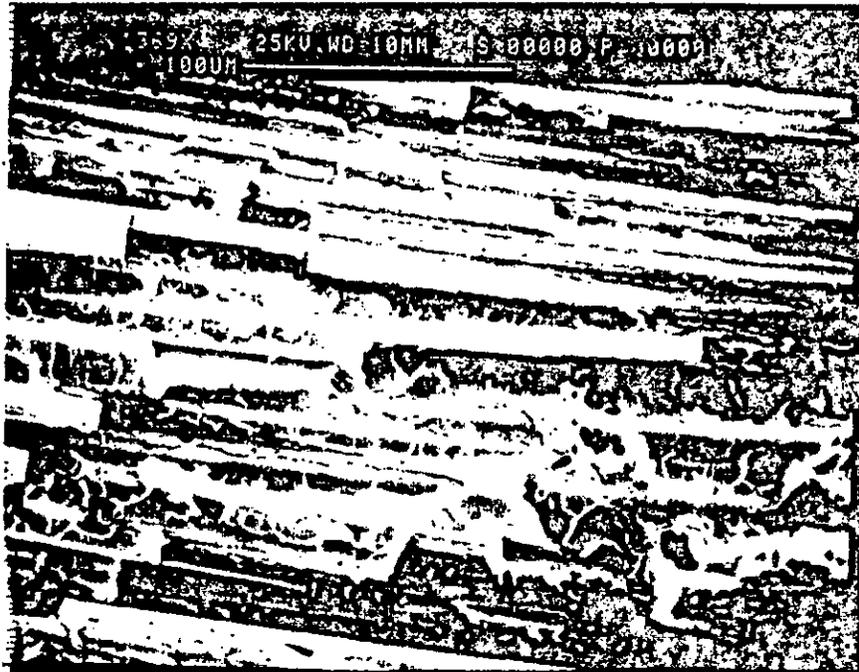


PHOTO 9- FIBRES CASSEES EN PROPAGATION  
CE (90°/90°)

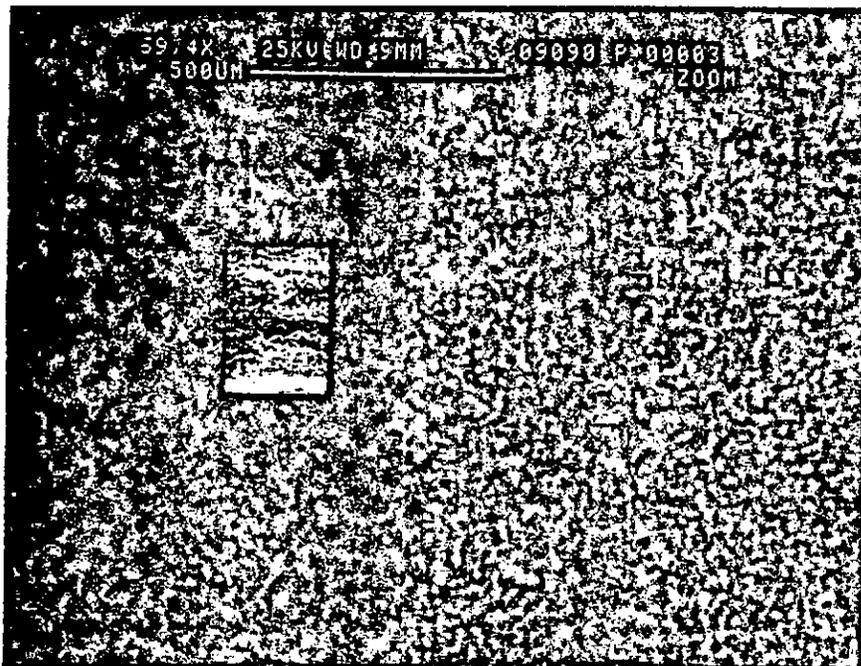


PHOTO 10- FORMATION DE DEUX PLANS DE PROPAGATION  
CE (90°/90°)

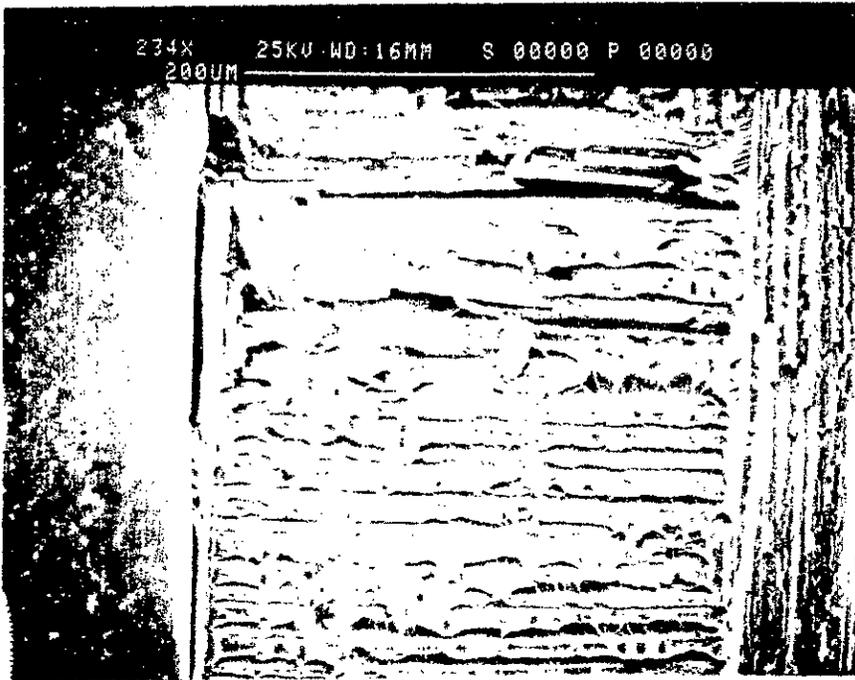


PHOTO 11- EMPREINTE DE PAQUETS DE FIBRES DECOLLEES  
CE (0°/90°)

