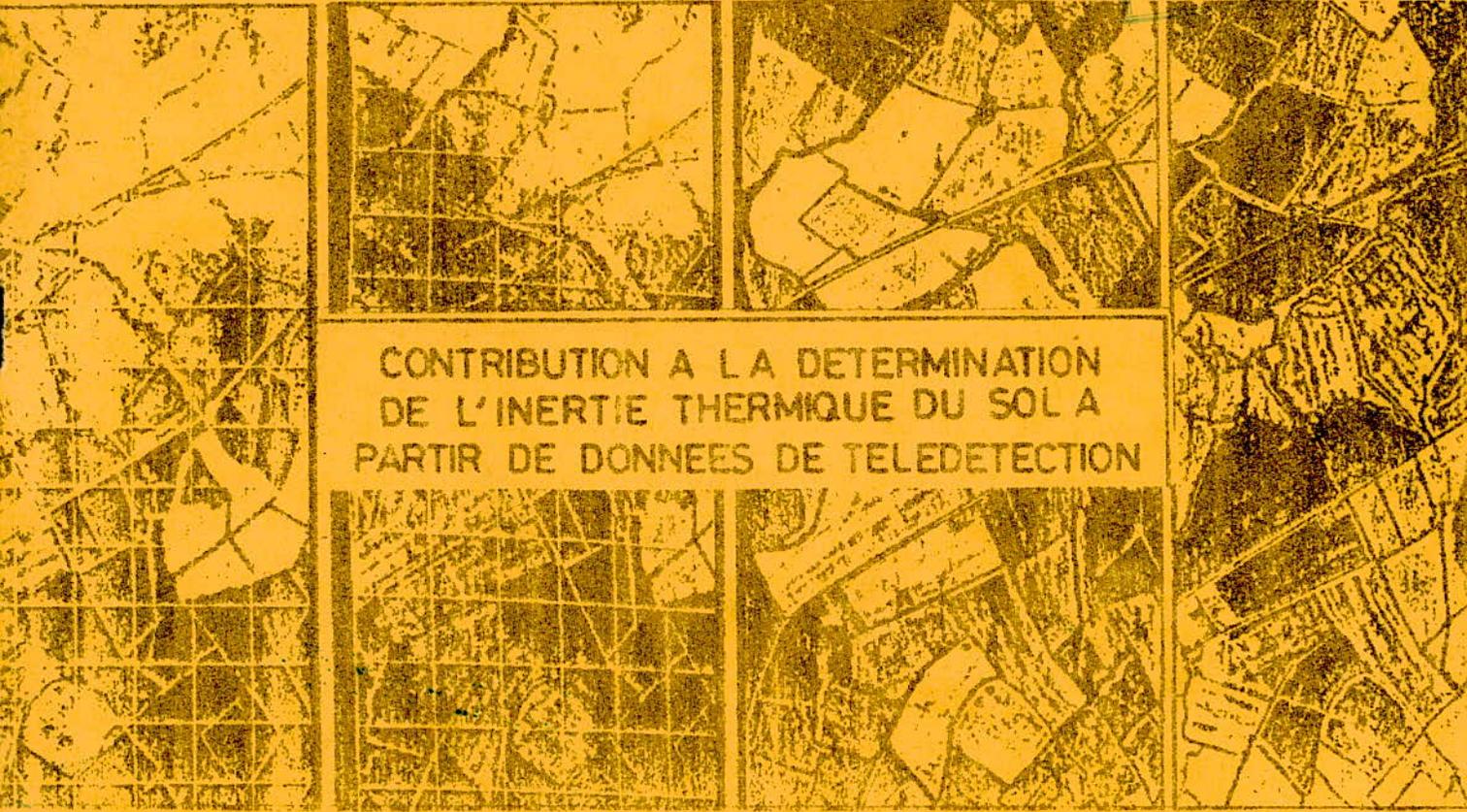


\*\*\*\*\*

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية  
 ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
 المكننة  
 DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE  
 ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
 BIBLIOTHEQUE

2ed  
 BIBLIOTHEQUE DE L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE  
 Thèse d'ingénieur en électronique



CONTRIBUTION A LA DETERMINATION  
 DE L'INERTIE THERMIQUE DU SOL A  
 PARTIR DE DONNEES DE TELEDETECTION

C S T N-LABORATOIRE DE TELEDETECTION

Proposé par:

M<sup>r</sup>A. ABDELLAOUI  
 Docteur de spécialité

Etudié par:

KANDI Nouredine  
 BOUDERROUMI Saad



## المقدمة

مساهمة في تحديد ودراسة المعطالة الحرارية  
للاضراس اعتمادا على معطيات القياس البعدي

تتلخص هذه الأطروحة في اعطاء بعد جديد أكثر شمولية  
وأكثر تحديد لمنهوم المعطالة الحرارية التي بقيت لحد  
الآن غامضة.

فهذه الدراسة تبرز خصائص هذا المنهوم وتحديد خصائصه  
ومميزات العلمية ، وهذا بطرق رياضية جديدة ملائمة  
وحديثة ، سهلة البرمجة ، للحصول على نتائج سريعة  
وجيدة هامة بواسطة المعقل الإلكتروني .  
بالإضافة إلى هذا تتميز هذه الأطروحة باقتراح عدد هام  
من الطرق العلمية المناسبة تتجلى في المحلات الطيفية  
التي يمكن بواسطتها الحصول على المعطالة الحرارية الكامنة  
في خطوط الطيف .

فالأجهزة المقترحة تناسب الطرق الرياضية التي تمت  
في هذه الدراسة ، بحيث يمكن الحصول على المعطالة الحرارية  
بكل بساطة .

لأنه يمكن تخفيفها على الشاكلة من جهة ، وحساب  
كثافتها من جهة ثانية .

سواء بالاعتماد على المطولية فقط والتي تظهر على  
الشاكلة أو حسابها مقدار فقط ،  
طبعاً ، وهذا حسب الحاجة الطلحة والمفروضة .

DEDICACES

=====

A mon père et à ma mère à qui je doit tout

A mes oncles Hadj Ahmed et Hadj Rabah

A mes frères et soeurs

A Lilia

A mes cousins et cousines

A tous mes parents

A tous mes amis

NOUREDDINE KANDI



DEDICACES

=====

A mon père et ses frères Ramdane et Sahraoui tombés au champ d'honneur

A ma mère

A mes frères Mohamed , Rabah , Fatima ,

A mon grand père

A mes parents

A Gherdaoui Fatima Zohra .

A mes amis et camarades

Saad Bouderroumi

REMERCIEMENT

=====  
Nous tenons à remercier notre promoteur M<sup>r</sup> A.ABDELLAOUI directeur du groupe de recherche en télédétection au CSTN d'Alger , de nous avoir si aimablement accueilli dans son laboratoire et de nous avoir guidé pendant toute la durée de notre travail . Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre sincère gratitude

Nos vifs remerciements vont à S.Fatiha , G.Bahia et M.Kamel pour leur aide pratique et morale .

Nos remerciements vont aussi à A.Labгаа et O.Azzedine pour assistance morale , sans oublier A.Bouhlal dont l'aide a été pour nous d'une grande utilité .

Que tous ~~ceux~~ ceux qui , de près ou de loin ont contribué à notre formation trouvent ici l'expression de notre profonde reconnaissance .

N.KANDI ET S.BOUDERROUMI

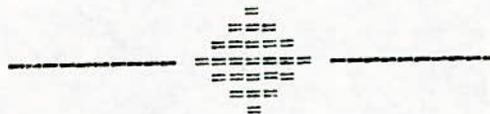


TABLE DE MATIERE

=====

INTRODUCTION ..... I

CHAPITRE I : Rappels théoriques et étude préliminaire .

I- PROPAGATION DE LA CHALEUR ..... 4

I-1/- Les différents modes de la propagation de la chaleur .... 4

I-2/- Propagation de la chaleur par conduction ..... 5

    I-2-1/- Loi fondamentale de la conduction ..... 5

    I-2-2/- Equation générale de la conduction ..... 5

    I-2-3/- Conduction en régime permanent ..... 7

    I-2-4/- Conduction en régime variable ..... 9

I-3/- ~~Conduction~~ Propagation de la chaleur par convection ..... 9

II- LES DIVERS FLUX AUXQUELS EST SOUMIS UN ELEMENT DE SOL

    ( LE FLUX TOTAL VERS LE SOL ) .....13

II-1/- LES flux radiatifs ..... 14

II-II-1-1/- Le rayonnement solaire ..... 15

    II-1-2/- Le flux atmosphérique ..... 18

    II-1-3/- Le flux terrestre ..... 19

    II-1-4/- Le rayonnement net ..... 20

II-2/- Les flux de chaleur ..... 22

    II-2-1/- Le flux de chaleur sensible ..... 22

    II-2-2/- Le flux de chaleur latente .....24

II-3/- Le flux total vers le sol  $\phi(t)$  .....26

III- LA TEMPERATURE DE SURFACE  $T_s$  ..... 29

III-1/- Variation diurne de la température de surface ..... 29

III-2/- Mesure de la température de surface ..... 31

    III-2-1/- Les différentes méthodes de mesure de  $T_s$  au laboratoire..31

    III-2-3/- Mesure de  $T_s$  en télédétection .....32

IV- L'INERTIE THERMIQUE .....36

IV-1/- Introduction ..... 36

IV-2/- Définition de l'inertie thermique ..... 36

IV-3/- Domaine de variation de l'inertie thermique ..... 37

IV-4/- Influence de l'inertie thermique sur les variations de  $T_s$  ; 37

I- PRESENTATION DES MODELES .....	39
II- ETUDE D'UN MODELE SIMPLE .....	42
II-1/- Enoncé du problème .....	42
II-2/- Résolution de l'équation de la chaleur .....	42
II-3/- Calcul de $\phi(t)$ théorique .....	45
II-4/- Calcul de l'inertie thermique connaissant $\phi(t)$ et $T_s(t)$ .....	46
III- ETUDE D'UN MODELE BASE SUR LA DECOMPOSITION EN SERIES DE FOURIER DE $\phi(t)$ ET $T_s(t)$ .....	48
III-1/- ENONCE du problème .....	48
III-1/- Decomposition en série de Fourier de $T_s(t)$ et $\phi(t)$ ....	48
III-2/- Résolution de l'équation de la chaleur .....	49
III-3/- Calcul de $\phi(t)$ théorique .....	54
III-4/- Calcul de l'inertie thermique connaissant $T_s(t)$ et $T_s(t)$ .....	55
IV- ETUDE D'UN MODELE BASE SUR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES .....	59
IV-1/- Enoncé du problème .....	59
IV-2/- Résolution de l'équation de la chaleur et détermination de l'inertie thermique .....	59
a)- Par un schema explicite .....	60
b)- Par un Schema implicite .....	61

CHAPITRE III // : Analyseurs de Fourier

I- INTRODUCTION .....	62
II- ANALYSEUR ANALOGIQUE DE SPECTRE .....	63
II-1/- Analyseurs à filtres multiples en parallèles .....	63
II-2/- Analyseurs à balayage de fréquence .....	64
III- ANALYSEURS NUMERIQUES DE SPECTRE .....	66
III-1/- Analyse de Fourier numérique .....	66
III-1/- Analyseurs de spectre numériques .....	68
CONCLUSION .....	70
ANNEXE : La transformée de FOURIER .....	72

## INTRODUCTION :

Avec le lancement des derniers satellites , la télédétection a enregistré ces dernières années des progrès considérables . Cette nouvelle technique est devenu en très peu de temps un instrument puissant pour l'étude de la surface terrestre .

La télédétection est un ensemble de techniques permettant d'acquérir des informations à distance . Elle utilise comme véhicule de l'information le rayonnement électromagnétique ( REM ) dans trois bandes spectrales principales : le visible ; l'infrarouge et le domaine des hyperfréquences . Elle est basée sur le principe que chaque objet absorbe, réfléchit et émet des rayonnements propre à sa nature .

Une opération de télédétection s'effectue en quatre phases :

- 1- Acquisition des données sous forme de REM .
- 2- Prétraitement .
- 3- Traitement .
- 4- Interprétation et exploitation .

La télédétection est un outil précieux pour toutes les applications concernées par les phénomènes de surface . En effet , toutes les processus physiques intervenant au niveau des sols ou des sous-sols s'accompagnent d'échanges d'énergie apparaissant en surface . L'étude de ces échanges d'énergie à la surface permet d'en tirer de nombreux renseignements concernant les sols et les sous-sols .

Les principales applications concernées sont .

- La géologie et la prospection des ressources minérales et géothermiques .
- l'étude de la végétation et des ressources agricoles , pastorales et forestières .
- l'hydrologie et l'étude des ressources en eau .
- L'océanographie .
- La cartographie et l'aménagement du territoire .

Les données recueillies sous forme de REM par des capteurs sur des satellites, des avions ou des ballons contiennent des informations

très riches concernant la nature et l'état des objets à la surface terrestre . La télédétection permet en effet de faire des mesures dans des régions spectrales non accessible à l'oeil et aux caméras photographiques ( ces derniers ne sont sensibles que dans le visible ) . Il est donc possible d'accéder à des informations sur la température , les caractéristiques électriques et thermiques , la rugosité des objets . . . etc .

Mais pour accéder à ces informations une interprétation et une exploitation qualitative et quantitative sont nécessaires . Dans certains cas cette exploitation pose des problèmes très complexes dont beaucoup d'entre eux sont encore au stade des recherches .

L'une des opérations très importantes en télédétection est la modélisation . La modélisation est l'opération qui consiste à établir des modèles physiques-mathématiques des phénomènes dont l'interface sol -atmosphère est le siège . Dans cette approche , on cherche à relier le signal enregistré , éventuellement corrigé , aux propriétés physiques caractéristiques des objets imagés .

La modélisation se divise en deux parties distinctes mais complémentaires :

- 1- Une étude théorique , qui consiste en la mise au point des modèles et l'élaboration d'algorithmes pour le traitement numérique de ces modèles
- 2- Une étude expérimentale , qui consiste à mettre au point une chaîne de mesure et exploitation

Le but de ce travail et de contribuer à l'établissement d'un modèle pour la détermination d'un paramètre très caractéristique à la nature des sols : l'INERTIE THERMIQUE ( notée P ) .

Ce modèle doit servir à calculer l'inertie thermique de chaque pixel d'une zone donnée , permettre ainsi l'élaboration d'une cartographie de l'inertie thermique de cette dernière .

Une cartographie de l'inertie thermique est une image dont le contraste est fonction de  $P$  ( par exemple , le niveau du blanc correspondra à une valeur de  $P$  élevée, le niveau du noir à valeur de  $P$  faible ) ;

Ce genre de document présente un grand intérêt dans plusieurs domaines d'application du fait que l' inertie thermique  $P$  présente une caractéristique propre à la nature des objets . Elle caractérise l'aptitude d'un matériau à accumuler une quantité *chaleur* plus ou moins grande pour une variation donnée d'énergie reçue .

Les paramètres d'entrée de ce modèle sont :

a/- La variation diurne de la température de surface :  $T_s(t)$

b/- La variation diurne du flux total d'énergie vers le sol :  $\phi(t)$

Dans ce travail nous serons amenés à résoudre l'équation de la propagation de la chaleur dans le sol , puis à en extraire l'inertie thermique  $P$  en supposant connues  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$  . Ces trois paramètres sont en effet reliés par l'équation du bilan énergétique à l'interface sol-atmosphère . Pour cela on proposera trois méthodes :

1/- Dans un premier temps , on approchera les <sup>Variations</sup> de  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$  à des sinusoides . La résolution sera relativement simple, mais donnera une valeur de  $P$  approchée . Cette méthode présente néanmoins un très grand intérêt ; Car en plus de sa simplicité , elle permet la surveillance d'anomalies pouvant survenir sur des terrains connus ( tel que : le déplacement des dunes , la maladie des forêts , la pollution des eaux ...).

2/- La deuxième méthode sera basée sur la décomposition en séries de Fourier de  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$  , du fait qu'en réalité leurs variations diurne ne sont pas sinusoidales et qu'elles n'ont pas de forme mathématique précise

3/- La troisième méthode sera basée sur la méthode des différences finies .

A la fin de ce travail , on proposera quelques schémas électroniques pour déterminer les coefficients de la série de Fourier d'un signal périodique . Ceci aura pour but d'être incorporé dans une carte pour calculer l'inertie thermique .

CHAPITRE I

---

RAPPELS THEORIQUE  
ETUDE PRELIMINAIRE

## CH I/ : I- PROPAGATION DE LA CHALEUR .

### I-I/- LES DIFFERENTS MODES DE PROPAGATIONS DE LA CHALEUR .

Dès qu'il existe entre deux corps ou deux parties d'un même, une différence de température , on assiste à un flux de chaleur ( ou flux d'énergie calorifique ) qui se déplace de la partie chaude vers la partie froide , tendant ainsi à réaliser l'équilibre des températures . Ce phénomène constitue de manière générale le transfert de chaleur ( ou propagation de la chaleur ) qui peut s'effectuer suivant trois modes différents : par conduction , par convection ou par rayonnement . Généralement , ces trois modes de propagation de la chaleur agissent simultanément . Mais selon les cas , ces phénomènes sont d'importance<sup>s</sup> relatives ~~différentes~~ différentes.

#### I-I-I/- Conduction .

Si on plonge une extrémité d'une barre métallique, par exemple , dans une flamme, on sent suffisamment la chaleur gagner vers l'autre extrémité . La chaleur s'est propagé de proche en proche à travers le métal sans transfert de matière : on dit qu'il y a eu propagation par conduction .

Dans le sol ou dans un solide , ce mode de propagation est prédominant .

#### I-I-2/- Convection .

Dans un liquide ou dans un gaz , les différences de température produisent de ~~différences~~ différences de densités pouvant amener des mouvements de fluides ( dits mouvements de convection ) , qui ont pour effet d'égaliser les températures par substitution réciproque des molécules froides et des molécules chaudes : on dit qu'il y a propagation par convection .

#### I-I-3/- Rayonnement .

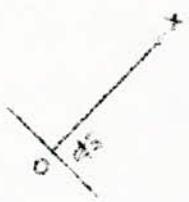
Les corps émettent de l'énergie par leur surface , sous de radiations visibles ou non . Inversement, quand un corps reçoit un rayonnement , il en absorbe une partie qui se transforme en chaleur .

L'énergie rayonnée par un corps dépend de sa température, de sa nature , de l'état de sa surface extérieure et de sa direction . Le rayonnement se transmet dans le vide mieux que dans tout autre milieu.

I-2/- PROPAGATION DE LA CHALEUR PAR CONDUCTION :

I-2-I/- Loi fondamentale de la conduction .

Considérons un matériau homogène . dS étant une section de ce matériau à travers laquelle s'écoule de la chaleur par conduction . Cette section étant mesurée perpendiculairement à la direction Ox du flux de chaleur ( ou flux thermique ) .



A l'instant t , le flux qui traverse la section dS a pour expression :

$$\phi = - k \, dS \, \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1) \quad (\text{Fourier 1922})$$

- $\phi$  : flux thermique traversant l'élément de surface dS .
- k : conductivité thermique du matériau, dépendant de sa nature et de sa température .

Cette loi , proposé par Fourier en 1922, est valable aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire .

I-2-2/- Equation générale de la conduction .

a)- Equation de la conduction dans un milieu isotrope .

Dans un milieu isotrope , la conductivité thermique "k" a la même valeur dans toutes les directions .

