

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE

28/83

lea

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Département Electronique et Electrotechnique

Electronique

PROJET DE FIN D'ETUDES

المكنية

ECOLE **THEME** NATIONALE POLYTECHNIQUE  
BIBLIOTHEQUE

Etude des lignes de transmission  
par les matrices de dispersion, les  
équations fonctionnelles et les  
équations aux différences.

Proposé et dirigé par :  
Mr A. ZARGUERRAS

Présenté par :  
Mr GUERSI Nourredine

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

**HOUARI BOUMEDIENNE**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER**

**Département Electronique et Electrotechnique**

PROJET DE FIN D'ETUDES

**THEME**

*Etude des lignes de transmission  
par les matrices de dispersion, les  
équations fonctionnelles et les  
équations aux différences.*

Proposé et dirigé par :  
Mr A. ZARGUERRAS

Présenté par :  
Mr GUERSI Nourredine

- 000 - REMERCIEMENTS - 000 -

Nous tenons à remercier ceux qui nous ont aidé à l'élaboration de cette étude de leur soutien technique et moral. En particulier notre promoteur M<sup>r</sup> A. Zerqueras qui a bien voulu diriger et corriger notre travail. Et M<sup>r</sup> Grabowski Professeur d'hyperfréquence pour son aide dans les mesures pratiques.

# - 000 SOMMAIRE - 000

## - Introduction

### - Chp I: Ligne de transmission et matrice de dispersion

- 1 - Généralité
- 2 - Composition des réseaux.
- 3 - Transformation linéaire associée au produit de dispersion.
- 4 - Produit matriciel.
- 5 - théorème de réciprocité
- 6 - Réseaux passifs.
- 7 - Points fixe et commutativité

### - Chp II: Operateur de transmission et de réflexion

- 1 - Transmission, réflexion et matrice de dispersion
- 2 - La norme et les transferts d'énergie.
- 3 - Adaptation.
- 4 - Propriétés particulières des réseaux passifs.

### - Chp III = Propriétés et matrices d'obstacles sans perte

- 1 - Réseaux réciproques sans perte
  - Matrices  $[Z]$ ,  $[Y]$ ,  $[h]$ ,  $[k]$  et  $[S]$
- 2 - Symétrie électriques des obstacles sans perte
- 3 - Cellules simples équivalentes à un obstacle
- 4 - Obstacle à diffraction électrique symétrique
- 5 - Influence des longueurs de lignes associées sur les schémas équivalents.
- 6 - Obstacles de filtrage.

Chp IV: Suite d'obstacles et de réseaux identiques.

- 1- Suite d'obstacle.
- 2- Suite de réseaux identiques
- 3- Equations fonctionnelles.
- 4- Application aux suites d'obstacles
- 5- Diélectrique non homogène.

- Mesures pratiques.

- Conclusion

- Appendice.

## INTRODUCTION

En 1862 G.G. Stokes étudiait les propriétés optiques de  $m+n$  lames de verre identiques, et résolvait les équations aux différences obtenues, en traitant la variable discrète  $n$  comme variable continue. Avec l'avènement de la technique des hyperfréquences, le développement de cette théorie fut facilité par le développement simultané de la théorie des matrices de dispersion.

Si nous appliquons la méthode de Stokes dans le cas d'une lame diélectrique d'épaisseur  $m+n$ , nous obtenons les mêmes équations, mais  $m+n$  est effectivement continue. Ainsi on s'aperçoit que les équations telles que celles de Stokes permettent une étude mathématique des obstacles qui jouent un rôle important dans la théorie des lignes H.F. La matrice de dispersion caractérise l'obstacle par ses coefficients de réflexion et de transmission. La fréquence de l'étude est supposée fixe, afin de pouvoir caractériser transmission et réflexion par un seul nombre, la variable considérée sera la distance. Si des obstacles se succèdent, on aura des équations aux différences, si l'épaisseur d'un milieu varie continuellement, on aura des équations fonctionnelles.

Ces équations doivent être distinguées de celles des circuits où la variable est la fréquence, alors que le circuit est gardé fixe. Elles relèvent, beaucoup moins de l'analyse des circuits que d'une méthode très générale appelée méthode des "constantes localisées". Le sens du terme "constantes localisées" est bien illustré par les équations fonctionnelles d'un diélectrique hétérogène. Le rôle de l'épaisseur de diélectrique compris entre  $x$  et  $y$  est calculé sans tenir compte de sa localisation dans le diélectrique. Les équations sont donc invariantes tant qu'elles sont localisées à cette épaisseur d'où le nom de "constantes localisées".

Au début de cette étude nous présentons certains aspects de la théorie des lignes de transmission utilisant des combinaisons de réseaux. Puis nous généraliserons en considérant d'abord des fonctions continues, ensuite des matrices, et des opérateurs d'un espace de Hilbert. Puis on mettra en évidence la portée pratique des méthodes étudiées par des mesures pratiques faites sur un filtre à cinq cellules identiques

-1-

# Ch I: LIGNE DE TRANSMISSION ET MATRICE DE DISPERSION

## I - Generalités

Une ligne pour micro-ondes comporte généralement des coudes, des raccords, des boucles et des jonctions entre les lignes de caractéristiques différentes. Tous ces objets constituent des obstacles puisque'ils réfléchissent partiellement l'énergie.

Si la longueur  $l$  de l'obstacle dans le sens de propagation est très petite devant la longueur d'onde  $\lambda_g$ , l'obstacle est dit court :

- Obstacles courts :

$l \ll \lambda_g$  : { fonte et Iris  
vis et tiges de petit diamètre

- obstacles longs :

$l \gg \lambda_g$  { coudes et jonctions.  
Raccords progressifs.

- Si  $l \approx \lambda_g$ , on peut considérer l'obstacle comme une suite d'obstacles courts.

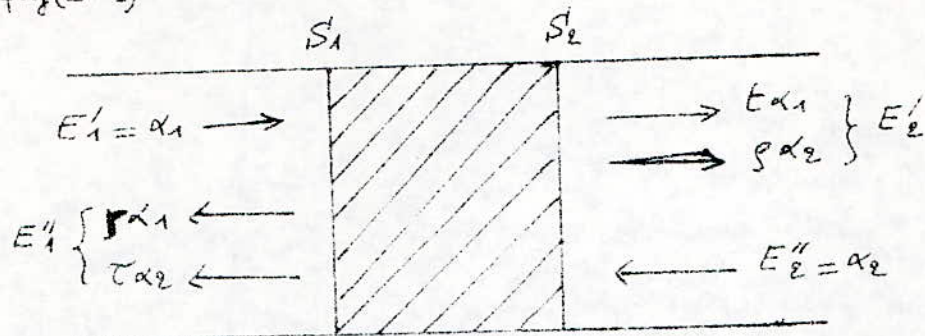
Le but de notre présente étude est de déterminer le comportement de ces obstacles qui font partie intégrante des lignes de transmission et dont la connaissance des caractéristiques permet une meilleure utilisation et un meilleur rendement dans l'émission et la réception des informations.

Pour ce fait nous allons considérer un obstacle (ou quadrupôle) et analyser son comportement vis à vis d'une onde électromagnétique quelconque incidente d'un côté ou de l'autre de celui-ci.



Supposons qu'on a une onde d'amplitude complexe  $\alpha_1$  incidente du côté gauche et une autre onde d'amplitude complexe  $\alpha_2$  incidente du côté droit de l'obstacle (fig I-1)

fig(I-1)



A l'entre de l'obstacle du côté gauche section  $S_1$  on a:

- Une onde d'amplitude électrique

$$E_1 = \alpha_1$$

se propageant de gauche à droite.

- Une onde d'amplitude électrique

$$E''_1 = r\alpha_1 + \tau\alpha_2$$

se propageant de droite à gauche.

A la sortie de l'obstacle du côté droit section  $S_2$  on a:

- Une onde d'amplitude électrique :

$$E'_2 = t\alpha_1 + s\alpha_2$$

se propageant de gauche à droite

- Une onde d'amplitude électrique :

$$E''_2 = \alpha_2$$

se propageant de droite à gauche.

On voit que  $E'_1, E''_1, E'_2, E''_2$  dependent de deux paramètres complexes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , donc ils ne sont pas indépendants.

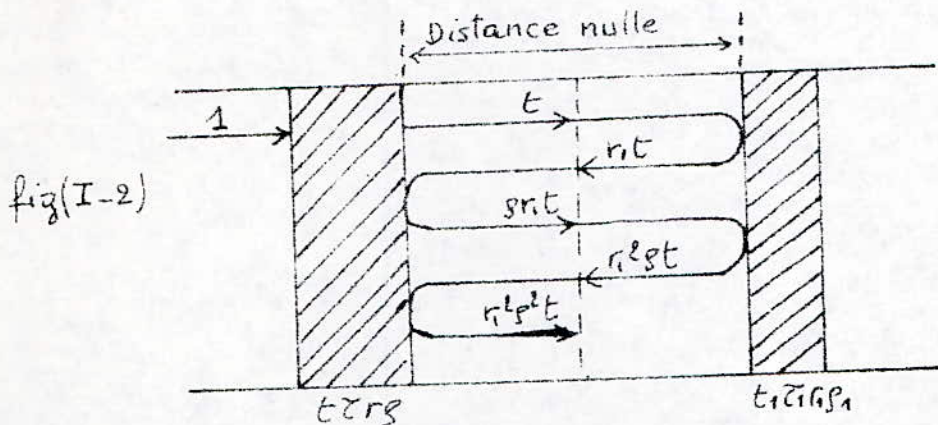
Ainsi on peut caractériser l'état électromagnétique de chaque côté d'un obstacle par :

- L'amplitude électrique totale  $E_1 = E'_1 + E''_1$  et l'amplitude magnétique totale  $H_1 = E'_1 - E''_1$  du côté gauche.
- L'amplitude électrique totale  $E_2 = E'_2 + E''_2$  et l'amplitude magnétique totale  $H_2 = E'_2 - E''_2$  du côté droit.

Suivant la nature des problèmes posés, on utilisera plus commodément soit les amplitudes totales électromagnétiques soit les amplitudes partielles électriques.

### COMPOSITION GENERALE DES RESEAUX

Considérons un obstacle caractérisé par les coefficients propres  $(t, \tau, r, s)$  adjacent à un second obstacle  $(t_1, \tau_1, r_1, s_1)$  (fig I-2)



Si l'onde incidente possède l'amplitude 1, l'amplitude complexe de l'onde se dirigeant de gauche à droite entre les obstacles est :

$$A = t (1 + r_1 s + r_1^2 s^2 + r_1^3 s^3 + \dots) = \frac{t}{1 - r_1 s}$$

Ceci en supposant  $|r_1 s| < 1$ , ce qui est nécessairement vérifié.

Après avoir franchi le second obstacle, l'onde possède l'amplitude :

$$T = \frac{t t_1}{1 - r_1 s}$$

$E_e$  qui exprime la transmission de l'ensemble. L'onde A réfléchi par le second obstacle et transmise à gauche possède l'amplitude :

$$R = r + \frac{r_1 t \tau}{1 - r_1 s}$$

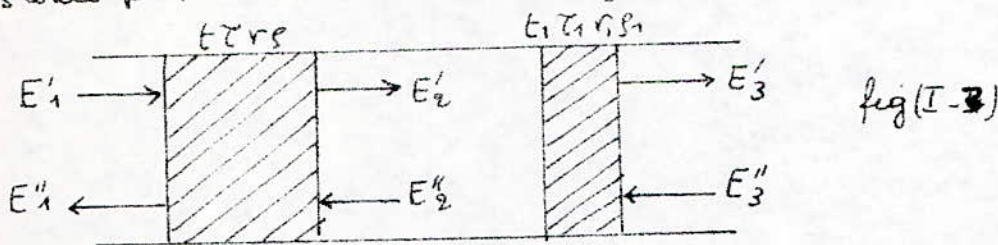
qui donne la réflexion de l'ensemble. Nous pouvons calculer de même la réflexion et la transmission à droite en introduisant la matrice de dispersion : matrice qui exprime les amplitudes électriques des ondes qui sortent de l'obstacle en fonction des amplitudes électriques des ondes qui vont vers lui. (qui y entrent)

$$\begin{pmatrix} E_1'' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2'' \end{pmatrix} \quad \text{ou : } [S] = \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

Les quatre équations précédentes, peuvent être résumées comme suit :

$$\begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_1 & \tau_1 \\ t_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + \frac{r_1 t \tau}{1 - r_1 s} & \frac{t t_1}{1 - r_1 s} \\ \frac{\tau \tau_1}{1 - r_1 s} & s_1 + \frac{s t \tau}{1 - r_1 s} \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

L'astérisque désigne une opération que l'on appellera produit de dispersion, Il permet d'obtenir la matrice de dispersion de l'obstacle constitué par deux obstacles adjacents fig (I-4)



Nous pouvons obtenir ce résultat différemment et montrer que le produit de dispersion est associé à une transformation linéaire pour cela on considère les deux obstacles adjacents de la fig (I-3). où les amplitudes des ondes obéissent aux relations :

$$\begin{pmatrix} E_1'' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} E_2'' \\ E_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & \tau_1 \\ t_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2' \\ E_3'' \end{pmatrix}$$

(1-2) (1-3)

Soit:  $E''_1 = r E'_1 + \tau E''_2$  (1)

$$E''_2 = r_1 E'_2 + \tau_1 E''_3$$
 (2)

$$E'_2 = t E'_1 + s E''_2$$
 (3)

(2) et (3)  $\Rightarrow E''_2 = r_1 (t E'_1 + s E''_2) + \tau_1 E''_3$   
 ou  $E''_2 (1 - r_1 s) = r_1 t E'_1 + \tau_1 E''_3$  (4)

(1) et (4) donnent:

$$E''_1 = \left( r + \frac{r_1 t \tau}{1 - r_1 s} \right) E'_1 + \frac{\tau \tau_1}{1 - r_1 s} E''_3$$

De la même façon,  $E'_3$  s'exprime en fonctions de  $E'_1$  et  $E''_3$   
 on obtient:

$$E'_3 = \frac{t t_1}{1 - r_1 s} E'_1 + \left( s_1 + \frac{s t_1 \tau_1}{1 - r_1 s} \right) E''_3$$

D'où sous forme matricielle:

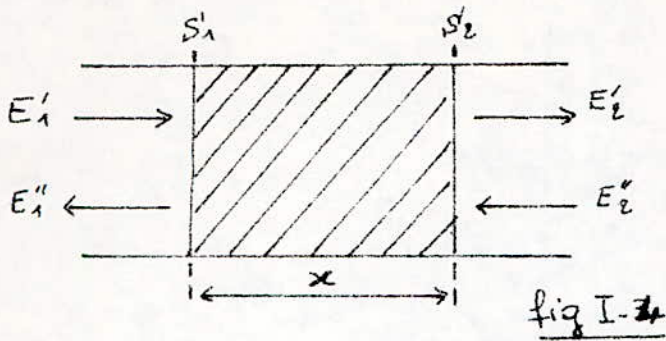
$$\begin{pmatrix} E''_1 \\ E'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + \frac{r_1 t \tau}{1 - r_1 s} & \frac{\tau \tau_1}{1 - r_1 s} \\ \frac{t t_1}{1 - r_1 s} & s_1 + \frac{s t_1 \tau_1}{1 - r_1 s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_1 \\ E''_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice de dispersion est entièrement déterminée par la transformation linéaire associée. La matrice ci-dessus est bien la matrice de dispersion de l'ensemble de deux obstacles adjacents. Nous avons donc retrouvé l'équation (1-1) et montré sa compatibilité avec les équations (1-2) et (1-3)

Pour une ligne de transmission de longueur  $x$  ( $x > 0$ ) de constante de propagation  $K$  on a: fig (I-3)

$$\begin{pmatrix} E''_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_1 \\ E''_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} t & \tau \\ t & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{\delta K x} \\ e^{\delta K x} & 0 \end{pmatrix}$$

La ligne de longueur  $x$  se comporte comme un obstacle adapté aux sections  $S_1$  et  $S_2$



Avec :

$$E_2' = E_1' e^{jKx}$$

$$E_1'' = E_2'' e^{jKx}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} t = \tau = e^{jKx} \\ r = \rho = 0 \end{cases}$$

Si la ligne est sans pertes  $|t| = 1$  ce qui entraîne pour  $K$  constante de propagation est une constante réelle :  $K \in \mathbb{R}$ .

La ligne est passive si  $|t| \leq 1$  ceci entraîne :  $K$  est une constante complexe  $K \in \mathbb{C}$

Si les champs électriques de part et d'autre d'un obstacle sont égaux on dit que l'obstacle est un shunt et on démontre que sa matrice de dispersion s'écrit  $(t \tau r \rho)$  si et seulement si :

$$t = 1+r \quad \text{et} \quad \tau = 1+\rho$$

Donc l'obstacle  $(t \tau r \rho)$  est un shunt si :  $E_1' + E_1'' = E_2' + E_2''$ . (1)

D'après (I-2) :

$$\begin{aligned} E_1'' &= r E_1' + \tau E_2' \\ E_2' &= t E_1' + \rho E_2'' \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow E_1' (1+r) + \tau E_2' = t E_1' + (1+\rho) E_2''$$

Equation qui n'est vérifiée que si  $t = 1+r$  et  $\tau = 1+\rho$

Supposons maintenant que

$$\begin{cases} t = 1+r \\ \tau = 1+\rho \end{cases} \quad \text{et montrons que ceci implique : } E_1' + E_1'' = E_2' + E_2''$$

$$\text{on a : } \begin{cases} E_1'' = r E_1' + \tau E_2' \\ E_2' = t E_1' + \rho E_2'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1'' = r E_1' + (1+\rho) E_2' \\ E_2' = (1+t) E_1' + \rho E_2'' \end{cases}$$

$$\text{d'où : } E_2' - E_1'' = (1+t) E_1' - r E_1' + \rho E_2'' - (1+\rho) E_2' = E_1' - E_2''$$

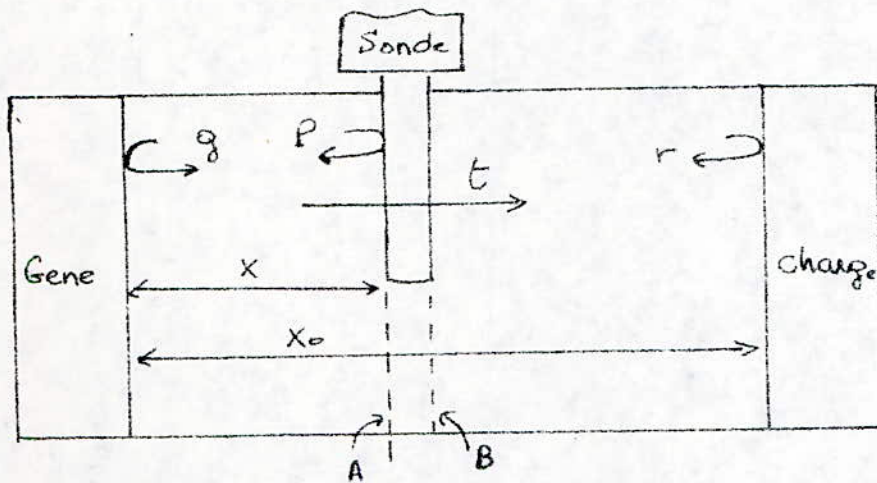
$$\text{Donc : } \begin{cases} t = 1+r \\ \tau = 1+\rho \end{cases} \Rightarrow E_1' + E_1'' = E_2' + E_2''$$

l'obstacle  $(t \tau r \rho)$  est donc un shunt si et seulement si  $\begin{cases} t = 1+r \\ \tau = 1+\rho \end{cases}$

Pour mesurer l'amplitude des champs circulants dans une ligne de transmission on y introduit une sonde (obstacle) reliée à un détecteur. On voudrait connaître la valeur des champs  $E$  et  $E'$  existant de part et d'autre de la sonde. Pour ce fait examinons l'expérience suivante:

On dispose d'un générateur qui débite la puissance unité sur une charge adaptée et d'une sonde symétrique fig(I-3)

fig I-3: Sonde symétrique et charge non adaptée



$$r = R e^{j(R' + 2kx_0 - 2kx)}$$

$$g = G e^{j(G' + 2kx)}$$

$$P = P e^{jP'}$$

$$t = T e^{jT'}$$

$r$ : coefficient de réflexion à gauche de la charge.

$g$ : " " " " " à droite du générateur

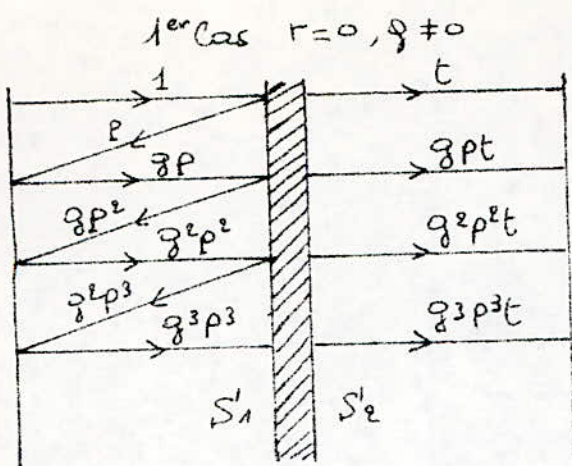
$P$  et  $t$  coefficients de réflexion et de transmission de la sonde

Pour suivre la propagation des ondes entre le générateur, la sonde et la charge, on supposera une fois  $r=0, g \neq 0$  et une autre fois  $g=0, r \neq 0$  ( $P$  et  $t$  étant différents de zéro) on obtient les diagrammes suivants: fig(I-3')

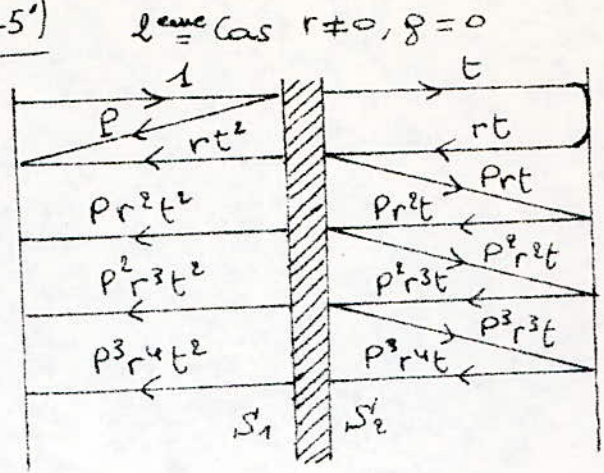
Le cas  $r=0, g \neq 0$  donne:

$$(S_1 + S_2)_{r=0} = \frac{1 + P + t}{1 - gP}$$

-8-  
fig(I-5')



$$S_1 = \frac{1+P}{1-gP} \quad S_2 = \frac{t}{1-gP}$$



$$S_1 = 1 + P + \frac{rt^2}{1-Pr} \quad S_2 = \frac{t(1+r)}{1-Pr}$$

Le cas  $r \neq 0, g=0$  donne:

$$(S_1 + S_2)_{g=0} = \frac{(1+P+t)(1-Pr+rt)}{1-Pr}$$

Le cas:  $r \neq 0$  et  $g \neq 0$  donne:

$$(S_1 + S_2) = \frac{(1+P+t)(1-Pr+rt)}{(1-Pr)(1-Pg) - g r t^2 p} \quad (1)$$

Par la ~~composante~~ raison geometrique de toutes les composantes est  $g r t^2 p$  i.e:  $g p \times r t^2$

D'où en developpant (1):

$$S_1 + S_2 = E + E' = \frac{(1+P+t)(1-Pr+rt)}{1-Pr - g [P+r(t+P)(t-P)]}$$

et:

$$\frac{|E + E'|^2}{|1+P+t|^2} = \frac{|1-Pr+rt|^2}{|1-Pr - g [P+r(t+P)(t-P)]|^2} \quad (1-4)$$

La sonde précédente est reliée à un détecteur et à un voltmètre et la tension  $V$  est proportionnelle à  $|E+E'|^2$

Soit :

$$V = \alpha |E+E'|^2 \quad \alpha : \text{entier réel}$$

Sachant que l'expression du taux d'ondes stationnaire est :

$$(T.O.S)^2 = S^2 = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$$

Il s'écrit :

$$S^2 = \frac{|E+E'|_{\max}^2}{|E+E'|_{\min}^2}$$

On montre que le coefficient de réflexion de la charge est :

$$R = \frac{S-1}{S+1}$$

indépendamment du coefficient de réflexion  $G$  du générateur.