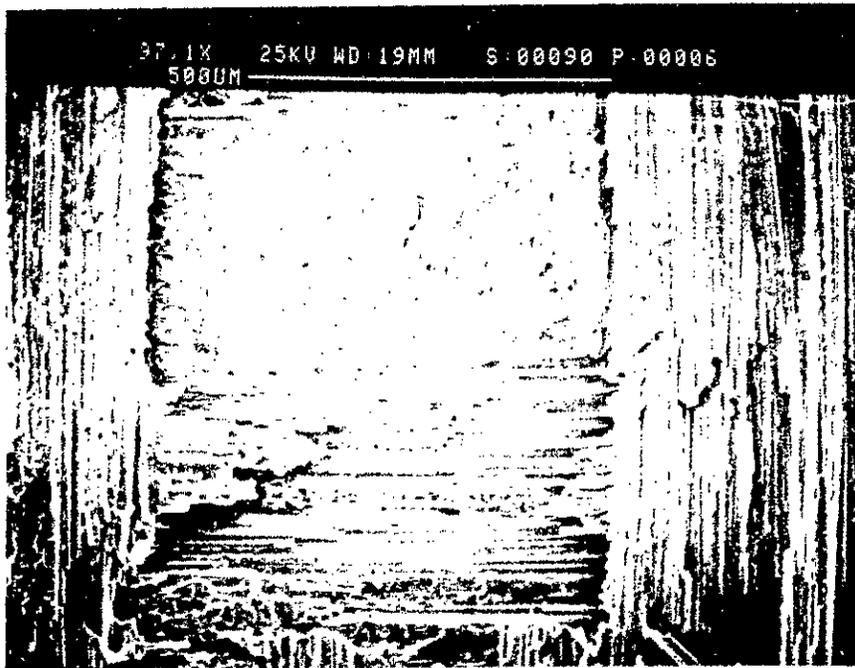


PHOTO 12- FIBRES ET PLS CASSES AU VOISINAGE DE LA TETE DE  
FISSURE CE (0°/90°)

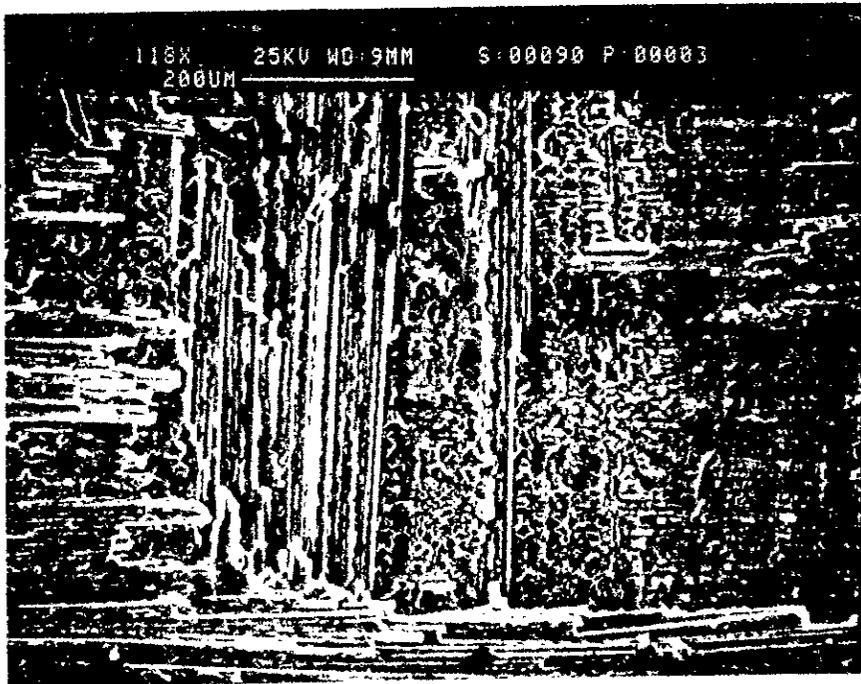


PHOTO 13- PAQUETS DE FIBRES ET PLIS ROMPUS EN PROPAGATION  
CE (0°/90°)



PHOTO 14- TRACE DE FIBRES DECOLLEES ET PONTS DE RESINE  
INTERFIBRES - CE (0°/90°)

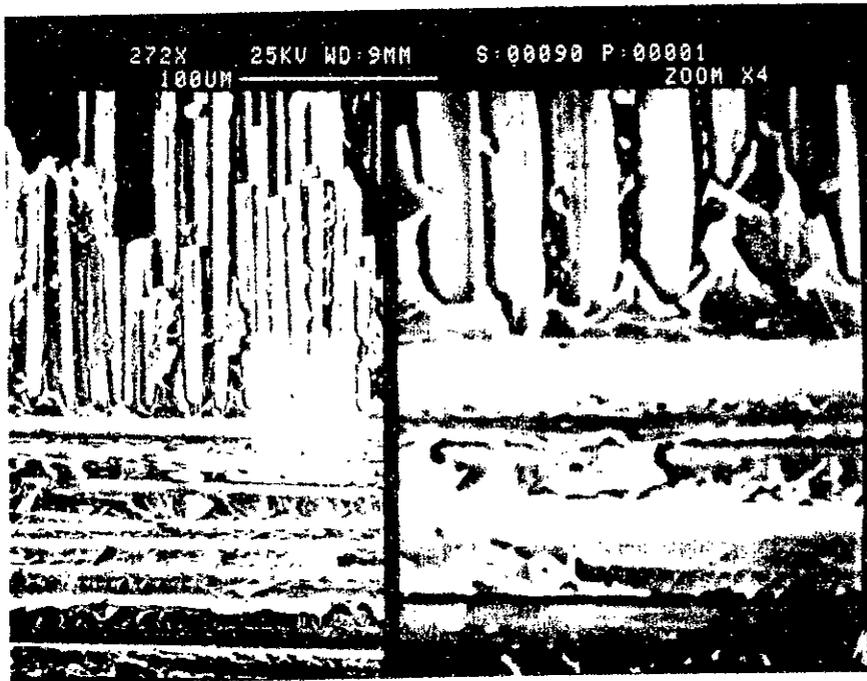


PHOTO 15- RUPTURE ET DECOLLEMENT DE FIBRES TRANSVERSES  
ET LONGITUDINALES - CE (0°/90°)

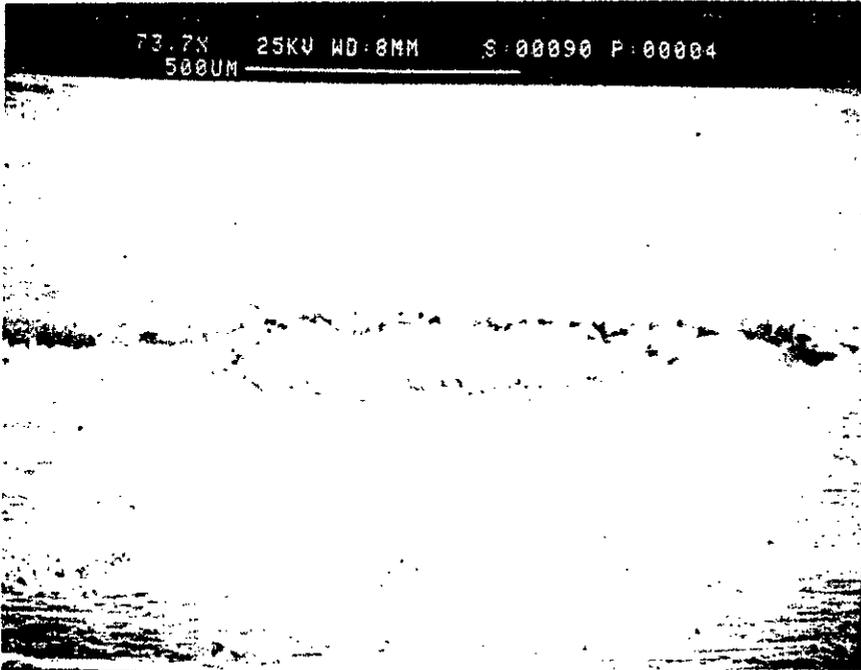


PHOTO 16- DEUX PLANS DE PROPAGATION  
CE (0°/90°)

