

وزارة التربية الوطنية  
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

*Génie Electrique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة -  
BIBLIOTHEQUE -  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**SUJET**

*Calcul numerique du champ  
electrique dans les intervalles d'air  
Tige - Barriere - Plan.*

Proposé par :

M<sup>r</sup> A. BOUBAKEUR

Etudié par :

M<sup>r</sup> M. KHERCHOUCHE

Dirigé par

M<sup>r</sup> A. BOUBAKEUR  
M<sup>r</sup> K. NACEREDDINE

PROMOTION  
*juin 1995*

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

*Génie Electrique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**SUJET**

*Calcul numerique du champ  
electrique dans les intervalles d'air  
Tige - Barriere - Plan.*

Proposé par :

M<sup>r</sup> A. BOUBAKEUR

Etudié par :

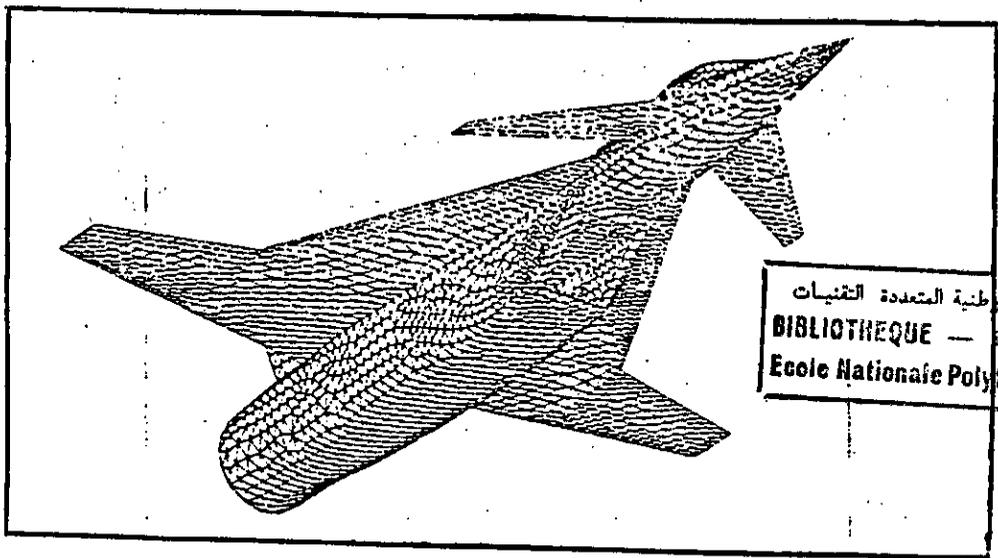
M<sup>r</sup> M. KHERCHOUCHE

Dirigé par

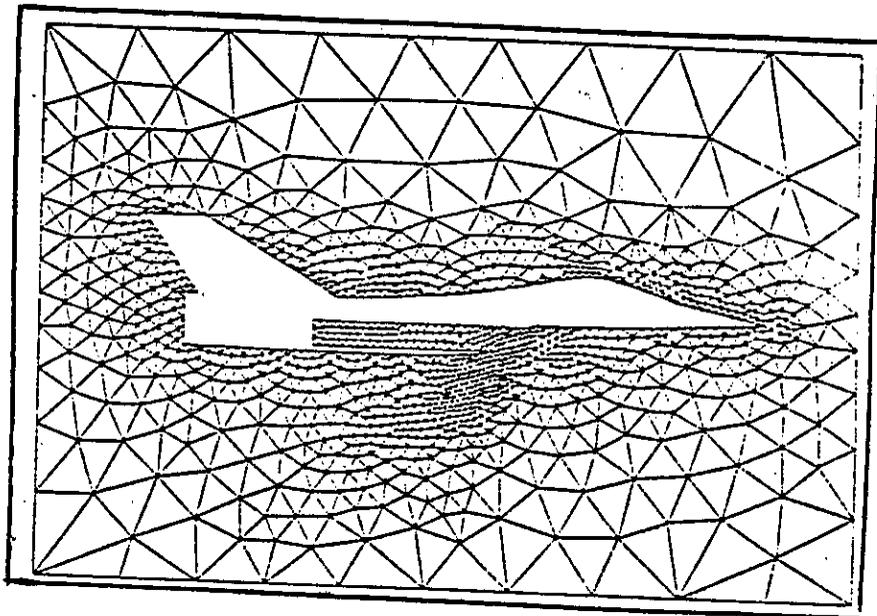
M<sup>r</sup> A. BOUBAKEUR  
M<sup>r</sup> K. NACEREDDINE

PROMOTION  
*juin 1995*

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi El-Harrach - ALGER



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique



" Toute théorie optimale  
est une sous théorie optimale "

O.C. ZIENKIEWICZ.

## Dédicaces

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

A ma mère, celle qui m'a pris entre ses bras, qui a souffert en me regardant en train de croître et murir étape par étape devant ses yeux, qui a donné son corps et son âme sacrifice pour m'offrir un milieu favorable, là où je fais recours à tout moment d'inquiétude.....ma mère puis ma mère puis ma mère.

A celui qui s'est privé même du plus nécessaire pour qu'il nous assure le bonheur, et nous a offert un soutien moral et matériel au détriment de ses nécessités pour nous voir aujourd'hui à ses côtés comme étant des cadres.....mon père, qui m'a appris à l'être et demeure pour moi l'exemple de sagesse et de bonté.

A mes grands parents, la source d'affection.

A mes frères et soeurs, en témoignage de notre amour fraternel, en particulier à l'aînée de la famille....CHADIA qui m'a conduit sur ce chemin où je me trouve, je suis fière d'être ton frère.

A ma tante LEILA et son fiancé MOUHAMMED.

Aux grandes familles: Kherchouche et Ayadi (CONSTANTINE, BATNA, MEROUANA...).

A LAMIA.

A M<sub>r</sub>: AMOURA Necereddine, que je respecte énormément.

A tous(tes) mes amis(es) qui me sont très chers particulièrement:

\* Nabil, Adlène, Sami, Houssam et Nadir.

\* Ceux de mon milieu avec qui j'ai passé des souvenirs agréables (Quartier, Lycée, Ecole, Cité universitaire...).

A ceux avec qui j'ai mené les meilleurs moments de ma vie.

JE DEDIE CE MODESTE TRAVAIL.

Mohamed  


## Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Tous mes remerciements au tout puissant d'abord, ensuite je tiens à exprimer ma vive reconnaissance envers toutes les personnes qui ont rendu possible l'élaboration de ce projet de manière directe ou indirecte, en particulier M<sup>r</sup> A. BOUBAKEUR, mon professeur et mon promoteur pour tous les conseils qu'il m'a prodigués, pour la confiance qu'il m'a témoignée et pour sa participation active durant mon travail.

Mes remerciements vont également à M<sup>r</sup> Kamel NACEREDDINE, j'exprime mon attachement à l'aide toujours efficace et les encouragements qu'il n'a cessé de m'apporter. Sous sa direction au CONDOR'Engineering-SPA, j'ai eu l'occasion d'aborder la partie numérique de ce travail.

Je ne saurait manquer d'associer à ce travail mes amis et copains de classe: N.SMAKGHI, S.SEKHRI et K.NOUASRI avec qui j'ai eu la chance de travailler et de connaître.

De même, je remercie M<sup>lle</sup> Leila MOKHNACHE de l'université de BATNA pour son aide déterminante dans la partie la plus importante dans ce projet de fin d'études.

Que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation d'ingénieur, en particulier ceux du département G-Electrique (E.N.P) veuillent bien trouver ici l'expression de ma vive gratitude.

Je remercie tout le personnel de la bibliothèque, spécialement SALAH et SABINA pour la documentation suffisante.





## ملخص

يندرج هذا الموضوع في ميدان التوتّر العالي ويعالج تأثير خصائص ومميزات المادة العازلة على الصلابة الكهربائية لمجال من الهواء بين مدّيب ومستوي. وقد استعملنا في الأبروحة نموذج عددي ويجب ادخال شكله الهندسي في برنامج آلي يعتمد على طريقة العناصر المنتهية بعد محاولة لتحسين هذا الأخير. التطبيق البياني للنتائج المتحصّل عليها يظهر في إطار دراسة تغييرات الحقل الكهربائي تحت فعاليات الحاجز العازل.

## ABSTRACT

This subject belongs to the high voltage technology. It treats on the influence of insulating screens on the electrical strength of a point - plane air gap. The thesis consist to give a numerical investigation in order to study the electrical field v.s the barrier parameters. A simulated model was adapted to a finit element program after an attempt to improve its capability.

## RESUME

Ce sujet fait partie du domaine de la haute tension. Il traite de l'influence des barrières isolantes sur la rigidité diélectrique d'un intervalle d'air pointe - plan. L'étude consiste à déterminer numériquement les variations du champ en fonction des paramètres de la barrière. Ceci, en développant un modèle de simulation adapté à un logiciel de calcul par éléments finis, après une tentative d'amélioration de ses programmes.

" La principale qualité de l'auteur à succès est un tact spécial pour mettre la main sur les sujets qui ne sont pas trop nouveaux ".

(Mercure de France) Nietzsche.

" L'honnêteté ne consiste pas à ne jamais voler, mais à savoir jusqu'à quel point on peut voler, et comment faire bon usage de ce qu'on vole " .

(Honoré champion) Jérôme Gardan.

## Sommaire

" Il y a deux choses que l'expérience doit apprendre : la première, c'est qu'il faut beaucoup corriger, la seconde , c'est qu'il ne faut pas trop corriger"

(Voici l'homme) André Subrès.

# Sommaire .

## Liste des symboles utilisés.

### Introduction générale

## Chapitre Un : Méthodes numériques

• Introduction.....	3..
• Position du problème.....	3..
<b>I • Méthode des différences finies.....</b>	<b>4.....</b>
I - 1 . Introduction et principe.....	4.....
I - 2 . Discrétisation du domaine.....	4.....
I - 3 . Approximation des dérivées .....	5.....
I - 4 . Discussion sur l'erreur.....	8.....
I - 5 . Cas du milieu hétérogène.....	8.....
I - 6 . Résolution du système d'équations.....	9.....
I - 7 . Calcul du champ électrique.....	10.....
<b>II. Méthode des éléments finis.....</b>	<b>12.....</b>
II - 1 . Introduction et principe.....	12.....
II - 2 . Notions de base.....	12.....
II - 3 . Présentation de la méthode des éléments finis.....	14.....
II - 4 . Formulation intégrale.....	22.....
II - 5 . Méthode variationnelle.....	26.....
II - 6 . Convergence.....	35.....
<b>III. Méthode des équations intégrales aux frontières.....</b>	<b>38.....</b>
III - 1 . Introduction et principes.....	38.....
III - 2 . Formulation de " l'identité de Green" .....	38.....
III - 3 . Discrétisation du problème.....	40.....
III - 4 . Comparaison de la M.E.I.F à la M.E.F .....	44.....
<b>IV. Méthode de simulation de charges.....</b>	<b>46.....</b>
IV - 1 . Introduction.....	46.....
IV - 2 . Principe.....	46.....
IV - 3 . Description de la méthode.....	46.....
IV - 4 . La mise en oeuvre de la M.S.C.....	51.....
IV - 5 . Exemple de calcul.....	51.....
<b>V. Méthode de "Monté carlo " .....</b>	<b>55.....</b>
V - 1 . Introduction et principe.....	55.....
V - 2 . Règles de construction des parcours aléatoires.....	55.....
V - 3 . Etapes de calcul.....	55.....
V - 4 . Amélioration de l'efficacité de la méthode.....	56.....
V - 5 . Conditions aux limites.....	57.....
V - 6 . Mise en oeuvre sur ordinateur de la méthode .....	57.....
<b>VI. Comparaison des cinq méthodes.....</b>	<b>58.....</b>

## Chapitre Deux : Influence des barrières isolantes

• Introduction.....	59
I. <u>Rigidité diélectrique des intervalles d'air "pointe - plan"</u> .....	60
I - 1. Généralités.....	60
I - 2. Mécanismes de décharge dans l'air.....	63
II. <u>Influence des barrières isolantes sur l'amorçage des intervalles d'air " pointe - plan"</u> .....	69
II - 1. Historique.....	69
II - 2. Influence des paramètres définissant la nature de la barrière.....	71
II - 3. Influence des décharges superficielles et des décharges partielles sur les diélectriques.....	72
II - 4. Rupture et claquage des diélectriques solides.....	72
II - 5. Influence des paramètres extérieurs à la barrière.....	74
III. <u>Conclusion</u> .....	86

## Chapitre trois : Programme de simulation et mode opératoire.

I • Généralités sur la structure du programme 'PROC 2 D'.....	87
II • Présentation du modèle numérique.....	89
III. Contribution à l'amélioration du 'PROC 2 D'.....	92
IV. Conclusion.....	95

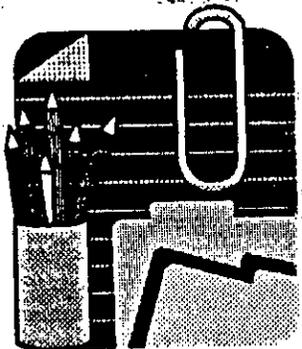
## Chapitre quatre : Exploitation et discussion des résultats numériques.

