REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE D'ALGER

U.S.T.A.

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Eléctricité

Ingéniorat d'état en électrotechique
ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

CONTROLE ET SIMULATION D'UNE COLONNE DE DISTILLATION

Proposé par:
Mr J.P. GAUTHIER

Etudié par :
Nouari MESSALI
Saïd BOUSSAID

Promotion Juin 1982

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE D'ALGER

U. S .T. A.

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Eléctricité

Ingéniorat d'état en électrotechique

PROJET DE FIN D'ETUDES

CONTROLE ET SIMULATION D'UNE COLONNE DE DISTILLATION

Proposé par:

Mr J.P. GAUTHIER

Etudié par :

Nouari MESSALI

Saïd BOUSSAID

Promotion Juin 1982

Dédicaces

I wigad yeţwarzen deg iles,
I wigad iţţwaqnen ɣef tideţ,
I tdukawm yeččuṛen ţ-ţifexsa,
I warrac g-gwassa, irgaƶen uzeka.

A la mémoire de ma grand-mere
qui restitua son âme avant
de goûter au fruit mûr de son
arbre.

Saïd

Je dedie ce modeste travail à :
- Ma grand-Mère
- A mon père qui fut mon premier guide
  sur le chemin de l'école.
- A ma mère,
- A mes frères et sœurs.

Youness

Remerciements

Nous tenons à exprimer ici notre profonde reconnaissance à Mr J.P. Gauthier notre promoteur, pour nous avoir, prodigué d'utiles conseils, mis à notre disposition une documentation complète et pour nous avoir fait bénéficier de ses connaissances qui nous ont permis de mener ce projet à sa fin.

Que tous ceux qui ont contribué à la mise en œuvre de ce polycopier, de si peu soit-il, trouvent ici l'expression de notre sincère gratitude.

Saïd Nouaris (Younes)

Sommaire

I. INTRODUCTION

Le point de depart de ce travail est constitué par le projet [1].

Dans ce projet le probleme suivant est traité :

- Un modele non lineaire d'une colonne de distillation binaire est proposée. Le probleme de la rejection des perturbations pouvant apparaitre sur l'alimentation de la colonne est ensuite posé, et resolu directment par les methodes proposées recemment par ISEDORI - KRENE et HIRSHON [6], [7] et [8].

Les resultats de ce travail sont les suivants :

- On a pu trouver la classe de toutes les commandes par retour d'etat non lineaire qui rejettent les perturbations dûes à x_F.
- On a mis en evidence le fait que, dans ce cas, l'approche par le systeme lineaire et les techniques lineaires posent un probleme, et est, d'un certain point de vue, plus difficile que l'approche non lineaire directe.

Au paragraphe II, on donne une representation du modèle proposé pour la colonne, suivi au paragraphe III de la condition de controlabilité des systemes non lineaires avec l'application au modèle proposé.

Au paragraphe IV on determine les commandes U1 et U2 positives, suivies au paragraphe V de la simulation avec application à un cas tout à fait arbitraire de colonne à distiller, enfin on donnera quelques conclusions au chapitre VI.

Notations utilisées

j : numéro du plateau

n : nombre de plateaux

α : volatilité relative du produit de tête par rapport au produit de fond (cas binaire)

x_j : concentration liquide du produit de tête dans le plateau j (cas binaire)

y_j : // vapeur ―――― au ―――― (――――)

M_j : coefficient d'équilibre liquide-vapeur du produit de tête au plateau j exprimé en fonction de α et x_j (――――)

x_F : concentration liquide d'alimentation (en produit de tête) (――――)

L_j : débit liquide molaire du plateau j [moles/T]

L_S : débit molaire de reflux du condenseur (liquide) [――――]

L_F : débit molaire liquide d'alimentation [――――]

L_B : débit liquide de soutirage du rebouilleur (molaire) [――――]

V_j : débit molaire vapeur du plateau j [――――]

H : retenue molaire (liquide) du plateau j [moles]

H_B : ―――――――― du rebouilleur [――――]

H_D : ―――――――― du condenseur [――――]

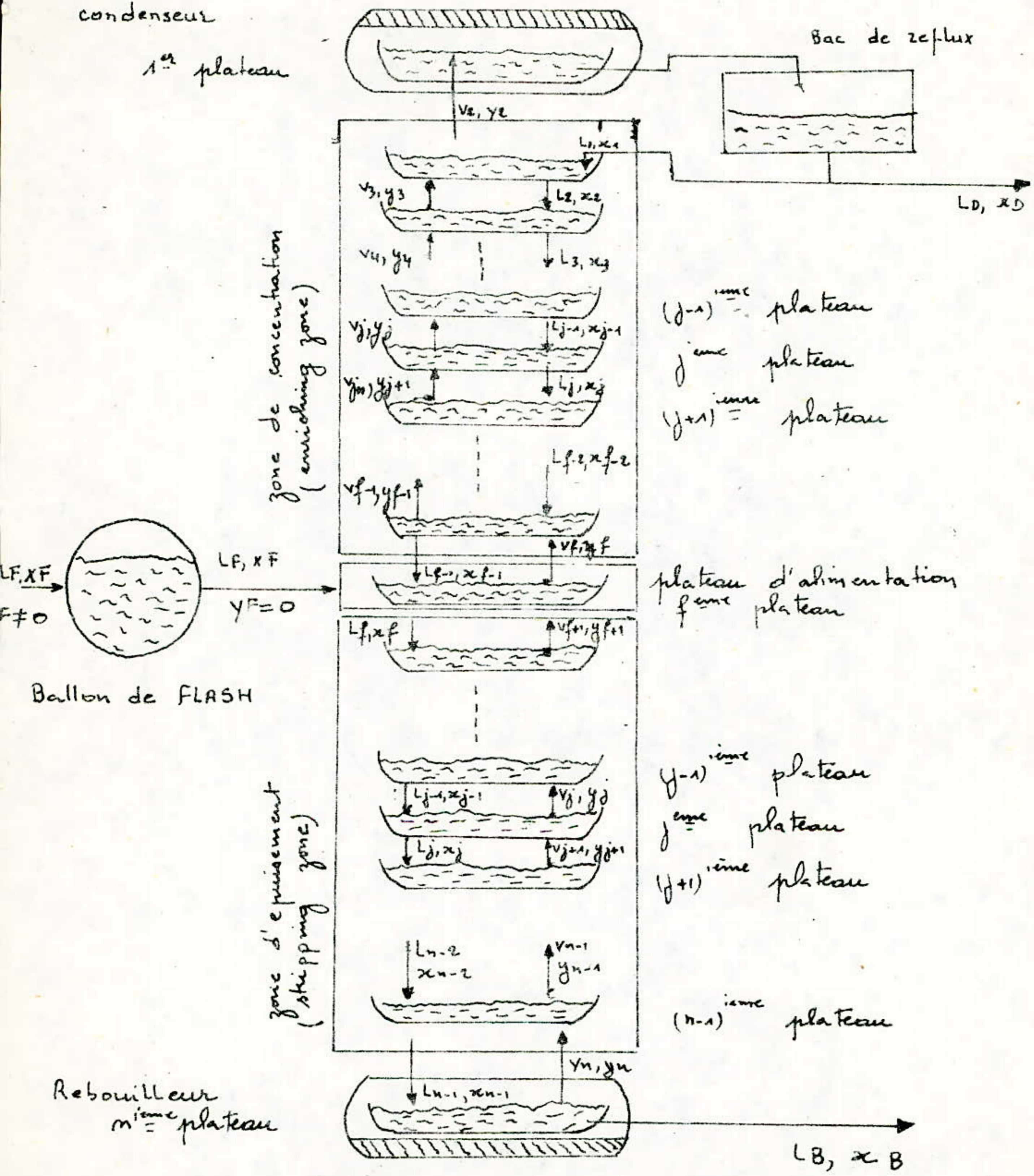

condenseur
1er plateau
Bac de reflux
V2, y2
L1, x1
V3, y3
L2, x2
LD, xD
V4, y4
L3, x3
zone de concentration
(enriching zone)
(j-1)ième plateau
Vj, yj
Lj-1, xj-1
jème plateau
Vj+1, yj+1
Lj, xj
(j+1)ième plateau
Lf-2, xf-2
Vf-1, yf-1
Vf, yf
LF, XF
F≠0
LF, xF
yF=0
Lf-1, xf-1
plateau d'alimentation
fème plateau
Ballon de FLASH
Lf, xf
Vf+1, yf+1
(j-1)ième plateau
Lj-1, xj-1
Vj, yj
jème plateau
Lj, xj
Vj+1, yj+1
(j+1)ième plateau
zone d'épuisement
(stripping zone)
Ln-2
xn-2
Vn-1
yn-1
(n-1)ième plateau
Vn, yn
Ln-1, xn-1
Rebouilleur
nième plateau
LB, xB

fig (1)

II. REPRESENTATION DU MODELE NON LINEAIRE

Le procedé modélisé est une colonne de distillation à plateaux binaire schématisée sur la figure (1).

Le mélange traité est binaire, la colonne comporte n plateaux y compris le rebouilleur et le condenseur.

Le modele de la colonne est constitué par :

- Les equations de conservation de matière et d'energie
- Le modèle thermodynamique

Les hypothéses de travail sont les suivantes:

1- L'etanchéité de la colonne est ideale, d'où l'impossibilité d'échanges parasites de matière avec le milieu exterieur.

2- La colonne est parfaitement isolée thermiquement, ie: pas d'échanges de chaleur parasites avec l'extérieur et entre plateaux.

3- La volatilité relative du melange binaire est constante tout le long de la colonne.

4- les plateaux $j=2$ jusqu'à $j=n-1$ sont parfaitement identiques, il en sera de même avec les retenues molaires qui seront de plus constantes dans le temps.

5- L'idealité des plateaux est de 100%.

6- La totalité de la vapeur est condensée dans le plateau 1 (condenseur).

7- L'alimentation se fait exclusivement en liquide (le liquide etant en son point de bulle).

