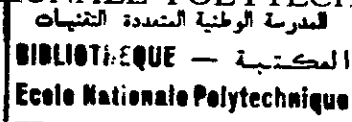


MINISTRE AUX UNIVERSITES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



THESE

Pour l'Obtention du Diplôme de
MAGISTER en GENIE ELECTRIQUE
OPTION Machines Electriques

CONTRIBUTION A L'OPTIMISATION DU
COUPLE D'UNE MACHINE A AIMANTS
PERMANENTS EN UTILISANT
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Par

Karim ALITOUCHE

Ingénieur d'Etat en Electrotechnique

INES BEJAIA

Soutenue le 19 Juillet 1992

devant la Commission d'Examen:

- M. E. ZAIM
- S. DJEMA
- A. REZZOUG
- A. BOUBEKEUR
- H. MAAZI
- S. TAHI

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE AUX UNIVERSITES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

THESE

Pour l'Obtention du Diplôme de
MAGISTER en GENIE ELECTRIQUE
OPTION Machines Electriques

CONTRIBUTION A L'OPTIMISATION DU
COUPLE D'UNE MACHINE A AIMANTS
PERMANENTS EN UTILISANT
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Par

Karim ALITOUCHE

Ingénieur d'Etat en Electrotechnique

INES BEJAIA

Soutenu le 19 Juillet 1992

devant le la Commission d'Examen:

- M. E. ZAIM
- S. DJEMA
- A. REZZOUG
- A. BOUBEKEUR
- H. MAAZI

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur

A ma famille;
A mes ami(e)s.

Vladimir: Qu'est-ce qu'on fait
maintenant?

Estragan: On attend.

Vladimir: Oui, mais en attendant?

Estragan: Si on se pendait?

(In "En attendant Godot" Samuel Beckett)

Je tiens à remercier vivement M^{me} S. DJEMA pour l'aide qu'elle m'a apportée par ces conseils éclairés et son attachement à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens, également, à exprimer toute ma gratitude à M^r A. Rezzoug pour son aide sans relâche; ce qui a permis de mener à terme ce travail.

Qu'ils soient assurés de ma sincère reconnaissance.

Je remercie très respectueusement M^r M.E. ZAIM qui a accepté de présider le jury, ainsi que MM A.Boubekeur, H.MAAZI et S.TAHI qui m'ont fait l'honneur d'y participer.

Je remercie très sincèrement M^r R.IBTIOUENE pour les nombreuses discussions que nous avons eues.

Que M^{me} N.YAKER, M^{lle} H.SAHRAOUI et MM R.SAOU, A.OULDTAHAR, et Y.AIT-GOUGAM me permettent de leurs dire simplement MERCI ! (Ils doivent certainement connaître les raisons).

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE 5

CHAPITRE I : PRESENTATION DE LA MACHINE SYNCHRONE
 A AIMANTS PERMANENTS 9

 INTRODUCTION 10

 I.1. CARACTERISTIQUES GENERALES 10

 I.1.1. Caractérisation d'un Aimant Permanent 10

 I.1.2. Evolution des Aimants 12

 I.1.3. Eléments de Comparaison entre Aimants 12

 I.1.3.1. Propriétés magnétiques 12

 I.1.3.2. Propriétés mécaniques 12

 I.1.3.3. Propriétés physico-chimiques 15

 I.1.3.4. Aspect économique 16

 I.2. GENERALITES SUR LES MACHINES A AIMANTS
 PERMANENTS 17

 I.2.1. Structures Munies de Pièces Polaires 18

 I.2.2. Structures sans Pièces Polaires 18

 I.2.3. Structures à Aimants Inclus dans le Rotor... 20

 I.2.4. La Machine à Aimants Incérés dans le Rotor.. 20

 I.3. MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTEE 21

 I.3.1. Principe de Fonctionnement 22

 I.3.2. Inconvénients du Fonctionnement Autopiloté.. 26

CONCLUSION 26

CHAPITRE II : MODELISATION DE LA MACHINE SYNCHRONE
 A AIMANTS INCERES DANS LE ROTOR 27

 INTRODUCTION 28

 II.1. DESCRIPTION DE LA MACHINE A AIMANTS INSERES

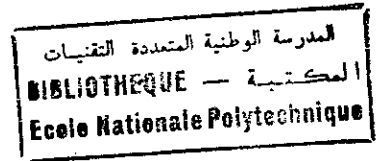
II.2. REPRESENTATION DES AIMANTS	30
II.2.1. Représentation Ampérienne des Aimants.....	30
II.2.2. Représentation Coulombienne des Aimants...	31
II.3. REPRESENTATION DES COURANTS STATORIQUES	32
II.4. FORMULATION DU PROBLEME A RESOUDRE	34
II.4.1. Equations du Champ Electromagnétique.....	34
II.4.2. Conditions aux Limites.....	37
II.4.3. Conditions de Passage aux Interfaces entre Milieux	38
 CONCLUSION	 39
 CHAPITRE III : METHODE DE RESOLUTION	 40
INTRODUCTION	41
III.1. FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME	42
III.2. FORMULATION VARIATIONNELLE	43
III.3. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	45
III.3.1. Discrétisation et Approximation.....	45
III.3.1.1. Le maillage du domaine.....	45
III.3.1.2. La fonction d'approximation..	45
III.3.2. Minimisation de la Fonctionnelle.....	47
III.3.3. Intégration	51
III.4. ASSEMBLAGE ET RESOLUTION	53
III.4.1. Assemblage	53
III.4.2. Résolution du Système Algébrique.....	54
 CONCLUSION	 55
 CHAPITRE IV : SYSTEME INFORMATIQUE UTILISE	 56
INTRODUCTION	57

IV.1. MOYENS INFORMATIQUES UTILISES	57
IV.2. LE PROGRAMME EF35MAIL	58
IV.3. LE PROGRAMME EF30CHAMP	60
IV.3.1. Le Programme Principal	61
IV.3.2. Les Sous-Programmes	63
CONCLUSION	73
CHAPITRE V : OPTIMISATION DES PARAMETRES GEOMETRIQUES DU ROTOTR DE LA MACHINE ETUDIEE	74
INTRODUCTION	75
V.1. OPTIMISATION DU COUPLE	75
V.1.1. Effet de la Largeur des Pièces Polaires.....	76
V.1.2. Effet de l'Ouverture des Aimants.....	80
V.1.3. Effet de la Hauteur des Aimants.....	81
V.2. ANALYSE DU COUPLE	82
V.2.1. Influence des Pièces Polaires.....	83
V.2.2. Influence des Courants Statoriques.....	84
CONCLUSION	84
CONCLUSION GENERALE	85
ANNEXES	88
ANNEXE I	89
ANNEXE II	96
ANNEXE III	100
ANNEXE IV	103
BIBLIOGRAPHIE	105

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION
GENERALE

INTRODUCTION



Le développement parallèle des matériaux magnétiques (essentiellement des aimants permanents) et de l'électronique de puissance est à l'origine de la conception d'un nouveau type de machines à commutateur électronique excitées par aimants.

En effet, le marché mondial des aimants permanents prévoit une croissance de 10% par an pour ce matériau, présent dans de nombreux secteurs de l'économie: télécommunication, informatique, matériel médical, machines-outil, ... etc, à travers des moteurs électriques de faible ou moyenne puissance. L'analyse des caractéristiques des moteurs à aimants montre plusieurs effets favorables sur les coûts de fabrication, d'investissement et de maintenance et bien que le prix des derniers aimants apparus (Nd Fe B) soit encore trop élevé, les prévisions du marché sont optimistes.

Une très forte impulsion a été donnée aux machines à aimants, avec des aimants associant: terres-rares/métaux de transition, essentiellement pour les moteurs de type synchrone. Le couple, dans ce cas, est optimisé par l'association de convertisseurs statiques permettant une vitesse variable et un positionnement du champ magnétique induit par rapport à l'axe de l'aimant.

Ce type de moteurs, grâce à leur possibilité d'adaptation, constituent la base d'une "électrotechnique nouvelle"[1]: la conception des systèmes électromécaniques de poids réduit permet la production de la force motrice à l'endroit choisi, ainsi que l'amélioration des possibilités de sa transmission par la suppression de certains organes mécaniques. Ainsi, les machines à aimants permanents présentent un rapport couple/volume de l'ordre de 2 fois plus grand que celui obtenu sur les machines à excitation électrique. Cet écart est beaucoup plus élevé, dans le cas des machines à grand nombre de pôles[2].

A celà, il faut ajouter la réduction des bruits et de la maintenance due à l'absence de contacts mécaniques.

La conception d'une machine électrique qui soit la plus performante possible au meilleur coût préoccupe l'industriel. Il en découle une optimisation qui doit porter non seulement sur la forme des divers sous-ensembles constructifs, mais aussi sur le choix des matériaux.

Nous proposons, dans ce travail l'optimisation des paramètres rotoriques d'une structure déterminée de machine à aimants permanents. Pour ce faire, le calcul de la répartition du champ dans la machine s'avère nécessaire.

La méthode numérique des éléments finis (M.E.F) à été choisie pour répondre à cette exigence. Cette méthode qui est apparue au début des années 60 [3] a été appliquée au domaine de l'électromagnétisme aux alentours de 1970 [4]. Elle est pensée en terme d'extréma de fonctionnelles d'énergie.

Si cette vision est très naturelle pour les physiciens et peut être plus particulièrement pour Electrotechniciens, elle ne peut prétendre avoir toute la généralité que seule l'approche mathématique formelle possède [5].

Ce travail est présenté en cinq chapitres:

Dans le chapitre I, nous présentons la classification des aimants permanents et celle des différentes structures de machines excitées par aimants.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des divers sources dans la machine étudiée ainsi qu'à la formulation des équations à résoudre pour le calcul de la répartition du champ.

Dans le chapitre III, nous proposons la formulation du problème précédent sous une forme intégrale en utilisant le principe variationnel appliqué aux éléments finis.

La mise en oeuvre de la méthode numérique ci-dessus (M.E.F.) fera l'objet du chapitre IV.

Dans le dernier chapitre seront présentés l'occasion de présenter les résultats de l'optimisation de la machine calculée.

En conclusion, nous tenterons de dégager les perspectives ouvertes par ce travail.

CHAPITRE I

..... PRESENTATION DE LA MACHINE
SYNCHRONE
A AIMANTS PERMANENTS

CHAPITRE I
PRESENTATION DE LA MACHINE SYNCHRONE
A AIMANTS PERMANENTS

INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, nous nous proposons de présenter une classification des matériaux magnétiques pour aimants permanents, ainsi qu'une comparaison des performances des aimants utilisés dans les machines électriques.

Après une synthèse des différentes structures de rotor de machines d'excitation par aimants, nous nous intéressons spécialement à la structure (aimants insérés dans le rotor) et au mode d'alimentation (autopilotage) de la machine étudiée.

I.1. CARACTERISTIQUES GENERALES:

Les aimants permanents ont un rôle très important en construction électriques. Ils imposent, souvent, les performances limites des équipements; c'est, également, le cas des machines synchrones autopilotées excitées par des aimants permanents [6].

Les aimants constituent une source de champ magnétique statique. Ce sont des matériaux qui conservent une aimantation même quand ils sont plongés dans des champs extérieures défavorables dont les valeurs se situent dans des limites raisonnables. D'où l'appellation qui les qualifie de permanents.

Actuellement, on compte 3 grandes familles d'aimants permanents:

- les Alnico;
- les ferrites;
- les alliages à base de terres-rares.

I.1.1. Caractérisation d'un Aimant Permanent:

Les principales caractéristiques des aimants sont données par le cycle d'hystérésis $B(H)$ et par leur tenue à la température. Le deuxième quadrant de ce cycle ($B > 0, H < 0$) appelé

courbe de désaimantation (fig. I.1.) est le domaine de fonctionnement de l'aimant, quand ce dernier est soumis à un champ magnétique extérieur démagnétisant. cette courbe donne :

- L'induction rémanente B_r , c'est-à-dire l'induction résiduelle en circuit fermé;

- Le champ coercitif H_c , qui est le champ démagnétisant nécessaire à l'annulation de l'induction; plus sa valeur est élevée plus l'aimant est stable;

- Le produit d'énergie volumique $(BH)_{\max}$, qui définit la valeur énergétique de l'aimant par unité de volume;

- Les valeurs H_m et B_m du point de fonctionnement optimal M (intersection de la caractéristique externe et de la courbe de désaimantation de l'aimant) correspondant à $(BH)_{\max}$.

Ce sont ces paramètres plus leur tenue à la température (température de Curie (Tableau 2)) qui déterminent le choix des aimants.

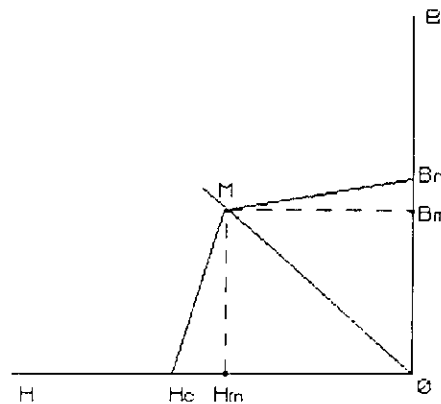


Fig. I.1. Courbe de désaimantation.

I.1.2. Evolution des Aimants:

Les premiers matériaux pour aimants modernes sont apparus dans les années 30 suite aux travaux de M.MICHIMA, le père des aimants à base de fer, nickel, aluminium et cobalt appelés Alnico.

Depuis, l'utilisation et l'exploitation industrielle de ce type d'aimants n'a pas cessé de croître. Actuellement, il représente environ 20% du chiffre d'affaire total relatif au marché des matériaux magnétiques durs(fig.I.2.).

Les années 60 ont vu le développement industriel des aimants de type ferritique, qui sont aujourd'hui les plus utilisés.

Un second souffle eu lieu au milieu des années 70 avec l'apparition des aimants aux terres-rares (Sm Co_5 et $\text{Sm}_2 \text{Co}_{17}$). Malgré leur prix de revient très élevé, ces matériaux retiennent l'attention des constructeurs, car ils permettent d'atteindre des performances jamais égalées.

Enfin, les Nd-Fe-B font leur apparition en 1983 à la suite des développements effectués pour tenter de remplacer les composants des aimants samarium-cobalt par des éléments moins rares et moins coûteux. Ces derniers sont en voie d'industrialisation mais certains inconvénients font encore l'objet d'une multitude de travaux[2].

I.1.3. Eléments de Comparaison entre Aimants:

I.1.3.1. Propriétés magnétiques:

L'aimant permanent le plus performant est caractérisé par le cycle d'hystérésis le plus large c'est-à-dire: l'induction rémanente B_r la plus grande et le champ coercitif H_c le plus élevé. Le tableau 1 et la figure I.3. résument les caractéristiques magnétiques des différents aimants que nous avons cités ci-dessus.

I.1.3.2. Propriétés mécaniques:

Si les propriétés magnétiques constituent les principaux critères dans le choix des aimants, d'autres critères

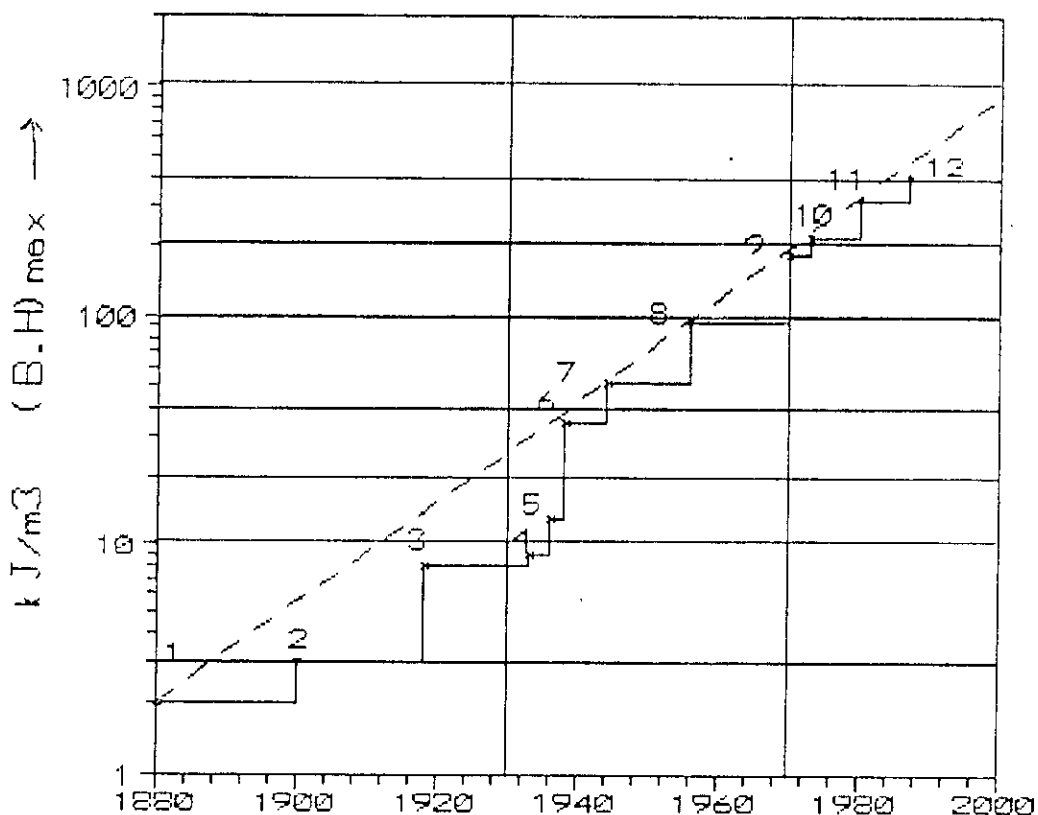


Fig.I.2. Evolution du produit $(BH)_{\max}$ des aimants[7].

1. acier au carbone; 2. acier au tungstène; 3. acier au cobalt; 4,5. Alnico; 6,7,8. Ticonal; 9,10,11. Sm Co; 12. Nd Fe B (1987).

se révèlent parfois déterminants pour des applications spécifiques. Du point de vue mécanique, les aimants sont en général des matériaux durs. La plupart sont fragiles, tels les ferrites qui sont des matériaux céramiques, mais c'est aussi le cas des aimants métalliques les plus connus (Sm-Co et Alnico), qui sont, en plus, difficiles à usiner et nécessitent l'emploi de meules diamantées.

Type d'aimants	Induction rémanente B_r (T)	Champ coercitif H_c (KA/m)	Perméabilité relative μ_r
Ferrites	0.39	256	1.01
Alnico v	1.28	50	3
Sm Co ₅	0.90	700	1.02
Sm ₂ Co ₁₇	1.07	720	1.05
Nd ₂ Fe ₁₄ B	1.22	900	1.05

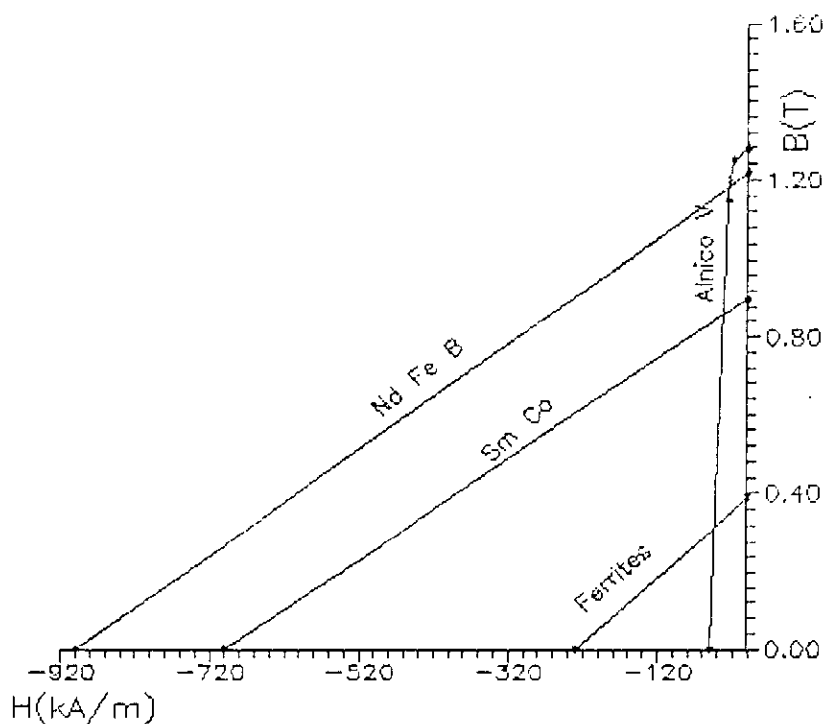


Fig.I.3. Courbes de désaimantation des différents aimants.

L'obtention de tolérances mécaniques serrées et d'un bon état de surface revient, alors, très cher.

Les valeurs de la dureté pour un certain nombre de types d'aimants sont données (tableau 2).

I.1.3.3. Propriétés physico-chimiques:

Le tableau 2 indique les valeurs de paramètres représentant les propriétés physico-chimiques des aimants.

Tableau 2.-Exemples des propriétés mécaniques et physico-chimiques des aimants				
Type d'aimants	Ferrites	Alnico	Samarium-Cobalt	Nd-Fe-B
Température de Curie(°C)	450	740 à 860	720 à 820	320
Température limite d'utilisation(°C)	350	450 à 500	250 à 350	~ 150
Stabilité thermique(%K ⁻¹) $\alpha = -\Delta Br / Br \cdot \Delta t$	-0.2		3 à 4	1.26
Stabilité thermique(%K ⁻¹) $\beta = -\Delta Hc / Hc \cdot \Delta t$	0.4		2	6
Masse volumique en 10 ³ (kg.m ⁻³)	4.8	7.3	8.3	7.4
Coefficient de dilatation en 10 ⁶ (K ⁻¹)	8 à 15	13	5 à 10	1 à 5
résistivité électrique(Ω.m)	10 ⁴	60 10 ⁻⁸	50 10 ⁻⁸	1.3 10 ⁻⁶
Dureté R:Rockwell V:Vickers		45 à 55 R	50 R 500 V	550 à 600 V
Résistance à l'oxydation	bonne	bonne	moyenne	médiocre
Résistance à la corrosion	bonne	bonne	médiocre	médiocre

Il apparaît que les matériaux céramiques de type ferritique offrent une bonne résistance à la corrosion et à l'oxydation, alors que les alliages à base de terres-rares et les alnico sont conducteurs électriques et très sensibles à la corrosion.

Les néodyme-fer-bore possèdent les caractéristiques les plus favorables, à température ambiante. Mais leurs performances décroissent en fonction de la température (température de Curie 310°C) comme l'attestent les constantes de stabilité thermique α et β de ce type d'aimant qui définissent la variation de B_r et H_c en fonction de la température.