I. Généralités.....	97
II. Influence de la position de la barrière.....	97
III. Influence de la largeur de la barrière.....	98
IV. Influence de l'épaisseur de la barrière.....	100
V. Influence de la permittivité de la barrière.....	102
VI. Influence d'une barrière métallique.....	105
VII. Limites numériques du modèle.....	106
VIII. Conclusion.....	107

Conclusion générale.....	108
--------------------------	-----

Annexes.

Bibliographie.



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Liste des symboles



## Liste des symboles.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

$\vec{E}$  : Vecteur champ électrique .

$\phi$  : Potentiel électrostatique.

$\nabla$  : Opérateur vectoriel Nabla ( $\nabla f = \text{grad } f$ )

$\nabla^2$  : Laplacien ( $\nabla^2 f = \Delta f$ )

$V / \Omega$  : Le domaine dans lequel  $\phi$  est calculé.

$s / \Gamma$  : Contour ou surface limite du domaine  $\Omega$  .

$\rho / q$  : La densité de charge.

$\epsilon_0$  : Constante diélectrique dans le vide (permittivité).

$\vec{n}$  : Vecteur normal unitaire.

$\delta$  : grandeur virtuelle.

$R(\phi)$  : Résidu.

$\Psi$  : Fonction de pondération.

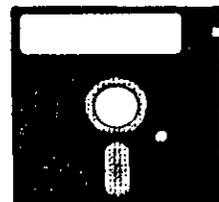
$e$  : L'erreur numérique.

[J] : Matrice jacobien.

$G_p$  : Fonction de Green.

P : Point arbitraire du domaine.

c : Facteur géométrique.



" Qu'est ce que le temps? si personne ne le demande, je le sais, si je veux l'expliquer à qui me le demande, je ne le sais plus "

(Le carnaval de l'âme) Viconte de Bonald.

" Le temps dont nous disposons chaque jour est élastique. Les passions que nous ressentons le dilatent, celles que nous inspirons le rétrécissent et l'habitude le remplit "

(Mémoires et maximes) Miguel Karr.

# Introduction

## Générale.

" Le temps est le rivage de l'esprit, tout passe devant lui et nous croyons que c'est lui qui passe"

(Les plus forts) Tristan Reverdy.

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à de contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Pour ces projets, il a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement des systèmes physiques complexes. l'ingénieur peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

dans le domaine de haute tension, il a été montré du point de vue rigidité diélectrique, que le système pointe-plan est le moins rigide. En effet, ce système est caractérisé par les tensions disruptives les plus basses. En plus, il correspond bien aux systèmes isolants réels les plus menacés dans l'exploitation. Sous une polarité positive, ce système se trouve beaucoup moins rigide. Cela traduit l'importance que revêt l'utilisation d'une telle configuration dans les études liées à la rigidité diélectrique de l'air et à la coordination de l'isolement.

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur une étude numérique du champ électrique pour un système pointe-plan .

L'étude de la répartition du champ électrique est effectué en utilisant la méthode des éléments finis (M.E.F) à l'aide du programme PROC2D développé par K.NACEREDDINE dans le cadre d'une thèse de Magister à l'E.N.P en 1992 [26] sous la direction de M<sup>r</sup> A. BOUBAKEUR.

l'utilisation de ce programme est guidée par la volonté d'améliorer ses possibilités pour pouvoir traiter un plus grand nombre de problèmes.

Dans le premier chapitre, nous posons le problème physique régi par l'équation mathématique de "POISSON" ( ou de LAPLACE) tirée à partir des équations de MAXWELL. Nous considérons ensuite, les conditions de contraintes électriques imposées qui sont la propriété principale d'un système électrostatique. Nous présentons ainsi, quelques méthodes numériques à savoir: la méthode des différences finies (M.D.F), la méthode des éléments finis (M.E.F), la méthode des équations intégrales de frontière (M.E.I.F),



la méthode de simulation de charges (M.S.C), et la méthode de "MONTE CARLO" pour contourner l'absence d'une solution <sup>analytique</sup> explicite. Nous donnons le traitement et la résolution des équations aux dérivées partielles gouvernant le phénomène de répartition du potentiel électrostatique dans un domaine donné. Nous nous intéressons ensuite à l'évaluation du champ électrique. Pour cela nous établissons à la fin du chapitre une comparaison entre les cinq méthodes pré-citées.

Dans le second chapitre nous traitons l'étude du système pointe-plan avec barrière. Nous présentons d'abord les différents mécanismes de décharges dans les intervalles d'air en champ non uniforme, ainsi que les mécanismes de rupture des isolants solides. Nous avons jugé utile de discuter tous les paramètres liés à la barrière, qui influent sur la rigidité diélectrique du système considéré y compris l'effet de la pollution.

Le troisième chapitre concerne la structure du programme de calcul par la méthode des éléments finis en bi-dimensionnel PROC2D. Nous avons adapté à ce programme notre modèle de simulation et exposé en fin un ensemble de propositions concernant les manques et l'amélioration du logiciel en question.

Plusieurs exemples d'application concernant la barrière isolante ont été traités dans le quatrième chapitre.

En dernier lieu et à la fin de ce mémoire, six sujets ont été abordés en annexes; le premier rapporte les transformations des formes intégrales, le second traite de la construction des fonctionnelles pour la formulation variationnelle de la M.R.F. le troisième concerne les fonctions de formes et leurs dérivées, le quatrième pour les différents termes de la transformation isoparamétrique, le cinquième représente l'équivalence de l'équation de "LAPLACE" en tri-dimensionnel et finalement le sixième porte sur la méthode de "splines" pour interpoler des séries de points et des courbes.

" Quand on veut plaire dans le monde, il faut se résoudre à se laisser apprendre beaucoup de choses qu'on sait des gens qui les ignorent ".

(Le dictionnaire du diable) Voltaire.

" Certains livres semblent avoir été écrits, non pour nous instruire, mais pour qu'on sache que l'auteur savait quelque chose " .

(Algèbre des valeurs morales ) Fernand Vanderem.

## Chapitre Un :

# Méthodes Numériques.

" Le malheur avec un type intelligent, c'est qu'il n'est jamais intelligent pour ne pas dire qu'il est plus intelligent"

(Un homme léger) Alexandre Alphonse.



## Introduction.

La plupart des problèmes posés par l'application technique de l'électrostatique ne sont toutefois solubles de façon exacte. Comme les méthodes analytiques s'avèrent impuissantes dans le calcul du champ électrique, plusieurs méthodes numériques sont rendues très populaires par le développement spectaculaire du monde de l'informatique.

Ces méthodes, comme tous les problèmes d'engineering, ont trouvé leur place dans le domaine des milieux continus, donc régis par des équations aux dérivées partielles, qui doivent être résolues approximativement, généralement grâce à une discrétisation pour se ramener à des équations algébriques.

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons nous intéresser à présenter quelques méthodes, les plus répandues dans le domaine de la haute tension. Toutefois, nous signalons que chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients propres, dépendant du problème posé à résoudre.

### Position du problème :

Le problème mathématique usuel à résoudre est la détermination du potentiel électrostatique  $\phi(r)$  et du champ électrique  $E = -\nabla\phi$  à l'intérieur d'un certain domaine  $\Omega$  à trois dimension. Dans la majorité des cas, le potentiel suit l'équation de 'Laplace' :

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{.....( I ).}$$

Plus généralement, lorsqu'il existe des charges d'espace, l'équation (I) devient l'équation de 'Poisson' :

$$\Delta \phi = - q(r) / \epsilon_0 \quad \text{.....( II ).}$$

Où :  $\epsilon_0$  : la constante diélectrique dans le vide (permittivité).  
 $q(r)$  : la densité de charges d'espace.

Pour garantir l'unicité de la solution, il convient de fournir des conditions sur la limite  $\Gamma$  du domaine de Dirichlet :

$$\text{Donner la fonction : } \Phi(r) = \Phi_\Gamma(r) \quad r \text{ sur } \Gamma \quad \text{.....( III ).}$$

de Neumann :

$$\text{Donner sa dérivée normale : } n(\epsilon_0 \cdot \Phi(r)) = q_\Gamma(r) \quad r \text{ sur } \Gamma \quad \text{....( IV ).}$$

Ici  $n$  est le vecteur unitaire extérieur sur  $\Gamma$ , et en tout point de la distribution du potentiel  $\Phi_\Gamma$ , où la distribution superficielle de charge  $q_\Gamma$  est imposée.

Des conditions aux limites sur les dérivées apparaissent souvent lorsqu'un problème de Dirichlet est réduit par suite de symétrie à un problème plus petit avec pour des frontières, le plan ou l'axe de symétrie [1].



# I.

## Méthode des différences finies.

### I - 1 - Introduction et principe :

Parmi les anciennes méthodes numériques pour la résolution des équations aux dérivées partielles, la méthode des différences finies est généralement appliquée aux problèmes linéaires ou non linéaire. Elle permet de fournir une solution approchée à l'équation de 'Laplace' en remplaçant l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies, où chaque dérivée partielle est remplacée par une différence de valeurs en un certain nombre fini de points.

Les principales étapes de cette méthodes sont :

- La discrétisation du domaine considéré pour définir des différents noeuds à prendre en considération.
- L'écriture des équations aux différences finies en chaque noeud issu de la discrétisation du domaine.
- La résolution du système d'équations obtenues dans l'étape précédente.

La résolution de ces équations est souvent limitée à des domaines bidimensionnels lorsque la symétrie des systèmes électriques considérés existe. Et cela dans le but de réduire la complexité du problème.

### I - 2 - Discrétisation du domaine :

On remplace le milieu continu dans lequel l'équation est applicable en tout point par un réseau de points discret auxquels s'applique l'équation discrétisée.

Soit la fonction  $\phi(x, y)$  définie pour tout point  $(x, y)$  dans le domaine fermé  $\Omega$ , avec des conditions aux limites données sur le contour  $\Gamma$ .

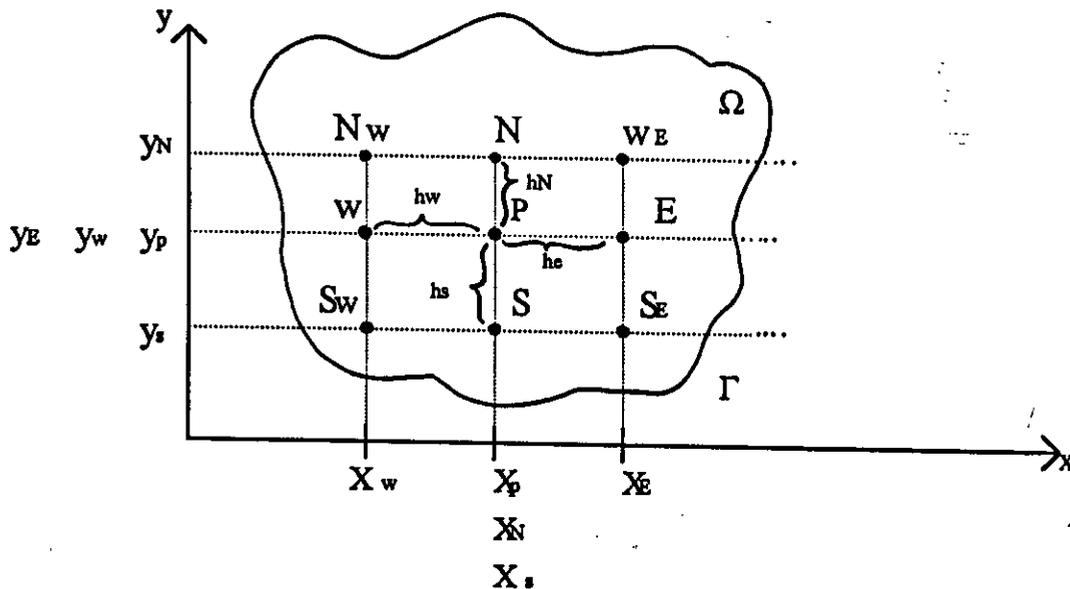
Le domaine  $\Omega$  des variables  $(x, y)$  est remplacé par un ensemble fini  $S$  de  $N$  éléments ( $N$  peut être relativement grand) : la fonction  $\phi(x, y)$  est remplacée par une fonction  $\phi(P)$  ; définie sur  $S$ .

L'équation aux dérivées partielles déterminant  $\phi(x, y)$  est donc remplacée par un système fini d'équations simultanées déterminant  $\phi(P)$ , tel que chaque point  $P$  est un point  $P(x_p, y_p)$ .