8- Le temps mort entre la condensation de la vapeur et le reflux du distillat est negligé (les constantes de temps hydrauliques sont negligeables devant les thermiques).

9- Il n'y a pas de pertes de charges dans la colonne, il en decoule que la pression est constante tout le long de la colonne.

<u>CONSEQUENCES directes:</u> De ces hypothèses, on tirera des consequences simplificatrices :

- les flux molaires liquides à travers la zone d'epuisement seront les mêmes, idem pour ceux de la zone de rectification.

ie: $j \in [2, f-1]$, $L_j = L_S$, $V_j = V$

$j \in [f, n-1]$, $L_j = L_F + L_S$, $V_j = V$

- le flux de vapeur est constant tout le long de la colonne.

Le modele est alors donné par :

$$(2.1)\quad \begin{cases} j=1 & \dot{x}_1 = \frac{V}{HD}(M_2 x_2 - x_1) \\ 2 \leq j \leq f-1 & \dot{x}_j = \frac{LS}{H}(x_{j-1} - x_j) + \frac{V}{H}(M_{j+1} x_{j+1} - M_j x_j) \\ j = f & \dot{x}_f = \frac{LS}{H}(x_{f-1} - x_f) + \frac{V}{H}(M_{f+1} x_{f+1} - M_f x_f) - \frac{LF}{H} x_f + \frac{LF}{H} x_F \\ f+1 \leq j \leq n-1 & \dot{x}_j = \frac{LS}{H}(x_{j-1} - x_j) + \frac{V}{H}(M_{j+1} x_{j+1} - M_j x_j) + \frac{LF}{H}(x_{j-1} - x_j) \\ j = n & \dot{x}_n = \frac{LS}{HB}(x_{n-1} - x_n) + \frac{V}{HB}(x_n - M_n x_n) + \frac{LF}{HB}(x_{n-1} - x_n) \end{cases}$$

Avec $M_j = \dfrac{\alpha}{1 + (\alpha - 1) x_j}$

Le systeme ci-dessus peut s'ecrire sous la forme vectorielle(s) et matricielle. [II]

En posant $u_1 = \frac{LS}{H}$, $u_2 = \frac{V}{H}$, $q_1 = \frac{LF}{H}$, $q_2 = \frac{LF x_F}{H}$

$$(2.2)\quad \begin{cases} \dot{x} = A_1(x) u_1 + A_2(x) u_2 + B(x) + b \\ y = h(x) = {}^t(x_1, x_n) \end{cases}$$

Les entrées actions seront - le debit vapeur V

- le debit du reflux Ls

Les entrées perturbantes : - La concentration d'alimentation x_F

- le debit d'alimentation LF (supposé constant)

Les sorties à réguler sont : - La concentration du produit de tête x_1

- La concentration du produit de fond x_n

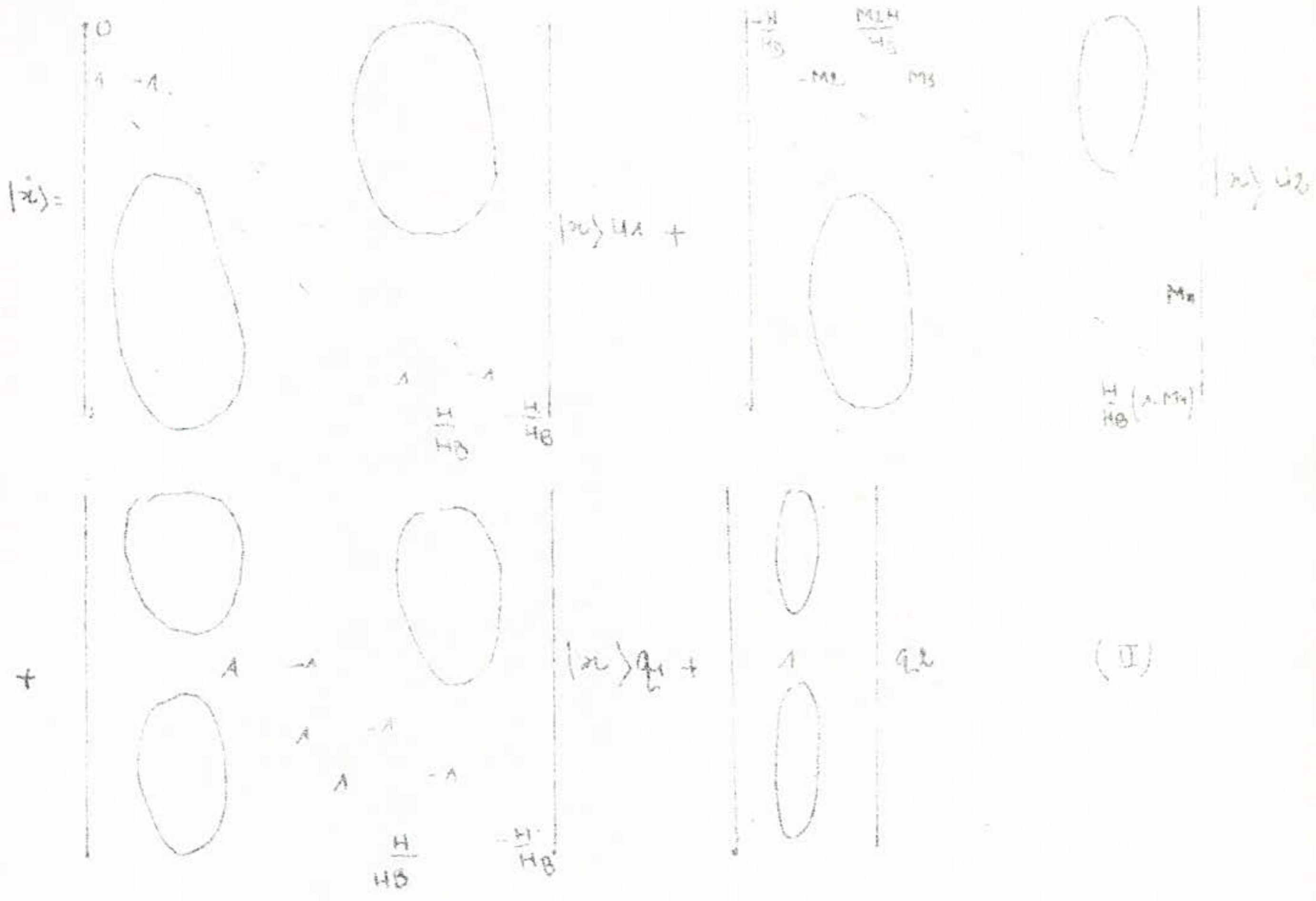
condenseur

alimen^t zone de rectification

(I)

rebouilleur zone d'epuisement

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_j \\ \vdots \\ \dot{x}_{f-1} \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_{f+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_j \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_1 - x_2}{H} \\ \vdots \\ \frac{x_{j-1} - x_j}{H} \\ \vdots \\ \frac{x_{f-2} - x_{f-1}}{H} \\ \frac{x_{f-1} - x_f}{H} \\ \frac{x_f - x_{f+1}}{H} \\ \vdots \\ \frac{x_{j-1} - x_j}{H} \\ \vdots \\ \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{H} \\ \frac{x_{n-1} - x_n}{HB} \end{bmatrix} Ls + \begin{bmatrix} \frac{M_2x_2 - x_1}{HD} \\ \frac{M_3x_3 - M_2x_2}{H} \\ \vdots \\ \frac{M_{j+1}x_{j+1} - M_jx_j}{H} \\ \vdots \\ \frac{M_fx_f - M_{f-1}x_{f-1}}{H} \\ \frac{M_{f+1}x_{f+1} - M_fx_f}{H} \\ \frac{M_{f+2}x_{f+2} - M_{f+1}x_{f+1}}{H} \\ \vdots \\ \frac{M_{j+1}x_{j+1} - M_jx_j}{H} \\ \vdots \\ \frac{M_nx_n - M_{n-1}x_{n-1}}{H} \\ \frac{x_n - M_nx_n}{HB} \end{bmatrix} V + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{x_f}{H} \\ \frac{x_f - x_{f+1}}{H} \\ \vdots \\ \frac{x_j - x_{j-1}}{H} \\ \vdots \\ \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{H} \\ \frac{x_{n-1} - x_n}{HB} \end{bmatrix} LF + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{H} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} LFxF$$



Remarques :

L'espace d'etat physique est le cube ouvert $M =]0, 1[^m$ (voir [1])

Les etats stationnaires satisfont les relations

$x_{j-1} > x_j$ pour $j = 2, \ldots, f-1, f+1, \ldots m$ de plus ce domaine est positivement invariant.

L'espace d'etat significatif est donc le domaine :

$X = \{ x \in M / x_{j-1} > x_j , j = 2, \ldots f-1, f+1, \ldots m \}$

Cette propriete sera utilisée au chapitre V

Nous avons pris le soin d'être bref dans ce paragraphe, toute personne desirant savoir plus sur les colonnes à distiller trouverait un complement dans les references bibliographiques [1], [2], [3], [4] et [5]

III. CONTROLABILITE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

(APPLICATION AU MODELE DE LA COLONNE PROPOSEE)

DEFINITION 1: On appelle algebre de Lie, tout sousespace vectoriel reel (ou complexe) muni d'une Loi de composition interne, notée $[\cdot,\cdot]$, bilineaire, antisymetrique verifiant:

l'identité de Jacobi $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$

DEFINITION 2 : On appelle système la donnée des objects suivants:

(i) Une varieté C^∞, M connexe, appelée "espace d'etat".

(ii) Une famille $\mathcal{F}$ de champs de vecteurs C^∞ sur M.

Le systeme sera dit complet si tous les champs de vecteurs C^∞ de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, la sous algebre de Lie (de l'algebre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur M) engendrée par $\mathcal{F}$ sont completes.

$\mathcal{L}(\mathcal{F})$ est appelée "Algebre de Lie du systéme".

Quand La famille $\mathcal{F}$ est parametrée par un parametre u de U (ensemble quelconque), on dit que u est l'"entrée" du systeme, et U L'"espace d'entrée".