La masse volumique est un paramètre important qui varie dans de fortes proportions et dont il faut tenir compte dans les applications.

Les aimants à base de terres-rares présentent l'énergie volumique et l'énergie massique les plus élevées et les Nd-Fe-B viennent en tête de liste.

I.1.3.4. Aspect économique:

L'aspect le plus important dans les différentes applications reste l'énergie stockée dans l'aimant. C'est pourquoi les coûts comparés des aimants sont donnés en J/kF (Joule/kilo francs). De ce point de vue, l'avantage est aux aimants de type ferrites dont le prix est d'environ 13 F/kg alors que le coût des Sm-Co est de 2000 F/kg. Le coût des Nd-Fe-B devrait être à terme inférieur à celui des Sm-Co; certaines estimations donnent un prix de 800 F/kg vers la fin de la décennie 90.

Les aimants (Nd-Fe-B) sont apparus comme une révolution dans l'industrie des matériaux magnétiques pour aimants permanents compte tenu de leur prix et de leurs performances. Leur développement n'a pas été aussi rapide que prévu mais leur facilité de mise en œuvre sous forme de polymères magnétiques alliée à leurs caractéristiques devrait conduire à une commercialisation à grande échelle de ce type d'aimants. Ceci, grâce aux nombreuses recherches entamées, relatives aux procédés de fabrication.

I.2. GENERALITES SUR LES MACHINES A AIMANTS PERMANENTS:

L'arrivée sur le marché de nouveaux aimants permanents à hautes performances permet d'envisager la réalisation de machines synchrones excitées par aimants.

De plus, le développement d'une électronique de puissance appropriée rend possible l'alimentation par autopilotage de ces machines.

Jusqu'à ce jour, pour la réalisation de servomoteurs électriques, on a le plus souvent fait appel à des machines à courant continu à collecteur mécanique spécialement conçues pour ce genre d'applications[8].

Cependant, de plus en plus, il apparaît clairement que les machines à aimants permanents et à commutation électronique peuvent remplacer avantageusement les machines à commutation mécanique.

Parmi les avantages des machines à aimants on peut citer:

- Les puissances massiques et volumiques importantes [9],[10];
- La grande facilité de refroidissement;
- Les faibles pertes rotoriques;
- L'absence de collecteur donc des frottements des balais.

Dans les années à venir ces nombreux avantages devraient, faire céder les dernières réticences à adopter, pour la réalisation des servomoteurs, les machines à aimants et à commutation électronique. Il faut noter que, pour justifier ces réticences, on invoque des raisons économiques qui ne sont recevables qu'à court terme (cf I.1.3.4). Souvent il en est ainsi, pour des produits en cour de développement et pour lesquels les techniques de fabrication ne sont pas totalement maîtrisées. C'est effectivement le cas pour les aimants modernes dont le coût ira en diminuant [11],[12].

La diversité des structures de rotor des machines excitées par aimants permanents ne permet pas de trancher si facilement pour la plus intéressante. Si l'on cherche à établir une

classification de ces différents prototypes, on pourrait penser à une distinction entre machines à entrefer radial [13],[14] et celles à entrefer axial [15],[16]. Cependant, pour mettre en évidence les propriétés spécifiques des machines à aimants, cette classification est moins intéressante qu'une classification basée sur la façon de disposer les aimants et de les associer avec les matériaux magnétiques, sans faire intervenir pour cela la direction de l'entrefer.

C'est ainsi que nous distinguons les classes de structures suivantes [17]:

I.2.1. Structures Munies de Pièces Polaires:

- Aimantation parallèle à l'entrefer (fig.I.4-a);
- Aimantation perpendiculaire à l'entrefer (fig.I.4-b);
- Aimantation mixte (fig.I.4-c).[18]

Dans ce type de machines l'inducteur est à poles saillants, et dans la plupart des configurations l'inductance directe L_d est inférieure à l'inductance transversale L_q (à l'inverse des machines classiques).

I.2.2. Structures sans Pièces Polaires:

- Aimantation perpendiculaire (fig.I.5-a);
- Aimantation mixte (fig.I.5-b).

Les aimants modernes ont une aimantation indépendante des excitations extérieures, leur perméabilité relative est très proche de celle de l'air (Tableau 1), ils se comportent vis-à-vis de ces dernières comme du vide. On peut considérer, d'une part, que l'inducteur est lisse et que d'autre part, la réactance synchrone de la machine est faible (entrefer "magnétique" équivalent très grand). Ces machines sont adaptées à la commande.

La tenue mécanique des aimants plaqués contre la surface de l'arbre de la machine est assurée par une frette amagnétique en fibre de verre ou de carbone.

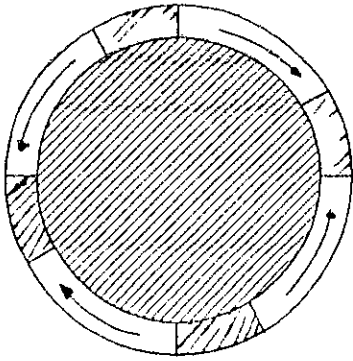


Fig.I.4-a. aimants
parallèles à
l'entrefer.

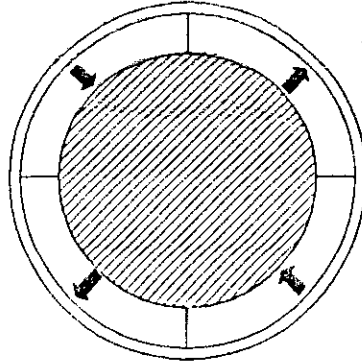


Fig.I.4-b. aimants
perpendiculaires
à l'entrefer.

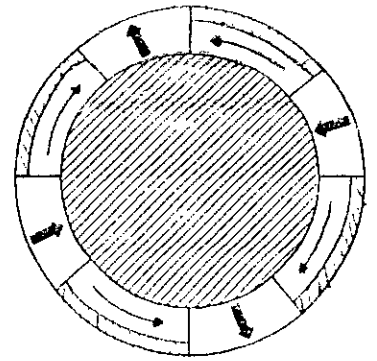


Fig.I.5-c. mixité
des directions.

Fig.I.4. Structures de rotors avec pièces polaires.

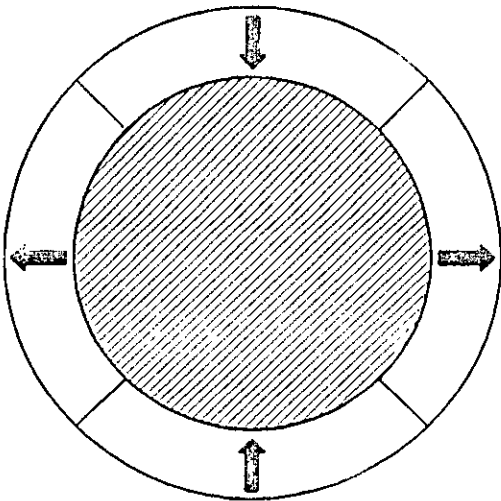


Fig.I.5-a. Aimants
perpendiculaires à
l'entrefer.

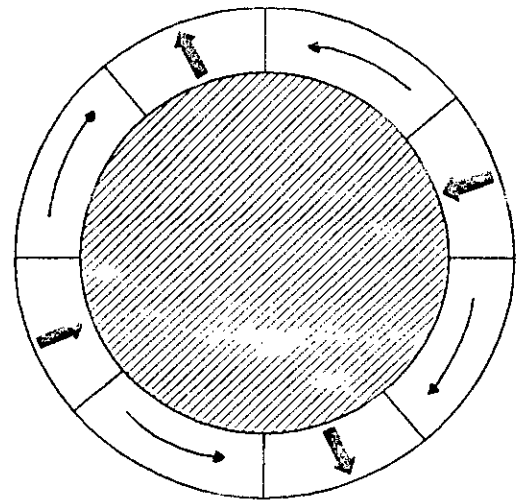


Fig.I.5-b. Mixité
des directions.

Fig.I.5. Structures de rotors sans pièces polaires.

I.2.3. Structures à Aimants Inclus dans le Rotor:

La structure avec des aimants inclus dans le rotor (fig.I.6-a) a semblé remporter un certain succès dans diverses applications [19]. M.A.Rahman souligne qu'une structure comme celle de la figure.I.6-b, où les aimants ont une géométrie radiale prédominante et sont disposés sous la cage d'écureuil, est avantageuse [20].

Cependant, les performances des aimants ne sont pas exploitées au mieux du fait de la saturation du fer[10] et la robustesse mécanique de ce type de moteurs ne peut justifier à elle seule cette solution. D'autant plus que, mécaniquement les techniques de frettage sont de mieux en mieux dominées.

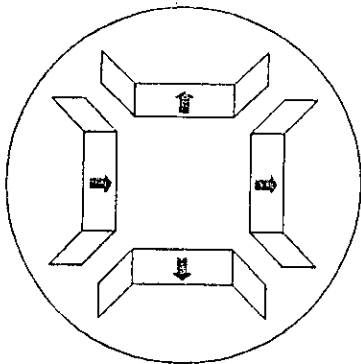


Fig.I.6-a.

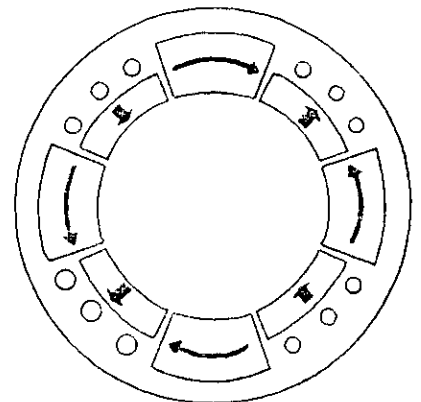


Fig.I.6-b.

Fig.I.6. Aimants inclus dans le rotor.

I.2.4. La Machine à Aimants Insérés dans le Rotor:

Parmi les publications abondantes dans ce domaine, la structure à aimants permanents d'aimantation radiale et à pièces interpolaire ferromagnétiques (aimants insérés dans le rotor) est celle qui a été retenue comme prototype dans cette étude (fig.I.7.). Les avantages recensés de cette structure sont:

a) Une réduction du volume d'aimant, particulièrement intéressante compte tenu de leurs coût[21],[22];

b) Une augmentation du couple par ampère (et les pertes cuivre diminuées);

c) Un domaine de variation de la vitesse étendu [23].

Cependant, il faut signaler que ce type de machine présente des pertes fer importantes [24].

Le stator cylindrique de la machine étudiée est réalisé matériau ferromagnétique, sur sa surface interne sont fraisées des encoches où loge le bobinage statorique.

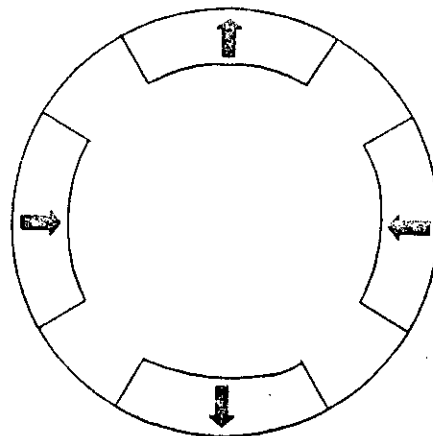


Fig.I.7. Aimants incérés dans le rotor.

Jusqu'ici, nous ne nous sommes intéressés qu'à la structure de la machine; nous abordons dans ce qui suit l'analyse de son fonctionnement en tenant compte de son alimentation.

I.3. MACHINE SYNCHRONNE AUTOPILOTEE:

Les limites d'utilisation du moteur à collecteur mécanique doublées du développement prodigieux de l'électronique de

puissance, ont poussé les constructeurs à chercher d'autres solutions. L'une d'elles est l'association moteurs à courant alternatif-convertisseurs statiques. L'étude du mode d'alimentation des machines synchrones en l'occurrence l'autopilotage à donné lieu à de nombreux travaux.

Dans un premier temps, nous décrivons le fonctionnement autopiloté; puis nous analysons ses inconvénients et la possibilité de les diminuer.

I.3.1. Principe de Fonctionnement:

La machine synchrone autopilotée est donc un dispositif à vitesse variable. La fréquence de l'alimentation délivrée par le convertisseur statique est asservie à la vitesse de rotation. Cet asservissement est assuré par un capteur de position.

La machine étudiée est supposée être alimentée par un convertisseur statique constitué de deux ponts de Graëtz triphasés, reliés par un circuit intermédiaire à courant continu (fig.I.8.).

Le premier pont (côté réseau) fonctionne en redresseur et délivre l'énergie active au circuit intermédiaire à courant

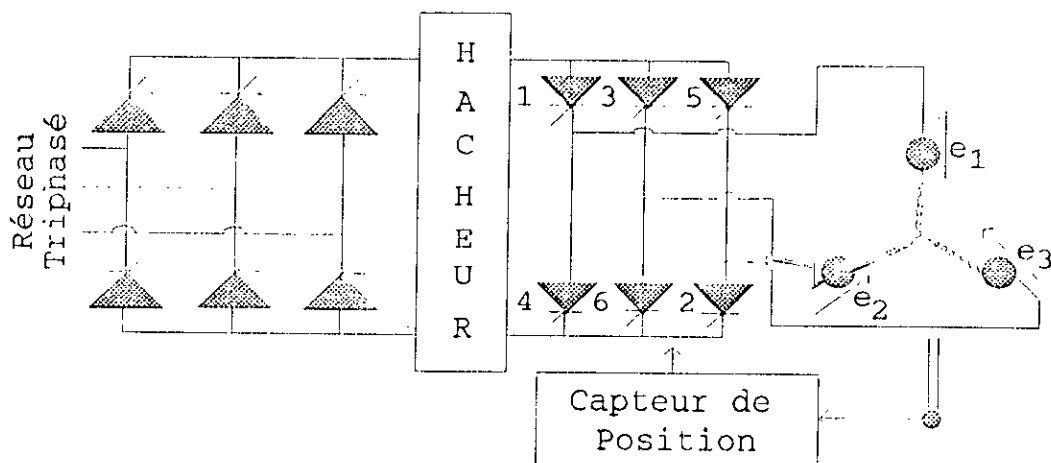


Fig.I.8. Schéma de principe de l'alimentation d'une machine synchrone autopilotée.

continu(hacheur), le deuxième pont (côté machine) joue le rôle d'un commutateur de courant et opère en onduleur assisté. La commutation des thyristors du deuxième pont est garantie, en dehors du démarrage et des basses vitesses, par les forces électromotrices de la machine [25]. Ce pont commute le courant continu d'une phase à une autre et crée ainsi un système de courants triphasés à fréquence variable, de forme rectangulaire et de durée égale à 120° (fig.I.9.).

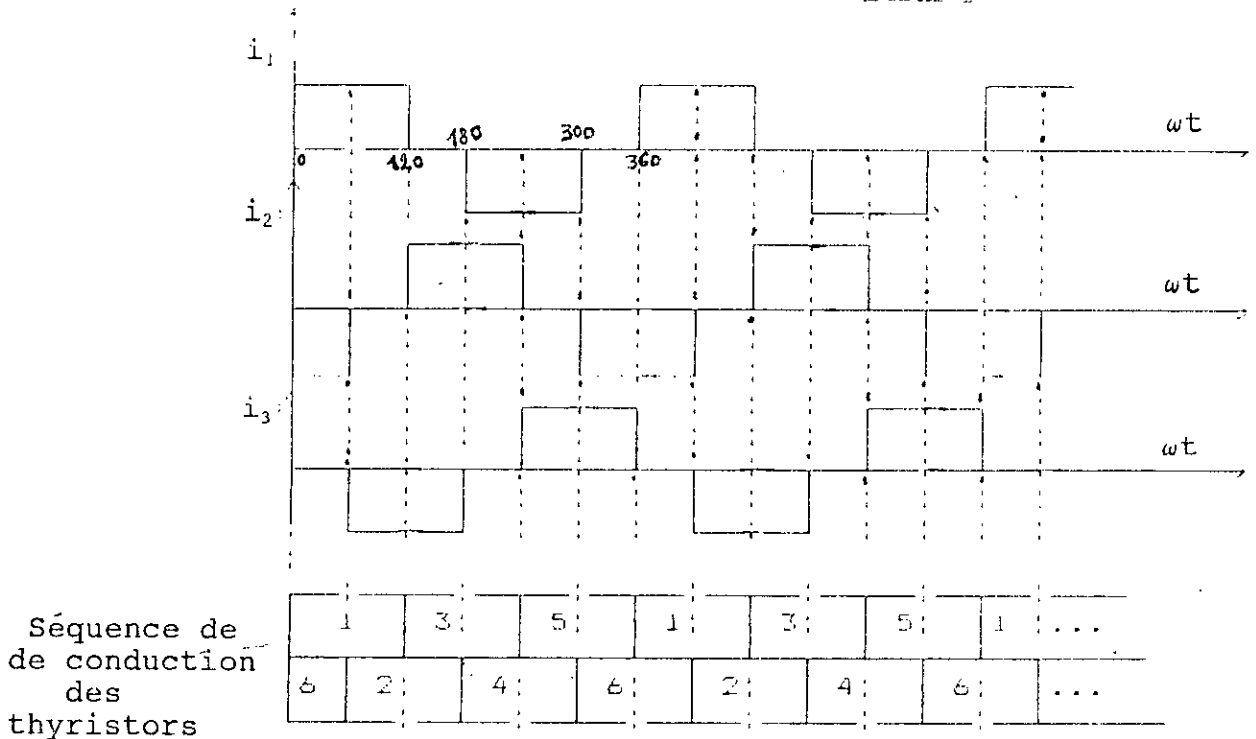
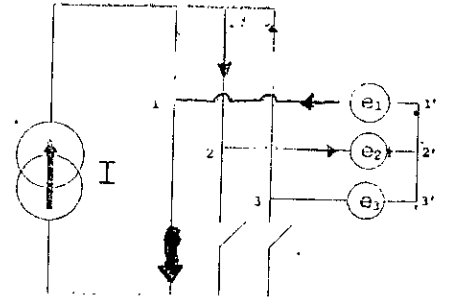
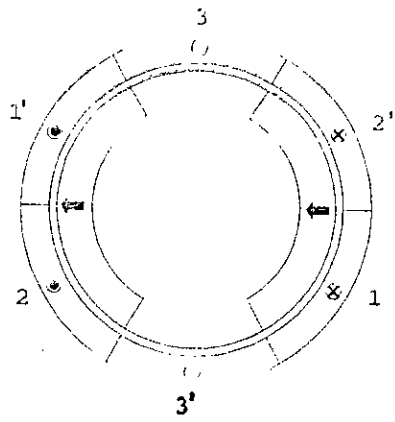
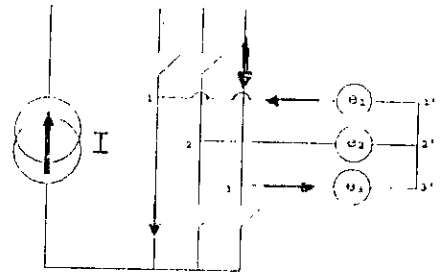
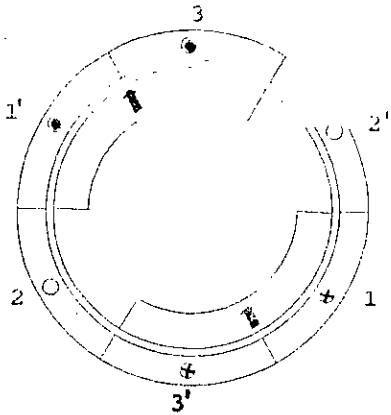


fig.I.9. forme des courants de phase en commutation naturelle.

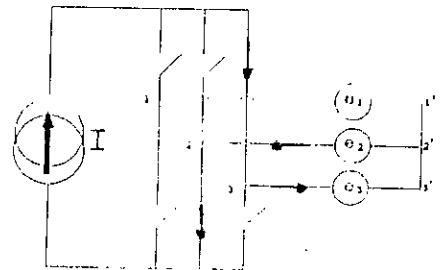
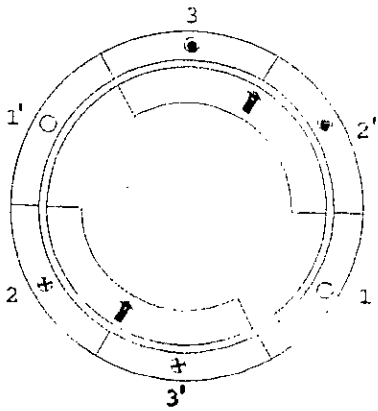
Pour mieux expliquer ce fonctionnement, nous considérons le cas simple d'une machine bipolaire (fig.I.10.). Nous supposons un fonctionnement en régime permanent, avec une alimentation à courant continu parfaitement lissé. Le capteur de position assure l'aiguillage convenable du courant dans les phases de la machine. Ce qui permet d'avoir le système de courants triphasés déjà cité, qui crée à son tour un champ tournant dans l'entrefer et, par conséquent, un couple moteur. Un tour complet du flux tournant nécessite six étapes ($n \times 6$ étapes dans le cas d'une machine à n paires de pôles).



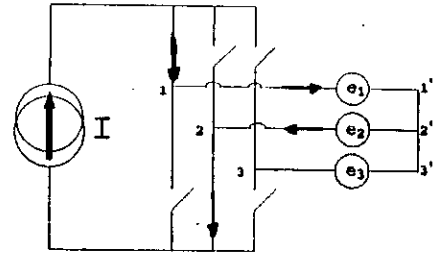
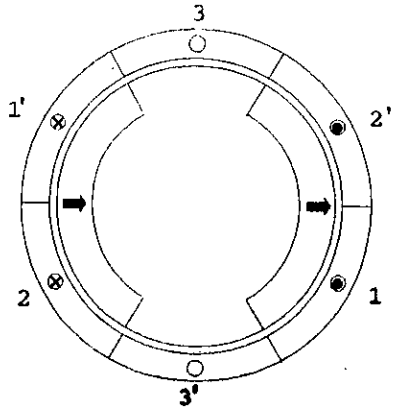
Etape 1.



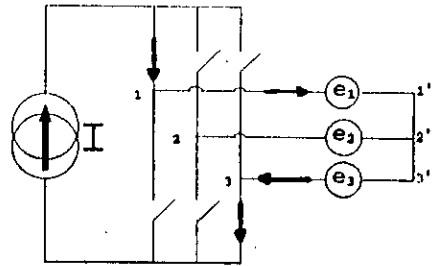
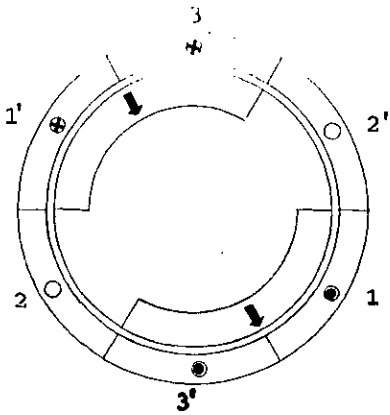
Etape 2.