En posant  $P=0$ ,  $t=1$  dans l'équation (I-4) on a :

$$|E+E'| = \frac{2|1+r|}{|1-gr|}$$

$$\text{où : } r = R e^{j[R'+2K(x_0-x)]} = r(x)$$

$$g = G e^{j[G'+2Kx]} = g(x)$$

$$rg = R.G e^{j(R'+G'+2Kx_0)} \quad \text{indépendant de } x$$

Donc  $|E+E'|$  est maximum (resp: min) si  $|1+r|$  est maximum (respectivement -min):

$$|1+r| = \left| 1 + R \cos \theta_r + j R \sin \theta_r \right| = \sqrt{1 + R^2 + 2R \cos \theta_r}$$

$$|1+r|_{\max} = 1+R \quad \text{pour } \cos \theta_r = 1 \Rightarrow \theta_r = 2N\pi$$

$$|1+r|_{\min} = 1-R \quad \text{pour } \cos \theta_r = -1 \Rightarrow \theta_r = (2N+1)\pi$$

$$\text{Et : } \frac{|E+E'|_{\max}}{|E+E'|_{\min}} = \frac{1+R}{1-R} = S \Rightarrow R = \frac{S-1}{S+1}$$



Si la réflexion de la sonde n'est <sup>-10-</sup> pas négligeable, mais  $R=0$

$$|E+E'| = \frac{|1+P+t|}{|1-\rho P|} \quad \text{d'après (I-4)}$$

$|E+E'|$  est maximum (resp. min) si  $|1-\rho P|$  est minimum (resp. max)

$$|1-\rho P| = \left| 1 - GP \cos \theta + j GP \sin \theta \right| \quad \theta = \theta_G + \theta_P$$

$$= \sqrt{1 + (GP)^2 - 2GP \cos \theta}$$

$$|1-\rho P|_{\min} = 1 - GP \quad \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 2N\pi$$

$$|1-\rho P|_{\max} = 1 + GP \quad \cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = (2N+1)\pi$$

Le taux d'ondes stationnaires apparent s'écrit donc :

$$S'_{\text{mes}} = \frac{|E+E'|_{\max}}{|E+E'|_{\min}} = \frac{1+GP}{1-GP} = S'_0$$

$$\text{d'où : } GP = \frac{S'_0 - 1}{S'_0 + 1}$$

Une méthode expérimentale de mesure de  $G$  peut en être déduite  
La sonde en  $x_0$  donne :

$$P = \frac{S' - 1}{S' + 1}$$

En insérant une ligne adaptée à droite de  $x_0$ , la sonde en  $x$   
donne :

$$GP = \frac{S'_0 - 1}{S'_0 + 1}$$

D'où l'expression de  $G$  :

$$G = \frac{(S'_0 - 1)(S' + 1)}{(S'_0 + 1)(S' - 1)}$$

4- PRODUIT MATRICIEL

La multiplication (1-1) n'est évidemment pas une multiplication de matrices. Pour se ramener au produit matriciel ordinaire remarquons qu'en résolvant les équations (1-2) en  $E'_1$  et  $E''_2$  on obtient:

$$\begin{cases} E''_1 = S'_{11} E'_1 + S'_{12} E''_2 \\ E'_2 = S'_{21} E'_1 + S'_{22} E''_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E'_1 = C_{11} E'_2 + C_{12} E''_2 \\ E''_1 = C_{21} E'_2 + C_{22} E''_2 \end{cases}$$

Avec: 
$$\begin{cases} C_{11} = \frac{1}{S'_{21}} & C_{12} = -\frac{S'_{22}}{S'_{21}} \\ C_{21} = \frac{S'_{11}}{S'_{21}} & C_{22} = S'_{12} - \frac{S'_{11} S'_{22}}{S'_{21}} \end{cases} \quad (18)$$

où:  $[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$  est la matrice d'ondes.

Elle donne la relation entre les ondes existants d'un côté et ceux existants de l'autre côté de l'obstacle.

Ainsi à:

$$[S] = \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & \rho \end{pmatrix} \text{ on associe } [C] = \begin{pmatrix} 1/t & -s/t \\ r/t & \tau - \frac{r\rho}{t} \end{pmatrix}$$

Et inversement:

$$\begin{cases} S'_{11} = \frac{C_{21}}{C_{11}} & S'_{12} = C_{22} - \frac{C_{12} C_{21}}{C_{11}} \\ S'_{21} = \frac{1}{C_{11}} & S'_{22} = -\frac{C_{12}}{C_{11}} \end{cases} \quad (19)$$

Au produit de dispersion correspond un produit ordinaire de matrices d'ondes puis la transformation des  $C_{ij}$  en  $S'_{ij}$ . Ceci montre incidemment que le produit de dispersion est associatif:

$$S'_1 * (S'_2 * S'_3) = (S'_1 * S'_2) * S'_3$$

Pour retrouver le résultat (1-1) on effectue le produit ordinaire de matrices d'ondes:  $[C][C_1] = [C']$

-13-

$$[C'] = \begin{pmatrix} 1/t & -s/t \\ r/t & \frac{t\tau - rs}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t_1 - s_1/t_1 \\ r_1/t_1 & \frac{t_1\tau_1 - r_1s_1}{t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-r_1s}{tt_1} & \frac{-s_1 - s(t_1\tau_1 - r_1s_1)}{tt_1} \\ \frac{r+r_1(t\tau - rs)}{tt_1} & \frac{-rs_1 + (t\tau - rs)(t_1\tau_1 - r_1s_1)}{tt_1} \end{pmatrix}$$

Puis d'après: (1-9)

$$\begin{cases} S'_{11} = \frac{C'_{21}}{C'_{11}} = r + \frac{r_1 t \tau}{1 - r_1 s} & S'_{12} = \frac{C'_{22}}{C'_{11}} - \frac{C'_{12} C'_{21}}{C'_{11}} = \frac{\tau \tau_1}{1 - r_1 s} \\ S'_{21} = \frac{1}{C'_{11}} = \frac{t t_1}{1 - r_1 s} & S'_{22} = -\frac{C'_{12}}{C'_{11}} = s_1 + \frac{s t_1 \tau_1}{1 - r_1 s} \end{cases}$$

D'où le résultat obtenu par l'équation (1-1)

$$\begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_1 & \tau_1 \\ t_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + \frac{r_1 t \tau}{1 - r_1 s} & \frac{\tau \tau_1}{1 - r_1 s} \\ \frac{t t_1}{1 - r_1 s} & s_1 + \frac{s t_1 \tau_1}{1 - r_1 s} \end{pmatrix}$$

La matrice de dispersion donne la relation entre les amplitudes partielles des champs entrants et ceux sortant d'un côté et de l'autre d'un obstacle.

Soit l'obstacle  $(t\tau rs)$ : faisons les rapports:

$$\frac{t\tau}{rs} = \frac{|t||\tau|}{|r||s|} e^{j(\angle t + \angle \tau - \angle r - \angle s)} = \frac{|t||\tau|}{|r||s|} e^{j\varphi_0}$$

$$\text{et } \frac{t}{\tau} = \frac{|t|}{|\tau|} e^{j(\angle t - \angle \tau)} = \frac{|t|}{|\tau|} e^{j\varphi_1}$$

Si cet obstacle est intercalé entre deux portions de ligne sans pertes telle que:

$$(a \ a \ 0 \ 0) * (t\tau rs) * (b \ b \ 0 \ 0) \quad \text{avec } |a| = |b| = 1$$

On a d'après la définition du produit de dispersion:

$$\begin{pmatrix} r_1 & \tau_1 \\ t_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} t & \tau \\ t & s \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 r & ab\tau \\ abt & b^2 s \end{pmatrix}$$

d'où :

-14-

$$\frac{t_1 \tau_1}{r_1 \beta_1} = \frac{abt \cdot ab\tau}{a^2 r \cdot b^2 \beta} = \frac{t\tau}{r\beta} = \frac{|t| |\tau|}{|r| |\beta|} e^{i\varphi_0}$$

$$\text{et: } \frac{t_1}{\tau_1} = \frac{abt}{ab\tau} = \frac{t}{\tau} = \frac{|t|}{|\tau|} e^{i\varphi_1}$$

D'après ces rapports on conclue que  $\varphi_1$  et  $\varphi_0$  sont invariants lorsqu'on ajoute des portions de ligne sans pertes à un obstacle quelconque ( $t, \tau, r, \beta$ )

En montrant qu'il existe une fonction  $f(|t|, |\tau|, |r|, |\beta|)$  qui est un invariant, et qui elle s'écrit :

$$f(|t|, |\tau|, |r|, |\beta|) = F(\varphi_0, \varphi_1)$$

On demontre que  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont les seuls angles invariants lorsqu'on modifie la valeur d'une ligne :

les rapports :  $\frac{t\tau}{r\beta}$  et  $\frac{t}{\tau}$  étant invariants, le produit

$$\frac{t\tau}{r\beta} \cdot \frac{t}{\tau} = \frac{|t| |\tau|}{|r| |\beta|} \cdot \frac{|t|}{|\tau|} e^{i(\varphi_0 + \varphi_1)}$$

tel que :

$$f(|t|, |\tau|, |r|, |\beta|) = \frac{|t|^2}{|r| |\beta|} e^{i(\varphi_0 + \varphi_1)} = F(\varphi_0, \varphi_1)$$

Est aussi invariant. Et  $f(|t|, |\tau|, |r|, |\beta|) = F(\varphi_0, \varphi_1)$  est un invariant donc  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont les seuls angles invariants lorsqu'on modifie la valeur d'une ligne.

### 5- THEOREME DE RECIPROCITE

La puissance étant proportionnelle au carré de l'amplitude, un réseau est sans pertes si :

$$|t|^2 + |r|^2 = 1; \quad |\tau|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.10)$$

On a deux obstacles  $(t, r, s)$  identiques adjacents, le deuxième obstacle  $(\tau, \beta, r)$  est retourné de façon à ce que ses pôles soient inversés  $(\tau, \beta, r)$  au lieu de  $(t, r, s)$  fig (I-6) supposons que la distance entre ces deux obstacles est telle que la transmission de l'ensemble soit maximale. Le module du coefficient de transmission est :

$$|t| (1 + |\beta|^2 + |\beta|^4 + \dots) |\tau| = \frac{|t| |\tau|}{1 - |\beta|^2}$$

Le coefficient de transmission ne pouvant pas être supérieur à l'unité

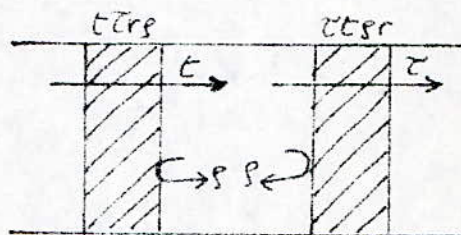


fig (I-6)

$$|t| |\tau| \leq 1 - |\beta|^2 = |\tau|^2 \quad (1.11)$$

Ainsi on a :  $|t| \leq |\tau|$ . Si nous retournons les deux obstacles précédents de façon à échanger leurs faces, le même raisonnement nous prouve que :  $|\tau| \leq |t|$ . La compatibilité de ces deux relations exige :

$$\left. \begin{array}{l} |t| \leq |\tau| \\ |\tau| \leq |t| \end{array} \right\} \Rightarrow |t| = |\tau|$$

Le théorème de réciprocité complet  $t = \tau$  ne peut être démontré sans tenir compte de ce qui se passe entre les obstacles. S'ils sont séparés par une longueur  $x$  de ligne sans pertes, le coefficient de transmission :

$$\left| \frac{t \tau e^{j\delta x}}{1 - s^2 e^{2j\delta x}} \right|$$

Est maximal pour :  $x = -L_s$  puisque :

$$|t|^2 = |\tau|^2 = 1 - |s|^2$$

Cette valeur maximale est 1, pour laquelle le coefficient de réflexion est :

nul :  $R = r + \frac{t\tau e^{2ix}}{1 - s^2 e^{2ix}} = 0 \Rightarrow r = \frac{-|s| t\tau e^{ix}}{1 - |s|^2}$

et :  $|r| = |t| + |L\tau| + |Lx| \pm (2n+1)\pi$

d'où :  $\varphi_0 = |t| + |L\tau| - |r| - |s| = (2n+1)\pi$  (n : entier)

C'est une relation entre phase qui résulte des conditions énergétiques aux extrémités. Lesquelles ne supposent pas  $Lt = L\tau$ .

Pour un obstacle réciproque sans pertes ( $t\tau rs$ ) tel que  $r \neq 0$

$\varphi_0 = |t| + |L\tau| - |r| - |s| = \pi [2n\pi]$  (1-12)

d'où :  $|t| + |L\tau| = |r| + |s| + \pi$

sachant que  $|t| = |L\tau| \Rightarrow |r| = |s|$

d'après (1-10) :

$t\tau - rs = -|t|^2 e^{j(|r| + |s|)} - |r|^2 e^{j(|r| + |s|)} = -(|t|^2 + |r|^2) e^{j(|r| + |s|)}$

on déduit :  $t\tau - rs = -e^{j(|r| + |s|)}$  (1-13)

Relation vérifiée pour tout obstacle ( $t\tau rs$ ) sans pertes.

Si l'obstacle ( $t\tau rs$ ) précédent est placé à gauche d'un obstacle quelconque de coefficient de réflexion complexe  $r_1$ , l'ensemble forme un obstacle dont le coefficient de réflexion à gauche R est :

$R = r + \frac{r_1 t\tau}{1 - r_1 s} = \frac{r + r_1 (t\tau - rs)}{1 - r_1 s} = \frac{|r| e^{jLr} - |r_1| e^{j(Lr + Ls + Lr_1)}}{1 - |r_1| |s| e^{j(Lr_1 + Ls)}}$

$R = e^{jLr} \frac{|r| - |r_1| e^{j(Ls + Lr_1)}}{1 - |r_1| |s| e^{j(Ls + Lr_1)}} = e^{jLr} \frac{|r| - |r_1| e^{j\varphi}}{1 - |r_1| |s| e^{j\varphi}}$  (1-14)

Avec :  $\varphi = Ls + Lr_1$

Considérons deux obstacles sans perte placés à une distance telle que la réflexion de l'ensemble soit maximale. Les deux obstacles sont placés à une distance telle que :

$$\begin{pmatrix} r & \tau \\ t & \rho \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & e^{j k x} \\ e^{j k x} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_1 & - \\ - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \tau e^{j k x} \\ t e^{j k x} & \rho e^{2j k x} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_1 & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

le coefficient de réflexion de l'ensemble est :

$$r + \frac{r_1 t \tau e^{2j k x}}{1 - r_1 \rho e^{2j k x}}$$

qui s'écrit sous la forme :

$$e^{j L r} \frac{|r| - |r_1| e^{j[\beta + L r_1 + 2j k x]}}{1 - |r| |r_1| e^{j[\beta + L r_1 + 2j k x]}}$$

ou en posant :

$$\varphi = \varphi(x) = \beta + L r_1 + 2j k x$$

$$R = e^{j L r} \frac{|r| - |r_1| e^{j \varphi}}{1 - |r| |r_1| e^{j \varphi}}$$

Expression trouvée précédemment seulement ici  $\varphi = \varphi(x)$ . la distance  $x$  est choisie de façon à ce que la réflexion de l'ensemble soit maximale, donc pour :

$$\varphi = \varphi(x) = (2n+1)\pi$$

$$\text{et } R = |R| e^{j L r} \Rightarrow \underline{R} = L r \quad (1-14)'$$

Donc  $R$  est maximum pour  $\underline{R} = L r$  : la phase du coefficient de réflexion gauche de l'ensemble est égale à la phase du coefficient de réflexion gauche de l'obstacle gauche pris isolément.

Si la réflexion de l'ensemble était minimale on aurait :

$$\varphi = 2n\pi \quad \text{et } \underline{R}_{\min} = L r \quad \text{si } |r| > |r_1|$$

$$\text{ou } \underline{R}_{\min} = \pi + L r \quad \text{si } |r| < |r_1|$$

La transformation qui exprime une résistance normalisée en fonction de son coefficient de réflexion est :

$$Z = \frac{1-r}{1+r} = [r]$$

$$\text{d'où : (1) } [tg \theta] = \frac{1-tg \theta}{1+tg \theta} = \frac{tg \frac{\pi}{4} - tg \theta}{tg \frac{\pi}{4} + tg \theta} = \frac{tg \frac{\pi}{4} - tg \theta}{1 + tg \frac{\pi}{4} tg \theta}$$

$$\Rightarrow [tg \theta] = tg\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$(2) \left[\frac{1}{r}\right] = \frac{1 - \frac{1}{r}}{1 + \frac{1}{r}} = \frac{r-1}{r+1} = -\frac{1-r}{1+r} = -[r]$$

$$(3) [-r] = \frac{1 - (-r)}{1 + (-r)} = \frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{[r]}$$

$$(4) [[r]] = \frac{1 - [r]}{1 + [r]} = \frac{1+r-1+r}{1+r+1-r} = r$$

$$(5) \left[\frac{r+r_1}{1+rr_1}\right] = \frac{1+rr_1-r-r_1}{1+rr_1+r+r_1} = \frac{(1-r_1)(1-r)}{(1+r_1)(1+r)} = [r][r_1]$$

D'après la définition de cette transformation, le T.O.S' s'écrit

$$\text{T.O.S'} = [-|R|] = \frac{1 - |R|}{1 + |R|}$$

Pour deux obstacles placés à une distance telle que la réflexion de l'ensemble soit maximale, le T.O.S' est :

$$S' = \frac{1 - |R|}{1 + |R|} \quad \text{où : } |R| = \frac{e^{jLr} |r_1| - |r_1| e^{j\varphi}}{1 - |r_1| |r_1| e^{j\varphi}}$$

$$\varphi = \varphi(x) = \varphi + Lr_1 + 2Kx$$

Comme on a vu précédemment :

$$|R|_{\text{max}} = \frac{|r_1| + |r_1|}{1 + |r_1| |r_1|}$$



Dans ce cas :

$$S' = \frac{1 + |R|_{\max}}{1 - |R|_{\max}} = \frac{1 + \frac{|r_1| + |r_2|}{1 + |r_1||r_2|}}{1 - \frac{|r_1| + |r_2|}{1 + |r_1||r_2|}} = \frac{(1 + |r_1|)(1 + |r_2|)}{(1 - |r_1|)(1 - |r_2|)}$$

$$S' = \frac{1 + |r_1|}{1 - |r_1|} \times \frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|} = S_1 \cdot S_2 \quad (1-15)$$

Ainsi quand la reflexion de l'ensemble de deux obstacles sans pertes est maximale, le T.O.S' de l'ensemble des deux obstacles est égal au produit des T.O.S' de chaque obstacle

si la distance entre les deux obstacles est telle que la reflexion de l'ensemble soit minimale on a :

$$|R|_{\min} = \frac{|r_1| - |r_2|}{1 - |r_1||r_2|}$$

$$\text{et : } S' = \frac{1 + |R|_{\min}}{1 - |R|_{\min}} = \frac{1 + \frac{|r_1| - |r_2|}{1 - |r_1||r_2|}}{1 - \frac{|r_1| - |r_2|}{1 - |r_1||r_2|}} = \frac{1 + |r_1|}{1 - |r_1|} \cdot \frac{1 - |r_2|}{1 + |r_2|}$$

$$S' = \frac{1 + |r_1|}{1 - |r_1|} \times \frac{1 - |r_2|}{1 + |r_2|} = \frac{S_1}{S_2} \quad (1-16)$$

Si la reflexion de l'ensemble des deux obstacles sans pertes est minimale, le T.O.S' de l'ensemble est égal au rapport des T.O.S' de chaque obstacle.

## 6. RESEAUX PASSIFS

- 20 -

Un réseau est passif s'il ne comprend pas de composants actifs, et s'il n'y dissipe de l'énergie. Les équations (I-10) deviennent:

$$\begin{cases} |t|^2 + |r|^2 = 1 \\ |\tau|^2 + |\rho|^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{I-17})$$

Ces inégalités ne suffisent pas à assurer la passivité vu que elles ne sont pas conservées par le produit de dispersion. Des conditions supplémentaires sont obtenues en remarquant, que la puissance de sortie n'est pas supérieure à celle d'entrée. On a, en se référant à la figure (I-3)

$$|E''_1|^2 + |E'_2|^2 \leq |E'_1|^2 + |E''_2|^2 \quad (\text{I-18})$$

D'après (I-2)

$$E''_1 = r E'_1 + \tau E''_2$$

$$E'_2 = t E'_1 + \rho E''_2$$

Avec:  $|E''_1|^2 = E''_1 \bar{E}''_1 = (r E'_1 + \tau E''_2)(\bar{r} \bar{E}'_1 + \bar{\tau} \bar{E}''_2)$

$$|E''_1|^2 = |r|^2 |E'_1|^2 + r \bar{\tau} E'_1 \bar{E}''_2 + \bar{r} \tau \bar{E}'_1 E''_2 + |\tau|^2 |E''_2|^2 \quad (1)$$

$$|E'_2|^2 = E'_2 \bar{E}'_2 = |t|^2 |E'_1|^2 + \bar{\rho} t E'_1 \bar{E}''_2 + \rho \bar{t} \bar{E}'_1 E''_2 + |\rho|^2 |E''_2|^2 \quad (2)$$

D'où:

$$|E''_1|^2 + |E'_2|^2 = |E'_1|^2 (|t|^2 + |r|^2) + |E''_2|^2 (|\rho|^2 + |\tau|^2) + E'_1 \bar{E}''_2 (r \bar{\tau} + \bar{\rho} t) + \bar{E}'_1 E''_2 (\bar{r} \tau + \rho \bar{t})$$

Ainsi:

$$|E'_1|^2 (|t|^2 + |r|^2) + |E''_2|^2 (|\tau|^2 + |\rho|^2) + E'_1 \bar{E}''_2 (r \bar{\tau} + \bar{\rho} t) + \bar{E}'_1 E''_2 (\bar{r} \tau + \rho \bar{t}) \leq |E'_1|^2 + |E''_2|^2$$

et:

$$E'_1 \bar{E}''_2 \underbrace{(r \bar{\tau} + \bar{\rho} t)}_A + \bar{E}'_1 E''_2 \underbrace{(\bar{r} \tau + \rho \bar{t})}_{\bar{A}} \leq |E'_1|^2 \underbrace{(1 - |t|^2 - |r|^2)}_{\alpha^2} + |E''_2|^2 \underbrace{(1 - |\tau|^2 - |\rho|^2)}_{\alpha^2}$$

-21-

On a:  $E_1 \bar{E}_2 A + \bar{E}_1 E_2 \bar{A} \leq |E_1|^2 a^2 + |E_2|^2 \alpha^2$

d'où:  $E_1 \bar{E}_2 A \cdot \bar{E}_1 E_2 \bar{A} \leq |E_1|^2 a^2 \cdot |E_2|^2 \alpha^2$

$\Rightarrow |E_1|^2 |E_2|^2 |A|^2 \leq |E_1|^2 |E_2|^2 a^2 \alpha^2$

et:  $|A|^2 \leq a^2 \alpha^2$

d'où:  $|r\bar{t} + \bar{s}t|^2 \leq (1 - |t|^2 - |r|^2)(1 - |\tau|^2 - |\beta|^2) \quad (1-19)$