(iii) Une application h, C^∞ de M dans $\mathbb{R}^p$ (h est appelée "fonction de sortie", et $\mathbb{R}^p$ "espace de sortie").

Theoreme : Soit $\Sigma = (M, \mathcal{F}, h)$ un systeme. Si $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ est de rang $n = \dim(M)$ partout sur M, alors Σ est faiblement Controlable.

Physiquement, le theoreme signifie que l'espace des etats accessibles à partir d'un etat x_0 donné est d'interieur non vide.

Comme vous le remarquez, nous ne parlons que de la faible contolabilité des systemes non linéaires.
Nous avons pris le soin de formuler le stricte minimum de cette theorie, toutefois, toute personne voulant approfondir la question, trouvera ample satisfaction dans les references bibliographiques: [9], [10] et [11].

31. APPLICATION DU THEOREME DE CONTROLABILITE AU SYSTEME ETUDIÉ.

Notre système s'ecrit sous la forme:

$$\dot{x} = A_1(x)\,U_1 + A_2(x)\,U_2 + B(x) + b$$

La famille de champs de vecteurs $\mathcal{F}$ est:

$$\mathcal{F} = \{ X, Y', Y^2 \} \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} X &= B(x) + b \\ Y' &= A_1(x) \\ Y^2 &= A_2(x) \end{aligned}$$

L'algebre de Lie engendrée par $\mathcal{F}$, notée $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ est de la forme:

$$\mathcal{L}\left(\{ B(x) + b,\ A_1(x),\ A_2(x) \} \right)$$

Rang de l'algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{F}$

Afin de determiner le rang de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, on s'interressé au nombre de crochets lineairement independants qu'on peut former à partir de la famille $\mathcal{F}$ et ce par d'eventuelles combinaisons lineaires.

Calcul du crochet $[X, Y'](x)$

$$[X, Y'] = XY' - Y'X$$

$$XY' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ f \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} & & f & & & \\ & & \vdots & & & \\ 0 & & \vdots & & 0 & \\ \cdots & \cdots & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 1 & -1 & & \\ & & \vdots & 1 & -1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \ddots \\ & & \vdots & & \frac{H}{HB} & -\frac{H}{HB} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ x_1 - x_2 \\ \vdots \\ x_{f-1} - x_f \\ x_f - x_{f+1} \\ \vdots \\ x_{j-1} - x_j \\ x_{m-2} - x_{n-1} \\ \frac{H}{HB}(x_{n-1} - x_n) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ x_f - x_{f-1} \\ x_{f-1} - 2x_f + x_{f+1} \\ \vdots \\ x_{j-2} - 2x_{j-1} + x_j \\ \vdots \\ x_{n-3} - 2x_{n-2} + x_{n-1} \\ \frac{H}{HB}(x_{n-2} - x_{n-1}) - \left(\frac{H}{HB}\right)^2 (x_{n-1} - x_n) \end{array} \right|$$

$$Y'X = \begin{array}{c|cccccccc|} & & & & & f & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & 0 & & \\ & & 1 & -1 & & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & & \\ f & & & & 1 & -1 & & & \\ & & 0 & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 & \\ & & & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & & \frac{H}{H_B} & -\frac{H}{H_B} \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 - x_f \\ x_f - x_{f+1} \\ \vdots \\ x_{j-1} - x_j \\ \vdots \\ x_{n-2} - x_{n-1} \\ \frac{H}{H_B}(x_{n-1} - x_n) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ x_f - 1 \\ 1 - 2x_f + x_{f+1} \\ \vdots \\ x_{j-2} - 2x_{j-1} + x_j \\ \vdots \\ x_{n-3} - 2x_{n-2} + x_{n-1} \\ \frac{H}{H_B}(x_{n-2} - x_{n-1}) - \left(\frac{H}{H_B}\right)^2 (x_{n-1} - x_n) \end{array} \right|$$

$$[X, Y^1] = \begin{array}{c|c|} & 0 \\ f & 1 - x_{f-1} \\ & x_{f-1} - 1 \\ & 0 \end{array} = Ad_X^{f+1}([X, Y^1])(x)$$

$1 - x_{f-1} \neq 0$ pour tout $x \in \,]0 \;\; 1[^n = M$

On adopte la loi de recurence ci-dessous:

$$\begin{cases} Ad_X^k([X, Y'])(x) = \left[Ad_X^{k-1}([X, Y'])(x) \, , \, X \right](x) \\ \text{Avec} \quad k = f+2, f+3, \dots, n. \end{cases}$$

qui nous permet de generer avec $Ad_X^{f+1}([X, Y'])(x)$, $(n-f)$ crochets.

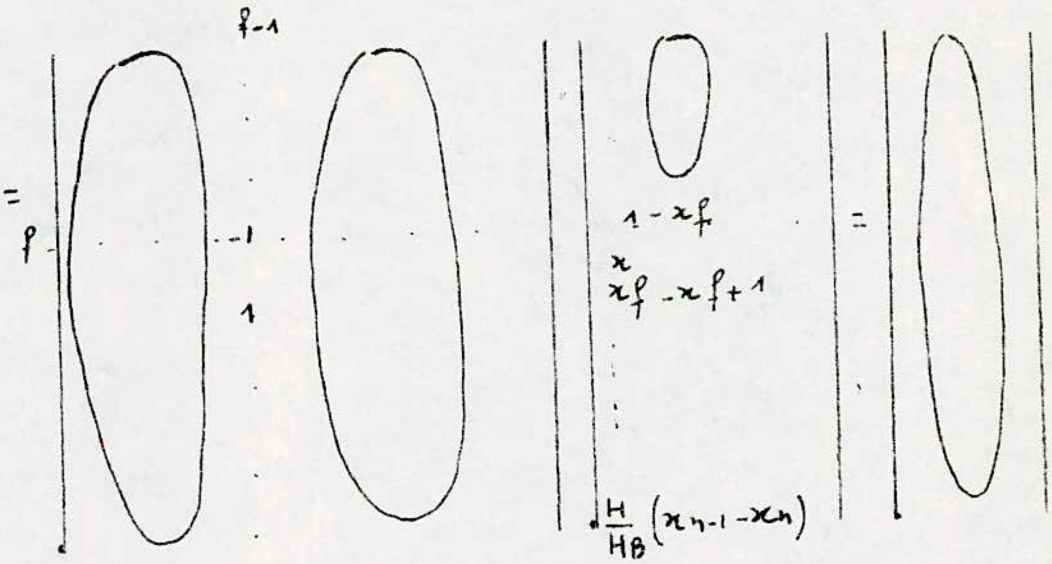
Determination de La forme de ces (n-f) crochets

Calcul de $Ad_X^{f+2}([X,Y'])(x)$

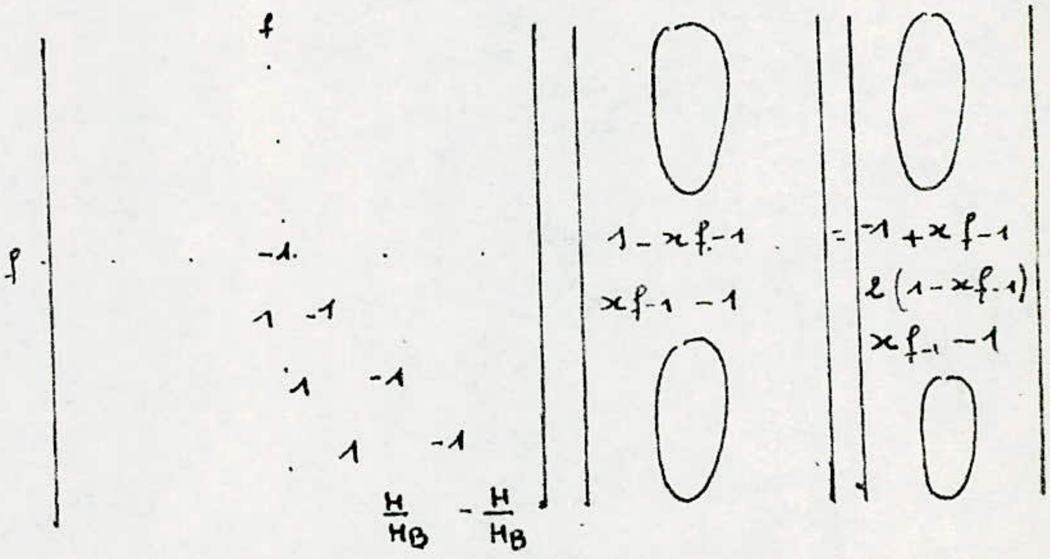
$$Ad_X^{f+2}([X,Y'])(x) = \left[Ad_X^{f+1}([X,Y'])(x), X\right](x) = \left[[X,Y'], X\right](x)$$

$$\left[[X,Y'], X\right] = D_x X/[X,Y'](x) - D_x [X,Y']/X(x)$$

$D_x[X,Y']/X(x) =$



$D_x X/[X,Y'] =$



$D_x X$ et $D_x[X,Y']$ representent respectivement les matices Jacobiennes de X et $[X,Y']$

$$\left[\left[X,Y'\right],X\right](x)= \begin{array}{r|c|} & 0 \\ f & 1-x_{f-1} \\ & 2(x_{f-1}-1) \\ & 1-x_{f-1} \\ & 0 \end{array}$$