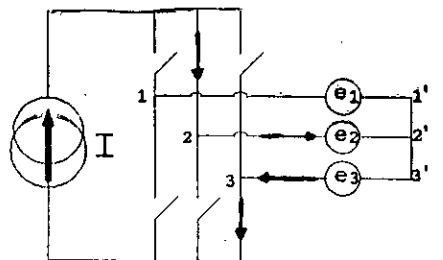
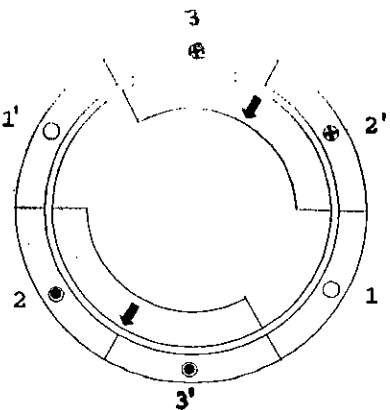
Etape 3.



Etape 4.



Etape 5.



Etape 6.

La figure I.10. montre les états des interrupteurs (thyristors), en indiquant à la fois, les phases alimentées, et la position du rotor. Chaque séquence dure $\pi/3\omega$ (s).

La description faite, jusqu'ici, correspond au mode de commutation naturelle et la commutation entre deux semi-conducteurs est supposée instantanée. Ce fonctionnement n'est possible qu'à partir d'un niveau de vitesse suffisant ($>10\% \Omega_n$). Ceci suppose qu'un fonctionnement particulier au démarrage doit être envisagé, il est appelé fonctionnement en commutation forcée.

I.3.2. Inconvénients du Fonctionnement Autopiloté:

L'inconvénient majeur du fonctionnement décrit dans le § précédent est celui de l'oscillation du couple. Les solutions proposées pour les réduire sont:

- les machines à enroulements dans l'entrefer [10],[26];
- L'amélioration de la commande des machines (recherche de la forme des courants la plus avantageuse) [27].

L'utilisation d'un contrôle par MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion) à des fréquences avoisinant 2 à 3 kHz constitue un progrès dans ce domaine. Le courant est, alors, un train d'impulsions de largeur modulable. Ce mode d'alimentation engendre cependant des pertes supplémentaires.

CONCLUSION:

En plus de leurs avantages sur les machines à collecteurs mécaniques, les machines autopilotées à aimants permanents insérés dans le fer rotorique présentent la possibilité très recherchée de réduction du volume d'aimant utilisé. L'étude qui va suivre concerne ce type de machines.

A énergie donnée, les aimants Nd-Fe-B, vont aussi dans le sens de la minimisation du volume nécessaire, comparés aux autres types d'aimants.

L'avantage qualité-prix des aimants Néodyme-Fer-Bore sur le reste des aimants n'ira qu'en s'accroissant, compte tenu du nombre de travaux consacrés au développement de ce type d'aimants.

CHAPITRE II

MODELISATION DE LA MACHINE SYNCHRONNE A AIMANTS INCERES DANS LE ROTOR

CHAPITRE II
MODELISATION DE LA MACHINE SYNCHRONE
A AIMANT INSERES DANS LE ROTOR

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre nous décrivons la structure de la machine étudiée, en précisant les notations utilisées. Nous décrivons, également, le modèle de représentation des aimants et des enroulements statoriques. Finalement, nous mettons en équation le problème du calcul du champ dans cette machine.

II.1. DESCRIPTION DE LA MACHINE A AIMANTS INSERES DANS LE ROTOR:

Notre étude porte sur une structure donnée de machine à aimants permanents. Ce type de machine, représenté schématiquement en figure II.1., est constitué :

- D'un stator cylindrique encoché en matériau ferromagnétique, le bobinage statorique est triphasé.
- D'un rotor en matériau ferromagnétique où sont insérés des aimants en tuile aimantés radialement. La tenue mécanique de ces derniers est assurée à l'aide d'une frette en matériau amagnétique.

Nous étudions la machine sur une structure développée (fig.II.2) en admettant que son rayon de courbure est infini. Cette hypothèse fréquemment utilisée conduit à des erreurs acceptables tant que l'épaisseur de l'entrefer est faible devant le rayon de la machine[28],[29].

Les notations utilisées pour les différentes grandeurs géométriques de la machine sont :

- α : la demi-ouverture des aimants;
- β : la demi-ouverture des dents ferromagnétiques du rotor;
- ϵ : l'écart entre l'aimant et le fer adjacent;
- h : la hauteur de l'aimant;
- e : la largeur de l'entrefer.

La relation entre ces différentes grandeurs et le pas polaire r est :

$$r_p = 2(\beta + \alpha + \epsilon)$$

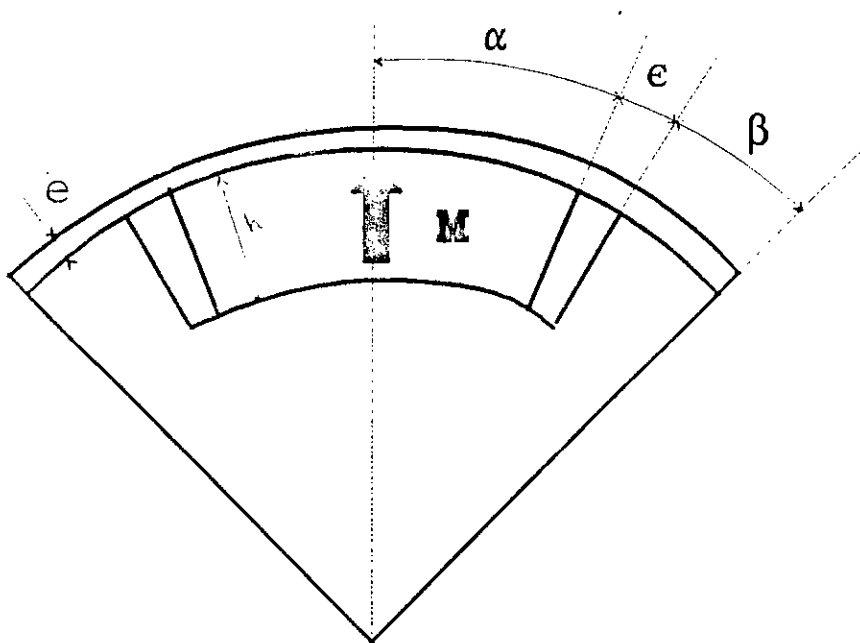


Fig.II.1. Structure de la machine étudiée.

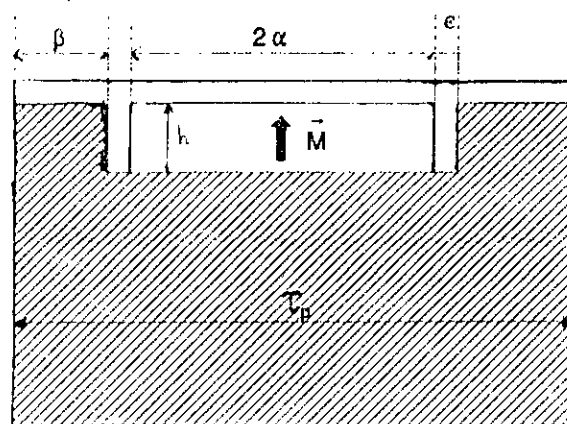


Fig.II.2. Modèle développé de la machine étudiée

II.2. REPRESENTATION DES AIMANTS :

Les aimants permanents modernes se comportent pratiquement comme des aimants parfaits. Ceci nous permet de considérer leur aimantation \vec{M} comme étant rigide, c'est-à-dire que \vec{M} ne varie ni sous l'action de divers facteurs physiques ni sous l'action d'une induction extérieure.

Dans le cas présent, les aimants sont aimantés perpendiculairement à l'entrefer. Le flux de \vec{M} est conservatif ($\text{div } \vec{M} = 0$), la densité d'aimantation est constante dans tout le domaine.

Les aimants permanents peuvent être représentés soit par un modèle Ampérien, soit par un modèle Coulombien [30]. Le premier modèle convient aux problèmes de calcul de l'induction grâce au potentiel vecteur tandis que le second pour les cas, conduit au calcul du champ grâce au potentiel scalaire.

II.2.1. Représentation Ampérienne des Aimants :

Si l'aimant est suffisamment rigide et d'aimantation uniforme ($\text{rot } \vec{M} = 0$), alors les formules classiques de l'électromagnétisme [30] montrent qu'il est assimilable à des courants Ampériens surfaciques de densité :

$$\vec{j}_a = \vec{M} \times \vec{n}$$

où \vec{n} est la normale sortante à la surface de l'aimant.

Sur la figure II.3. les aimants apparaissent comme des distributions linéiques de courant, situées sur les flancs des aimants et dirigées suivant l'axe de la machine. Les flancs des aimants portent alternativement les densités $+j_a$ et $-j_a$.

Dans ces conditions, en vue de donner une représentation plus imagée de l'aimant, on peut remarquer qu'il est remplacé par un système équivalent à une bobine à air (la perméabilité des aimants modernes est proche de celle de l'air (voir tableau 1)) de section et de longueur identiques à celle de l'aimant et d'épaisseur infiniment faible.

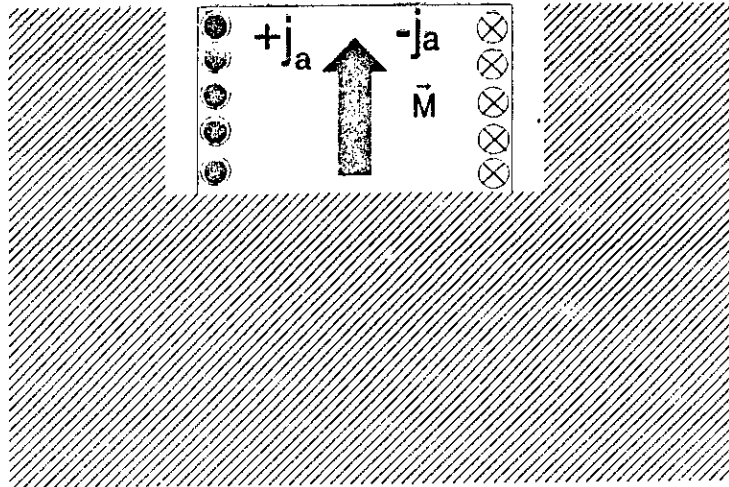


Fig.II.3. Représentation Ampérienne des aimants.

II.2.2. Représentation Coulombienne des Aimants :

Si l'aimant est suffisamment rigide et d'aimantation uniforme ($\text{div } \vec{M}=0$), alors les équations classiques de l'électromagnétisme montrent qu'il est équivalent à des masses magnétiques distribuées sur la surface, avec une densité de charge :

$$\sigma = \vec{M} \cdot \vec{n}$$

Sur la figure II.4. les aimants apparaissent comme des distributions linéiques de charges. la couche supérieure portant la charge $\sigma^+ = M$ et la couche inférieure portant la charge $\sigma^- = - M$.

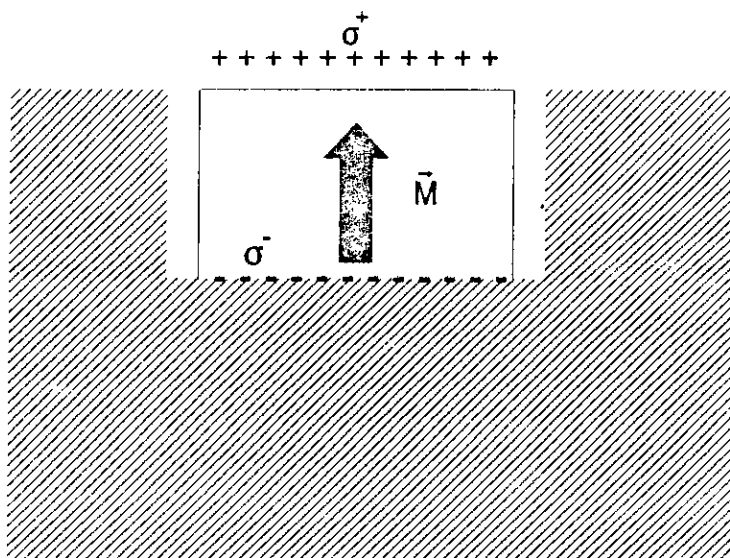


Fig.II.4. Représentation Coulombienne des aimants.

II.3. REPRESENTATION DES COURANTS STATORIQUES :

Dans le plan de la section transversale de la machine, chaque encoche présente une section rectangulaire de dimensions a et b (fig.II.5.a.). L'encoche est creusée dans le matériau ferromagnétique (grande perméabilité) du stator et débouche sur l'entrefer par une ouverture b .

Nous admettons de remplacer les conducteurs de l'enroulement statorique par un seul conducteur de section égale à celle de l'encoche et parcouru par une densité uniforme J .

En ce qui concerne l'action des courants dans l'entrefer, nous pouvons remplacer, le courant distribué dans l'encoche par une couche superficielle de courant de largeur b et de densité :

$$j_s = \frac{I}{b} = J \cdot a$$

ceci en considérant la perméabilité du stator comme infinie (fig.II.5.b.).

Concernant, toujours, l'action des courants dans l'entrefer; le fait que l'on ait une encoche est négligeable et l'on peut supposer l'armature parfaitement lisse et de perméabilité infinie. On obtient, ainsi, ce que l'on appelle un mur ferromagnétique de perméabilité infinie, le long duquel sont distribuées des couches de densité j_s et de largeur b (fig.II.5.c)

Dans les calculs, nous utiliserons un entrefer fictif e_c [31].

$$e_c = k_c \cdot e$$

avec e : entrefer réel de la machine.

e_c : entrefer fictif.

k_c : coefficient de Carter.

L'entrefer fictif e_c est l'entrefer d'un induit lissé équivalent à celui d'un induit encoché e .

Les nombreux tracés de LEHMAN pour différentes valeurs du rapport (b/e) ont montré que tout se passait comme si l'entrefer était augmenté de b au droit de l'encoche, la profondeur de celle-ci n'intervenait pas.

Le rapport de la perméance d'un stator lisse sur celle d'un stator encoché (fig.II.6.) sur le même pas dentaire t s'appelle le coefficient de Carter. Il est donné par la relation:

$$k_c = \frac{t}{t - \left[\frac{b^2}{5e+b} \right]}$$

avec b : ouverture de l'encoche.

t : le pas dentaire.

e : largeur de l'entrefer

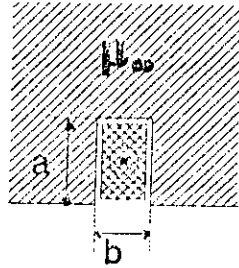


Fig.II.5.a.
encoche réelle.

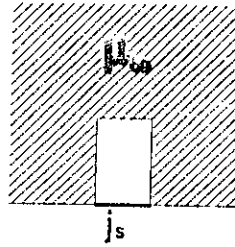


Fig.II.5.b.
encoche avec
distribution super-
ficielle de courant.

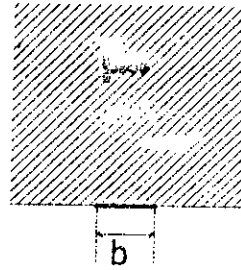


Fig.II.5.c.
mur
ferromagnétique.

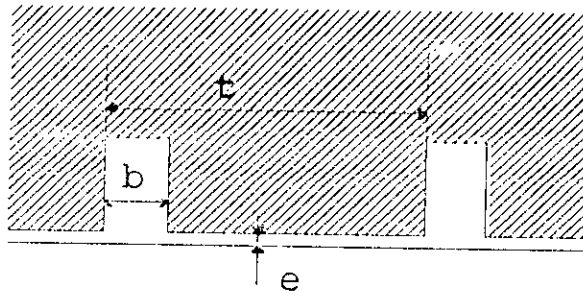


Fig.II.6. stator encoché.

II.4. FORMULATION DU PROBLEME A RESOUDRE:

II.4.1. Equations du champ électromagnétique:

L'analyse du comportement de la machine étudiée conduit à la résolution des équations de Maxwell dans un domaine

tridimensionnel. En tenant compte du découplage total entre les champs électrique et magnétique dans le cas de la magnétostatique, et en y rajoutant la loi constitutive du milieu, on aboutit aux équations :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\vec{B} = \mu(\vec{H}) \vec{H} \quad (\text{II.3})$$

avec $\vec{H} = H(x, y, z)$: Intensité du champ magnétique.

$\vec{B} = B(x, y, z)$: Induction magnétique.

$\vec{J} = J(x, y, z)$: Densité de courant.

$\mu = \mu(H, x, y, z)$: Perméabilité magnétique.

$$\mu(\vec{H}) = \mu_0 \mu_r \quad (\text{II.4})$$

avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m : perméabilité du vide.

et $\mu_r(H, x, y, z)$: perméabilité relative du milieu.

de la relation (II.2.), on déduit, que le vecteur \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{II.5})$$

Nous supposons la longueur axiale de la machine très grande par rapport à ces dimensions transversales. Dans ces conditions le problème peut-être considéré bidimensionnel (fig. II.7.).

Nous nous plaçons dans le plan (oxy): la section transversale de la machine, \vec{J} étant porté par oz :

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Ceci fait que le potentiel vecteur \vec{A} n'a qu'une seule composante suivant l'axe oz dont la valeur ne dépend pas de z .

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{II.7})$$

des équations (II.5.) et (II.6.), on déduit les composantes de l'induction magnétique \vec{B} :

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ B_y &= - \frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

En combinant les relations (II.1.), (II.3.) et (II.5.), on obtient l'équation du potentiel suivante:

$$\vec{\nabla}_x (\nu \vec{\nabla}_x A) = \vec{J} \quad (\text{II.9})$$

avec $\nu = 1/\mu$.

Remarque: L'utilisation du potentiel vecteur permet de regrouper les équations en une seule et de réduire le nombre d'inconnues (les composante du vecteur) à calculer.

Ainsi l'équation (II.8) devient:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = J \quad (\text{II.10})$$

que nous écrivons sous la forme :

$$-\nabla \cdot (v \vec{\nabla} A) = J \quad (\text{II.11})$$

A cette équation à résoudre dans le domaine d'étude, il faut bien entendu associer les conditions aux limites et les conditions de passage aux interfaces.

II.4.2. Conditions aux Limites :

Nous adjoignons à l'équation (II.11.) les conditions aux limites suivantes (fig.II.7.):

- sur la frontière Γ_1 :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \mu \cdot j_s(x) \quad (\text{II.12})$$

avec $j_s(x)$: distribution de la densité superficielle de courant équivalente aux courants statoriques(cf II.3.).

- sur la frontière Γ_2 :

$$A = 0 \quad (\text{II.13})$$

Les axes d'antisymétrie nous permettent de réduire le domaine d'étude au pas polaire. Les conditions aux limites de type antipériodique s'appliquent entre bords homologues (les points d'un bord sont au potentiel opposé de celui des points homologues du bord homologue).

- sur les frontières Γ_3 et Γ_4 :

$$A(m) = -A(m') \forall m \in \Gamma_3 \text{ et } m' \in \Gamma_4 \quad (\text{II.14})$$

II.4.3. Conditions de Passage aux Interfaces entre Milieux :

Les conditions de passage aux interfaces entre milieux traduisent la continuité de la composante normale B_n le saut de la composante tangentielle H_t du champ qui est égal au courant surfacique distribué sur l'interface.

- continuité de B_n :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{B}_{n_1} = \vec{n}_2 \cdot \vec{B}_{n_2} \quad (\text{II.15})$$

- discontinuité de H_t :

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{H}_1 - \vec{n}_2 \wedge \vec{H}_2 = \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{21} \quad (\text{II.16})$$

Nous passons en revue les différents cas que nous rencontrons dans notre problème :

a) Cas de passage d'un milieu 1 de perméabilité μ_1 à un autre milieu de perméabilité μ_2 .

comme

$$\begin{cases} B_t = \frac{\partial A}{\partial n} \\ B_n = - \frac{\partial A}{\partial t} \end{cases}$$

alors la condition sur B_n est :

$$B_{n_1} = B_{n_2} \Leftrightarrow \frac{\partial A_1}{\partial t} = \frac{\partial A_2}{\partial t}$$

Avec la jauge de Coulomb ($\text{div } A=0$), cette condition devient:

$$A_1 = A_2 \quad (\text{II.17})$$

et la condition sur H_t est :

$$\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial n} \quad (\text{II.18})$$

b) Cas d'une interface avec courant surfacique.

La continuité de B_n est équivalente à :

$$A_1 - A_2 \quad (\text{II.19})$$

La discontinuité de H_t est donnée par :

$$\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial n} = \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{21} \quad (\text{II.20})$$

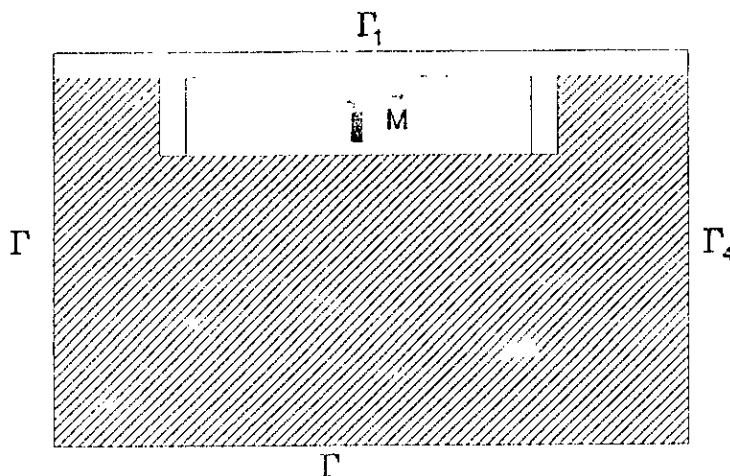


Fig.II.7. conditions aux limites du domaine.

CONCLUSION:

Nous venons de décrire la machine à optimiser. Les aimants sont remplacés par les densités de courants ampériens équivalentes à l'aimantation et qui conduisent à la résolution en potentiel vecteur.

Quand au courants statoriques ils ont été remplacés par des densités de courant superficielles distribuées sur la surface stator-entrefer.

La formulation complète du problème de calcul du champ électromagnétique dans la machine comporte: l'équation à résoudre dans le domaine d'étude, les conditions sur la frontière du domaine de résolution et les conditions de passage entre milieux différents.