Cette inégalité est vérifiée si et seulement si les inégalités (1-17) et (1-18) le sont. Vu la manière dont elles sont obtenues, les conditions (1-17) et (1-19) sont conservées par multiplication matricielle, montrons qu'elles le sont aussi par produit de dispersion

si les réseaux de la fig (I-3) sont passifs, l'inégalité (1-18) entraîne

$$|E_2''|^2 + |E_3'|^2 \leq |E_2'|^2 + |E_3''|^2$$

En additionnant cette inégalité à l'inégalité (1-18) on obtient

$$|E_1''|^2 + |E_3'|^2 \leq |E_1'|^2 + |E_3''|^2$$

Par conséquent l'opérateur produit de dispersion est dissipatif quelque soit  $(E_1', E_3')$

En introduisant les coefficients d'absorption de puissance

$$a^2 = 1 - |t|^2 - |r|^2 \quad \text{et} \quad \alpha^2 = 1 - |\tau|^2 - |\beta|^2$$

Et en substituant dans (1-19) on obtient

$$|r\bar{t} + \bar{s}t|^2 \leq a^2 \alpha^2$$

or:  $||r\bar{t}| - |\bar{s}t||^2 \leq |r\bar{t} + \bar{s}t|^2 \leq a^2 \alpha^2$

$\Rightarrow ||r\bar{t}| - |\bar{s}t|| \leq a \alpha \quad \text{et} \quad \boxed{\left| \frac{|r|}{|t|} - \frac{|\beta|}{|\tau|} \right| \leq \frac{a \alpha}{|t\tau|}} \quad (1-20)$

En posant:  $\rho_0 = |t| + |\tau| - |r| - |\beta|$

On aura:

$$\begin{aligned}
 \left| \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \right| &= \frac{1}{2} \left| e^{j\frac{\varphi_0}{2}} + e^{-j\frac{\varphi_0}{2}} \right| = \frac{1}{2} \left| \sqrt{e^{j\varphi_0}} + \sqrt{e^{-j\varphi_0}} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \sqrt{e^{j[\ell + \tau - r - \beta]}} + \sqrt{e^{-j[\ell + \tau - r - \beta]}} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{\ell}{|\ell|} \cdot \frac{\tau}{|\tau|} \cdot \frac{r}{|r|} \cdot \frac{\beta}{|\beta|}} + \sqrt{\frac{\bar{\ell}}{|\ell|} \cdot \frac{\bar{\tau}}{|\tau|} \cdot \frac{\bar{r}}{|r|} \cdot \frac{\bar{\beta}}{|\beta|}} \right|
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\left| \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \right| = \frac{1}{2 \sqrt{|t\tau r\beta|}} \left| \sqrt{t\bar{\tau}\bar{r}\bar{\beta}} + \sqrt{\bar{t}\bar{\tau}r\beta} \right|$$

or :  $|r\bar{\tau} + \bar{s}t|^2 \leq a^2 \alpha^2 \Rightarrow \sqrt{|r|^2 |\tau|^2 + |\beta|^2 |t|^2 + t\bar{\tau}\bar{r}\bar{\beta} + \bar{t}\bar{\tau}r\beta} \leq a\alpha$

et :  $\sqrt{t\bar{\tau}\bar{r}\bar{\beta} + \bar{t}\bar{\tau}r\beta} \leq \sqrt{t\bar{\tau}\bar{r}\bar{\beta}} + \sqrt{\bar{t}\bar{\tau}r\beta} \leq \sqrt{|r|^2 |\tau|^2 + |\beta|^2 |t|^2 + t\bar{\tau}\bar{r}\bar{\beta} + \bar{t}\bar{\tau}r\beta}$

Ainsi :

$$t\bar{\tau}\bar{r}\bar{\beta} + \bar{t}\bar{\tau}r\beta \leq a.\alpha$$

et finalement :

$$\left| \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \right| = \frac{1}{2 \sqrt{|t\tau r\beta|}} \left| \sqrt{t\bar{\tau}\bar{r}\bar{\beta}} + \sqrt{\bar{t}\bar{\tau}r\beta} \right| \leq \frac{a.\alpha}{2 \sqrt{|t\tau r\beta|}}$$

Soit :

$$\boxed{\left| \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \right| \leq \frac{a.\alpha}{2 \sqrt{|t\tau r\beta|}} \quad (1-93)}$$

L'inégalité (1-90) se ramène à  $|t| = |\tau|$  et l'inégalité (1-91) se ramène à l'équation :

$$\varphi_0 = \ell + \tau - r - \beta = (2n+1)\pi$$

lorsque  $a\alpha = 0$  (Réseau sans pertes)

Nous avons vu qu'un shunt est un réseau pour lequel  $t = 1+r$  et  $\tau = 1+s$ . Montrons qu'un shunt est passif si et seulement si

$$\text{et } \begin{cases} t = \tau \\ |r| + \cos \theta \leq 0 \end{cases}$$

D'après (1.10) un réseau est passif si :

$$|E''_1|^2 + |E''_2|^2 \leq |E'_1|^2 + |E''_2|^2 \quad (1)$$

$$\text{or : } \begin{cases} E''_1 = r E'_1 + \tau E''_2 \\ E''_2 = t E'_1 + s E''_2 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } |E''_1|^2 + |E''_2|^2 = |E'_1|^2 (|t|^2 + |r|^2) + |E''_2|^2 (|\tau|^2 + |s|^2) + E'_1 \bar{E}''_2 (r \bar{\tau} + s \bar{t}) + \bar{E}'_1 E''_2 (\bar{r} \tau + \bar{s} \bar{t}) \quad (2)$$

En comparant (1) et (2) et d'après (1.10) on a :

$$(3) \begin{cases} |t|^2 + |r|^2 \leq 1 \\ |\tau|^2 + |s|^2 \leq 1 \end{cases} \text{ et d'après (1.11) } \Rightarrow \begin{cases} E'_1 \bar{E}''_2 (r \bar{\tau} + s \bar{t}) \leq E'_1 \bar{E}''_2 \alpha \\ \bar{E}'_1 E''_2 (\bar{r} \tau + \bar{s} \bar{t}) \leq \bar{E}'_1 E''_2 \alpha \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Avec : } \alpha = \sqrt{(1 - |t|^2 - |r|^2)(1 - |\tau|^2 - |s|^2)}$$

De (3) on tire avec :  $t = 1+r$  et  $\tau = 1+s$

$$\begin{cases} 2|r| (|r| + \cos \theta) \leq 0 \\ 2|s| (|s| + \cos \beta) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |r| + \cos \theta \leq 0 \\ |s| + \cos \beta \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{2|r||s| (|r| + \cos \theta) (|s| + \cos \beta)} \approx 0$$

Donc de (4) on tire nu que  $E'_1 \neq 0$  et  $E''_2 \neq 0$ .

$$\begin{cases} r \bar{\tau} + s \bar{t} \approx 0 & \Rightarrow (t-1) \bar{\tau} \approx (1-\bar{\tau}) t \\ \bar{r} \tau + \bar{s} \bar{t} \approx 0 & \Rightarrow (\tau-1) \bar{t} \approx (1-\bar{t}) \tau \end{cases}$$

or :

$$(5) \quad t(2\bar{\tau}-1) = \bar{\tau}$$

$$(6) \quad \tau(2\bar{t}-1) = \bar{t} \quad \frac{(5)}{(6)} \Rightarrow 2\bar{t}|\tau|^2 - 2\bar{\tau}|t|^2 \approx |\tau|^2 - |t|^2$$

inégalité qui n'est vérifiée que pour :  $2\bar{t} = 2\bar{\tau} = 1 \Rightarrow \boxed{t = \tau}$

On a montré que :

$$\text{un shunt est passif} \Rightarrow \begin{cases} t = \tau \\ |r| + \cos \Gamma \leq 0 \end{cases}$$

L'équivalence dans l'autre sens (réciproque) peut être facilement démontrée. d'où :

$$\text{un shunt est passif} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \tau \\ |r| + \cos \Gamma \leq 0 \end{cases}$$

Comme  $t = \tau \Rightarrow r = \rho$  on peut en déduire qu'un shunt passif est toujours symétrique.

Une sonde introduite dans une ligne de transmission constitue un shunt passif si :

$$\frac{M}{S} = \cos(\pi - \Gamma) - |P|$$

$P$  : étant le coefficient de réflexion de la sonde

et  $M = \frac{f a^2}{2|P|}$  ; est le coefficient qui détermine la qualité de la sonde.

$a^2 = 1 - |t|^2 - |P|^2$  est le coefficient d'absorption de puissance.

$f$  : est la fraction de la puissance absorbée qui parvient au voltmètre.

$$M = \frac{f a^2}{2|P|} \Rightarrow \frac{M}{S} = \frac{a^2}{2|P|}$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= 1 - |t|^2 - |P|^2 \\ \text{Avec } t &= 1 + P \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 = -2|P| \cos \Gamma - 2|P|^2$$

$$a^2 = -2|P| (|P| + \cos \Gamma)$$

$$\text{et : } \frac{M}{S} = \frac{a^2}{2|P|} = -|P| - \cos \Gamma$$

$$\text{Comme } \cos(\pi - \Gamma) = -\cos \Gamma \Rightarrow \boxed{\frac{M}{S} = \cos(\pi - \Gamma) - |P|}$$

En considérant que les coefficients d'absorption  $a^2$  et  $\alpha^2$  d'un obstacle ( $t, r, s$ ) sont petits et en posant:  $d = t\tau - r\rho$  on a, avec

$$\varphi_0 = t + \tau - r + \rho$$

$$|d|^2 = |t\tau - r\rho|^2 = \left| |t\tau| e^{j(t+\tau)} - |r\rho| e^{j(t+\rho)} \right|^2$$

$$\Rightarrow |d|^2 = \left| |t\tau| e^{j\varphi_0} - |r\rho| \right|^2 = |t\tau|^2 + |r\rho|^2 - 2|t\tau\rho| \cos \varphi_0$$

$$a: a^2 = 1 - |t|^2 - |r|^2 \Rightarrow |t|^2 = 1 - a^2 - |r|^2$$

$$\alpha^2 = 1 - |\tau|^2 - |\rho|^2 \Rightarrow |\tau|^2 = 1 - \alpha^2 - |\rho|^2$$

d'autre:

$$|d|^2 = 1 - \alpha^2 - |\rho|^2 - a^2 + a^2\alpha^2 + \alpha^2|\rho|^2 + \alpha^2|r|^2 - |r|^2 + 2|r\rho|^2 - 2|t\tau\rho| \cos \varphi_0 \quad (1)$$

$$\text{D'après (1.11): } |r\bar{\tau} + \bar{\rho}t|^2 \leq a^2\alpha^2$$

$$a^2 \text{ et } \alpha^2 \text{ étant petit on aura: } |r\bar{\tau} + \bar{\rho}t|^2 \simeq a^2\alpha^2$$

$$|r\bar{\tau} + \bar{\rho}t|^2 = \left| |r\tau| e^{j(r+\tau)} + |\rho t| e^{j(t+\rho)} \right|^2 = \left| |r\tau| + |\rho t| e^{j\varphi_0} \right|^2$$

$$= |r\tau|^2 + |\rho t|^2 + 2|t\tau\rho| \cos \varphi_0 \simeq a^2\alpha^2 \quad (2)$$

Donc:

$$a^2\alpha^2 = |r|^2 - \alpha^2|r|^2 - |r\rho|^2 + |\rho|^2 - a^2|\rho|^2 - |r\rho|^2 + 2|t\tau\rho| \cos \varphi_0 \quad (3)$$

(1) + (3) donne:

$$|d|^2 + a^2\alpha^2 = 1 - \alpha^2 - a^2 + a^2\alpha^2 \Rightarrow \boxed{|d|^2 = 1 - a^2 - \alpha^2}$$

D'autre part le développement limité de  $\cos \frac{\varphi_0}{2}$  autour de  $\frac{\pi}{2}$  donne:

$$\left| \cos \frac{\varphi_0}{2} \right| \simeq \left| \cos \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \left( -\sin \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right|$$

$$\Rightarrow \left| \cos \frac{\varphi_0}{2} \right| \simeq \left| \frac{\pi - \varphi_0}{2} \right|$$

$$\text{D'après (1.94): } \left| \cos \frac{\varphi_0}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{a\alpha}{\sqrt{|t\tau\rho|}}$$

d'au :  $\left| \frac{\pi - \varphi_0}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{a\alpha}{\sqrt{|t\tau r s|}} \Rightarrow \boxed{\left| \pi - \varphi_0 \right| \leq \frac{a\alpha}{\sqrt{|t\tau r s|}}}$

$$d = t\tau - r s = |t\tau| e^{j(\theta + \varphi)} + |r s| e^{j(\pi + \varphi + \psi)} = e^{j(\pi + \varphi + \psi)} \left[ |t\tau| e^{j(\varphi_0 - \pi)} + |r s| \right]$$

$$\Rightarrow d e^{-j(\pi + \varphi + \psi)} = e^{j(\varphi_0 - \pi)} \left[ |t\tau| + |r s| e^{j(\pi - \varphi_0)} \right]$$

$$\Rightarrow |d| e^{j[\varphi_0 - (\pi + \varphi + \psi)]} = e^{j(\varphi_0 - \pi)} \left[ |t\tau| + |r s| e^{j(\pi - \varphi_0)} \right]$$

$$\Rightarrow \left| \varphi_0 - (\pi + \varphi + \psi) \right| \ln |d| = \left| \varphi_0 - \pi \right| \ln \left[ |t\tau| + |r s| e^{j(\pi - \varphi_0)} \right]$$

d'au :  $|d| = \left[ |t\tau| + |r s| e^{j(\pi - \varphi_0)} \right]$

et

$$\left| \varphi_0 - (\pi + \varphi + \psi) \right| = \left| \pi - \varphi_0 \right| \leq \frac{a\alpha}{\sqrt{|t\tau r s|}}$$

finalement :

$$\boxed{\left| \varphi_0 - (\pi + \varphi + \psi) \right| \leq \frac{a\alpha}{\sqrt{|t\tau r s|}}}$$

On a vu précédemment que pour un réseau sans perte :

Avec  $d = t\tau - r s$

$$|d| = \pi + \varphi + \psi$$

Pour un réseau passif :

$$|d| \leq \frac{a\alpha}{\sqrt{|t\tau r s|}} + \pi + \varphi + \psi$$

Si  $\begin{cases} a = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

on retrouve  $|d| = \pi + \varphi + \psi$

Pour le réseau sans perte.



La transformation linéaire fractionnaire définie précédemment donne une nouvelle caractérisation des réseaux passifs.

Nous dirons qu'un réseau est dissipatif à gauche si  $|R(z)| < 1$  pour  $|z| < 1$ . Il est dissipatif à droite si  $|P(z)| < 1$  pour  $|z| < 1$ . Ces conditions supposent  $|r| < 1$  et  $|s| < 1$ ;  $R(z) [P(z)]$  est alors analytique pour  $|z| < 1$  et atteint son maximum pour  $|z| = 1$ . La condition de dissipation est :

$$|Ca| + Ra \leq 1 \quad \text{pour } a = 1$$

qui devient en appliquant (1-7)

$$(1-22) \quad 1 + 2 \operatorname{Re}(rst\bar{\tau}) \leq (1 - |t\tau|)^2 + (1 - |r|^2)(1 - |s|^2)$$

L'inégalité (1-22) avec  $|r| < 1$  et  $|s| < 1$  est nécessaire et suffisante pour que  $|R(z)| < 1$  pour  $|z| < 1$ .

L'inégalité (1-19) s'écrit :

$$(1-23) \quad 1 + 2 \operatorname{Re}(rst\bar{\tau}) \leq (1 - |t\tau|)^2 + (1 - |r|^2)(1 - |s|^2) - (|t| - |\tau|)^2$$

La comparaison de (1-22) et (1-23) nous montre qu'un réseau est dissipatif par réflexion (la réciproque étant vraie) si  $|t| = |\tau|$ . L'équivalence des deux notions se rattache au théorème de réciprocity.

En supposant que la réflexion à droite de l'obstacle ( $r, s, t, \tau$ ) est nulle ( $s = 0$ ), et faisant suivre cette obstacle par un réflecteur de réflexion  $|r_1| = 1$  dont la phase est telle que la réflexion de l'ensemble soit maximale, on a :

$$\begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_1 & - \\ - & - \end{pmatrix} \Rightarrow Ca = r + \frac{|r_1|^2 \bar{s} t \tau}{1 - |r_1| |s|^2}$$

$$Ra = \frac{|r_1| \cdot |t\tau|}{1 - |r_1| |s|^2}$$

$$\left. \begin{matrix} |r_1| = 1 \\ s = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} |Ca| = |r| \\ Ra = |t\tau| \end{cases}$$

la condition de dissipation :

$$|Ca| + Ra \leq 1 \text{ pour } a = 1$$

S'écrit alors :

$$\boxed{|r| + |t\tau| \leq 1 \text{ pour } |r_1| = 1} \quad (1-24)$$

En faisant  $\beta = 0$  dans l'inégalité (1-11) on aura :

$$|r\bar{\tau}|^2 \leq (1 - |t|^2 - |r|^2)(1 - |t|^2)$$

$$\Rightarrow |r\tau|^2 \leq 1 - |t|^2 - |t|^2 + |t|^2|t|^2 - |r|^2 + |r\tau|^2$$

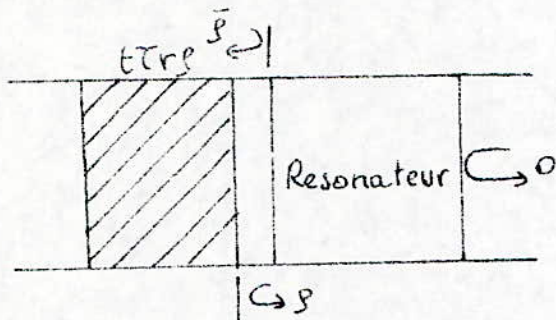
$$\text{ou : } |r|^2 \leq 1 - |t|^2 - |t|^2 + |t|^4|t|^2$$

$$\text{qui s'écrit : } \boxed{|r|^2 \leq (1 - |t|^2)(1 - |t|^2)} \quad (1-25)$$

Inégalité qui est plus forte que l'inégalité (1-24) sauf si  $|t| = |\tau|$

Un résonateur est un réseau sans pertes tel que l'obstacle ( $r_1, t_1$ ) suivi du résonateur possède une réflexion totale à droite nulle.

fig(I-7)



fig(I-7) : obstacle adaptée  
A l'aide d'un résonateur  
symétrique sans perte.

on a :

$$\begin{pmatrix} r & \tau \\ t & \beta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_1 & t_1 \\ t_1 & -r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + \frac{r_1 t_1 \tau}{1 - r_1 \beta} & \frac{t_1 \tau}{1 - r_1 \beta} \\ \frac{t t_1}{1 - r_1 \beta} & -r_1 + \frac{\beta t_1 t_1}{1 - r_1 \beta} \end{pmatrix}$$

Le réseau  $(t\tau r\beta) * (t_1 t_1 r_1 - r_1)$  est dit adapté à droite si la réflexion à droite de l'ensemble est nulle

Soit :  $-r_1(1-r_1\bar{S}) + \rho t_1 t_1 = 0 \Rightarrow r_1 = \rho(t_1 t_1 + r_1 r_1)$

On pose :  $r_1 = -\bar{S}_1$

d'où :  $-\bar{S}_1 = \rho(t_1 t_1 - r_1 \bar{S}_1)$

D'après (1-13) :  $t_1 t_1 - r_1 \bar{S}_1 = -e^{j(LR_1 + \bar{S}_1)}$

et :  $-\bar{S}_1 = \rho e^{j(LR_1 + \bar{S}_1 + \pi)} \Rightarrow |\bar{S}_1| e^{j(LR_1 + \bar{S}_1 + \pi)} = |\bar{S}_1| e^{j(LR_1 + \bar{S}_1 + \pi)}$

qui devient :

$|\bar{S}_1| = |\bar{S}_1| e^{jLR_1} e^{j\bar{S}_1} \Rightarrow |\bar{S}_1| e^{-jLR_1} = |\bar{S}_1| e^{j\bar{S}_1}$

on a posé :  $r_1 = -\bar{S}_1 \Rightarrow |r_1| = |\bar{S}_1|$

et,  $|t_1| e^{-jLR_1} = |\bar{S}_1| e^{j\bar{S}_1} \Rightarrow \boxed{r_1 = \bar{S}}$

On conclue que si la réflexion à droite de l'ensemble de deux obstacle ( $t_1 r_1$ ) et ( $t_1 t_1 - r_1 r_1$ ) est nulle on a necessairement  $r_1 = \bar{S}$  la reciproque est vraie. Donc le reseau ( $t_1 r_1$ ) suivi du resonateur est dit adapté à droite si et seulement si  $r_1 = \bar{S}$

la transmission à gauche de l'ensemble est :  $\frac{|t_1| |t_1|}{1 - |\bar{S}_1|^2} = T$

Et la transmission à droite de l'ensemble :  $\frac{|\tau_1| |t_1|}{1 - |\bar{S}_1|^2} = T$

Comme le resonateur est un reseau sans perte :

$$|t_1|^2 + |r_1|^2 = 1$$

Avec  $|r_1| = |\bar{S}| = |\bar{S}_1|$  on a :  $|t_1| = \sqrt{1 - |\bar{S}_1|^2}$

d'où :

$$T = \frac{|t_1|}{\sqrt{1 - |\bar{S}_1|^2}} \quad \text{et} \quad T = \frac{|\tau_1|}{\sqrt{1 - |\bar{S}_1|^2}} \quad (1-26)$$

Pour l'obstacle  $(t\tau r s) * (t_1 r_1 - r_1)$  le coefficient de réflexion à gauche  $R$  est:

$$R = r + \frac{r_1 t\tau}{1 - r_1 s}$$

Cette obstacle est dit adapté à droite si  $r_1 = \bar{s}$ . D'où

$$R = r + \frac{\bar{s} t\tau}{1 - |s|^2} \quad \text{et} \quad |R| = \left| r + \frac{\bar{s} t\tau}{1 - |s|^2} \right|$$

$(t\tau r s) * (t_1 r_1 - r_1) = (TTR\Gamma)$  si  $\Gamma = 0$  on aura d'après (1-25)

$$|R|^2 \leq (1 - |T|^2)(1 - |\Gamma|^2)$$

Avec d'après (1-26)

$$|T|^2 = \frac{|t|^2}{1 - |s|^2} \quad \text{et} \quad |\Gamma|^2 = \frac{|\tau|^2}{1 - |s|^2}$$

D'où:

$$|R|^2 \leq \left( 1 - \frac{|t|^2}{1 - |s|^2} \right) \left( 1 - \frac{|\tau|^2}{1 - |s|^2} \right)$$

l'obstacle  $TTR\Gamma$  étant adapté  $\Rightarrow |r| = |s|$  et  $|t| = |\tau|$ .

Ainsi:

$$|R|^2 \leq \frac{(1 - |r|^2 - |t|^2)(1 - |s|^2 - |\tau|^2)}{(1 - |s|^2)^2}$$

où:  $a^2 = 1 - |t|^2 - |r|^2 \geq 0$

$\alpha^2 = 1 - |\tau|^2 - |s|^2 \geq 0$

} sont les coefficients d'absorption de puissance.

Donc:

$$|R| \leq \frac{a \cdot \alpha}{1 - |s|^2}$$

Pour un réseau passif:  $|t| |\tau| \leq |\tau|^2 \leq 1 - |s|^2$

ce qui fait:

$$\boxed{|R| \leq \frac{a \cdot \alpha}{1 - |s|^2} \leq \frac{a \cdot \alpha}{|t\tau|}}$$

Si l'obstacle  $(t\bar{r}rs)$  est sans perte, l'image de  $|z|=a$  par  $R(z)$  ou  $P(z)$  est un cercle dont le rayon et la distance du centre à l'origine sont respectivement:

$$Ra = a \frac{1 - |r|^2}{1 - a^2|r|^2} ; |Ca| = |r| \frac{1 - a^2}{1 - a^2|r|^2} \quad (1-27)$$

$R(z)$  [ou  $P(z)$ ] est la transformation linéaire fractionnaire associée au produit de dispersion qu'on a défini précédemment.