Le domaine quadrillé  $S$  est irrégulier, la discrétisation étant en éléments rectangulaires dans le plan  $xy$ .



Chaque noeud est le résultat de l'intersection d'une ligne parallèle à l'axe  $\phi_x$  et une ligne parallèle  $\phi_y$ .



**Figure 1 :** Domaine de discrétisation.

### I - 3 - Approximation des dérivées :

On prend le noeud P et tous les noeuds à sa proximité, où les potentiels  $\phi(S)$ ,  $\phi(E)$ ,  $\phi(N)$ , et  $\phi(W)$  sont connus.

On peut étendre le potentiel à n'importe quel point  $(x, y)$  en utilisant le développement en séries de Taylor. Ce développement suivant  $x$  et  $y$  est donné par :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = \phi(p) + \frac{1}{1!} [(x - x_p) \phi_x(p) + (y - y_p) \phi_y(p)] + \\ \frac{1}{2!} [(x - x_p)^2 \phi_{xx}(p) + 2(x - x_p)(y - y_p) \phi_{xy}(p) + (y - y_p)^2 \phi_{yy}(p)] + \\ \frac{1}{3!} [\dots] + \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

On aura un système de quatre équations linéaires et du premier ordre pour déterminer les quatre inconnues :



$$\phi_x(p) = \left( \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \right)_p \quad \phi_y(p) = \left( \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \right)_p$$

$$\phi_{xx}(p) = \left( \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \right)_p \quad \text{et} \quad \phi_{yy}(p) = \left( \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} \right)_p$$

Qui sont les dérivées partielles de la fonction  $\phi$ , chaque potentiel  $\phi(x, y)$  dans la région fermée du noeud P peut être écrit par l'expression (1).

On néglige les termes du 3ème ordre dans l'expression (1). les potentiels des noeuds voisins seront alors donnés par :

$$\phi(E) = \phi(P) + h_e \cdot \phi_x(P) + (1/2) \cdot h_e^2 \cdot \phi_{xx}(P) \quad \dots\dots(1 - a)$$

$$\phi(N) = \phi(P) + h_n \cdot \phi_y(P) + (1/2) \cdot h_n^2 \cdot \phi_{yy}(P) \quad \dots\dots(1 - b)$$

$$\phi(W) = \phi(P) - h_w \cdot \phi_x(P) + (1/2) \cdot h_w^2 \cdot \phi_{xx}(P) \quad \dots\dots(1 - c)$$

$$\phi(S) = \phi(P) - h_s \cdot \phi_y(P) + (1/2) \cdot h_s^2 \cdot \phi_{yy}(P) \quad \dots\dots(1 - d)$$

Des combinaisons algébriques sur les 4 équations précédentes nous permettent de tirer :

$$\phi(E) + \phi(W) - 2 \phi(P) = (h_e - h_w) \cdot \phi_x(P) + (1/2) \cdot [h_e^2 + h_w^2] \cdot \phi_{xx}(P) \quad \dots\dots(2 - a)$$

$$\phi(N) + \phi(S) - 2 \phi(P) = (h_n - h_s) \cdot \phi_y(P) + (1/2) \cdot [h_n^2 + h_s^2] \cdot \phi_{yy}(P) \quad \dots\dots(2 - b)$$

On peut approximer de nouveau pour tirer :

$$\phi_x(p) = \frac{h_w/h_e [\phi(E) - \phi(p)] + h_e/h_w [\phi(p) - \phi(w)]}{(h_e + h_w)}$$

$$= \frac{h_w}{h_e(h_e + h_w)} \phi(E) + \frac{h_e - h_w}{(h_e \cdot h_w)} \phi(p) - \frac{h_e}{h_w(h_e + h_w)} \phi(w) \quad \dots\dots(3 - a)$$

$$\phi_y(p) = \frac{h_s}{h_n(h_n + h_s)} \phi(N) + \frac{h_n - h_s}{(h_n \cdot h_s)} \phi(p) - \frac{h_n}{h_s(h_n + h_s)} \phi(s) \quad \dots\dots(3 - b)$$

Avec des combinaisons linéaires de (3 - a), (2 - a) et (3 - b) on trouve :



$$\phi_{xx}(p) = \frac{2\phi(e)}{h_e(h_e + h_w)} + \frac{2\phi(w)}{h_w(h_e + h_w)} - \frac{2\phi(p)}{h_w \cdot h_e} \dots\dots(4 - a)$$

$$\phi_{yy}(p) = \frac{2\phi(N)}{h_n(h_n + h_s)} + \frac{2\phi(s)}{h_s(h_n + h_s)} - \frac{2\phi(p)}{h_n \cdot h_s} \dots\dots(4 - b)$$

Avec ces approximations du second ordre du potentiel dans le plan (x, y) autour du point P, il est possible de résoudre les équations de 'Laplace' et de 'Poisson' discrétisées :

$$\Delta\phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = f(x, y)$$

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = \begin{cases} 0 & \text{pour la région de Laplace} \\ -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -f(x, y) & \text{pour la région de Poisson} \end{cases}$$

$\rho = q(r)$  : densité de charges d'espace ( $\rho(x, y)$  distribution isotropique).

La solution peut être écrite par :

$$D_{ep}\phi(E) + D_{Np}\phi(N) + D_{wp}\phi(W) + D_{sp}\phi(s) + D_{pp}\phi(P) + (1/2)F(p) = 0 \dots\dots(5)$$

Tel que :

$$D_{ep} = 1 / [h_e(h_e + h_w)] ; D_{Np} = 1 / [h_n(h_n + h_s)] ; D_{wp} = 1 / [h_w(h_e + h_w)]$$

$$D_{sp} = 1 / [h_s(h_n + h_s)] ; D_{pp} = -[1 / (h_e h_w) + 1 / (h_n h_s)]$$

Cette équation (5) représente une approximation valide pour l'équation originale aux dérivées partielles. Elle est valable pour n'importe quel noeud dans le domaine.

On peut envisager la simplification suivante :

• Pour chaque problème bi-dimensionnel, toutes les régions du champ peuvent être subdivisées en éléments carrés réguliers et ceci pour des raisons de facilité :

Donc on aura  $h_e = h_s = h_n = h_w = h$  et l'équation (5) devient :

→ Pour la région de Poisson :

$$\phi(E) + \phi(N) + \phi(W) + \phi(s) - 4\phi(P) + h^2 F(p) = 0 \dots\dots(6)$$

→ Pour la région de Laplace :

$$\phi(E) + \phi(N) + \phi(W) + \phi(s) - 4\phi(P) = 0 \dots\dots(7)$$



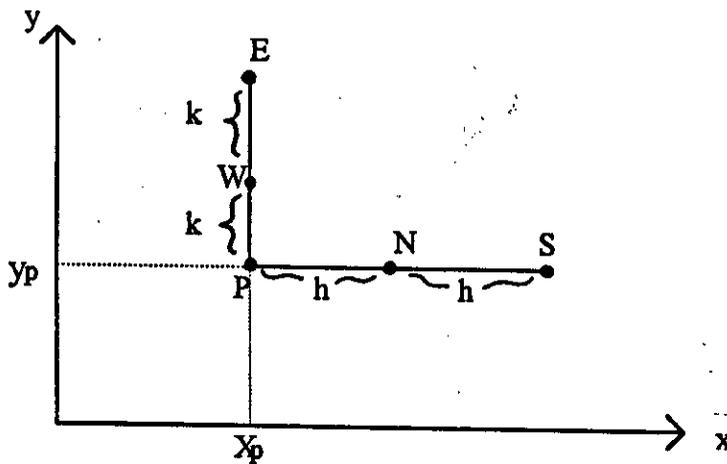
### Remarque :

Suivant ce même raisonnement, on peut traiter la discrétisation des noeuds de discontinuité [21]. On obtient :

$$\phi_x(E) = [-3 \phi(P) + 4 \phi(N) - \phi(S)] / 2.h$$

$$\phi_y(E) = [-3 \phi(P) + 4 \phi(W) - \phi(E)] / 2.k$$

Ces formules seront utilisées lorsque les dérivées premières sont discontinues en P :



**Figure 2 :** Discontinuité dans un milieu.

### I - 4 - Discussion sur l'erreur :

En approximant les dérivées partielles par des différences finies, on aura une erreur qui est égale au reste du développement en séries de Taylor et qui dépend du pas de discrétisation.

Dans l'approximation du second ordre, les premiers termes négligés sont du troisième ordre (en  $h^3$ ), et dans l'approximation du cinquième ordre (en  $h^6$ ). Ainsi avec une même valeur du pas  $h$ , on obtient une meilleure précision dans le second cas que dans le premier [13].

On notera de plus que les formules obtenues sont plus exactes lorsque le pas de discrétisation  $h$  est plus petit.

### I - 5 - Cas du milieu hétérogène :

On peut généraliser pour un milieu non homogène, constitué de deux (2) diélectriques dont



les permittivités sont  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  [21].

L'équation (I) avec  $F(x, y) = 0$  était multipliée par  $\epsilon$ . Les conditions de continuité s'écrivent :

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad \dots\dots(*)$$

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \dots\dots(**)$$

Pour une limite rectiligne entre 2 milieux, le potentiel sur l'interface est continu. Le maillage étant carré  $h = cte$ . La composante normale du vecteur déplacement [condition de Newmann] est influencée.

On peut composer l'équation de 'Laplace' comme suit :

$$\phi(p) = \frac{1}{4} \left[ \phi(E) + \phi(w) + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi(N) + \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi(s) \right]$$

Quand  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ; cette formule redonne la formule (7) d'un point ordinaire.

### I - 6 - Résolution du système d'équations :

En généralisant les calculs précédents pour plusieurs noeuds avec les conditions aux limites sur le potentiel et tel que  $\phi(p)$  est inconnu, on obtiendra un système de  $n$  équations semblables et linéaires à  $n$  inconnues qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[K] \{\phi\} = \{C\} \quad \dots\dots(8)$$

$\{\phi\}$  : Vecteur potentiel.  $[K]$  : matrice  $[n \ n]$  des  $K_{ij}$ .

$\{C\}$  : Vecteur de la somme des potentiels connus sur le contour.

L'inversion de la matrice  $[K]$  permet donc de calculer :

$$\{\phi\} = [K]^{-1} C \quad \dots\dots(9)$$

Ce système peut être résolu par des méthodes directes ou itératives, suivant les propriétés que présente la matrice  $[K]$ .

#### • Méthodes directes :

Si la matrice  $[K]$  est pleine (peu d'éléments nuls) et de taille réduite [9] on distingue :

##### - Méthode de Cramer :



Calcul direct de la matrice  $[K]^{-1}$  puis la post - multiplication au vecteur  $\{C\}$ .

- Méthode de 'Gauss - Jordan' :

La triangulation de la matrice  $[K]$  puis la résolution par substitution arrière pour le système (8).

- Méthode de décomposition L,U:

La matrice  $[K]$  sera le produit de deux matrices : L triangulaire inférieure et U : triangulaire supérieure. Le système à résoudre revient à résoudre  $[LU] \{\phi\} = \{C\}$ .

C'est à dire résoudre successivement :

$$[U] \{\phi\} = Y \text{ et } [L] \{Y\} = \{C\}$$

• Méthode itératives :

Si la matrice  $[K]$  est creuse (beaucoup d'éléments nuls) et d'ordre élevé. Ceci dans le but de réduire le nombre de mémoires d'ordinateur nécessaires ainsi que pour un gain satisfaisant du temps de calcul [7].

La plus populaire de ces méthodes est certainement la méthode de 'Gauss seidel', qui consiste , partant d'une estimation raisonnable , à calculer successivement chaque inconnue en le tirant d'une équation du système.

Quelques caractéristiques de la matrice  $[K]$  (symétrie, non singularité, définition positive, termes diagonaux positifs ou irréductibilité et diagonale dominante) conduisent à une convergence certaine.

Pour arriver plus rapidement à la convergence , on a la procédure efficace appelée 'Sur relaxation' qui consiste à exagérer la correction qu' apporte chaque itération [1].

I - 7 - Calcul du champ électrique :

Après avoir calculé le vecteur  $\{\phi\}$  solution du système matriciel et cela selon la précision désirée, on passe alors au calcul du champ électrostatique en chaque noeud du maillage.

Partant de l'équation vectorielle  $E = - \vec{\nabla} \phi$ , on les composantes du champ électrostatique pour un cas bi-dimensionnel :

$$E_x = \frac{-\partial\phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad E_y = \frac{-\partial\phi}{\partial y}$$

Où l'intensité E du champ est donnée par :



$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad \dots\dots\dots(10)$$

Les dérivées premières  $\partial\phi / \partial x$  et  $\partial\phi / \partial y$  et par suite, les composantes du champ  $E_x$  et  $E_y$  peuvent être approximées par les équations (3 - a) et (3 - b) avec un pas 'h' constant, pour un noeud situé à l'intérieur du maillage qui est supposé carré.