Le calcul du champ électromagnétique se fait par des méthodes analytiques dans les cas linéaires et de géométries simples ou aussi par des méthodes semi-analytiques et numériques selon le degré de complexité.

CHAPITRE III

METHODE
DE
RESOLUTION

CHAPITRE III

METHODE DE RESOLUTION

INTRODUCTION:

Le calcul de la répartition du champ dans les machines électriques revient à résoudre des équations aux dérivées partielles (équ. de Maxwell). L'un des outils de résolution numérique de ce type de problèmes est la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis (M.E.F.) se base sur une formulation intégrale du phénomène analysé : formulation variationnelle.

Dans ce chapitre, nous présentons, cette formulation qui permet d'exploiter le principe des travaux virtuels qui à son tour permet une interprétation physique.

Nous expliquons, aussi, l'application de la M.E.F. à la fonctionnelle (résultat de l'étape précédente) associée à une discrétisation du domaine par des triangles.

III.1. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME:

L'ensemble de l'équation différentielle (II.11.) et des conditions aux limites (II.12. à II.14) aux contours du domaine d'étude que nous appellerons par la suite Ω (le contour du domaine sera noté Γ) constitue la formulation mathématique du problème notée P_1 . Les équations à résoudre sont donc les suivantes:

$$(P_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\nabla(\mu \vec{\nabla} A) = 0 \quad \dots \text{ dans } \Omega \\ A = 0 \quad \dots \text{ sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial A}{\partial n} = j_s \quad \dots \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (III.1)$$

avec les conditions aux limites sur les frontières latérales du domaine Ω , ainsi que les conditions de passage entre milieux de caractéristiques différentes.

III.2. FORMULATION VARIATIONNELLE:

Le problème mis sous la forme P_1 , se prête difficilement à un traitement numérique, une possibilité est d'utiliser la formulation variationnelle. Dans le cas bidimensionnel, une telle formulation se ramène à la fonctionnelle suivante:

$$\mathcal{F} = \iint_{\Omega} f(A, A_x, A_y, x, y) d\Omega + \int_{\Gamma} g(x, y) A d\Gamma \quad \dots \text{dans } \Omega \quad (\text{III.2})$$

avec $A_x = \frac{\partial A}{\partial x}$ et $A_y = \frac{\partial A}{\partial y}$

La minimisation de cette fonctionnelle permet d'atteindre la solution.

Les équations d'Euler correspondantes sont : [32]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial A_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial A_y} \right) - \frac{\partial f}{\partial A} = 0 \quad \dots \text{dans } \Omega \quad (\text{III.3})$$

et

$$l_x \frac{\partial f}{\partial A_x} + l_y \frac{\partial f}{\partial A_y} = j_s \quad \dots \text{sur } \Gamma_1$$

L'équation (2) de (III.3.) caractérise les conditions aux limites de type Neumann. Dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet l'expression (III.2.) ferait intervenir une intégrale curviligne donnant lieu à un terme constant qui n'influe pas sur le processus de minimisation de la fonctionnelle .

Le problème P_1 fait intervenir la divergence qui n'est correctement définie qu'au sens des distributions (ANNEXE I) de manière à prendre en compte les discontinuités du champ aux interfaces entre milieux physiques différents.

Le théorème d'Euler [32] exprime qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le minimum de la fonctionnelle soit atteint est que le potentiel A vérifie les équations différentielles (III.3.). D'autre part l'énergie électromagnétique du système caractérisée par les équations (III.1.) est donnée par la fonctionnelle suivante:

$$\mathcal{F} = \iint_{\Omega} \left(\int_0^B v \vec{b} db \right) d\Omega - \int_{\Gamma_1} j_s A d\Gamma \quad \dots \text{dans } \Omega \quad (\text{III.4})$$

où Γ_1 représente toutes les surfaces sur lesquelles la densité de courant est différente de zéro (les isthmes d'encoches et les flancs des aimants).

Les équations d'Euler correspondant à la minimisation de la fonctionnelle ne sont autres que les équations (III.1.). (voir ANNEXE II)

La résolution du problème posé par l'ensemble des équations locales, des conditions aux limites et des conditions de passage entre milieux physiques différents est équivalente à la minimisation de la fonctionnelle énergie (III.4.).

Dans le cas où on ne connaît pas la fonctionnelle correspondant aux équations différentielles (III.1.), il est possible d'arriver à une solution en partant de ces dernières. Pour cela on peut utiliser la méthode des résidus pondérés (voir ANNEXE III).

Remarque: Lorsque dans la méthode des résidus pondérés les fonctions de pondérations sont identiques aux fonctions approximant la solution, le système d'équations obtenu est identique à celui issu de la formulation variationnelle.

Après la formulation variationnelle, nous allons nous intéresser à la méthode des éléments finis.

III.3. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS:

Le problème défini par l'équation différentielle et les conditions aux limites associées ou encore par la formulation variationnelle correspondante est dit continu: Le nombre d'inconnus est infini. Pour pouvoir le résoudre numériquement, il est indispensable de passer par la discrétisation du domaine de résolution et de rechercher la solution approché du problème aux noeuds du découpage (nombre d'inconnus fini).

III.3.1. Discrétisation et Approximation:

III.3.1.1. Le maillage du domaine:

Le principe de la méthode des éléments finis (M.E.F.) consiste à définir une partition du domaine d'étude (en sous-domaines "éléments finis" sans recouvrement ni intersection) qui est appelée maillage.

Comme on peut s'y attendre, la solution est d'autant plus exacte que le maillage est fin. Mais aussi, à nombre de noeuds fixés (donné), la qualité de l'approximation dépend évidemment du choix du degré du polynôme d'approximation [33].

Nous choisissons, pour notre cas, les éléments triangulaires du premier ordre. Ce type d'éléments nous semble le plus utilisé dans la modélisation des systèmes physiques (électricité, mécanique, thermique, ...) car présentant la facilité de génération d'algorithmes automatiques de maillage de domaines [34].

III.3.1.2. La fonction d'approximation:

Le nombre de noeuds par élément triangulaire permet de présenter le potentiel par un polynôme complet dont le degré assure la compatibilité inter-éléments [33].

Vu que les éléments finis choisis sont des triangles à 3 noeuds (fig.III.1.), nous prendrons une expression du potentiel

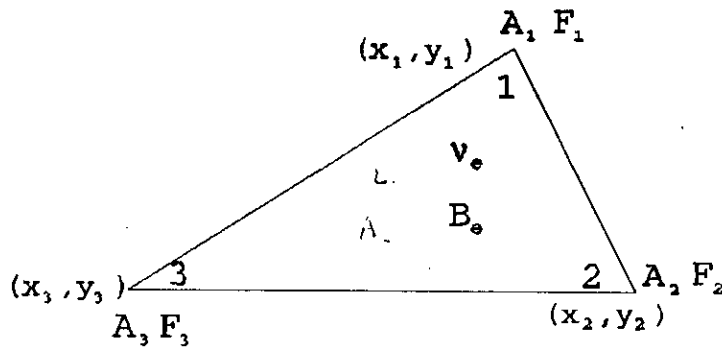


Fig.III.1. Elément fini choisi.

vecteur A sur un élément triangulaire quelconque "e" de la forme:

$$A^e(x,y) = a + bx + cy \quad (\text{III.5})$$

Les valeurs du potentiel au noeuds 1,2,3 doivent vérifier l'équation d'approximation précédente, ce qui permet de calculer les constantes a,b et c par le système suivant:

$$\begin{cases} A_1^e = a + bx_1 + cy_1 \\ A_2^e = a + bx_2 + cy_2 \\ A_3^e = a + bx_3 + cy_3 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

d'où:

$$A^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e(x, y) A_i^e \quad (\text{III.7})$$

avec

$$\alpha_i^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e} (p_i + q_i x + r_i y)$$

A_i^e : valeur du potentiel A au noeud i de l'élément e.

Δ_e : surface du triangle "e" considéré.

et

$$\begin{cases} p_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ q_1 = y_2 - y_3 \\ r_1 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

Les autres termes p, q, r sont obtenus à l'aide d'une permutation circulaire des indices 1, 2 et 3.

Ayant présenté l'élément fini choisi et l'approximation du potentiel correspondante, nous allons discrétiser la fonctionnelle (III.4.) et la minimiser de façon à établir un système d'équations algébriques.

III.3.2. Minimisation de la Fonctionnelle:

Le découpage étant réalisé, la fonctionnelle définie sur le domaine Ω peut-être considérée comme la somme de fonctionnelles élémentaires intégrées sur chacun des éléments en tenant compte de l'appartenance de chaque noeud à plusieurs éléments. De plus en remplaçant le potentiel A par son

approximation(III.7.) nous aurons:

$$\mathcal{F}([A]) = \sum_{e=1}^{n_e} \mathcal{F}^e([A]^e) \quad (\text{III.8})$$

$[A]^e$ est une matrice colonne dont les composantes sont les valeurs nodales du potentiel A dans l'élément e.

$[A]$ est une matrice colonne composée de toutes les valeurs nodales du potentiel A dans le domaine Ω et sur sa frontière Γ .

n_e représente le nombre total d'éléments du maillage du domaine Ω .

La minimisation de la fonctionnelle \mathcal{F} revient à annuler ses dérivées partielles par rapport aux valeurs A_i du potentiel vecteur aux noeuds du maillage.

Les équations de minimisation vont, donc, s'écrire:

$$\frac{\partial \mathcal{F}([A])}{\partial A_i} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \mathcal{F}^e([A]^e)}{\partial A_i} = 0 \quad i=1, n_n \quad (\text{III.9})$$

avec

i : numéro du noeud considéré.

n_n : nombre total de noeuds du maillage.

e : numéro de l'élément considéré.

n_e : nombre total d'éléments du maillage.

L'équation(III.9.) est écrite pour tous les noeuds du maillage. Ainsi on obtient le système matriciel suivant:

$$\frac{\partial \mathcal{F}([A])}{\partial [A]} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \mathcal{F}^e([A]^e)}{\partial [A]^e} \quad (\text{III.10})$$

où

$$\frac{\partial \mathcal{F}^e([A]^e)}{\partial [A]^e}$$

est la matrice élémentaire de minimisation.

pour v indépendante de \vec{B} on a :

$$\int_0^B v \vec{b} db = \frac{v}{2} \vec{B}^2 \quad (\text{III.12})$$

L'équation(III.8.) écrite dans le cas de la fonctionnelle(III.4.) pour les problèmes linéaires donne:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^e([A]^e)}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial A_i} \int_{\Omega_e} \frac{v}{2} \vec{B}^2 d\Omega_e + \int_{\Gamma_1} j_s d\Gamma_1 \quad (\text{III.11})$$

avec $i = 1, 3$

sachant que

$$\vec{B}^2 = |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 = |\vec{\nabla} A|^2 \quad (\text{III.13})$$

ou

$$\vec{A} = A_k \vec{k}$$

\vec{k} étant le vecteur unitaire suivant l'axe z .

L'intégrale de volume du problème peut, alors, s'écrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial A_i} \iint_{\Omega_e} \frac{v_e}{2} \vec{\nabla} A \vec{\nabla} A \, d\Omega_e = \frac{\partial}{\partial A_i} \iint_{\Omega_e} \frac{v_e}{2} \sum_{j,k=1}^3 (\vec{\nabla} \alpha_j A_j \vec{\nabla} \alpha_k A_k) \, d\Omega_e \\
& = \frac{v_e}{2} \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} \alpha_j \vec{\nabla} \alpha_i) \, d\Omega_e A_j + \sum_{k=1}^3 \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_k) \, d\Omega_e A_k \quad \begin{matrix} \text{(II} \\ \text{I.1} \\ \text{4)} \end{matrix} \\
& \quad - v_e \sum_{j=1}^3 S_{ij} A_j
\end{aligned}$$

où

$$S_{ij} = v_e \iint_{\Omega_e} \vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_j \, d\Omega_e \quad \text{(III.15)}$$

Les deux intégrales de surface se mettent sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \int_{\Gamma_e} j_s A \, d\Gamma_e = \frac{\partial}{\partial A_i} \int_{\Gamma_e} j_s \sum_{j=1}^2 \alpha'_j A_j \, d\Gamma_e \quad \text{(III.16)}$$

avec α'_j : la fonction de pondération sur la surface Γ_e de l'élément e considérée.

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \int_{\Gamma_e} j_s A \, d\Gamma_e = \frac{\partial}{\partial A_i} \sum_{j=1}^2 \left[\int_{\Gamma_e} j_s \alpha'_j \, d\Gamma_e \right] A_j$$

Nous approximons la densité superficielle j_s par:

$$j_s = \sum_{k=1}^2 \alpha'_k j_{s_k} \quad \text{(III.17)}$$

avec j_{sk} : la valeur de la densité j_s au noeud k .

donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_i} \int_{\Gamma_e} j_s A d\Gamma_e &= \frac{\partial}{\partial A_i} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_e} [\alpha'_j \alpha'_k j_{s_k} A_j] d\Gamma_e \\ &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_e} \alpha'_j \alpha'_i d\Gamma_e j_{s_k} \\ &= \sum_{k=1}^2 T_{ik} j_{s_k} = F_i \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Par la suite l'équation de minimisation (III.10.) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^e([A]^e)}{\partial [A]^e} = [S]^e [A]^e - [F]^e \quad (\text{III.19})$$

où $[S]^e$ est une matrice carrée dont le terme général est donné par :

$$S_{ij} = \int \int_{\Omega_e} v_{,i} (\vec{\nabla} \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_j) d\Omega_e \quad (\text{III.20})$$

avec $i=1,3; j=1,3$

et $[F]^e$ est la matrice des sources. C'est une matrice colonne dont le terme général est :

$$F_i^e = \int_{\Gamma_e} j_s \alpha'_i d\Gamma_e \quad (\text{III.21})$$

avec $i=1,2$

III.3. Intégration:

Dans le cas de l'élément triangulaire linéaire, les

intégrales peuvent-être calculées analytiquement.

Considérons le cas de la figure III.1. Des fonctions de pondération α_i (eq.III.7.) on tire:

$$\vec{\nabla}\alpha_i = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{pmatrix} q_i \\ r_i \end{pmatrix} \quad (\text{III.22})$$

$$\text{donc} \quad \vec{\nabla}\alpha_i \vec{\nabla}\alpha_j = \frac{(q_i q_j + r_i r_j)}{4\Delta_e^2}$$

où Δ_e est l'aire du triangle e calculée par la formule(III.6.). et les coefficients q_i, q_j, r_i, r_j sont donnés par les expressions(III.7.). Les indices i et j varient de 1 à 3.

Comme

$$\vec{B}_e^2 = |\vec{\nabla}A|^2$$

on peut écrire:

$$\vec{B}_e^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \vec{\nabla}\alpha_i A_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2\Delta_e} \begin{pmatrix} q_i \\ r_i \end{pmatrix} A_i \right)^2 = C^2 e$$

Il s'en suit que la réductivité $\nu_e(\vec{B}_e^2)$ est une constante dans l'élément e. D'où la nécessité d'avoir l'élément dans le même matériau.

Pour ce qui est du terme de source F_i , il est donné par:

$$F_i = \sum_{k=1}^2 T_{ik} j_{s_k}$$

avec

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \frac{pas}{6} && \text{si } i \neq k \\ T_{ik} &= \frac{pas}{3} && \text{si } i = k \\ pas &= \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

L'intégrale analytique sur les éléments n'est possible que sur des éléments simples. On a recours à l'intégration numérique et aux coordonnées locales de l'élément de référence dans les cas complexes [33].

III.4. Assemblage et Résolution:

III.4.1. Assemblage:

Par la différentiation de la fonctionnelle \mathcal{F} par rapport à tout les noeuds du maillage ($i=1, nn$), nous aboutissons, à :

$$\frac{\partial \mathcal{F}([A])}{\partial [A]} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \mathcal{F}^e([A]^e)}{\partial [A]^e} \quad (\text{III.24})$$

Nous effectuons, donc, un balayage des éléments du maillage. Pour chaque élément, nous calculons sa contribution que l'on ajoute au terme général du système. L'algorithme de

l'assemblage est le suivant:

- Initialisation de [S] et [F];
- pour e=1 à n_e (ensemble des éléments);
 - pour i et j appartenant à e;
 - calcul de S_{ij}: S_{ij}=S_{ij}^e+S_{ij};
 - calcul de F_i: F_i=F_i^e+F_i;
- fin i,j; fin e.

L'opération d'assemblage terminée, nous aboutissons à la relation matricielle globale suivante:

$$[S] [A] = [F] \quad (\text{III.25})$$

avec [S]: matrice carrée d'ordre nn.

[A]: matrice colonne d'ordre nn.

[F]: matrice colonne d'ordre nn.

nn: nombre total de noeuds du maillage.

III.4.2. Résolution du système Système Algébrique:

Le système d'équations algébriques(III.25.) obtenu étant linéaire, sa résolution est possible en utilisant les méthodes directes. La méthode d'élimination de Gauss est très adaptée à ce genre de problèmes. Après la triangularisation de la matrice [S], la solution est calculée par substitution.

Nous avons remarqué que l'opération d'assemblage introduit des éléments non-nuls dans la matrice globale [S] pour les indices i,j correspondants à des sommets connectés par des éléments finis communs. Comme en général un noeud est relié seulement à quelques autres (un triangle du premier ordre n'a que 3 sommets) la matrice [S] possède de nombreux éléments nuls et sera donc une matrice "creuse". Si la numérotation est judicieuse la structure de cette matrice sera de type "bande"(fig.III.2.).

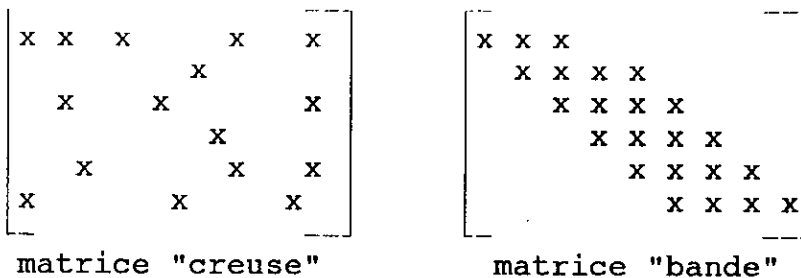


Fig.III.2. matrices types de la M.E.F.

Il est à noter que la structure-bande alliée à la symétrie de la matrice [S] font que le stockage de la moitié de la bande suffit à la résolution du système. Ce type de matrice (bande) permet de réduire la taille de la mémoire nécessaire à son stockage qui va de paire avec la diminution du temps de calcul.

Sous forme matricielle, le calcul du potentiel vecteur A apparait comme un problème à nn inconnues qui sont les valeurs nodales du potentiel. Les conditions aux limites de type Dirichlet réduisent le problème à la détermination du potentiel aux noeuds libres(n'appartenant pas aux surfaces de Dirichlet) du découpage.

CCNCLUSION:

Nous pouvons constater une nécessité de mettre, le système informatique traduisant la M.E.F, sous forme modulaire; pour un contrôle plus facile des résultats de chaque étape. La M.E.F. s'applique aussi aux problèmes non-linéaires et donne lieu à des algorithmes itératifs [33],[34].

Le chapitre IV sera consacré à la présentation du système informatique utilisé.

CHAPITRE IV

SYSTEME INFORMATIQUE UTILISE

CHAPITRE IV

SYSTEME INFORMATIQUE UTILISE

INTRODUCTION:

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de présenter les aspects pratiques de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis.

IV.1. MOYENS INFORMATIQUES UTILISES:

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence les différentes étapes permettant, à partir des équations de Maxwell, d'arriver à la constitution du système d'équations algébriques à résoudre. Ceci par l'application de la combinaison formulation variationnelle-méthode des éléments finis.

La mise en œuvre pratique de cette méthode suggère une structure modulaire [35]. C'est pour cela que le système informatique utilisé est constitué de deux programmes:

- EF35MAIL: permet à partir de la description de la géométrie du domaine de résolution de générer en sortie un fichier contenant des informations sur le maillage du domaine sus-cité.

- EF30CHAMP: c'est le module de résolution du système d'équations algébrique (eq.III.25.) et d'exploitation quantitative du résultat de l'opération précédente. Ce programme utilise en entrée les données de sortie de mailleur (EF35MAIL) et des informations relatives aux conditions aux limites.

Ces deux programmes sont écrits en FORTRAN77. Ils ont été développés au laboratoire de l'université Pierre et Marie Curie-PARIS VI dans l'optique de décrire la répartition du champ électromagnétique dans les machines à réluctance variable (M.R.V.) polydiscoides [36],[37]. Ces programmes ont été modifiés, pour pouvoir étudier la répartition du champ électromagnétique dans les M.R.V. cylindriques en utilisant le potentiel vecteur [38], au

laboratoire de l'E.N.P.

Ce travail se base sur les mêmes modules de calcul tout en apportant les modifications nécessaires à la prise en compte des sources constituées par:

- Les courants statoriques(alimentation par autopilotage);
- Les aimants permanents.

IV.2. LE PROGRAMME EF35MAIL:

Le programme EF35MAIL permet de définir le maillage du domaine en éléments finis à partir des données générales d'entrée. Pour faciliter, l'utilisation de ce programme, son entrée a été réécrite sous forme conversationnelle. Par contre la procédure de découpage du domaine n'est pas modifiée [36], [37]: Le domaine de résolution est subdivisé en éléments rectangulaires(fig.IV.1). Ce maillage possède les propriétés suivantes: Il est réalisé en découpant, d'abord, le domaine en bandes horizontales qui, dans le sens vertical, ne comportent qu'un seul matériau. Ensuite chaque bande est divisée verticalement en sous parties, où chacune correspond à un seul matériau.

Les deux conditions précédentes font que les limites de discontinuité entre les milieux de caractéristiques différentes(perméabilité) et entre les sources de natures différentes(courants,aimants) coïncident avec les lignes du maillage.

Les numérotations des noeuds et des éléments sont faites de telle manière que la matrice S (eq.III.25.) soit de type bande. Pour celà, nous numérotons les noeuds "de gauche à droite" et "de haut en bas"(fig.IV.2.).