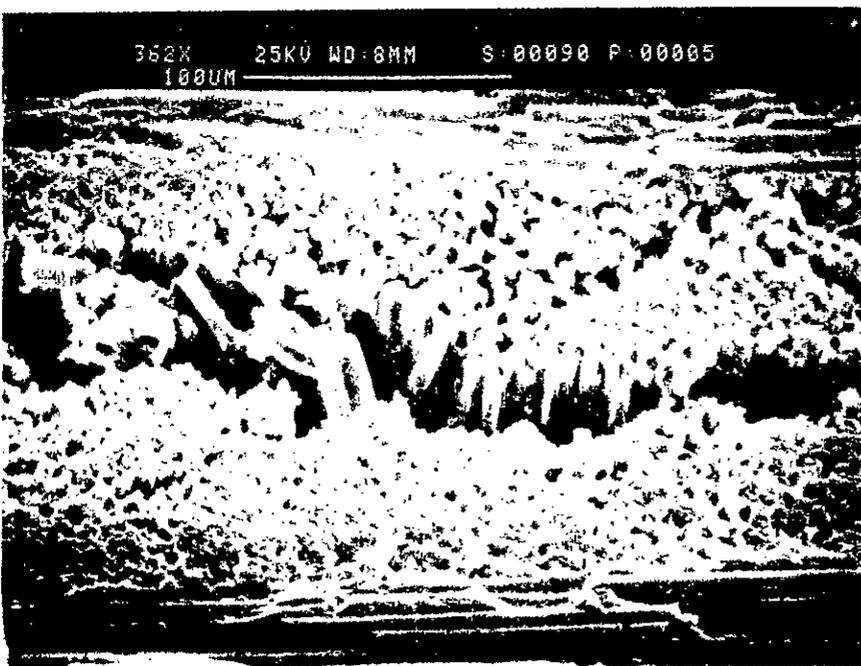


PHOTO 17- PROPAGATION DE LA FISSURE PRATIQUEMENT DANS  
LE PLI 90° - CE (0°/90°)

dégradation des surfaces de rupture est d'autant plus prononcée que la tendance de la fissure à contourner et à casser les fibres à  $90^\circ$  (qui se dressent comme un obstacle à la propagation de la fissure) est grande. Ceci explique la résistance importante au délaminage des configurations ( $90^\circ/90^\circ$ ) et ( $0^\circ/90^\circ$ ).

#### 6.6- Discussion :

Le présent travail s'est proposé d'étudier les mécanismes d'endommagement par délaminage dans les matériaux composites stratifiés carbone / epoxy ( T300 / M10 ), et d'établir l'évolution de l'énergie d'amorçage et de propagation d'un composite de configurations ( $0^\circ/0^\circ$ ), ( $0^\circ/90^\circ$ ) et ( $90^\circ/90^\circ$ ) par application des concepts de la mécanique linéaire élastique de la rupture et de ses extensions.

Ce travail a permis de souligner l'influence de la position du défaut par rapport aux différentes orientations des plis sur le délaminage et surtout sur la valeur de la tenacité  $G_{Ic}$ . Ainsi, un défaut plan se trouvant entre des plis d'orientation différentes modifie le champs de contrainte et de déformation en tête de fissure. En effet, l'amorçage et la propagation du délaminage entre deux plis, dont l'un ou les deux sont à  $90^\circ$ , donne un taux de restitution d'énergie plus important que celui de l'unidirectionnel. Ce qui nous conduit à affirmer que les énergies d'amorçage et de propagation sont d'autant plus élevées que les plis à  $90^\circ$  sont présents dans le plan de propagation du délaminage.

Ces résultats confirment les analyses et les observations tirées à partir des réponses des jauges de déformation et la microfractographie. Les courbes de charge en collaboration avec les réponses des jauges définissent trois zones distinctes :

- zone linéaire de déformation élastique ;
- zone d'endommagement irréversible en tête de fissure ;
- zone de propagation du délaminage.

Neanmoins, il ressort de l'utilisation de la technique d'instrumentation le problème délicat du positionnement des jauges de déformation en tête de fissure et le problème du choix des jauges qui doivent être de très petite dimension pour donner une information des plus fidèle du champs de déformation en tête de fissure.

Il est à noter par ailleurs, le problème rencontré sur les premières éprouvettes testées, relatif à l'isolation électrique des jauges de déformation. Ainsi, pour éviter tout contact électrique entre les fils des jauges et l'éprouvette ( carbone conducteur ), une bande adhésive ( scotch ) a été collée aux endroits concernés par l'isolation. Le scotch en supportant une grande partie de la sollicitation imposée, a énormément perturbé les résultats des courbes de charge et de déformation, surtout en ce qui concerne les charges d'âmorçage.

## CONCLUSION

La présente étude s'est proposée de caractériser le délaminage dans les matériaux composites stratifiés et de suivre l'évolution des énergies d'amorçage et de propagation en utilisant des éprouvettes de type double poutre encastree ( DPE ou DCB ) composées d'un renfort en carbone et d'une résine organique de type epoxy. Ces éprouvettes se présentent sous trois configurations différentes où le défaut artificiel en teflon se situe entre des plis de  $(0^\circ/0^\circ)$ ,  $(0^\circ/90^\circ)$  et  $(90^\circ/90^\circ)$ .

Ce travail a permis de mettre en évidence deux étapes d'endommagement, l'une relative à l'amorçage de la fissure caractérisée par une phase de microfissuration sans ouverture de la zone endommagée, et une deuxième étape relative à la propagation caractérisée par une fissuration avec ouverture de la zone endommagée.

Cette étude a permis en outre, de déterminer les taux de restitution d'énergie critiques ou énergie d'amorçage :  $G_{Ic}$  des différentes configurations.

On a pu montrer que le taux de restitution d'énergie à l'amorçage augmentait selon les configurations de  $(0^\circ/0^\circ)$ ,  $(90^\circ/90^\circ)$  et  $(0^\circ/90^\circ)$ . Ainsi, la résistance du matériau au délaminage est plus importante pour les configurations renfermant des plis à  $90^\circ$ .

Ces mêmes résultats ont été vérifiés en propagation par l'utilisation des techniques des courbes " R " qui permettent de suivre l'évolution de l'énergie de rupture au cours de la croissance de la fissure. En effet, les plis à  $90^\circ$  présents dans le plan de propagation augmentent la résistance du matériau vis à vis de la propagation du délaminage.