Calcul de $Ad_X^{f+3}\left(\left[X,Y'\right]\right)(x)$:

$$Ad_X^{f+3}\left(\left[X,Y'\right]\right)(x)=\left[\left[\left[X,Y'\right],X\right],X\right](x)$$

$$D_x\left[\left[X,Y'\right],X\right]/X(x) \underset{f}{=} \begin{array}{|c c c|} & f-1 & \\ & \vdots & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & -1 & \\ & 2 & \\ & -1 & \\ & \vdots & \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} 0 \\ 1-x_{f-1} \\ \vdots \\ \frac{H}{H_B}(x_{n-1}-x_{1}) \end{array} = \begin{array}{|c|} 0 \end{array}$$

$$D_x X/\left[\left[X,Y'\right],X\right] \underset{f}{=} \begin{array}{|c c c c|} & f & & \\ & \vdots & 0 & \\ 0 & -1 & & \\ & \vdots & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -1 \\ & \vdots & \frac{H}{H_B} & -\frac{H}{H_B} \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} 0 \\ 1-x_{f-1} \\ 2(x_{f-1}-1) \\ 1-x_{f-1} \\ 0 \end{array} = \begin{array}{|c|} 0 \\ x_{f-1}-1 \\ 3(1-x_{f-1}) \\ 3(x_{f-1}-1) \\ 1-x_{f-1} \\ 0 \end{array}$$

$$Ad_X^{f+3} = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 - x_{f-1} \\ 3(x_{f-1}-1) \\ -3(x_{f-1}-1) \\ x_{f-1}-1 \\ 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -f \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

<u>Remarques:</u>

1) Vu la structure de $D_x Ad_X^{k-1}([X,Y'])(x)$ et celle de $X(x)$ on a toujours $D_x Ad^{k-1}x([X,Y'])(x) / X(x) \equiv 0$
Donc pour determiner $Ad_X^k([X,Y'])(x)$, il suffit de calculer $D_x X / Ad_X^{k-1}([X,Y'])(x)$

2) Tous les crochets et ce à compter de $k = f+1, \ldots, n-1$, s'ecrivent de la façon suivante:

$$Ad_X^k = \begin{array}{r} \\ f- \\ \\ \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 - x_{f-1} \\ \boxed{\begin{array}{c} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}} \\ (-1)^{k-(f+1)}(x_{f-1}-1) \\ 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ -k \\ \\ \end{array}$$

Pour $k = n$ on a:

$$Ad^{n}_{X} = \begin{array}{c} \\ \\ f \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 - x_{f-1} \\ \boxed{\phantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}} \\ (-1)^{n-(f+1)} (x_{f-1} - 1) \frac{H}{HB} \end{vmatrix}$$

On voit bien que tous ces "vecteurs" ou crochets ne sont pas nuls car $1 - x_{f-1} \neq 0$ pour tout $x \in]0\ 1[^{n} = M$

Il est facile de verifier que ces $(n-f)$ crochets sont lineairement independants.

Pour avoir les f autres vecteurs on s'interesse à la même forme de recurrence decrite précédement, sauf que cette fois ci on utilise :

$$\begin{cases} Ad^{f}_{Y^2}\left([Y^2, Z]\right)(x) = \left[Y^2, Z\right](x) = Y^2 Z - Z Y^2 \\ \text{et} \\ Ad^{k}_{Y^2}\left([Y^2, Z]\right)(x) = \left[Y^2, \; Ad^{k+1}_{Y^2}(Y^2, Z)\right](x) \end{cases}$$

pour $k = f-1, f-2, \ldots\ldots 2$.

Avec $Z(x) = -\left[X, Y'\right] + \left[[X, Y^1], X\right]$

$$Z(x) = \begin{array}{r|c|} & 0 \\ f & \\ f+1 & x_{f-1} - 1 \\ f+2 & 1 - xf - 1 \\ & 0 \end{array}$$

Calcul de $\left[Y^2, Z\right](x)$:

$$\left[Y^2, Z\right](x) = Y^2 Z - Z Y^2$$

$$ZY^2 = \begin{array}{r|ccccccc|} & & & & f & f+1 & f+2 & \\ & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ f & - & - & - & \ddots & a & - & - \\ f+1 & - & - & - & - & b & c & - \\ f+2 & - & - & - & - & - & d & - \\ & & & & \vdots & \vdots & L & \ddots \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \begin{vmatrix} 0 \\ x_{f-1} - 1 \\ 1 - xf - 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ a\,(x_{f-1} - 1) \\ (b-c)(x_{f-1} - 1) \\ d\,(1 - xf - 1) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Avec :

$$a = \frac{\alpha}{\left(1 + (\alpha - 1)\, x_{f+1}\right)^2}$$

$$b = -\frac{\alpha}{\left(1 + (\alpha - 1)\, x_{f+1}\right)^2}$$

$$c = \frac{\alpha}{\left(1 + (\alpha - 1)\, x_{f+2}\right)^2}$$

$$d = -\frac{\alpha}{\left(1 + (\alpha - 1)\, x_{f+2}\right)^2}$$

$$Y^2 Z = \begin{array}{c|ccc|c|c|c|}
 & & f-1 & & & & \\
 & 0 & \vdots & 0 & (M_2 x_2 - x_1)\frac{H}{H_D} & & 0 \\
 & & \vdots & & M_3 x_3 - M_2 x_2 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
f-1 & & \vdots & & M_f x_f - M_{f-1} x_{f-1} & & \\
f & & \vdots & & \vdots & = & \\
f+1 & & -1 & & \vdots & & M_{f-1} x_{f-1} - M_f x_f \\
f+2 & & 1 & & \vdots & & M_f x_f - M_{f-1} x_{f-1} \\
 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & & 0 \\
 & & \vdots & & \frac{H}{H_B}(x_n - M_n x_n) & &
\end{array}$$

$$\left[Y^2, Z \right] = \begin{array}{c|c|}
 & 0 \\
f & -\frac{\alpha\,(x_{f-1} - 1)}{\left[1 + (\alpha - 1)\, x_{f+1}\right]^2} \\
f+1 & (b-c)(x_{f-1} - 1) - M_{f-1} x_{f-1} + M_f x_f \\
f+2 & d\,(1 - x_{f-1}) - M_f x_f + M_{f-1} x_{f-1} \\
 & 0
\end{array} = Ad^{f}_{Y^2}\left(\left[Y^2, Z\right]\right)(x)$$

Calcul de $Ad^{f-1}_{Y^2}([Y^2,Z])(x)$:

$$[Y^2,[Y^2,Z]](x) = Y^2[Y^2,Z] - [Y^2,Z]\,Y^2$$

$$= D_x[Y^2,Z]/Y^2_{(x)} - D_x Y^2/[Y^2,Z](x).$$

$$Y^2[Y^2,Z] = \begin{array}{c|cccc|}
 & f_{-1} & f & f_{+1} & f_{+2} \\
 & & \bigcirc & & \\
f & a' & 0 & b' & \\
f_{+1} & c' & d' & e' & i' \\
f_{+2} & h' & m' & r' & s' \\
 & & \bigcirc & &
\end{array}
\left|\begin{array}{l}
\frac{H}{H_D}(M_2x_2 - x_1) \\
M_fx_f - x_{f-1}M_{f-1} \\
M_{f+1}x_{f+1} - M_fx_f \\
M_{f+2}x_{f+2} - M_{f+1}x_{f+1} \\
M_{f+3}x_{f+3} - M_{f+2}x_{f+2} \\
\vdots \\
\frac{H}{H_B}(x_n - M_nx_n)
\end{array}\right|. =$$

$$= \begin{array}{c|l|}
 & \bigcirc \\
f & a'(M_fx_f - M_{f+1}x_{f+1}) + b'(M_{f+1}x_{f+1} - M_fx_f) \\
f_{+1} & c'\,\theta(x) + d'\,\beta(x) + e'\,\varphi(x) + i'\,\rho(x) \\
f_{+2} & h'\,\theta(x) + m'\,\beta(x) + r'\,\varphi(x) + s'\,\rho(x) \\
 & \bigcirc
\end{array}$$

Avec $a' = -\dfrac{\alpha}{(1+(\alpha-1)x_{f+1})^2}$, $b' = -\dfrac{\alpha(\alpha-1)(x_{f-1}-1)}{(1+(\alpha-1)x_{f+1})^3}$

$c' = b-c$, $d' = \dfrac{\alpha}{[1+(\alpha-1)x_f]^2}$, $e' = \dfrac{-\alpha}{[1+(\alpha-1)x_{f+1}]^2} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(x_{f-1}-1}{[1+(\alpha-1)x_{f+1}]}$

$i' = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(x_{f-1}-1)}{[1+(\alpha-1)x_{f+2}]^2}$, $h' = \dfrac{\alpha}{[1+(\alpha-1)x_{f+2}]^2}$, $m' = -\dfrac{\alpha}{(1+(\alpha-1)x_f)}$

$$r' = \frac{\alpha}{(1+(\alpha-1)x_{f+1})^2} \quad , \qquad s' = \frac{\alpha(\alpha-1)(1-x_{f-1})}{[1+(\alpha-1)x_{f+2}]^3}$$

$$\theta(x) = M_f x_f - M_{f-1}x_{f-1} \qquad \beta(x) = M_{f+1}x_{f+1} - M_f x_f$$

$$\varphi(x) = M_{f+2}x_{f+2} - M_{f+1}x_{f+1} \qquad f(x) = M_{f+3}x_{f+3} - M_{f+2}x_{f+2}$$

$$[Y^2,Z]\,Y^2 = \begin{array}{r|ccc|}
 & \ddots & f & \bigcirc \\
f_{-1} & & \frac{\alpha}{(1+(\alpha-1)x_f)^2} & \\
 & \bigcirc & \ddots & \\
f_{+2} & & & \ddots
\end{array}
\begin{array}{|c|}
\bigcirc \\
-\frac{\alpha(x_{f-1}-1)}{(1+(\alpha-1)x_{f+1})^2} \\
\vdots \\
\bigcirc
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
-\frac{\alpha(x_{f-1}-1)}{(1+(\alpha-1)x_f)^2(1+(\alpha-1)x_{f+1})^2} \\
- \\
- \\
- \\
- \\
\bigcirc
\end{array}$$

$$\Big[Y^2,[Y^2,Z]\Big](x) = \begin{array}{r|c|}
 & \bigcirc \\
f-1 & \frac{\alpha(x_{f-1}-1)}{[1+(\alpha-1)x_{f+1}]^2[1+(\alpha-1)x_f]^2} \\
 & - \\
 & - \\
f+2 & - \\
 & \bigcirc
\end{array} = Ad^{f-1}_{Y^2}\big([Y^2,Z]\big)(x)$$

On remarque qu'on monte d'un cran à chaque fois que l'on calcule le crochet $Ad^k_{Y^2}([Y^2,Z])$ et ce pour $k = f, f-1, \dots\dots, 2$.