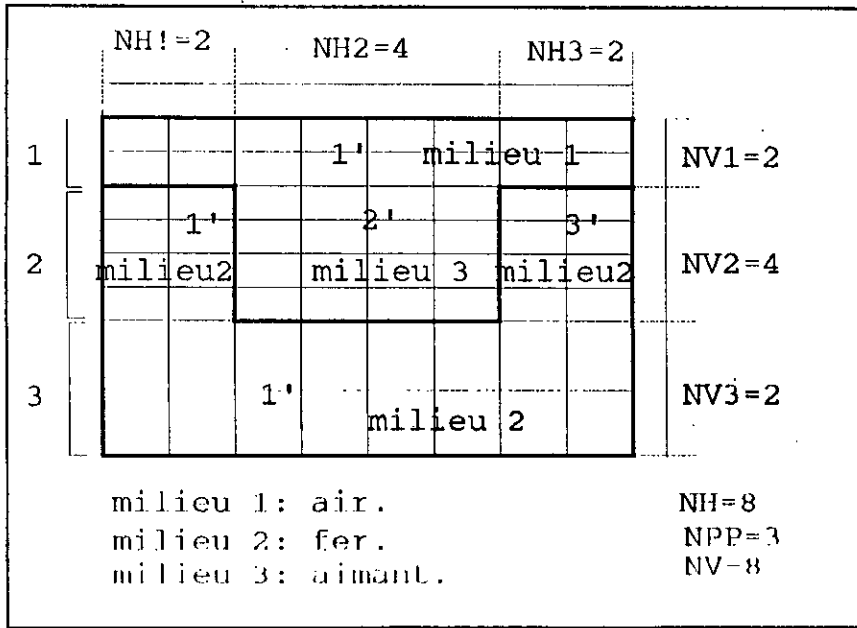


Fig.IV.1. Découpage du domaine

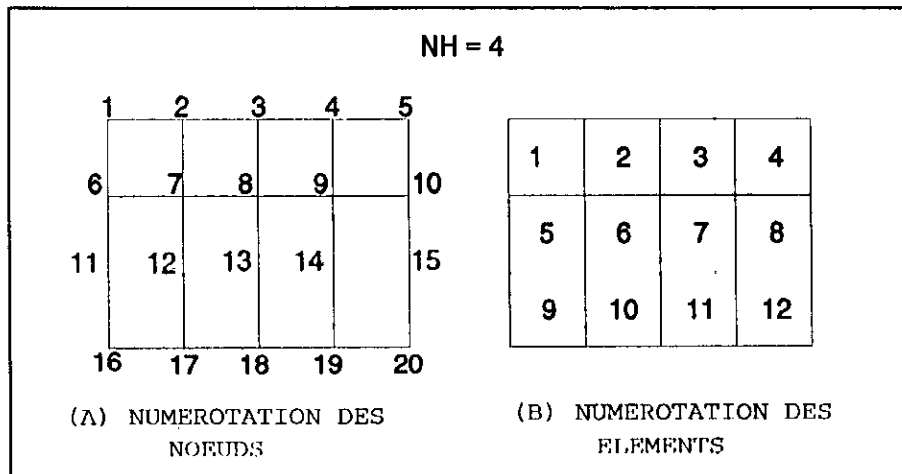


Fig.IV.2. Numérotation globale.

Les principales variables du programme EF35MAIL sont:

- NDISQ: numéro du fichier de sortie;
- NPP: nombre de parties principales;
- NH: nombre de divisions horizontales;
- IREP: nombre de noeuds périodiques;
- NPS: nombre de sous-parties;
- NV: nombre de divisions verticales;

- NHS: nombre de division horizontales par sous-partie;
- NMAP: nombre de milieux différents;
- NNO: nombre de noeuds du maillage;
- NEL: nombre d'éléments du maillage;
- KTRI(NEL,5): tableau qui décrit les NEL éléments avec les 5 informations suivantes: les quatres numéros de noeuds de l'élément et le numéro du matériau qui le compose;
- X(NNO): les abscisses des NNO noeuds;
- Y(NNO): les ordonnées des NNO noeuds.

Les sous-programmes utilisés:

Le programme principal permet de lire toutes les informations nécessaires à la description du découpage du domaine d'étude en éléments finis. Puis, il fait appel aux procédures suivantes [36],[37]:

- ELEM: permet de construire le tableau KTRI.
- LIMIT: définit les noeuds situés sur la frontière du domaine.
- DROITE: à partir des coordonnées des "noeuds frontière", elle permet de calculer les équations des droites horizontales et verticales.
- INTER: les équations des différentes droites sont suffisantes pour la détermination des points d'intersection ("noeuds internes" au domaine), ce qui donne les tableaux X et Y des coordonnées des noeuds.

Enfin, si le domaine est périodique, le programme principal construit le tableau MPER(IREP,2) contenant les numéros des noeuds périodiques.

En sortie, les données seront enregistrées sur le fichier de données NDISQ.

IV.3. LE PROGRAMME EF30CHAMP:

Ce module a pour fonction de construire le système d'équations III.25. et de le résoudre. Pour cela, il a comme entrées: le fichier (NDISQ) généré par le programme de

maillage(EF35MAIL) et les données suivantes:

- les caractéristiques des matériaux;
- les valeurs des sources(courants et aimantation);
- les conditions aux limites(Dirichlet,(anti)périodicité).

Ces différentes entrées permettent d'évaluer la répartition du potentiel vecteur dans le domaine d'étude. L'exploitation quantitative de la solution nécessite la définition des:

- Noeuds où le potentiel est à imprimer;
- Eléments où l'induction magnétique est à calculer;
- Surfaces à travers lesquelles le calcul du flux ou du couple est à connaître.

IV.3.1. Le Programme Principal:

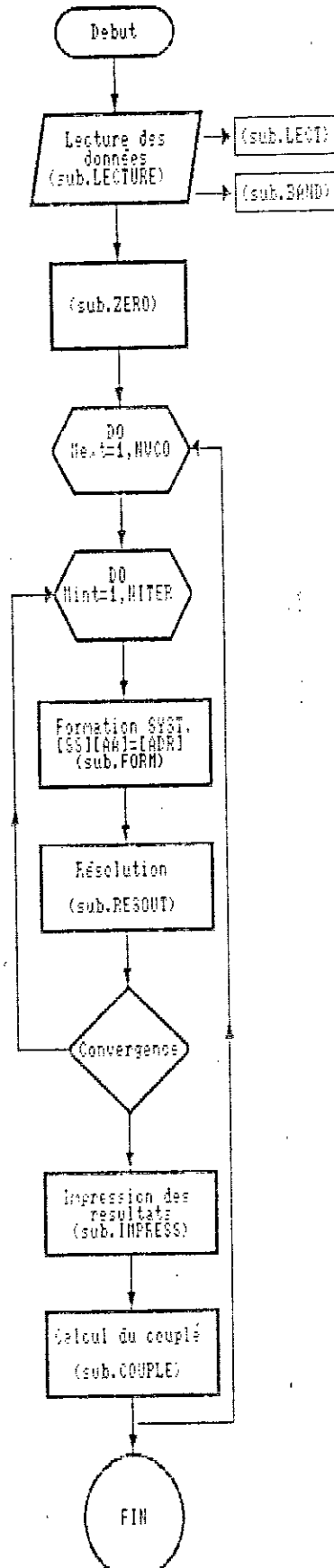
Dans le programme principal, nous utilisons les variables et les tableaux(variables indicées) suivants:

- MB : largeur de la demi-bande supérieure de la matrice du système;
- NVCO: nombre de valeurs de courants que nous voulons imposer successivement à ce domaine;
- ERR: erreur relative du critère de convergence;
- NFLUX: nombre de lignes de flux à imprimer;
- NSEQ: nombre de séquences d'éléments à imprimer;
- NPOT: nombre de séquences de potentiels à imprimer;
- XMUI: la perméabilité relative selon la direction x;
- YMUI: la perméabilité relative selon la direction y;
- VCO(NVCO): valeurs du courants d'entrée;
- ADR(NNO): valeurs du second membre du système(III.25.);
- SS(NNO,MB): matrice triangulaire bande;
- AA(NNO): matrice des potentiels inconnus.

Ce programme fait appel aux différentes procédures selon l'enchaînement décrit par l'organigramme "a".

Nous venons de présenter le fonctionnement général, du

programme EF30CHAMP. Nous décrivons, dans ce qui suit, le rôle de chacun des sous-programmes.



IV.3.2. Les Sous-Programmes:

L'enchaînement des différents sous-programmes est représenté par la figure IV.3.

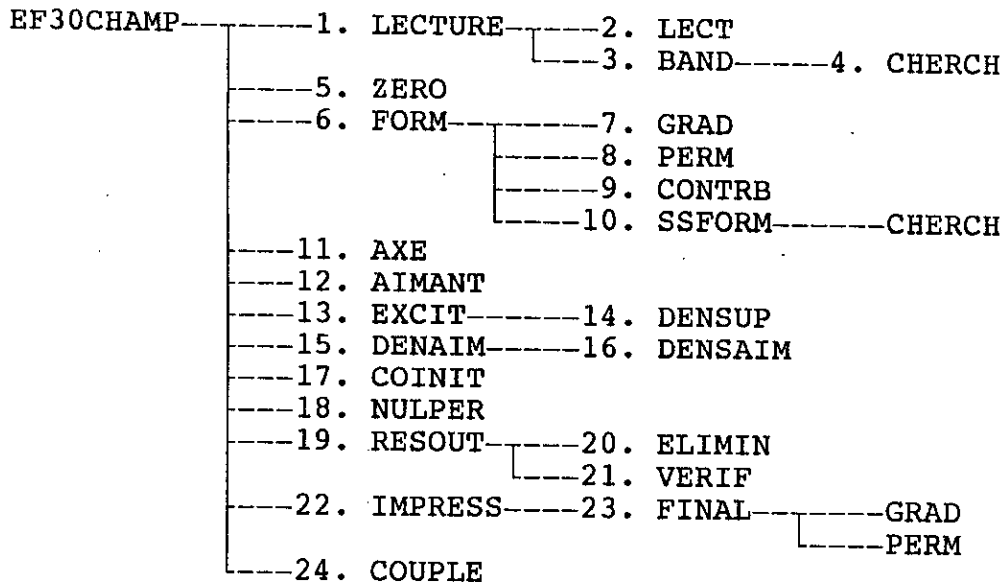


fig.IV.3. Ordre d'appel des sous-programmes

1. **LECTURE**: Permet la lecture des données générales du problème. Cette partie est sous version conversationnelle.

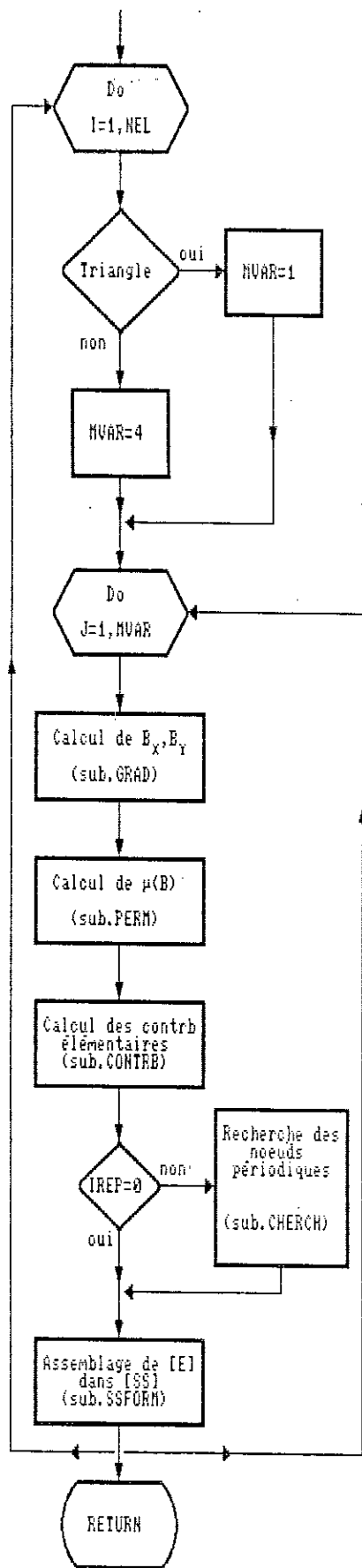
2. **LECT**: Dans le sous-programme "LECT", nous faisons la lecture des données définissant le maillage du domaine à savoir les 3 tableaux KTRI, X et Y.

3. **BAND**: Enfin LECTURE fait appel à la subroutine "BAND" où se fait le calcul de la largeur MB de la demi-bande[36],[37].

4. **CHERCH**: Sert à déterminer dans le cas des problèmes (anti)périodiques les noeuds concernés. Ces valeurs permettent de déterminer la largeur MB ou de former le système à résoudre en tenant compte de ces conditions.

5. **ZERO**: Initialise les valeurs des tableaux [SS] et [ADR]. Ceci est nécessaire dans les cas non-linéaires.

6. **FORM**: Permet de construire la matrice [SS] du système selon l'organigramme "b". La recherche de la solution a pour base



ORGANIGRAMME "b"

l'approximation linéaire du potentiel dans chaque élément triangulaire(cf.III.3.1.) du domaine, en fonction des potentiels aux sommets. Or, le maillage fournit des quadrilatères. Pour ne pas privilégier une direction donnée [37], au moment du découpage, l'approximation pour un quadrilatère est rappelée sur la figure IV.4.

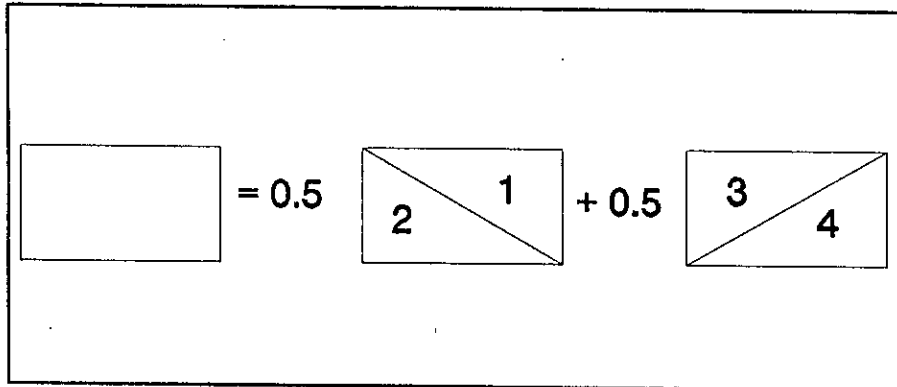


Fig.IV.3. Approximation sur un quadrilatère.

Ainsi, le calcul de la contribution des quadrilatères passe par le calcul des quatre triangles indiqués.

7. **GRAD**: Calcule les composantes B_x et B_y de l'induction magnétique dans l'élément e selon l'équation II.7.

8. **PERM**: Détermine la perméabilité (donc la réluctance) élémentaire à partir des valeurs de B_x^e et B_y^e .

9. **CONTRB**: Calcule la matrice élémentaire (la contribution) du triangle e considéré, à partir de la perméabilité élémentaire (eq.III.20.).

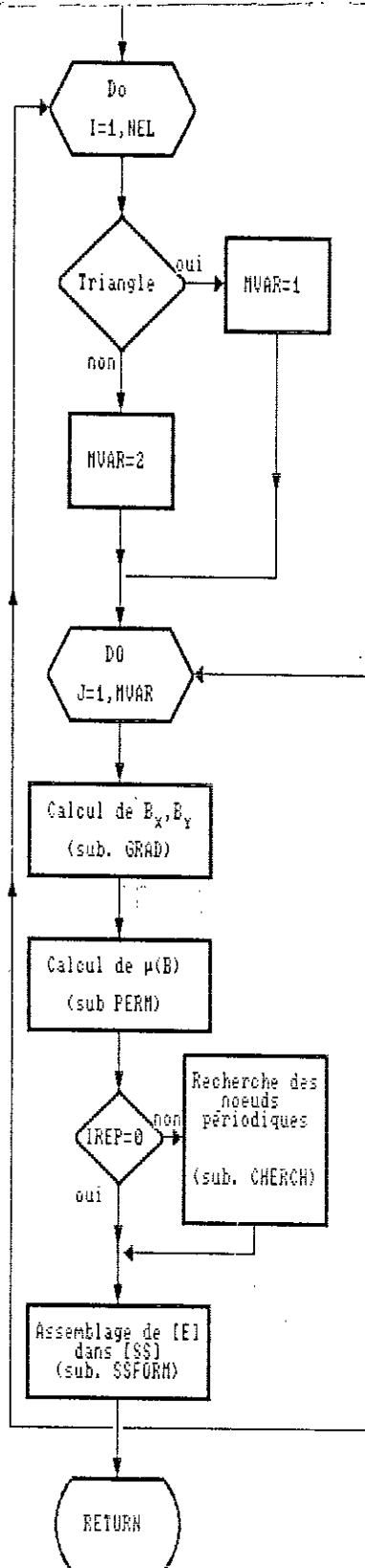
10. **SSFORM**: Additionne les contributions élémentaires calculées au système global (cf.III.4.1), en tenant compte du mode de stockage (bande) et des conditions de type périodiques s'il y a lieu.

11. **AXE**: Affecte des valeurs de densité de courant équivalente aux courants statoriques aux noeuds de la frontière supérieure du maillage. Cette partie est en version conversationnelle.

12. **AIMANT**: L'aimant ayant été modélisé par des densités superficielles de courant équivalentes (cf.II.2.1.), cette procédure à la même fonction que "AXE". Elle affecte la valeur des densités

de courant équivalente à l'aimantation aux noeuds se situant sur la frontière latérale de l'aimant.

Dans le cas bidimensionnel la surface S est définie par un segment confondu avec une ligne verticale du maillage. Dans ces conditions l'organigramme "c" décrit ce sous-programme.



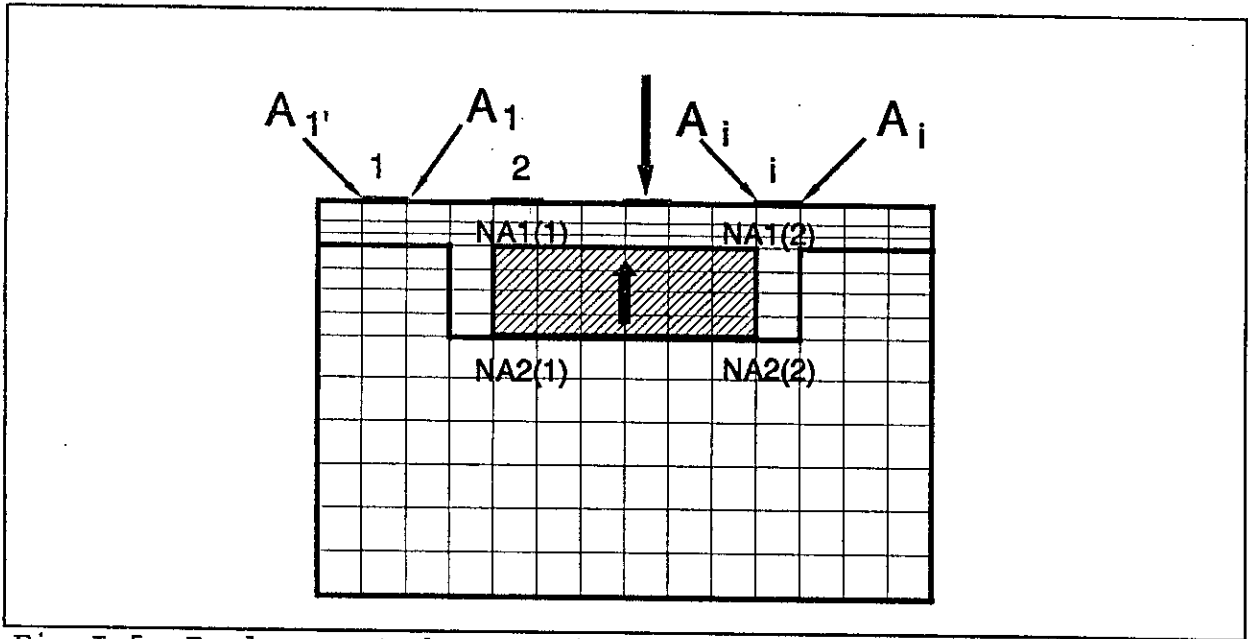


Fig.I.5. Emplacement des noeuds des aimants et des courants par rapport à la numérotation globale.

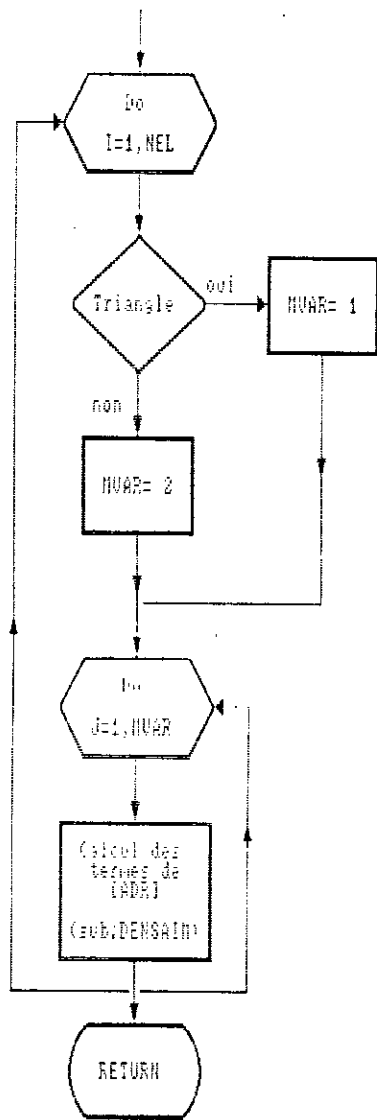
Avec NA1 et NA2:représentant les noeuds extrêmes définissant la surface sur laquelle est répartie la densité équivalente à l'aimant(voir fig.IV.5.).

NA: représente le nombre de surfaces(2 fois le nombre d'aimants).

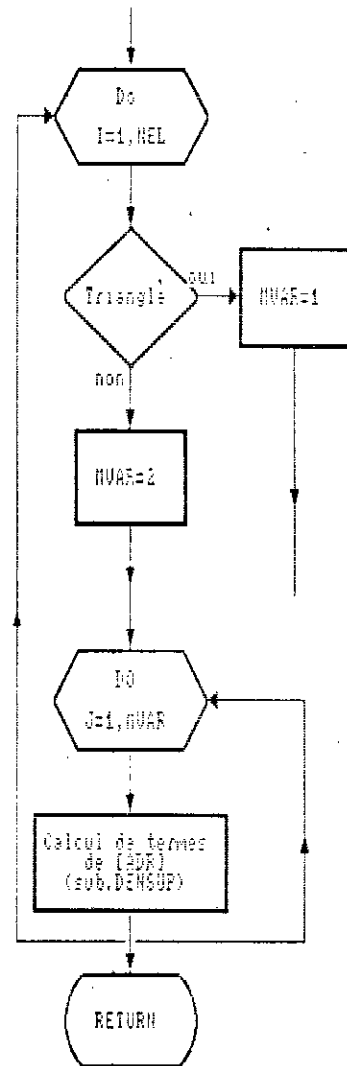
13. **EXCIT**: permet de construire la matrice colonne $ADR(NNO)$ qui constitue le second membre du système à résoudre, selon l'organigramme "d". Le maillage fournit des quadrilatères. Nous calculons la contribution de la frontière supérieure sur laquelle la densité superficielle équivalente aux courants statoriques est distribuées par la considération de la moyenne des contributions des triangles "1" et "3" de la figure.IV.4.