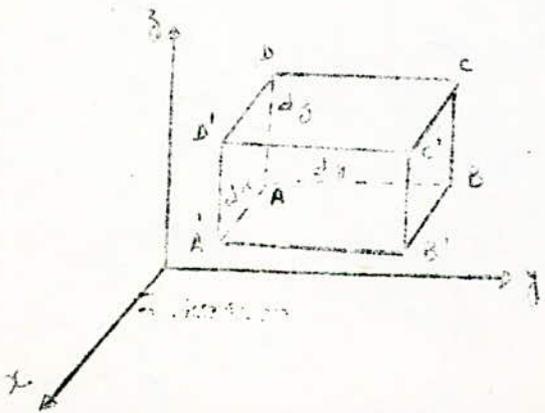
Considérons dans un milieu isotrope , un parallélépipède élémentaire défini par un sommet A(x,y,z) et les arêtes dx , dy , dz :

- Supposons qu'a l'instant un temps dt cet élément subit une variation de température  $\Delta T$ , cette variation aura pour valeur :

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \, dt$$

La quantité de chaleur emmagasinée par ce parallélépipède vaut donc :

$$dQ = C_v \, \Delta T \, dx \, dy \, dz = C_v \, \frac{\partial T}{\partial t} \, dt \, dx \, dy \, dz$$



- Ecrivons le bilan thermique relatif au parallélépipède pendant un temps  $dt$  :

Quantité de chaleur qui entre = Quantité de chaleur qui sort  
+ Quantité de chaleur emmagasinée

Par la face  $dy dz$  à l'abscisse  $x$ , la quantité de chaleur qui sort vaut

$$- k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x dy dz dt$$

Par la face parallèle opposée, d'abscisse  $x + dx$ , la quantité de chaleur rentre vaut :

$$+ k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} dy dz dt$$

Soit la quantité de chaleur rentrée au total par ces deux faces :

$$\left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x \right] dy dz dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz dt \quad (3)$$

Les autres faces  $dx dy$  et  $dx dz$  donnent des contributions analogues :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ k \frac{\partial T}{\partial y} \right] dx dy dz dt \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} \right] dx dy dz dt \quad (5)$$

En égalisant la somme des trois contributions (3), (4), (5) à la variation d'ensemble (2) et en divisant les deux membres par  $dx dy dz dt$ , on obtient l'équation de la propagation de la chaleur dans un milieu isotrope :

$$\boxed{Cv \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} \right]} \quad (6)$$

Si l'en prend en considération les variations de la conductivité thermique "k" par rapport au temps l'équation (6) s'écrit :

$$Cv \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial k}{\partial T} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (7)$$

Mais généralement dans la plupart des cas, la variation  $\frac{\partial k}{\partial T}$  est très faible et donc, peut être négligée.

L'équation de la propagation de la chaleur dans un milieu isotrope, où  $k$  est considéré constant par rapport au temps s'écrit :

$$Cv \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (8)$$

avec :  $k$  : conductivité thermique du milieu .

$Cv = c$  = Capacité calorifique volumique

$T$  = répartition en température dans l'espace et dans le temps .

Remarque : Dans le cas de la propagation de la chaleur dans le sol , l'expérience a montré que les flux de chaleur qui se déplacent latéralement sont négligeables devant le flux vertical . L'équation de la chaleur se ramène à une seule dimension :

$$Cv \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9)$$

où  $x$  représente la profondeur dans le sol ;

b)- Cas d'un milieu anisotrope .

Dans un milieu anisotrope , la conductivité thermique  $k$  dépend de la direction considérée . Si les valeurs sont  $k_x$  ,  $k_y$  ,  $k_z$  dans les trois directions rectangulaires  $x$  , l'expression (8) s'écrit :

$$Cv \frac{\partial T}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (10)$$

I-2-3/- Conduction en régime permanent ;

Ce problème consiste essentiellement à calculer le flux thermique transmis par un conducteur en fonction des données géométriques et ~~aux~~ propriétés thermiques et à étudier la répartition de la température à l'intérieur du milieu .

La température étant indépendante du temps :  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

La répartition en température pour un milieu isotrope en régime permanent sera donc :

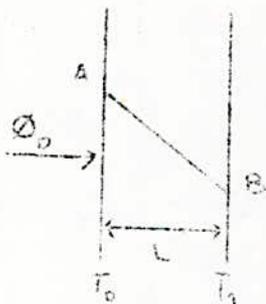
$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0} \quad (\text{II})$$

Si l'on considère l'espace à une dimension, on aura :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (\text{I2})$$

Etude d'un cas particulier : Problème du mur .

Considerons un milieu conducteur de chaleur homogène ( mur par exemple ) limité par deux surfaces parallèles indéfinies, maintenues chacune à une température uniforme :  $T_0$  et  $T_I$  .



L : représente l'épaisseur du milieu .

En régime permanent le flux thermique reste constant :  $\phi_0$  .

D'après la loi élémentaire de la propagation (I)

$\frac{dT}{dx}$  est constant et égal à :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_I - T_0}{L} \longrightarrow \phi_0 = k \cdot S \frac{T_I - T_0}{L} \quad (\text{I3})$$

La résolution de l'équation (I2) donne :  $T(x) = Ax + B$  .

La répartition des températures  $T(x)$  est donc une fonction linéaire de x :

On peut facilement établir :

$$\boxed{T(x) = \frac{T_I - T_0}{L} x + T_0} \quad (\text{I4})$$

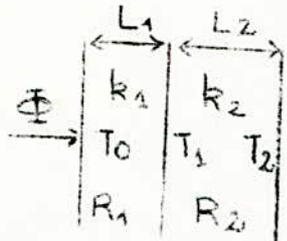
A partir des équations (I2) et (I3) on peut établir :

$$\boxed{\frac{L}{kS} \phi_0 = T_0 - T_I} \quad (\text{I5})$$

avec :  $R = \frac{L}{kS}$  est la résistance thermique ( joue le même rôle que la résistance électrique ) .

Remarques :

I)- Cas d'un milieu composé de deux couches superposées ayant des conductivités thermiques différentes  $k_1$  et  $k_2$  .



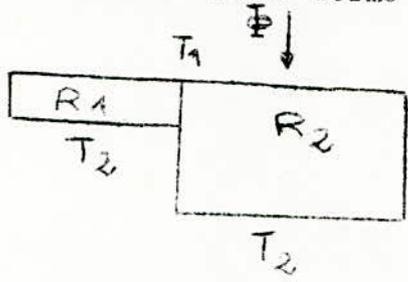
$$\phi_0 = \frac{T_0 - T_1}{L_1/k_1 S} = \frac{T_1 - T_2}{L_2/k_2 S}$$

$$\phi_0 = \frac{T_0 - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_0 - T_2}{R_1 + R_2}$$

→  $R = R_1 + R_2$

Le milieu se comporte comme un corps homogène dont la résistance thermique est la somme des résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

2)- Cas d'un milieu formé par deux parties accolées côte à côte :



De la même manière on peut montrer que :

$$\frac{I}{R} = \frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2}$$

I-2-4/- Conduction en régime variable .

En régime variable où la température varie dans l'espace et dans le temps , la résolution de l'équation de la chaleur dépend des conditions aux limites . Chaque cas présente une méthode de résolution propre au milieu considéré et aux conditions aux limites présentes ( souvent très compliquée ) .

I-3/- PROPAGATION DE LA CHALEUR PAR CONVECTION .

Les phénomènes de convection interviennent dans la transmission de la chaleur , chaque fois qu'un fluide se déplace par rapport à un élément fixe : murs , parois de tubes , sol ....

On distingue deux types de propagation par convection :

a)- Convection naturelle : Les mouvements du fluide sont dus aux variations du poids volumique de ce dernier , résultant des échanges de chaleur :  
 fluide ←————→ paroi

b)- Convection forcée : Ici les mouvements des fluides sont provoqués par une action mécanique extérieure .

Dans les deux cas le flux de chaleur échangé s'écrit :

$$\phi = \alpha \cdot S \cdot \Delta T \quad (I6)$$

avec : S : Aire soumise à la convection .

$\Delta T$  : Différence de température entre le corps et le fluide

$\alpha$  : Coefficient de convection thermique en  $W/m^2$  .

Remarque : Les lois de convection relatives au coefficient de convection sont complexes . Elles font intervenir :

- Les propriétés physiques du fluide ( masse volumique  $\rho$ , chaleur massique à pression constante  $C_p$ , conductivité thermique  $k$ , dilatabilité  $\beta$ , viscosité dynamique  $\eta$  ) .

- La longueur  $D$  de l'élément suivant lequel s'écoule les courants de convection .

- La différence des températures  $\Delta T$  .

Détermination du coefficient de convection  $\alpha$  .

### 1)- Convection naturelle .

Le coefficient de convection se déduit à partir des nombres suivants :

- Nombre de Nusselt :  $Nu = \frac{\alpha \cdot D}{k}$  (I7)

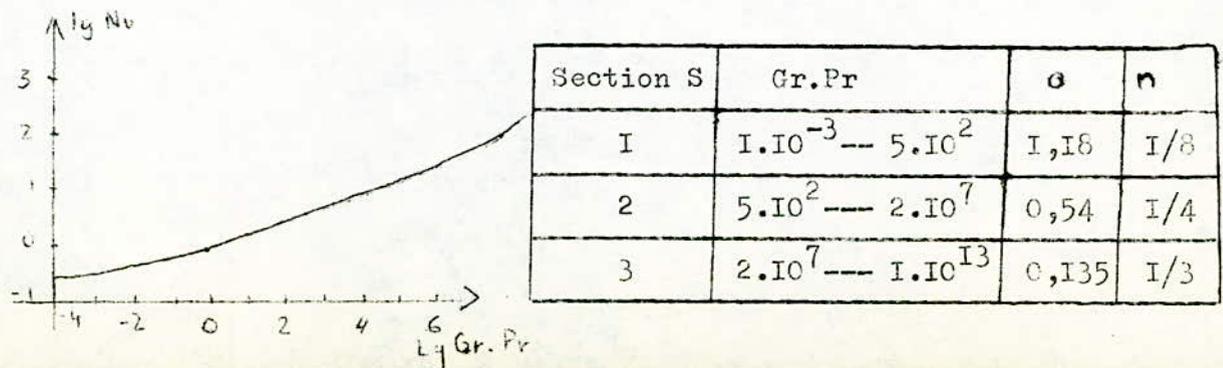
- Nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{\eta \cdot C_p}{k}$  (I8)

- Nombre de Grashof :  $Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot \Delta T \cdot \rho^2 \cdot D^3}{\eta^2}$  (I9)

Les résultats expérimentaux peuvent être représentés approximativement par une loi de la forme :

$$\lg Nu = \lg a + n \lg(Gr.Pr) \quad (20)$$

$a$  et  $n$  dépendent du produit  $Gr.Pr$ , comme l'indique le tableau suivant :



L'expérience est réalisée à l'intérieur d'un cylindre vertical de hauteur D .

Cas d'un gaz :

La formule (17) s'applique pour un gaz dans le cas usuel avec  $n = 0,25$  . D'où :

$$\alpha = \frac{-k}{D} Nu = \frac{k}{D} a \cdot (Gr.Pr)^{0,25} = a \cdot \left( \frac{k^3 \cdot \beta \cdot g \cdot \rho^2 \cdot Cp}{\rho} \right)^{0,25} \left( \frac{T}{D} \right)^{0,25}$$

d'où

$$\alpha = a \cdot \frac{k^3 \cdot \beta \cdot g \cdot \rho^2 \cdot Cp}{\rho}^{0,25} \cdot \left( \frac{\Delta T}{D} \right)^{0,25} \quad (20)$$

Cas particulier : Pour l'air nous avons :

$$\alpha = 1,4 \left( \frac{T}{D} \right)^{0,25} \quad (21)$$

2)- Convection forcée / :

On distingue deux types de convection forcée :

a)- régime laminaire : Les filets du fluide se déplacent parallèlement entre eux et parallèlement à la paroi : c'est par conduction de chaleur que la chaleur passe de la paroi au fluide en contact immédiat avec elle .  
Le régime laminaire s'établit si la condition suivante est réalisée :

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} < 2100 \quad (\text{cas d'un cylindre de diamètre } D) \quad (22)$$

avec : Re : Le nombre de Reynolds

v : Vitesse moyenne du fluide .

D : Diamètre du tube .

Dans ce cas le nombre Nusselt est donné par

$$Nu = \frac{\alpha \cdot D}{k} = a \cdot \left( Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L} \right)^{1/3} \quad (23)$$

où : L est la longueur du tube .

- Pour un tube vertical :  $a = 1,75$

- Pour un tube <sup>horizontal</sup> on prend généralement :  $a = 1,5$  pour les liquides .

$a = 1,35$  pour les gaz .

b)- Régime turbulent : Si la condition (22) n'est pas remplie , il se forment des tourbillons : d'où le nom de régime turbulent .

Dans ce cas pour extraire on utilise la formule de Colburn

$$Nu = 0,623 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \quad (24)$$

Avec cette formule les résultats ne sont valables qu'à 20% près .

Remarque : Le rayonnement électromagnétique qui constitue le troisième mode de propagation de la chaleur ne sera pas traité dans ce paragraphe , bien qu'il joue un très grand rôle en télédétection. Car la théorie du REM a été détaillée à plusieurs reprises dans les projets de fin d'étude soutenus en Juin 81 .

- LE FLUX TOTAL VERS LE SOL -

La surface terrestre est le siège d'échanges de flux d'énergie radiatifs et de chaleur . Ce sont ces divers flux , qui gouvernent à chaque instant les variations de la température de surface .

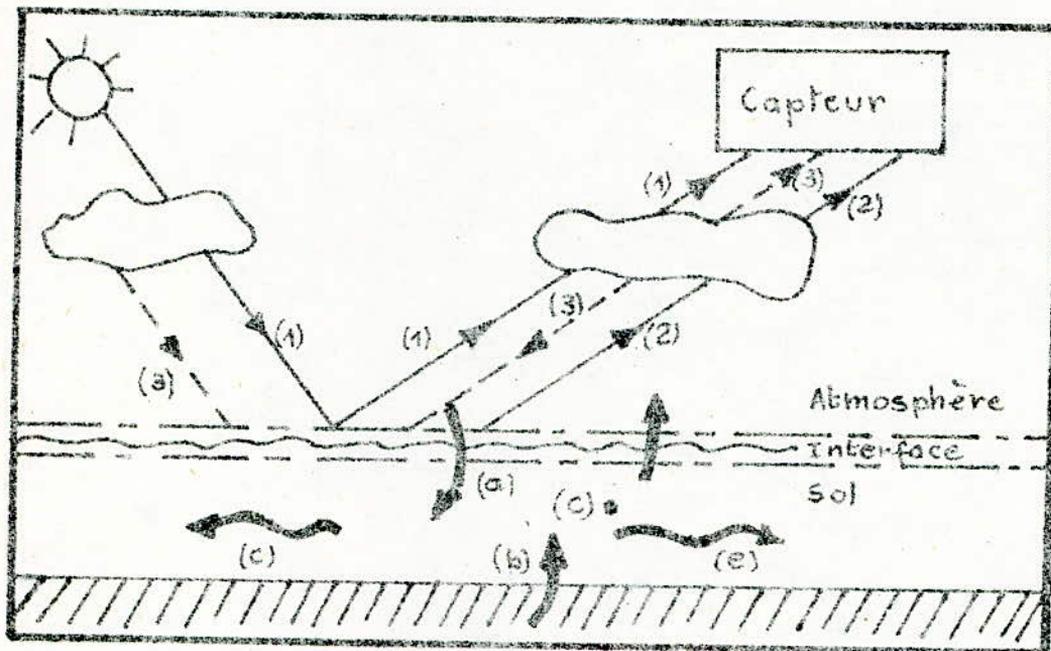


Fig (II-I)

La figure (II-I) schématise les divers flux auxquels est soumis un élément de sol. Les lettres représentent les flux radiatifs . Les chiffres représentent les flux de chaleur .

- (1) : REM issu du soleil, réfléchi par la surface, absorbé et diffusé en partie dans l'atmosphère et capté par le détecteur .
- (2) : REM directement émis par la surface , absorbé en partie par l'atmosphère et capté par le détecteur .
- (3) : REM émis par l'atmosphère par diffusion du REM (1) ou par émission propre et renvoyés sur le sol et dans le détecteur .
- (4) : Flux radiatif entrant dans le sol ( flux incident moins flux réémis par diffusion propre et émis par émission propre ) .
- (5) : Flux net géométrique .
- (a) : Flux de chaleur latente dans le sol .
- (b) : Flux sortant sous forme de chaleur latente ( évaporation évapotranspiration)et sous forme de chaleur sensible(convection) .
- (c) : Dissipation par conduction .

On distingue donc deux types de flux :

- Les flux radiatifs .
- Les Flux de chaleur .

## II-1/- LES FLUX RADIATIFS.

Ces divers flux radiatifs qui prennent place dans l'atmosphère et l'interface sol-atmosphère sont schématisés dans la figure (II-1) :

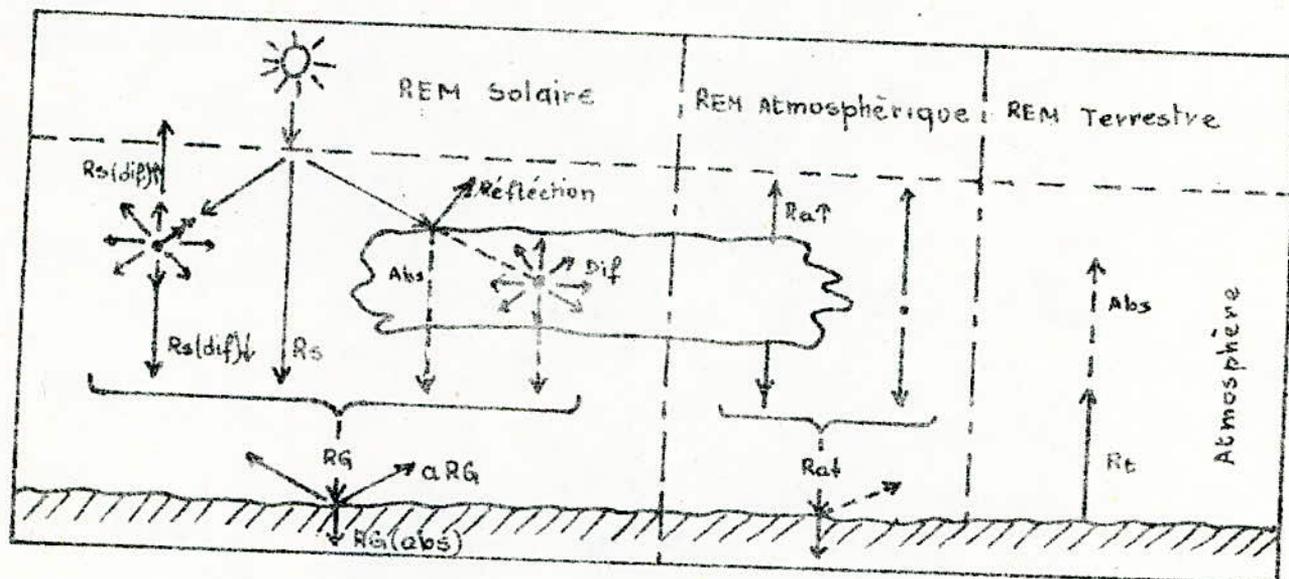


Fig (II-2) : D'après Triplet et Roche (1971)

### a/ : Rayonnement solaire :

$R_s$  : REM solaire direct reçu au sol .

$R_s \uparrow$  : Partie du REM solaire diffusé par l'atmosphère vers l'espace par diffusion Rayleigh et de Mie .

$R_s \downarrow$  : Partie du rayonnement solaire diffusée par l'atmosphère vers la surface terrestre par diffusion Rayleigh et de Mie .