De plus les crochets ont la forme ci-dessous.

$$Ad^{k}_{Y^2}\left([Y^2,Z]\right) = \begin{array}{r|c|} & 0 \\ k - & \dfrac{(-1)^{f-(k-1)}\,\alpha^{f-(K-1)}\,(x_{f-1}-1)}{\prod_{i=f}^{k}\left(1+(\alpha-1)\,x_{i+1}\right)^{2}} \\ & - \\ & - \\ & - \\ f+2 - & - \\ & 0 \end{array}$$

Bien sur il n'est donne ici que la $k^{\text{ième}}$ et première composante se trouvant sur la ligne k.

Pour avoir le $n^{\text{ième}}$ crochet on combine le $(n-1)^{\text{ième}}$ Crochet connu (càd $Ad^{2}_{Y^2}[[Y^2,Z]]$) avec Y^2.

ie : on calcule le crochet :

$$\left[Y^2,\ Ad^{2}_{Y^2}\left([Y^2,Z]\right)\right](x)$$

Apres calcul on obtient :

$$\left[Y^2,\ Ad^{2}_{Y^2}\left([Y^2,Z]\right)\right](x) = \begin{array}{r|c|} & \dfrac{(-\alpha)^{f}\,(x_{f-1}-1)}{\prod_{i=f}^{1}\left(1+(\alpha-1)\,x_{i+1}\right)^{2}} \cdot \dfrac{H}{H1)} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ f+2 & \vdots \\ & 0 \end{array}$$

$i = f, f-1, \ldots, 1$

On voit que : $\dfrac{(-1)^{f-(k-1)}\,\alpha^{f-(k-1)}(x_{f-1}-1)}{\prod_{i=f}^{k}\left(1+(\alpha-1)x_{i+1}\right)^2}$ $(k = f, \ldots 2)$

est toujours different de zero car $x \in]0\ 1[^n$ et $\alpha > 1$

Aussi $\dfrac{(-\alpha)^f(x_f-1)}{\prod_{i=f}^{k}\left(1+(\alpha-1)x_{i+1}\right)^2} \neq 0$ pour les mêmes raisons.

Il est facile de montrer que tous ces f crochets sont linéairement indépendants entre eux et avec les (n-f) crochets déja generés.

Conclusion :

Nous sommes arrivés à générer n crochets linéairement independants, et ce en munissant l'espace vectoriel des champs de vecteurs engendre par la famille $\mathcal{F}'$, de la loi crochet.

Donc, l'algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{F}'$ est de rang n pour tout x de M.

$r(\mathcal{L}(\mathcal{F}')) = n, \forall x \in M$

IV DETERMINATION DE U_1 ET U_2 POSITIVES

L'objectif est de trouver U_1 et U_2 permettant la réalisation d'une meilleure performance sur les concentrations du produit de tête et du produit de fond, c'est-à-dire augmenter x_1 et diminuer x_n.

Dans [1] on est arrivé aux résultats ci-dessous

$$(4.1)\quad \begin{cases} U_1 = \alpha_1(x) + v_1 \beta_{11}(x) + v_2 \beta_{21}(x) \\ U_2 = \alpha_2(x) + v_1 \beta_{12}(x) + v_2 \beta_{22}(x) \end{cases}$$

avec :

$$\alpha_1(x) = -\frac{(1-M_n)x_n}{x_{n-1}-x_n} \cdot \frac{\Lambda_2(x_1,x_n)}{M_2 x_2 - x_1} - \frac{L_f}{H} \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}-x_n} + \frac{\Lambda(x_1,x_n)}{x_{n-1}-x_n}$$

$$\alpha_2(x) = \frac{\Lambda_2(x_1,x_n)}{M_2 x_2 - x_1}$$

$$\beta_{11}(x) = -\frac{(1-M_n)x_n}{x_{n-1}-x_n} \cdot \frac{\Gamma_{12}(x_1,x_n)}{M_2 x_2 - x_1} + \frac{\Gamma_{11}(x_1,x_n)}{x_{n-1}-x_n}$$

(4.2)

$$\beta_{12}(x) = \frac{\Gamma_{12}(x_1,x_n)}{M_2 x_2 - x_1}$$

$$\beta_{21}(x) = -\frac{(1-M_n)x_n}{x_{n-1}-x_n} \cdot \frac{\Gamma_{22}(x_1,x_n)}{M_1 x_2 - x_1} + \frac{\Gamma_{21}(x_1,x_n)}{x_{n-1}-x_n}$$

$$\beta_{22}(x) = \frac{\Gamma_{22}(x_1,x_n)}{M_2 x_2 - x_1}$$

$$v_i \in \mathbb{R} \qquad (i = 1,2)$$

Le système final, perturbations dûes à x_F rejetées a pour équation :

$$(4.3)\begin{cases} \mathring{x}_1 = \dfrac{H}{H_D}\left[\Lambda_2(x_1, x_n) + v_1\Gamma_{12}(x_1, x_n) + v_2\Gamma_{22}(x_1, x_n)\right] \\ \dot{x}_n = \dfrac{H}{H_B}\left[\Lambda_1(x_1, x_n) - \dfrac{L_F}{H} x_n + \Gamma_{11}(x_1, x_n).v_1 + \Gamma_{21}(x_1, x_n).v_2\right] \\ y = {}^t(x_1, x_n) \end{cases}$$

Les fonctions Γ_{ij} et Λ_i $(i = 1, 2 \ ; \ j = 1, 2)$ sont soumises à certaines contraintes afin de réaliser $U_1 > 0$ et $U_2 > 0$.

Dans notre cas :

$$M_2x_2 - x_1 > 0$$

et

$$x_{n-1} - x_n > 0$$

alors on doit avoir

Λ_2, Γ_{12} et Γ_{22} positives

$$\Lambda_1 > \frac{L_F}{H}.x_{n-1} > 0$$

$$\Gamma_{11} > (1 - M_n)\,x_n \frac{\Gamma_{12}}{M_2x_2 - x_1} < 0$$

$$\Gamma_{21} > (1 - M_n)\,x_n \frac{\Gamma_{22}}{M_2x_2 - x_1} < 0$$

de plus α_1, α_2, Λ_1 et Λ_2 doivent avoir une dimension de l'inverse d'un temps, par contre les Γ_{ij} sont sans dimension.

En combinant (4.1), (4.2) et (4.3) on obtient :

$$(4.4)\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{x_{n-1} - x_n}\left[\dfrac{(M_n - 1)\,x_n}{M_2x_2 - x_1}\cdot\dfrac{H_D}{H}\mathring{x}_1 + \dfrac{H_B}{H}\dot{x}_n + \dfrac{L_F}{H}(x_n - x_{n-1})\right] \\ U_2 = \dfrac{H_D}{H}\,\dfrac{\dot{x}_1}{M_2x_2 - x_1} = \dfrac{V}{H} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} M_2 x_2 - x_1 > 0 \\ U_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x}_1 > 0$$

$$\left.\begin{array}{r} x_{n-1} - x_n > 0 \\ U_1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(M_n - 1)x_n}{M_2 x_2 - x_1} \cdot \frac{H_D}{H} \dot{x}_1 + \frac{H_B}{H} \dot{x}_n + \frac{L_F}{H}(x_n - x_{n-1}) > 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{H_D}{H} \dot{x}_1 = \frac{V}{H}(M_2 x_2 - x_1)$$

et

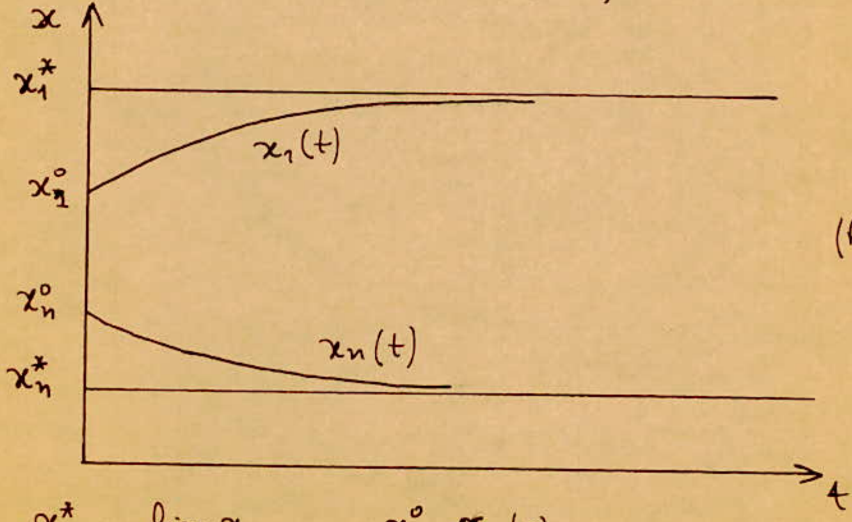
$M_n x_n - x_{n-1} > 0$ dans un voisinage de l'etat stable désiré

(parce que l'inégalité est toujours vraie en regime permane

On cherche à réaliser

$$(M_n - 1) x_n \frac{V}{H} + \frac{H_B}{H} \dot{x}_n + \frac{L_F}{H}(1 - M_n) x_n > 0 \quad (4.6)$$

Nous nous proposons de chercher des réponses du premier ordre pour x_1 et x_n (voir fig (a))



(fig.a)

Avec $x_1^* = \lim\limits_{t \to \infty} x_1$ $\quad x_1^o = x_1(0)$

$x_n^* = \lim\limits_{t \to \infty} x_n$ $\quad x_n^o = x_n(0)$

De plus on doit avoir $\lim\limits_{t \to \infty} \dot{x}_1 = 0$ et $\lim\limits_{t \to \infty} \dot{x}_n = 0$