L'étude des faciès de rupture a permis de distinguer plusieurs types d'endommagement :

- Décollement des fibres par paquets ;
- Rupture des fibres ;
- Microfissuration de la résine ;
- Rupture de la résine.

L'application de la méthode des éléments finis ( MEF ) en liaison étroite avec les essais de délaminage mode I permet de confirmer les valeurs des paramètres  $G_{Ic}$ , et de comparer l'allure des champs de contrainte et de déformation aux profils expérimentaux des déformations obtenus par la technique d'extensométrie.

La modélisation et le calcul par E.F pour la configuration (0°/0°) a été déjà fait par Y.PREL, M.L.BENZEKGAGH et J.M.ROELANDT. Les résultats obtenus ont donné une bonne corrélation avec les valeurs expérimentales pour l'essai de mode I. Il serait intéressant d'appliquer la MEF aux autres configurations (0°/90°) et (90°/90°) et ainsi comparer avec les résultats expérimentaux.

## ANNEXES

### A.1- Détermination de la matrice de passage [ T ] :

Soit un pli soumis à des sollicitations suivant les axes  $x, y$  qui forment un angle  $\theta$  avec les axes d'orthotropie (FIG-A1.1-) connaissant les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  dans  $\vec{R}_{xy}$ , qu'en serait-il des contraintes  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\tau_{12}$  dans  $\vec{R}_{12}$ .

Etudions l'équilibre des forces représentées sur la figure-A1.3-a ( ou FIG-A1.3-b ).

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 L e \cos(\theta) - \tau_{12} L e \sin(\theta) = \sigma_x b e + \tau_{xy} a e \\ \sigma_1 L e \sin(\theta) + \tau_{12} L e \cos(\theta) = \sigma_y a e + \tau_{xy} b e \end{cases}$$

notons par :  $m = \cos(\theta)$

$$n = \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 m - \tau_{12} n = \sigma_x \frac{b}{L} + \tau_{xy} \frac{a}{L} \\ \sigma_1 n - \tau_{12} m = \sigma_y \frac{a}{L} + \tau_{xy} \frac{b}{L} \end{cases}$$

or:  $\frac{b}{L} = \cos(\theta) = m$

et  $\frac{a}{L} = \sin(\theta) = n$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 (m^2 + n^2) = \sigma_x m^2 + \sigma_y n^2 + 2 \tau_{xy} m n \\ \tau_{12} (m^2 + n^2) = -\sigma_x m n + \sigma_y m n + \tau_{xy} (m^2 - n^2) \end{cases}$$

d'où les équations :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_x m^2 + \sigma_y n^2 + 2 m n \tau_{xy} \\ \tau_{12} = -m n \sigma_x + m n \sigma_y + (m^2 - n^2) \tau_{xy} \end{cases}$$

d'autre part l'étude de l'équilibre des forces représentées sur la figure -A1.4-b ( ou FIG-A1.4-a ), donnera les résultats suivants :