14. **DENSUP**: calcule la contribution de chaque triangle au second membre du système $[SS].[AA]=[ADR]$ (cf.III.4.1).

15. **DENAIM**: permet de construire la matrice colonne relative à la contribution des sources d'aimantation, ceci suivant l'organigramme "e". L'approximation de cette densité équivalente à l'aimantation se fait selon la description décrite au point 13.



ORGANIGRAMME "a"



ORGANIGRAMME "d"

Avec cette fois une moyenne de la contribution des triangles "1" et "4" ou "2" et "3". (voir fig.IV.4.).

16. DENSAIM: calcule la contribution, de chacun des triangles situés sur la frontière de l'aimant concernée, au second membre du système à résoudre.

17. COINIT: Permet de tenir compte des conditions aux limites de type Dirichlet. Nous utilisons pour cela la règle de Payne-Irons [32],[36].

La prise en compte des conditions aux limites de type (anti)-périodiques est assurée dans les routines "NULPER" et "RESOUT".

18. NULPER: Sert à annuler les noeuds à ne pas calculer (noeuds périodiques). Ceci constitue un indice pour la procédure "RESOUT".

19. RESOUT: Permet de résoudre le système $[SS].[AA]=[ADR]$ en deux étapes:

20. ELIMIN: Appelée par RESOUT, cette subroutine réalise la première étape de la résolution (qui est la méthode d'élimination de Gauss). La seconde étape est exécutée dans RESOUT (la substitution).

La reconnaissance des noeuds (anti)périodiques se fait par l'intermédiaire de l'indice transmit par "NULPER". Il suffit, alors, de procéder comme suit:

a) Périodicité: $(AA_n = AA_m)$

Dans l'équation $[SS] [AA] = [ADR]$, on isole les deux termes correspondants:

$$SS_{im} AA_m + SS_{in} AA_n = (SS_{im} + SS_{in}) AA_m$$

En donnant au noeud n le même numéro d'assemblage que le noeud m auquel il est lié; le terme de couplage local est alors directement additionné au terme SS_{im} .

b) Antipériodicité: $(AA_{in} = - AA_{im})$

Même façon de procéder que précédemment:

$$SS_{im} AA_m - SS_{in} AA_n = (SS_{im} - SS_{in}) AA_m$$

Le terme de couplage local est alors soustrait du terme SS_{im} .

21. VERIF: Une fois la solution connue, RESOUT fait appel de la subroutine "VERIF", où le critère de convergence sera appliqué au résultat.

Remarque: Le programme EF30CHAMP peut être utilisé pour le calcul de problèmes non-linéaires. Il peut utiliser soit une méthode d'approximations linéaires [37] ou aussi la méthode de Newton-Raphson. D'où la nécessité de la procédure "VERIF".

22. IMPRESS: Après l'obtention de la solution, le sous-programme IMPRESS offre la possibilité d'exploiter quantitativement ces résultats. Parmi les possibilités nous avons:

- Impression des valeurs du potentiel vecteur aux noeuds choisis.

- Impression des valeurs de l'induction magnétique dans les éléments indiqués.

- Calcul du flux: Le flux étant conservatif, il suffit de calculer le flux à travers une surface S.

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

La surface S, dans le plan d'étude (fig. IV.5) (cas bidimensionnel), est définie par un segment passant par le milieu des éléments "triangulaires" du maillage considéré. Le flux par unité de longueur devient:

$$\phi = \int_x \vec{B} \cdot \vec{j} dx = \int_x B_y dx$$

Comme la composante normale de l'induction (B_y) est constante (cf. III.3.) dans un élément e, alors:

$$\phi = \sum_{e=1}^{NH} \int_{x_e} B_y^e \cdot dx_e = \sum_{e=1}^{NH} B_y^e \Delta x_e$$

avec B_y^e : la composante normale de l'induction dans l'élément e.

Δx_e : la longueur de l'élément e.

La valeur de B_y^e est donnée par la procédure GRAD. L'évaluation du flux ϕ se fait dans le sous-programme IMPRESS.

- Le calcul du couple: Dans cette procédure, le calcul du couple se base sur le tenseur de Maxwell: Les efforts électromagnétiques développés dans le volume V sont transmis à travers la surface S(V) délimitant ce volume, on peut, alors,

évaluer cet effort par:

$$\vec{F} = - \int_{s(v)} \mu_0 \left[\frac{\vec{H}^2}{2} d\vec{S} - (\vec{H} \cdot d\vec{S}) \vec{H} \right]$$

ce qui donne:

$$F_t = \int_{s(v)} H_t B_n dS$$

$$F_n = \frac{1}{2} \int_{s(v)} B_t^2 - B_n^2 dS$$

Dans le cas d'une machine électrique tournante, nous prendrons pour surface S, une surface située dans l'entrefer c'est-à-dire entre le stator et le rotor. Le couple est alors créé par la composante tangentielle de \vec{F} .

$$C = R F_t$$

avec R: rayon interne de la machine.

Notre étude se fait sur un modèle bidimensionnel (voir fig. IV.5), alors la surface S sera définie par un segment. Le calcul de F_t devient:

$$F_t = F_x = \int_x H_x B_y dx$$

Comme les grandeurs H_x et B_y sont constantes dans un élément e du maillage, alors:

$$F_x = \sum_{e=1}^{NH} \int_{x_e} H_x^e B_y^e dx_e = \sum_{e=1}^{NH} H_x^e B_y^e \Delta x_e$$

avec H_x^e et B_y^e : sont le champ tangentiel et l'induction normale dans l'élément e respectivement.

Δx_e : la longueur de l'élément e.

donc:

$$C = R \sum_{e=1}^{NH} H_x^e B_y^e \Delta x_e$$

La procédure GRAD permet le calcul des grandeurs B_x^e et B_y^e et la procédure PERM donne la valeur de la perméabilité relative μ_r^e dans l'élément e . Finalement, le calcul de H_x^e et du couple C se font dans le sous-programme IMPRESS.

23. FINAL: Permet de balayer les éléments où le calcul des inductions élémentaires ou aussi des perméabilités élémentaires est nécessaire. IMPRESS fait appel de la procédure FINAL qui à son tour appel de GRAD ou PERM. Dans les cas de calcul du flux et/ou du couple.

24. COUPLE: Nous pouvons, aussi, évaluer le couple C (déjà calculé dans IMPRESS par le tenseur de Maxwell) en utilisant le principe des travaux virtuels.

Nous savons que la variation de l'énergie magnétique dans un champ électromagnétique est:

$$\delta W_m = \iiint_V \vec{H} \cdot \delta \vec{B} \, dV$$

Dans le cas magnétostatique et linéaire, l'énergie mise en jeu dans le volume V est:

$$\delta W_m = \iiint_V \vec{J} \cdot \delta \vec{A} \, dV$$

Notre étude se fait dans un domaine bidimensionnel (voir fig.IV.5) et le courant J est équivalent à une densité de courant superficielle j_s distribuée sur la surface interne du stator (cf.II.3.). Alors, l'énergie W_m devient:

$$\delta W_m = \frac{L}{2} \int_x j_s \cdot \delta A \, dx$$

avec L : longueur utile de la machine.

Au droit d'une encoche, la densité j_s est constante. Elle est nulle partout ailleurs. Dans ces conditions le couple est

donné par:

$$C = R \frac{\partial W_m}{\partial x} = \frac{RL}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{s=1}^{NH} \int_x J_s \cdot \delta A dx \right\}$$

avec R: rayon interne de la machine.

Finalement, le couple est calculé par:

$$C = \frac{RL}{2} j_s \sum_{s=1}^{nenc} (A'_i - A_i)$$

avec nenc: nombre d'encoches par pas polaire.

A_1, A_2 : valeurs nodales du potentiel au droit d'une encoche (voir fig. IV.5).

A l'inverse du calcul du couple par le tenseur de Maxwell (où le calcul de H_t et B_n donc du couple nécessitent une dérivation), son évaluation par le principe des travaux virtuels se fait directement à partir des valeurs nodales du potentiel vecteur A (la solution).

CONCLUSION:

A partir d'un code de calcul existant le logiciel informatique présenté a été modifié pour prendre en compte les sources d'excitation (les aimants) au rotor. Le système avant modification a été jugé satisfaisant du point de vue convergence et temps de calcul.

Par contre le mailleur gagnerait à être adapté aux configurations cylindriques et surtout tenir compte de la longueur de l'entrefer très petite devant le rayon du rotor.

Nous allons, dans le chapitre V, présenter les résultats de l'optimisation des dimensions rotoriques de la machine étudiée.

CHAPITRE V

OPTIMISATION DES PARAMETRES GEOMETRIQUES DU ROTOR DE LA MACHINE ETUDIEE

CHAPITRE V
OPTIMISATION DES PARAMETRES GEOMETRIQUES
DU ROTOR DE LA MACHINE ETUDIEE

INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, nous présentons, les résultats numériques de l'optimisation du couple de la machine à aimants incérés dans le rotor en fonction de certains paramètres rotoriques: l'angle d'ouverture des aimants, celui des encoches rotorique(donc des pièces polaires) et l'épaisseur des aimants.

Le reste des paramètres géométriques et électriques de la machine sont déterminés par des contraintes de nature très variées, telles qu'encombrement, masse, coût, performances, etc.

Enfin, nous présentons, une analyse du couple statique développé par cette machine permettant d'appréhender sa nature et ses composantes

V.1. OPTIMISATION DU COUPLE:

Les hypothèses simplificatrices classiques permettent de ramener le calcul de la répartition du champ dans la machine étudiée(problème tridimensionnel) à un problème bidimensionnel (voir chapitre II). Nous négligeons la saturation au niveau du rotor, vu que les dents statoriques se saturent avant ce dernier. Pour le reste des calculs, nous supposons, la valeur de la perméabilité relative du fer rotorique constante et égale à 1000.

Le moteur calculé doit rentrer dans une série bien déterminée. D'où le cahier de charge suivant:

- Diamètre extérieur de la machine: 88 mm;
- Diamètre du rotor de la machine: 60.4 mm;
- Nombre de paires de pôles : 3;
- Nombre d'encoches statorique : 36;
- Entrefer mécanique : 0.8 mm;
- Longueur utile de la machine : 140 mm;
- Induction rémanente des aimants : 1 Tesla;

- Courant dans une encoche statorique : $I_n = 171$ A.

Nous utilisons, pour ce calcul, la méthode des éléments finis présentée au chapitre III. Les deux programmes présentés au chapitre précédent constituent la mise en œuvre pratique de la M.E.F.; ils sont utilisés pour la détermination du potentiel vecteur dans tout le domaine d'étude.

Le premier programme(mailleur) nécessite la définition du découpage. Nous avons choisi, sans passer par une étude comparative à cause du temps de calcul très élevé et du nombre de configurations à traiter, le découpage suivant:

- Nombre de divisions horizontales: $NH = 72$;
- Nombre de divisions verticales : $NV = 16$;
- Nombre de noeuds total : $NNO = 1241$;
- Nombre d'éléments(quadrilatères): $NEL = 1152$.

Ce découpage a été choisi le plus fin "possible", et en tenant compte des travaux précédents [36],[37].

V.1.1. Effet de la Largeur des Pièces Polaires:

Il s'agit, au début, d'étudier les différentes configurations de distribution du champ correspondant à plusieurs positions relatives du rotor par rapport au stator (fig.V.1.). Pour une présentation plus générale, les courbes du couple ont été normalisées en utilisant la valeur C_n pour $\alpha=\beta=90^\circ$ électrique comme couple de base. Les différentes courbes en fonction de l'angle entre les champs induit et inducteur noté δ présentent un maximum pour un angle $\delta=90+\beta$. Ces couples s'annulent pour les angles $\delta=0$ et $\delta=180^\circ$ électrique. Ces résultats sont identiques à ceux énoncés dans la littérature[21],[23].

Remarque: Les courbes de couple en fonction de la position du rotor présentent une forme "dentée" pour les faibles valeurs de l'ouverture des aimants. Ceci est un résultat assez attendu du fait que des machines d'ouverture d'aimant de 7.5° élect. sont tout à fait une vue théorique sans intérêt pratique.

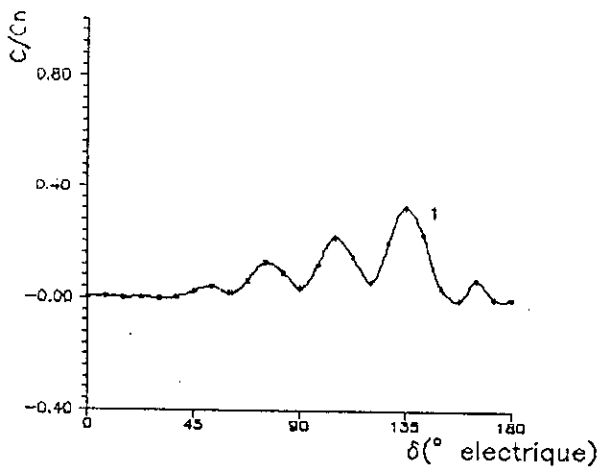


Fig.V.1.a) Couple angulaire
pour $\beta = 11\pi/24$

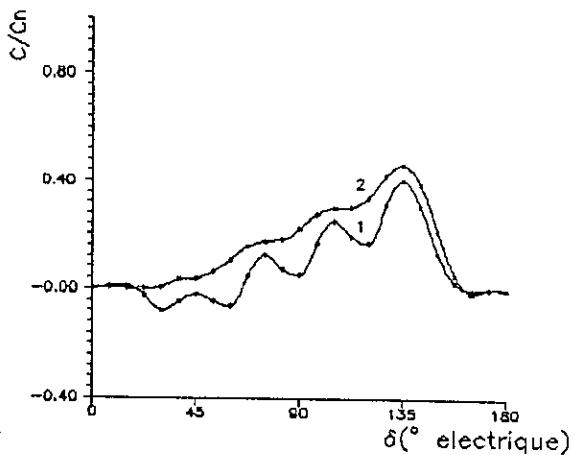


Fig.V.1.b) Couple angulaire
pour $\beta = 10\pi/24$

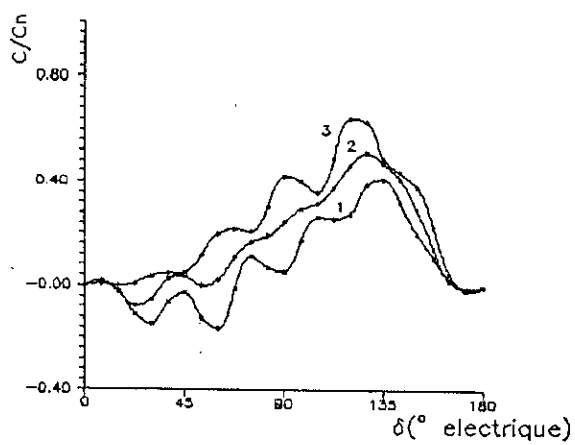


Fig.V.1.c) Couple angulaire
pour $\beta = 9\pi/24$

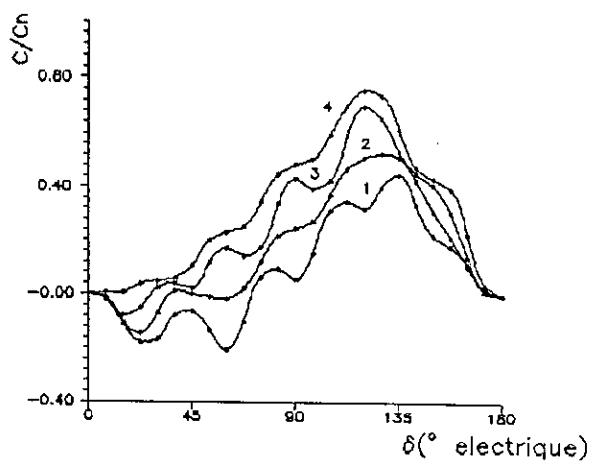


Fig.V.1.d) Couple angulaire
pour $\beta = 8\pi/24$

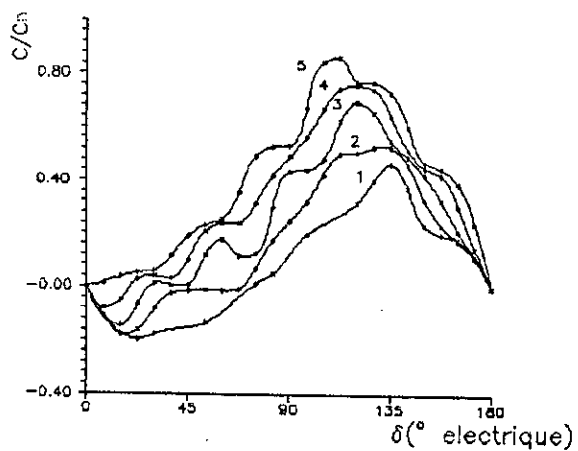


Fig.V.1.e) Couple angulaire pour $\beta = 7\pi/24$

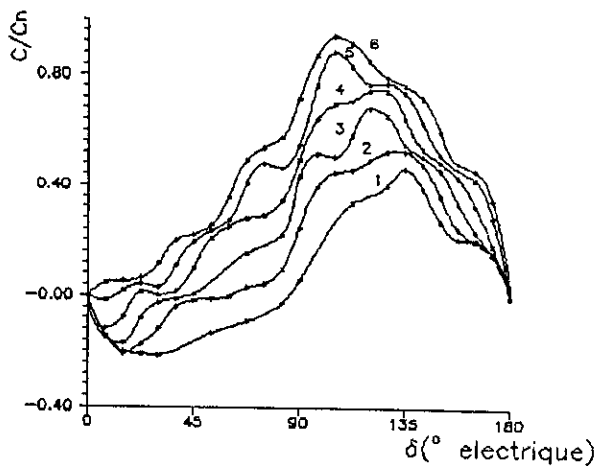


Fig.V.1.f) Couple angulaire pour $\beta = 6\pi/24$

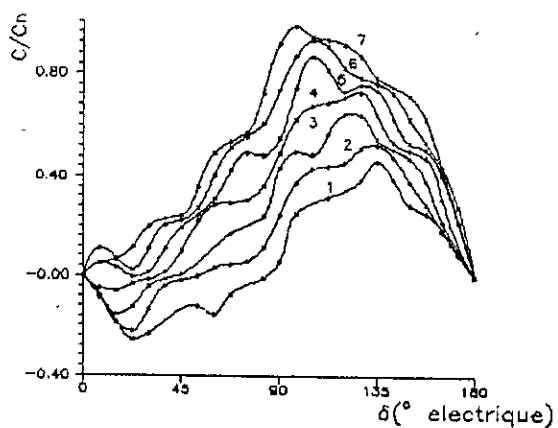


Fig.V.1.g) Couple angulaire pour $\beta = 5\pi/24$

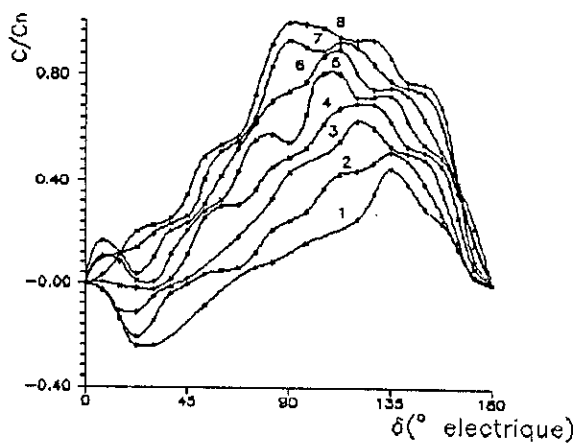


Fig.V.1.h) Couple angulaire pour $\beta = 4\pi/24$

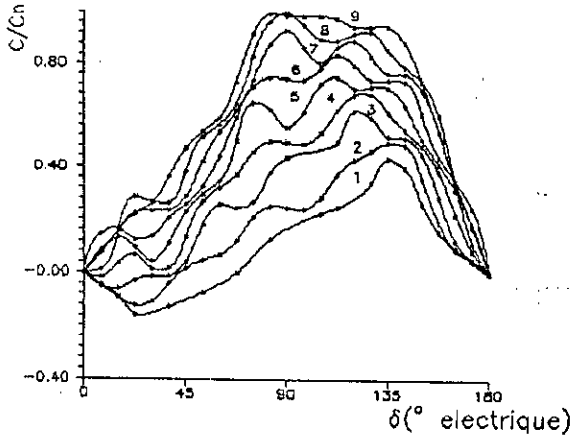


Fig.V.1.i) Couple angulaire pour $\beta = 3\pi/24$

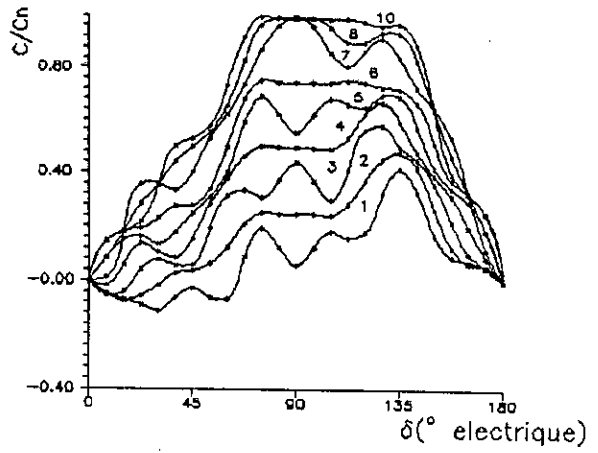


Fig.V.1.j) Couple angulaire pour $\beta = 2\pi/24$

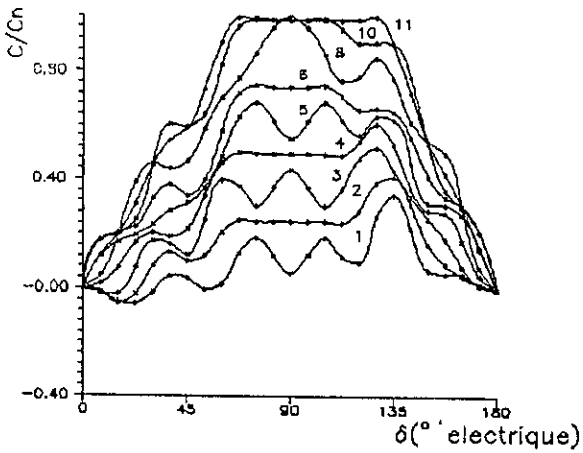


Fig.V.1.k) Couple angulaire pour $\beta = \pi/24$

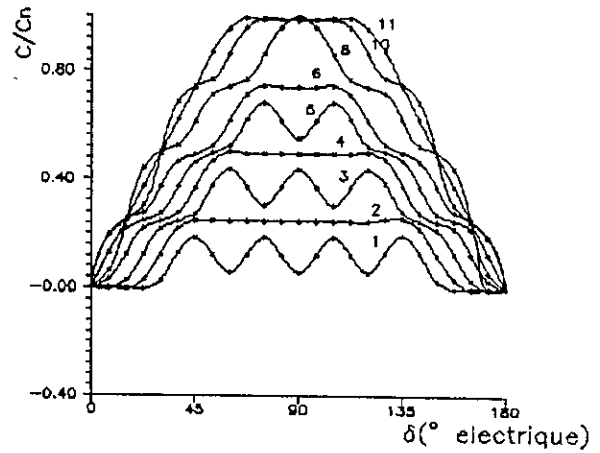


Fig.V.1.l) Couple angulaire pour $\beta = 0$.