$R_s(a)$  : Partie du rayonnement solaire absorbé par l'atmosphère , par suite de la présence dans l'air de certains constituants .

$R_G$  : Rayonnement solaire global reçu au sol, qui est la somme de  $R_s$  et  $R_s \downarrow$ .

$R_G(abs)$  : Partie du rayonnement solaire global absorbé par la surface terrestre .

$a.R_G$  : Fraction du rayonnement solaire global réfléchi par la surface terrestre .

### b/ : Rayonnement atmosphérique :

$R_a \uparrow$  : Rayonnement atmosphérique ascendant .

$R_a \downarrow$  : Rayonnement atmosphérique descendant .

$\epsilon R_a$  : Partie du rayonnement atmosphérique absorbée par le sol .

### c/ : Rayonnement terrestre :

$R_T$  : Rayonnement propre émis par la terre .

## II-I-I/- Le rayonnement solaire .

### a/- Répartition spectrale .

Le soleil rayonne comme un corps noir à la température de  $6000^{\circ}\text{K}$ . L'énergie du soleil se situe dans la bande spectrale allant de  $0,25\mu$  à  $5\mu$ , répartie comme suit :

- 8 % à des longueurs d'onde inférieures à  $0,4\mu$ .
- 41 % entre  $0,4$  et  $0,7\mu$  ( domaine du visible ) .
- 51 % à des longueurs supérieures à  $0,7\mu$  ( domaine infrarouge ) .

### b/- Constante solaire : $S_0$ .

On définit la constante solaire  $S_0$  comme étant la puissance reçue par une surface de  $1\text{ m}^2$  située à la limite supérieure de l'atmosphère et exposée normalement aux rayons solaires, quand la distance de la terre au soleil est égale à sa valeur moyenne .

Généralement on prend  $S_0 \approx 1393\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  .

Remarquons qu'en réalité  $S_0$  varie légèrement suivant les saisons : ceci étant dû aux variations de la distance soleil-terre .

### c/- Rayonnement solaire global reçu au sol ; $R_G$ .

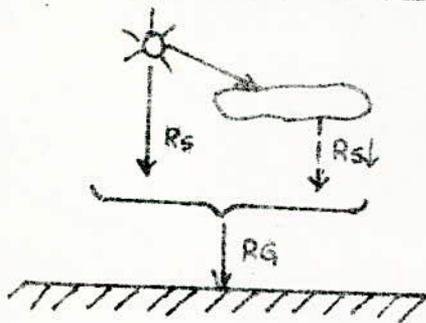


Fig ( II - 3 )

Un élément de sol exposé au soleil reçoit un rayonnement solaire direct  $R_s$  et un rayonnement solaire diffuse  $R_{s\downarrow}$  .

On appelle rayonnement solaire reçu au sol la somme des deux rayonnements .

$$R_G = R_s + R_{s\downarrow}$$

Pour le rayonnement solaire diffuse, il s'agit du rayonnement diffusé par l'atmosphère par diffusion Rayleigh et de Mie et par les masses nuageuses . Remarquons au passage que le rayonnement solaire direct  $R_s$  s'affaiblit en traversant l'atmosphère : Ceci étant dû à l'absorption sélective de certains constituants de l'atmosphère ( eau , oxygène , azote . . . ) et à la présence des masses nuageuses .

c/- Absorption et réflexion du flux solaire global par un élément de sol .

Comme tout corps recevant de l'énergie , la surface terrestre absorbe une fraction "a" du rayonnement ( ou flux ) solaire global RG et réfléchit le reste vers l'atmosphère .

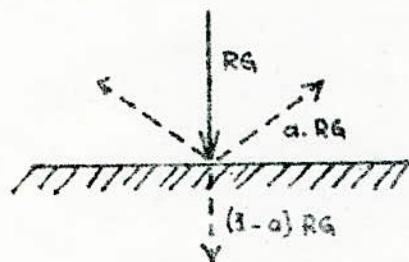


Fig (II - 4)

On définit l'albedo solaire "a" comme étant la fraction du rayonnement global réfléchi .

$$a = \frac{RG - RG(abs)}{RG} \quad 0 < a < 1$$

La fraction du rayonnement réfléchi est :

$$RG( réf ) = a . RG$$

Le flux solaire absorbé par la surface a pour expression :

$$RG(abs) = (1 - a) . RG$$

L'albedo solaire "a" dépend surtout de la nature du sol , mais il subit de légères variations au cours de la journée en fonction de l'angle zenithal local.

Le tableau suivant donne les valeurs moyennes d'albedo pour différents sol /

Nature	a
Neige fraîche	0,8 à 0,9
Neige ancienne	0,5 à 0,7
Pièrres - roches	0,15 à 0,25
Sols cultivés	0,07 à 0,14
Forêts	0,06 à 0,20
Herbes - cultures	0,12 à 0,25
Mer	0,05 à 0,40

( d'après Triplet et Roche )

d/- Les diverses formulations du flux solaire direct  $R_s$ .

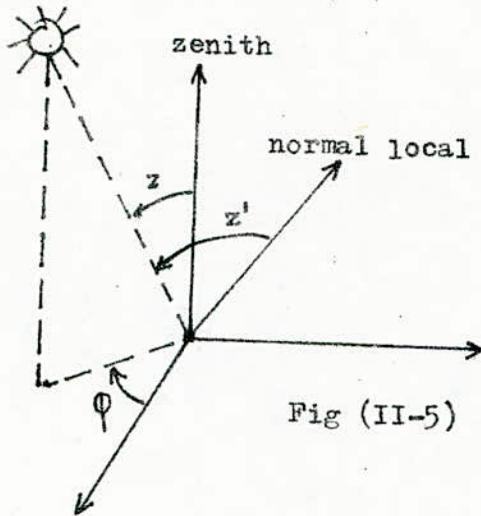


Fig (II-5)

La figure (II-5) présente la position du Pixel ( élément de sol ) par rapport au soleil .

$z$  : Angle zenithal du soleil

$z'$  : Angle zenithal local du soleil  
(le sol étant supposé non horizontal)

$\phi$  : Azimut du soleil

Plusieurs formulations du flux solaire  $R_s$  ont été données , dont quelques unes sont représentées ci-dessous :

1)- Mondratyev (1969) :  $R_s = S_0 \cdot (\cos z)^2 / (\cos z + \epsilon_1 \tau_0)$

avec :  $\epsilon_1$  : Fraction de radiation rétrodiffusée par l'atmosphère .

$\tau_0$  : épaisseur optique atmosphérique .

$S_0$  : constante solaire .

2)- Watson (1975) :  $R_s = C \cdot S_0 \cdot (1 - 0,2 \cdot I / \cos z) \cdot \cos z'$

avec :  $C$  : Facteur de transmission à travers les nuages .

3)- Soer (1977) :  $R_s = 0,5 \cdot S_0 \cdot \cos z' \cdot (\tau^{I/\cos z} + 0,87)$

avec :  $\tau$  : coefficient de transmission de l'atmosphère .

e/- Variation diurne du flux solaire direct reçu au sol .

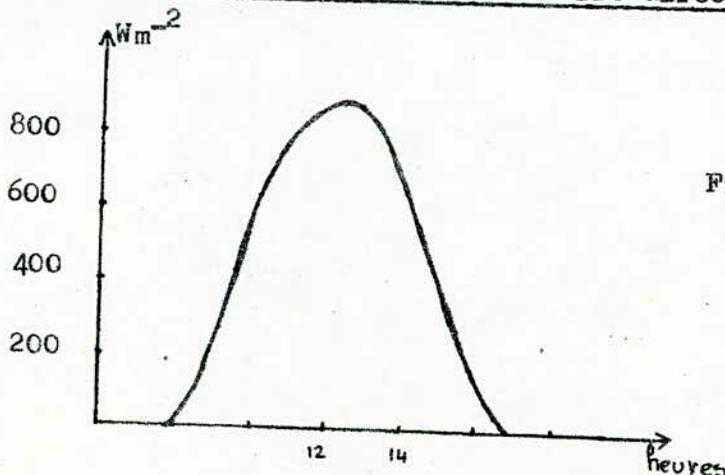


Fig (II-6) : Rayonnement solaire direct  $R_s$

30 juin 1976

The Terga Model

( GJR Soer )

- Pendant la nuit ,  $R_s$  est nul (absence de soleil )
- Pendant la journée ,  $R_s$  depend en premier lieu de la hauteur du soleil par rapport au Pixel ( c'est à dire de l'angle zenithal ) . Il atteint son maximum vers la mi-journée .

La courbe de la figure (II-6) donne un exemple de variation diurne du rayonnement solaire direct reçu par un élément de sol en l'absence de perturbations ( nuages , vents .... ) .

### II-1-2/- Le flux atmosphérique .

Compte tenu de sa température , l'atmosphère rayonne émet un rayonnement  $R_a$  . Les principaux responsables de cette émission sont : la vapeur d'eau , le gaz carbonique , l'ozone , les aérosols ....

Une partie de ce rayonnement se propage vers l'espace  $R_a \uparrow$  : c'est le rayonnement ascendant.

L'autre partie , descendante  $R_a \downarrow$  atteint le sol où elle est absorbée presque entièrement .

La fraction du rayonnement  $R_a \downarrow$  absorbée est :  $R_a(\text{abs}) = \epsilon R_a \downarrow$

La presence des nuages accroît sensiblement l'importance de  $R_a$  , car ces derniers se comportent comme des corps noirs quand ils sont épais .

### Les diverses formulations de $R_a \downarrow$ .

Plusieurs formulations de rayonnement atmosphérique ascendant ont été utilisée jusqu'à maintenant , dont voici quelques unes .

#### 1)- Formule faisant apparaître la température ambiante de l'air $T_a$ .

- Monteith (1973) :  $R_a \downarrow = 1,20 \cdot \sigma \cdot T_a^4 - 171$

- Feddes (1971) :  $R_a \downarrow = \sigma \cdot T_a^4 \cdot \left[ 1 - (1-a) \frac{n}{N} \right]$

avec :  $\frac{n}{N}$  : fraction du ciel clair

a : constante empirique

Ces formules ne sont qu'approximatives car elles ne tiennent pas compte de l'humidité de l'air .

2) - Formules introduisant la température de radiance effective de l'atmosphère

- Reprenant des mesures de Kondratyev (1969), Watson (1975) et Kahle (1977) utilisent :

$$Ra_{\downarrow} = \sigma T_{sky}^4$$

Khale propose :

$$T_{sky}^4 = 263^{\circ} + 10^{\circ} \cos t$$

avec : t : temps local mesuré à partir de 14h .

L'inconvénient de ces formules est d'introduire un paramètre effectif qui n'est pas relié aux paramètres météorologiques et ne permet pas de prendre l'effet de l'humidité relative de l'air .

3) - Formules introduisant une émissivité moyenne pour la température de l'air observée dans les basses couches atmosphériques .

- Brunt (1939) :  $Ra_{\downarrow} = \sigma T_a^4 ( a + b\sqrt{e_a} )$

avec :  $e_a$  : pression partielle de la vapeur d'eau ( $N.m^{-2}$ )

a et b constantes déterminées expérimentalement .

- Saunders (1965) :  $Ra_{\downarrow} = \sigma T_a^4 ( 0,605 + 0,048 \sqrt{1370 Ha} )$

avec : Ha : humidité de l'air ( $kg.m^{-3}$ )

- Angström ( formule cité par Rosema 1975 )

$$Ra_{\downarrow} = ( 0,82 - 0,25.10^{-0,00094e_a} ) \sigma T_a^4$$

- Staley et Jurica ( 1972 ) :

$$Ra_{\downarrow} = [ ( 1 - R ) + R.0,67.(1670 q_s)^{0,08} ] \sigma T_a^4$$

avec ; R : proportion du ciel clair

$q_s$  : humidité spécifique de l'air à la hauteur  $z_a$

$T_a$  : température de l'air dans les basses couches atmosphériques

II-I-3/- Le flux terrestre  $R_T$  :

Comme tout corps le sol émet un rayonnement qui dépend directement de sa température  $T_s$  et a pour valeur :

$$R_T = -\epsilon \sigma T_s^4$$

avec :  $\epsilon$  : l'émissivité, qui représente le rapport de l'émission

Également par le corps à celle qu'émettra un corps noir à la même température .

$$\sigma = 5,73 \cdot 10^{-13} \text{ W.cm. (K}^\circ\text{)}^{-4} : \text{ constante de S. Boltzmann .}$$

Le signe (-) est dû au fait que  $R_T$  est une énergie perdue par le sol .

Le tableau suivant donne l'émissivité de quelques types de sol :

Nature	$\varepsilon$
Blé mur	$0,992 \pm 0,010$
Pommes de terre	$0,991 \pm 0,008$
Herbe humide	$0,988 \pm 0,008$
Sol nu , sec	$0,966 \pm 0,008$
Sol nu , humide	$0,974 \pm 0,010$

( D'après Klaassen et  
Nieuwenhuis : 1978 )

Variation diurne de  $R_T$  :

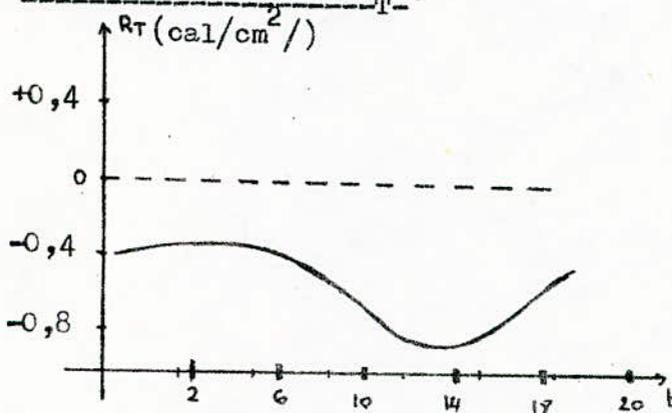


Fig (II-7) : D'après Kondratyev

La figure (II-7) donne un exemple de variation pendant une journée du flux émis par la surface terrestre . Pendant la journée cette émission est plus importante <sup>en valeur absolue</sup> que la nuit ( car la température du sol pendant le jour est plus élevée ) .

#### II-I-4/- Le rayonnement net : $R_n$ .

Le rayonnement net est le bilan de tous les flux radiatifs de la surface terrestre . Il représente l'ensemble des échanges radiatifs mis en jeu à la surface .

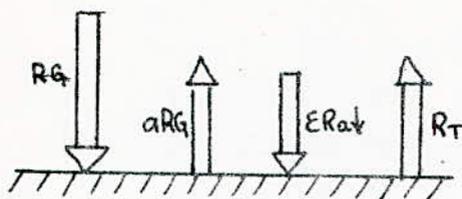


Fig (II-8)

Il a pour expression :

$$R_n = (1 - a) \cdot R_G + \epsilon R_{a\downarrow} + R_T$$

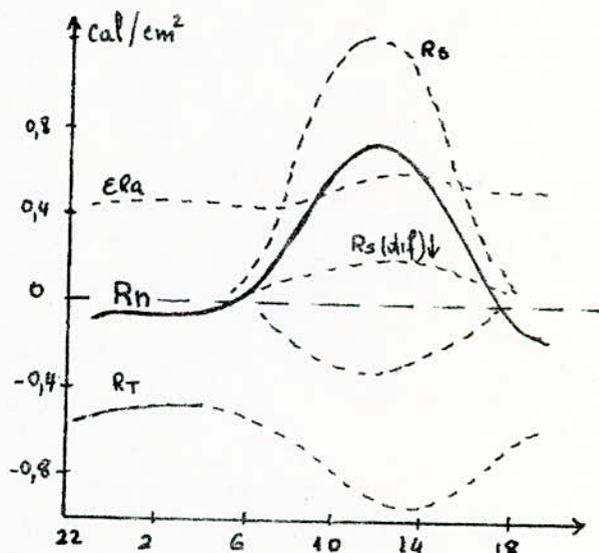
ou bien :

$$R_n = (1 - a) \cdot R_G + \epsilon (R_{a\downarrow} - \sigma T_s^4)$$

- $R_n$  : Rayonnement net .
- $R_G$  : Rayonnement solaire global reçu au sol .
- $(1 - a) \cdot R_G$  : partie du rayonnement global absorbé par le sol (  $a$  : albedo ) .
- $\epsilon R_{a\downarrow}$  : Fraction du rayonnement atmosphérique absorbé par le sol .
- $-\epsilon \sigma T_s^4$  : Rayonnement émis par le sol . (  $T_s$  température de surface ) .
- $\epsilon$  : émissivité / .
- $\sigma$  : cste de S. Bolzman .

#### Variation diurne de $R_n$ .

Fig (II-9) :  
D'après : Kondratyev .



La figure (II-9) donne un exemple de variation diurne du rayonnement net  $R_n$  pour une journée claire . De façon générale ,  $R_n$  reste négatif jusque environ 1/2 heure à 1 heure ~~après~~ après le lever du soleil et devient négatif environ 1 heure après le coucher du soleil .

La présence des nuages se traduit par une réduction de la valeur absolue de  $R_n$  .

La valeur de  $R_n$  est étroitement liée à la nature de la surface : l'albedo , l'émissivité , la conductivité thermique ....

## II-2/- LES FLUX DE CHALEUR .

Ces flux prennent place dans le sous-sol et à l'interface sol-atmosphère . Il traduisent , le transfert de chaleur dans lesol et à l'interface .

### II-2-I/- Le flux de chaleur sensible : H .

Il s'agit d'un échange de chaleur du sol avec l'atmosphère par conduction et par convection .

#### a)- Echange de chaleur par conduction .

Dans l'ensemble du système surface terrestre-atmosphère les échanges de chaleur par conduction sont relativement lents et faibles . Il peuvent néanmoins intervenir d'une façon très sensible entre la surface et les toutes premières couches de l'atmosphère . Ceci étant dû essentiellement :

- Aux contrastes thermiques qui y regnent entre le sol et les premières couches de l'atmosphère .

- A l'accélération de l'uniformisation des températures dans un fluide initialement hétérogène , lorsque celui-ci est le siège d'une agitation turbulente ( Vent par exemple ) .

#### b)- Echange de chaleur par convection :

Ce phénomène est observé dans l'atmosphère à la suite d'un séjour ou d'un déplacement à la surface terrestre relativement chaude, les basses couches atmosphériques subissent un échauffement par la base .

Grace à ces échanges par conduction et par convection , l'atmosphère récupère une partie importante de l'énergie solaire emmagasinée par la surface terrestre . Lorsque l'atmosphère est en contact avec un sol chaud il se crée une instabilité verticale dans les basses couches qui donne naissance à un brassage convectif . Tandis-que lorsqu'elle est en contact avec un sol froid , il se crée une stabilisation de ces mêmes couches .

Variations diurne du flux de chaleur sensible H .

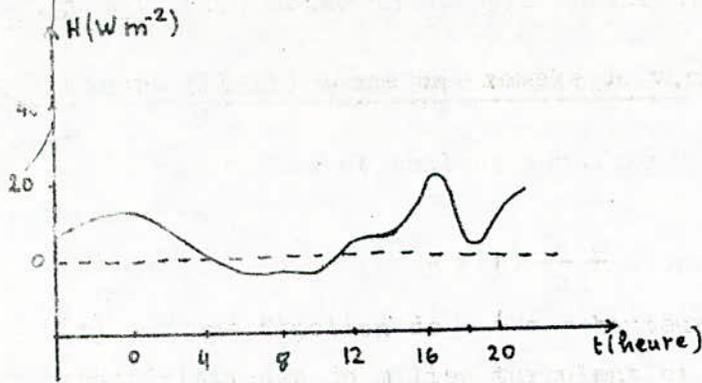


Fig (II-10) : D'après les résultats expérimentaux de Soer (1977) .