Démonstration:

$(t\bar{r}rs)$  étant sans perte on a: 
$$\begin{cases} |t|^2 + |r|^2 = 1 \\ |r|^2 + |s|^2 = 1 \end{cases}$$

D'après le théorème de réciproité  $|t| = |r| \Rightarrow |r| = |s|$  d'où les équations (1-7) s'écrivent:

$$Ra = \frac{a|t\bar{r}|}{1 - a^2|s|^2} = \frac{a|t|^2}{1 - a^2|s|^2} \Rightarrow \boxed{Ra = a \frac{1 - |r|^2}{1 - a^2|r|^2}}$$

et 
$$Ca = r + \frac{a^2\bar{s}t\bar{r}}{1 - a^2|s|^2} = \frac{r + a^2\bar{s}(t\bar{r} - rs)}{1 - a^2|s|^2}$$

et d'après (1-13):  $t\bar{r} - rs = -e^{j(\varphi_r + \varphi_s)}$

D'où:

$$Ca = \frac{|r|e^{j\varphi_r} - a^2|s|e^{j(\varphi_r + \varphi_s - \varphi_s)}}{1 - a^2|s|^2} = |r|e^{j\varphi_r} \frac{1 - a^2}{1 - a^2|r|^2}$$

Vue que  $|r| = |s|$  soit:

$$\boxed{|Ca| = |r| \frac{1 - a^2}{1 - a^2|r|^2}}$$

Pour  $P(z)$  on retrouvera les mêmes relations avec:

$$P(z) = s + \frac{z t\bar{r}}{1 - zr}$$

$$Pa = \frac{a|t\bar{r}|}{1 - |a|^2|r|^2} \quad \text{et} \quad C'a = s + \frac{a^2\bar{r}t\bar{r}}{1 - a^2|r|^2}$$

Les relations (1-27) vérifient l'équation :

$$a|ca|^2 = (a - ka)(1 - aka)$$

### Points fixes et commutativité

Faisons  $\xi = R(\xi)$  dans (1-5) parag: 3 on obtient :

$$s\xi^2 + (t\tau - r\rho - 1)\xi + r = 0 \quad (1-28)$$

Les deux racines  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont des points fixes de la transformation  $W = R(Z)$  et leurs réciproques sont des points fixes de  $W' = P(Z)$ .  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont des valeurs particulières du coefficient de réflexion du réflecteur, qui ne sont pas changées par l'interposition du réseau.

Si l'une des racines  $\xi$  est la même pour deux réseaux elle l'est pour leur association. Les points fixes déterminent les rapports :

$$A = \frac{r}{s} \quad ; \quad B = \frac{t\tau - r\rho - 1}{2s} \quad (1-29)$$

qui sont préservés par le produit de dispersion, si A et B sont les mêmes pour chacun des facteurs de ce produit. En considérant des réseaux permutable, nous obtenons une nouvelle interprétation de (1-29).

Des réseaux permutable sont des réseaux dont l'influence totale ne change pas si on les intervertit. L'équation :

$$\begin{pmatrix} t & \tau \\ t & s \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_1 & \tau_1 \\ t_1 & \rho_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & \tau_1 \\ t_1 & s_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix}$$

est équivalente à :

$$\frac{r'}{s} = \frac{r_1}{s_1}$$

associée à :

$$\frac{t\tau - r\rho - 1}{2s} = \frac{t_1\tau_1 - r_1\rho_1 - 1}{2s_1}$$

Par conséquent, si des obstacles sont disposés en série, et si chacun d'eux vérifie (1-29), si A et B sont des constantes, ils sont deux à deux permutable. Il en résulte que chacun d'eux permute avec le reste de la série, et par conséquent que les coefficients de la série elle-même vérifient (1-29).

l'invariance de (1-29) par rapport au produit de dispersion facilite l'étude des lignes constituées par des réseaux identiques etude qu'on abordera dans un chapitre prochain.

Si la transformation linéaire fractionnaire  $W = R(Z)$  possède deux points fixes  $Z_1$  et  $Z_2$  alors on a :

$$W = R(Z) = r + \frac{z t \tau}{1 - z \rho} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Z_1 = r + \frac{Z_1 t \tau}{1 - Z_1 \rho} \\ Z_2 = r + \frac{Z_2 t \tau}{1 - Z_2 \rho} \end{cases}$$

$$\frac{W - Z_1}{W - Z_2} = \frac{R(Z) - Z_1}{R(Z) - Z_2} \quad \text{d'où en remplaçant } R(Z), Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ par leurs expressions.}$$

$$\frac{W - Z_1}{W - Z_2} = \frac{r + \frac{z t \tau}{1 - z \rho} - r - \frac{Z_1 t \tau}{1 - Z_1 \rho}}{r + \frac{z t \tau}{1 - z \rho} - r - \frac{Z_2 t \tau}{1 - Z_2 \rho}} = \frac{t \tau [Z(1 - Z_1 \rho) - Z_1(1 - Z \rho)](1 - Z_2 \rho)}{t \tau [Z(1 - Z_2 \rho) - Z_2(1 - Z \rho)](1 - Z_1 \rho)}$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{W - Z_1}{W - Z_2} = \frac{(1 - Z_2 \rho)}{(1 - Z_1 \rho)} \cdot \frac{(Z - Z_1)}{(Z - Z_2)} = H \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2}$$

Donc : toute transformation linéaire  $R(Z)$  possédant deux points fixes  $Z_1$  et  $Z_2$  peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{W - Z_1}{W - Z_2} = H \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} \quad \text{où } H = \frac{1 - Z_2 \rho}{1 - Z_1 \rho} \text{ est une constante complexe.}$$

Considérons maintenant deux transformations  $R_1(Z)$  et  $R_2(Z)$  du même type que la précédente et possédant les mêmes points fixes mais des constantes respectivement égales à  $H_1$  et  $H_2$ . On démontre que  $W = R_2[R_1(Z)]$  possède les mêmes points fixes, et que la constante est égale à  $H_1 \cdot H_2$ .

$$W_1 = R_1(Z) \quad \text{et} \quad \frac{W_1 - Z_1}{W_1 - Z_2} = H_1 \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2}$$

et :

$$W_2 = R_2(Z) \quad \text{et} \quad \frac{W_2 - Z_1}{W_2 - Z_2} = H_2 \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2}$$

$$W = R_2[R_1(Z)] = r + \frac{R_1(Z) t \tau}{1 - R_1(Z) \rho}$$

Supposons que :

$$Z_1 = r + \frac{R_1(Z_1) t \tau}{1 - R_1(Z_1) \rho} \quad \text{et} \quad Z_2 = r + \frac{R_1(Z_2) t \tau}{1 - R_1(Z_2) \rho}$$

On aura :

$$\frac{W - Z_1}{W - Z_2} = \frac{\frac{R_1(Z) t \tau}{1 - R_1(Z) \rho} - \frac{R_1(Z_1) t \tau}{1 - R_1(Z_1) \rho}}{\frac{R_1(Z) t \tau}{1 - R_1(Z) \rho} - \frac{R_1(Z_2) t \tau}{1 - R_1(Z_2) \rho}}$$

Comme  $Z_1$  et  $Z_2$  sont des points fixes de  $R_1(Z) \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = R_1(Z_1) \\ Z_2 = R_1(Z_2) \end{cases}$

D'où :

$$\frac{W - Z_1}{W - Z_2} = \frac{\frac{R_1(Z) t \tau}{1 - R_1(Z) \rho} - \frac{Z_1 t \tau}{1 - Z_1 \rho}}{\frac{R_1(Z) t \tau}{1 - R_1(Z) \rho} - \frac{Z_2 t \tau}{1 - Z_2 \rho}} = \left( \frac{1 - Z_2 \rho}{1 - Z_1 \rho} \right) \frac{R_1(Z) - Z_1}{R_1(Z) - Z_2}$$

Donc :

$$\frac{W - Z_1}{W - Z_2} = H_2 \frac{R_1(Z) - Z_1}{R_1(Z) - Z_2}$$

Donc  $Z_1$  et  $Z_2$  sont bien des points fixes de  $W = R_2[R_1(Z)]$ , et comme

$$\frac{R_1(Z) - Z_1}{R_1(Z) - Z_2} = H_1 \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} \Rightarrow \boxed{\frac{W - Z_1}{W - Z_2} = H_1 \cdot H_2 \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2}}$$

Ce résultat peut être généralisé au produit de  $n$  transformations par récurrence on déduit si on a  $R_i$  transformations ( $i = 1, \dots, n$ ) qui ont les mêmes points fixes  $Z_1$  et  $Z_2$ , et respectivement les constantes  $H_i$   $i = (1, \dots, n)$

$$R_i [R_{i-1} (R_{i-2} \dots (R_0) \dots)]$$

a les mêmes points fixes et s'écrit :

$$\frac{W_n - Z_1}{W_n - Z_2} = H_1 \cdot H_2 \dots H_n \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2}$$

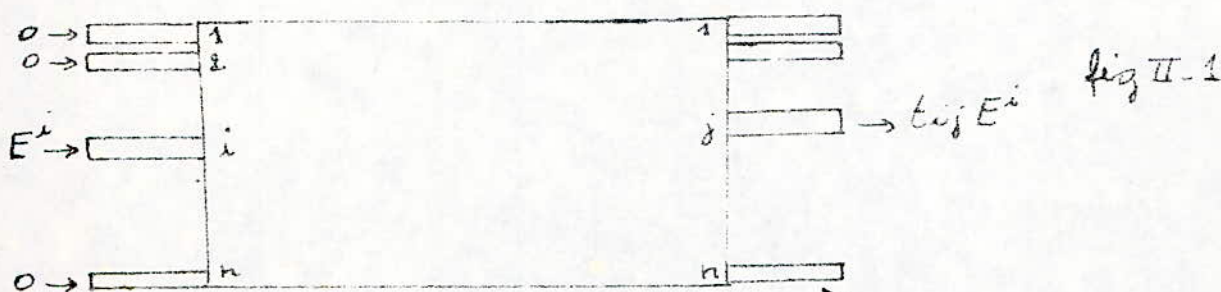


-35-

CH II : OPERATEURS DE TRANSMISSION  
ET DE REFLEXION

1 - Transmission, reflexion, et matrice de dispersion

Considérons un obstacle comportant  $2n$  extrémités  $n$  à gauche et  $n$  à droite. Ces extrémités seront généralement celles de guides d'onde dans lesquels nous supposerons qu'un seul mode se propage, ce qui nous permettra sans perte réelle de généralité, de supposer que tous les guides ont même impédance caractéristique : fig II-1



Soit  $E^i$  l'amplitude complexe d'une onde reçue à l'entrée du  $i$ ème guide à gauche. Nous représentons par :

$$t_{ij} E^i \text{ et } r_{ij} E^i$$

les amplitudes des ondes transmises et réfléchies par le  $j$ ème guide respectivement à droite et à gauche. Lorsque les amplitudes  $E^1, E^2, \dots, E^n$  sont simultanément présentes, l'entrée est représentée par un vecteur colonne  $E$  de composantes  $E_i$ , les vecteurs transmission et réflexion sont obtenus par superposition.

$$\sum_{i=1}^n t_{ij} E^i \text{ et } \sum_{i=1}^n r_{ij} E^i$$

Les vecteurs transmission et réflexion sont respectivement,  $tE$  et  $rE$ , si nous appelons  $t = (t_{ji})$  et  $r = (r_{ji})$  les matrices transposées. De façon semblable, nous désignons les vecteurs transmission et réflexion, lorsque  $E$  est reçue à droite par,  $\tau E$  et  $\rho E$

Si le vecteur  $E_1$  est reçu à gauche, et simultanément le vecteur  $E_4$  à droite, le vecteur  $E_3$  émergent à droite peut être calculé

-36-

en combinant la partie de  $E_1$  qui est transmise avec la partie de  $E_4$  qui est réfléchiée. Nous pouvons effectuer d'abord le calcul pour la  $j$ -ième extrémité, mais la seule équation matricielle :

$$E_3 = t E_1 + r E_4$$

Nous fournit le résultat pour toutes les valeurs de  $j$ . Calculons en plus  $E_2$ , l'onde réfléchiée à gauche, nous obtenons.

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_4 \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} E_1 \\ E_4 \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

identique à (1-2)

Les matrices  $t, r, r, t$  jouent le même rôle que les nombres complexes  $t, r, r, t$  précédemment utilisés. Par conséquent  $t$  et  $r$  sont appelés coefficients de transmission,  $r$  et  $t$  coefficients de réflexion. Toutefois ces coefficients sont ici des matrices  $n \times n$  donc des opérateurs sur l'espace des vecteurs à  $n$  composantes complexes. La matrice  $[S]$  de dimension  $2n \times 2n$ , de l'équation (2-1) est la matrice de dispersion comme dans le cas où  $n=1$ . Pour pouvoir utiliser les formules connues nous désignerons par  $[I]$  la matrice unité de dimension  $n \times n$ .

## 2 - La norme et les transferts d'énergie:

Soit  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$  un vecteur ligne à éléments complexes nous appellerons longueur de ce vecteur :

$$|A| = \left( \sum_i A_i \bar{A}_i \right)^{1/2}$$

D'après l'inégalité de Schwarz, nous avons.

$$|A| = \max |Az| \quad \text{pour } z = 1 \quad (2-2)$$

où  $z$  décrit l'ensemble des vecteurs colonnes  $(z^1, z^2, \dots, z^n)$  de longueur unité. Le mérite de cette définition, est qu'elle est valable pour toute matrice  $A$  possédant  $n$  colonnes. La mesure obtenue, est appelé la norme de  $A$ . Puisque  $|A|$  désigne bien la valeur absolue de  $A$ , lorsque  $A$  est constitué d'un seul élément, on la longueur de  $A$ .

lorsque  $A$  est un vecteur, ce symbolisme peut toujours être utilisé.

Si  $A^*$  désigne l'adjointe de  $A$ , alors :

$$|Az|^2 = (Az)^* Az = z^* A^* Az \quad (2-3)$$

Par conséquent  $|A|^2$  est donné par le quotient de Rayleigh

$$|A|^2 = \max \frac{z^* A^* Az}{z^* z} \quad \text{pour } z \neq 0 \quad (2-4)$$

Si  $A$  et  $B$  sont des matrices auto-adjointes, la condition  $A \leq B$  signifie que :

$$z^* Az \leq z^* Bz \quad \text{pour tout } z$$

Cette relation possède la plupart des propriétés de l'inégalité ordinaire. D'après (2-4), la condition  $|A| \leq 1$  est équivalente à

$$A^* A \leq 1$$

Si  $A^* A = 1$  autrement dit, si  $A$  est unitaire, l'équation (2-3) donne

$$|Az| = |z|, \quad \forall z$$

un réseau défini par les quatre matrices  $t, \tau, r, \rho$  est dissipatif, si et seulement si, la matrice de dispersion  $[S]$  de (2-1) est telle que

$$|E_3|^2 + |E_2|^2 \leq |E_1|^2 + |E_4|^2$$

Quelque soient les vecteurs  $E_1$  et  $E_4$ . En utilisant la notation introduite, cette condition s'écrit simplement  $|S| \leq 1$ . Lorsque il y a égalité, c'est à dire lorsque  $[S]$  est unitaire, le réseau est sans perte. Comme au chap I, parag 6, le réseau est dissipatif à gauche par réflexion si la matrice :

$$R(K) = r + \frac{Kt\tau}{1 - K\rho} \quad (2-5)$$

est telle que  $|R(K)| < 1$ , lorsque  $|K| < 1$ . ( $K$  est ici une matrice  $n \times n$ )  
La condition correspondante à droite fait intervenir :

$$P(K) = \rho + \frac{Kt\tau}{1 - Kr} \quad (2-6)$$

Si en outre,  $R(K)$  est unitaire pour tout  $K$  unitaire, le réseau est sans perte à gauche par réflexion.

On a vu au chap I, que pour  $n=1$ , un réseau sans perte, de réflexion à droite  $r$ , possède une réflexion à gauche nulle, s'il est suivi par une charge de réflexion  $r$ . Le réseau sans perte est appelé un résonateur, et le nouveau réseau, résonateur plus charge, est dit adapté à gauche.

La construction d'un résonateur pour  $n$  arbitraire s'appuie sur les propriétés suivantes des matrices: Etant donné une matrice  $n \times n$ , à éléments complexes, nommée  $K$ , et telle que  $|K| \leq 1$ , il existe une matrice  $n \times n$ , nommée  $X$ , telle que:

$$\begin{pmatrix} -K & X \\ X & K \end{pmatrix} \text{ soit unitaire.}$$

Si  $|K| < 1$ ,  $X$  n'est pas singulière. Il y a adaptation pour  $K = z^*$  comme le montre un calcul rapide. En d'autres termes, si  $|r| < 1$

$$\begin{pmatrix} -r^* & X \\ X & r^* \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_1 \\ t_1 & \rho_1 \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

Le problème de l'adaptation simultanée à droite et à gauche est plus délicat. Nous devons choisir des réflexions  $r_0$  et  $\rho_0$  correspondant à des matrices de dispersion unitaires telles que.

$$\begin{pmatrix} -r_0 & X \\ X & r_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & \rho \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \rho_0 & y \\ y & -\rho_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_1 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

D'après (2-7), l'adaptation est réalisée si l'on a simultanément

$$\rho_0^* = P(r_0) \text{ et } r_0^* = R(\rho_0) \quad (2-9)$$

où  $R$  et  $P$  vérifient simultanément (2-5) et (2-6). Le théorème du point fixe de Brouwer, assure que (2-9) possède une solution  $(r_0, \rho_0)$  si,  $P$  et  $R$ , appliquent la sphère unité en elle-même, c'est à dire si

$$|R(K)| < 1 \text{ et } |P(K)| < 1 \quad \forall |K| < 1$$

Cette dernière condition est précisément celle pour qu'un réseau soit dissipatif par réflexion.

4 - Propriétés particulières des réseaux passifs.

Lorsque la matrice  $(t \ \tau \ r \ s)$  relative à un obstacle passif n'est pas singulière,  $|s| < 1$  et  $|r| < 1$ , donc le produit relatif à deux obstacles de ce genre est bien défini. Nous avons

$$|s r_1| \leq |s| |r_1| < 1$$

d'où :  $(1 - s r_1)z \neq 0$  pour  $z \neq 0$

Par conséquent  $(1 - s r_1)n$  est pas singulière. En raisonnant comme dans le cas ou  $n=1$ , nous en déduisons que :

\* Si deux réseaux sont dissipatifs et possèdent des transmissions non singulières, il en est de même de leur produit de dispersion

Cette propriété est également réalisée lorsqu'il s'agit de dissipation par réflexion à droite ou à gauche, d'où le théorème suivant.

Théorème: (1)

Soit  $t, \tau, r, s$  des matrices  $n \times n$  à éléments complexes. Les propriétés a, b et c suivantes sont équivalentes

a)  $\left| r + \frac{\kappa t \tau}{1 - \kappa s} \right| < 1$  pour  $|\kappa| < 1$

b)  $\left| s + \frac{\kappa t \tau}{1 - \kappa r} \right| < 1$  pour  $|\kappa| < 1$

c) Il existe un scalaire positif  $h$  tel que :

$$\left\| \begin{pmatrix} r & h^{-1} \tau \\ h t & s \end{pmatrix} \right\| \leq 1$$

Donc si la dernière matrice est unitaire, les autres le sont également pour tout  $\kappa$  unitaire, et réciproque.

En d'autres termes, si le réseau est dissipatif (ou sans perte) par réflexion à gauche, il l'est également à droite, mais il n'est pas nécessairement dissipatif ou sans perte au sens général, à moins que le scalaire  $h$  soit égal à l'unité.

Pour montrer que (c) implique (a) et (b) choisissons  $X$  de façon que la matrice, qui le contient soit unitaire et considérons :

$$\begin{pmatrix} -K & X \\ X & K \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r & h^{-1}\tau \\ ht & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & \tau_1 \\ t_1 & P(K) \end{pmatrix}$$

Etant le produit de deux matrices dissipatives, la matrice contenant  $P(K)$  est dissipative; donc nous obtenons  $|P(K)| < 1$  en considérant :

$$\begin{pmatrix} r_1 & \tau_1 \\ t_1 & P(K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}; \quad \text{avec } |z| = 1$$

La propriété (c) implique (b); de même (c) implique (a). Montrons maintenant que (b) implique (a). La propriété (b) suppose non seulement l'inégalité  $|\rho| < 1$  obtenue en posant  $K = 0$ , mais encore (lorsque  $t\tau$  n'est pas singulière)  $|r| < 1$ . Ayant ceci dans l'esprit, remarquons que le produit :

$$\begin{pmatrix} r & \tau \\ t & \rho \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} K & X \\ X & -K \end{pmatrix}$$

Est dissipatif par réflexion à droite, puisque chacun des facteurs l'est. Donc d'après la remarque précédente la réflexion à gauche, relative au produit, a une norme inférieure à 1. D'où le résultat cherché :  $|R(K)| < 1$ .

Il reste à montrer que (b) implique (c). Puisque (a) est vrai lorsque (b) est vrai, nous pouvons utiliser l'adaptation bilatérale de l'équation (8-8). La matrice résultante est dissipative à gauche et à droite puisque chaque facteur l'est. En calculant les fonctions associées  $P_1(K)$  et  $R_1(K)$  on montre que :

$$|t_1 K \tau_1| < 1 \quad \text{pour } K < 1$$

Puisque  $K$  est arbitraire cette relation est équivalente à  $|t_1| |\tau_1| \leq 1$ . puisque  $t_1$  et  $\tau_1$  ne sont pas singulières, leurs normes, ne sont pas nulles. Si

$$h = \left( \frac{|\tau_1|}{|t_1|} \right)^{1/2}$$

Alors :

-41-

$$|ht_1| \leq 1, \quad |h^{-1}\tau_1| \leq 1 \quad (2-10)$$

L'inversion d'une matrice de dispersion obéit aux mêmes règles que l'inversion ordinaire. En particulier l'inverse d'une matrice unitaire est son adjointe. En résolvant l'équation (2-8) relative à la matrice  $(t\tau r\beta)$  et en écrivant  $ht$  à la place de  $t$ ,  $h^{-1}\tau$  à la place de  $\tau$  nous obtenons

$$\begin{pmatrix} r & h^{-1}\tau \\ ht & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_0 & x \\ x & r_0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & h^{-1}\tau_1 \\ ht_1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \beta_0 & y \\ y & -\beta_0 \end{pmatrix}^*$$

D'après les inégalités (2-10) la matrice contenant  $t_1$  et  $\tau_1$  est dissipative, par conséquent tout le produit est dissipatif. La démonstration est donc complète.