1. $\alpha = \pi/24$
 4. $\alpha = 4\pi/24$
 7. $\alpha = 7\pi/24$
 10. $\alpha = 10\pi/24$

2. $\alpha = 2\pi/24$
 5. $\alpha = 5\pi/24$
 8. $\alpha = 8\pi/24$
 11. $\alpha = 11\pi/24$

3. $\alpha = 3\pi/24$
 6. $\alpha = 6\pi/24$
 9. $\alpha = 9\pi/24$
 12. $\alpha = 12\pi/24$

En calculant le couple statique développé par la machine pour chaque couple de valeurs (α, β) , les maximum locaux forment la figure V.2. Cette figure représente le couple statique en fonction de β avec la demi-ouverture des aimants comme paramètre. Nous constatons que, pour une valeur fixe de $\alpha \leq 60^\circ$, le couple statique augmente avec β puis passe par un maximum. Ce comportement s'explique par la variation de la différence entre les inductances de la machine dans les axes direct et longitudinale (c'est-à-dire à la variation du couple réactant)[43].

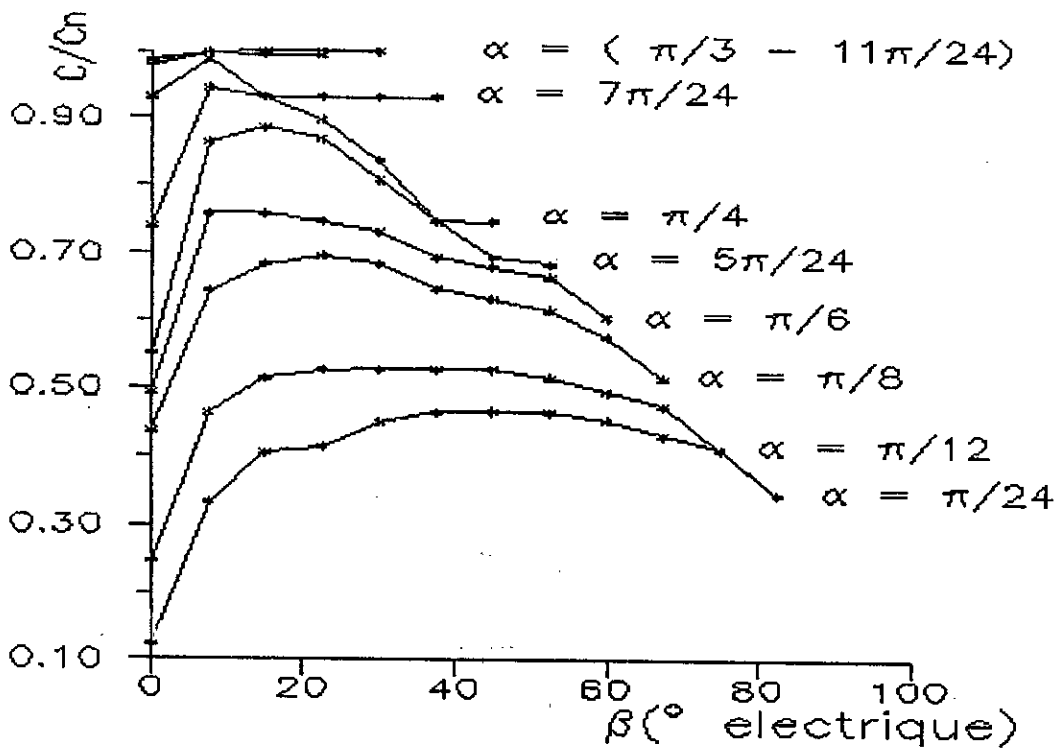


Fig.V.2. Couple en fonction des paramètres (α, β) .

V.1.2. Effet de l'Ouverture des Aimants :

La figure V.3. représente, le couple en fonction de la demi-ouverture des aimants α , pour les valeurs optimales de β . Les différents points de ce graphe sont issus des maximums locaux du réseau de courbes (fig.V.2.). Cette caractéristique montre la

variation du couple avec l'augmentation de l'angle d'ouverture des aimants. Cette évolution correspond à l'augmentation du flux dû aux aimants; mais à partir de la valeur $\alpha=60^\circ$, qui représente l'ouverture des aimants correspondants à la surface sur laquelle étant les densités de courants statoriques, le couple est moins influencé par ce paramètre α . Le même résultat (qui d'ailleurs classique) à été obtenu par les auteurs T.THOMAS & G.R.SLEMON. La figure V.3. permet de déterminer les valeurs optimales suivantes:

$$\alpha_{opt} = 60^\circ \text{ électrique.}$$

$$\beta_{opt} = 30^\circ \text{ électrique.}$$

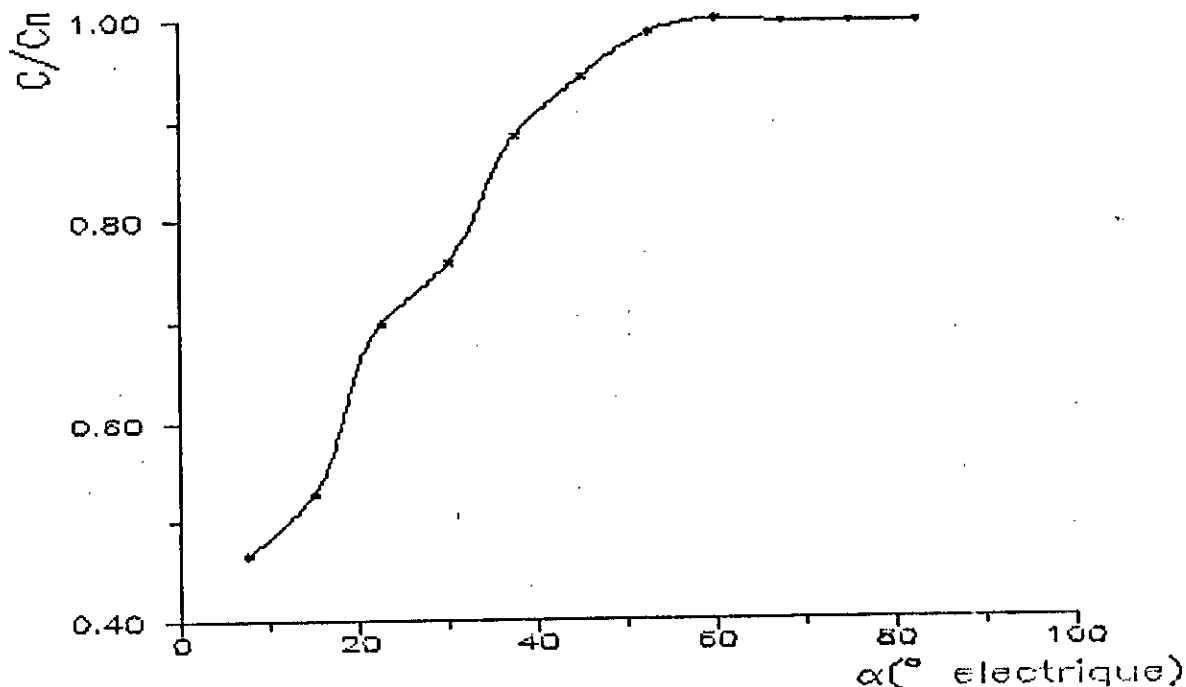


Fig.V.3. Couple en fonction de l'ouverture des aimants.

V.1.3. Effet de la Hauteur des Aimants:

Les différents calculs précédents ont été effectués pour une hauteur de l'aimant h_a constante et quelconque.

Maintenant, avec les valeurs optimales α_{opt} et β_{opt} et pour la position optimale du rotor par rapport au stator correspondante, nous traçons le couple en variant la hauteur des aimants h_m (fig.V.4.). L'augmentation de la hauteur des aimants entraîne celle du couple qui est moins en moins influencé à partir d'une certaine valeur. La hauteur optimale de l'aimant comme d'ailleurs son ouverture α doivent être limitées aux valeurs minimales pour lesquelles le couple est maximum (conclusion économique).

D'où : $h_{mopt} = 9 \text{ mm.}$

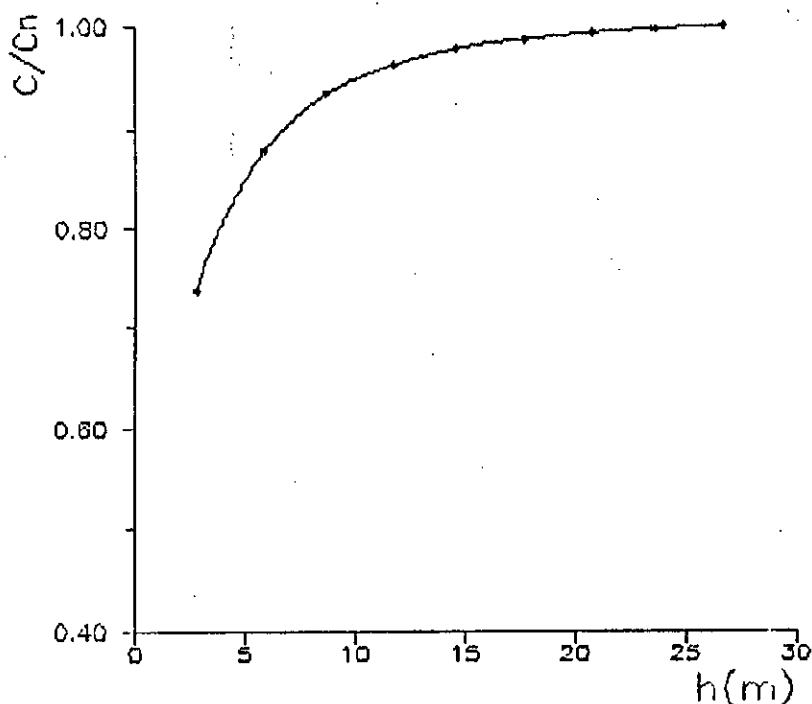


Fig.V.4. Couple en fonction de la hauteur des aimants.

V.2. ANALYSE DU COUPLE:

La machine à aimants permanents insérés dans le rotor présente la caractéristique d'une machine à réluctance variable excitée. Donc, nous pouvons distinguer, deux type de couples[41]:

- Le couple mutuel, résultant de l'interaction des champs magnétiques d'origines différentes(induit et aimants).

- Les couples propres correspondant à chacune des sources de champs (induit d'une part, aimants d'autre part).

Le couple résultant de la machine étant la somme des trois composantes mais le principal étant le couple mutuel (les autres sont faibles).

V.2.1. Influence des Pièces Polaires:

Nous présentons à la figure V.5. le couple d'une machine (pour $\alpha = \beta = 45^\circ$ et $h_m = h_{m\text{opt}}$) et aussi sur la même figure le couple de la machine sans pièces polaires mais avec la même ouverture des aimants . Ces deux courbes permettent de montrer l'apport des pièces polaires c'est-à-dire du couple réluctant. Environ 20 %, dans ce cas précis.

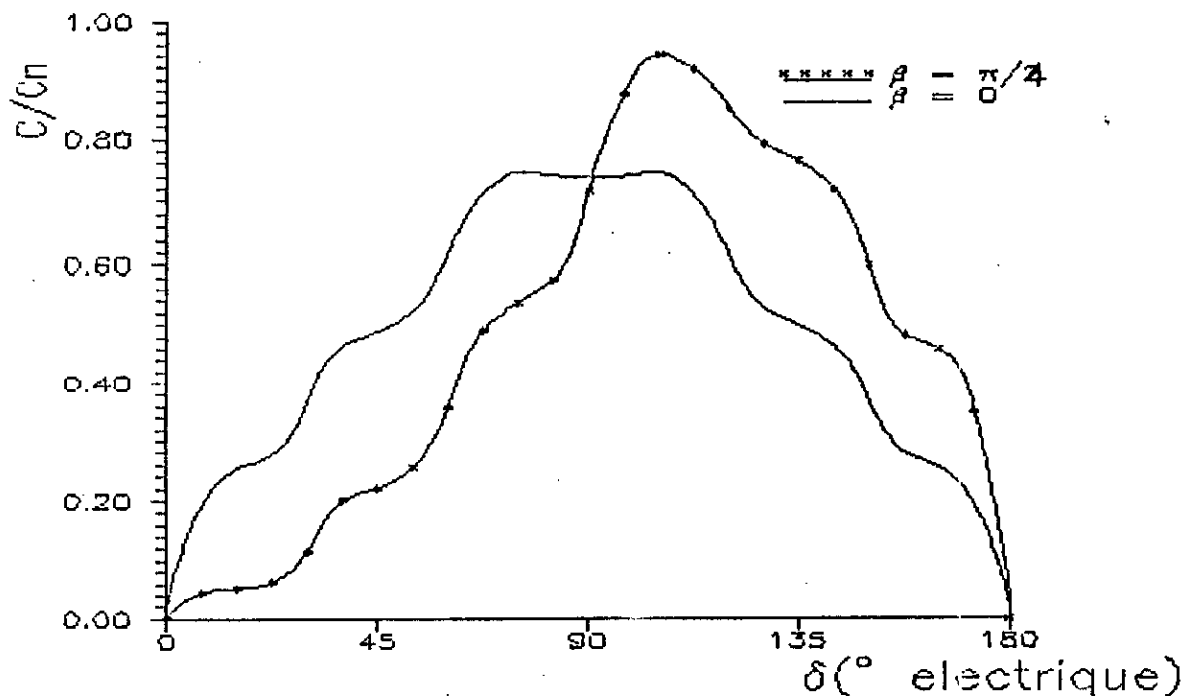


Fig.V.5. Couple angulaire pour $\alpha = \pi/4$.

V.2.2. Influence des Courants Statoriques:

Nous faisons varier la valeur du courant statorique et nous calculons le couple résultant (fig.V.6.).

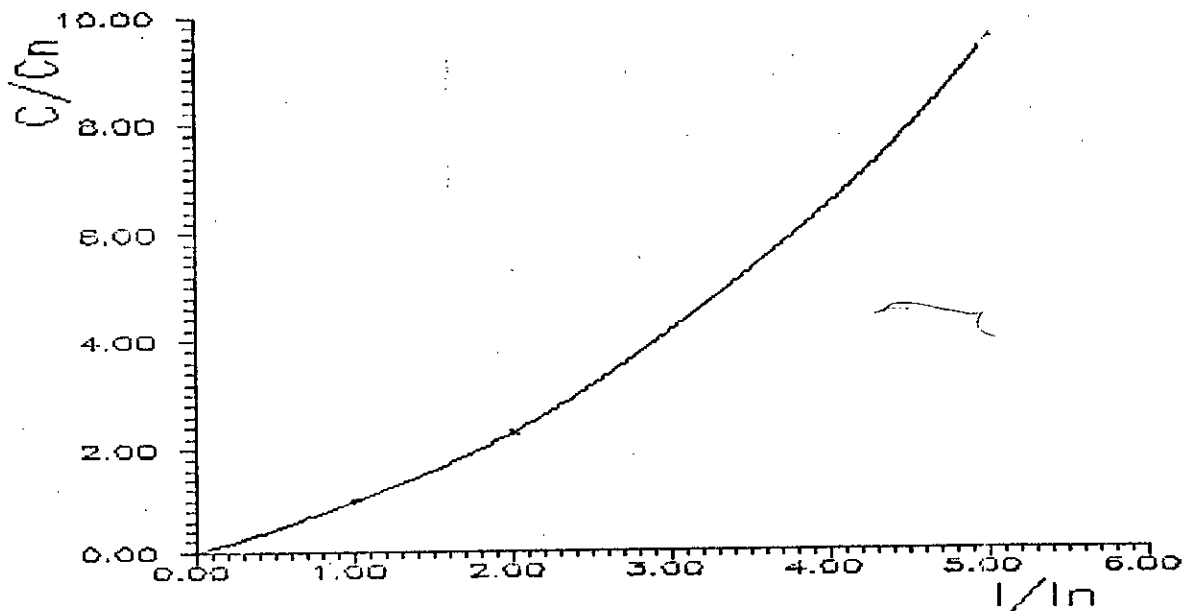


Fig.V.6. Couple en fonction du courant statorique.

Nous remarquons que, le couple présente une composante qui varie comme la carré du courant (I^2), pour les basses valeurs de courant. Tandis que, la même relation deviendrait essentiellement linéaire[19] quand la saturation des matériaux ferromagnétiques intervient, pour les courants forts.

CONCLUSION:

Les résultats numériques de l'optimisation du couple en fonction des grandeurs géométriques: l'ouverture des aimants, celle des pièces polaires et l'épaisseur des aimants permettent de vérifier certains résultats donnés dans la littérature[21],[23], [43].

Des essais sur un prototype de machine à aimants permanents insérés dans le rotor permettent la vérification de la validité des valeurs numériques calculées, mais l'indisponibilité de ce prototype rend impossible cette tâche.

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSIONS GENERALE

Au cours de ce travail, nous avons essayé de présenter une revue générale des différentes structures de machines à aimants permanents. Nous avons, aussi, présenté un outil de calcul (la méthode des éléments finis) et sa mise en œuvre pratique (système informatique utilisé). Finalement, nous avons présenté le calcul d'une structure bien déterminée (la machine à aimants insérés dans le rotor).

L'optimisation de la structure choisie deviendra plus précise si des améliorations sont apportés au modèle et à l'outil de calcul:

- Le mailleur doit tenir compte du fait que l'entrefer de ce type de machines est très petit. Alors, l'introduction du "macro-élément"[42] s'avère être une solution intéressante.

Aussi, un calcul tridimensionnel permettra une optimisation de la longueur axiale de la machine (effet d'extrémité).

L'affinement de la qualité de la solution permettra d'atteindre l'optimum recherché. Une fois les différentes grandeurs géométriques connues, l'étape de la réalisation de cette machine constitue le prolongement logique de ce travail.

ANNEXES

ANNEXE I

DISTRIBUTIONS

AI.1 RAPPELS SUR LES DISTRIBUTIONS:

AI.1.1 Définitions:

La théorie des distributions est une branche très importante des mathématiques dont on trouvera un exposé complet dans le livre de Schwartz [39]. Dans le résumé qui suit, plus directement tiré du livre de M. Petit [40], nous aurons l'occasion de faire intervenir des espaces fonctionnels particuliers comme par exemple:

D : l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact sur un ouvert Ω (D est un espace fonctionnel topologique, c'est-à-dire un espace où la notion de convergence d'une suite différentiable possède un sens).

L^2 : l'espace des fonctions de carré sommable.

H^1 : l'espace de Sobolev d'ordre 1, espace des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre 1 (au sens des distributions) appartiennent à L^2 . Le potentiel vecteur \vec{A} appartient à cet espace puisque son rotationnel, qui est l'induction magnétique \vec{B} , est à énergie finie (intégrale d'espace bornée).

Sur chaque espace ainsi défini, on peut définir des fonctionnelles qui, à une fonction de l'espace fonctionnel, associent un nombre complexe. Et on appelle espace dual

algébrique (resp. dual) d'un espace fonctionnel l'ensemble des fonctionnelles linéaires (resp. linéaires et continues) sur cet espace.

Une fonctionnelle linéaire continue sur D est appelée distribution, elle appartient au dual D' de D . Un exemple de telles distributions est celui des distributions associées aux fonctions (d'une seule variable x) localement sommable (intégrable au sens Lebesgue sur tout intervalle borné). A toute fonction $f(x)$ de ce type on associe la distribution $T_f \in D'$ définie par:

$$\forall \varphi \in D, \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx$$

En toute rigueur, T_f n'est pas une fonction, on ne peut donc pas parler de la valeur de T_f en un point x donné. Cependant si g est presque partout égale à f ($g=f$ sauf en un nombre fini de points), l'intégrale précédente (prise au sens Lebesgue) est la même pour f et g . On en déduit $T_g = T_f$. La distribution T_f ainsi définie est donc associée à la classe des fonctions presque partout égales à f , et par extension on identifie la fonction localement sommable et la distribution correspondante.

Notons cependant qu'il existe d'autres distributions, comme par exemple la distribution de Dirac notée δ_a définie par:

$$\forall \varphi \in D, \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

qui n'est associée à aucune fonction localement sommable.

AI.1.2 Généralités sur la dérivée:

Par définition la dérivée d'une distribution T de D' est la distribution T' définie par:

$$\forall \varphi \in D, \quad \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$$

avec cette définition de la dérivée et en tenant compte de l'assimilation entre fonction et distribution associée signalée plus haut, on montre que la règle de dérivation pour une fonction f présentant une discontinuité au point a est alors la suivante:

$$f' = (f') + [f]_a \cdot \delta_a$$

La dérivée f' au sens des distributions (qui s'écrit $(T_f)'$ dans la notation de Schwartz) est égale à la dérivée "sans précautions" $\{f'\}$ (classiquement $T_{f'}$) augmentée de la distribution de Dirac δ_a en a multipliée par le saut $[f]_a$ de f en ce point.

Cette règle appliquée à une fonction f (scalaire ou vectorielle) de plusieurs variables, dérivable dans le complémentaire d'une surface S (de normale \vec{n}), donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f &= (\vec{\nabla} f) + [f]_S \delta_S \cdot \vec{n} \\ \nabla \vec{f} &= (\nabla \vec{f}) + \vec{n} \cdot [\vec{f}]_S \delta_S \\ \nabla \cdot \vec{f} &= (\nabla \cdot \vec{f}) + \vec{n} \times [\vec{f}']_S \delta_S \end{aligned}$$

où δ_s est la distribution surfacique de Dirac sur la surface s .

Au delà de leur aspect formel, ces formules sont très pratiques. La deuxième relation conduit notamment à une démonstration très élégante du théorème d'Ostrogradski [40]. Elles permettent d'utiliser les opérations habituelles (dérivation, intégration,...) dans le cas de fonctions non-continues, c'est en ce sens que l'on peut dire que les distributions généralisent les fonctions.