La figure (II-10) donne un exemple de variation diurne de H .

Formulation du flux de chaleur sensible H .

Le flux de chaleur sensible H est proportionnel au gradient de la température :

$$H = f(z) \frac{\partial T_a}{\partial z}$$

- f(z) est une fonction de ( z = hauteur par rapport au sol ) dépendant des caractéristiques du milieu turbulent et des coefficients de transfert turbulent .

L'intégration de cette expression sur une hauteur  $z_a$  relativement grande par rapport à la rugosité aérodynamique donne :

$$H = \rho_a c_p \frac{T_a - T_s}{r_a}$$

Fig (II-10) : D'après les résultats expérimentaux de Soer (1977) .

avec :  $\rho_a$  : densité de l'air .

$c_p$  : chaleur spécifique de l'air .

$T_a$  : température ambiante de l'air à la hauteur  $z_a$  .

$T_s$  : température de surface du sol .

$r_a$  : résistance de transfert de chaleur entre la surface et la

hauteur  $z_a$  .

La figure (II-10) donne un exemple de variations de H en fonction de  $T_a - T_s$  .

Le flux de chaleur sensible H est proportionnel au gradient de la température :

$$H = f(z) \frac{\partial T_a}{\partial z}$$

- f(z) est une fonction de ( z = hauteur par rapport au sol ) dépendant des caractéristiques du milieu turbulent et des coefficients de transfert turbulent .

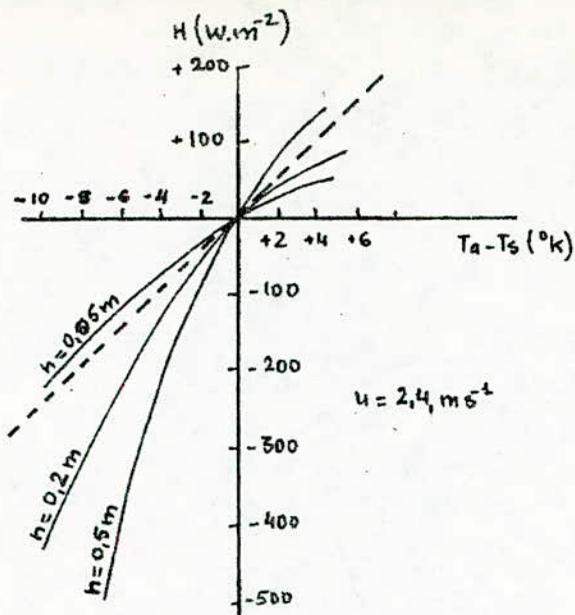


Fig : (II-II) : Soer (1977)

### II-2-2/- Le flux de chaleur latente : LE .

Il s'agit de chaleur absorbée ou restituée par les changements de phase de l'eau ( c'est à dire , soit par conduction , soit par évaporation Ceci étant dû :

- Au<sup>x</sup> transpirations des plantes .
- A l'évaporation direct de l'eau d'un sol non couvert , mais surtout des océans .

Ces évaporations absorbent de la chaleur laquelle est fournie par la surface . Cette vapeur se condense tôt ou tard , en libérant cette chaleur empruntée précédemment . C'est ainsi que par un jeu de chaleur latente d'importantes quantités de chaleur passe de la surface terrestre à l'atmosphère .

### Formulation du flux de chaleur latente LE .

Le flux de chaleur latente est proportionnel au gradient de l'humidité spécifique de l'air : (  $q_s$  ) :

$$LE = f(z) \frac{\partial q_s}{\partial z}$$

avec :  $q_s$  : humidité spécifique de l'air .

$z$  : hauteur par rapport au sol .

$f'(z)$  : fonction de  $z$  dépendant des propriétés du milieu .

L'intégration de cette expression entre la surface et une hauteur  $z_a$  donne :

$$LE = \frac{\alpha C_p}{\gamma} \frac{e_a(T_a) - e_s(T_s, h_s)}{r_a + r_c}$$

- avec :  $e_a(T_a)$  : pression partielle de la vapeur d'eau à la hauteur  $z_a$  .  
 $e_s(T_s, h_s)$  : pression partielle de la vapeur d'eau à la surface du sol dépendant de  $T_s$  et de l'humidité du sol  $h_s$  .  
 $r_c$  : résistance de diffusion de la végétation pour la vapeur d'eau .  
 $r_a$  : résistance du transfert de vapeur d'eau entre la surface et la hauteur  $z_a$  .  
 $e_s(T_s, h_s)$  et donnée par :

$$e_s(T_s, h_s) = \exp \frac{g M_v h_s}{R T_s} P_{sat}(T_s)$$

$$P_{sat}(T_s) = 100 \exp(21,548 - 5388/T_s)$$

- avec :  $P_{sat}(T_s)$  : pression de vapeur saturante ~~à~~ à la température  $T_s$   
 $h_s$  : pression effective de l'eau à la surface du sol .  
 $M_v$  : masse molaire de la vapeur d'eau .  
 $R$  : Cste universelle des gaz parfait .  
 $g$  : accélération de la pesanteur .

$$\gamma = C_p \frac{M_a}{M_v} \frac{P_s}{L}$$

- $C_p$  : Chaleur spécifique par unité de masse de l'air .  
 $M_a$  : masse molaire de l'air sec .  
 $M_v$  : masse molaire de vapeur d'eau .  
 $P_s$  : pression de l'air en  $z_a$  .  
 $L$  : chaleur latente de vaporisation de l'eau donnée par

$$L = 3,0363 \cdot 10^6 - 1,957 \cdot 10^3 \cdot T_a$$

Variation diurne du flux de chaleur latente LE.

La figure (II-12) donne un exemple de variation diurne du flux de chaleur latente LE .

## II-3/- LE FLUX TOTAL VERS LE SOL .

Le flux total vers le sol est la somme de tous les flux aussi bien radiatifs que de chaleur qui prennent place à la surface terrestre .  
Il a pour expression :

$$\phi(t) = R_n + H + LE$$

ou bien :

$$\phi(t) = (1 - a) \cdot R_G + \epsilon (R_{a\downarrow} - \sigma T_s^4) + H + LE$$

### Mesure du flux total vers le sol $\phi(t)$ .

Le flux total vers le sol , qui gouverne les variations de la température de surface  $T_s$  , dépend de plusieurs paramètres : Ce sont les paramètres du sol et de l'interface sol-atmosphère ( paramètres physiques qui sont eux mêmes influencés par les paramètres thématiques et les paramètres perturbatifs au niveau de l'atmosphère et de la couche limite ) .

Le tableau de la page 27 donne les principaux paramètres intervenant dans la valeur de  $\phi(t)$  .

Ces divers paramètres rendent la mesure de  $\phi(t)$  très complexe ( voire même impossible actuellement par télédétection , du fait que cette dernière ne mesure actuellement que très peu de paramètres ) .

Les mesures actuelles sont très approximatives ( plusieurs paramètres sont négligés ) et basées sur des mesures faites au niveau du sol et à partir de modèles théoriques .

Nous citons ici le modèle Terga ( Soer 1977 ) .

La figure (II-12) donne un exemple de variation diurne du flux total vers le sol  $\phi(t)$  d'après les résultats de Soer .

# LES DIVERS PARAMETRES INTERVENANT DANS LE FLUX TOTAL $\phi(t)$

## Au niveau du sol

### Paramètres thématiques

- Nature du sol
- Humidité

### Paramètres physiques

- Conductivité thermique  $k$
- Chaleur spécifique  $C_v$
- Inertie thermique  $P$

## Au niveau de l'interface sol-atmosphère

### Paramètres thématiques

- Nature du couvert
- Rugosité du sol
- Profil thermique
- Profil d'humidité

### Paramètres physiques

- Emissivité
- Réflectivité
- albedo
- Résistances  $r_a$  et  $r_c$

### Paramètres microclimatiques

- $T_a$  : Température de l'air
- $T_s$  : Température de surface
- $e_a$  : Pression partielle de l'air
- $e_s$  : Pression partielle de la vapeur d'eau à la surface
- $u$  : Vitesse du vent
- $z_0$  : Rugosité aérodynamique

## Au niveau de l'atmosphère

### Paramètres atmosphériques

- Composition moléculaire
- Distribution des aérosols
- Profil pression, température, humidité

### Paramètres Météorologiques

- Position du soleil
- Couverture nuageuse
- Température des nuages
- Turbulence

D'après Becker 1978

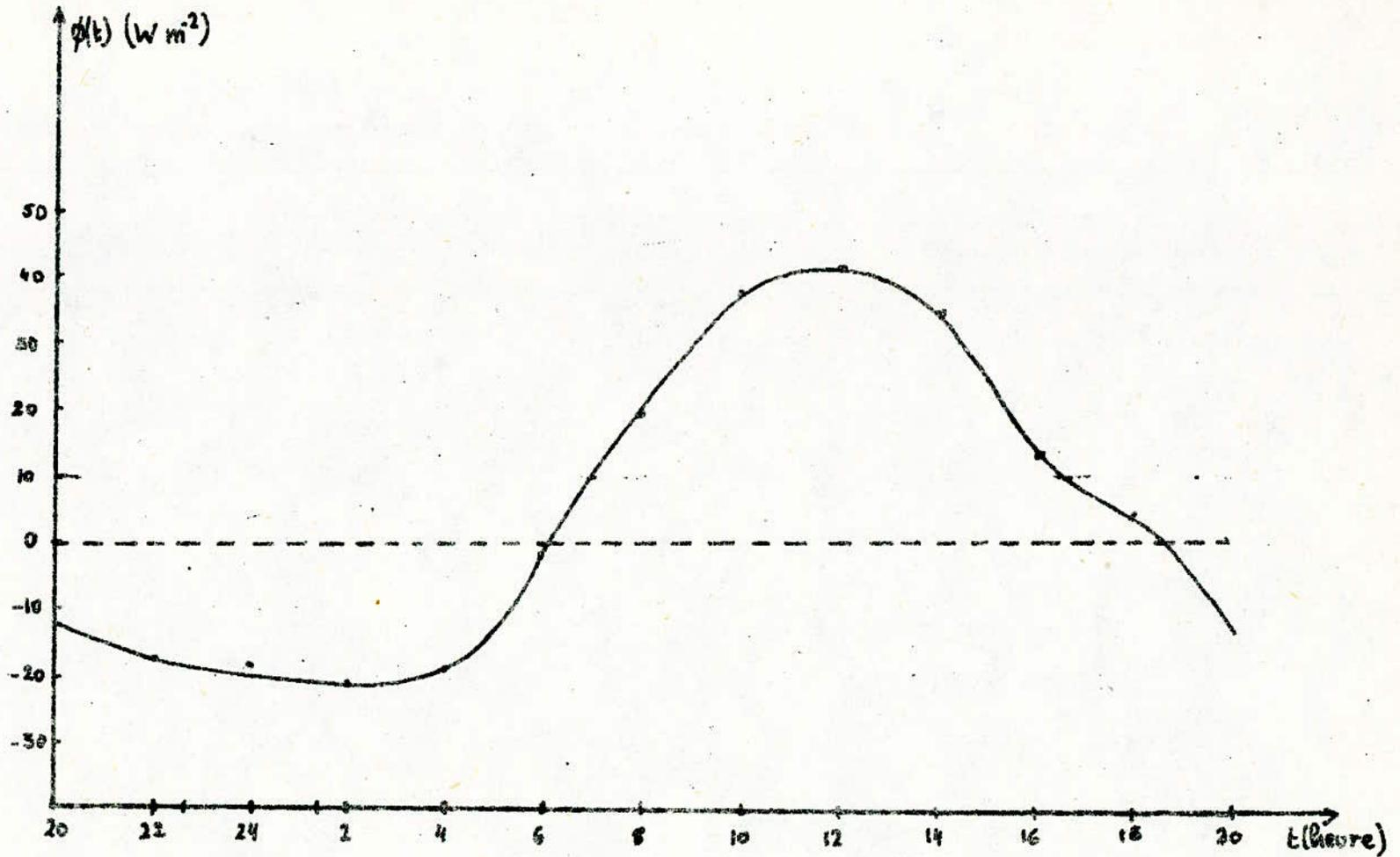


Fig (II-12) - Exemple de Variation diurne du flux total vers le sol  $\phi(t)$   
 d'après les mesures de Soer 1977  
 Cas des sables secs

### CH I/ : III- LA TEMPERATURE DE SURFACE $T_s$ :

On désigne par température de surface, la température qui régné au niveau de la couche infiniment mince ( théoriquement d'épaisseur nulle ) qui est en contact avec l'atmosphère .

Les variations de la température de surface traduisent la réponse du sol aux excitations solaire ( plus précisément au flux total vers le sol :  $\phi$  ) . Ces variations dépendent fortement de la nature du milieu et de ses caractéristiques thermiques ( surtout de son inertie thermique ) . D'autres facteurs peuvent intervenir et perturber localement cette réponse .

Les variations que subit la température de surface  $T_s$  sont gouvernées par l'équation du bilan énergétique à la surface , donnée par :

$$-k \frac{T(x,t)}{x} \Big|_{x=0} = \phi(t)$$

avec :  $T(x,t)$  : répartition de la température en profondeur et en temps

$\phi(t) = (1-a)RG + \epsilon(Ra - Ts^4) + H + LE$  : Flux total vers le sol

$k$  : conductivité thermique du sol considéré .

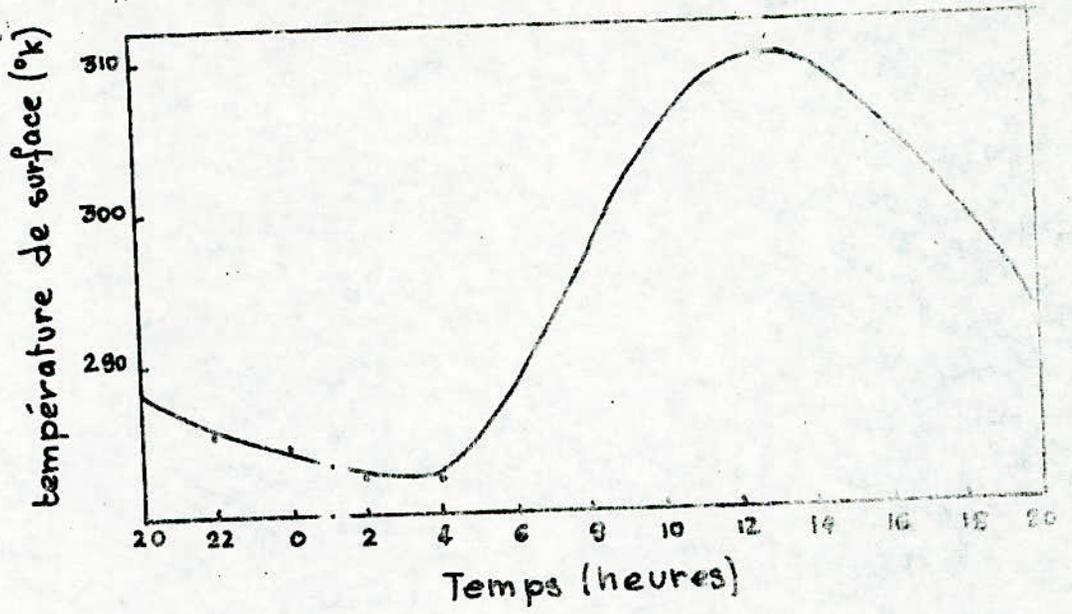
#### III-1/- VARIATION DIURNE DE LA TEMPERATURE DE SURFACE : $T_s(t)$ .

La figure (III-1) donne un exemple de variation de  $T_s(t)$  pendant une journée ( 24 h ) en l'absence de perturbations .

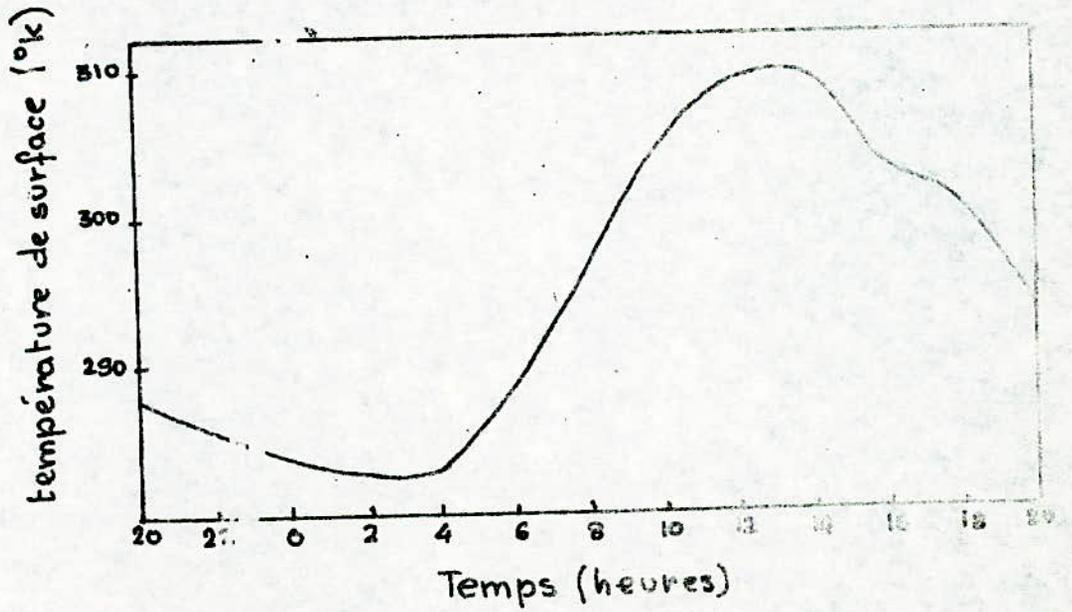
- Pendant le jour , le rayonnement solaire  $R_s$  étant prédominant ;  $T_s(t)$  suit les de  $R_s$  , avec un certain déphasage . La température maximal est atteinte entre 12h30 et 14h .

- Pendant la nuit ,  $R_s$  étant nulle , on observe un refroidissement quasiment linéaire . Ce refroidissement est dû au<sup>x</sup> pertes d'énergie accumulée pendant le jour , par émission propre du sol (  $R_t$  ) et aux flux de chaleur  $H$  et  $LE$  .

La figure (III-2) donne un exemple où  $T_s(t)$  subit des perturbations en fin d'après midi . Ces perturbations sont dues au passage d'un nuage pendant cette période .



Fig(III-1)



Fig(III-2)

Remarque : Mis à part les variations diurne ,  $T_s$  subit des variations annuelles .  
Ces variations sont dues essentiellement aux variations de la distance terre-soleil et à la fréquence des nuages pendant l'hiver .

Dans ce travail on ne tiendra pas compte des variations annuelles , du fait que ces dernières sont très lentes par rapport aux variations diurne . On supposera donc que  $T_s(t)$  est périodique de période 24h .

### III-2/- MESURE DE LA TEMPERATURE DE SURFACE $T_s$ .

#### III-2-I/- Notion de thermographie .

La thermographie est l'étude de la surface terrestre en fonction de la température qui y régné . Grâce à des radiomètres travaillant dans la bande infrarouge thermique , embarqués sur des satellites ou des avions , on arrive à obtenir des images électriques de la température de surface d'un terrain . Ces images électriques peuvent être transformées en images optiques ( Le niveau du blanc correspondra aux températures élevées , le niveau du noir aux basses températures ) .