1. RESEAUX RECIPROQUES SANS PERTES

1-1 Matrices impédance et admittance :

- A l'aide des amplitudes totales définies précédemment on arrivera

$$(3-1) \quad E_1 = (1+r)\alpha_1 + t\alpha_2 \quad (\text{Parag 1, chp. 1})$$

$$(3-2) \quad E_2 = t\alpha_1 + (\beta+1)\alpha_2$$

$$(3-3) \quad H_1 = (1-r)\alpha_1 + t\alpha_2$$

$$(3-4) \quad H_2 = t\alpha_1 + (\beta-1)\alpha_2$$

En éliminant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  entre ses équations il vient :

$$(1-r)E_1 - tE_2 - (1+r)H_1 + tH_2 = 0 \quad (3-5)$$

$$tE_1 - (1-\beta)E_2 + tH_1 - (1+\beta)H_2 = 0 \quad (3-6)$$

La résolution de ce système en  $E_1$  et  $E_2$  n'est possible que si la condition :

$$(1-r)(1-\beta) - t^2 \neq 0$$

est satisfaite. On obtient alors :

$$E_1 = Z_{11}H_1 + Z_{12}H_2$$

$$E_2 = Z_{21}H_1 + Z_{22}H_2$$

Sous forme matricielle:  $[E] = [Z][H]$

où :

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad \text{est la matrice impédance.}$$

Exprimons  $Z_{ij}$  en fonction de  $S_{ij}$  ou  $(t, r, \beta)$ . Le calcul donne :

$$Z_{11} = \frac{(1+r)(1-\beta) + t^2}{(1-r)(1-\beta) - t^2} \quad (3-7)$$

$$Z_{12} = -Z_{21} = \frac{-2t}{(1-r)(1-\beta) - t^2} \quad (3-8)$$

$$Z_{22} = -\frac{(1-r)(1+\beta) + t^2}{(1-r)(1-\beta) - t^2} \quad (3-9)$$



La matrice admittance <sup>-(43)-</sup> s'obtient en inversant  $[Z]$  or  $[Z]^{-1}$  n'existe que si la condition

$$(1+s)(1+r) - t^2 \neq 0 \quad \text{est satisfaite.}$$

- 2.2 Matrice chaîne :

On peut également résoudre les équations (3-1) et (3-2) en  $E_1$  et  $H_1$ . Le déterminant du système est:

$$(1-r)t + (1+s)t = 2t$$

La solution  $t=0$ , ne présente aucun intérêt, on obtient:

$$E_1 = a E_2 + b H_2$$

$$H_1 = c E_2 + d H_2$$

Les coefficients  $a, b, c, d$  sont reliés à  $r, t, s$  et  $Z_{ij}$  par

$$a = -\frac{Z_{11}}{Z_{12}} = \frac{(1+r)(1-s) + t^2}{2t} \quad (3-10)$$

$$b = \frac{Z_{12}^2 + Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}} = \frac{(1+r)(1+s) - t^2}{2t} \quad (3-11)$$

$$c = -\frac{1}{Z_{12}} = \frac{(1-r)(1-s) - t^2}{2t} \quad (3-12)$$

$$d = \frac{Z_{22}}{Z_{12}} = \frac{(1-r)(1+s) + t^2}{2t} \quad (3-13)$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec: } [Gh] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Relation qui exprime les amplitudes totales à l'entrée de l'obstacle en fonction des amplitudes totales à la sortie, on l'appelle matrice chaîne.

On vérifie aisément que ses coefficients vérifient la relation

$$ad - bc = 1$$

La puissance moyenne dissipée dans un obstacle est la partie réelle de la puissance complexe.

$$P = \frac{E_1 \bar{H}_1 - E_2 \bar{H}_2}{2}$$

Compte tenu des relations (2-1) à (2-4) cette expression s'écrit :

$$P = \frac{1}{2} [\alpha_1 (1+r) + \alpha_2 t] [\alpha_1 (1-r) - \alpha_2 t] - \frac{1}{2} [\alpha_2 (1+\beta) + \alpha_1 t] [\alpha_2 (\beta-1) + \alpha_1 t]$$

La condition  $P=0$  s'écrit alors :

$$\alpha_1 \bar{\alpha}_1 (1 - |r|^2 - |t|^2) - \alpha_2 \bar{\alpha}_2 (1 - |\beta|^2 - |t|^2) - 2 \operatorname{Re} [\alpha_1 \bar{\alpha}_2 (r \bar{E} + \bar{\beta} t)] = 0 \quad (2-14)$$

Et qui fait la démonstration de la relation rencontrée au chapitre I paragraphe (6).  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant deux nombres complexes indépendants, on en déduit les trois relations suivantes, qui ne nous sont pas inconnues

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \quad (3-15)$$

$$|\beta|^2 + |t|^2 = 1 \quad (3-16)$$

$$r \bar{E} + \bar{\beta} t = 0 \quad (3-17)$$

Les deux premières relations donnent :

$$t = \sin \varphi e^{-j\delta} \quad (3-18) ; \quad r = j \cos \varphi e^{-j\varphi_1} \quad (3-19)$$

$$\text{et } \beta = j \cos \varphi e^{-j\varphi_2} \quad (3-20)$$

$\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi$  étant des réels. La troisième relation donne :

$$(3-21) \quad e^{j(\varphi - \varphi_1)} = e^{j(\varphi_2 - \varphi)} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + k\pi$$

D'où en choisissant  $\varphi$  dans l'intervalle  $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$  et en prenant le signe (+) dans la formule en  $t$ , ce qui ne restreint pas la généralité.

On obtient :

$$t = \sin \varphi e^{-j\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)} \quad (3-22)$$

$$r = j \cos \varphi e^{-j\varphi_1} \quad (3-23)$$

$$\beta = j \cos \varphi e^{-j\varphi_2} \quad (3-24)$$

Dans le cas d'un obstacle non dissipatif :

$$|H| = |\beta| = \cos \varphi \quad (3-25)$$

On appellera l'angle  $\varphi$  (angle d'ouverture) expression qui sera justifiée à propos des diaphragmes.

Matrice de dispersion

Les relations (3-22) à (3-24) nous permettent d'écrire [S]

$$[S] = \begin{pmatrix} j \cos \varphi e^{-j k_1 z_1} & \sin \varphi e^{-j \frac{(k_1 + k_2) z_1}{2}} \\ \sin \varphi e^{-j \frac{(k_1 + k_2) z_2}{2}} & j \cos \varphi e^{-j k_2 z_2} \end{pmatrix} \quad (3-26)$$

Matrice d'ondes :

D'après les relations  $C_{ij} = f(S_{ij})$  établies au chapitre I on a

$$C_{11} = \frac{e^{j \frac{(k_1 + k_2) z_1}{2}}}{\sin \varphi} \quad (3-27)$$

$$C_{12} = -j \cot \varphi \cdot e^{j \frac{(k_1 - k_2) z_1}{2}} \quad (3-28)$$

$$C_{21} = j \cot \varphi \cdot e^{-j \frac{(k_1 - k_2) z_2}{2}} \quad (3-29)$$

$$C_{22} = \frac{e^{-j \frac{(k_1 + k_2) z_2}{2}}}{\sin \varphi} \quad (3-30)$$

Pour un obstacle non dissipatif la matrice d'onde s'écrit donc :

$$(3-31) \quad [C] = \frac{1}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} e^{j \frac{(k_1 + k_2) z_1}{2}} & -j \cos \varphi \cdot e^{j \frac{(k_1 - k_2) z_1}{2}} \\ j \cos \varphi \cdot e^{-j \frac{(k_1 - k_2) z_2}{2}} & e^{-j \frac{(k_1 + k_2) z_2}{2}} \end{pmatrix}$$

- 46 -

## 2. SYMETRIE ELECTRIQUE DES OBSTACLES SANS PERTE

### Matrice de dispersion

La différence  $(V_1 - V_2)$ , apparaît dans la plupart des expressions précédentes. Dans le cas des obstacles, électriquement symétriques on a :

$$V_1 = V_2 \quad (3-32)$$

Et d'après (3-11) cette valeur commune, est égale à  $V$ . Ce qui fait qu'on n'aura qu'une seule valeur, pour les deux coefficients de réflexion, qui est :

$$R = r = j \cos \varphi e^{-j\varphi} \quad (3-33)$$

Ainsi que pour le coefficient de transmission  $t$  on aura :

$$t = \sin \varphi e^{-j\varphi} \quad (3-34)$$

La matrice de dispersion se réduit donc à :

$$[S] = e^{-j\varphi} \begin{pmatrix} j \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & j \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

La matrice d'onde devient :

$$[C] = \frac{1}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} e^{j\varphi} & -j \cos \varphi \\ j \cos \varphi & e^{-j\varphi} \end{pmatrix} \quad (3-36)$$

En particulier, un tronçon de ligne sans perte de longueur  $l$  de phase

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda g}$$

Est caractérisé par les coefficients :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_0.$$

- 47 -

La matrice d'onde est donc :

$$[C_0] = \begin{pmatrix} e^{j\psi_0} & 0 \\ 0 & e^{-j\psi_0} \end{pmatrix} \quad (3-37)$$

Si on place ce tronçon de ligne à l'avant d'un obstacle électriquement symétrique de matrice d'onde (3-36) on obtient un obstacle dont la matrice d'onde est :

$$[C] = [C_0] \cdot [C] = \frac{1}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} e^{j(\psi_0 + \varphi)} & -j \cos \varphi \cdot e^{j\psi_0} \\ j \cos \varphi \cdot e^{-j\psi_0} & e^{-j(\psi_0 + \varphi)} \end{pmatrix} \quad (3-38)$$

Cette matrice (3-38) peut être identifiée avec la matrice (3-31) d'un obstacle non dissipatif quelconque. Il suffit de conserver  $\kappa$  et de poser

$$\begin{cases} \kappa = \kappa_2 & (3-39) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_0 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} & (3-40) \end{cases}$$

En l'absence de perte :

— un obstacle dissymétrique peut donc être remplacé à toute fréquence donnée, par un obstacle électriquement symétrique précédé d'un tronçon de ligne.

L'angle de phase  $\psi_0$  de ce tronçon traduit la dissymétrie de l'obstacle. Pour cette raison, nous l'appellerons « angle de dissymétrie » de l'obstacle.

### 3 - CELLULES SIMPLIS EQUIVALENTES

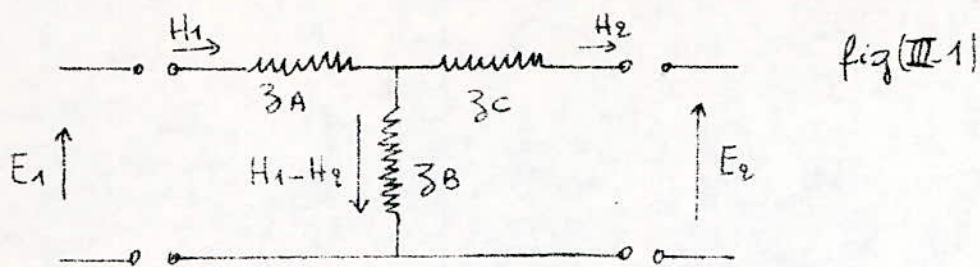
#### A UN OBSTACLE

Un obstacle étant caractérisé à une fréquence donnée par trois coefficients complexes, on peut penser qu'il suffit d'un réseau de trois impédances réduites pour constituer un circuit équivalent

## A) Cellule en T

- 48 -

La figure (III-1) représente un système de trois impédances réduites disposées de façon à constituer une cellule en T



Voyons si nous pouvons déterminer ces impédances de façon que l'obstacle qu'elles constituent ait des coefficients  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{22}$  donnés à l'avance. Pour cette cellule on peut écrire les relations :

$$E_1 - Z_A H_1 = Z_B (H_1 - H_2) = E_2 + Z_C H_2$$

On en déduit :

$$\begin{cases} E_1 = (Z_A + Z_B) H_1 - Z_B H_2 \\ E_2 = Z_B H_1 - (Z_B + Z_C) H_2 \end{cases}$$

Si l'obstacle n'est pas un transformateur parfait. On voit qu'il est équivalent à une cellule en T telle que :

$$\begin{cases} Z_A = Z_{11} + Z_{12} \\ Z_B = -Z_{12} \\ Z_C = -Z_{22} + Z_{12} \end{cases}$$

Ainsi on peut exprimer les impédances de la cellule en T en fonction des coefficients de réflexion et de transmission de l'obstacle. D'après les formules (3-7) à (3-9) on obtient :

$$Z_A = \frac{(1+r)(1-s) + t^2 - 2t}{(1-r)(1-s) - t^2} \quad (3-41)$$

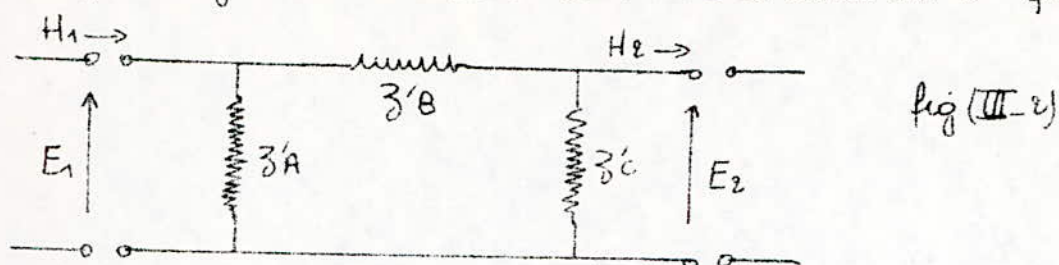
$$Z_B = \frac{2t}{(1-r)(1-s) - t^2} \quad (3-42)$$

$$Z_C = \frac{(1-r)(1+s) + t^2 - 2t}{(1-r)(1-s) - t^2} \quad (3-43)$$

## B) Cellule en $\Pi$

- 49 -

On peut également introduire une cellule en  $\Pi$  fig (III-2)



Les relations entre les diverses grandeurs électromagnétiques sont ici

$$E_1 - E_2 = Z'B \left( H_1 - \frac{E_1}{Z'A} \right) = Z'B \left( H_2 + \frac{E_2}{Z'C} \right)$$

On en déduit, après calculs:

$$Z'A = \frac{(1+r)(1+s) - t^2}{(1-r)(1+s) + t^2 - 2t} \quad (3-44)$$

$$Z'B = \frac{(1+r)(1+s) - t^2}{2t} \quad (3-45)$$

$$Z'C = \frac{(1+r)(1+s) - t^2}{(1+r)(1-s) + t^2 - 2t} \quad (3-46)$$

## 4 - OBSTACLE A DIFFRACTION

### ELECTRIQUE SYMETRIQUE

Un tronçon de ligne homogène renfermant divers obstacles constitue un obstacle. Si cet obstacle produit des champs électriques (propres) identiques des deux côtés de la ligne, quelque soit le côté d'où vient l'onde incidente, on dit que cet obstacle est à diffraction électrique symétrique. Le champ électrique propre est celui qui résulte de la présence des divers obstacles.

Pour étudier un obstacle à diffraction électrique symétrique, il est avantageux de rapporter toutes les ondes qui se propagent à la section de symétrie électrique,  $S'$  du système. On utilisera cette section, comme section de référence unique, remplaçant à la fois la section d'entrée  $S_1$  et celle de sortie de l'obstacle  $S_2$ .

Si l'obstacle reçoit une onde incidente dont l'amplitude électrique, (mesurée en  $S'$ ) est 1, il renvoie vers l'avant une onde dont l'amplitude

électrique est  $r$ . D'après notre hypothèse, il renvoie vers l'arrière une onde (propre) de même amplitude. L'amplitude électrique totale renvoyée en arrière est donc:  $t = 1+r$

En excitant l'obstacle de l'autre côté on obtiendrait de même:  $t = 1+s$  on en déduit:

$$r = s$$

Ce qui montre que le obstacle étudié est électriquement symétrique et qu'il possède de plus la propriété exprimée par:

$$t = 1+r = 1+s \quad (3-47)$$

Enfin les formules (3-41) à (3-43) dev

$$Z_A = Z_C = 0 \quad (47)$$

$$Z_B = -\frac{1+s}{2s} \quad (8)$$

Et la cellule équivalente à l'obstacle " " avec à l'impédance  $Z_B$  en parallèle. Si l'on suppose de plus que le obstacle est dépourvu de perte, la relation (3-47) s'écrit alors avec  $\varphi$  et  $\psi$

$$\sin \varphi e^{-j\psi} = 1 + j \cos \varphi \cdot e^{-j\psi}$$

$$\text{ou:} \quad \psi = \varphi - \frac{\pi}{2} \quad (3-49)$$

L'impédance en parallèle s'écrit donc:

$$Z_B = \frac{j}{2} \tan \varphi \quad (3-50)$$

Notons enfin l'expression de la matrice chaîne que nous utiliserons par la suite; compte tenu de (3-49) la formule (3-35) s'écrit:

$$[C] = \frac{j}{2 \sin \varphi} \begin{pmatrix} -e^{j\varphi} & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & e^{-j\varphi} \end{pmatrix} \quad (3-51)$$



5- INFLUENCE DES LONGUEURS DE LIGNES ASSOCIEES  
SUR LES SCHEMAS EQUIVALENTS

Dans ce paragraphe nous donnons quelques exemples des transformations qu'il est possible de réaliser avec des tronçons de lignes sans perte associées aux obstacles.

5-1 - Transformation d'une impédance parallèle  
en une impédance série.

Etant donné un obstacle équivalent à une impédance parallèle  $Z'B$  sa matrice de chaîne s'écrit: fig (III-3) (A)

$$\begin{pmatrix} 1 & Z'B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Associons à cet obstacle un tronçon de ligne de longueur  $\frac{\lambda g_1}{4}$  ( $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ) et à l'arrière un tronçon de ligne de longueur  $3 \frac{\lambda g_2}{4}$  ( $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ ). La matrice de chaîne d'un tronçon de ligne d'angle de phase  $\varphi_0$  étant d'après (3-10) à (3-13) et dans le cas d'un obstacle non dissipatif:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & j \sin \varphi_0 \\ j \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (3-52)$$

Le nouveau obstacle obtenu a pour matrice de chaîne

$$\begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & Z'B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Z'B & 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît ici, la matrice de chaîne d'un obstacle équivalent à une impédance série, dont la valeur réduite est égale à

$$Z'B = \frac{1}{Z'B} \quad (3-53)$$

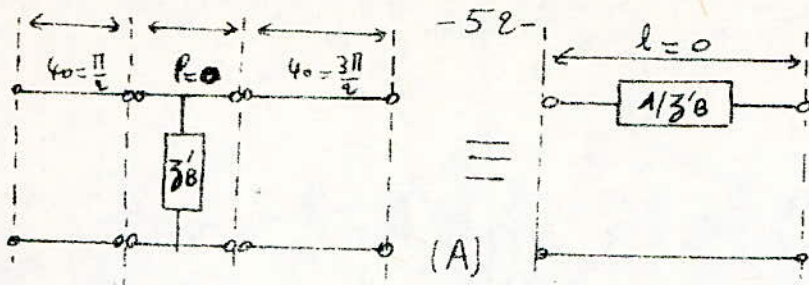
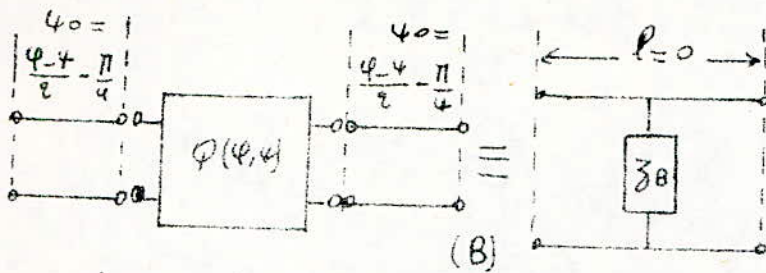


fig III-3

$$Z_B = \frac{j}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$



### 5-2 - Transformation d'un obstacle symétrique sans pertes en une réactance parallèle

En associant à un obstacle symétrique sans perte de matrice d'ondes (3-36) deux tronçons de ligne de même angle de phase  $\varphi_0$ . Le nouveau obstacle obtenu a pour matrice d'ondes

$$\frac{1}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} e^{j\varphi_0} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi_0} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} e^{j\varphi} & -j \cos \varphi \\ j \cos \varphi & e^{-j\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\varphi_0} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi_0} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} e^{j(\varphi+2\varphi_0)} & -j \cos \varphi \\ j \cos \varphi & e^{-j(\varphi+2\varphi_0)} \end{pmatrix}$$

En prenant

$$\varphi_0 = \frac{\varphi - \varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad (3-54)$$

On reconnaît aisément dans ce résultat la matrice d'ondes (3-51) d'un obstacle, équivalent à une réactance parallèle, dont la valeur est encore ici :

$$Z_B = \frac{j}{2} \operatorname{tg} \varphi \quad (3-55)$$

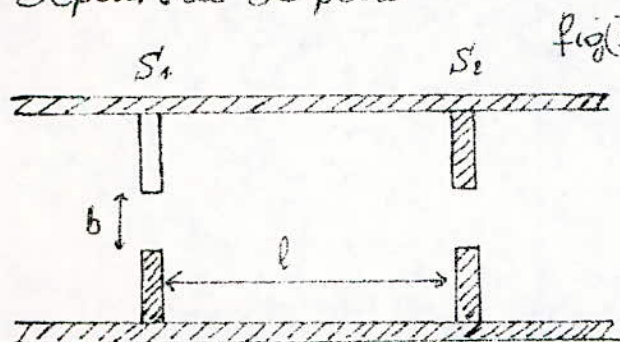
Conclusion:

Ent - obstacle sans perte est équivalent, à une réactance parallèle associée à deux tronçons de ligne, de longueurs convenablement choisies.

## 6. OBSTACLES DE FILTRAGE -53-

En Hyperfréquence, l'élément essentiel constitutif des filtres, est la cavité résonante, qui remplace, dans des montages convenables, les circuits résonant, série ou parallèle, constitués de selfs inductances et de capacités localisées.

- Pour le filtrage en guide d'onde, la cavité résonante la plus simple, s'obtient en plaçant dans le guide, deux diaphragmes identiques distants d'une longueur  $l$ . Nous supposons l'ensemble dépourvue de perte



Soit  $y_b$  l'admittance réduite de chacun de ces diaphragmes. Leur ouverture,  $\varphi$  est donnée par la relation (3-50) qui s'écrit

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{l}{b} \quad (3-56)$$

Le tronçon de ligne qui sépare les diaphragmes, a pour angle de phase:

$$\varphi = \frac{2\pi l}{\lambda g} \quad (3-57)$$

Au moyen des matrices d'ondes, nous pouvons étudier le comportement de cet obstacle  $[C]$  limité aux plans  $S_1$  et  $S_2$  des diaphragmes. D'après les relations (3-37) et (3-51) la matrice d'onde de la cellule rapportée aux plans  $S_1$  et  $S_2$  s'écrit:

$$[C] = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} -e^{j\varphi} & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & e^{-j\varphi} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{j\varphi} & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & e^{-j\varphi} \end{pmatrix} \right] \quad (3-58)$$

D'où:

$$[C] = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} e^{j(\varphi+2\varphi)} & -\cos^2 \varphi e^{-j\varphi} & e_j \cos \varphi \sin(\varphi+\varphi) \\ -e_j \cos \varphi \sin(\varphi+\varphi) & e^{-j(\varphi+2\varphi)} & -\cos^2 \varphi e^{j\varphi} \end{pmatrix} \quad (3-59)$$

fréquence de résonance:

Pour :  $\varphi + \psi = k\pi$ . on aura d'après:

$$S'_{e1} = t = \frac{1}{c_{11}} \quad \text{et} \quad S'_{e2} = \beta = -\frac{c_{12}}{c_{11}}$$

$$\beta = 0 \quad \text{et} \quad |t| = 1$$

En pratique on choisit toujours  $l$  (c.a.d.  $4$ ) pour que  $k=1$  ( $k$  entier) dans la bande de fréquences utilisées et on dira que la cavité est demi-onde, ou que pour  $\varphi$  suffisamment petit  $l = \frac{\lambda_g}{2}$ .  
Ainsi la relation

$$\varphi + \psi = \pi \quad (3-60)$$

N'est alors vérifiée que pour une seule fréquence dite (fréquence de résonance). Exprimée au moyen de  $b$  et  $l$ , la relation de résonance (3-60) s'écrit:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda_g} = \frac{2}{b} \quad (2-61)$$

Vu que :  $\psi = \pi - \varphi$  et  $\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi$

A la résonance la matrice d'onde  $[C]$  s'écrit (se réduit à).

$$[C] = \begin{pmatrix} e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi} \end{pmatrix} \quad (2-62)$$

ce qui montre que l'obstacle est alors équivalent à un tronçon de ligne d'angle de phase  $\varphi$ .