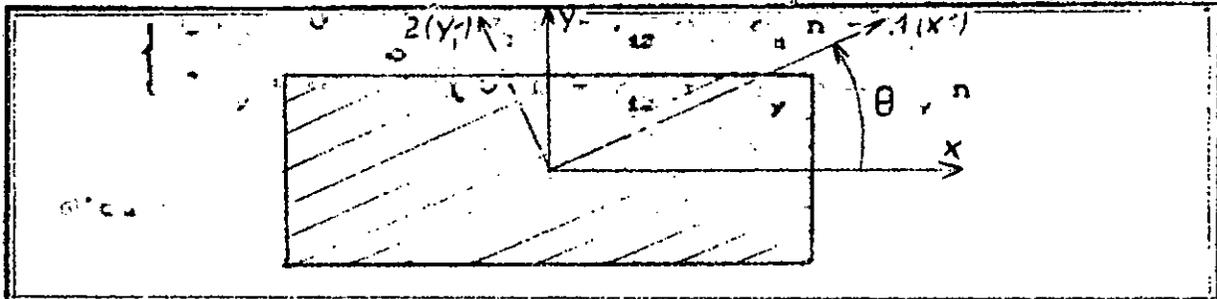


FIG-A1.1- OFF-AXIS

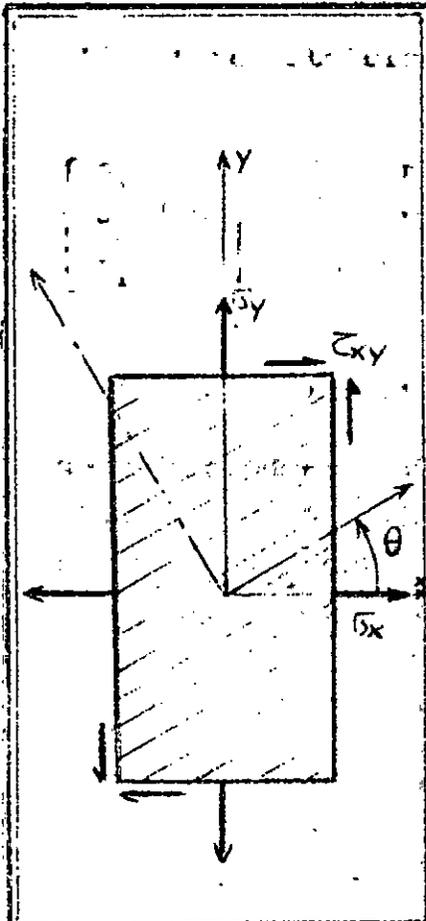


FIG-A1.2-

ETAT DE CONTRAINTE

SUR UN OFF-AXIS

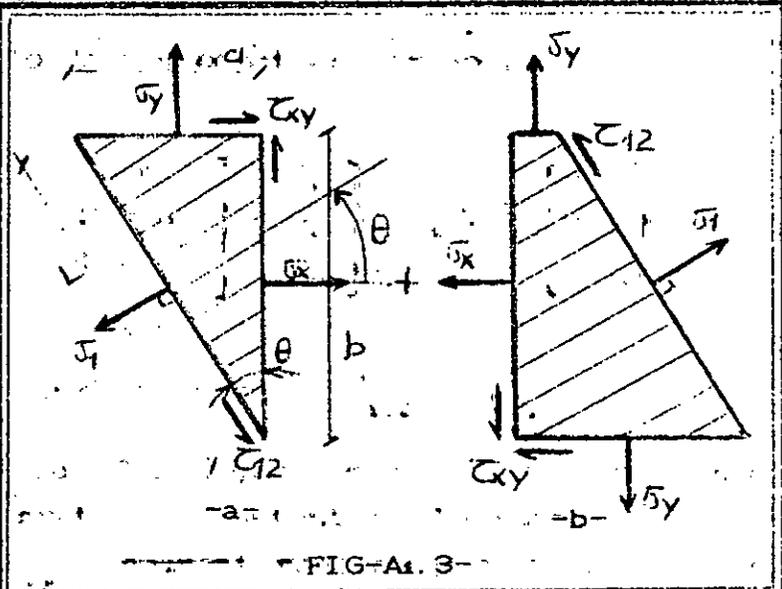


FIG-A1.3-

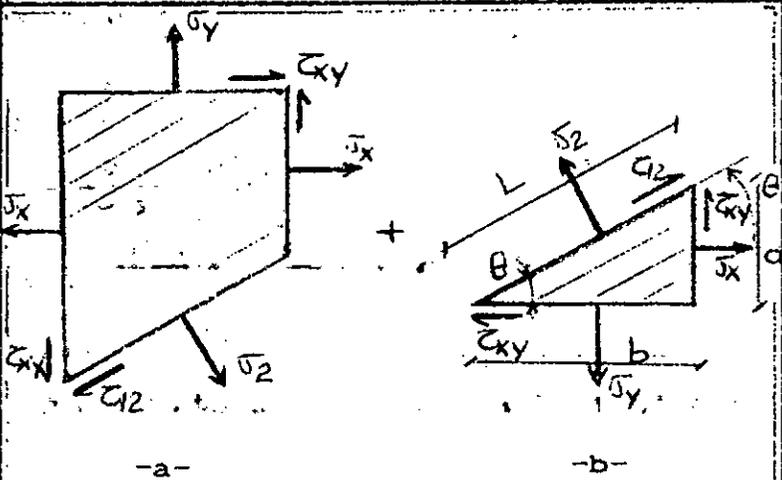


FIG-A1.4-

$$\begin{cases} x = m x' - n y' \\ y = n x' + m y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = m x + n y \\ y' = m y - n x \end{cases} \text{ avec : } m = \cos(\theta) \\ n = \sin(\theta)$$

On peut ainsi écrire n'importe quel vecteur du repère  $(x, y)$  en particulier  $u$  et  $v$ , en fonction de vecteurs d'un autre repère  $(x', y')$  en particulier  $u'$  et  $v'$ .

$$\begin{cases} x = m u' - n v' \\ v = n u' + m v' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = m u + n v \\ v' = m v - n u \end{cases}$$

Ceci nous donne :

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = m, \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = -n, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = n, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = m$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = m \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u'}{\partial y} = m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = m \frac{\partial v}{\partial x} - n \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = m \frac{\partial v}{\partial y} - n \frac{\partial u}{\partial y}$$

On peut dès lors écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} = \varepsilon_1 &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} \\ &= m \left( \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial v}{\partial x} \right) + n \left( m \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = m^2 \varepsilon_x + n^2 \varepsilon_y + m n \gamma_{xy}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = m^2 \varepsilon_x + n^2 \varepsilon_y + 2 m n \varepsilon_{xy}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y'} = \varepsilon_2 &= \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} \\ &= m \left( m \frac{\partial v}{\partial y} - n \frac{\partial u}{\partial y} \right) - n \left( m \frac{\partial v}{\partial x} - n \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = n^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y - 2 m n \varepsilon_{xy}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \gamma_{x'y'} = \gamma_{12} &= \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} \right) \\
 &+ \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) \\
 &= \left[ -n \left( m \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial v}{\partial x} \right) + m \left( m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\
 &+ \left[ m \left( m \frac{\partial v}{\partial x} - n \frac{\partial u}{\partial x} \right) + n \left( m \frac{\partial v}{\partial y} - n \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma_{12} = -2mn \varepsilon_x + 2mn \varepsilon_y + (m^2 - n^2) \gamma_{xy}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{12} = -mn \varepsilon_x + mn \varepsilon_y + (m^2 - n^2) \varepsilon_{xy}$$

En réécrivant les équations précédentes sous la forme matricielle, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

## A.2- Cas particuliers :

On suppose que les plis sont de même épaisseur.

### A.2.1- Stratifié symétrique ( $\theta(z) = \theta(-z)$ ) :

On dit qu'une pièce stratifiée est dotée de la symétrie miroir, lorsque les empilements de plis de part et d'autre du plan moyen sont identiques.

La symétrie miroir est importante lors de la constitution du stratifié car pour les composites fabriqués à chaud, lors du refroidissement, les plis ont tendance à se contracter différemment suivant le sens des fibres ou suivant le sens transverse. De là, il y'a apparition de contraintes d'origine thermique qui peuvent conduire à l'apparition de déformations d'ensemble de la pièce (voilement, gauchissement). Si la symétrie est réalisée, elle entraîne la symétrie des contraintes d'origine thermique.

a) - Stratifié équilibré :

On entend par stratifié équilibré, un stratifié qui est constitué par des plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  et pour tout pli à  $(+\theta)$  il lui est associé un pli d'orientation  $(-\theta)$  dans la partie symétrique du stratifié ( FIG-Az.1- ).

Les expressions des matrices  $[A]$  et  $[B]$  tirées de l'équation ( 2.39 ) nous donne :

$$\begin{aligned}
 * A_{16} &= \sum_{k=1}^{k=n} (\bar{Q}_{16})_k (h_k - h_{k-1}) \\
 &= [ (\bar{Q}_{16})_1 (h_1 - h_0) + (\bar{Q}_{16})_2 (h_2 - h_1) + (\bar{Q}_{16})_3 (h_3 - h_2) \\
 &\quad + (\bar{Q}_{16})_4 (h_4 - h_3) + \dots + (\bar{Q}_{16})_{n-3} (h_{n-3} - h_{n-2}) + \\
 &\quad (\bar{Q}_{16})_{n-2} (h_{n-2} - h_{n-3}) + (\bar{Q}_{16})_{n-1} (h_{n-1} - h_{n-2}) + \\
 &\quad (\bar{Q}_{16})_n (h_n - h_{n-1}) ]
 \end{aligned}$$

Avec :  $(h_1 - h_0) = (h_2 - h_1) = \dots = (h_k - h_{k-1}) = (h_n - h_{n-1})$

et  $(\bar{Q}_{16})_1 = (\bar{Q}_{16})_n = 0$  ,  $(\bar{Q}_{16})_2 = (\bar{Q}_{16})_{n-1} = 0$

$(\bar{Q}_{16})_3 = -(\bar{Q}_{16})_{n-3}$  ,  $(\bar{Q}_{16})_4 = -(\bar{Q}_{16})_{n-2}$  , ...