Et dans le cas de deux milieux différents, à la surface de séparation on utilisera les conditions(\*) et (\*\*) du paragraphe 1 - 5.



## **II.**

### **Méthode des éléments finis.**

#### **II-1- Introduction et principe :**

La méthode des éléments finis est une méthode approximative largement utilisée de nos jours, car elle représente un excellent outil de modélisation des différents phénomènes physiques. Elle s'est avérée sans discussion, possible comme une base dans la résolution numérique des structures continues pour des raisons d'avantages qu'elle présente.

Elle a été progressivement considérée par tous les ingénieurs comme une méthode d'étude d'une grande valeur, vu ce qu'elle fournit comme solutions satisfaisantes pour un grand nombre de problèmes jusque les considérer comme insolubles.

Néanmoins, son développement est actuellement très rapide, et on dispose, désormais, d'un bon nombre de techniques utiles et efficaces pour élargir son champ d'application.

La méthode des éléments finis s'adapte parfaitement aux problèmes linéaires et non linéaires, stationnaires et dynamiques dans un domaine [tridimensionnel ou moins] de géométrie quelconque qui contient un milieu homogène ou non. Ce qui fait qu'elle consiste à utiliser une approximation des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques qu'on résout par des méthodes numériques.

#### **II-2- Notions de base :**

##### **II - 2 - 1 - Classification des systèmes physiques :**

Il convient de rappeler que les structures auxquelles on est confronté en techniques de haute tension, sont constituées de sous ensemble aux géométries les plus diverses (matériaux diélectriques, électrodes, isolants, conducteurs, ect). Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie de l'électromagnétisme, où de modèles théoriques, en fait, on distingue deux catégories de systèmes : continus ou discrets.

- Un système est dit discret si le nombre des ses constituant est fini et si ces derniers possèdent des formes bien définies. Les méthode rencontrées en analyse d'un tel système, consistent à résoudre les problèmes discrets, mais lorsque la structure est d'ordre plus complexe, on préfère des méthodes dites "matricielles" qui sont plus rapides avec l'évolution du matériel numérique.



- Par contre, un système ou milieu est dit continu, s'il est composé d'un nombre infini de constituants infinitésimaux. Pour traiter ce genre de problèmes, on faisait appel aux méthodes analytiques correspondant aux lois physiques [théorie de champ].

Mais, cette manière de résolution s'avère très laborieuse et fait intervenir une application intense de calculs mathématiques manuels. C'est pour cette raison, d'ailleurs que le problème de répartition du champ électrique. Ce dernier constitue un exemple de milieu continu avec certaines conditions ne se solutionnaient pas facilement, et ainsi la géotechnique ne se développa qu'avec l'évolution des méthodes numériques.

### II - 2- 2 L'analyse d'un système physique :

On peut dire que tout problème d'ingeneering, il y a lieu de considérer les quatre étapes suivantes :

a - Idéalisation du système à analyser : le représenter à l'aide d'un modèle pouvant simplifier le traitement du problème.

b - Position des équations gouvernantes, équations algébriques pour un système discret ou différentielles pour les systèmes continu.

c - Résolution des équations gouvernantes.

d - Interprétation des résultats qui est absolument nécessaire pour justifier le choix du modèle et des étapes de résolution.

Ainsi, la compréhension de la méthode des éléments finis exige en effet, des connaissances dans des domaines variés :

- Compréhension du problème physique étudié et connaissance intuitive de la nature de la solution cherchée.

- Construction des équation du système étudié sous forme variationnelle, soit à partir des équations des méthodes énergétiques soit à partir d'équations aux dérivées partielles.

- Techniques d'organisation matricielle des données (assemblage).

- Méthodes numériques d'intégration, de résolution de système d'équation algébriques et différentielles.

- Techniques informatiques adaptées à des programmes complexes à des volumes d'information importantes.

### II - 2- 3 - Principe des travaux virtuels :

On appelle une grandeur virtuelle , une grandeur très petite pais absolument arbitraire, elle est représentée par le symbole  $\delta$  précédant le symbole définissant [3].



Le théorème des travaux virtuels annonce que l'équilibre d'un milieu nécessite que pour tout champ de forces virtuels, satisfaisant des conditions aux limites spécifiques, il y a égalité des travaux virtuels intérieurs et extérieurs ( $\delta U = \delta W$ ).

$\delta U$  : travail virtuel intérieur.

$\delta W$  : travail virtuel extérieur.

#### II - 2 - 4 - Principe de la stationnarité de l'énergie potentielle totale :

D'après le principe des travaux virtuels on a :

$$\delta U = \delta W \Rightarrow \delta U - \delta W = 0 = \delta (U - W)$$

Avec :  $U - W = \pi$  : énergie potentielle totale.

Le principe de la stationnarité de l'énergie potentielle totale est équivalent donc en principe des travaux virtuels.

$$\pi = U - W : \text{stationnarité } \delta\pi = 0.$$

Physiquement, l'équilibre pour un corps ou une structure est l'état que préfère ce dernier, car l'énergie qu'il développe est minimale.

Les conditions d'équilibre donnent à l'énergie  $E_p$  totale une valeur stationnaire.

Si le système est stable, l'E.P totale minimale dans la configuration réelle du système. est :

$$\delta\pi = 0 \quad \dots\dots(11)$$

### II - 3 - Présentation de la méthode des éléments finis :

#### II - 3 - 1 - Le concept de l'élément fini :

La méthode des éléments finis permet d'étudier le comportement approché d'un milieu continu, en le traitant comme un assemblage d'éléments indépendants reliés entre eux par des points nodaux (noeuds).

Cependant, on ne doit pas tolérer les recouvrements et les vides le long des interfaces inter-éléments.

C'est par le biais de ce concept que la méthode des éléments finis diffère des autres méthodes matricielles.



**II - 3 - 2 - Méthode des résidus pondérés et choix de la fonction de pondération :**

L'idée est de substituer dans l'équation différentielle à priori une fonction d'approximation choisie polynomiale en générale. Il est certain que la fonction ne va pas satisfaire exactement l'équation différentielle, d'où l'apparition d'un résidu  $R(v)$ . On se propose alors de minimiser la somme des résidus sur tout le domaine.

$$\int R(U).dv \longrightarrow \dots \dots \min$$

Ceci est possible , en faisant intervenir une autre fonction dite "fonction de pondération" , qu'on notera  $\Psi$ , on aura donc :

$$G = \int R(U). \Psi .dv \dots \dots (12)$$

U : variable inconnue dépendant des coordonnées x , y et z.

Des fonctions U constituent une solution du problème d'équilibre posé si elles satisfont à la fois les équations (2) [ou (1)] et (3).

$$U = \phi : \text{fonction potentiel } \Delta\phi = -\rho / \epsilon_0 \iff \Delta\phi + \rho/\epsilon_0 = 0$$

Le résidu  $R(\phi)$  s'annule évidemment quand  $\phi$  est une solution. Et on écrit

$$R(\phi) = \Delta\phi + \rho/\epsilon_0 \dots \dots (13)$$

A propos des fonctions de pondération, diverses constructions existent. La plus utilisée est connue sous le nom de "Galerkin". Elle conduit à des équations identiques à celles que l'on obtient à l'aide des équations variationnelles classiques de l'énergie :

Soit  $\Psi = \delta\phi = \langle p \rangle \{ \delta a \}$  , voir paragraphe (II - 3 - 4), où  $\{ \delta a \}$  sont les variations des paramètres d'approximations  $\{ a \}$ .

L'équation (12) devient :

$$G = \int_V \delta\phi R(\phi) dv = 0$$

$$G = \int_V \langle P \rangle \{ \delta a \} \left( \Delta\phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv = 0$$

$$G = \langle \delta a \rangle \int_V \{ P \} \left[ \Delta \left( \langle p \rangle \{ a \} \right) + \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dv = 0 \dots \dots 14$$



Comme  $G$  doit s'annuler pour tout  $\{\delta a\}$ , la relation (14) est équivalente aux  $n$  équations algébriques.

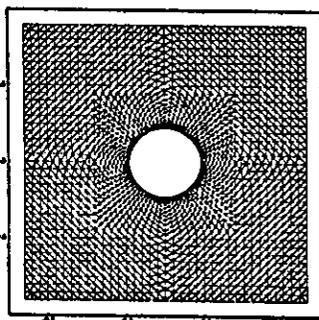
$$\left. \begin{aligned} G_1(a) &= \int_v P_1 \left[ \langle \Delta P \rangle \{a\} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dv = 0 \\ \vdots \\ G_n(a) &= \int_v P_n \left[ \langle \Delta P \rangle \{a\} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dv = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

L'intégration par parties permet en général de transformer le système (15) comme il est exposé dans l'annexe A.

**II - 3 - 3 - Idéalisisation d'une structure et maillage :**

La discrétisation : consiste en la subdivision du domaine  $\Omega$  à étudier en sous domaine  $V_e$  ( $e$  élémentaire) appelés "Eléments finis" qui seront unidimensionnel, bidimensionnels ou tridimensionnels, suivant le problème à traiter [18] .

Maillage 1728 noeuds

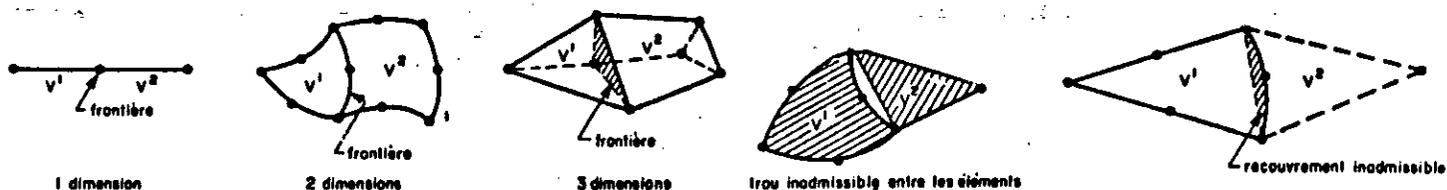


**Figure 4 :** Maillage de la région d'un conducteur en éléments triangulaires dans un plan bidimensionnel

- Les éléments sont de dimensions finies et de formes bien définies, il ne sont pas nécessairement identiques en dimensions, en géométrie et en forme et type.

**Règles et critères de répartition :**

\* Deux éléments distincts sont rattachées entre eux par les noeuds se trouvant sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments [3] .



**Figure 5 :** Critère de répartition d'un domaine.



\* L'ensemble de tous les éléments  $V_e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine  $V$ . Nous excluons en particulier les trous entre éléments.

\* Au niveau des ouvertures, des formes particulières ou des endroits du changement, le maillage doit être plus raffiné afin qu'on puisse approcher au mieux le milieu continu, la discrétisation devient moins raffinée au fur et à mesure qu'on s'éloigne des endroits indiqués plus haut.

\* Lorsque la frontière du domaine  $V$  est constitué par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments, ou en utilisant des éléments à frontières plus complexes.

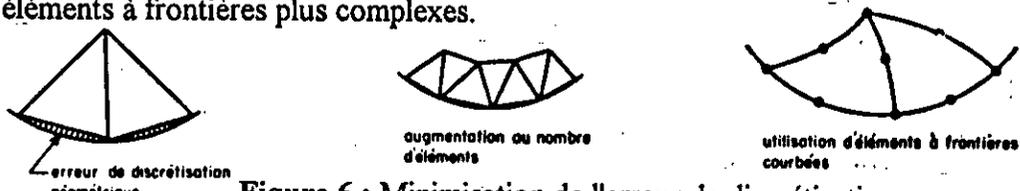


Figure 6 : Minimisation de l'erreur de discrétisation.

\* Les maillages, notamment ceux réalisés par les meilleurs automatiques (Intelligence artificielle) doivent être vérifiés afin de s'assurer que le domaine  $V$  est égal exactement à la somme de tous les domaines élémentaires  $V = \sum V_e$ .

• Quelques types d'éléments :

Eléments à une dimension

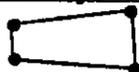


Elément à 2 dimensions

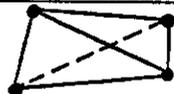
Elément triangulaire :



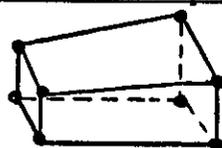
Eléments quadrilatéraux



Eléments tétraédriques :

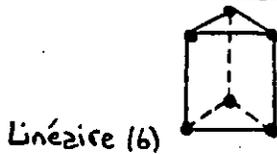


Elément hexaédriques :

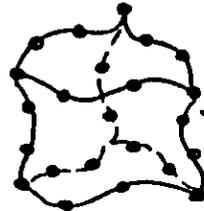




Éléments prismatiques :



Quadratique (15)



Cubique (24)

Figure 7 : Quelques types d'éléments.

Éléments de référence :

Un élément de référence  $V_r$  est un élément très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel  $V_e$  par une transformation géométrique  $\tau^e$ .