Schéma équivalent:

Nous avons vu, qu'à une fréquence donnée tout obstacle sans perte est équivalent à une réactance parallèle placée entre deux tronçons de ligne. Et nous allons montrer que dans une bande de fréquence, au voisinage de la résonance, lorsque  $\varphi$  est petit, cette équivalence est assimilable aussi valable par l'obstacle  $[C]$ .

En posant :  $\varphi + \psi = \pi + u$  (2-63)

La matrice d'onde de l'obstacle s'écrit :

$$[C] = \frac{-1}{\sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi e^{j(\varphi-u)} & -e^{j(\varphi+u)} & -2j \cos \varphi \sin u \\ 2j \cos \varphi \sin u & \cos^2 \varphi e^{-j(\varphi-u)} & -e^{-j(\varphi+u)} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

L'équivalence cherchée étant exprimée par la condition des obstacles sans perte.

$$t = 1 + \rho$$

D'après les relations

$$C_{11} = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad C_{12} = \frac{-\rho}{t} \quad \Rightarrow \quad -\rho = \frac{C_{12}}{C_{11}}$$

formant l'expression de  $t - \rho$  on a :

$$t = \frac{1}{\cos^2 \varphi e^{j(\varphi-u)} - e^{j(\varphi+u)}} \quad \text{et} \quad -\rho = \left( \cos^2 \varphi e^{j(\varphi-u)} - e^{j(\varphi+u)} \right) \left( -2j \cos \varphi \sin u \right)$$

$$t - \rho = \frac{1 + C_{12}}{C_{11}} = e^{-j\varphi} \frac{2j \cos \varphi \sin u + \sin^2 \varphi}{e^{ju} - \cos^2 \varphi e^{-ju}}$$

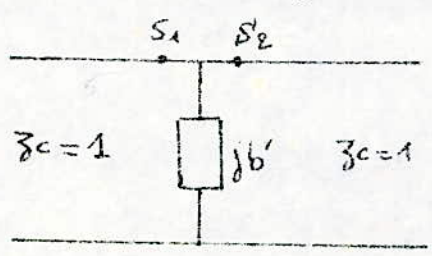
$$\text{Ainsi} \quad t - \rho = e^{-j\varphi} \frac{\sin^2 \varphi + 2j \cos \varphi \sin u}{\cos u \sin^2 \varphi + j(1 + \cos^2 \varphi) \sin u} \quad (2.65)$$

on voit que quelque soit  $u$  et pour  $\varphi = 0$  ;  $t = 1 + \rho$ .

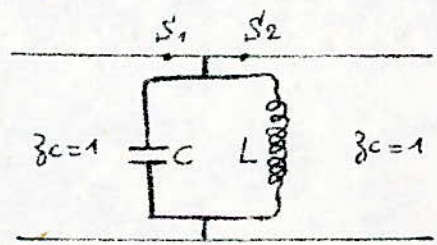
Cas sans intérêt ici puisque les diaphragmes se réduisent à des court-circuits. Mais cette condition est aussi, très approximativement vérifiée lorsque,  $\varphi$  et  $u$ , sont assez petits

on peut alors donner le schéma équivalent suivant, de la cellule.

fig(III-4)



fig(III-5)



Qui se réduit à une susceptance parallèle  $b'$ . Pour préciser la valeur de  $b'$ , identifions par exemple les coefficients de réflexion propres de la cellule  $C$ , et de  $j b'$ . D'après la matrice d'onde (2-64), le coefficient de réflexion de la cellule, peut se mettre sous la forme :

$$\rho = -\frac{C_{12}}{C_{11}} = e^{-j\varphi} \frac{-j \left( \frac{2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \sin u}{\cos u \sin^2 \varphi + j \sin u \cdot (1 + \cos^2 \varphi)}$$

D'où :

$$\rho = e^{-j\varphi} \frac{-j \left[ \frac{2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right] \operatorname{tg} u}{1 + j \left[ \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right] \operatorname{tg} u} \quad (2-66)$$

où en supposant  $\varphi$  petit :

$$\rho = \frac{-j \left[ \frac{2}{\varphi^2} \right] \operatorname{tg} u}{1 + j \left[ \frac{2}{\varphi^2} \right] \operatorname{tg} u} \quad (2-67)$$

Par ailleurs le coefficient de réflexion d'une susceptance,  $j b'$  est le coefficient de réflexion, d'une admittance réduite :  $y = 1 + j b'$  soit

$$\rho = \frac{1 - y}{1 + y} = \frac{-j b'}{2 + j b'} \quad (2-68)$$

Des relations (2-67) et (2-68), on déduit la valeur de  $b'$  du circuit, équivalent à la cellule  $C$

$$b' = \frac{4}{\varphi^2} \operatorname{tg} u. \quad (2-69)$$

Il reste à expliciter la variation de  $u$  en fonction de l'écart :

$$\Delta \omega = \omega - \omega_0.$$

En nous limitant aux termes du premier ordre. Dans cette approximation on a :

$$\operatorname{tg} u = u = \frac{d(\varphi + \varphi)}{d\omega} \cdot \Delta \omega.$$

Comme  $\varphi$  et  $u$  sont assez petits on a :

$$\operatorname{tg} u = u = \frac{d\varphi}{d\omega} \Delta\omega.$$

$$\text{ou} \quad \operatorname{tg} u = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{2\pi l}{\lambda g} \right) \Delta\omega \quad (2-70)$$

En dérivant on a :

$$\operatorname{tg} u = - \frac{2\pi l}{\omega} \cdot \frac{dg}{\lambda^2} \Delta\omega \quad (2-71)$$

Au voisinage de la résonance :  $l \approx \frac{\lambda g}{2}$  et la relation devient :

$$\operatorname{tg} u = \pi \left( \frac{dg}{\lambda} \right)^2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

On en déduit d'après (3-56) et (2-69)

$$b' = \pi b^2 \left( \frac{dg}{\lambda} \right)^2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (2-72)$$

La valeur de la susceptance ainsi précisée, on peut aussi introduire un coefficient de surtension. Comme nous avons supposé que le circuit est sans perte, on peut choisir une perditance  $g$ , extérieur à celui-ci et poser :

$$\varphi = \frac{c\omega}{g} \quad (2-73)$$

Ainsi au voisinage de la résonance,  $b'$  s'écrit :

$$b' = 2 \varphi \cdot g \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (2-74)$$

d'où d'après (2-72)

$$\varphi = \frac{1}{2g} \pi b^2 \left( \frac{dg}{\lambda} \right)^2$$

1 - SUITE D'OBSTACLES

Pour obtenir la matrice de dispersion d'une suite d'obstacles, on utilise soit un produit de dispersion continu, soit un produit de matrice continu, soit on compose les transformations suivantes:

$$Z_{n+1} = P(Z_n)$$

Si les obstacles ne sont pas adjacents, on considère les longueurs de ligne intermédiaires comme des obstacles, et on effectue le calcul en conséquence. Sachant que la matrice de dispersion d'une ligne de longueur  $x$  est

$$\begin{pmatrix} e^{iKx} & 0 \\ 0 & e^{iK'x} \end{pmatrix}$$

où  $K$  et  $K'$  sont les constantes de propagation dans un sens, et l'autre.

Diviser :

$$\frac{tt_1}{1-r_1s} \quad \text{par} \quad \frac{\tau\tau_1}{1-r_1s}$$

Nous montre, que le quotient  $(\frac{tt_1}{\tau\tau_1})$  relatif à deux obstacles associés, peut être obtenu en effectuant le produit des quotients relatifs, à chacun des obstacles, ce résultat peut être étendu à un nombre quelconque d'obstacles associés. [Cette propriété se déduit également, de ce que le déterminant d'une matrice produit, est égal au produit des déterminants; puisque le déterminant de la matrice (3-1) est  $(t/\tau)$

$$[C] = \begin{pmatrix} 1/t & -s/t \\ r/t & \tau - r s/t \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

Nous ne connaissons pas d'autres relations applicables à des suites d'obstacles quelconques. Ils en existent d'autres, pour des obstacles particuliers. Par exemple les relations



$$|t|^2 + |r|^2 = |\tau|^2 + |\rho|^2 = 1; \quad |t| = |\tau|; \quad \varphi_0 = \arg t + \arg \tau - \arg r - \arg \rho = \pi$$

sont valables pour une suite d'obstacles si elles le sont pour chacun des obstacles, puisque l'association de deux réseaux sans pertes constitue un réseau sans perte.

Les relations de commutativité (1-29) du chap I constituent un autre exemple. Désignons par  $t_n, \tau_n, r_n, \rho_n$  les coefficients d'une suite de  $n$  obstacles. Si les équations (1-29) sont valables pour chacun des obstacles,  $A$  et  $B$  demeurant constants, nous pouvons exprimer  $t_n, \tau_n$  et  $r_n$  en fonction de  $\rho_n$  par les relations.

$$r_n = A \rho_n; \quad t_n \tau_n = 1 + 2B \rho_n + A \rho_n^2 \quad (4-2)$$

Puisque  $B = \frac{t_n \tau_n - r_n \rho_n - 1}{2 \rho_n}$

$t_n / r_n$  est déterminé, et est égal à  $\pi(t_n, r_n)$ .

Parfois on désire connaître les valeurs limites des coefficients de transmission et de réflexion, lorsque le nombre d'obstacles augmente indéfiniment. Si la dissipation est suffisamment importante pour que  $t_n \tau_n \rightarrow 0$ , les équations (3-2) nous montrent que:

$$\lim r_n = \xi_1; \quad \lim \rho_n^{-1} = \xi_2 \quad (4-3)$$

Avec:  $\xi_1 \xi_2 = A$  et  $\xi_1 + \xi_2 = -2B$ .

Les  $\xi_i$  sont les racines de  $\xi^2 + 2B\xi + A = 0$   
donc les points fixes considérés précédemment.

⊗ Si chacun des obstacles d'une suite est bilatéral (ou réciproque) ( $t = \tau$ ) on démontre que la suite entière est bilatérale.

Par isomorphisme à la matrice de dispersion  $[S]$  on associe  $[C]$

$$\begin{pmatrix} r & \tau \\ t & \rho \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/t & -\rho/t \\ 1/\tau & \tau - \frac{\rho \rho}{t} \end{pmatrix} = [C]$$

-60-

L'obstacle ( $t \tau r s$ ) étant bilatéral ( $t = \tau$ );  $\det[C] = 1$ , pour une suite d'obstacles bilatéraux la matrice  $[C_n]$  s'écrit :

$$[C_n] = [C_1] \cdot [C_2] \cdot [C_3] \dots [C_{n-1}]$$

Sachant que le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants de chaque matrice on a :

$$\det [C_n] = \det [C_1] \cdot \det [C_2] \dots \det [C_{n-1}]$$

Comme chaque obstacle est réciproque on a :

$$\det [C_i] = 1 \quad (i = 1 \dots n)$$

Donc  $\det [C_n] = 1$ , et la suite entière d'obstacles est bilatérale.

⊗ La réflexion d'une série d'obstacles sans perte est maximum, lorsque la distance de deux obstacles successifs est telle que, leur réflexion soit maximum. Pour montrer cela on utilise la relation (1-14)' obtenue au chap I (parag. 5)

$$|R| = |r|$$

La phase du coefficient de réflexion gauche de l'ensemble de deux obstacles placés à une distance telle que leur réflexion soit maximum, est égale à la phase propre du coefficient de réflexion à gauche de l'obstacle gauche pris isolément.

## 2. SUITE DE RESEAUX IDENTIQUES

Pour une suite de  $n$  obstacles ( $t \tau r s$ ), la matrice de dispersion résultante obtenue en effectuant les produits de dispersion est :

$$\begin{pmatrix} r_n & \tau_n \\ t_n & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \tau \\ t & s \end{pmatrix}^n \quad (2-4)$$

Puisque des obstacles identiques sont permutable, les équations (1-2) où  $A$  et  $B$  sont données par (1-29) sont vérifiées, ainsi que l'égalité  $t_n/\tau_n = (t/\tau)^n$ . La seule grandeur manquante, celle de  $s_n$ , est donnée par la formule de récurrence :

$$s_{n+1} = s + \frac{t\tau s_n}{1 - r s_n} = P(s_n) \quad (2-5)$$

ou par un produit de matrices, la résolution de l'équation (4-5) est facilitée par la considération des points fixes

D'après (4-5) pour  $n=1$  on aura:  $p_2 = p + \frac{t\tau}{1-rp}$

Avec les conditions initiales:  $p_1 = p; r_1 = r; t_1 = t, \tau_1 = \tau$

D'où:

$$\frac{p_2(1-rp)}{p} = 1 + t\tau - rp$$

D'après le parag (5) du chp I:  $t\tau - rp = e^{j(k+l+\pi)} = e^{j(k+l)}$

Vue que la suite d'obstacles identiques sans perte est sans perte.

$$|t| = 1 \text{ et } |\tau| = 1$$

D'où:  $1 + t\tau - rp = 1 + e^{j(k+l)} = e^{j\frac{(k+l)}{2}} \left( e^{j\frac{(k+l)}{2}} + e^{-j\frac{(k+l)}{2}} \right)$

$$1 + t\tau - rp = \frac{\sqrt{t\tau}}{\sqrt{|t||\tau|}} \cdot 2 \operatorname{ch} \left[ j\frac{(k+l)}{2} \right] = 2\sqrt{t\tau} \operatorname{ch} \delta$$

où  $\delta = j\frac{(k+l)}{2} = j\frac{(k+l+\pi)}{2}$

Donc:  $1 + t\tau - rp = \frac{p_2(1-rp)}{p} = 2\sqrt{t\tau} \operatorname{ch} \delta. \quad (1)$

et:  $(1) \Rightarrow (1-rp) = 2\sqrt{t\tau} \operatorname{ch} \delta \left( 1 - \frac{\sqrt{t\tau}}{2 \operatorname{ch} \delta} \right) = 2\sqrt{t\tau} \operatorname{ch} \delta \cdot \frac{p}{p_2}$

D'où:  $\frac{p}{p_2} = \frac{2 \operatorname{ch} \delta - \sqrt{t\tau}}{2 \operatorname{ch} \delta} \Rightarrow p_2 = \frac{p \cdot 2 \operatorname{ch} \delta \cdot \operatorname{sh} \delta}{2 \operatorname{ch} \delta \operatorname{sh} \delta - \sqrt{t\tau} \operatorname{sh} \delta}$

finalement sachant que  $2 \operatorname{ch} \delta \operatorname{sh} \delta = \operatorname{sh} 2\delta$  on a:

$$p_2 = \frac{p \cdot \operatorname{sh} 2\delta}{\operatorname{sh} 2\delta - \sqrt{t\tau} \operatorname{sh} \delta}$$

Par récurrence on obtient:

$$p_n = \frac{p \cdot \operatorname{sh} \delta n}{\operatorname{sh} \delta n - \sqrt{t\tau} \operatorname{sh} \delta(n-1)} \quad (4-6)$$

et (4-2) donnent:

$$t_n \tau_n = 1 + 2 \left( \frac{t\tau - rp - 1}{2p} \right) p_n + t_n p_n$$

$$\Rightarrow t_n \tau_n - r_n p_n - 1 = 2 e^{\delta} \operatorname{sh} \delta \cdot \frac{p_n}{p}$$

D'où: 
$$2e^{\delta n} \left( \frac{e^{\delta n} - e^{-\delta n}}{2} \right) = 2\sqrt{e\tau} \operatorname{sh} \delta \cdot \frac{\operatorname{sh} \delta n}{\operatorname{sh} \delta n - \sqrt{e\tau} \operatorname{sh} \delta(n-1)}$$

et: 
$$\sqrt{t_n \tau_n} = \sqrt{e\tau} \frac{\operatorname{sh} \delta}{\operatorname{sh} \delta n - \sqrt{e\tau} \operatorname{sh} \delta(n-1)} \quad \text{Avec } t_n = t^n \text{ et } \tau_n = \tau^n$$

finalement: 
$$\tau_n = \tau \left( \frac{\tau}{t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sh} \delta}{\operatorname{sh} \delta n - \sqrt{e\tau} \operatorname{sh} \delta(n-1)} \quad (4-6)'$$

(4-6) et (4-6)' sont les solutions de (4-5). Les expressions de  $r_n$  et  $t_n$  se trouvent en remplaçant  $r$  par  $s$  et  $t$  par  $\tau$ . Il existe une démonstration moins pénible des équations (3-6) basée sur l'identité:

$$\begin{pmatrix} r(m+n) & \tau(m+n) \\ t(m+n) & \beta(m+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_m & \tau_m \\ t_m & \beta_m \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_n & \tau_n \\ t_n & \beta_n \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

L'équation (4-7) suppose que l'on peut décomposer une suite de  $m+n$  obstacles en une suite de  $m$ , adjacente à une suite de  $n$ . En développant (4-7) on obtient:

$$r_{m+n} = r_m + \frac{t_m \tau_m r_n}{1 - \beta_m r_n}$$

$$t_{m+n} = \frac{t_m t_n}{1 - \beta_m r_n}$$

$$\tau_{m+n} = \frac{\tau_m \tau_n}{1 - \beta_m r_n}$$

$$\beta_{m+n} = \beta_n + \frac{t_n \tau_n \beta_m}{1 - \beta_m r_n}$$

Par  $n=1$ , ces relations deviennent des formules de récurrence qui montrent, que les quatre coefficients sont déterminés de façon unique, par (4-7) associée aux valeurs initiales.

$$t_1 = t; \tau_1 = \tau; r_1 = r; \beta_1 = \beta \quad (4-8)$$

Le milieu étant sans pertes :

$$|\tau| = |t| = 1$$

$$\text{et } \sqrt{t\tau} = \sqrt{|t||\tau|} e^{j \frac{\angle t + \angle \tau}{2}} = e^{j \frac{\angle t + \angle \tau}{2}}$$

$$\text{Donc: } \sqrt{t\tau} = \cos\left(\frac{\angle t + \angle \tau}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\angle t + \angle \tau}{2}\right)$$

En posant:  $\delta = j\left(\frac{\angle t + \angle \tau}{2}\right)$  on aura

$$\sqrt{t\tau} = \text{ch}\delta + j \sin\left(\frac{\angle t + \angle \tau}{2}\right) \Rightarrow \text{Re}(\sqrt{t\tau}) = \text{ch}\delta.$$

$$\text{car: } \text{ch}\left[j\left(\frac{\angle t + \angle \tau}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{\angle t + \angle \tau}{2}\right)$$

### 3 - EQUATIONS FONCTIONNELLES

#### 3.1 - Milieu homogène anisotrope

Soit une lame diélectrique anisotrope, au sens qu'elle ne présente pas les mêmes propriétés pour les ondes qui la traversent d'un côté ou de l'autre. La lame possède une épaisseur  $x+y$ , Elle peut être considérée comme une lame d'épaisseur  $x$ , adjacente à une lame d'épaisseur  $y$ .

La matrice de dispersion de la lame d'épaisseur  $x+y$  est égale au produit des matrices de dispersion des deux lames adjacentes d'épaisseurs respectives  $x$  et  $y$ . En considérant la distance qui sépare les deux lames d'épaisseurs  $x$  et  $y$ ,

comme nulle; on aura:

- 64 -

$$\begin{pmatrix} r(x) & \tau(x) \\ t(x) & \rho(x) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r(y) & \tau(y) \\ t(y) & \rho(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(x+y) & \tau(x+y) \\ t(x+y) & \rho(x+y) \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

Le développement de l'équation (2-9) mène aux équations fonctionnelles soit:

$$(2-10) \begin{cases} r(x+y) = r(x) + \frac{t(x)\tau(y)r(y)}{1 - \rho(x)r(y)} ; & \tau(x+y) = \frac{\tau(x)\tau(y)}{1 - \rho(x)r(y)} \\ t(x+y) = \frac{t(x)t(y)}{1 - \rho(x)r(y)} ; & \rho(x+y) = \rho(y) + \frac{t(y)t(x)\rho(x)}{1 - \rho(x)r(y)} \end{cases}$$

En supposant vérifiées les conditions initiales:

$$t(0) = \tau(0) = 1 ; \quad r(0) = \rho(0) = 0 \quad (2-11)$$

et qu'ils existent les dérivées:

$$a = \rho'(0) ; \quad b_1 = t'(0) ; \quad b_2 = \tau'(0) ; \quad c = r'(0) \quad (2-12)$$

Le système (2-9) permet de trouver:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad \frac{dr}{dx} &= c t \tau \quad [t = t(x); \tau = \tau(x)] \\ b) \quad \frac{dt}{dx} &= t (c \rho + b_1) \\ c) \quad \frac{d\tau}{dx} &= \tau (c \rho + b_2) \\ d) \quad \frac{d\rho}{dx} &= a + \frac{b_1 + b_2}{2} \rho + c \rho^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

Avant de résoudre ce système d'équations (2-13), évaluons les constantes  $a$ ,  $b_1$ ;  $b_2$  et  $c$

Pour ce fait considérons un diélectrique, dont la constante de propagation est  $K$  dans un sens et  $K'$  dans l'autre sens. fig(W-1)

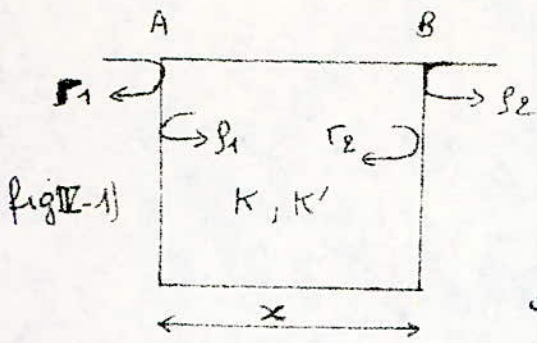


fig IV-1)

La surface de gauche (A) possède les coefficients de réflexion :  $r_1$  et  $\beta_1$   
 Celle de droite (B) possède :  $r_2$  et  $\beta_2$

La continuité du champ E, sur les surfaces de séparation nous permet de calculer les coefficients de transmission

$$t_i = 1 + r_i \quad \text{et} \quad \tau_i = 1 + \beta_i \quad (4-14)$$

d'où :

$$t_1 = 1 + r_1 \quad \tau_1 = 1 + \beta_1$$

$$t_2 = 1 + r_2 \quad \tau_2 = 1 + \beta_2$$

En appliquant l'équation (1-1) à la matrice de dispersion d'une ligne de longueur  $x$  ( $e^{jKx} \ e^{jK'x} \ 0 \ 0$ )

On trouve :

$$a) \quad t(x) = \frac{(1+r_1)(1+r_2) e^{jKx}}{1 - \beta_1 r_2 e^{j(K+K')x}} \quad (4-15)$$

$$b) \quad \tau(x) = \frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2) e^{jK'x}}{1 - \beta_1 r_2 e^{j(K+K')x}}$$

$$c) \quad r(x) = r_1 + \frac{r_2 (1+\beta_1)(1+r_1) e^{j(K+K')x}}{1 - \beta_1 r_2 e^{j(K+K')x}}$$

$$d) \quad \beta(x) = \beta_2 + \frac{\beta_1 (1+r_2)(1+\beta_2) e^{j(K+K')x}}{1 - \beta_1 r_2 e^{j(K+K')x}}$$

Pour trouver ce résultat, on considère la face (A) du diélectrique comme un obstacle, la face (B) comme un deuxième obstacle, et la longueur  $x$ , qui les sépare comme un troisième obstacle, puis on applique les relations d'une suite d'obstacle.

La matrice de dispersion de l'ensemble des trois obstacles est

-66-

$$\begin{pmatrix} r(x) & \tau(x) \\ t(x) & \rho(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & \tau_1 \\ t_1 & \rho_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & e^{\delta \kappa' x} \\ e^{\delta \kappa x} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r_2 & \tau_2 \\ t_2 & \rho_2 \end{pmatrix}$$

En développant ce produit, et en substituant (4-14) dans les expressions de  $t(x)$ ;  $\tau(x)$ ;  $r(x)$  et  $\rho(x)$  on arrive au système d'équations (4-15).