On trouve ainsi :  $A_{16} = 0$

En procédant de même, on aura :  $A_{26} = 0$

$$\begin{aligned}
 * B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
 &= \frac{1}{2} [ (\bar{Q}_{ij})_1 (h_1^2 - h_0^2) + (\bar{Q}_{ij})_2 (h_2^2 - h_1^2) + \\
 &\quad (\bar{Q}_{ij})_3 (h_3^2 - h_2^2) + (\bar{Q}_{ij})_4 (h_4^2 - h_3^2) + \dots + \\
 &\quad (\bar{Q}_{ij})_{n-3} (h_{n-3}^2 - h_{n-2}^2) + (\bar{Q}_{ij})_{n-2} (h_{n-2}^2 - h_{n-1}^2) \\
 &\quad (\bar{Q}_{ij})_{n-1} (h_{n-1}^2 - h_{n-2}^2) + (\bar{Q}_{ij})_n (h_n^2 - h_{n-1}^2) ]
 \end{aligned}$$

avec :

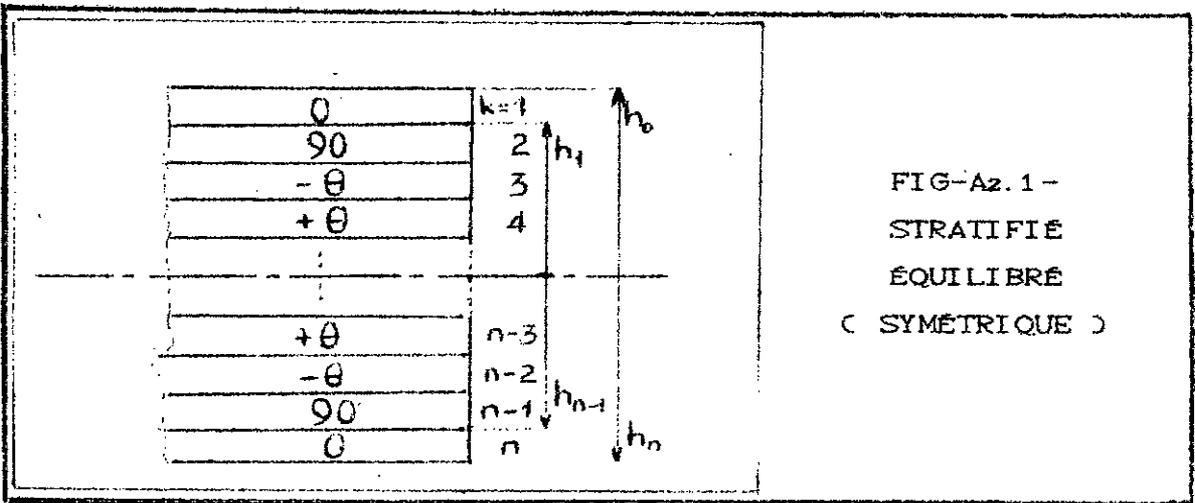


FIG-Az. 1-  
STRATIFIÉ  
ÉQUILIBRÉ  
( SYMÉTRIQUE )

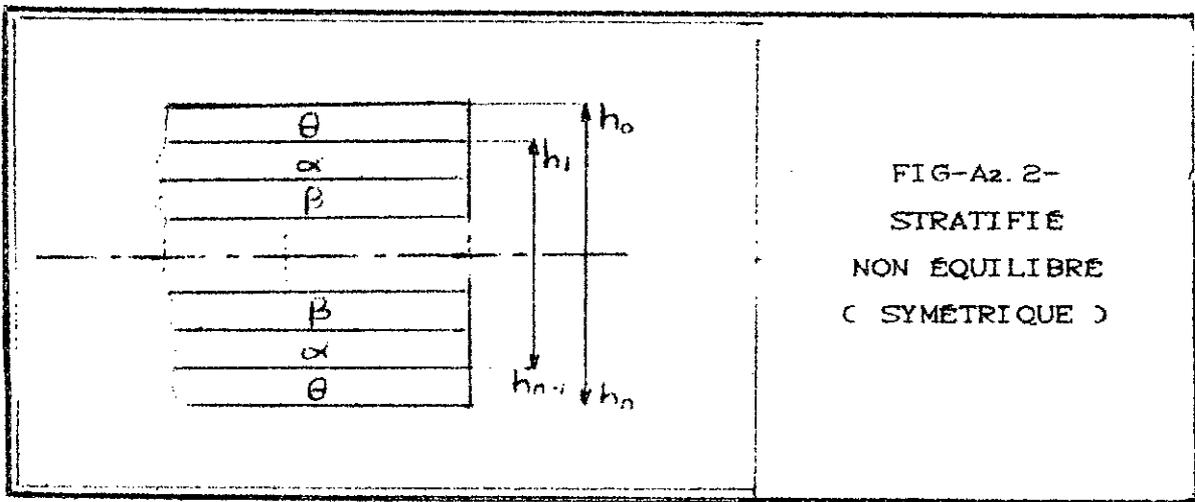


FIG-Az. 2-  
STRATIFIÉ  
NON ÉQUILIBRÉ  
( SYMÉTRIQUE )

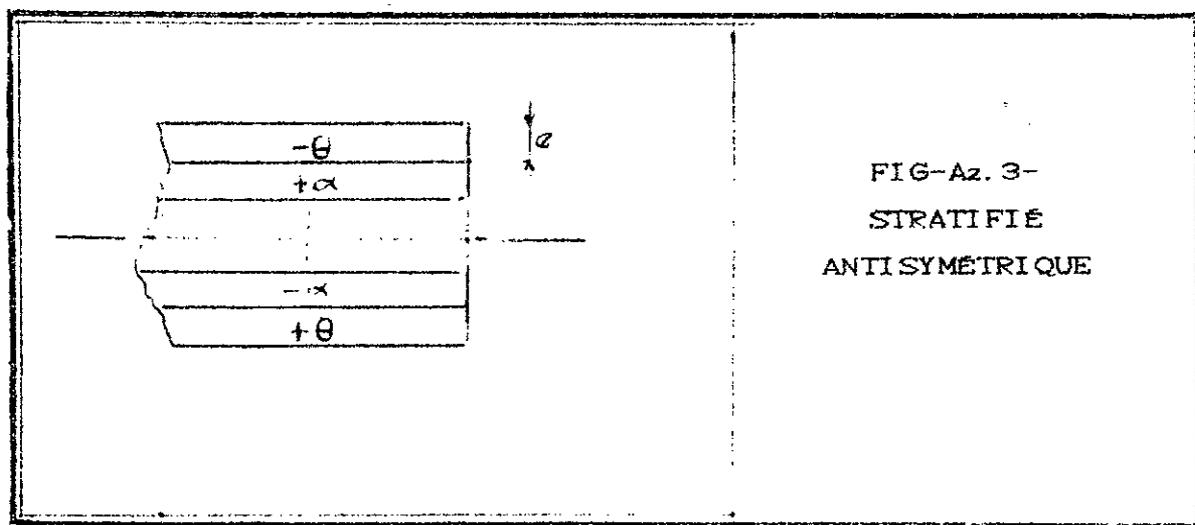


FIG-Az. 3-  
STRATIFIÉ  
ANTI SYMÉTRIQUE

$$(h_1^2 - h_0^2) = - (h_n^2 - h_{n-1}^2), (h_2^2 - h_1^2) = - (h_{n-1}^2 - h_{n-2}^2) \dots$$

$$\text{et } (\bar{Q}_{ij})_1 = (\bar{Q}_{ij})_n, \quad (\bar{Q}_{ij})_2 = (\bar{Q}_{ij})_{n-1} \dots$$

d'où l'on peut tirer :  $B_{ij} = 0$

Les équations fondamentales d'un stratifié équilibré symétrique se réduisent à :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

et

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Lorsque le stratifié est soumis uniquement à  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$ , on dit qu'il a un comportement en membrane ( in-plane ). Si le stratifié est soumis à  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$ , on dit qu'il a un comportement en flexion ( flexure ).