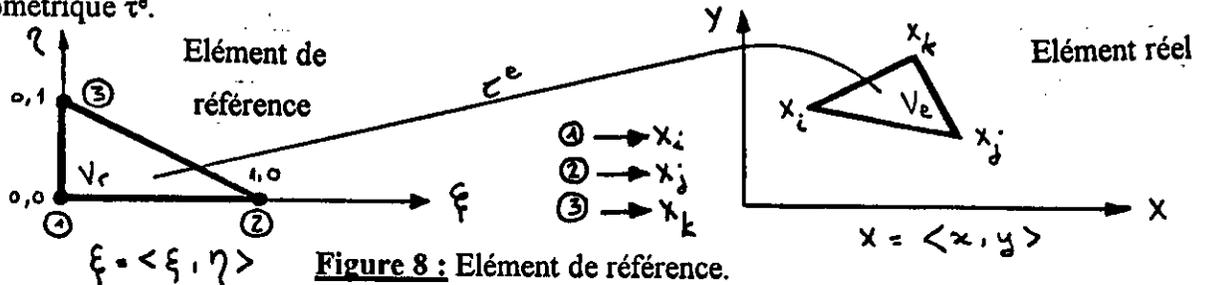


Figure 8 : Élément de référence.

$$\tau^e = \xi \implies X^e = X^e(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots)$$

Cette transformation doit vérifier les propriétés suivantes [3] :

- Elle doit générer des éléments réels qui satisfassent les règles de partition des domaines déjà citées.
  - Elle dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des noeuds géométriques qui le définissent.
  - Elle est bijective en tout point  $x$  de l'élément de référence. Chaque point de  $V_r$  correspond à un point et un seul de  $V_e$  et vice - versa.
  - Pour chaque élément réel, il y a une transformation différente  $\tau^e$
  - Chaque position de frontière de  $V_r$  définie par les noeuds géométriques de cette frontière correspond à la portion de frontière de  $V_e$  définie par les noeuds correspondants.
- Soulignons qu'un même élément de référence  $V_r$  (par exemple un triangle à 3 noeuds) se transforme en tous les éléments réels  $V_e$  de même type (triangle à 3 noeuds) par des transformations  $\tau^e$  différentes.

II - 3 - 4 - Construction d'une fonction approchée :

Soit  $\phi_{ex}(x)$ , une fonction exacte, elle peut être représentée par une fonction approchée  $\phi(x)$  telle que la différence  $e(x) = \phi(x) - \phi_{ex}(x)$  soit assez petite pour l'objectif visé [3] ;  $\phi(x)$  est égale à la fonction  $\phi_{ex}(x)$  au niveau des noeuds ; alors :



$$\phi(x) = \langle N_1(x) \cdot N_2(x) \dots N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} \dots (16)$$

Ou bien :  $\phi(x) = \langle N_n \rangle \cdot \{\phi_n\}, \langle N \rangle = \{N\}^T$

Les  $N_i$  sont des fonctions connues, linéairement indépendantes tels que les polynômes ou les fonctions trigonométriques. Les fonction sont aussi indépendantes de  $\phi_i$ .

- La fonction exacte est approchée sont égales au niveau des points d'interpolation.
- Les  $\phi_i$  sont appelés " les paramètres nodaux".

**Propriété des fonctions de l'approximation nodale :**

- a - Comme  $\phi(x_i) = \phi_i$  ; les fonctions  $N_i$  vérifient :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- b - L'erreur de l'approximation est définie par :  $e(x) = \phi(x) - \phi_{ex}(x)$ , au niveau des noeuds  $e(x) = 0$

**Exemple d'interpolation :**

Dans le cas d'une interpolation de "Lagrange" du 3ème degrés :

$$N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$\phi = N_1(x) \cdot \phi_1 + N_2(x) \cdot \phi_2 + N_3(x) \cdot \phi_3 + N_4(x) \cdot \phi_4$$

**II - 3 - 5 - Approche isoparamétrique :**

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de formes complexes, et pour représenter de mieux une géométrie délicate de frontières de différentes catégories d'éléments, introduisons la notion d'élément isoparamétrique qui est un élément de forme simple repéré dans un espace isoparamétrique [4] .

La représentation par élément isoparamétrique (De référence) à un grand intérêt en effet elle simplifie le calcul au niveau des matrices de rigidité et elle permet de réduire le coût rputable dû au choix d'élément classique d'ordre supérieur.



**Principe de construction d'éléments isoparamétriques :**

Un élément est dit isoparamétrique si les fonctions de transformation géométriques sont identiques aux fonctions d'interpolation. Ceci implique que les noeuds géométriques soient confondus avec les noeuds d'interpolation.

La construction d'un élément isoparamétrique revient à définir une application d'un élément rectangulaire par exemple en bidimensionnel définie dans un repère curviligne  $(\xi, \eta)$ , comportant un certain nombre de noeuds sur l'élément réel (origine) à frontières courbes et comportant le même nombre de noeuds.

**Transformation de coordonnées :**

Considérons la transformation géométrique du plan  $(\xi, \eta)$  sur le plan  $(x, y)$  :

$$\begin{cases} x = f(\xi, \eta) \\ y = g(\xi, \eta) \end{cases}$$

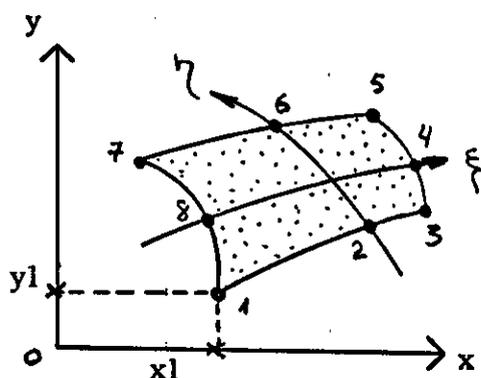
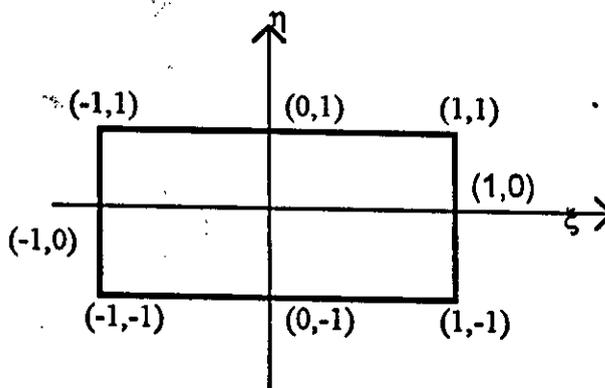


Figure 9



Elément d'origine

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

où bien  $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$

[J] : matrice Jacobienne.



$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Or, on a besoin d'exprimer les dérivées par rapport à  $x$  et  $y$  en fonction des dérivées par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Du fait que l'approche est isoparamétrique :

$$\begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + \dots + N_n x_n \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + \dots + N_n y_n \end{cases}$$

Où  $\langle N \rangle$  sont les fonctions d'interpolation.

Donc :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum N_i x_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \sum N_i y_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \sum N_i x_i}{\partial \eta} & \frac{\partial \sum N_i y_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}$$

$$\implies [J] = [B] \cdot [x] ; \text{ où } N^e = \langle N_1 \dots N_n \rangle$$

Donc on pourra écrire que :

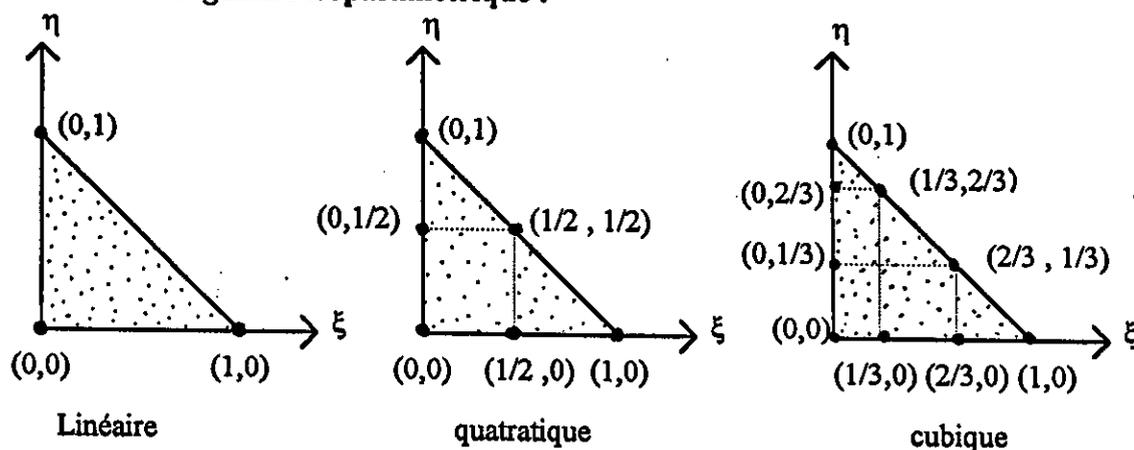
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N^e}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

L'intégration sur une région du plan  $(x, y)$  devient sur une région du plan  $(\xi, \eta)$  et un élément d'air devient :

$$dx dy = |\det J| \cdot d\xi \cdot d\eta$$



**Elément triangulaire isoparamétrique :**



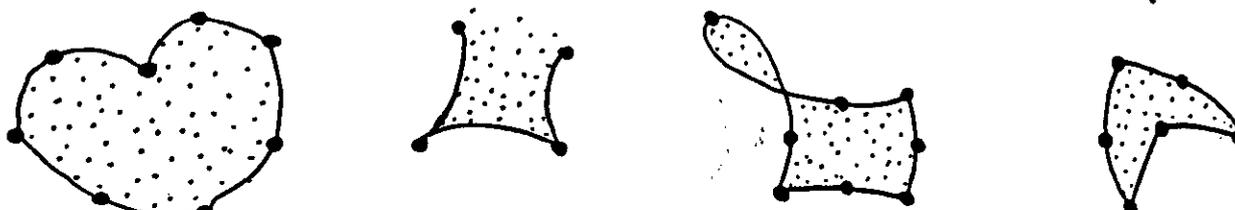
**Figure 10 :** Elément triangulaire isoparmétrique.

avec :

$$\begin{cases} \xi + \eta \leq 1 \\ \xi \geq 0 \\ \eta \geq 0 \end{cases}$$

**Remarque :**

Des distorsions excessives des éléments, telles que les angles rentrants, croisement et étirement, conduisent à des erreurs numériques grossières.



**Figure 11 :** Singularités des éléments.

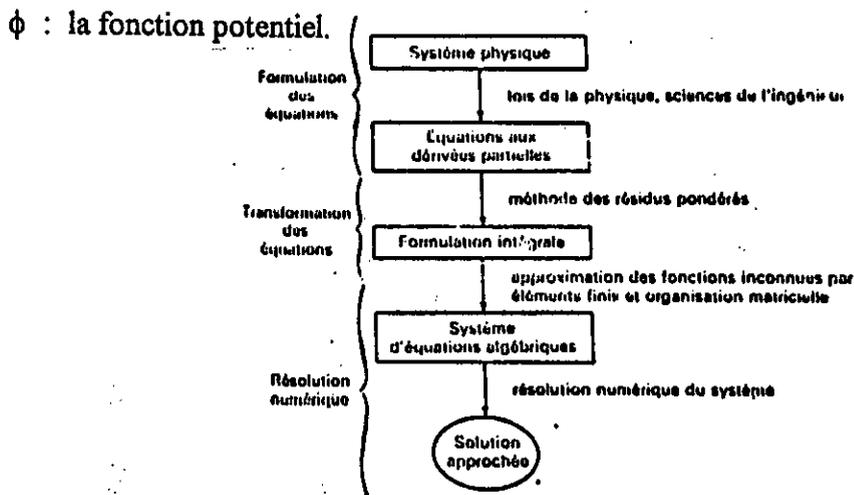
**II - 4 - Formulation intégrale :**

La méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. On schématise [3] ses principales étapes par la figure 12.

Notre problème est régit par l'équation suivante :

$$\Delta\phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 ; \quad \text{où:}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \dots\dots\dots(17)$$



**Figure 12 :** Transformation des équations d'un système physique.

**II - 4 - 1 - Ecriture matricielle et résolution :**

La forme intégrale élémentaire  $G^e$  (paragraphe 3-2) est :

$$G^e(\phi) = \int_{V_e} \langle \Psi \rangle \cdot \{R(\phi)\} dv = 0$$

Où :  $\Psi = \langle N \rangle$  : fonction de pondération et  $R(\phi) = \Delta\phi + f_v$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{array} \right. \dots\dots\dots(17 - a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_v = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right. \dots\dots\dots(17 - b)$$

D'où la forme intégrale devient :

$$\int_{V_e} \langle N \rangle \cdot \{\Delta(\phi)\} dv = \int_{V_e} \langle N \rangle \cdot \left\{ \frac{-\rho}{\epsilon_0} \right\} dv \dots\dots\dots(18)$$

Ainsi ,on aura à calculer deux intégrales :

• Calcul de :

$$\int_{V_e} \langle N \rangle \cdot \{\Delta(\phi)\} dv = [KE1] \{\phi_1\} \dots\dots(19)$$



[KE1] : matrice de rigidité élémentaire représentant l'opérateur de Laplace.