Choisissons $\dot{x}_1 = \dfrac{x_1^* - x_1}{\tau_1}$

où τ_1 est la constante de temps de $x_1(t)$ qu'on doit choisir de manière réaliste

Recherchons $\mathring{x}_n$ sous la forme :

$$\mathring{x}_n = \frac{x_n^* - x_n}{\tau_2}$$

Le problème revient à determiner τ_2

$$(4.6) \Rightarrow \mathring{x}_n > \frac{(M_n-1)\, x_n\, (L_F - V)}{H_B}$$

avec $V > L_F$ (inégalité verifiée en fonctionnement normal)

$$M_1^* - 1 < M_n - 1 \Rightarrow \frac{(M_n-1)\, x_n\, (L_F - V)}{H_B} < \frac{(M_1^* - 1)\, x_n\, (L_F - V)}{H_B}$$

où $M_1^* = \dfrac{\alpha}{1+(\alpha-1)\, x_1^*}$

On cherche un $\mathring{x}_n$ tel que :

$$\dot{x}_n > \frac{M_1^* - 1}{H_B}\, x_n\, (L_F - V)$$

On prend : $\dot{x}_n = \dfrac{(M_1^*-1)(V_0 - L_F)}{H_B}\,(x_n^* - x_n)$

$$\text{avec} \begin{cases} V_0 \leq V & (4.7) \\ V_0 > L_F & (4.8) \end{cases}$$

ou bien :

$$\dot{x}_n = \frac{x_n^* - x_n}{\tau_2} \qquad \text{avec} \qquad \tau_2 = \frac{H_B}{(M_1^*-1)(V_0 - L_F)}$$

en reportant $\check{x}_1$ et $\check{x}_n$ dans (4.4) on aura :

$$(4.9) \begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{x_{n-1} - x_n} \left[\dfrac{(M_n-1)\, x_n}{M_2 x_2 - x_1} \cdot \dfrac{H_D}{H\tau_1} \left(x_1^* - x_1\right) + \dfrac{H_B}{H\tau_2} \cdot \left(x_n^* - x_n\right) + \dfrac{L_F}{H} \left(x_n - x_{n-1}\right) \right] \\ U_2 = \dfrac{H_D}{H\tau_1} \cdot \dfrac{x_1^* - x_1}{M_2 x_2 - x_1} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Pour avoir $U_1 > 0$, il faut choisir V_0 tel que les inégalites (4.7) et (4.8) soient verifiées, ou bien faire une majoration convenable sur $\mathring{x}_n$

V. SIMULATION

Nous avons utilisé la methode de Range-Kutta pour integrer le systéme d'equations differentielles.

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

ie : $x(KT+T) = x(KT) + Tf(x(KT), u(KT))$

avec T la periode d'echantillonage.

Notations utilisées

K : indice comptant le nombre de vecteurs à imprimer.

L : indice qui compte le nombre d'iteration

NI : periode d'impression

NV : nombre de vecteurs à imprimer

MF : numero du plateau d'alimentation

J : numero du plateau

N : nombre de plateaux

AI1 : α

AI3 : τ_1

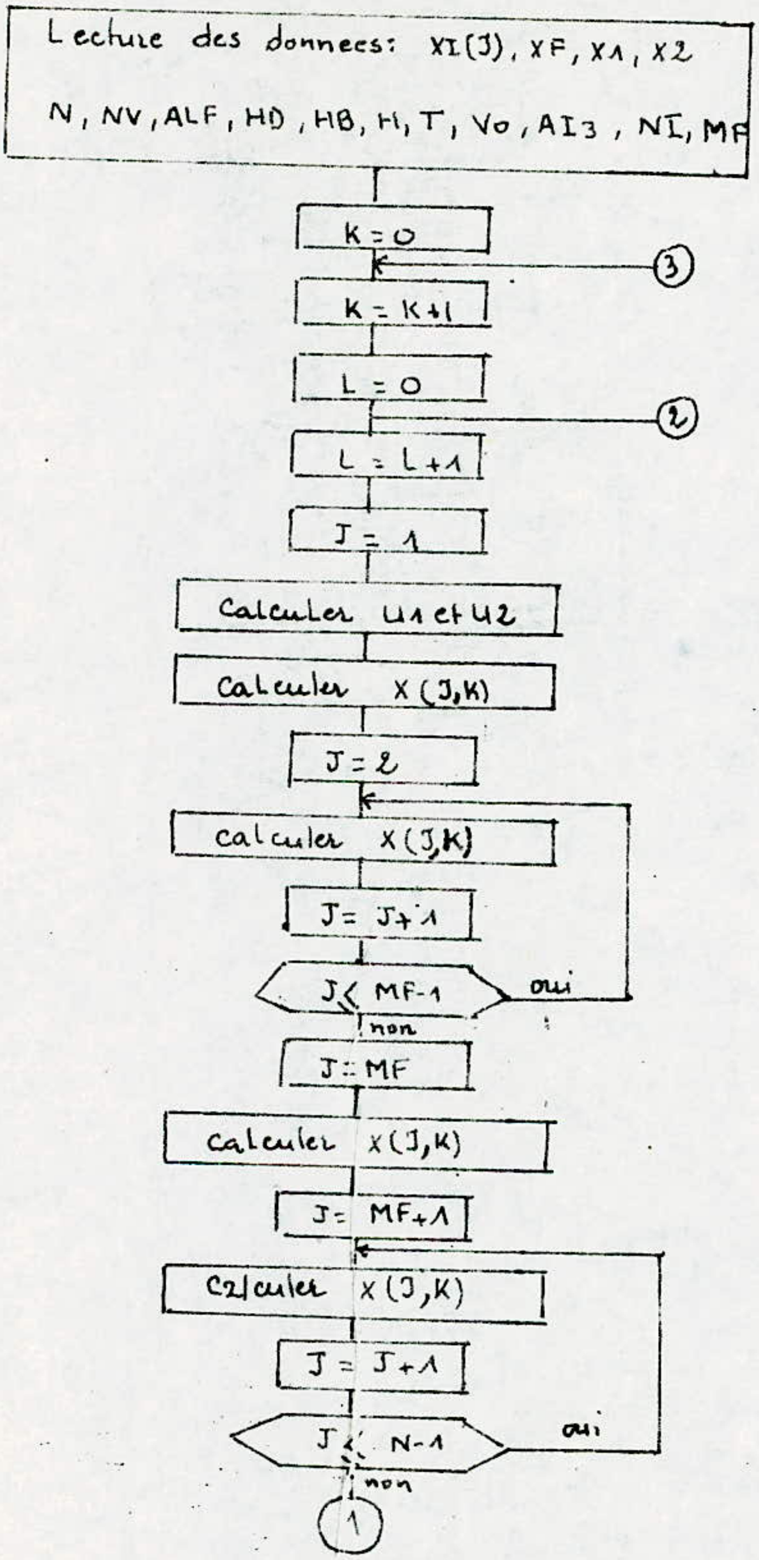
V : Vo

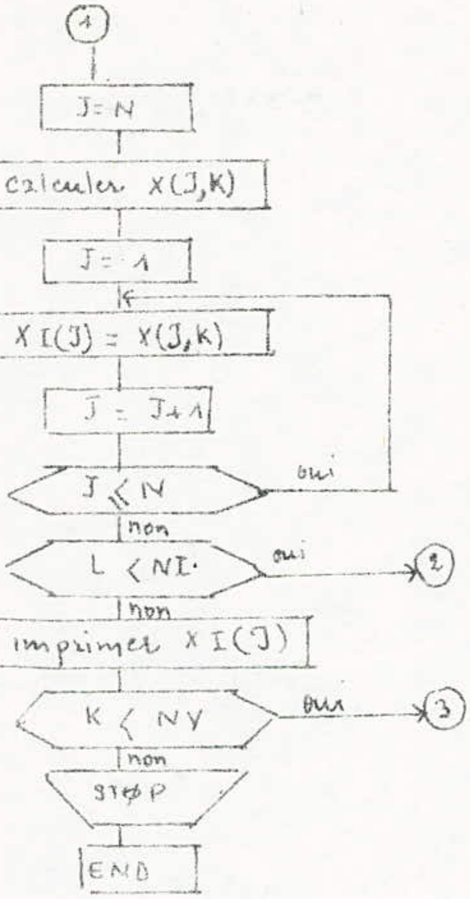
ALF : LF

X1 : x_1^*

X2 : x_n^*

5.1 ORGANIGRAMME DE L'INTEGRATION




1
J = N
calculer X(J,K)
J = 1
X I(J) = X(J,K)
J = J+1
J ≤ N
oui
non
L < NI
oui
2
non
imprimer X I(J)
K < NY
oui
3
non
STOP
END