AI.2. EXEMPLES D'APPLICATION DES DISTRIBUTIONS:

Si l'on prend les équations de Maxwell au sens des distributions, alors, les discontinuités des fonctions étant prises en compte par les formules de dérivation, les relations de passage (discontinuité de la dérivée normale du potentiel) son directement intégrées aux équations locales du champ.

AI.2.1 Interface magnétique simple:

On peut se faire une idée plus précise de cette propriété en étudiant le problème de la magnétostatique bidimensionnelle dont les équations sont donnée au paragraphe II.4.

Dans les conditions de la figure A1.1, exprimer que $\text{div } \vec{B} = 0$ au sens des distributions dans tout le domaine Ω , revient à écrire:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla \vec{B} \cdot \varphi = 0$$

Nous introduisons ici l'espace fonctionnel $C_0^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment dérivables à support compact sur Ω , espace qui n'est en fait que $D(\Omega)$ privé de sa topologie[39].

REMARQUE: Divergence de \vec{B} est nulle revient à écrire que l'intégrale du produit $\text{div } \vec{B} \cdot \varphi$ est nulle, et non pas que les valeurs de $\text{div } \vec{B}$ sont nulles en tout point de Ω , ce qui n'a d'ailleurs pas de sens en théorie des distributions. Le physicien est alors en position de considérer qu'en tant que distribution, une grandeur physique n'est pas connue par ces valeurs en des "points" donnés, mais plutôt par son action sur d'autres fonctions.

La divergence de la distribution \vec{B} étant définie conformément à la formule de dérivation, on obtient:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

En intégrant sur chacun des deux sous-domaines (fig. AII.1) homogènes on obtient pour chacune des trois composantes:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad - \int_{\Omega_1} B_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_{\Omega_2} B_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

soit en intégrant par parties, en tenant compte du fait que B est dérivable sur chaque sous-région et que φ est nulle sur $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad - \int_{\Omega_1} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \varphi - \int_{\Omega_2} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \varphi + \int_{\Gamma_1} n_i B_i^{(1)} \varphi - \int_{\Gamma_1} n_i B_i^{(2)} \varphi = 0$$

Le signe (-) de la deuxième intégrale de surface provient du sens de la normale \vec{n} arbitrairement choisi conformément à la fig.AI.1. Soit encore en regroupant les indices et les deux intégrales de surface:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad - \int_{\Omega_1} \nabla \vec{B}^{(1)} \varphi - \int_{\Omega_2} \nabla \vec{B}^{(2)} \varphi + \int_{\Gamma_i} \vec{n} \cdot [\vec{B}^{(1)} - \vec{B}^{(2)}] \varphi = 0$$

Cette relation devant être vérifiée pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(\Omega)$ on obtient nécessairement:

$$\begin{array}{ll} \nabla \vec{B} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \Omega_2 \\ \vec{n} \cdot [\vec{B}] = [B_n] = 0 & \text{sur } \Gamma_i \end{array}$$

L'équation $\text{div } \vec{B} = 0$, au sens des distributions, contient à la fois l'expression de cette loi au sens usuel (continu), et la relation de passage sur la composante normale de \vec{B} aux interfaces magnétiques. On montrerait de même que l'expression $\vec{r} \otimes \vec{B} = 0$ contient la condition de passage $[H_t] = 0$.

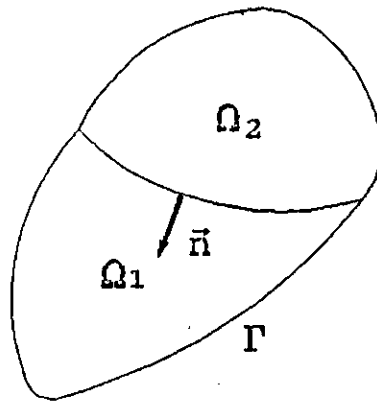


Fig.AI.1. Interface magnétique.

AI.2.2 Cas d'une nappe de courant:

Il reste à étudier le cas d'une interface contenant des courants surfaciques. Dans cet exposé du problème utilisant la notion de dérivée au sens des distributions, ces courants doivent être considérés comme des distributions surfaciques de Dirac $j_s \delta_s$. Le raisonnement précédent peut-être repris avec:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}, \quad \text{ou } \vec{j} \text{ se réduit à } \vec{j}_s \delta_s$$

on peut retrouver le résultat directement en utilisant la formule: de dérivation, des fonctions à plusieurs variables, au sens des distributions:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{H}) + \vec{n} \times [\vec{H}] \delta_s = \vec{j}_s \delta_s$$

soit en termes "habituels" :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2$$

$$\vec{n} \times [\vec{H}] = [H_t \vec{e}_t] = \vec{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_1$$

ANNEXE II

EQUATIONS D'EULER

Considérons la fonctionnelle d'énergie suivante:

$$\mathcal{F} = \iint_{\Omega} (\int_0^B \vec{v} \vec{b} db) d\Omega + \int_{\Gamma} j_s A d\Gamma \quad (\text{AII-1})$$

elle est de la forme:

$$\mathcal{F} = \iint_{\Omega} f(A, A_x, A_y, x, y) d\Omega + \int_{\Gamma} g(x, y) A d\Gamma \quad (\text{AII-2})$$

avec

$$A_x = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial A}{\partial y}$$

Les équations d'Euler correspondantes sont [32]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial A_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial A_y} \right) - \frac{\partial f}{\partial A} = 0 \quad \dots \text{dans } \Omega \quad (\text{AII-3})$$

$$l_x \frac{\partial f}{\partial A_x} + l_y \frac{\partial f}{\partial A_y} = 0 \quad \dots \text{sur } \Gamma \quad (\text{AII-4})$$

où l_x et l_y sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la limite Γ du domaine Ω .

Par identification des fonctionnelles (AII.1 et AII.2)

on tire:

$$f(A, A_x, A_y, x, y) = \int_0^B \vec{v} \vec{b} db \quad (\text{AII-5})$$
$$g(x, y) = j_s$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial x}{\partial A} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial y}{\partial A} \right) - 0 - 0 \dots \text{sur } \Omega \quad \text{(AII-7)}$$

d'ou

$$\frac{\partial}{\partial B} \frac{\partial A}{\partial x} = A_x$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \frac{\partial A}{\partial y} = A_y$$

sachant que $B^2 = |\text{rot } A|^2$ il vient:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial B} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial B} \right) - 0 - 0$$

soit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^B v db \right) \frac{\partial A}{\partial B} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^B v db \right) \frac{\partial A}{\partial B} - \frac{\partial}{\partial A} \left(\int_0^B v db \right) - 0$$

a l'induction magnetique B il vient:

En utilisant une derivation intermediaire par rapport

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^B v db \right) \frac{\partial A}{\partial B} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^B v db \right) \frac{\partial A}{\partial B} - \frac{\partial}{\partial A} \left(\int_0^B v db \right) - 0 \quad \text{(AII-6)}$$

de f donnee par l'expression (AII.5):

Ecrivons l'equation (AII.3) en considerant la "valeur"

De même nous allons écrire l'équation(AII.4)selon l'expression(AII.5):

$$\vec{l}_x \frac{\partial}{\partial A_x} \left(\int_0^{\vec{B}} \vec{v} \vec{b} db \right) + \vec{l}_y \frac{\partial}{\partial A_y} \left(\int_0^{\vec{B}} \vec{v} \vec{b} db \right) - j_s$$

soit:

$$\vec{l}_x \frac{\partial}{\partial \vec{B}} \left(\int_0^{\vec{B}} \vec{v} \vec{b} db \right) \frac{\partial \vec{B}}{\partial A_x} + \vec{l}_y \frac{\partial}{\partial \vec{B}} \left(\int_0^{\vec{B}} \vec{v} \vec{b} db \right) \frac{\partial \vec{B}}{\partial A_y} - j_s$$

ou plus simplement:

$$\vec{l}_x \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial A_x} + \vec{l}_y \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial A_y} - j_s$$

or

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial A_x} = \frac{A_x}{B} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial A_y} = \frac{A_y}{B}$$

donc l'équation(AII.7) devient:

$$l_x \frac{\partial A}{\partial x} + l_y \frac{\partial A}{\partial y} - j_s$$

soit:

$$\frac{\partial A}{\partial n} = j_s \quad \dots \text{ sur } \Gamma \quad (\text{AII-8})$$

où \vec{n} est la normale extérieure à la limite Γ .

On voit que le processus de minimisation de la fonctionnelle tient compte des conditions aux limites du type

Neumann. Dans le cas des conditions de type Dirichlet, l'expression(AII.1) ferait intervenir une intégrale curviligne donnant lieu à un terme constant qui n'influe pas sur la recherche du minimum.

ANNEXE III

LA METHODE DES RESIDUS PONDERES

AIII.1. PRINCIPE:

Considérons le problème caractérisé par les équations (III.1). En supposant les conditions aux limites satisfaites, remplaçons dans (III.1) le potentiel vecteur A par une valeur approchée A^a . La première équation des relations (III.1) devient alors:

$$D(A^a) - F = R \quad (\text{AI-1})$$

où R est le résidu issu de l'approximation.

Pour approcher la solution exacte A , on minimise le résidu R dans le domaine d'étude Ω .

Une manière de réaliser cette condition consiste à annuler la valeur moyenne du résidu R , pondéré par une fonction quelconque des coordonnées:

$$\iint_{\Omega} W.R. d\Omega = 0 \quad (\text{AI-2})$$

où W est la fonction de pondération.

Dans le cas de l'équation de Poisson, l'intégrale (AI.2) s'écrit:

$$\iint_{\Omega} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A^a}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A^a}{\partial y} \right) + J \right\} = 0 \quad (\text{AI-3})$$

En supposant la fonction W dérivable et en utilisant une intégration partielle(*), l'expression(AIII.3) devient:

$$\iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial A^a}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial A^a}{\partial y} - WJ \right) d\Omega - \oint_{\Gamma} W v \frac{\partial A^a}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (AI-4)$$

La première expression de (AIII.4) décrit le potentiel A dans le domaine Ω tandis que la deuxième caractérise les conditions aux limites Γ .

AIII.2 FONCTION DE PONDERATION:

Il y a plusieurs manières de choisir la fonction de pondération W. En associant l'intégrale(AIII.4) à un découpage du domaine Ω en éléments finis et en choisissant comme fonction W_i relative à chaque noeud, la même fonction de pondération α_i que nous avons utilisée dans le cas de la fonctionnelle d'énergie, nous aboutissons à la méthode de Galerkin. Remplaçons alors dans (AIII.4) la fonction W par α_i , et A^a par la fonction d'interpolation(III.7). Dans le cas de l'élément e, (AIII.4) s'écrit:

$$\iint_{\Omega_e} v \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} A_k^a + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} A_k^a - \alpha_i J \right) d\Omega_e - \oint_{\Gamma_e} \alpha_i v \frac{\partial A_e^a}{\partial n} d\Gamma_e = 0 \quad (AI-5)$$

soit

$$\iint_{\Omega_e} \left(v \sum_{k=1}^m \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_k A_k^a - \alpha_i J \right) d\Omega_e - \oint_{\Gamma_e} \alpha_i v \frac{\partial A_e^a}{\partial n} d\Gamma_e = 0 \quad (\text{AI-6})$$

L'intégrale sur Γ_e caractérise les conditions de transmission inter-éléments ou les conditions aux limites du domaine de résolution Ω . On constate qu'au terme près sur les limites, la relation (AIII.6) est identique à l'équation (III.11.).

(*) Sous la forme (AIII.3), l'intégrale nécessite la continuité des dérivées du potentiel aux interfaces des éléments (cf III.3.1)

le problème se posera au moment où on associera à (AIII.3) un découpage du domaine Ω en éléments finis. Pour s'affranchir de cette difficulté on utilise la formulation représentée par (AIII.4).

ANNEXE IV

MINIMISATION DE LA FONCTIONNELLE

Considérons la fonctionnelle élémentaire:

$$\mathcal{F}^e = \iint_{\Omega_e} \left(\int_0^{B^e} v b \, db \right) d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} j_s^e A^e d\Gamma_e \quad (\text{AIV-1})$$

dans le cas linéaire, la réluctance v est indépendante de l'induction, si bien que l'équation (A.IV.1) devient:

$$\mathcal{F}^e = \iint_{\Omega_e} \left(\frac{v}{2} B^{e2} \right) d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} j_s^e A^e d\Gamma_e \quad (\text{AIV-2})$$

Si nous calculons la dérivée de \mathcal{F} par rapport à la valeur nodale A_i^e , nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}^e([A]^e)}{\partial A_i} &= \frac{\partial}{\partial B^2} \left\{ \iint_{\Omega_e} \frac{v}{2} B^{e2} d\Omega_e \right\} \frac{\partial B^2}{\partial A_i} + \frac{\partial}{\partial A_i} \int_{\Gamma_e} j_s^e \sum_{k=1}^2 \alpha'_k A_k d\Gamma_e \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} v \frac{\partial B^2}{\partial A_i} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} j_s \frac{\partial}{\partial A_i} \sum_{k=1}^2 \alpha'_k A_k d\Gamma_e \end{aligned} \quad (\text{AIV-3})$$

pour calculer cette expression (A.IV-3), il faut connaître l'expression $\partial B^e / \partial A_i^e$; or, dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes à deux dimensions on peut écrire:

$$\vec{B}^2 = |\vec{\nabla} A|^2$$

Ainsi

$$\dot{B}^2 = \left(\nabla \sum_{k=1}^3 \alpha_k A_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^3 (\nabla \alpha_k) A_k \right)^2$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^2}{\partial A_i} &= 2 \left(\sum_{k=1}^3 \alpha_k A_k \right) \left(\frac{\partial}{\partial A_i} \left(\sum_{l=1}^3 \nabla \alpha_l A_l \right) \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^3 \nabla \alpha_k A_k \right) \left(\sum_{l=1}^3 \nabla \alpha_l \frac{\partial A_l}{\partial A_i} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^3 \nabla \alpha_k \nabla \alpha_i A_k \end{aligned} \quad (\text{AIV-5})$$

et d'autre part nous avons:

$$\int_{\Gamma''} j_s \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\sum_{k=1}^2 \alpha'_k A_k \right) d\Gamma'' = \int_{\Gamma''} j_s \alpha'_i d\Gamma'' \quad (\text{AIV-6})$$

Ainsi l'équation de minimisation (A.IV-3) devient:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^e([A]^e)}{\partial A_i} = \int \int_{\Omega''} v \left(\sum_{k=1}^3 \nabla \alpha_i \nabla \alpha_k A_k \right) d\Omega'' - \int_{\Gamma''} j_s \alpha_i d\Gamma'' = 0 \quad (\text{AIV-7})$$

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.NICOUD:"A la recherche des économies de coûts industriels: Le moteur à aimants permanents", Colloque Européen sur les machines à aimants, Rapport 3/1, Grenoble 1990, pp 1-7.
- [2] A.GERAUD, J.P.POUILLANGE, G.CREMET:"Evolution des performances et nouvelles applications des machines à aimants permanents", Colloque Européen sur les machines à aimants, Rapport 3/2, Grenoble 1990, pp 1-5.
- [3] J.H.ARGYRIS, S.KELSEY:"Energy theorems and structural analysis", Butterworth(LONDON), 1960.
- [4] M.V.K.CHARI, P.P.SILVESTER:"Finite element solution of saturable magnetic field problems",IEEE trans. on PAS, Vol.PAS-89, n7, 1970.
- [5] BOSSAVIT:"Méthode des éléments finis", Cours de PARIS VI, 1984.
- [6] P.BRISSENEAU:"Rôle et place des matériaux magnétiques dans la technologie de construction des équipements électriques", rapport interne de l'E.N.S.I.E.Grenoble, 1990.
- [7] H.ZIJLSTRA:"Permanent magnet, theory: Ferromagnetic materials", Vol. 3, Ed. North Holland,1982.
- [8] A.REAMA:"Contribution à l'étude d'un servomoteur à aimants permanents et commutation électronique",thèse de Doctorat de l'I.N.P.Toulouse, 1987.
- [9] C.HAGLON:"Recherches de performances "massiques et volumiques" en vitesse variable",revue Alsthom 1987,n9,pp 53-60.
- [10]C.BERENGER:"Contribution à l'étude d'une machine synchrone autopilotée à aimants permanents et à enroulements dans l'entrefer",thèse de Doctorat de l'I.N.P.L(NANCY) 1989.
- [11] B.DALLE:"Des matériaux pour l'électrotechnique", R.G.E. n°1, 1989,pp 2-12.
- [12] F.LEPRINCE-RIGUET:"Aimants permanents:matériaux et applications", Techniques de l'Ingénieur, 9-1987, D 187, PP1-24.
- [13] M.LAJOIE-MAZENC, P.MATHIEU, B.DAVAT:"Utilisation des aimants permanents dans les machines à commutation électronique", R.G.E. n° 10, 1984, pp 605-612.
- [14] G.A.J.AMARTUNGA, P.P.ACARNLEY, P.G.Mc LAREN:"Optimum magnetic circuit configurations for P.M. aerospace generators", IEEE trans.

on Aerospace and Electronic systems, Vol. AES-21, n° 2, march 1985, pp 230-255.

- [15] J.LUCIDARME, C.RIOUX, J.POUILLANGE:" Moteurs discoïdes à réluctance variable et à aimants permanents: des couples spécifiques élevés à faible vitesse",R.G.E. n° 3,1987, pp 48-52.
- [16] P.F.DESESQUELLES, J.LUCIDARME, A.BEN AHMED:"Theoritical and experimental results upon multi-air-gap axial synchronous machine with permanent magnets", ICEM, Boston 1990.
- [17] P.BRISSENEAU, L.BRUGEL, A.KIENER, D.LEBOUC, J.P.YONNET:" Nouvelles structures de machines à aimants permanents", R.G.E. n° 10, 1984, pp 632-641.
- [18] B.DAVAT, M.LAJOIE-MAZENC, J.HECTOR:"Méthode de modélisation des machines électriques à rotor massif, alimentées par convertisseur statique", R.G.E. n° 3, 1985, pp 239-245.
- [19] T.JAHN:"Flux-weakening regime operation of an interior permanent magnet synchronous motor drive", IEEE trans. on Industry Applications, IA 23, 1987, n°4, pp 681-689.
- [20] M.A.RAHMAN, T.A.LITTLE, G.R.SLEMON:"Analytical models for interior type permanent magnet synchronous motors", IEEE trans. on Magnetics Vol. MAG 21, n° 5, sept. 1985, pp 1741-1743.
- [21] G.R.SLEMON, M.A.RAHMAN:"Modelling on permanent magnet synchronous motors", IEEE trans. on Magnetics, Vol. MAC 22, n° 5, sept. 1986, pp 1069-1071.
- [22] R.MAGUREANU, N.VASILE, M.TIBA:"Calculation of the magnetic field and parameters of synchronous motors with ceramic permanent magnets using the boundry element method", Engineering analysis, 1987, Vol. 4, n° 2, pp 58-65.
- [23] T.SEBASTIAN, G.R.SLEMON:"Operating limits of inverter driven permanent magnet motor drives", IEEE trans. on Industry Applications, IA 23, n° 2, pp 327-333.
- [24] R.F.SCHIFERL, R.S.COLBY, D.W.NOVOVNY:"Efficiency considerations in permanent magnet synchronous motor drives", Electrical energy conference (Adelaide), 6-9 oct. 1987, pp 286-291.
- [25] F.MILSANT,M.CHAUPRAD:"Commande des machines à courant alternatif",Ed. Eyrolles (PARIS),1980.
- [26] B.NOAREDE, D.HOTTOIS, M.LAJOIE-MAZENC:"Aimants permanents et induit sans encoches: La solution pour les puissances élevées à basse vitesse?", Colloque Européen, Rapport 4/1, Grenoble 1990, pp 1-6.
- [27] T.M.JAHNS:"Torque production in permanent magnet synchronous

motor drives with rectangular current excitation", IEEE trans. on Industry Applications, IA 20, n° 4, juillet/août 1984, pp 803-813.

[28] K.P.P.PILLAI: "Torque calculation of polyphase reluctance machines", IEEE trans. on PAS, dec. 1967.

[29] N.YAKER: "Utilisation d'une méthode par éléments finis pour l'étude de l'effet de courbure dans les M.R.V. à stator lisse", Thèse de Magister, E.N.P. 1992.

[30] E.DURAND: "Magnétostatique", Masson (PARIS), 1968.

[31] E.GUDEFIN: "Détermination des champs magnétiques: Circuits magnétiques", Techniques de l'Ingénieur, D 420-1, 1987, pp 11-22.

[32] O.C.ZIENKIEWICZ, R.L.TAYLOR: "The finite element method: Basic formulation and linear problems", vol. 1, ed. Mc Graw-Hill (England), 1989.

[33] G.TOUZOT, G.DHATT: "Une présentation de la méthode des éléments finis", ed. Laloine (PARIS), 1984.

[34] M.V.K.CHARI, P.P.SILVESTER: "Finite elements in electrical and magnetic field problems", ed. J.Wiley (New York), 1990.

[35] J.C.SOBONNADIÈRE, J.L.COULOMB: "Eléments finis et C.A.O.", ed. Hermès (PARIS), 1986.

[36] J.P.BASTOS: "Calcul des performances intrinsèques des machines à réluctances variables polydiscoides par une méthode d'éléments finis", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Pierre et Marie Curie - PARIS VI - 1980.

[37] S.DJEMA: "Etude numérique des efforts électromagnétiques dans les machines à réluctance variable polydiscoides", Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Pierre et Marie Curie (PARIS VI), 1982.

[38] S.DJEMA, H.IDJRAOUI, N.YAKER, M.E.ZAIM, : "Calcul des machines à réluctance variable par la méthode des éléments finis", 1^{er} Colloque sur l'électrotechnique et l'automatique, Rapport II-1, Alger, 8-9 mai 1990.

[39] L.SCHWARTZ: "Méthodes mathématiques pour les sciences physiques", ed. Hermann (PARIS), 1961.

[40] M.PETIT: "L'outil mathématique", Masson (PARIS), 1987.

[41] F.M.SARGOS: "Etude théorique des performances des machines à réluctance variable", Thèse de Doctorat d'Etat, I.N.P.L. Nancy, mars 1981.

[42] F.BOUILLAULT: "Contribution à la modélisation de systèmes

électromagnétiques en mouvement comportant des parties ferromagnétiques massives", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1984.

[43] S.TAHI: "Contribution à l'étude des machines à réluctance variable à stator lisse", Thèse de Magister, E.N.P. 1990.