En substituant (17 - a) dans (19) et en remplaçant  $dv$  par  $\det J \cdot d\xi \cdot d\eta$ , on obtient :

$$[KE1] \{ \phi_i \} = \int_{V_e} \langle N \rangle \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \right\} \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \quad \dots\dots(20)$$

Avec :  $\phi = \langle N \rangle \{ \phi_i \}$  ; N : fonction de forme (paragraphe II - 3 - 5).

En utilisant l'annexe D, on pourra écrire les différentes dérivées partielles dans un domaine de référence  $V^e$  en  $\xi$  et  $\eta$  comme variables.

On obtient la forme des éléments de la matrice [KE1] sous la forme suivante :

$$KE1(I, J) = \int_{V^e} \left\{ N(I) \cdot \left[ T_1(1, 1) \frac{\partial N(J)}{\partial \xi} + T_1(1, 2) \frac{\partial N(J)}{\partial \eta} + \right. \right. \\ T_2(1, 1) \frac{\partial^2 N(J)}{\partial \xi^2} + T_2(1, 2) \frac{\partial^2 N(J)}{\partial \eta^2} + T_2(1, 3) \frac{\partial^2 N(J)}{\partial \xi \partial \eta} + \\ T_1(2, 1) \frac{\partial N(J)}{\partial \xi} + T_1(2, 2) \frac{\partial N(J)}{\partial \eta} + T_2(2, 1) \frac{\partial^2 N(J)}{\partial \xi^2} \\ \left. \left. + T_2(2, 2) \frac{\partial^2 N(J)}{\partial \eta^2} + T_2(2, 3) \frac{\partial^2 N(J)}{\partial \xi \partial \eta} \right] \det J \cdot d\eta \cdot d\xi \right\} \quad \dots(21)$$

Avec I ; J = 1,6

• Calcul de :

$$\int_{V_e} \langle N \rangle \cdot \{ -f_v \} dv = \{ FE \} \quad \dots\dots(22)$$

{FE} : Vecteur charge élémentaire représentant  $f_v$ .

Où :  $f_v = -\rho / \epsilon_0$  et  $dv = \det J \cdot d\xi \cdot d\eta$

Ainsi on a :

$$\{ FE \} = \int_{V_e} \langle N \rangle \cdot \left\{ -\frac{\rho}{\epsilon_0} \right\} \det J \cdot d\xi \cdot d\eta$$



En utilisant l'annexe D, on obtient des éléments du vecteur charge élémentaire FE, sous la forme suivante :

$$FE(I) = \int_{V_e} N(I) \cdot N(J) \det J \left\{ \Delta_3 \left( (KLOCE(I)) \cdot I (KLOCE(I)) \left[ \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial N(I)}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial N(I)}{\partial \eta} \right] \right) \right\} d\xi \cdot d\eta \dots (23)$$

$I, J = \overline{1,6}$

KLOCE : est la table de localisation donnant les numéros des noeuds constituant chaque élément.

Avec :

$$\begin{cases} \Delta_3 = \langle N \rangle \{ \Delta_3^i \} \\ I = \langle N \rangle \{ I_i \} \end{cases}$$

Tel que :  $\Delta_3^i$  et  $I_i$  : sont respectivement les valeurs des variables de calcul aux noeuds.

Après avoir calculé les différentes intégrales, on obtient après assemblage un système d'équations d'inconnue  $\phi$  à résoudre numériquement.

#### Intégration numérique :

Vu la difficulté de calcul des deux intégrales, on fait appel à l'intégration numérique, qui nous permet de construire les matrices et les vecteurs élémentaires.

Pour cela on adopte "La méthode directe", qui transforme l'intégration de n'importe quelle fonction  $y(\xi, \eta)$  sur le triangle de référence en une somme calculable numériquement. Ainsi pour une intégrale I, on a ; [11] :

$$I = \int_0^{1-\xi} \int_0^\xi y(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta.$$

Avec :  $y(\xi, \eta)$  est l'expression à intégrer.

Donne, moyennement la méthode directe :

$$I = \sum_{L=1}^r W_L \cdot y(\xi_L, \eta_L)$$

Avec : r est le nombre de points d'intégration choisi de façon à pouvoir intégrer exactement det J.



D'après ZIENKEWIKS [4] , pour les éléments isoparamétriques, le nombre de points d'intégration doit permettre l'intégration exacte de  $\det J$ , qui a la forme  $\xi^i \eta^j$  (c'est le polynôme) pour lesquels  $(i + j \leq m)$ , avec :

$m$  : est l'ordre de  $\det J$  (dans notre cas  $m = 2$ )

De la table des formules directes d'intégration sur un triangle (table de HAMMER) [11] on choisit  $m = 2$  et  $r = 3$  .

Ainsi on a les coordonnées des points d'intégration  $\xi_L$  et  $\eta_L$  et leurs chargement  $W_L$ .

## II - 5 - Méthode variationnelle :

### 5 - 1 - Introduction et principe :

En raison des avantages qu'elles présentent, les méthodes variationnelles occupent une place prépondérante parmi les méthodes numériques couramment utilisées pour le calcul des champs électromagnétiques. Elles consistent dans leur principe, à chercher à rendre extrémales certaines expressions, appelées "fonctionnelles" en raison de leur structure. Lorsque cette condition est remplie, les valeurs du champ entrant dans la constitution de ces fonctionnelles satisfait aux équations du champ et représentent la solution cherchée [5] .

Les fonctionnelles employées dans les application, ainsi que les conditions qui leur sont imposées, résultant le plus souvent de considérations certes très importantes, mais qui peuvent écarter l'attention de tout aspect physique ou géométrique. Ces écueils peuvent être évités en établissant directement, à partir des lois du champ électromagnétique, les expressions des fonctionnelles et en justifiant de même la condition qu'elles soient minimales.

On donne le schéma de la figure 13 qui illustre l'importance du principe variationnel dans la méthode des éléments finis [3] .

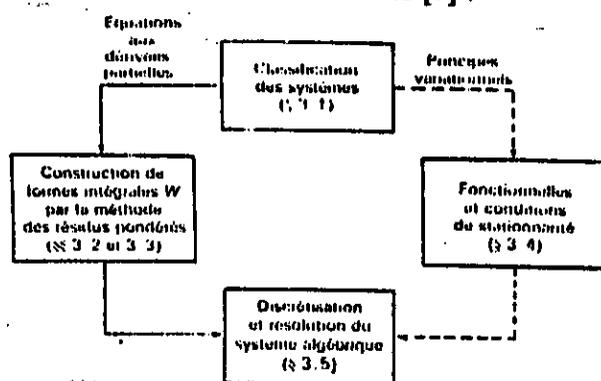


Figure 13 : Relation entre les étapes de la formulation vriationnelle.

Du schéma précédent, on voit que la méthode variationnelle substitue la recherche d'un minimum d'une fonctionnelle à la résolution directe des équations aux dérivées partielles. Elle s'applique essentiellement aux problèmes pour lesquels on



connaît la fonctionnelle, ce sont les problèmes stationnaires tels que l'équation de 'Poisson'

$$f = \int_{\Omega} [\epsilon_0 (\nabla\phi)^2 - \rho \phi] dx dy \quad \text{en bidimensionnel}$$

$\Omega$  : le domaine où on résout l'équation

Après calculs, on trouve :

(voir Annexe B)

$$f = \int_{\Omega} \left[ \epsilon_x \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \epsilon_y \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Gamma} 2 \cdot \phi \cdot h \cdot dl$$

$\epsilon_x, \epsilon_y$  : coefficient de permittivité anisotropique.

S: le matériau diélectrique est isotropique  $\implies \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon$

Dans notre cas c'est l'air donc  $\epsilon_0$  :

f : représente l'énergie électrique emmagasinée à l'intérieur du volume entier considéré.

$$f = \int_{\Omega} \left[ \epsilon_0 \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy - \int_{\Gamma} 2 \cdot \phi \cdot h \cdot dl \quad \dots(24)$$

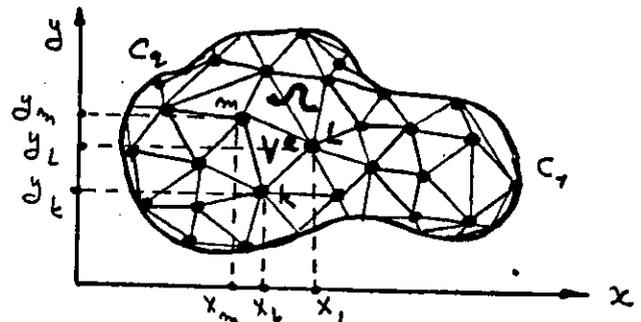
$\phi$  : fonction potentiel.

h : valeur du champ sur les frontières.

### 5 - 2 - Étapes de la méthode variationnelle :

La méthode est basé sur la recherche d'une fonction qui minimise la fonctionnelle f dans tous le domaine  $\Omega$ , et comme  $\phi$  n'est pas connue a priori, la première étape de la méthode est la discrétisation du domaine, c'est à dire le partager en sous éléments de manière à pouvoir faire des approximations pour  $\phi$  dans chaque élément (sous domaine).

Une fois, le domaine discrétisé, on applique le critère de minimisation à tous les éléments pour obtenir des systèmes matricielles ayant un ordre égale au nombre de degrés de liberté. On aura ainsi autant de systèmes matriciels élémentaires que d'éléments. On passe alors à une formulation globale du critère de minimisation par un assemblage approprié des systèmes élémentaires, et on obtient un système matriciel dont la résolution après introduction des conditions aux limites du type 'Dirichlet' donnera la valeur de la fonction  $\phi$  aux noeuds du domaine.



**Figure 14 :** Discretisation par la méthode des éléments finis.



• **Discrétisation :**

- Subdivision en élément triangulaires.
- Domaine en bidimensionnel avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \phi &= g(l) && \text{sur } C_1 : \text{condition sur le potentiel.} \\ \partial\phi / \partial n &= h(l) && \text{sur } C_2 : \text{condition sur le champ.} \end{aligned}$$

- $C_1$  et  $C_2$  constituent la frontière totale  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ .
- $g$  et  $h$  : fonctions données.
- Ces éléments triangulaires obéissent aux règles de répartition des domaines décrits au paragraphe (II - 3 - 3).
- L'élément  $Ve$  avec les noeuds  $m$ ,  $L$  et  $k$  et leurs coordonnées  $(x_m, y_m)$ ,  $(x_l, y_l)$  et  $(x_k, y_k)$ .
- En cas de problèmes bi-dimensionnels, il est possible d'utiliser des éléments rectangulaires ou carrés, comme était donné dans la méthode des différences finies. Mais, il y a cependant des avantages en utilisant simplement une distribution d'éléments de forme triangulaire arbitraire. Tels éléments peuvent aisément être adéquats pour se coincider avec les frontières du domaine, afin de minimiser l'erreur de discrétisation le mieux possible [6].

• **Choix de fonction d'approximation :**

On peut former des fonctions de base pour la distribution du potentiel  $f(x, y)$  sur l'élément  $Ve$  comme était indiqué précédemment.

On choisit une fonction approchée linéaire et que soit le polynôme :

$$\phi^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \dots$$

Chaque fois que l'ordre du polynôme est élevé, chaque fois que la précision est plus bonne [13], mais on se limite pour les facilités de calcul aux polynômes d'ordre 1.

$$\phi^e(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y = (1 \ x \ y) \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \dots(25)$$

En l'appliquant aux noeuds de l'éléments  $Ve$ , on obtient un système d'équation tel que :



$$\begin{cases} \phi^e(x_k, y_k) = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k = \phi_k \\ \phi^e(x_L, y_L) = \alpha_0 + \alpha_1 x_L + \alpha_2 y_L = \phi_L \\ \phi^e(x_m, y_m) = \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m = \phi_m \end{cases} \dots\dots(26)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_L & y_L \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_L & y_L \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix}$$

La résolution du système nous donne :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2 \Delta_c} (a_k \phi_k + a_L \phi_L + a_m \phi_m) & \dots\dots(26 - a) \\ \alpha_1 = \frac{1}{2 \Delta_c} (b_k \phi_k + b_L \phi_L + b_m \phi_m) & \dots\dots(26 - b) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2 \Delta_c} (c_k \phi_k + c_L \phi_L + c_m \phi_m) & \dots\dots(26 - c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_k = x_L y_m - x_m y_L & b_k = y_L - y_m & c_k = x_L - x_m \\ a_L = x_m y_k - x_k y_m & b_L = y_m - y_k & c_L = x_m - x_k \\ a_m = x_k y_L - x_L y_k & b_m = y_k - y_L & c_m = x_k - x_L \end{cases} \dots\dots(27)$$

$$2 \Delta_c = a_k + a_L + a_m = b_k \cdot c_L - b_L \cdot c_k \dots\dots(28)$$

A partir de l'équation (28) et de la figure 14 , on peut facilement voir que le symbole  $\Delta_c$  est utilisé pour décrire la surface de l'élément triangulaire  $Ve(k ; L , m)$ , ainsi que son double  $2 \Delta_c$  représente le déterminant de la matrice de passage :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_L & y_L \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

Avec les équations précédentes, la distribution du potentiel de l'élément, peut être donc reliée aux potentiels de ses noeuds et des nombres simples  $a_k, b_k, \dots\dots$ ect.