#### b)-Stratifié non équilibré :

Un stratifié non équilibré est tel qu'il est représenté dans la figure-Az.2-, avec  $\alpha \neq \theta \neq \beta$ . Il est évident que la matrice  $[ B ]$  est nulle, au même titre que pour le cas symétrique équilibré.

$$\Rightarrow B_{ij} = 0$$

#### A.2.2- Stratifié anti-symétrique ( $\theta(z) = -\theta(-z)$ ) :

On dit qu'un stratifié est anti-symétrique lorsque les empilements des plis, de part et d'autre du plan moyen sont d'orientations directement opposées en signes ( FIG-Az.3- ).

On remarque que l'anti-symétrie entraîne automatiquement un stratifié équilibré.

$$\begin{aligned}
 * B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} ( \bar{Q}_{ij} )_k ( h_k^2 - h_{k-1}^2 ) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} ( \bar{Q}_{ij} )_k e_k^* \\
 &= \frac{1}{2} [ ( \bar{Q}_{ij} )_1 e_1^* + ( \bar{Q}_{ij} )_2 e_2^* + \dots + ( \bar{Q}_{ij} )_{n-1} (-e_2^*) \\
 &\quad + ( \bar{Q}_{ij} )_n (-e_1^*) ]
 \end{aligned}$$

avec :  $( \bar{Q}_{11} )_1 - ( \bar{Q}_{11} )_n = ( \bar{Q}_{12} )_1 - ( \bar{Q}_{12} )_n = ( \bar{Q}_{21} )_1 - ( \bar{Q}_{21} )_n =$

$$( \bar{Q}_{22} )_1 - ( \bar{Q}_{22} )_n = ( \bar{Q}_{66} )_1 - ( \bar{Q}_{66} )_n = 0$$

mais :  $( \bar{Q}_{16} )_1 - ( \bar{Q}_{16} )_n \neq 0$  et  $( \bar{Q}_{26} )_1 - ( \bar{Q}_{26} )_n \neq 0$

$$( \bar{Q}_{16} )_2 - ( \bar{Q}_{16} )_{n-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad ( \bar{Q}_{26} )_2 - ( \bar{Q}_{26} )_{n-1} \neq 0$$

d'où :  $B_{ij} = 0$  sauf  $B_{16} \neq 0$  et  $B_{26} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 * A_{ij} &= \sum_{k=1}^{k=n} ( \bar{Q}_{ij} )_k ( h_k - h_{k-1} ) = \sum_{k=1}^{k=n} ( \bar{Q}_{ij} )_k e_k \\
 &= -e [ ( \bar{Q}_{ij} )_1 + ( \bar{Q}_{ij} )_2 + \dots + ( \bar{Q}_{ij} )_{n-1} + ( \bar{Q}_{ij} )_n ]
 \end{aligned}$$

avec :  $( \bar{Q}_{16} )_1 + ( \bar{Q}_{16} )_n = ( \bar{Q}_{26} )_1 + ( \bar{Q}_{26} )_n = \dots = 0$

mais :  $( \bar{Q}_{11} )_1 + ( \bar{Q}_{11} )_n \neq 0$ ,  $( \bar{Q}_{12} )_1 + ( \bar{Q}_{12} )_n \neq 0$ ,

$$( \bar{Q}_{22} )_1 + ( \bar{Q}_{22} )_n \neq 0, \quad ( \bar{Q}_{66} )_1 + ( \bar{Q}_{66} )_n \neq 0$$

d'où :  $A_{16} = A_{26} = 0$  Le restant des  $A_{ij}$  étant non nuls.

$$\begin{aligned}
 * D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=n} ( \bar{Q}_{ij} )_k ( h_k^3 - h_{k-1}^3 ) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=n} ( \bar{Q}_{ij} )_k e_k^{**} \\
 &= \frac{1}{3} [ ( \bar{Q}_{ij} )_1 e_1^{**} + ( \bar{Q}_{ij} )_2 e_2^{**} + \dots + ( \bar{Q}_{ij} )_{n-1} (-e_2^{**}) \\
 &\quad + ( \bar{Q}_{ij} )_n (-e_1^{**}) ]
 \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \left( \bar{Q}_{16} \right)_1 + \left( \bar{Q}_{16} \right)_n = \left( \bar{Q}_{26} \right)_1 + \left( \bar{Q}_{26} \right)_n = 0$$

$$\text{mais : } \left( \bar{Q}_{11} \right)_1 + \left( \bar{Q}_{11} \right)_n \neq 0, \left( \bar{Q}_{12} \right)_1 + \left( \bar{Q}_{12} \right)_n \neq 0,$$

$$\left( \bar{Q}_{22} \right)_1 + \left( \bar{Q}_{22} \right)_n \neq 0, \left( \bar{Q}_{66} \right)_1 + \left( \bar{Q}_{66} \right)_n \neq 0$$

donc :  $D_{16} = D_{26} = 0$ , le reste des  $D_{ij}$  étant non nuls.

Les équations d'un stratifié anti-symétrique s'écrivent alors :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ S_{YM} & A_{22} & 0 \\ & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ S_{YM} & 0 & B_{26} \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ S_{YM} & 0 & B_{26} \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ S_{YM} & D_{22} & 0 \\ & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Tableau récapitulatif :

Angle-Ply.	Stratifié non équilibré	Stratifié équilibré
symétrique $\theta(z) = \theta(-z)$	$B_{ij} = 0$	$B_{ij} = 0$ $A_{16} = A_{26} = 0$
anti-sym. $\theta(z) = -\theta(-z)$	.	$B_{ij} = 0$ sauf $B_{16}, B_{26}$ $A_{16} = A_{26} = 0$ $D_{16} = D_{26} = 0$
non symétrique		$A_{16} = A_{26} = 0$

A.3- Champ de contrainte et déplacement au voisinage du front de fissure :

Il a été montré que les problèmes bidirectionnels élastiques anisotropes ( [9] et [21] ) peuvent être convenablement formulés au moyen de fonctions analytiques  $\phi_j ( z_j )$  de la variable complexe :

$$z_j = x_j + y_j \quad ( j = 1, 2 )$$

où :

$$\begin{aligned} x_j &= x + \alpha_j y \\ y_j &= \beta_j y \end{aligned} \quad ( j = 1, 2 )$$

Les paramètres  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires de  $\mu_j$ .

avec :

$$\mu_j = \alpha_j + i \beta_j$$

La variable complexe  $\mu_j$  étant déterminée à partir de l'équation suivante [21] :

$$S_{11} \mu^4 - 2 S_{16} \mu^3 + ( 2 S_{12} + S_{66} ) \mu^2 - 2 S_{26} \mu + S_{22} = 0$$

où les  $S_{ij}$  sont les composantes de la matrice souplesse.