5.2 PROGRAMME

```
      DIMENSION  X(10,40) , XI (10)
      DOUBLE PRECISION    AM1, AM2, AM
      READ (5, 100)( XI(J), J= 1,10) , XF , X1, X2
      WRITE(6,200)( XI(J) , J= 1,10) , XF , X1, X2
      READ ( 5, 300)  AI1,  MF, N , NV , NI
      WRITE(6, 400)  AI1,  MF, N, NV  , NI
      READ ( 5, 500)  ALF , HD , HB , H
      WRITE(6, 600)  ALF, HD , HB, H
      READ (5, 700) T
      WRITE(6, 700) T
      READ (5, 800) V , AI3
      WRITE(6, 800) V , AI3
      DO 1   K= 1, NV
      L =0
 5    L = L+1
      X3 =  XI(1)
      X4 =  XI (2)
      X5 =  XI (10)
      X6 =  XI(9)
      AM3 =  AI1 / (1 + (AI1 - 1) * X1)
      PROD7 = (V- ALF)* (AM3 -1)
      TAU 2 =  HB / PROD7
      AI2   = TAU2
      AM  =  AI1 * X4  / (1+ (AI1-1) * X4)
      DIF7=  AM  _ X3
      DIF8=  X1 -X3
      PROD8=  HD /( H* AI3)
      PROD9=  PROD8 * DIF 8
      U2   =  PROD9 / DIF7
      DIF9  =  X6 - X5
      AMN  =  AI1 / (1 + (AI1- 1) * X5)
      PROD10=   AMN * X5
      DIF 10 =    PROD 10 - X5
      PR1  =  U2 * DIF10
      PR2  =  HB* ( X2- X5) / ( H* AI2)
      PR3  =  ALF /  H* (X5- X6)
      U1   =  (PR1  + PR2  + PR3) / DIF9
      AM   =  AI1* XI (2) / (1+ (AI1 -1)  * XI(2))
      DIF1 =  AM   _ XI(1)
      PROD1 =  H/HD   * DIF 1
      FI1   =  PROD1 *U2
      X(1, K) =  XI (1) + T* FI1
      I =  4
      DO 2  J= 2, I
      R1 =  XI ( J)
      R2 =  XI ( J+1)
      R3 =  XI ( J-1)
```

```
      AM2 = AI1*R2/ (1+ (AI1-1)*R2)
      DIF2 = R3-R1
      PROD2 = DIF2*U1
      DIF3 = AM2 - AM1
      PROD3 = DIF3 * U2
      FI = RROD2 + PROD3
      VAL = T*FI
      X(J,K) = XI(J) +VAL
  2   CONTINUE
      J = MF
      DIF4 = XF - XI(J)
      PROD4 = ALF /H* DIF4
      R1 = XI(J)
      R2 = XI (J+1)
      R3 = XI (J-1)
      AM1 = AI1 * R1 / (1+ (AI1 -1) *R1)
      AM2 = AI1 * R2/ (1+ (AI1 -1) *R2)
      DIF2 = R3-R1
      PROD2 = DIF2 *U1
      DIF3 =  AM2-AM1
      PROD3 =  DIF3*U2
      YY =  PROD2 +PROD3
      FI =  YY + PROD4
      YAL =  T*FI
      X(J,K) =  XI(J) +VAL
      KK =  N-1
      JJ =  M+1
      DO3 J = JJ, KK
      DIF5 =  XI(J-1) - XI (J)
      PROD5 = ALF /H* DIF5
      R1 = XI(J)
      R2 = XI(J+1)
      R3 = XI ( J-1)
      AM1 =  AI1 * R1/ (1+(AI1-1)*R1)
      AM2 =  AI1 *R2/(1+ (AI1-1)*R2)
      DIF2 = R3-R1
      PROD2 =  DIF2*U1
      DIF 3 = AM2 - AM1
      PROD3 =  DIF3 * U2
      ZZ = PROD2 +PROD3
      FI = ZZ + PROD5
      YAL = T*FI
      X (J,K) = XI (J) +YAL
  3   CONTINUE
      J = N
      DIFC = XI (J-1) - XI(J)
      PROD6 = ALF /HB* DIF6
      R1 = XI( J)
```

```
      R3 = XI(J-1)
      AM1 = AI1*R1/(1+(AI1-1)*R1)
      DIF2 = R3-R1
      PROD2 = DIF2*U1
      DIF3 = R1-AM1
      PROD3 = DIF3*U2
      TT = PROD3+PROD2
      SS = TT*H/HB
      FI = SS+PROD6
      VAL = T*FI
      X(J,K) = XI(J) +VAL
      DO4 J=1,N
      XI(J) = X(J,K)
    4 CONTINUE
      IF(L.LT.NI) GOTO 5
      WRITE(6,50)(XI(J), J=1,N), U1, U2
      IF(K.LT.20) GOTO 1
      XF = 0.5864
    1 CONTINUE
  100 FORMAT (13F5.3)
  200 FORMAT(10(1X,F5.4)/3(1X,F5.4))
  300 FORMAT(F3.1,I1,I2,I2,I3)
  400 FORMAT(1X,F5.3/3(1X,I2),1X,I3)
  500 FORMAT(F6.3,3F5.1)
  600 FORMAT(1X,F6.3/3(1X,F5.1))
  700 FORMAT(1X,F4.2)
  800 FORMAT(1X,F4.2,F5.0)
   50 FORMAT(10(2X,F8.6),2(1X,F8.4))
      STOP
      END
```

53. APPLICATION

L'application à eté faite pour un cas tout à fait arbitraire de colonne à distiller comportant 10 plateaux.

Etat initial

0, 8906
0, 8031
0, 7219
0, 6528
0, 5984
0, 5690
0, 5214
0, 4501
0, 3548
0, 2455

valeurs utilisées en simulation

$xF = 0,5764$, $\alpha = 2.$

$H = 25$ moles , $HD = 100$ moles , $HB = 200$ moles

$LF = 0,066$ moles/s

$T = 0,5$ s

$\tau_1 \simeq 17$ mn $\tau_2 \simeq 33$ mn

$N = 10$, $NY = 40$, $NI = 200$ puis 400

L'alimentation se fait au plateau 5

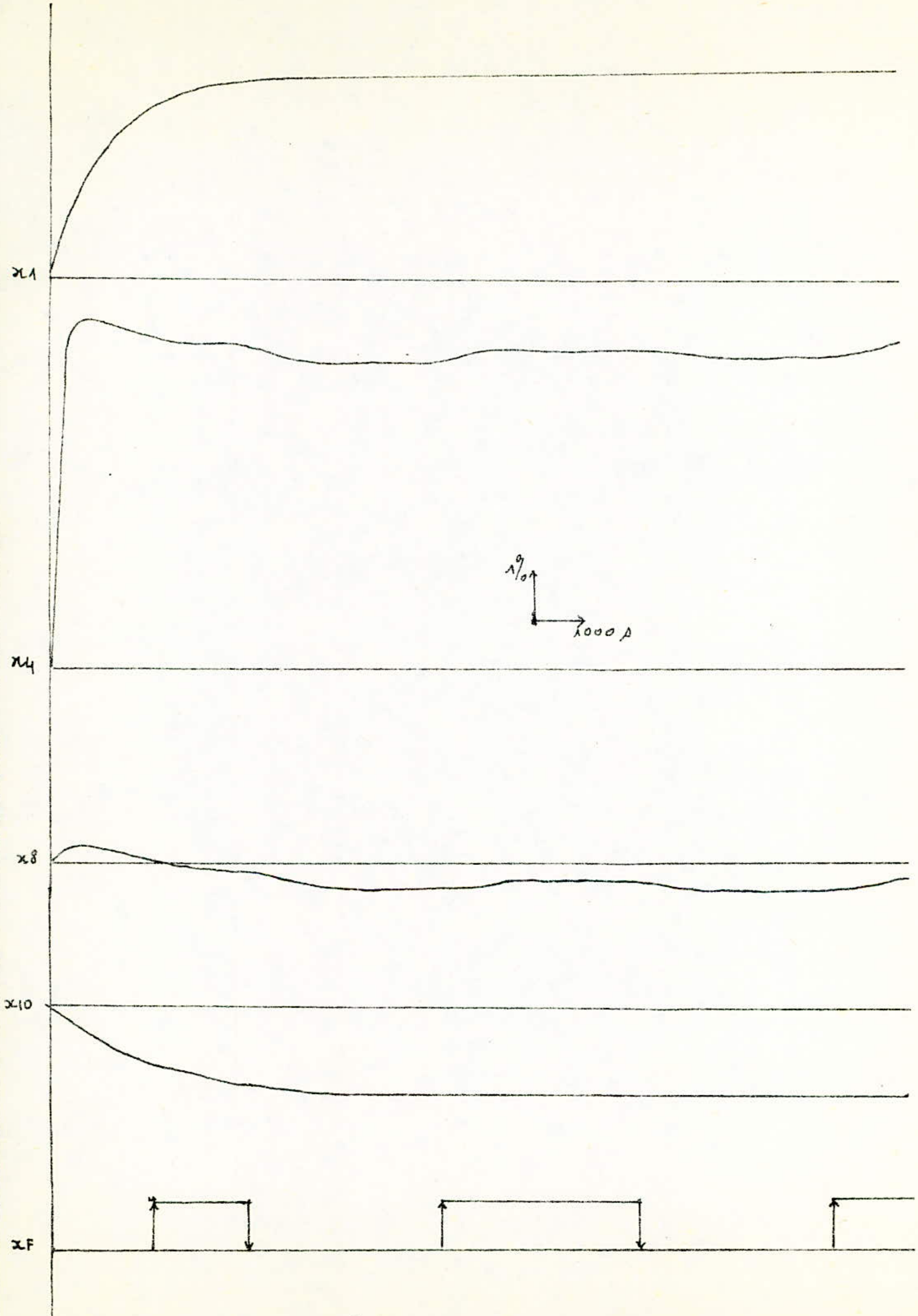
Il a eté effectué des echelons de consigne de 4%, -2% et 1% respectivement sur x_1, x_m et x_F

Les resultats obtenus sont dressés au tableau I

Le tracé effectué en fig(2) represente la variation de x_1, x_4, x_8 et x_{10} en fonction du temps.