On remarque que les coefficients  $r_i$  et  $\rho_i$  de (4-14) ne sont pas indépendants, ceci est vérifié par le fait que les conditions initiales ont la forme:

$$t(0) = \tau(0) = 1 \quad \text{et} \quad r(0) = \rho(0) = 0$$

Elles vérifient les équations

$$\left. \begin{aligned} r_2(1+r_1+\rho_1) + r_1 &= 0 \\ \rho_2(1+r_1+\rho_1) + \rho_1 &= 0 \end{aligned} \right\} (4-16)$$

Ainsi une lame diélectrique est totalement définie par les équations quatre constantes  $\kappa$ ,  $\kappa'$ ;  $r_1$  et  $\rho_2$

Pour trouver l'expression de  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  etc on dérive le système (4-15) par rapport à  $x$ . D'où:

$$a = \rho'(0)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} = j(\kappa + \kappa') \frac{\rho_1(1+r_2)(1+\rho_2)(1-\rho_1 r_2) + \rho_1 r_2(1+r_2)(1+\rho_2) \cdot \rho_1}{(1-\rho_1 r_2)^2}$$

$$\text{Avec: } \frac{d\rho_2}{dx} \Big|_{x=0} = 0.$$

D'après (4-16) on a:

$$r_2 = -\frac{r_1}{1+r_1+\rho_1} \quad \text{et} \quad \rho_2 = -\frac{\rho_1}{1+r_1+\rho_1} \quad (4-17)$$

$$\text{et, } \rho'(0) = j(\kappa + \kappa') \frac{(1+r_2)(1+\rho_2) \rho_1}{(1-\rho_1 r_2)^2}$$

devient:



$$p'(0) = j(K+K')\beta_1 \frac{-67- \frac{1}{(1+r_1)(1+\beta_1)} \frac{1}{(1+r_1+\beta_1)^2}}{(1+\beta_1+r_1+\beta_1 r_1)^2 \frac{1}{(1+r_1+\beta_1)^2}}$$

finalement :

$$p'(0) = \frac{j(K+K')\beta_1}{(1+r_1)(1+\beta_1)} = a \quad (4-18)$$

et :

$$b_1 = t'(0) = j \frac{(1+r_1)(1+r_2)(K+K'\beta_1 r_2)}{(1-\beta_1 r_2)^2}$$

d'après (4-14)

$$t'(0) = j \frac{K(1+r_1+\beta_1) - K'\beta_1 r_1}{(1+r_1)(1+\beta_1)} = b_1 \quad (4-19)$$

De la même façon on trouve :

$$z'(0) = j \frac{K'(1+\beta_1+r_1) - K\beta_1 r_1}{(1+r_1)(1+\beta_1)} = b_2 \quad (4-20)$$

et

$$r'(0) = -j \frac{r_1(K+K')(1+\beta_1+r_1)}{(1+r_1)(1+\beta_1)} = c \quad (4-21)$$

Remarque: Les équations (4-18) à (4-21) sont en accord avec les relations (1-29) trouvées au chapitre I.

$$\frac{r}{s} = \frac{r_1}{s} \quad \text{et} \quad \frac{t z - r s - 1}{s} = - \left( r_1 + \frac{1}{\beta_2} \right) \quad (4-22)$$

d'après la théorie de Maxwell, les équations fonctionnelles — ne faisant intervenir que quatre constantes complexes — sont régies par  $\epsilon$ ,  $\mu$  dans les deux sens de propagation.

$$K = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{c}{\lambda}$$

comme :

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \\ \mu \epsilon v^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \cdot \frac{\mu}{\mu_0}}$$

et : 
$$K' = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon' \mu'}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad -68-$$

$\lambda$  : étant la longueur d'onde dans le vide.

Soit :

$$Z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \cdot \frac{\mu_0}{\mu}} = \frac{n}{n_0} \quad \text{et} \quad Z' = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} \cdot \frac{\mu_0}{\mu'}} = \frac{n'}{n_0}$$

$r_1$  et  $\beta_1$  sont déterminés par  $Z$  et  $Z'$

$$r_1 = \frac{1-Z}{1+Z} \quad \beta_1 = \frac{Z'-1}{Z'+1}$$

D'où :

$$a = \frac{j(K+K')\beta_1}{(1+r_1)(1+\beta_1)} \quad \text{devient en substituant } r_1 \text{ et } \beta_1 \text{ par leurs expressions :}$$

$$a = \frac{-j(K+K')(1+Z)(1-Z')}{4Z'} \quad (4-23)$$

et

$$b_1 = \frac{j[K(1+r_1+\beta_1) - K'r_1\beta_1]}{(1+r_1)(1+\beta_1)}$$

Devient :

$$b_1 = j \frac{K(1+Z)(1+Z') + K'(1-Z)(1-Z')}{4Z'} \quad (4-24)$$

Pour un milieu isotrope :  $K=K' \Rightarrow Z=Z'$ , on obtient :

$$a = c = \frac{1}{2} j K (Z - Z^{-1}) \quad (4-25)$$

et

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2} j K (Z + Z^{-1})$$

Ceci nous permet de vérifier l'accord entre la méthode des équations fonctionnelles, et la méthode qui s'appuie sur la théorie du champ :

Conclusion:

- 69 -

$t = \tau$  entraîne  $K = K'$

mais  $t = \tau$  n'entraîne pas  $r_1 = r_2$  sauf si  $r = s$ .

La double représentation des réseaux bilatéraux sans perte suppose donc un milieu anisotrope

### 3-2 RESOLUTION DES EQUATIONS

Au paragraphe (3-1) de ce chapitre on a obtenu les équations

$$a) \frac{dr}{dx} = c t \tau$$

$$b) \frac{dt}{dx} = t (c s + b_1)$$

$$c) \frac{d\tau}{dx} = \tau (c s + b_2)$$

$$d) \frac{ds}{dx} = a + 2b s + c s^2$$

Avec :  $2b = b_1 + b_2$ .

Les équations (b) et (c) nous donnent :

$$b) \frac{dt}{t} = (c s + b_1) dx$$

$$c) \frac{d\tau}{\tau} = (c s + b_2) dx$$

$$\text{d'où : } \frac{dt}{t} - \frac{d\tau}{\tau} = (b_1 - b_2) dx$$

En intégrant on trouve :

$$\ln t - \ln \tau = (b_1 - b_2) x + A \quad (A = \text{cste})$$

les conditions initiales (4-11) nous donnent :

$$t(0) = 1 = \tau(0) \Rightarrow \ln t(0) = \ln \tau(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Ainsi :

$$\ln \frac{t}{\tau} = (b_1 - b_2) x \Rightarrow \left( \frac{t}{\tau} \right) = e^{(b_1 - b_2) x} \quad (4-26)$$

D'autre part le diélectrique étant homogène, les deux membres du premier membre de (4-9) peuvent être permutés, donc d'après le paragraphe 6 du chap I

$$\frac{r}{s} = \text{cste} \quad \text{et} \quad \frac{t\tau - rs - 1}{2s} = \text{cste}$$

Faire tendre  $x$  vers 0; nous montre que les constantes  $c/a$  et  $b/a$  sont telles que:

$$ar = c\beta \quad (4-27)$$

et

$$a + r = a + 2b\beta + c\beta^2 \quad (4-28)$$

Ainsi avec les relations (4-26) à (4-27) on peut résoudre les équations (a); (b); (c) et (d). dont les solutions pourront être obtenues à partir de la solution de l'équation (d) combinée avec les relations (4-26) à (4-27)

L'équation (d) est:

$$\frac{d\beta}{dx} = a + 2b\beta + c\beta^2 \quad (4-13-d)$$

Elle peut être linéarisée, en posant:

$$\beta = -\frac{1}{c} \frac{f'}{f} = -\frac{1}{c f(x)} \frac{df(x)}{dx} \quad (4-29)$$

$$d'où: -\frac{1}{c} \frac{f''f - f'^2}{f^2} = a - 2b \frac{f'}{cf} + \frac{f'^2}{cf^2}$$

qui donne l'équation linéaire homogène suivante:

$$f'' - 2bf' + acf = 0 \quad (4-30)$$

Dont l'équation caractéristique s'écrit:

$$\alpha^2 - 2b\alpha + ac = 0 \Rightarrow \Delta^2 = b^2 - ac > 0$$

Donc:

$$\alpha_1 = b + \Delta \text{ et } \alpha_2 = b - \Delta \text{ en sont les solutions.}$$

Et la solution de (4-30) s'écrit donc:

$$f = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes qui restent à déterminer.

D'après (4-29) on a:

$$\beta = -\frac{1}{c} \frac{f'}{f} = \frac{-(\alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 x} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 x})}{C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}}$$

En utilisant les conditions initiales (4-11) et (4-12) on a:

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = a \quad -71-$$

$$f(0) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2)}{(C_1 + C_2)} = 0 \Rightarrow \alpha_1 C_1 = -\alpha_2 C_2 \quad (4-31)$$

$$\text{et: } f'(0) = \frac{-[(\alpha_1^2 C_1 + \alpha_2^2 C_2)(C_1 + C_2) - (\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2)^2]}{c(C_1 + C_2)} = a$$

Avec (4-31)  $f'(0)$  devient:

$$f'(0) = \frac{\alpha_2 C_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{c} = a$$

$$\text{d'où: } C_1 = -\frac{ac}{2\Delta\alpha_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{ac}{2\Delta\alpha_2}$$

En revenant à l'expression de  $f$  on a:

$$f = -\frac{1}{c} \frac{\left(\frac{ac}{2\Delta} e^{\alpha_2 x} - \frac{ac}{2\Delta} e^{\alpha_1 x}\right)}{\frac{ac}{2\Delta(b-\Delta)} e^{\alpha_2 x} - \frac{ac}{2\Delta(b+\Delta)} e^{\alpha_1 x}}$$

$$f = -\frac{1}{c} \frac{(e^{\alpha_2 x} - e^{\alpha_1 x})(b^2 - \Delta^2)}{(b+\Delta)e^{\alpha_2 x} - (b-\Delta)e^{\alpha_1 x}} = \frac{-ac(e^{\alpha_2 x} - e^{\alpha_1 x})}{c[\Delta(e^{\alpha_2 x} + e^{\alpha_1 x}) - b(e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x})]}$$

$$f = \frac{a(e^{(b+\Delta)x} - e^{(b-\Delta)x})}{\Delta(e^{(b+\Delta)x} + e^{(b-\Delta)x}) - b(e^{(b+\Delta)x} - e^{(b-\Delta)x})}$$

finallement on obtient après développement:

$$f = \frac{a \operatorname{sh} \Delta x}{\Delta \operatorname{ch} \Delta x - b \operatorname{sh} \Delta x} \quad (4-32)$$

Et en remplaçant  $f$  par sa valeur (4-32) dans l'équation (4-28) on obtient:

$$\sqrt{\epsilon r} = \frac{\Delta}{\Delta \operatorname{ch} \Delta x - b \operatorname{sh} \Delta x} \quad (4-33)$$

d'après l'équation (4-27) <sup>-73-</sup>

$$r = \frac{c\beta}{a} \Rightarrow r = \frac{c \operatorname{sh} \Delta x}{\Delta \operatorname{ch} \Delta x - b \operatorname{sh} \Delta x} \quad (4-34)$$

Et d'après (4-26) on a :

$$t = \tau e^{(b_1 - b_2)x} \Rightarrow \sqrt{t\tau} = \tau e^{\frac{1}{2}(b_1 - b_2)x}$$

Avec l'équation (4-33) on obtient enfin :

$$t = e^{\frac{1}{2}(b_1 - b_2)x} \times \frac{\Delta}{\Delta \operatorname{ch} \Delta x - b \operatorname{sh} \Delta x} \quad (4-35)$$

et

$$\tau = e^{-\frac{1}{2}(b_1 - b_2)x} \times \frac{\Delta}{\Delta \operatorname{ch} \Delta x - b \operatorname{sh} \Delta x} \quad (4-36)$$

#### 4 - Application aux suites d'obstacles :

Les relations (4-35) à (4-36) vérifient le système d'équation (4-9) posés :

$$x = m \text{ et } y = n$$

Le système (4-9) devient :

$$\begin{pmatrix} r(m+n) & \tau(m+n) \\ t(m+n) & \beta(m+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(m) & \tau(m) \\ t(m) & \beta(m) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r(n) & \tau(n) \\ t(n) & \beta(n) \end{pmatrix}$$

Qui est identique à (4-7) dans le cas où :

$$t_n = t(n) ; \tau_n = \tau(n) ; \beta_n = \beta(n) \text{ et } r_n = r(n).$$

Donc on peut appliquer les solutions des équations fonctionnelles des milieux anisotropes aux suites de réseaux identiques. fig(IV-2)

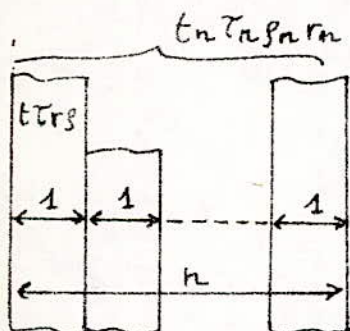


fig IV-2 Les coefficients  $t_n, \tau_n, r_n, \beta_n$  de  $n$  lames accolées d'épaisseur unité sont ceux d'une lame d'épaisseur  $n$ .

La figure (IV-2) nous fournit une nouvelle méthode d'étude des suites d'obstacles. Les conditions initiales:

$$t(1) = t; \tau(1) = \tau; r(1) = r \text{ et } \rho(1) = \rho$$

nous donnent quatre équations à quatre inconnues:  $a, b_1, b_2, c$ . Définissons une nouvelle inconnue  $X$  par la relation:

$$\Delta \operatorname{ch} \Delta = X \operatorname{sh} \Delta$$

Les équations (4-27), (4-28) et (4-32) donnent en prenant  $x=1$ :

$$(1) \quad ar = c\rho \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{r}{\rho} = A$$

$$(2) \quad at\tau = a + 2b\rho + c\rho^2 \Rightarrow at\tau = a + 2b\rho + ar\rho \\ \Rightarrow a\left(\frac{t\tau - r\rho - 1}{2\rho}\right) = b$$

$$\text{d'où: } \frac{b}{a} = B$$

$$(3) \quad \rho = \frac{a \operatorname{sh} \Delta x}{\Delta \operatorname{ch} \Delta x - b \operatorname{sh} \Delta x} \quad \text{avec } x=1 \quad \rho = \frac{a \operatorname{sh} \Delta}{\Delta \operatorname{ch} \Delta - b \operatorname{sh} \Delta}$$

et avec:  $\Delta \operatorname{ch} \Delta = X \operatorname{sh} \Delta$  on aura:

$$\frac{X}{a} = \frac{1}{\rho} + B$$

$$\text{ou } A = \frac{r}{\rho} \quad \text{et } B = \frac{t\tau - r\rho - 1}{2\rho}$$

D'où la condition:  $\Delta^2 = b^2 - ac$  se réduit à

$$c h^2 \Delta = (t\tau)^{-1} (1 + \rho B)^2$$

Les coefficients  $r(1), \rho(1), t(1), \tau(1)$  ont alors les valeurs voulues. Nous calculons  $b_i$  en appliquant les relations:

$$b_1 + b_2 = 2b \quad \text{et} \quad b_1 - b_2 = \ln \frac{t}{\tau}$$

Les équations (4-32) à (4-36) nous permettent ensuite de connaître les caractéristiques de l'obstacle composite.

~~-74-~~

## 5 - DIELECTRIQUE NON HOMOGENE

Au parag(31) du chap IV les quantités  $\epsilon, \epsilon', \mu$  et  $\mu'$  sont des constantes. Dans ce paragraphe nous allons considérer les quatres paramètres comme des fonctions d'une abscisse,  $z$  telle que  $x < z < y$  l'épaisseur de la lame sera donc  $(x-y)$  et:

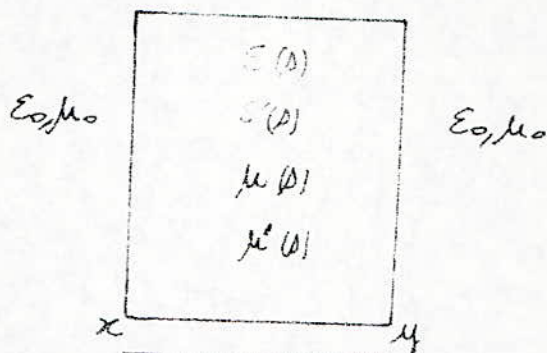
$$\epsilon = \epsilon(z), \quad \mu = \mu(z)$$

$$\epsilon' = \epsilon'(z); \quad \mu' = \mu'(z)$$

et:

$$t = t(x, y) \quad ; \quad r = r(x, y)$$

$$\tau = \tau(x, y) \quad \quad \quad \rho = \rho(x, y)$$



La matrice de dispersion de la lame pour  $z \leq y > x$ , s'écrit

$$4-37) \begin{pmatrix} r(x, z) & \tau(x, z) \\ t(x, z) & \rho(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(x, y) & \tau(x, y) \\ t(x, y) & \rho(x, y) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r(y, z) & \tau(y, z) \\ t(y, z) & \rho(y, z) \end{pmatrix}$$

D'où:

$$38) \begin{cases} t(x, z) = \frac{t(x, y) \cdot t(y, z)}{1 - \rho(x, y) \tau(y, z)} & \rho(x, z) = \rho(y, z) + \frac{t(y, z) \cdot \tau(y, z) \cdot \rho(x, y)}{1 - \rho(x, y) \cdot r(y, z)} \\ \tau(x, z) = \frac{\tau(x, y) \cdot \tau(y, z)}{1 - \rho(x, y) \cdot r(y, z)} & r(x, z) = r(x, y) + \frac{t(x, y) \cdot \tau(x, y) \cdot r(y, z)}{1 - \rho(x, y) \cdot r(y, z)} \end{cases}$$

Soient les conditions initiales pour  $z = x$

$$t(x, x) = \tau(x, x) = 1 \quad \text{et} \quad r(x, x) = \rho(x, x) = 0$$

les constantes  $a, b_1, b_2$  et  $c$  deviennent des fonctions de la variable  $x$ . Soit:

$$a = a(x) = \frac{\partial}{\partial y} [\rho(x, x)] \quad ; \quad b_2 = b_2(x) = \frac{\partial}{\partial y} [\tau(x, x)]$$



$$b_1 = b_1(x) = \frac{\partial}{\partial y} [t(x, x)]^{-75} ; \quad c = c(x) = \frac{\partial}{\partial y} [r(x, x)]$$

Connaissant les expressions de  $t(x, z)$ ;  $\tau(x, z)$ ;  $r(x, z)$ ;  $\rho(x, z)$  nous pouvons exprimer  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  et  $c$  en fonction de  $k$  et  $k'$  ce qui correspond à les exprimer en fonction de  $\epsilon(x)$ ;  $\epsilon'(x)$ ;  $\mu(x)$  et  $\mu'(x)$ .  
De (4-38) on a :

$$\lim_{z \rightarrow y} \frac{r(x, z) - r(x, y)}{z - y} = \lim_{z \rightarrow y} \frac{t(x, y) \cdot \tau(x, y) \cdot r(y, z)}{[1 - \rho(x, y) \cdot r(y, z)](z - y)}$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial r}{\partial y} = c(x) t(x, y) \cdot \tau(x, y) = c t \tau \quad (4-39)$$

De la même façon on obtient :

$$\frac{\partial t}{\partial y} = t(x, y) [c(x) \cdot \rho(x, y) + b_1] = t (c\rho + b_1) \quad (4-40)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \tau(x, y) [c(x) \cdot \rho(x, y) + b_2] = \tau (c\rho + b_2) \quad (4-41)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = a(x) + \epsilon b(x) \cdot \rho(x, y) + c(x) [\rho(x, y)]^2 = a + \epsilon b \rho + c \rho^2 \quad (4-42)$$

$$\text{Avec : } \epsilon b = (b_1 + b_2)$$

Les équations (4-39) à (4-42) sont semblables aux équations d'un diélectrique anisotrope homogène à part que,  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c$  sont ici des fonctions de  $x$ .

$$\text{Evaluons : } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{t}{\tau} \right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} (t \tau)$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{t}{\tau} \right) &= \frac{t' \tau - \tau' t}{\tau^2} = \frac{t (c\rho + b_1) \cdot \tau - \tau (c\rho + b_2) t}{\tau^2} \\ &= \frac{t \tau}{\tau^2} (c\rho + b_1 - c\rho - b_2) = \frac{t}{\tau} (b_1 - b_2) \end{aligned}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial y}(t\tau) = t'\tau + \tau't = t(c_1 + b_1)\tau + \tau(c_2 + b_2)t$$

$$= t\tau(2c_1 + b_1 + b_2) = 2t\tau(c_1 + b)$$

De cela on tire :

$$\frac{d(t/\tau)}{t/\tau} = (b_1 - b_2) dy \Rightarrow \frac{t}{\tau} = \exp\left[\int_x^y (b_1 - b_2) dy\right]$$

$$\frac{d(t\tau)}{t\tau} = 2(c_1 + b) dy \Rightarrow t\tau = \exp\left[2\int_x^y (c_1 + b) dy\right]$$

De (4-39) on obtient :

$$r = \int_x^y c t \tau dy.$$

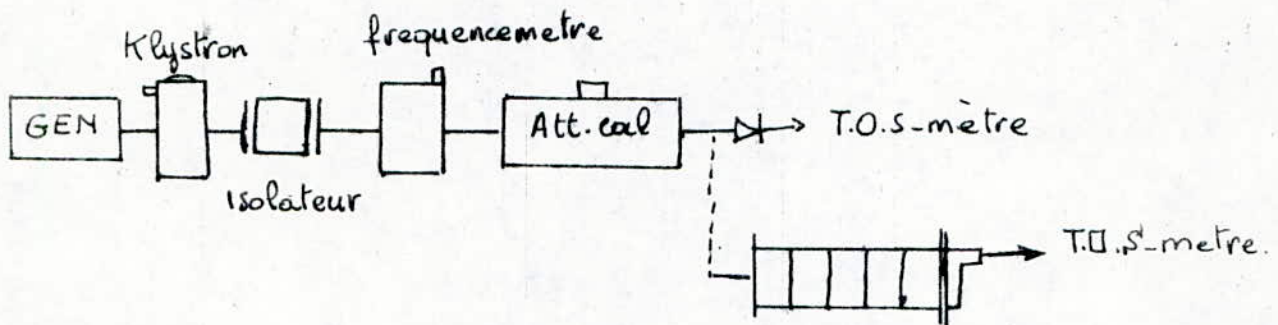
-77-  
PARTIE PRATIQUE

Cette partie aurait dû être traitée de la façon suivante :

- Faire les mesures des paramètres de dispersion d'un seul obstacle (lame diélectrique, iris, cavité résonante etc...)
- Faire les mêmes mesures pour deux, trois et quatre obstacles adjacents du même type.

Ainsi on aurait pu vérifier la théorie exposée, ou en déduire certaines comparaisons. A défaut de moyens matériels, on a dû effectuer ces mesures sur l'ensemble de cinq cellules identiques (cavités résonantes) formant un filtre passe-bande, dont la bande passante est comprise entre 8880 MHz et 9300 MHz.

A) schéma du montage pour la mesure des coefficients de transmission à droite et à gauche.