La solution de ce type de problème requiert la détermination de deux fonctions  $\phi_1( z_1 )$  et  $\phi_2( z_2 )$  qui satisfont les conditions aux limites au voisinage de la région renfermant la fissure considéré. Ainsi, les contraintes et déplacements dans une petite région entourant la fissure peut être écrite en mode I, comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix}$$

où :

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)}} \right) \right] \\ \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)}} \right) \right] \\ \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)}} \right) \right] \end{Bmatrix}$$

où : Re désigne la partie réelle du complexe entre crochets.

et

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = K_I \sqrt{2r} \begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix}$$

où :

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \mu_1 p_2 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)} \right) \right] \\ \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \mu_1 q_2 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_2 \sin(\theta)} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta)} \right) \right] \end{Bmatrix}$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des variables complexes.

$$\begin{aligned} \text{avec : } p_j &= S_{11} \sigma_j^2 + S_{12} - S_{16} \mu_j \\ q_j &= S_{12} \mu_j + \frac{S_{22}}{\mu_j} - S_{26} \end{aligned}$$

## REFERENCES

- [1]- S.W. TSAI et H.T. HAHN  
"Introduction to composite materials"  
Technomic publishing Co, Inc 1980
  
- [2]- R.M. JONES  
"Mechanics of composite materials"  
Technomic publishing Co., Inc
  
- [3]- D. GAY  
"Matériaux composites"  
Editions Hermes 1987
  
- [4]- J.E. ASHTON, J.C. HALPIN et P.H. PETIT  
"Primer on composite materials : analysis"  
Technomic publishing Co., Inc 1969
  
- [5]- R.M. CHRISTENSEN  
"Mechanics of composite materials"  
A Wiley-inter science publication
  
- [6]- D. BROEK  
"Elementary engineering fractures mechanics"  
Martinus nijhoff publishers 1983
  
- [7]- LABBENS
  
  
- [8]- BARTHELEMY

[9]- J. MALKIN

"Mécanique linéaire de la rupture"  
Edition Masson et Co. Paris 1972

[10]- "Encyclopédie des sciences industrielles"

Librairie Aristide Quillet Paris 1983

[11]- M.L. BENZEGGAGH

"Application de la mécanique de la rupture aux  
matériaux composites : exemple de la rupture par  
délaminage d'un stratifié"

Thèse de 3<sup>eme</sup> cycle, université de Compiègne Juin  
1980

[12]- K. KAMIMURA

"Délaminage par fatigue des matériaux composites  
Carbone/Epoxy"

Thèse 3<sup>eme</sup> cycle, université de Compiègne Juin 1980

[13]- C.B. CHOI

"Etude du comportement des matériaux composites en  
présence de concentration de contrainte (trous et  
entailles)"

Thèse de docteur ingénieur, U.T.C. Octobre 1984

[14]- N BOUDJEMAA

"Délaminage des matériaux composites stratifiés à  
faible et grande vitesse de sollicitation en mode I"

Thèse de docteur de l'UTC, Mars 1987

[15]- M. HACINI

"Etude des mécanismes de délaminage dans les  
composites stratifiés Carbone/Epoxy"

Diplôme d'étude approfondies (DEA), UTC Septembre  
1988

[16]- G.R. IRWIN

"Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate"

Journal of applied mechanics, 1957, 24, pp 361-364

[17]- A.A. GRIFFITH

"Theory of rupture"

Proceedings of the 1<sup>st</sup> international congress for applied mechanics, 1924, p55

[18]- W.F. BROWN et J.E. SRAWLEY

"planestrain crack toughness testing of high strength metallic materials"

ASTM. STP410, 1966

[19]- D.L. BOWLES

"Rectangular tensile sheet with symmetric edge crack"

Paper 64 APM 3, American society of mechanical engineers 1964

[20]-E. WU

"fracture mechanics of anisotropic plates composite material"

workshop technomic publishing Co., 1968,1, pp 20-43

[21]- G.S. SIH, P.C. PARIS and G.R. IRWIN

"On cracks in rectilinearly anisotropic bodies"

Int. journal fracture mechanics, 1965, 1, pp 89-203

[22]- G.R. IRWIN

"Structural aspects of brittle fracture"

Applied mat. research, 1964, pp 65-81

[23]- G.C. SIH et P.C. PARIS

"Stress analysis of cracks"

Fracture toughness testing and its application, ASTM STP 381, April 1965, pp 30-81

- [24]- TH.H. PIAN  
"Derivation of element stiffness matrix by assumed stress distribution"  
AIAA journal, 1964, 2, p 1333
- [25]- J.M. WHITNEY  
"A double cantilever beam test for characterizing mode I delamination of composite materials"  
Journal of reinforced plastics and composites, vol.1, Octobre 1982, pp 297-313
- [26]- P.P. GILLIS et J.J. GILMAN  
"Double cantilever beam cleavage mode of crack propagation"  
Journal of appl. physics, 35, 3, 1964, pp 647-652
- [27]- G.R. IRWIN et J.A. KIES  
"Critical energy rate analysis of fracture strength"  
Welding research supplement, 19, 1954, pp 193-198
- [28]- J.J. GILMAN  
"Direct measurements at the surface energies of crystals"  
Journal of app. phys., 1960, pp 2208-2218
- [29]- G.P. BERRY  
"Determination of fracture surface energies by the cleavage technique"  
Journal of appl. phys., 1963, 34, pp 62-68
- [30]- B. GROSS et J.E. SRAWLEY  
"Stress intensity factors for crack-line-loaded edge-crack specimens"  
Materials research and standards, 1967, 7, pp 155-162
- [31]- S. MOSTOVOY, P.B. CROSLLEY et E.J. RIPLING  
"Use of crack line loaded specimens for measuring

plane strain fracture toughness"

Journal of material, vol.2, 3, 1967, pp 661-681

[32]- M.F. KANNINEN

"An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest"

Int. J. solids structures, 1976, 12, pp 13-26

[33]- R.B. PIPE et N.J. PAGANO

"Interlaminar stresses in composite laminate under uniform axial extension"

Journal of composite mat., 1970, 4, pp 538-548

[34]- A.S.D. WANG, M. SLOMIANA et R.B. BUCINEL

"Delamination crack growth in composite laminates"

Delamination and debonding of materials, ASTM STP 876, 1985, pp 135-167

[35]- F.X. de CHARENTENAY, J.M. HARRY, Y.J. PREL et M.L. BENZEGGAGH

"Characterizing the effect of delamination defect by mode I delamination test"

Effect of defects a composite materials, ASTM STP 836, 1984, pp 84-103