#### III-2-2/- Les différentes méthodes de la mesure de $T_s$ dans un laboratoire .

##### a)- Mesure de la température $T_s$ à partir de modèles .

Plusieurs modèles pour l'estimation de la température de surface  $T_s$  . Ces mesures sont souvent très approximatives . Nous citons comme exemple :

- Kashahara (1971) .
- Bhumralkar (1975) .
- Soer (1977) .

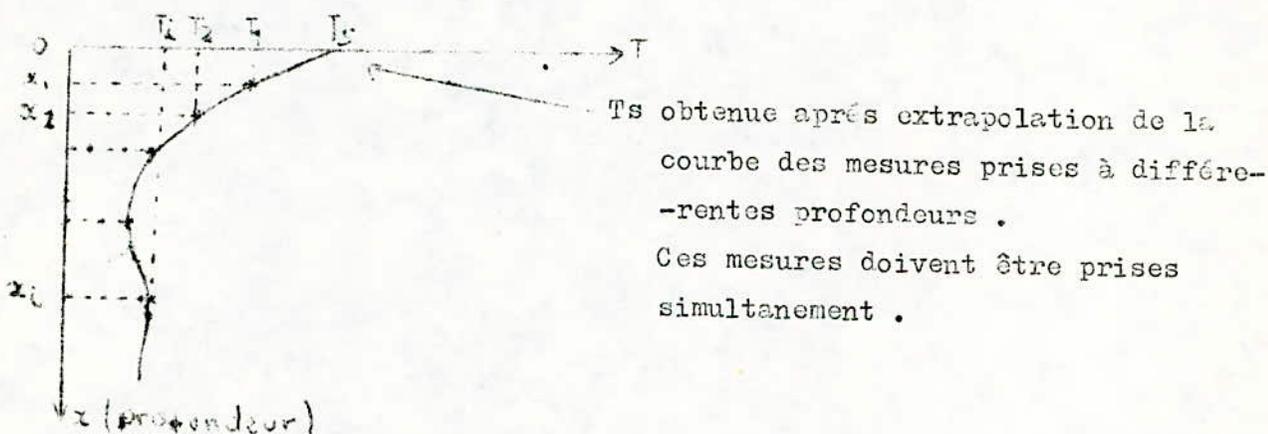
et bien d'autres ....

##### b)- Mesure de $T_s$ par un radiomètre placé à 2 ou 3 mètre au-dessus du sol .

Ce radiomètre capte le rayonnement émis par la surface ; à partir duquel on déduit la température de surface  $T_s$  du pixel considéré . Le principe est le même que celui utilisé en télédétection .

### c)- Mesure de Ts à partir d'une sonde .

La sonde mesure la température à différentes profondeurs dans le sol . La température de surface Ts est obtenue après extrapolation de la courbe obtenu .



### III-2-3/- Mesure de Ts en télédétection .

En télédétection la mesure de Ts se fait par des radiomètres travaillant généralement dans la bande infrarouge thermique et embarqués sur des satellites ; des avions ou des ballons .

On distingue trois types de radiomètres .

- Les radiomètres simples qui enregistrent l'information dans une direction fixe par rapport au bâti .
- Les radiomètres à balayage simple ( appelés scanners ) .
- Les radiomètres à double balayage ou caméras thermiques .

#### a)- Bande spectrale utilisée .

Les courbes d'émissances spectrales du corps noir à différentes températures montrent que pour celles qui sont habituellement rencontrées au sol ( aux environs de 300°K ) , la maximum d'énergie rayonnée se situe vers 10 $\mu$ m ( c'est à dire dans l'infrarouge thermique ) .

Pour cela les appareils utilisés sont généralement des appareils sensibles dans cette bande . L'utilisation de cette dernière possède un autre avantage du fait que les diverses perturbations sont relativement faibles dans cette bande .

b)- Principe .

La terre émet un rayonnement électromagnétique dépendant de sa température de surface .

L'énergie émise par le pixel visé est :  $W = \epsilon \cdot \sigma \cdot T_s^4$

La mesure de cette énergie permet donc d'accéder à la température de surface  $T_s$  .

Mais l'énergie reçue par le capteur est la somme du rayonnement émis et du rayonnement réfléchi par ce même pixel .

L'énergie reçue est donc :  $W = \epsilon \cdot \sigma \cdot T_s^4 + (1 - \epsilon)RG$

c)- Méthode .

Le radiomètre délivre une grandeur électrique  $S$  fonction de l'énergie reçue par le détecteur . En première approximation on peut dire que le flux reçu est proportionnel au flux d'énergie en provenance de la surface à analyser . Il est donc possible de relier  $S$  à l'énergie radiative de la forme  $\sigma \cdot T^4$  .

$T$  est appelée température radiative apparente et que l'on considère connue la température de surface  $T_s$  .

On trace ainsi la courbe  $S(T)$  qui présente une courbe d'étalonnage instrumentale .

La mesure de la température apparente  $T_r$  consiste à assimiler à un corps noir , la surface dont on veut connaître la température . En utilisant la grandeur  $S$  mesurée et la courbe d'étalonnage , on en déduira simplement  $T_r$  .

L'approximation de  $T_r$  avec  $T_s$  introduit une erreur relative que l'on peut calculer en utilisant le fait que les énergies théoriques et mesurées sont égales .

- L'énergie théorique s'écrit :  $W_t = \epsilon \sigma T_s^4 + (1 - \epsilon) RG$

- L'énergie mesurée s'écrit :  $W_m = \sigma T_r^4$

On aura donc :  $\sigma T_r^4 = \epsilon \sigma T_s^4 + (1 - \epsilon)RG$

En exprimant  $T_r$  en fonction de  $T_s$  on aura :

$$T_r = \sqrt[4]{\frac{T_s^4 + (1 - \epsilon)RG}{\epsilon}}$$

L'erreur introduite sera alors :

$$\frac{T_s - T_r}{T_s} = 1 - \frac{T_r}{T_s} = 1 - \frac{4 \sqrt{\frac{\epsilon \sigma T_s^4 + (1 - \epsilon) R_g}{\sigma}}}{T_s} = 1 - \sqrt{\frac{\epsilon \sigma T_s^4 + (1 - \epsilon) R_g}{\sigma T_s^4}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{T_s - T_r}{T_s} = 1 - \sqrt{\epsilon + \frac{(1 - \epsilon) R_g}{\sigma T_s^4}}}$$

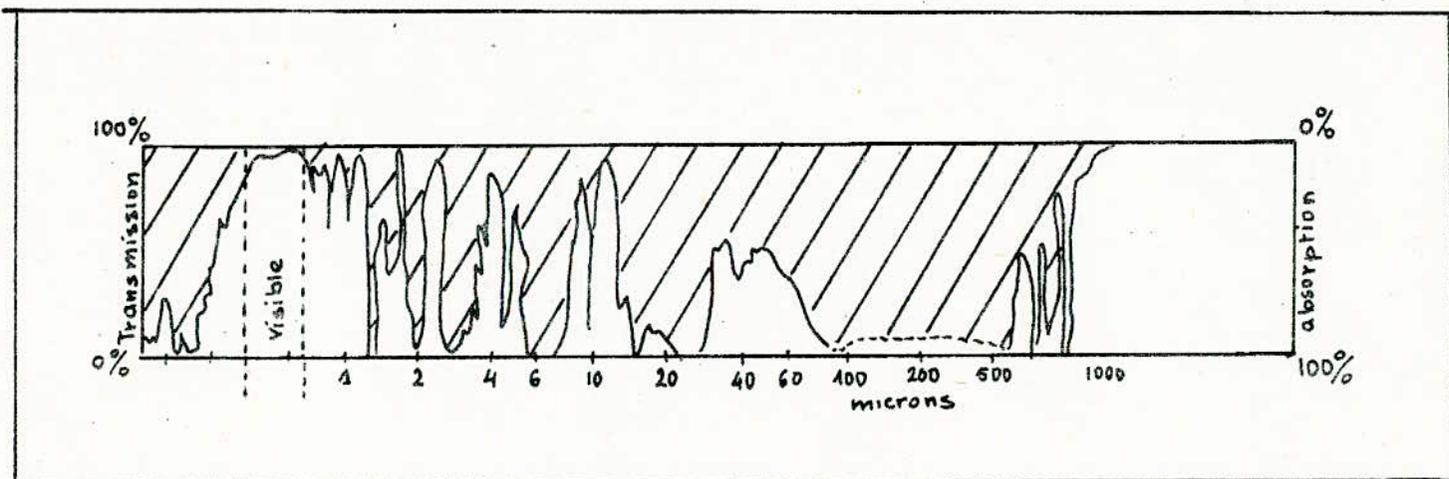
Remarque :

L'erreur commise sur la température de surface dépend de l'énergie reçue par la surface et de l'émissivité de cette dernière. Les meilleures mesures seront donc obtenues la nuit du fait que  $R_s$  est nul.

Perturbations de l'atmosphère et des masses nuageuses .

La réflexion n'est malheureusement pas la seule à perturber la mesure de la température de surface . L'atmosphère et les masses nuageuses absorbent une partie du rayonnement et en diffusent une autre. En ce qui concerne l'absorption l'atmosphère présente fenêtres de transmission représentées par le schéma de la figure (III-3) . Dans la zone qui nous intéresse les bandes d'absorption sont dues essentiellement à des transitions de rotation des molécules d'eau ( vapeur ) et de gaz carbonique (  $2,5 \mu - 3 \mu$  ,  $4,3 \mu$  ,  $5,8 \mu - 7,3 \mu$  et  $14 \mu - 100 \mu$  ) . C'est à dire que l'absorption de l'atmosphère est assez peu gênante .

D'autre part la théorie montre que la diffusion pour les petites particules devant la longueur d'onde est proportionnelle à  $\lambda^{-4}$  . Ce phénomène est donc très faible dans l'infrarouge . Pour les grosses particules , là encore l'infrarouge est nettement plus pénétrant que le visible, ce qui présente un grand intérêt en pratique .



Absorption du spectre électromagnétique par l'atmosphère

CH-I/ : IV- L'INERTIE THERMIQUE .

IV-I/- INTRODUCTION .

L'étude des données de télédétection permet d'accéder à une grandeur spécifique du sol . Cette grandeur étant l'inertie thermique ( notée P ) .

Bien que le sens physique de cette dernière n'est pas toujours clair , elle présente en revanche une caractéristique propre du milieu étudié .

Ce paramètre est indépendant de la couleur et de la forme des objets , mais nous renseigne sur sa nature .

Il n'existe actuellement pas de définition exacte de l'inertie thermique , mais on peut dire qu'elle présente l'aptitude d'un matériau à accumuler une quantité de chaleur plus ou moins grande pour une variation donnée du flux d'énergie qu'il reçoit .

Le sol reçoit un flux d'énergie au cours du cycle diurne ce qui se traduit par une variation de sa température dépendant de son inertie thermique P .

IV-2/- EXPRESSION DE L'INERTIE THERMIQUE P .

Pour un corps homogène , l'inertie thermique est définie

par :

$$P = \sqrt{k \cdot \rho \cdot C} = \sqrt{k \cdot C \cdot \rho}$$

avec : k : Conductivité thermique du matériau s'exprimant en  $W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ K^{-1}$

$\rho$  : Masse volumique s'exprimant en  $g \cdot m^{-3}$

C : Chaleur massique s'exprimant en  $W \cdot s \cdot g^{-1} \cdot ^\circ K^{-1}$

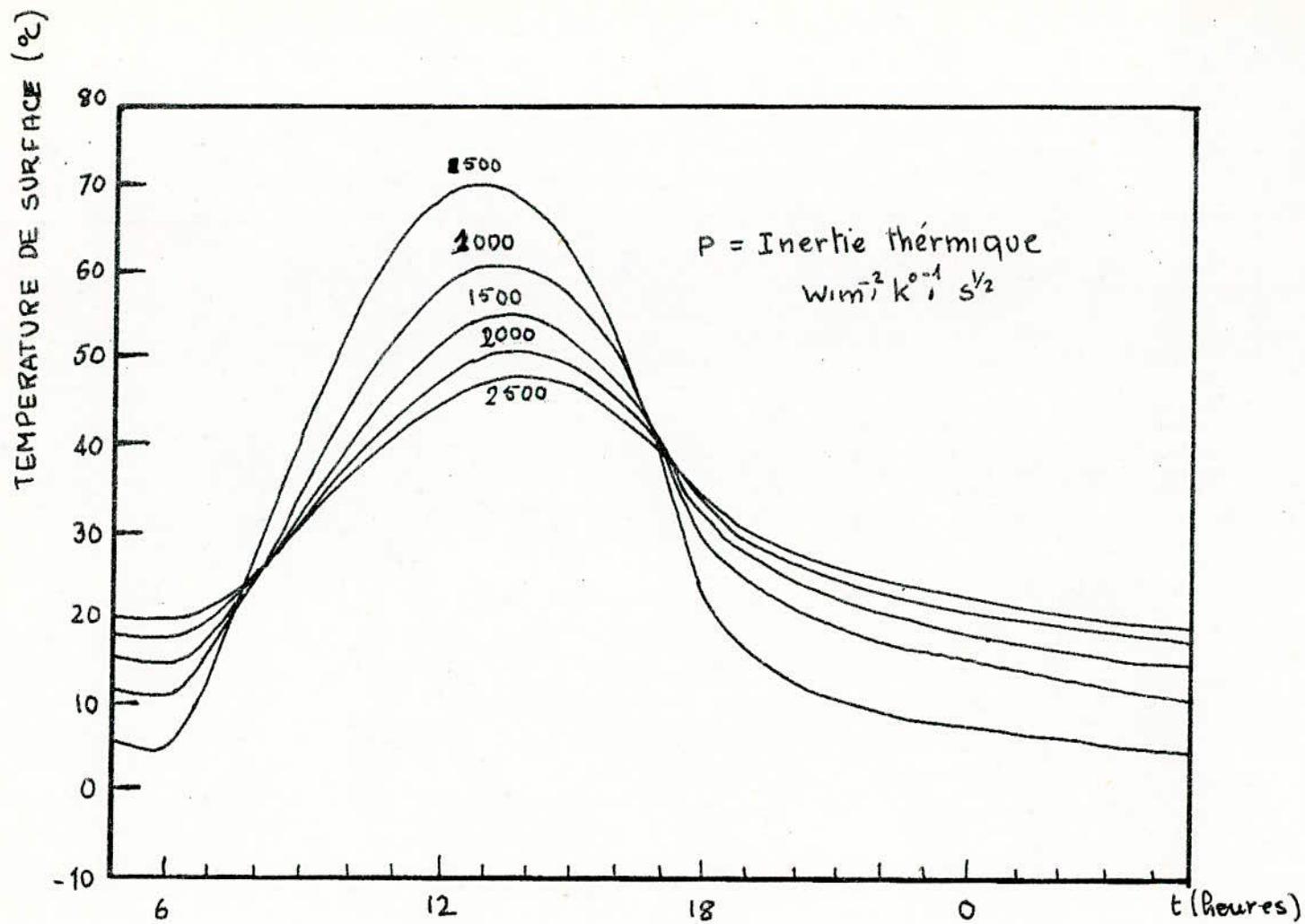
P s'exprime en  $W \cdot m^{-2} \cdot ^\circ K^{-1} \cdot s^{1/2}$

#### IV-3/- Domaine de variation de P .

Le domaine de variation de P est important . Les sols et matériaux granuleux ont des valeurs allant de 500 à 2000 . Les roches présentent des valeurs de l'inertie thermique plus importantes allant de 2000 à 4000 .

#### IV-4/- Influence de P sur les variations de $T_s(t)$ .

Les variations de la température de surface traduisant la réponse du sol aux perturbations extérieures , sont d'autant plus importantes que l'inertie thermique est faible . La figure (IV-1) donne des exemples de variation diurne de la température de surface en fonction de P .



Variation de la température de surface  
 en fonction de l'inertie thermique

## CHAPITRE II

## CH II : I - PRESENTATION DES MODELES .

Soit un élément de surface, qui est le siège d'échanges d'énergie radiatifs et de chaleur. Ces échanges sont représentés par le flux total vers le sol:

$$\phi(t) = (1-a) R_G + E (T_a \downarrow - \sigma T_s^4) + H + LE$$

Ce flux gouverne les variations de la température de surface suivant la loi du bilan énergétique :

$$-k \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi(t)$$

Dans l'établissement de ces modèles on sera amené à faire les approximations suivantes :

- Les flux horizontaux sont négligés devant les flux verticaux. Il en résulte que la propagation de la chaleur dans le sol est unidirectionnelle et se propage verticalement en profondeur "x"

- Le sol est supposé homogène

- Les variations de la conductivité thermique "k" en fonction de la température sont négligées, du fait qu'elles sont très faibles pour les variations de température mises en jeu.

-  $\phi(t)$  et  $T_s(t)$  sont supposés périodiques et de période 24 h.

La répartition de la température  $T(x,t)$  dans le sol en profondeur "x" et en temps "t" est régie compte tenu des hypothèses données précédemment par l'équation de la propagation de la chaleur suivante :

$$k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = C_v \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

Cette équation obéit aux conditions aux limites suivantes

$$a) - T(0, t) = T_s(t) \quad (2)$$

$$b) - -k \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi(t) \quad (3)$$

avec:  $T(x, t)$ : répartition de la température dans le sol en profondeur " $x$ " et en temps " $t$ ".

$\phi(t)$ : répartition du flux total vers le sol dans le temps

$k$ : Conductivité thermique du sol

$C_v = \rho c$ : Capacité calorifique volumique du sol.

On rappelle que l'inertie thermique  $P$  est donnée par:  $P = \sqrt{k C_v}$

$\phi(t)$  est compté positif dans la direction atmosphère-sol.

$x$  est compté positif en profondeur.

Dans ce chapitre seront étudiés trois modèles:

1<sup>er</sup> modèle:

Le premier modèle étudié sera relativement simple. On approchera les variations de la température de surface  $T_s(t)$  à des variations sinusoïdales. On prendra donc:

$$T(0, t) = T_s(t) = T_0 \cdot \cos \omega t \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = 24h$$

Malgré que ce modèle donne une valeur approchée de  $P$ , il peut être utilisé dans plusieurs domaines d'application.

2<sup>em</sup> Modèle:

Le deuxième modèle sera basé sur la décomposition en série de Fourier de  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$ , compte tenu que ces dernières ne sont pas sinusoïdales. Ce modèle donnera une solution plus exacte que la première.

### 3<sup>ème</sup> Modèle :

Le 3<sup>ème</sup> modèle sera basé sur la méthode des différences finies.  
Le calcul de l'inertie thermique  $P$ , se fera d'abord par un schéma implicite puis par un schéma explicite.

L'étude des 2 premiers modèles sera effectuée en 3 phases.

1) - Résolution de l'équation de la chaleur et détermination de la répartition de la température en profondeur et en temps en utilisant la condition aux limites (1)

2) - Supposant l'inertie thermique  $P$  connue on en déduira la valeur de  $\phi(t)$  théorique, en utilisant la condition aux limites (2)

3) Etant donné qu'en réalité ce sont  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$  qui sont mesurées, on étudiera les différents moyens de déduire la valeur de l'inertie thermique  $P$ .

CH II : II- ETUDE D'UN MODELE SIMPLE.

II-1/- ENONCE DU PROBLEME.

$$k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = C_v \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

Les conditions aux limites sont données par:

$$a) \quad T(0,t) = T_3(t) = T_0 \cos \omega t \quad (2)$$

$$b) \quad -k \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi(t) \quad (3)$$

II-2/- RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR.

Dans la résolution de cette équation on introduit les imaginaires dans les calculs; il sera toujours facile ensuite de remettre la solution sous sa véritable forme réelle.