Donc on peut écrire à partir de l'équation 2 :



$$\phi_e(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \Delta_e} [(a_k + b_k x + c_k y) \phi_k + (a_L + b_L x + c_L y) \phi_L + (a_m + b_m x + c_m y) \phi_m] \dots\dots(29)$$

e : indice élément.

Aussi on peut écrire :

$$\phi_e(x, y) = [N_k^e(x, y) \quad N_L^e(x, y) \quad N_m^e(x, y)] \begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix} \dots\dots(30)$$

Les fonctions  $\phi_e$  ainsi exprimées possédant les propriétés suivantes :

$$\phi^e(x_i, y_i) = \begin{cases} \phi_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \dots\dots (31)$$

$$\phi^e(x, y) = 0 \dots\dots(32) \quad \text{à l'intérieur de l'élément}$$

Les fonctions  $N_i^e(x, y)$  sont "les fonctions de forme", elles dépendent de la forme de l'élément fini utilisé.

D'où l'approximation sur tout le domaine  $\Omega$  sera la somme des approximation élémentaire  $\phi^e$ .

$$\phi(x, y) = \sum_{e=1}^E \phi^e(x, y) \dots\dots(33)$$

E : le nombre d'éléments.

• Critère de Rayleigh - Ritz :

Considérons la fonctionnelle d'énergie :

$$f(\phi) = \iint_{\Omega} \epsilon_0 \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2} 2 \cdot \phi \cdot h \cdot dl$$



Remplaçons  $\phi$  par l'expression (33) :

$$f(\phi) = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \iint \epsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^B \phi^e(x, y)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \sum_1^B \phi^e(x, y)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2} 2 \left( \sum \phi^e(x, y) \right) \cdot h \cdot dl$$

Comme chaque fonction  $\phi^e$  est nulle ailleurs que sur le sous domaine  $e$  ou elle est définie [équation (31) et (32)].

$$f(\phi) = f(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \sum_{e=1}^B \iint_{\Omega^e} \epsilon_0 \left\{ \left( \frac{\partial \phi^e(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi^e(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \sum_{e=1}^B \int_{C_2^e} 2 \cdot \phi^e \cdot h \cdot dl$$

Soit :

$$f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \sum_{e=1}^B f^e \quad \dots\dots(34)$$

avec :

$$f^e = \iint_{\Omega^e} \epsilon_0 \left\{ \left( \frac{\partial \phi^e(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi^e(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{C_2^e} 2 \cdot \phi^e \cdot h \cdot dl \quad \dots\dots(35)$$

Qui représente l'expression de la fonctionnelle dans chaque élément  $V^e$ .

**Remarques :**

Le second terme de  $f^e$  n'apparaît que si l'élément considéré à un côté sur la frontière où la condition de "Newmann" a été imposée.

Le critère de "Rayleigh - Ritz" stipule que la fonctionnelle [3, 5]

$f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  est minimale si :

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_i} = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \text{ [Principe de la stationnarité]}$$

Soit en vertu de (34) :

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \sum_1^B f^e \right) = \sum_{e=1}^B \frac{\partial f^e}{\partial \phi_i} = 0 \quad \dots\dots(36)$$

Ce résultat montre que l'énergie est minimale dans le domaine entier, si elle l'est dans chaque sous-domaine  $V^e$ , ce qui nous permettra de construire les matrices élémentaires  $A^e$ .



• Construction des matrices élémentaires :

L'expression de la fonctionnelle dans chaque élément est donnée par l'expression (35) comme les éléments sont disjoints en vertu de (36)  $f^e$  sera minimale quand :

$$\frac{\partial f^e}{\partial \phi_i} = 0 \quad \text{avec : } i = k, l, m.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^e}{\partial \phi_i} &= \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[ \iint_{D^e} \epsilon_0 \left\{ \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{c_i} 2 \cdot \phi^e \cdot h \cdot dl \right] \\ &= \iint_{D^e} \epsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[ \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \int_{c_i} 2 \cdot \frac{\partial \phi^e}{\partial \phi_i} \cdot h \cdot dl \end{aligned}$$

Développons chaque terme de l'intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right)^2 = 2 \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial \phi_i} \right)$$

or d'après (30) :

$$\phi^e(x, y) = N_k^e \phi_k + N_L^e \phi_L + N_m^e \phi_m = \begin{bmatrix} N_k^e & N_L^e & N_m^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial \phi_i} = N_i^e \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} N_k^e & N_L^e & N_m^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} & \frac{\partial N_L^e}{\partial x} & \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix}$$

Et :

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right)^2 = 2 \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} & \frac{\partial N_L^e}{\partial x} & \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right)^2 = 2 \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} & \frac{\partial N_L^e}{\partial y} & \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix}$$



et :  $\partial \phi^e = \partial \phi_i = N_i^e$  ; il vient :

$$\frac{\partial f^e}{\partial \phi_i} = 2 \cdot \sum A_{ij}^e \cdot \phi_j - 2 \cdot b_i^e \quad \dots\dots(37)$$

Avec :

$$\begin{cases} A_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \epsilon_0 \left\{ \left( \frac{\partial \phi^e(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi^e(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \iint_{\Omega^e} \epsilon_0 \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy \\ b_i^e = \int_{C_i^e} 2 \cdot \phi^e \cdot h \cdot dl = \int_{C_i^e} q \cdot N_i^e \cdot dl \end{cases}$$

Pour les trois noeuds k,l,m de l'élément, l'équation (37) peut s'écrire :

$$(A^e) \cdot (\phi^e) = (b^e) \quad \dots\dots(38)$$

Où :

- (A<sup>e</sup>) : Matrice (3 . 3) élémentaire.
- (φ<sup>e</sup>) : Vecteur colonne.  $(\phi_k \quad \phi_L \quad \phi_m)^T$ .
- (b<sup>e</sup>) : Vecteur colonne.  $(b_k \quad b_L \quad b_m)^T$ .

Le système (38) est l'écriture sous forme matricielle du critère de minimisation de la fonctionnelle sur l'élément e [5] .

• **Assemblage des matrices élémentaires :**

L'application du critère (36) à chaque élément , conduit à la construction de E matrices élémentaires (A<sup>e</sup>).

Ce qui nous intéresse cependant , c'est d'obtenir un système matriciel dont la valeur solution (φ) minimise l'énergie dans tout le domaine (Ω) , [5] .

Nous allons, à cette fin étendre les E matrices (A<sup>e</sup>) de manière à exprimer l'équation sous forme d'un système d'ordre n faisant intervenir le vecteur global :

$$(\phi) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$



a. Extension des matrices élémentaires : le système (38) s'écrit :

$$\begin{matrix} & k & L & m \\ k & A_{kk}^{\circ} & A_{kL}^{\circ} & A_{km}^{\circ} \\ L & A_{Lk}^{\circ} & A_{LL}^{\circ} & A_{Lm}^{\circ} \\ m & A_{mk}^{\circ} & A_{mL}^{\circ} & A_{mm}^{\circ} \end{matrix} \begin{bmatrix} \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_k \\ b_L \\ b_m \end{bmatrix}$$

Pour faire intervenir le vecteur global  $(\phi)$ , il suffit d'étendre la matrice élémentaire  $(A^{\circ})$ , et le vecteur  $(b^{\circ})$  à l'ordre  $n$  avec comme termes non nuls ceux de rangs  $k, l, m$  ; il vient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & L & \dots & m & \dots & n \\ \vdots & & & & & & & & & \\ k & & & \dots & A_{kk}^{\circ} & \dots & A_{kL}^{\circ} & \dots & A_{km}^{\circ} & \dots \\ L & & & \dots & A_{Lk}^{\circ} & \dots & A_{LL}^{\circ} & \dots & A_{Lm}^{\circ} & \dots \\ m & & & \dots & A_{mk}^{\circ} & \dots & A_{mL}^{\circ} & \dots & A_{mm}^{\circ} & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & \\ n & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \\ \phi_L \\ \phi_m \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_k^{\circ} \\ b_L^{\circ} \\ b_m^{\circ} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \dots\dots(39)$$

Cette écriture est équivalente à (37), mais présente l'avantage de faciliter l'assemblage ultérieur.

b. Assemblage :

D'après (36) le minimum de l'énergie potentielle sur tout le domaine  $(\Omega)$ , s'obtient par addition des contributions de tous les éléments de ce minimum, soit en vertu de (39)

$$\sum_{e=1}^E [(A^{\circ})_{\alpha} \cdot (\phi) - (b^{\circ})_{\alpha}] = 0$$

Où  $(A^{\circ})_{\alpha}$  et  $(b^{\circ})_{\alpha}$  désignent les matrices étendues et le système global s'écrit :

$$[A] \cdot [\phi] = [b] \quad \dots\dots(40)$$

Avec :



$$[A] = \sum_1^B (A^\circ)_\alpha$$

$$[\phi] = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T$$

$$[b] = \sum_1^B (b^\circ)_\alpha$$

### Remarque :

La matrice  $[A]$  est symétrique, car elle a été construite à partir des matrices  $(A^\circ)$  symétriques, on peut le vérifier immédiatement de l'expression des termes  $A_{ij}$  (37).

#### • Introduction des conditions aux limites :

Tant qu'on ne tient pas compte des conditions aux limites, la matrice  $[A]$  est singulière, et le système (40) admet une infinité de solutions.

On démontre [5] que seuls les conditions sur le potentiel "Dirichlet" sont à imposer au vecteur solution  $(\phi)$ , on dit qu'elles sont essentielles, les conditions sur le champ "Newmann" sont, quand à elles dites naturelles car elles sont automatiquement vérifiées lors de la formulation variationnelle du problème.

#### • Résolution du système d'équation :

La méthode des éléments finis a été à l'origine du développement d'une multitude de méthodes numériques de résolution sur lesquelles elle débouche.

Ces méthodes tiennent compte des particularités des matrices qui peuvent être ; pleines, creuses, à bandes.....etc.

Dans le cas du système (40) on peut le simplifier par partition de la matrice  $[A]$  suivant des sous matrices correspondants aux sous vecteurs  $[\phi_q]$  qui peuvent être nuls ou non, suivant les conditions de "Dirichlet" introduites.

## II - 6 - Convergence :

La méthode des éléments finis étant une méthode approximative comme nous l'avons indiqué, d'où la nécessité de l'étude de la convergence. Les erreurs rencontrées au cours d'une résolution par la M.E.F sont dues aux causes subséquentes [4].



Source d'erreur	Lieu de manifestation
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Discrétisation</li> <li>• Intégration numérique.</li> <li>• Solution d'équations de la MEF par itérations.</li> <li>• Arrondi (fonctions de la machine)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilisation des fonctions d'interpolation.</li> <li>• Utilisation et évaluation de matrices .</li> <li>• Gauss - Seidel , Jacobie , Newton - Raphson , Quasi - Newton.</li> <li>• Établissement d'équations et solutions.</li> </ul>

En M.E.F, on ne s'intéresse qu'aux erreurs dues à la discrétisation.

La convergence de la solution vers la solution exacte et à mesure que le nombre d'éléments augmente, peut se faire d'une façon monotone ou non monotone.

• Pour les conditions de convergence monotone , les éléments doivent être complets c'est à dire état de déformation constante - et compatibles c'est à dire les déplacements au sein des éléments et travers les frontières d'éléments doivent être continus, pas d'apparition de vides .

Le taux de convergence est lié aux options de polynômes complets et d'éléments isotropes dans l'espace [8] .

2dim		1	.....0
	x	y	.....1
	x <sup>2</sup>	xy	y <sup>2</sup> .....2
	x <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y	xy <sup>2</sup> .....3
			y <sup>3</sup> ...

un élément de dimension h avec fonctions complètes jusqu'à l'ordre C entraîne une erreur lorsque le maillage est uniforme de l'ordre de  $h^{c+1}$  ( $\theta (h^{c+1})$ ).