TABLEAU. I.

x_i t(s)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0000	0,8906	0,8031	0,7219	0,6528	0,5984	0,5690	0,5214	0,4501	0,3548	0,2455
	0,9125	0,8612	0,7984	0,7250	0,6444	0,6037	0,5312	0,4547	0,3491	0,2388
1600	0,9224	0,8669	0,7993	0,7217	0,6394	0,6002	0,5387	0,4520	0,3454	0,2344
2400	0,9269	0,8683	0,7987	0,7198	0,6390	0,5986	0,5363	0,4492	0,3426	0,2314
	0,9289	0,8696	0,7982	0,7187	0,6378	0,5978	0,5356	0,4482	0,3410	0,2294
4000	0,9298	0,8699	0,7978	0,7178	0,6369	0,5969	0,5347	0,4472	0,3398	0,2281
	0,9302	0,8700	0,7970	0,7153	0,6321	0,5930	0,5319	0,4454	0,3387	0,2272
	0,9303	0,8701	0,7967	0,7147	0,6314	0,5921	0,5308	0,4445	0,3380	0,2266
	0,9304	0,8701	0,7966	0,7145	0,6312	0,5918	0,5305	0,4441	0,3378	0,2262
	0,9304	0,8701	0,7966	0,7145	0,6311	0,5917	0,5304	0,4439	0,3374	0,2259
8000	0,9304	0,8701	0,7966	0,7144	0,6311	0,5916	0,5303	0,4438	0,3372	0,2257
	0,9304	0,8701	0,7973	0,7166	0,6354	0,5949	0,5325	0,4449	0,3375	0,2256
	0,9304	0,8701	0,7974	0,7169	0,6358	0,5956	0,5332	0,4454	0,3377	0,2255
	0,9304	0,8701	0,7974	0,7169	0,6359	0,5957	0,5335	0,4455	0,3377	0,2255
12000	0,9304	0,8701	0,7974	0,7169	0,6359	0,5957	0,5333	0,4455	0,3377	0,2255
	0,9304	0,8701	0,7968	0,7148	0,6316	0,5924	0,5311	0,4443	0,3373	0,2255
	0,9304	0,8701	0,7966	0,7145	0,6311	0,5917	0,5304	0,4438	0,3371	0,2255
	0,9304	0,8701	0,7966	0,7144	0,6310	0,5916	0,5303	0,4437	0,3371	0,2255
	0,9304	0,8701	0,7966	0,7144	0,6310	0,5916	0,5303	0,4437	0,3371	0,2255
16000	0,9304	0,8701	0,7966	0,7144	0,6310	0,5916	0,5303	0,4437	0,3371	0,2255
	0,9304	0,8701	0,7972	0,7165	0,6354	0,5949	0,5324	0,4449	0,3374	0,2265
	0,9304	0,8701	0,7974	0,7169	0,6358	0,5956	0,5332	0,4454	0,3376	0,2255
	0,9304	0,8701	0,7974	0,7169	0,6359	0,5957	0,5333	0,4455	0,3377	0,2255
	0,9304	0,8701	0,7974	0,7169	0,6359	0,5957	0,5333	0,4455	0,3377	0,2255
20000	0,9304	0,8701	0,7974	0,7169	0,6359	0,5957	0,5333	0,4455	0,3377	0,2255



fig(2)

TABLEAU II

x_i $\Delta x/x$ %	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	0,9040	0,8701	0,7974	0,6169	0,6359	0,5957	0,5353	0,4455	0,3377	0,2255
1	0,9040	0,8701	0,7974	0,6169	0,6359	0,5957	0,5353	0,4455	0,3377	0,2255
2	0,9040	0,8701	0,7974	0,6169	0,6359	0,5957	0,5353	0,4455	0,3377	0,2255
3	0,9040	0,8701	0,7974	0,6169	0,6360	0,5957	0,5353	0,4455	0,3377	0,2255
5	0,9040	0,8701	0,7974	0,6169	0,6361	0,5957	0,5353	0,4455	0,3377	0,2255
7	0,9040	0,8701	0,7974	0,6169	0,6362	0,5957	0,5353	0,4455	0,3377	0,2255
8	0,9040	0,8701	0,7974	0,6169	0,6363	0,5957	0,5353	0,4455	0,3377	0,2255
9	0,9040	0,8701	0,7974	0,6169	0,6364	0,5957	0,5353	0,4455	0,3377	0,2255
10	"	"	"	"	0,6365	"	"	"	"	"
11	"	"	"	"	0,6367	"	"	"	"	"
13	"	"	"	"	0,6370	"	"	"	"	"
16	"	"	"	"	0,6375	"	"	"	"	"
18	"	"	"	"	0,6379	"	"	"	"	"
20	"	"	"	0,7170	0,6384	"	"	"	"	"
22	"	"	"	"	0,6389	"	"	"	"	"
24	"	"	"	"	0,6395	"	"	"	"	"
26	"	"	"	"	0,6401	0,5958	"	"	"	"
30	"	"	"	"	0,6414	"	"	"	"	"
32	"	"	"	"	0,6422	"	"	"	"	"
34	"	"	"	0,7171	0,6430	0,5959	"	"	"	"
36	"	"	"	"	0,6438	"	"	"	"	"
38	"	"	"	"	0,6447	"	"	"	"	"
40	"	"	"	"	0,6452	"	"	"	"	"

5.4. Remarques :

1°) La methode d'intégration est bien convergente d'après les resultats obtenus

2°) La valeur de x_F a eté changée alternativement de ± 1% après 33mn puis encore 33 mn, puis 67 mn en 67 mn durant tout le fonctionnement de la colonne.

3°) Partis de l'etat stable trouvé (voir tableau I), il a eté effectue des echelons de consignes progressifs de 1% jusqu'à 40% sur x_F (ceci toutes les 0,5 secondes), les resultats dressés au tableau II montrent que ces perturbations n'affectent en aucun cas les sortie x_1 et x_n qui restent toujours constantes.

5.5. Interpretation des resultats :

a) On voit que tous les x_i sont dans l'ouvert $]0,1[^n$, alors les resultats obtenus ont un sens.

b) les variations de x_F n'influent pas sur les sorties x_1 et x_n (fig (2)) ce qui nous permet de dire que le decouplage est realisé pour ces dernières avec u_1 et u_2 trouvées en V

c) $u_1^0 = 0{,}0021$, $u_{20} = 0{,}0035$ (valeurs à l'etat initial)

$u_1^* = 0{,}0034$, $u_2^* = 0{,}0048$ (" " " final)

On voit que $u_1^* > u_1^0$ et $u_2^* > u_2^0$. Le resultat etait previsible du fait qu'il faut augmenter aussi bien la chauffe que le reflux pour diminuer x_n et augmenter x_1

Nous pouvons alors conclure que la distillation se fait dans de bonnes conditions avec les commandes u_1 et u_2

d) L'etat stable final est atteint au bout de 3^h environ avec une erreure de 2/10000 sur x_1 et 0 sur x_n, ce qui est en parfait coherence avec la realité.

VI. CONCLUSIONS

1) Les commandes u_1 et u_2 trouvées en V fonctionnent bien, à condition de se placer dans les boules fermées $\overline{B}_1(x^*, 4\%)$ et $\overline{B}_n(x^*, 2\%)$ respectivement pour x_1 et x_n. Toute fois, il serait possible de réaliser de meilleures performances sur x_1 et x_n et d'améliorer le temps de réponse, etc, en diminuant τ_1 et τ_2 tout en faisant attention de ne pas "casser le système".

2) Nous pensons que la détermination des commandes par retour d'état non linéaire puissent améliorer les résultats obtenus par les techniques de linéarisation autour du point d'équilibre.

3) Il serait intéressant de particulariser ces résultats à un cas concrêt de colonne, ce qui est loin d'être banal et peut faire l'objet d'un autre projet.

4°) Dans cette étude, il est fait abstraction de complète contrôlabilité et stabilité du système, notions qui restent floues dans le non linéaire, en particulier la stabilité qui n'a été étudiée que dans des cas particuliers.

Compte tenu de tout cela, nous sommes conscients que notre travail reste à complémenter et ne peut présenter qu'un début d'applica du D.D.P et de la contrôlabilité dans les systèmes non linéaires

Bibliographie

[1]. S. BACHA - M. IDIR : "Approche géométrique du problème de la rejection des perturbations (D.D.P), Application à un modèle non.Linéaire de colonne à distiller".
Projet de fin d'étude - E.N.P.A - Promotion janvier 1982.

[2]. M. Mention, G. Gobon, J. Mercier : "Distillation : étude théorique".
Techniques de L'ingénieur - génie chimique - T. 3

[3]. T. Takamatsu, I. Mashimoto, Y. Nakaï : "A Géométric approch to Multivariablescontrol system disign of a distillation Column"
Automatica, Vol. 15. P.p. 387-402 (Mars 1979)

[4]. G. Bonard. "Contribution à l'étude des modèles de colonnes à distiller" - thèse d'état - Université de Grenoble (1971)

[5]. G. Bornard - JP. Gauthier : "Modélisation dynamique des colonnes à distiller". (*)

[6]. A. Isidori : "sur la théorie structurelle et le problème de la rejection des perturbations daus les systèmes non. Linéaires" (*)

[7]. A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori. Giorgi, S. Monaco : "Non. Linear decoupling via feedback : a differential geometric approch"
I.E.E.E trans. Aut. Control (1979).

[8] R.M. Hirshorn : "(A B)-invariance distribution and the disturbance problem, decouplin problem of non-Lineoir system".
SIAMJ. Control and optisation. Vol. 19. N°1 (Janvier 1981)

[9]. J.P. Gauthier : "Structure des systèmes non Linéaires" (à paraitre)

[10]. C. Lobry : "Controlabilité des systémes non. Linéaires" (*)

[11]. R. Hermann, A.J. Krener : "Non Linear controlability and observability"
I.E.E.E trans. Aut. Control Volume AC-22 N°5 (1977)

[12]. Jean. François LevenQ: "Le Fortran: Langage scientifique des ordinateurs". Editions DUNOD - PARIS 1971.

[13]. M. Dreyfus: "Fortran IV". 4ème édition DUNOD - 1970.

Autres références:

[14]. H. Nijmeijer: "controlled invariance for affine control syster Stiching Mathematic Centrum (1981)

[15]. L. Auslander, R.E. Mackenzie: "Introduction to differentiable manifolds". Dover plublication (1977).

[16]. Laurent. Schwartz: "cours d'analyse" Tome I et II Editions HERMANN - PARIS 1967.

[17] - Pontriaguine: "Equations différentielles ordinaires". Editions MIR. Mos

[18] - V. Smirnov: "Cours de mathématiques supérieurs". Tome II. Editions MIR. Mosc -197

[19]. M. Berger, B. Gostiaux: "Géométrie différentielle". - Maitrise de Mathématiques - Collection U Librairie . ARMAND. COLLIN. PARIS 1972.

(*) "Outils et modéles mathématiques pour L'automatique, L'analyse des systé et le traitement du signal". Vol 1. Editions du CNRS (1981).