On cherchera donc une solution de la forme:

$$T(x,t) = T(x) e^{i\omega t} \quad (4)$$

La dérivée de l'expression (4) par rapport au temps donne:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = i\omega T(x) e^{i\omega t} = i\omega T(x,t)$$

Substituons dans l'équation (1)

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{i\omega C_v}{k} T(x,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - i \frac{\omega C_v}{k} T(x,t) = 0 \quad (5)$$

l'équation caractéristique de (5) est:

$$r^2 - i \frac{\omega C_v}{k} = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{i} \sqrt{\frac{\omega C_v}{k}}$$

On peut facilement montrer que :  $\sqrt{i} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

$$\text{d'où : } r = \pm i \sqrt{\frac{\omega C_v}{k}} = \pm (1+i) \sqrt{\frac{\omega C_v}{2k}} = \pm (1+i) \alpha$$

$$\text{avec } \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\omega C_v}{2k}} = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{\omega}{2}}} \quad (6)$$

où  $P = \sqrt{C_v k}$  : inertie thermique

La solution générale de l'équation (1) sera donc de la forme :

$$T(x,t) = (A e^{(1+i)\alpha x} + B e^{-(1+i)\alpha x}) \cdot e^{i\omega t} \quad (7)$$

Le premier terme de (7) tend vers l'infini, quand  $x$  tend vers l'infini il n'a donc pas de sens physique pour ce problème. d'où :

$$\begin{aligned} T(x,t) &= B e^{-(1+i)\alpha x} e^{i\omega t} = B e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \alpha x)} \\ &= B e^{-\alpha x} (\cos(\omega t - \alpha x) + i \sin(\omega t - \alpha x)) \end{aligned} \quad (8)$$

Si l'on applique la condition aux limites (2) :  $T(0,t) = T_0(t) = T_0 \cos \omega t$  il en résulte que la solution cherchée est :

$$T(x,t) = T_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \alpha x) \quad (9)$$

La répartition de la température en profondeur et en temps pour la condition aux limites (2) est :

$$\boxed{T(x,t) = T_0 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \alpha x)} \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

## Interprétation

1) - Pour une profondeur donnée  $x_0 = \text{cte}$ ,  $T(x_0, t)$  est une sinusoïde d'amplitude :  $T_0 e^{-\alpha x_0}$  et déphasée par rapport à  $T_s(t)$  de  $\varphi = \alpha x_0$

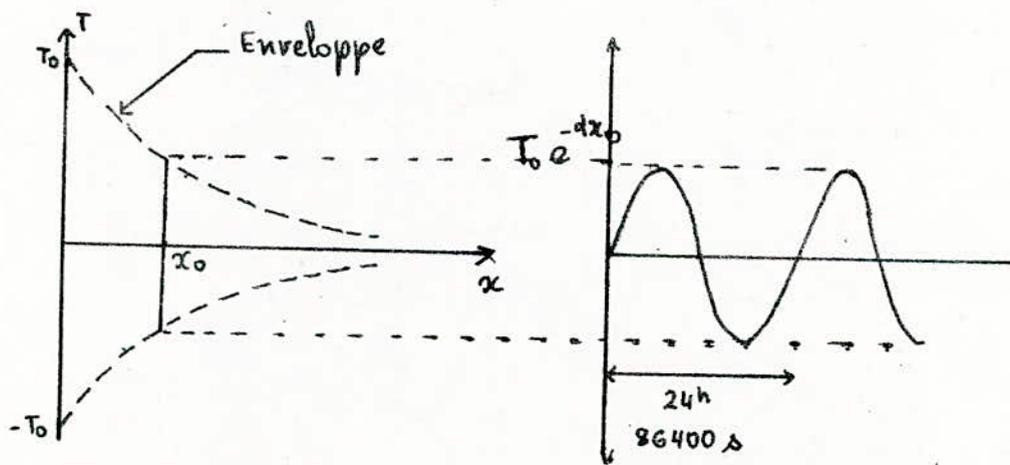
2) L'amplitude et la phase de  $T(x, t)$  sont fonction de la profondeur  $x$ . Les ondes sont amorties ~~sur~~ surface et à mesure que l'on descend en profondeur.

L'amplitude des oscillations  $T_0 e^{-\alpha x}$  décroît exponentiellement. Le terme  $e^{-\alpha x}$  constitue une enveloppe, dont la pente est donnée par

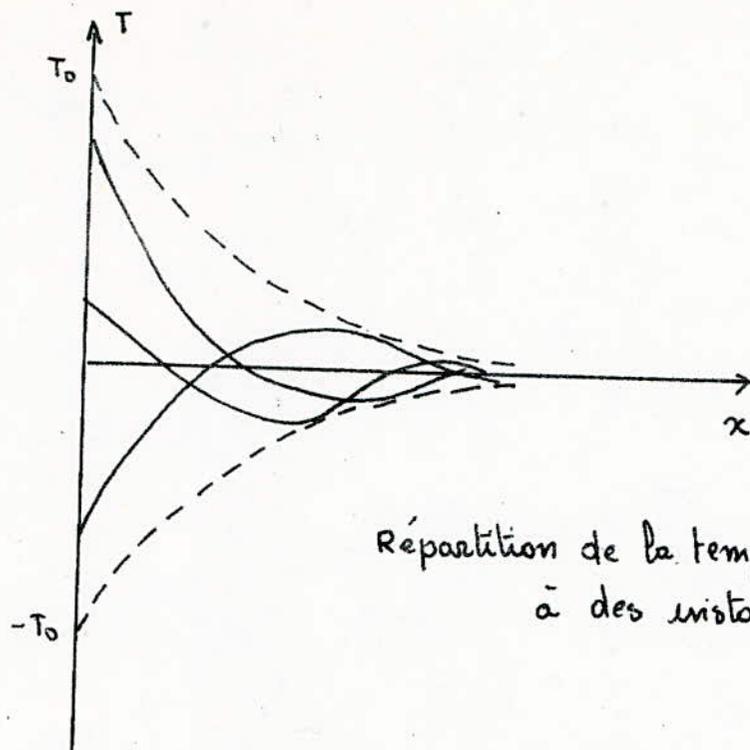
$$\frac{d}{dx} e^{-\alpha x} = -\alpha e^{-\alpha x}$$

Le coefficient  $\alpha$  impose l'amortissement. Ce dernier étant fonction de l'inertie thermique  $P$  (expression 6), on tire la première constatation :

Plus l'inertie thermique  $P$  est élevée, plus l'amortissement des ondes en profondeur est rapide



Repartition de la temperature dans le temps pour une profondeur  $x_0$



Répartition de la température en profondeur  
à des instants fixes.

### II-3/ - Calcul de $\phi(t)$ théorique.

Soit un élément de sol ayant une inertie thermique  $P$ ,  
et où la température de surface est donnée par :

$$T_s(t) = T(0, t) = T_0 \cos \omega t$$

Ces variations de températures sont gouvernées par le flux total vers  
le sol  $\phi(t)$  par la loi (3) :

$$-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi(t)$$

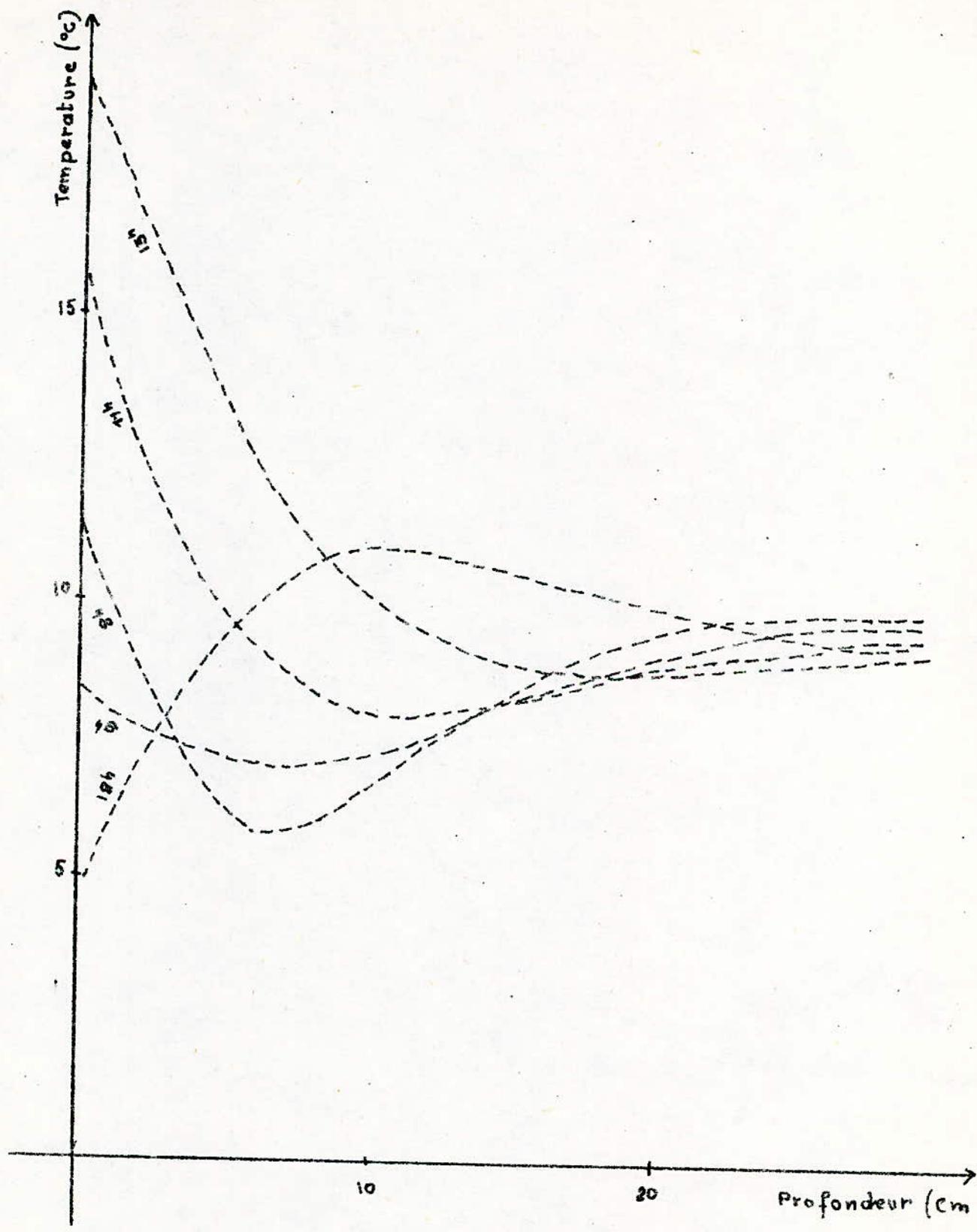
$$T(x, t) = T_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \alpha x)$$

dérivons par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\alpha T_0 e^{-\alpha x} [\cos(\omega t - \alpha x) - \sin(\omega t - \alpha x)]$$

$$-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha k T_0 [\cos \omega t - \sin \omega t]$$

sachant que  $\alpha = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{\omega}{2}}$



Exemples de répartition de la température en profondeur à des instants fixes.

$$\phi(t) = -k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = P \frac{\omega}{2} T_0 (\cos \omega t - \sin \omega t)$$

En appliquant les relations trigonométriques on peut faire les transformations suivantes :

$$\phi(t) = P \frac{\omega}{2} T_0 [\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) - \sin \omega t] = P \sqrt{\omega} T_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

On obtient ainsi

$$\boxed{\phi(t) = P \sqrt{\omega} T_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})} \quad (12)$$

Remarques :

- 1)- A partir de l'expression (12) on conclut que  $T_s(t)$  suit les variations de  $\phi(t)$  avec un retard de phase de  $\frac{\pi}{4}$
- 2)- La relation entre les 2 amplitudes  $\phi_0$  et  $T_0$  est imposée par l'inertie thermique  $P$  :  $\phi_0 = P \cdot \sqrt{\omega} \cdot T_0$  (13)

### III - 4 / - CALCUL DE L'INERTIE THERMIQUE CONNAISSANT $T_s(t)$ et $\phi(t)$

De l'expression (12) on tire facilement :

$$\boxed{P = \frac{\phi(t)}{\sqrt{\omega} T_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})}} \quad (14)$$

L'inconvénient ici est  $P$ , dépend de  $t$ . Pour déterminer  $P$  il faut choisir l'instant où les erreurs sur  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$  sont minimales. Cet instant pourra être déterminé expérimentalement.

Néanmoins il existe un moyen simple d'éliminer  $t$  en utilisant la remarque (2). c'est à dire :  $\phi_0 = P \sqrt{\omega} T_0$

d'où :

$$P = \frac{\phi_0}{\sqrt{w} T_0} \quad (15)$$

En comparaison avec la formule énoncée par P.C. Price en 1977, on peut faire à partir de (15) la transformation suivante:

$$P = \frac{\phi_0}{\sqrt{w} T_0} = \frac{\phi_0}{\sqrt{w} \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2}} = \frac{2 \phi_0}{\sqrt{w} (T_{\max} - T_{\min})}$$

$$P = \frac{2 \phi_0}{\sqrt{w} (T_{\max} - T_{\min})} \quad (16)$$

Le problème revient donc à :

- 1) - Mesurer le flux total maximum pendant la journée.
- 2) - Relever les températures de surfaces extrêmes ( $T_{\max}$  et  $T_{\min}$ ) pendant une journée.

calcul de l'erreur commise sur P à partir de ces trois mesures.

$$\log P = \log 2 + \log \phi_0 - \log \sqrt{w} - \log (T_{\max} - T_{\min})$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\phi_0}{\phi_0} - \frac{dT_{\max}}{T_{\max} - T_{\min}} + \frac{dT_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}$$

$$\longrightarrow \left\{ \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta \phi_0}{\phi_0} + \frac{\Delta T_{\max}}{T_{\max}} \left( \frac{T_{\max}}{T_{\max} - T_{\min}} \right) + \frac{\Delta T_{\min}}{T_{\min}} \left( \frac{T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \right) \right.$$

CH II    III - ETUDE D'UN MODELE BASE SUR LA DECOMPOSITION  
EN SERIE DE FOURIER DE  $\phi(t)$  ET  $T_s(t)$

III-1/- ENONCE DU PROBLEME.

$$k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = C_v \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$a) - T(0,t) = T_0(t) \quad (2)$$

$$b) - -k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi(t) \quad (3)$$

III-2/- DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER DE  $T_s(t)$  ET  $\phi(t)$ .

Pour la décomposition en série de Fourier de  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$  on prend un dispositif électronique (Chapitre III). Nous donnons ici les différentes formes des séries de Fourier que peuvent avoir  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$  en se basant sur les rappels donnés en annexe.

III-2-1/ Décomposition en série de Fourier de  $T_s(t)$ .

$$\begin{aligned} T_s(t) &= T_{s0} + \sum_{q=1}^{\infty} (T_{sq}' \cos q\omega t + T_{sq}'' \sin q\omega t) \\ &= T_{s0} + \sum_{q=1}^{\infty} |T_{sq}| \cos(q\omega t - \varphi_{T_{sq}}) \\ &= T_{s0} + \sum_{q=1}^{\infty} (T_{sq}' e^{iq\omega t} + T_{sq}'' e^{-iq\omega t}) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} T_{sq} e^{iq\omega t} \end{aligned}$$

avec :  $T_{sq}'$  et  $T_{sq}''$  : Les coefficients de Fourier de  $T_s(t)$ .

$$|T_{sq}| = \sqrt{(T_{sq}')^2 + (T_{sq}'')^2}$$

$$T_{sq} = \frac{1}{2} (T_{sq}' - i T_{sq}'')$$

$$T_{s-q} = T_{s-q}^* = \frac{1}{2} (T_{s-q}^1 + i T_{s-q}^2)$$

$$\varphi_{T_{s-q}} = \arctg \frac{T_{s-q}^2}{T_{s-q}^1}$$

### III - 2 - 2 / - Décomposition en série de Fourier de $\phi(t)$ .

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_0 + \sum_{q=1}^{\infty} (\phi_q^1 \cos q\omega t + \phi_q^2 \sin q\omega t) \\ &= \phi_0 + \sum_{q=1}^{\infty} |\phi_q| \cos(q\omega t + \varphi_{\phi_q}) \\ &= \phi_0 + \sum_{q=1}^{\infty} (\phi_q e^{iq\omega t} + \phi_{-q} e^{-iq\omega t}) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi_q e^{iq\omega t} \end{aligned}$$

avec:  $\phi_q^1$  et  $\phi_q^2$ : les coefficients de Fourier de  $\phi(t)$   
 $\phi_0$ : Valeur moyenne de  $\phi(t)$

$$|\phi_q| = \sqrt{(\phi_q^1)^2 + (\phi_q^2)^2}$$

$$\phi_q = \frac{1}{2} (\phi_q^1 - i \phi_q^2)$$

$$\phi_{-q} = \phi_q^* = \frac{1}{2} (\phi_q^1 + i \phi_q^2)$$

$$\varphi_{\phi_q} = \arctg \frac{\phi_q^1}{\phi_q^2}$$

### III - RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR.

$$k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = c_v \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

Vue les hypothèses précédentes, il est clair que la solution cherchée sera sous forme de série de Fourier, qui sera dans un premier temps écrite sous la forme suivante:

$$T(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_q(x) e^{iq\omega t} \quad (4)$$

ou  $T_q(x,t) = T_q(x) e^{iq\omega t}$  est la  $q^{\text{ème}}$  composante de  $T(x,t)$ .