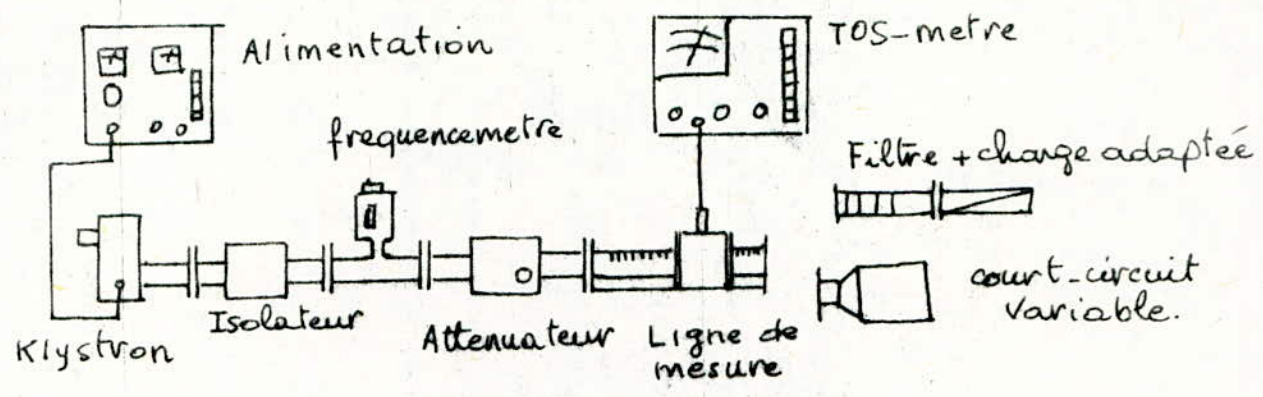


Mesures obtenues :

f (GHz)	8,85	8,9	9	9,024	9,03	9,04	9,05	9,07	9,1	9,15	9,2	9,3
T (dB)	≈ 40	30	2,2	1,4	2	2,3	2	5,17	5,45	7,7	17	30
C (dB)	≈ 40	30	2,2	1,6	1,8	2,2	1,9	3,23	4,9	6,77	13,75	18,61

Les courbes sont tracées sur feuilles millimétrées

B) schéma du montage pour la mesure des coefficients de réflexion à droite et à gauche.



Mesures obtenue

f (GHz)	8,8	8,9	8,95	9	9,025	9,075	9,1	9,2	9,25	9,05
r <sub>l</sub>	0,83	0,8	0,75	0,75	0,3	0,76	0,67	0,61	0,8	0,32
r <sub>d</sub>	0,83	0,55	0,51	0,48	0,05	0,5	0,75	0,75	0,75	0,15

La courbe est tracée sur papier millimétré

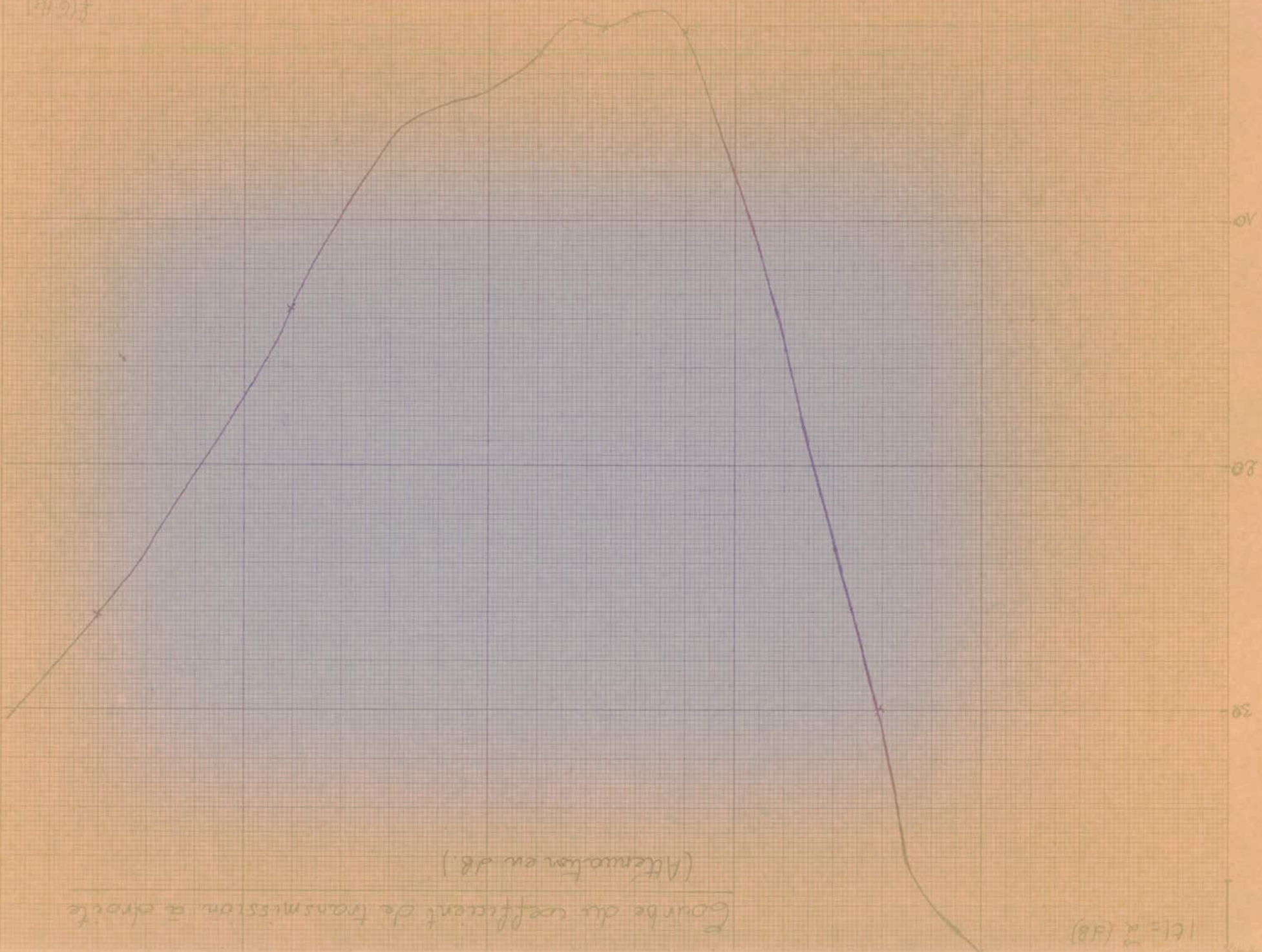
Ces mesures ne nous permettent pas de vérifier certaines propriétés comme :

- Variation de la sélectivité en fonction du nombre de cellules
- une suite d'obstacles sans perte constitue un obstacle sans perte etc ...

Mais elles nous permettent de voir que cet obstacle qui est le filtre à cinq cellules est entièrement déterminé par quatre coefficients complexes qui sont les coefficients de transmission et de réflexion à droite et à gauche.

Ainsi par exemple pour les courbes de transmission, en comparant |t<sub>l</sub>| et |t<sub>d</sub>| à fréquence fixe on peut dire que ce filtre se

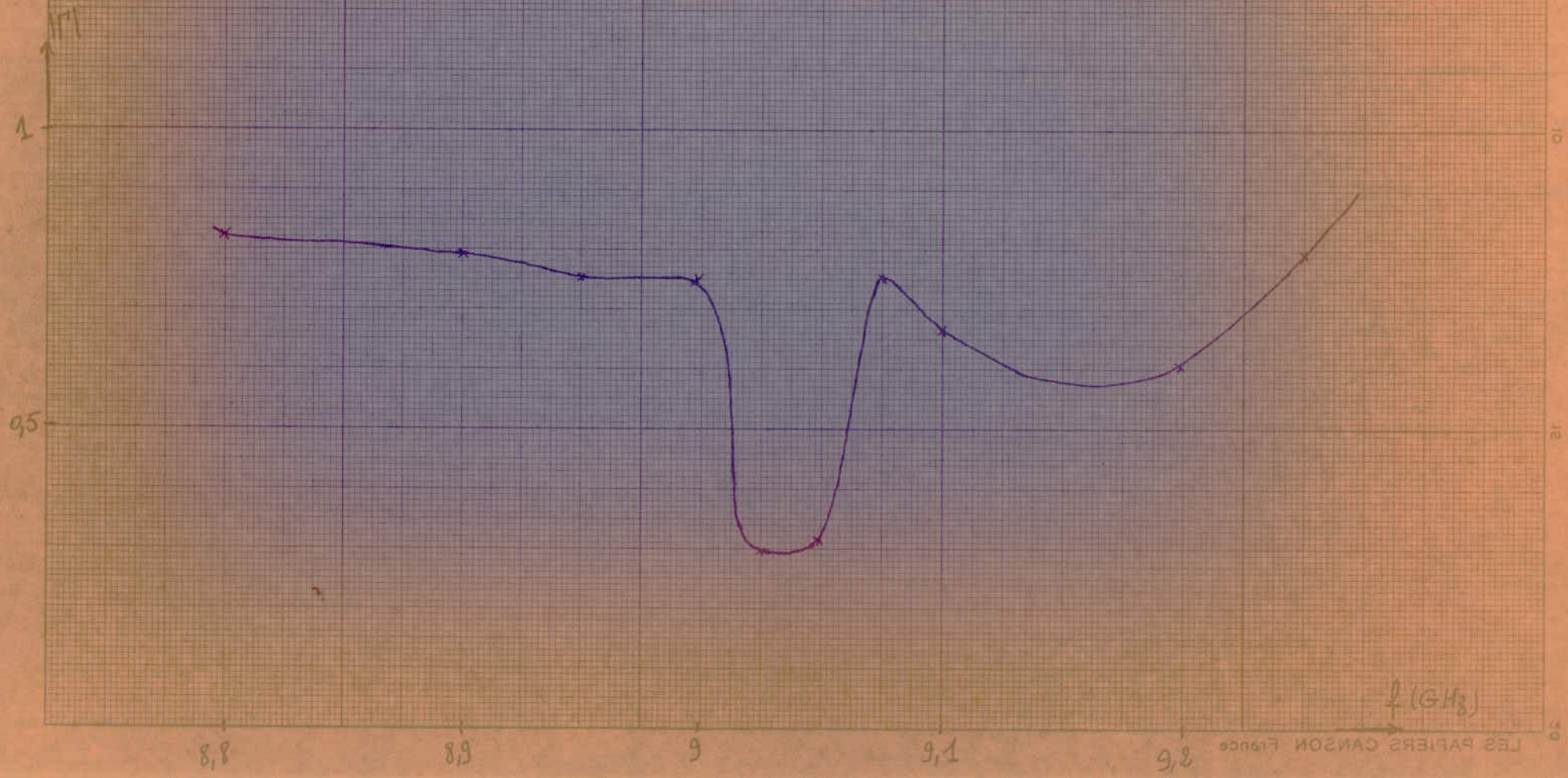
fig 131



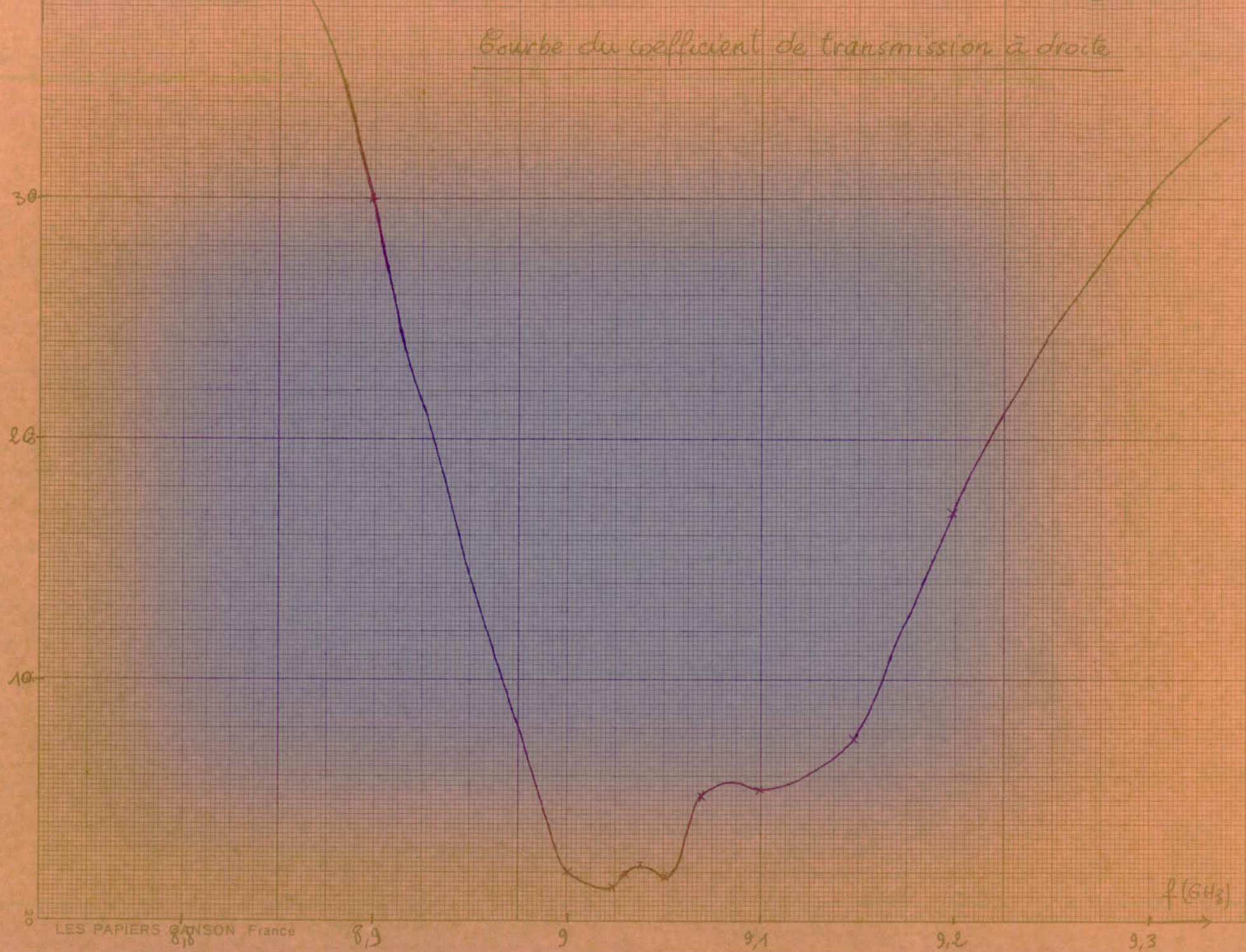
Courbe du coefficient de transmission à droite  
(Atténuation en dB.)

$|T|_r(f)$

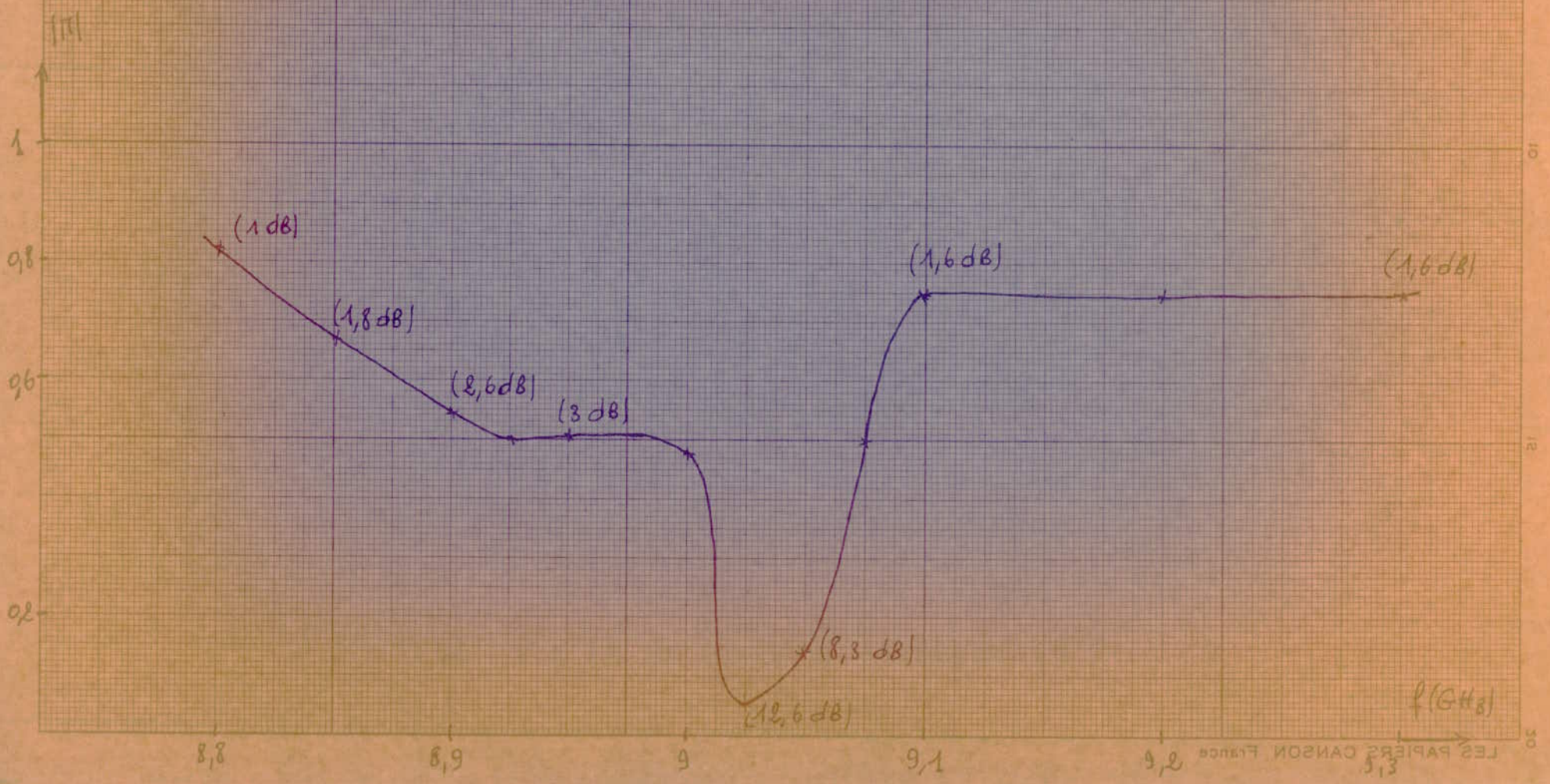
Courbe du coefficient de Reflexion à gauche



Courbe du coefficient de transmission à droite



Courbe du coefficient de reflexion à droite





- 19 -

comporte comme un obstacle ~~sym~~ reciproque a partir de la fréquence 8,8 GHz à la fréquence 9,05 GHz et de la fréquence 9,05 GHz à 9,3 GHz il n'est plus reciproque. A part certaine imprecision due aux mesures, ou aux appareils de mesure.

Par contre les courbes obtenues pour les coefficients de reflexion montrent que ce filtre est un obstacle non ~~recip~~ symetrique car  $|r| \neq |s|$  à fréquence constante.

En plus on constate d'après ces quatre courbes, qu'à une fréquence constante quelconque, dans la bande du filtre on a :

$$\begin{cases} |t|^2 + |r|^2 \leq 1 \\ |s|^2 + |s|^2 \leq 1 \end{cases}$$

qui montrent que le filtre se comporte comme un obstacle passif.

- 000-CONCLUSION-000-

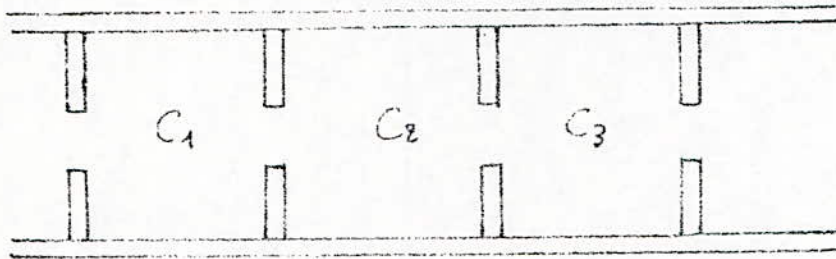
Le sujet ainsi traité, présente un aspect assez théorique, et ne pourrait être complet, s'il n'est pas illustré par des expériences pratiques. Nous espérons que ceci fera le thème d'un sujet d'étude pour la préparation d'une thèse d'ingénieur des promotions à venir, ce qui pourrait compléter cette théorie et la mettre en évidence.

## APPENDICE

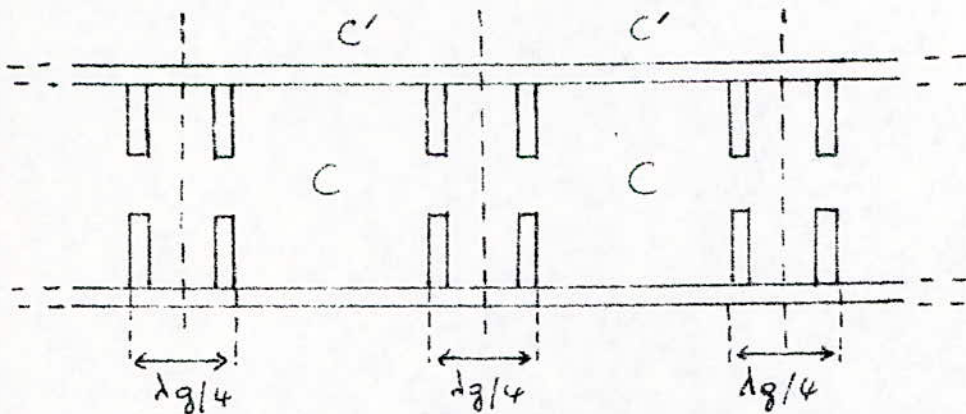
### FILTRES A CELLULES MULTIPLES

Des cellules multiples de filtrage (comme celle vue au chap III) montées en cascade, peuvent être utilisées pour constituer des filtres sélectifs à bandes raides. Ces cellules peuvent être complées, les unes aux autres de différentes façons.

On peut effectuer un « couplage direct » pour lequel deux cellules consécutives ont un diaphragme commun, comme le montre la figure ci-dessous.



Un tel dispositif étant très difficile à réaliser pratiquement, on préfère réaliser et régler séparément chaque cellule avant d'en faire l'assemblage, en associant à chaque cellule deux tronçons de ligne quart-d'onde, de phase correspondant à la fréquence centrale de la bande passante. Ce type de filtre qui est le plus répandu est dit à « couplage quart-d'onde ». Il est représenté par la figure ci-dessous.



La cellule  $C'$  est composée de la cellule élémentaire  $C$  à laquelle on associe à chaque extrémité un tronçon de ligne de longueur  $\lambda/8$

Ainsi on pourra mettre plusieurs cellule  $C'$  en cascade pour composer un filtre à cellules multiples. La cellule  $C'$  aura pour matrice d'aide  $\mathcal{B}$  après le paragraphe 6 du chap III.

$$[C'] = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} e^{j\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{7\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \left( \cos^2 \varphi e^{j(\varphi-u)} - e^{j(\varphi+u)} \right) & -2j \cos \varphi \sin u \\ 2j \cos \varphi \sin u & \left( \cos^2 \varphi e^{-j(\varphi-u)} - e^{-j(\varphi+u)} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{7\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$[C'] = \frac{-\delta}{\sin^2 \varphi} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi e^{j(\varphi-u)} - e^{j(\varphi+u)} & -2 \cos \varphi \sin u \\ 2 \cos \varphi \sin u & -\cos^2 \varphi e^{-j(\varphi-u)} + e^{-j(\varphi+u)} \end{pmatrix}$$

Le filtre ainsi constitué de  $n$  cellules  $C'$  identiques peut être calculé en utilisant les formules d'iteration établies au chapitre IV paragraphe 2 ( Suite de reseaux identiques )

000- BIBLIOGRAPHIE - 000

- P. GRIVET : Amplificateurs pour micro-ondes  
T.1 fascicule 2.
- B. FELDMAN : Circuits a constantes localisées.
- G. Montgomery : Mesures en micro-ondes.  
T2
- BECKENBACH : Mathématiques modernes  
pour l'ingénieur T2.
- Goudet et Chavance :  
Ondes centimétrique.
- Cours d'hyperfréquence de M<sup>rs</sup> A. ZARGUERRAS  
polycopie de l'école nationale polytechnique  
d'Alger.
- thèse de Fin d'étude : Étude des filtre micro-ondes.  
Année : 1979.  
Proposé par : A. ZARGUERRAS.