La dérivée de l'expression (4) par rapport au temps donne :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i q \omega T_q(x) e^{i q \omega t} \quad (5)$$

Le problème revient donc à résoudre  $q$  équations de la forme :

$$\frac{dT_q^2(x)}{dx^2} = \frac{i q \omega C_v}{k} T_q(x)$$

$$\text{on pose } \alpha_q^2 = \frac{i q \omega C_v}{k}$$

La nouvelle équation à résoudre sera donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_q^2(x)}{dx^2} - \alpha_q^2 T_q(x) = 0 \quad (6) \end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites

$$T_q(0) = T_{sq} \quad (7)$$

$$-k \frac{dT_q(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \phi_q \quad (8)$$

La solution de ce nouveau problème, représentera la  $q^{\text{ième}}$  composante de la série de Fourier de  $T(x,t)$

L'équation caractéristique de (6) est :

$$r^2 - \alpha_q^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \alpha_q \\ r_2 = -\alpha_q \end{array} \right.$$

La solution de l'équation (6) est donc de la forme :

$$T_q(x) = A_q e^{\alpha_q x} + B_q e^{-\alpha_q x} \quad (9)$$

L'expérience montre que les variations de la température quand  $x \rightarrow \infty$  deviennent insensibles aux variations journalières de  $\phi(t)$ . Le premier terme de l'expression (9) n'a pas de sens physique pour notre problème. La solution cherchée sera donc :

$$T_q(x) = B_q e^{-\alpha_q x} \quad (10)$$

L'expression (4') s'écrit donc

$$T_q(x,t) = B_q e^{-\alpha'_q x} e^{i q \omega t} \quad (11)$$

L'expression (4) sera alors :

$$T(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_p e^{-\alpha'_p x} e^{i p \omega t} \quad (12)$$

1<sup>er</sup> cas: si  $q > 0$  on peut facilement montrer que  $\sqrt{i q} = \sqrt{q/2} (1+i)$

$$\text{Ce qui donne: } \alpha'_q = \sqrt{i q} \sqrt{\frac{c_v \omega}{k}} = (1+i) \sqrt{\frac{q \omega c_v}{2k}} = (1+i) \frac{P}{k} \sqrt{\frac{q \omega}{2}} = (1+i) \alpha_q$$

on rappelle que l'inertie  $P$  est donnée par:  $P = \sqrt{k c_v}$

2<sup>em</sup> cas: si  $q < 0$  on peut faire la transformation suivante:

$q \longrightarrow -q$  avec  $q > 0$   
d'où l'on peut déduire:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{i q} \\ q < 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-i q} \\ q > 0 \end{array} \right.$$

on peut montrer que:  $\sqrt{-i q} = \sqrt{q/2} (1-i)$

$$\text{d'où: } p \alpha'_p = \sqrt{-i p} \sqrt{\frac{c_v \omega}{k}} = (1-i) \sqrt{\frac{p \omega c_v}{2k}} = (1-i) \frac{P}{k} \sqrt{\frac{p \omega}{2}} = (1-i) \alpha_p$$

$$\text{avec: } \boxed{\alpha_q = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{q \omega}{2}}} \quad (13)$$

L'expression (12) pourra donc s'écrire :

$$T(x,t) = T_0(x) + \sum_{p > 0} ( B_p e^{-(1+i)\alpha_q x} e^{i q \omega t} + B_p^- e^{-(1-i)\alpha_q x} e^{-i q \omega t} )$$

d'où

$$T(x,t) = T_0(x) + \sum_{p > 0} B_p e^{-\alpha_q x} \cdot e^{i(q\omega t - \alpha_q x)} + B_p^- e^{-\alpha_q x} \cdot e^{-i(q\omega t - \alpha_q x)}$$

(14)

La solution de l'équation de la chaleur (1) est obtenue en prenant la partie réelle de (14) :

$$T(x,t) = T_0(x) + \operatorname{Re} \left[ \sum_{q>0} (B_{q^+} e^{-dqx} e^{i(q\omega t - dqx)} + B_{q^-} e^{-dqx} e^{-i(q\omega t - dqx)}) \right] \quad (15)$$

Appliquons la condition aux limites (2) donnée par :

$$T(0,t) = T_s(t) = T_{s0} + \operatorname{Re} \left[ \sum_{q>0} (T_{sq^+} e^{iq\omega t} + T_{sq^-} e^{-iq\omega t}) \right] \quad (16)$$

D'autre part, en  $x=0$  l'expression (15) s'écrit :

$$T(0,t) = T_0(0) + \operatorname{Re} \left[ \sum_{q>0} (B_{q^+} e^{iq\omega t} + B_{q^-} e^{-iq\omega t}) \right] \quad (17)$$

Par identification de (16) et (17) on obtient :

$$B_{q^+} = T_{sq^+} \quad \text{et} \quad B_{q^-} = T_{sq^-}$$

L'expression (15) devient alors :

$$T(x,t) = T_0(x) + \operatorname{Re} \left[ \sum_{q>0} (T_{sq^+} e^{-dqx} e^{i(q\omega t - dqx)} + T_{sq^-} e^{-dqx} e^{-i(q\omega t - dqx)}) \right] \quad (18)$$

On rappelle que  $T_{sq^+}$  et  $T_{sq^-}$  sont conjugués et complexes.

En se basant sur les différentes formes de la décomposition en série de Fourier d'une fonction, on peut écrire la solution finale de la répartition de la température en profondeur et en temps sous les 2 formes suivantes :

$$T(x,t) = T_0(x) + \sum_{q>0} \left[ T_{sq^+} e^{-dqx} \cos(q\omega t - dqx) + T_{sq^-} e^{-dqx} \sin(q\omega t - dqx) \right] \quad (19)$$

ou bien :

$$T(x,t) = T_0(x) + \sum 2|T_{sq}| e^{-dqx} \cos(q\omega t - dqx - \varphi_{T_{sq}}) \quad (20)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{sq}^1 \text{ et } T_{sq}^2 : \text{ les coefficients de Fourier de } T_s(t) \\ |T_{sq}| = \sqrt{(T_{sq}^1)^2 + (T_{sq}^2)^2} \\ \varphi_{T_{sq}} = \arctg \frac{T_{sq}^2}{T_{sq}^1} \\ d_q = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{q w}{2}} \end{array} \right.$$

### Calcul de $T_0(x)$

$T_0(x)$  est indépendant du temps

$$\frac{dT_0(x)}{dt} = 0$$

l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{d^2 T_0(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{d'où la solution} \quad T_0(x) = Ax + B$$

En appliquant les conditions aux limites :

a) en  $x=0$       $T_0(0) = T_{s0} \longrightarrow T_0(x) = Ax + T_{s0}$

b) en  $x=0$       $-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = \phi_0 \longrightarrow T_0(x) = -\frac{\phi_0}{k} x + T_{s0}$

$$\boxed{T_0(x) = -\frac{\phi_0}{k} x + T_{s0}} \quad (21)$$

Le terme  $T_0(x)$  représente la température moyenne journalière à une profondeur  $x$ .

La température moyenne est donc indépendante de  $P$ . (inertie thermique)  
Celle dernière n'intervient donc qu'au niveau des variations (c'est à dire des harmoniques).

Remarque :

Si l'on observe par l'intermédiaire de l'expression (19), on voit que toutes les remarques faites au niveau du 1<sup>er</sup> modèle sont valables pour chaque terme de la série de Fourier donnée par :

$$T_q(x,t) = |T_{sq}| e^{-\alpha_q x} \cos(\omega t - \alpha_q x - \varphi_{Tsq}) \quad (20)$$

1) - Pour une profondeur donnée  $T_q(x,t)$  est une sinusoïde d'amplitude  $|T_{sq}| e^{-\alpha_q x}$  et de phase  $-(\alpha_q x + \varphi_{Tsq})$ .

2) - L'amplitude et la phase de chaque terme  $T_q(x,t)$  sont fonction de la profondeur  $x$ . L'onde qui représente chaque harmonique est amortie au fur et à mesure que l'on descend en profondeur. L'amplitude de ces oscillations décroît exponentiellement. Le terme  $e^{-\alpha_q x}$  constitue une enveloppe dont la pente est donnée par :

$$\frac{d}{dx} e^{-\alpha_q x} = -\alpha_q e^{-\alpha_q x}$$

$\alpha_q$  impose l'amortissement de chaque harmonique. Ce dernier étant fonction de l'inertie thermique  $P$ .

IV. CALCUL DE  $\phi(t)$  THEORIQUE.

Soit un élément de sol ayant une inertie thermique  $P$ , et dont dont la température de surface est  $T_s(t)$ . Les variations de cette dernière sont gouvernées par le flux total vers le sol par la loi du bilan énergétique :

$$-k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi(t) \quad (3)$$

La répartition de la température donnée par (18) et (19) sous forme de série de Fourier vérifie : la loi de convergence, on peut donc dériver terme à terme.

Le  $q^{\text{ème}}$  terme de la série est donné par :

$$T_q(x,t) = |T_{sq}| e^{-\alpha_q x} \cos(q\omega t - \alpha_q x - \phi_{Tsq}) \quad (20)$$

La dérivée de l'expression (20) par rapport à  $x$  donne :

$$\frac{\partial T_q(x,t)}{\partial x} = -\alpha_q |T_{sq}| e^{-\alpha_q x} [\cos(q\omega t - \alpha_q x - \phi_{Tsq}) - \sin(q\omega t - \alpha_q x - \phi_{Tsq})] \quad (21)$$

En  $x=0$ , l'expression (21) donne :

$$\frac{\partial T_q(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\alpha_q |T_{sq}| [\cos(q\omega t - \phi_{Tsq}) - \sin(q\omega t - \phi_{Tsq})] \quad (22)$$

En utilisant les propriétés trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

on obtient :

$$\frac{\partial T_q(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\alpha_q |T_{sq}| \sqrt{2} \cos(q\omega t - \phi_{Tsq} + \frac{\pi}{4}) \quad (23)$$

De la condition (3) on peut conclure :

$$-k \frac{\partial T_q(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi_q \quad (24)$$

d'où :

$$\phi_q = k \sqrt{2} \alpha_q |T_{sq}| \cos(q\omega t - \phi_{Tsq} + \frac{\pi}{4}) \quad (25)$$

sachant que  $\alpha_q = \frac{P}{k} \sqrt{\frac{q\omega}{2}}$

La  $q^{\text{ème}}$  composante de  $\phi(t)$  sera donc :

$$\boxed{\phi_q = P \sqrt{q\omega} |T_{sq}| \cos(q\omega t - \phi_{Tsq} + \frac{\pi}{4})} \quad (26)$$

d'où l'on déduit la valeur théorique de  $\phi(t)$  en fonction de  $P$  et  $T_s(t)$

$$\phi(t) = \phi_0 + \sum_{q>0} P \sqrt{q\omega} |T_{sq}| \cos(q\omega t - \varphi_{Tsq} + \frac{\pi}{4}) \quad (27)$$

Si au départ on avait pris l'expression (18) au lieu de (19) le résultat finale serait le même mais sous la forme suivante :

$$\phi(t) = \phi_0 + \sum P \sqrt{\frac{q\omega}{2}} [(T_{sq}^+ + T_{sq}^-) \cos q\omega t + (T_{sq}^+ - T_{sq}^-) \sin q\omega t] \quad (28)$$

#### V - CALCUL DE P A PARTIR D'UNE MESURE DE $T_s(t)$ et $\phi(t)$ .

Il faut faire la différence entre le  $\phi(t)$  théorique et le  $\phi(t)$  mesuré, qui en réalité ne correspondent pas, vu les erreurs commises lors de la mesure.

L'expression de  $\phi(t)$  est donnée par :

$$\phi(t) = \phi_0 + \sum_{q>0} |\phi_q| \cos(q\omega t - \varphi_{\phi_q}) \quad (29)$$

Nous proposons ici un certain nombre de méthodes.

#### 1) Détermination de $P$ à partir de l'expression (26).

L'expression (26) donne :

$$P = \frac{\phi_q}{\sqrt{q\omega} |T_{sq}| \cos(q\omega t - \varphi_{Tsq} + \frac{\pi}{4})}$$

Sachant que  $\phi_q = |\phi_q| \cos(q\omega t - \varphi_{\phi_q})$

ce qui donne :

$$P = \frac{|\phi_q| \cos(q\omega t - \varphi_{\phi_q})}{\sqrt{q\omega} |T_{sq}| \cos(q\omega t - \varphi_{T_{sq}} + \frac{\pi}{4})} \quad (30)$$

Si on choisit l'instant où  $t = \frac{\varphi_{\phi_q}}{q\omega} \rightarrow \cos(q\omega t - \varphi_{\phi_q}) = 1$   
 l'expression (30) donne:

$$P = \frac{|\phi_q|}{\sqrt{q\omega} |T_{sq}| \cos(\varphi_{\phi_q} - \varphi_{T_{sq}} + \frac{\pi}{4})} \quad (31)$$

Cette méthode suppose toutes les harmoniques de (27) et (29) sont égales deux à deux. Ici, pour calculer P il suffit de connaître une seule harmonique (le fondamental ou autre)

Mais de fait que les mesures se font avec des erreurs et que l'on ne connaît pas l'harmonique qui donne le moins d'erreur, on propose pour cela de calculer P à partir des q premières harmoniques et prendre la moyenne.

On pose  $P_q$ : la valeur de P trouvée pour la q<sup>ième</sup> composante:

d'où :

$$P = \frac{\sum_{q=1}^q P_q}{q} \quad (32)$$

## 2/ Calcul de P à partir de l'expression (27) et (29)

Etant donné que P n'intervient pas dans le terme continue, on p et si l'on suppose les termes continus de  $\phi(t)$  mesure et  $\phi(t)$  calculé sont égaux. il nous restera donc à évaluer les parties variables et on obtient:

$$P \sum_{q=1}^q \sqrt{q\omega} |T_{sq}| \cos(q\omega t - \varphi_{T_{sq}} + \frac{\pi}{4}) = \sum_{q=1}^q |\phi_q| \cos(q\omega t - \varphi_{\phi_q})$$

d'où

$$P = \frac{\sum_1^q |\phi_q| \cos(q\omega t - \varphi_{\phi_q})}{\sum \sqrt{q\omega} |\tau_{s_q}| \cos(q\omega t - \varphi_{\tau_{s_q}} + \frac{\pi}{4})} \quad (53)$$

3/ calcul de P en utilisant l'égalité de Bessel Parseval

$\phi(t)$  théorique est donné par :  $\phi_t(t) = \phi_0 + \sum P\sqrt{q\omega} [(T'_{s_q} + T''_{s_q}) \cos q\omega t + (T'_{s_q} - T''_{s_q}) \sin q\omega t]$

$\phi(t)$  mesuré est donné par  $\phi_m(t) = \phi_0 + \sum (\phi'_q \sin q\omega t + \phi''_q \cos q\omega t)$

En appliquant la formule de Bessel-Parseval on obtient :

$$\begin{aligned} \|\phi_t\|^2 &= \phi_0^2 + \sum_1^q \frac{P^2 q\omega [(T'_{s_q} + T''_{s_q})^2 + (T'_{s_q} - T''_{s_q})^2]}{4} \\ &= \phi_0^2 + \sum_1^q \frac{P^2 q\omega [(T'_{s_q})^2 + (T''_{s_q})^2]}{2} \end{aligned} \quad 34$$

$$\|\phi_m\|^2 = \phi_0^2 + \sum_1^q \frac{(\phi'_q)^2 + (\phi''_q)^2}{2} \quad 35$$

En égalant les parties variables de 34 et 35 on obtien

$$P^2 = \frac{\sum_1^q [(\phi'_q)^2 + (\phi''_q)^2]}{\sum_1^q q\omega [(T'_{s_q})^2 + (T''_{s_q})^2]}$$

d'où

$$P = \sqrt{\frac{\sum_1^q [(\phi'_q)^2 + (\phi''_q)^2]}{\sum_1^q q\omega [(T'_{s_q})^2 + (T''_{s_q})^2]}} \quad 36$$

CH II III - ETUDE D'UN MODELE BASE SUR LA METHODE  
DES DIFFERENCES FINIES

III - 1/- ENONCE DU PROBLEME .

$$k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = C_r \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (1)$$

Les conditions aux limites sont données par :

a) -  $T(0,t) = T_s(t) \quad (2)$

b)  $-k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi(t) \quad (3)$

III - 2/- RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR .

Posons :  $\left. \begin{array}{l} x = i \Delta x \\ t = l \Delta t \end{array} \right\} (4)$

Le terme  $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$  sera approché par :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \longrightarrow \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} \quad (5)$$

En utilisant les relations (4) l'expression (5) devient :

$$\frac{T(i \Delta x, (l+1) \Delta t) - T(i \Delta x, l \Delta t)}{\Delta t} \quad (6)$$

L'expression (6) sera notée comme suit :

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \quad (7)$$

Le 2<sup>em</sup> membre de l'équation de la chaleur donne:

$$\left(\frac{k}{\rho}\right)^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \left(\frac{k_i}{\rho_i}\right)^2 \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2} \quad (2)$$

L'équation de la chaleur devient alors:

$$\frac{T_{i+1}^l - T_i^l}{\Delta t} = \left(\frac{k_i}{\rho_i}\right)^2 \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2} \quad (3)$$

d'où l'on tire  $\rho_i^l$

$$\rho_i^l = \sqrt{\left(\frac{k_i}{\Delta x}\right)^2 \Delta t \left[ \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{T_{i+1}^l - T_i^l} \right]} \quad 10$$

La condition aux limites (3) s'écrit:

$$-k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi^l \quad -k_i \frac{T_{i+1}^l - T_i^l}{\Delta x} \Big|_{x=0} = \phi^l \quad (4)$$

en  $x=0$  (11) devient:

$$-k_0^l \frac{T_1^l - T_0^l}{\Delta x} = \phi^l \quad (12)$$

Ce qui donne:

$$T_1^l = T_0^l - \frac{\phi^l \Delta x}{k_0^l} \quad (13)$$

Sachant qu'en  $x=0$  on a:  $T_0^l = T_s^l$  (température de surface)

En supposant le sol homogène  $\rightarrow k_i^l = k$

l'expression (13) donne:

$$T_1^l = T_s^l - \frac{\phi^l \Delta x}{k} \quad k = \frac{\Delta x \phi^l}{T_s^l - T_1^l} \quad (15)$$

En remplaçant  $k$  dans l'expression (10) on aura:

$$P_i^l = \frac{\phi^l}{T_s^l - T_i^l} \sqrt{\Delta t \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{T_i^{l+1} - T_i^l}} \quad (16)$$

On obtient une inertie thermique apparente dépendant du temps ( $l$ ) et de la profondeur ( $i$ ).

### b) - Schema implicite :

Si nous appliquons un schema implicite à l'équation (1) on obtient

$$T_i^{l+1} - T_i^l = \left( \frac{k_i^l}{\rho_i^l} \right)^2 \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{T_i^{l+1} - T_i^l} \quad (17)$$

La condition aux limites est la même que précédemment : c'est à dire :

$$k_i^l \frac{T_{i+1}^l - T_i^l}{\Delta x} \Big|_{x=0} = c^l \quad (12)$$

ce qui donne de la même manière

$$k = \frac{\Delta x \phi^l}{T_s^l - T_i^l}$$

En remplaçant dans l'équation (17) on obtient :

$$P_i^l = \frac{c^l}{T_s^l - T_i^l} \sqrt{\Delta t \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{T_i^{l+1} - T_i^l}} \quad (18)$$

Théoriquement les schémas explicite et implicite donne un même résultat. On utilise de préférence le schéma explicite pour sa simplicité.

CHAPITRE III

---

ANALYSEURS DE FOURIER

## I/- INTRODUCTION .

Tout phénomène physique peut en général être transformé en signal électrique . Les variations de ce dernier en fonction du temps peuvent être étudiées et enregistrées au moyen d'enregistreurs .

Dans beaucoup d'applications ce signal a besoin d'être observé en fréquence . La répartition d'un signal en fréquence est basée sur la décomposition de ce dernier en série de Fourier . En électronique cette opération porte le nom d'analyse spectrale ( ou analyse de Fourier

Il existe deux techniques d'analyse spectrale :

1)- Technique analogique : Elle est basée sur l'utilisation de moyens classiques qui sont les filtres électriques . Ces derniers sont accordés sur les fréquences désirées .

2)- Technique numérique : On utilise ici la transformée de Fourier discrète . Dans beaucoup de cas rencontrés en pratique , les courbes sont données soit sous forme de tableau ( lorsque la dépendance fonctionnelle est obtenue expérimentalement ) , soit par des courbes tracées par un appareil ( ces dernières n'ayant pas de forme mathématique précise ) . Dans tous ces cas cette technique est indispensable . La courbe est alors échantillonnée et numérisée avant l'application de la transformée de Fourier discrète . Les calculs des coefficients de Fourier se fait alors par des moyens de méthodes d'intégration approchées , soit par ordinateur soit par un analyseur électronique FFT ( transformée de Fourier rapide ) .

L'objet de ce chapitre est de faire une étude bibliographique des différents analyseurs de spectres en vue d'une réalisation d'un dispositif pour la décomposition en série de Fourier de  $\phi(t)$  et  $T_s(t)$  . Les derniers ayant une période très longue ( 24 heures ) il faudra prévoir un changement d'échelle des temps pour pouvoir être traités électroniquement .

## II-/- LES ANALYSEURS ANALOGIQUES DE SPECTRE .

### II-I/- Analyseurs à filtres multiples en parallele .

Ces analyseurs fournissent l'approche la plus simple et la plus intuitive de la décomposition spectrale des signaux . Ils sont constitués par des bancs de filtres en parallele ayant une bande passante très étroite . Chacun est étant accordé sur une fréquence différente (  $f_0$  ,  $2f_0$  ,  $3f_0$  : )

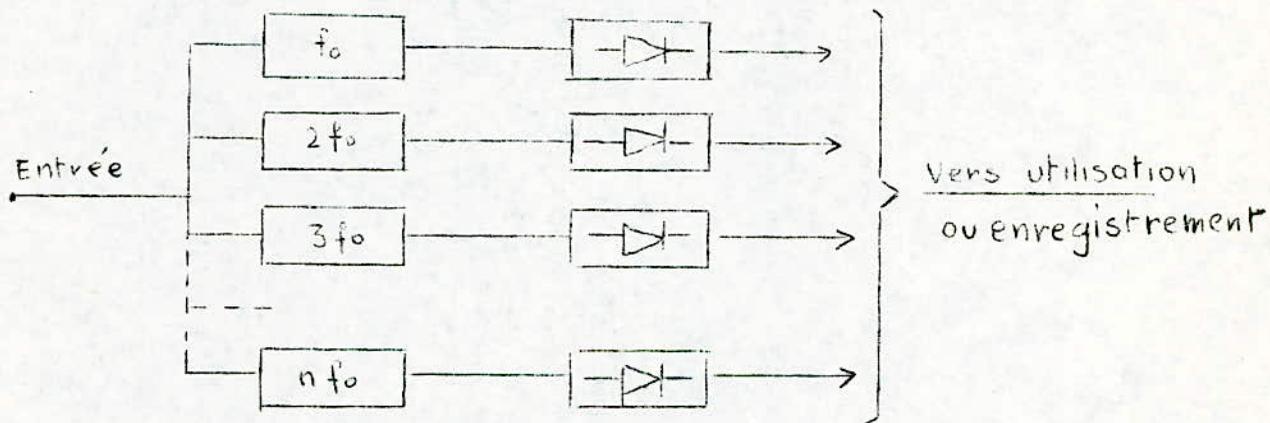


Fig (I) : Schéma sinoptique de principe d'un analyseur à filtres multiples . Chaque filtre est associé à un système de détection .

Avec ce montage on obtient rapidement la valeur de chaque harmonique (  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ) en mesurant le module de la tension de sortie de chaque filtre suivant une échelle de fréquence repérée par chacune des fréquences centrales correspondante .

Malgré leur simplicité ces appareils comportent beaucoup d'inconvénients :

- L'analyse harmonique nécessite une grande sélectivité ( il y a de grandes difficultés de réaliser des filtres électriques à coefficient de surtension élevé ) .

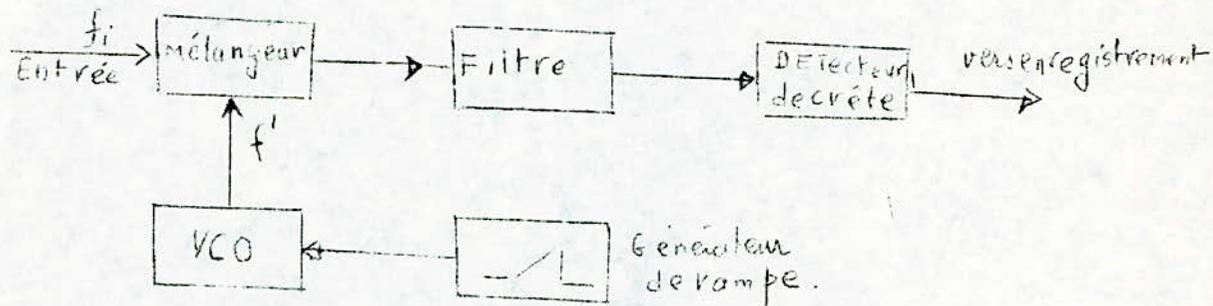
- La bande effective est généralement différente de la bande idéale .
- la réponse en amplitude des filtres n'est pas toujours parfaitement rectangulaire ) .

- Difficultés de réalisation en très basse fréquence .

## II-2/- Analyseurs à balayage de fréquence .

Un moyen de réduire énormément les contraintes technologiques consiste à soumettre le signal temporel d'entrée à un seul et unique filtre à bande très étroite .

Un tel analyseur est basé sur le principe d'un système hétérodyne . Le filtre utilisé est accordé à une fréquence fixe . L'exploration spectrale est réalisée à partir d'un battement avec un oscillateur local , dont on fait varier lentement la fréquence .



Fig(2) : Schéma synoptique de base d'un analyseur à balayage de fréquence .

### Fonctionnement:

Le VCO ( Convertisseur tension fréquence ) jouant le rôle d'oscillateur local , délivre à sa sortie un signal de fréquence variable  $f'$  . Cette dernière est commandée par un générateur de dents de scie .

Les deux signaux ( celui d'entrée dont on veut analyser et celui délivré par le VCO ) sont appliqués aux entrées d'un mélangeur . Le battement des deux fréquences est recueilli à la sortie du mélangeur .

Le filtre accordé à une fréquence fixe  $F$  , sera passant dès que la condition suivante est réalisée :  $f + f' = F$   
 Par exemple : à l'instant où la fréquence  $f'$  correspondra à  $f_2 + f' = F$  (  $f_2$  étant l'harmonique d'ordre deux du signal à analyser ) on observe un à l'entrée du détecteur qui sera fonction de l'amplitude de l'harmonique 2.

Avec la variation de la tension délivrée par le générateur on observe ainsi un défilement des harmoniques à l'entrée du détecteur .

### Inconvénients :

- La durée du balayage pour l'acquisition précise des données est beaucoup trop longue pour être utilisable lorsque la résolution nécessite une grande rapidité. La vitesse maximale de balayage correspond à un déplacement de la fréquence égal à la largeur de la bande du filtre pendant le temps d'établissement du signal dans le filtre ( $4/f$  en seconde). La vitesse la plus rapide est ainsi de  $\frac{f^2}{4}$  lorsque l'erreur admise est de 1%.

- La linéarité est insuffisante lorsqu'on veut couvrir une gamme de fréquence importante.

- La stabilité de l'étalonnage en fréquence est difficile à maintenir. Avec cette technique le signal doit rester sensiblement constant pendant la durée du balayage.

### Remarque :

Les filtres utilisés qui doivent être de très haute qualité sont généralement à quartz dont la fréquence de résonance est relativement élevée (de l'ordre du Mhz). Pour analyser des signaux de fréquence basse, on réalise une compression de temps.

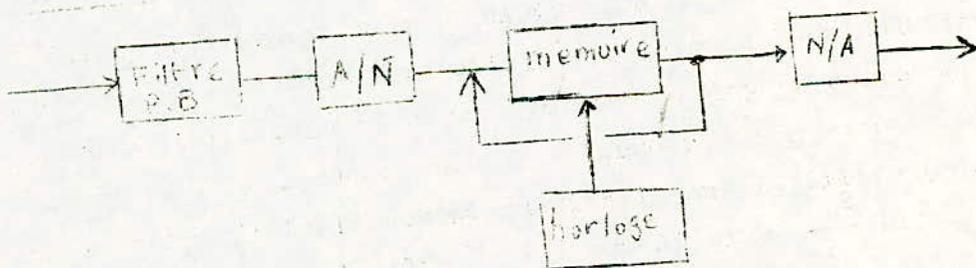


Fig (3) : Schéma synoptique de base d'un compresseur de temps.

L'élément essentiel du compresseur de temps est la ligne à mémoire circulante ou registre à décalage numérique qui raccourcit la durée du signal. Le signal d'entrée est échantillonné  $N$  fois par la séquence élémentaire. Les  $N$  échantillons sont convertis en mots binaires et introduits dans le registre. Les données mises en mémoire sont restituées à une vitesse beaucoup plus élevée.

### III/- LES ANALYSEURS DE SPECTRE NUMERIQUES . . .

#### III-I/- Analyse de Fourier numérique .

Les signaux que l'on veut étudier, qui sont généralement analogiques et continus dans le temps ( cas de  $T_s(t)$  et  $\phi(t)$  ) doivent être échantillonnés en des points discrets . Chaque échantillon est ensuite numérisé .

La figure (4) montre le processus de numérisation d'un signal . Le signal analogique (a) est isolé dans le temps par une fenêtre rectangulaire d'amplitude unité (b) . L'échantillonnage et la numérisation peuvent être représentés comme une suite d'impulsions infiniment étroites . Le signal numérique <sup>obtenu</sup> est représenté en (d) . A chaque niveau on fait correspondre un mot binaire .

#### Transformation de Fourier discrète .

On pose  $t$  : L'intervalle de temps entre deux échantillons .

$N$  : Le nombre total d'échantillons par fenêtre .

Le signal numérisé peut être transformé dans le domaine des fréquences en appliquant l'intégral de Fourier sur l'intervalle défini par la fenêtre au produit du signal par le train d'impulsions .

On procède aux transformations suivantes :

$$\begin{array}{l} t \longrightarrow n \Delta t \qquad \omega \longrightarrow n \Delta f \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \sum_{0}^{N} \qquad dt \longrightarrow \Delta t \end{array}$$

La transformée de Fourier discrète (FTD)

$$X(k \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(n \Delta t) e^{-i 2 \pi k \Delta f n \Delta t} dt$$

$$\text{En simplifiant l'écriture par : } X(n) = X(n \Delta t)$$

$$X(k) = X(k \Delta t)$$

$$\Delta f = 1/N \Delta t = 1/N$$

on aura :

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i 2 \pi n k / N}$$

Pour  $k = 0$  on obtient la composante continue .

$$X(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

En appliquant les formules d'Euler on peut obtenir directement la partie réelle et imaginaire de la transformée de Fourier discrète de  $x(t)$  :

$$\text{Re}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos 2\pi kn/N$$

$$\text{Im}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin 2\pi kn/N$$

Le nombre d'opérations nécessaires pour calculer toutes les valeurs des parties réelles et imaginaires est de  $N^2$ .

### Transformée de Fourier rapide : (FFT)

On appelle transformée de Fourier rapide (FFT) tous les algorithmes de calcul de la transformée de Fourier discrète qui permettent de réduire le nombre d'opérations cité précédemment.

### Effet de l'échantillonnage ;

Lorsqu'on étudie la composition en fréquence d'un signal, la gamme des fréquences est comprise entre 0 Hz et une fréquence max dite fréquence de Nyquist et donnée par :

$$F_N = 1/2 A t$$

En d'autres termes, on ne peut pas observer dans un signal  $\tilde{0}$  une fréquence supérieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

De façon pratique, pour étudier un signal, il faut tout d'abord définir la fréquence d'échantillonnage suivant la bande que l'on veut étudier.

En général on considère qu'une fréquence d'échantillonnage de 4 à 5 fois supérieure à  $F_N$  donne de bons résultats.

Il faut ensuite définir le nombre de points qui doivent être numérisés suivant la résolution qu'on veut obtenir :

$$N = \frac{2 F_N}{f}$$

### Repliement de spectre ;

Le phénomène de repliement de spectre apparaît lorsqu'il existe dans le signal à étudier une fréquence supérieure à la fréquence de Nyquist.

Pour éviter ce phénomène , il suffit de filtrer le signal analogique par un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est égale à la fréquence de Nyquist .

### Effet de fenêtre .

Nous avons vu précédemment que le processus de numérisation d'un signal constituait tout d'abord en la multiplication d'un signal analogique continu par une fenêtre qui délimite une portion de ce signal. Lorsque le signal est échantillonné , on obtient dans le domaine des fréquences des points espacés de  $1/T$  ( ou  $T$  est la période de la fenêtre) S'il y a un nombre entier de périodes dans la fenêtre la transformée de Fourier donnera la bonne position en fréquence et la bonne amplitude du signal . Si par contre le nombre de périodes n'est pas entier , à l'intérieur de la fenêtre , la transformée de Fourier donnera plusieurs raies de part et d'autre de la fréquence du signal et l'amplitude du max n'aura pas la valeur attendue .

### III-2/- Analyseurs de spectre numérique .

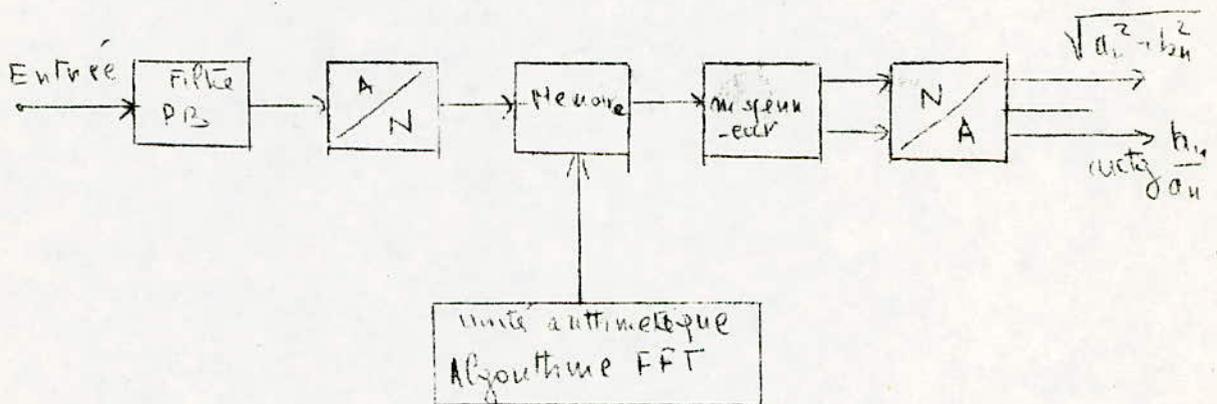


Fig (4) : Schéma sinoptique de base d'un analyseur numérique de spectre .

Le signal d'entrée analogique est borné à l'entrée par un filtre passe bas pour éviter les erreurs de repliement de spectre . Le signal filtré est alors échantillonné et converti en valeurs numériques. Les données numériques sont mises en mémoire où une place est réservée à chacun de  $N$  échantillons recueillis pendant l'ouverture de la fenêtre temporelle . La transformée de Fourier du signal  $X(k)$  est obtenue sur les  $N$  échantillons en effectuant la somme suivante :

$$S(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left( \cos \frac{2\pi mk}{N} - i \sin \frac{2\pi mk}{N} \right)$$

avec  $m = 1, 2, \dots, N-1$

Ce calcul est obtenu à partir d'une unité arithmétique qui possède des tables de sinus et de cosinus pour tous les angles compris entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ . Peu après qu'une donnée ait été stockée dans la mémoire, ces valeurs trigonométriques sont appelées et multipliées avec elle chaque valeur de  $m$  : on obtient ainsi les parties réelles et imaginaires de la transformée. L'unité arithmétique FFT applique l'algorithme de calcul FFT et s'appuie sur les multiplicateurs, un additionneur et une mémoire pour les fonctions  $X(k)$  et  $S(m)$ .

CONCLUSION :

Dans ce projet a été posée la question de l'inertie thermique du sol , qui est resté jusqu'à un terme vague . Les modèles établis ne sont qu'un debut pour une étude effective de l'inertie thermique du sol , qui reste la caractéristique essentielle du sol pouvant être utilisée dans plusieurs domaines d'application .

Dans ce travail nous n'avons malheureusement pas pu avancer plus à cause du manque de données experimentales pour juger l'efficacité des modèles proposés et éventuellement les adapter .

Ce travail est donc loin d'être terminé , du fait que le but lointain de ce projet est la réalisation d'un dispositif complet qui permettra d'obtenir des images optiques d'un terrain donné en fonction de son inertie thermique .

Pour terminer , nous souhaitons que la télédétection qui peut ouvrir plusieurs horizons et qui est actuellement ignorée en Algérie puisse trouver un intérêt plus grand dans l'avenir .

.....

ANNEXE.LA TRANSFORMÉE DE FOURIER.I/ Transformée de Fourier d'une fonction périodique.

Considérons une fonction  $x(t)$  périodique qui satisfait les conditions de Dirichlet:

-  $x(t)$  a des discontinuités dont le nombre doit être fini au cours d'une période

- La fonction doit contenir un nombre fini de max et de min pendant une période.

- La fonction doit avoir une intégrale finie sur la période soit :

$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty$$

La fonction  $x(t)$  peut alors s'écrire sous forme de série de Fourier.

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{a_0}{2} \\ a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega t dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega t dt \end{array} \right.$$

Série de Fourier sous forme complexe.

En utilisant les formules d'Euler donnée par :

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$

Le terme générale de la série de Fourier peut s'écrire :

$$u_n(t) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-in\omega t}$$

posons:  $C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$        $C_{-n} = C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

La série de Fourier peut s'écrire :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{in\omega t} + C_{-n} e^{-in\omega t}) \quad (2)$$

En posant  $C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$

la série peut alors s'écrire :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega t} \quad (3)$$

on démontre que

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega t} = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \cos(n\omega t - \theta_n)$$

ou bien :

$$x(t) = A_0 + \sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega t - \theta_n)$$

avec  $\theta_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$ .

## II/- Intégrale de Fourier d'une fonction non périodique.

Considérons une fonction <sup>non</sup> périodique qui satisfait les conditions de Dirichlet :

- $x(t)$  ne doit avoir qu'un nombre fini de discontinuité dans l'intervalle  $-\infty < t < +\infty$
- $x(t)$  doit avoir un nombre fini de max et de min dans l'intervalle  $-\infty < t < +\infty$
- l'intégrale de la courbe doit être finie.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

La représentation spectrale d'une telle courbe sera:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i 2\pi f t} dt$$

### III/- Égalité de Parseval - Parseval

on démontre que pour une fonction périodique on a:

$$\|x\|^2 = \int_T x^2(t) dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

### IV/- Notion de spectre d'amplitude et de phase.

On définit le spectre d'amplitude  $X(nf_0)$  qui est une grandeur complexe par:

$$X(nf_0) = a_n - i b_n$$

dont le module est:

$$|X(nf_0)| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Le spectre de phase est:

$$\varphi(nf_0) = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Le spectre d'une fonction périodique est donc représenté par des raies séparées sur les fréquences par  $f_0 = \frac{1}{T}$

### V/- Propriétés de la série de Fourier:

1)- La transformée de Fourier possède un inverse

## 2) - Changement d'échelle des temps.

soit la fonction  $x(t)$  dont la transformée de Fourier s'écrit :  $X(f)$

$$\text{si } x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow x(kt) \Leftrightarrow \frac{X(f/k)}{k}$$

si  $0 < k < 1$  : il s'agit d'une compression de temps

si  $k > 1$  : il s'agit d'une expansion.

## 3) - Translation de temps:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow \begin{cases} x(t-a) \Leftrightarrow e^{-i2\pi af} X(f) \\ x(t+a) \Leftrightarrow X(f) [\cos(2\pi fa) - i \sin(2\pi fa)] \end{cases}$$

## 4) - Dérivation

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow 2\pi i f X(f) \\ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \Leftrightarrow (2\pi i f)^n X(f) \end{cases}$$

70

## BIBLIOGRAPHIE

=====

- A.ABDELLACUI : Télédétection électromagnétique infrarouge  
( rapport scientifique )
- G.J.R.SOER : Earth observation from space - MAI 78 -  
( Problematique de la télédétection )
- E.HECHINGER : Contribution à l'interprétation de données de télédétection  
( Thèse de doctorat - juin 79 - )
- R.G.REEVES : Manual of remote sensing ( Volume I )
- S.GODOUNOV : Schema aux differences
- C.CHAUSSIN : Chaleur et thermodynamique ( Dunod )
- Y.ROCARD : Thermodynamique .( Masson )
- P.FLEURY : Chaleur thermodynamique état de la matière
- P.Thullier : Mathématiques ( analyse 3 )

Mecanisme de transfert d'énergie et de masse entre sol et atmosphère :  
( compte rendus de colloque national - edité par F.Beker )

Mesures ( revue )

Onde électrique ( revue )