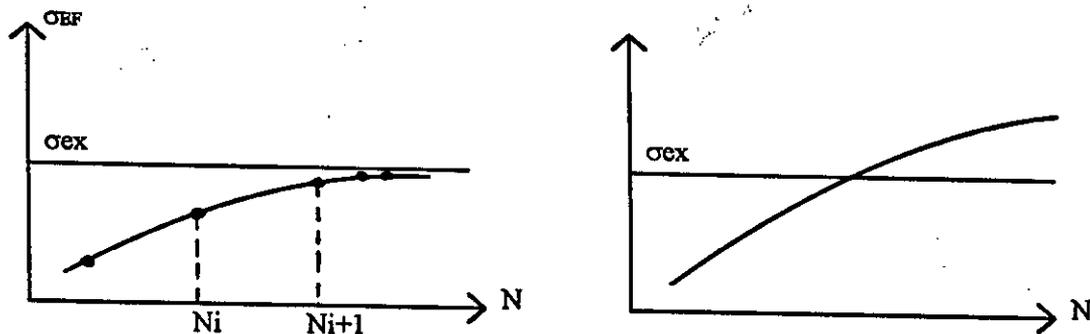


Figure 15 : Convergence monotone.

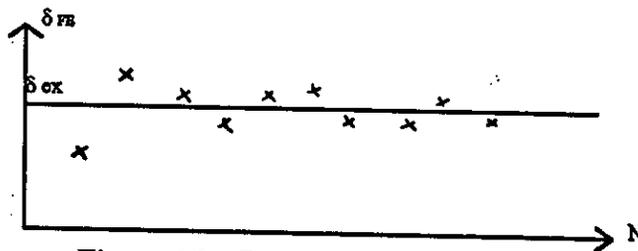


$\delta_{FE} < \delta_{ex}$  : ceci est dû à la présence de rigidité artificielle créée par la discrétisation .  
N : Nombre d'éléments finis.

• Pour les conditions de convergence non monotone , l'utilisation d'éléments incompatibles, porte atteinte à l'aspect monotone de la convergence. Pour qu'il y'ait convergence non monotone .

- Éléments complets.

- Satisfaction du Patch - test : permet de dire si l'assemblage d'éléments est complet. La satisfaction de ce test dépend de la géométrie des éléments utilisés . Les éléments carrés, rectangles ou parallélogrammes sont recommandés [8 , 23] .



**Figure 16 :** Convergence non monotone.



### III.

## Méthode des équations intégrales aux frontières.

### III - 1 - Introduction et principe :

Les solutions analytiques sont très délicates à obtenir. Ainsi les ingénieurs ont cherché des méthodes purement numériques M.D.F puis M.E.F. Leur inconvénient est de devoir traiter dans de nombreux cas, des problèmes à 3 dimensions, ce qui exige souvent de grandes capacités de mémoires des ordinateurs.

La M.E.I.F, permet de réduire ces problèmes à 2 dimensions. Son principe consiste à transformer les équations aux dérivées partielles dans le domaine et des conditions aux limites sur la frontière du domaine exclusivement. Elle est appliquée aux problèmes bi-dimensionnels en se basant sur la méthode des résidus pondérés pour formuler les équations intégrales.

La M.E.I.F est une méthode qui était particulièrement efficace pour résoudre l'équation de Laplace associée à des conditions aux limites dans un domaine de géométrie quelconque.

### III - 2 - Formulation de 'L'identité de Green' :

#### III - 2 - 1 - Classe de problème considérée :

Nous nous attachons à résoudre tout problème régi par l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$  dans un volume  $v$  ouvert (problème extérieur) ou fermé (problème intérieur), associée à des conditions aux limites sur la surface  $S$  de ce volume.

$\phi$  : représente le potentiel électrostatique.

#### III - 2 - 2 - Construction de l'équation intégrale :

$\phi$  : potentiel scalaire dérivable dans le volume  $v$  l'identité de 'Green' [20], s'écrit :

$$\int_v (\phi \Delta G - G \Delta \phi) dv = \int_s (\phi \nabla G - G \nabla \phi) ds$$

Et qui devient :

$$C. \phi(p) = - \int_v G_p \Delta \phi dv - \int_s \left( \phi \frac{\partial G_p}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} G_p \right) ds \quad \dots\dots\dots(42)$$



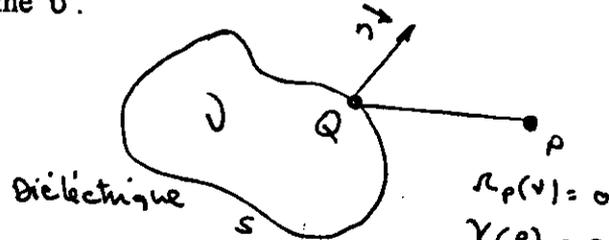
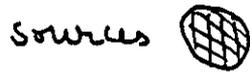
En choisissant pour G ; la fonction de Green du Laplacien :

$$G = G_p(Q) = \frac{1}{4.\pi.|PQ|} \dots\dots\dots(43)$$

Q : point d'intégration .

$$4.\pi.C = \Omega_p(v) \dots\dots\dots(44)$$

angle solide sous lequel le point P voit le volume v .



**Figure 17 :** Illustration de l'équation.

Si  $\phi$  obéit à l'équation de Laplace dans tout v , on obtient :

$$C . \phi(p) = - \int_S \left( \phi \frac{\partial G_p}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} G_p \right) ds \dots\dots\dots(45)$$

$\chi = 1 - \epsilon_r$   
susceptibilité diélectrique.

Et on peut calculer le potentiel en un point P du volume par intégration sur la surface de ce volume du potentiel et de sa dérivée normale, pondérées par les noyaux  $\partial G_p / \partial n$  et  $G_p$  qui sont des coefficients géométriques [17 , 20] .

**Conditions d'interface :**

- La continuité de la composante tangentielle du champ en absence des charges est assurée par la définition unique du potentiel sur la surface.

- Pour la composante normale, on doit avoir :

$$\epsilon_{r1} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_{r2} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} + \rho_s = \Psi$$

Le choix de  $\Psi$  comme inconnue à la place des dérivées normales du potentiel dans les 2 régions assure la seconde condition d'interface . l'équation intégrale (5) s'écrit alors :

$$C . \phi(p) = - \int_S \left( \phi \frac{\partial G_p}{\partial n} - G \frac{\Psi}{\epsilon_r} \right) ds$$

Donc, on s'intéresse à l'équation de Laplace qui conduit à l'équation intégrale de frontière (45) .

**L'équation intégrale de frontière :**



L'équation (45) peut être transformée en équation intégrale liant entre elles les distributions  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial n$ . il suffit pour cela de placer P sur s ou en dehors de v. La comparaison de (42) et (45) montre que l'équation intégrale de frontière écrite au point P est équivalente à :

$$\int_v G_p \Delta\phi \, dv = 0 \quad \dots\dots\dots(46)$$

Ce qui apparente la méthode des e.i.f à une méthode projective (voir annexe E) . au lieu d'annuler le Laplacien en N points du volume v on annule les intégrales de ce Laplacien, pondérés successivement par N fonctions  $G_{pi}$  [20] . La projection sur les fonctions de Green permet de ramener l'intégrale de volume (46) à la simple intégrale de surface (45).

L'incertitude qui conduit à répartir les points  $P_i$  sur toute la frontière est confirmée par l'étude théorique , on a démontré [20] que l'équivalence entre l'équation de Laplace dans le volume v et le système d'é.i.f est réalisé à condition que les points  $P_i$  décrivent une surface s entourant entièrement le volume v, éventuellement confondue avec la surface s de ce volume [voir annexe E]

#### Cas bidimensionnel plan :

Pour ce genre de système, la fonction de Green s'écrit :

$$G_{2D} = - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_\infty}$$

Où  $r_\infty$  est une constante arbitraire [20] signale pour ce noyau le risque d'obtention de systèmes intégraux singuliers , en partant de son étude, on montre que le choix :

$$r_\infty \gg L$$

(L étant la plus grande dimension de la coupe du système étudié), garantit a priori la régularité et le bon conditionnement du système obtenu.

#### Conclusion :

Si l'une des frontières du domaine étudié est rejetée à l'infini ( " ce phénomène extérieur"), l'intégrale correspondante tend vers zéro : la méthode intégrale permet de tenir compte d'un milieu infini sans le simuler par des frontières "lointaines" c'est là l'un des grands intérêts de cette méthode et il était important de le signaler.

Sur ces bases théoriques solides, les techniques numériques d'approximation des e.i.f peuvent être développées.

### III - 3 - Discretisation du problème :

La discrétisation numérique des e.i.f fait appel aux techniques classiques d'éléments finis, et le choix le plus adéquat est donné par des éléments finis



isoparamétriques d'ordre 2 qui est l'ordre minimum permettant une description précise des surfaces courbes. Ce qui est fondamental en particulier pour les problèmes de l'électrostatique.

### III - 3 - 1 - Expression discrétisée de l'e.i.f :

Les grandeurs  $\phi$  et  $\Psi$  sont approchées sur la surface  $s$  par des combinaisons linéaires de fonctions de base  $A_i$  et  $B_i$ . On aura ainsi en un point  $Q$  de la surface  $s$  :

$$\hat{\phi}(Q) = \sum_{i=1}^N a_i A_i(Q) \quad \text{et} \quad \hat{\Psi}(Q) = \sum_{i=1}^M b_i B_i(Q)$$

Les fonctions  $B_i$  et  $A_i$  sont par exemple, les fonctions poids des éléments finis. Les développements  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\Psi}$  sont forcément limités; par exemple un développement en élément finis du second ordre ne pourra pas se superposer exactement à une solution sinusoïdale, c'est l'erreur de discrétisation.

Dans l'exemple bidimensionnel, seulement les grandeurs géométriques et physiques sont approximées sur chaque élément finis défini par l'abscisse curviligne  $u \in [-1, 1]$  à l'aide des mêmes fonctions poids paraboliques  $P_i(u)$  :

$$\begin{cases} \hat{x}(u) = \sum_i x_i P_i(u) \\ \hat{y}(u) = \sum_i y_i P_i(u) \\ \hat{\phi}(u) = \sum_i \phi_i P_i(u) \\ \hat{\Psi}(u) = \sum_i \Psi_i P_i(u) \end{cases}$$

Avec toujours pour l'ordre 2 :

$$\begin{cases} P_1(u) = \frac{1}{2} u(u-1) \\ P_2(u) = (1-u^2) \\ P_3(u) = \frac{1}{2} u(1+u) \end{cases} \quad u = [-1, 1]$$

Si bien que, pour le point  $P_i(x_i, y_i)$  on a :

$$\begin{cases} \hat{\phi}(P_i) = \phi_i \\ \hat{\Psi}(P_i) = \Psi_i \end{cases}$$

L'expression de l'intégrale discrétisée est donc :



$$I(p) = \sum_k \sum_{i=1}^3 \left[ \phi_{ki} a_{ki} - \left( \frac{1}{\epsilon} \Psi_{ki} + \text{Hon}_{ki} \right) b_{ki} \right]$$

Tirée de :

$$I(p) = - \int_s \left( \hat{\phi} \frac{\partial G}{\partial n} - \left( \frac{\phi}{\epsilon} + \text{Hon} \right) \cdot G \right) \cdot ds$$

$\hat{\phi}$  et  $-(\hat{\Psi} / \epsilon + \text{Hon})$ : les potentiels des distributions surfaciques, et avec :

$$a_{ki}(P) = - \int_{-1}^1 P_i(u) \cdot \frac{\partial G_{pk}(u)}{\partial n} j(u) \cdot \partial u$$

$$b_{ki}(P) = - \int_{-1}^1 P_i(u) \cdot G_{pk}(u) \cdot j(u) \cdot \partial u$$

$k$  : indice sur les éléments finis de  $s$ .

$i$  ; indice sur les fonctions poids  $P_i$ .

$j(u)$  : Jacobien du changement de variable ( $ds = j(u) \partial u$ ).

Les coefficients  $a_{ki}(P)$  et  $b_{ki}(P)$  sont purement géométrique et dépendent du point  $P$  où est calculée l'intégrale  $I$  de l'élément  $k$  parcouru et de la fonction poids  $i$  considérée.

Remarquons que :

$$\sum_{i=1}^3 a_{ki}(P) = - \int_{-1}^1 \frac{\partial G_{pk}(u)}{\partial n} j(u) \cdot du = \frac{1}{4 \cdot \pi} \Omega_k(P)$$

Où  $\Omega_k(P)$  est l'angle sous lequel le point  $P$  voit l'élément  $k$ .

### III - 3 - 2 - Traitement des singularités géométriques :

Dans le cas des géométries à frontières lisses; on a dans chaque région étudiée autant d'inconnues que de noeuds de discrétisation de la surface, on écrit alors naturellement une équation intégrale centrée en chacun de ces noeuds [20].

Si par contre, il existe sur la surface des points géométriquement singuliers (arrêtes et points coniques en tridimensionnel, points anguleux en bidimensionnel), en ces points, la dérivée normale du potentiel n'est pas continue. Sa définition à l'aide des éléments finis fait appel à un poids différent par élément concerné, ce qui introduit des inconnues supplémentaires qu'il faut compenser par l'écriture d'autant d'équations intégrales.

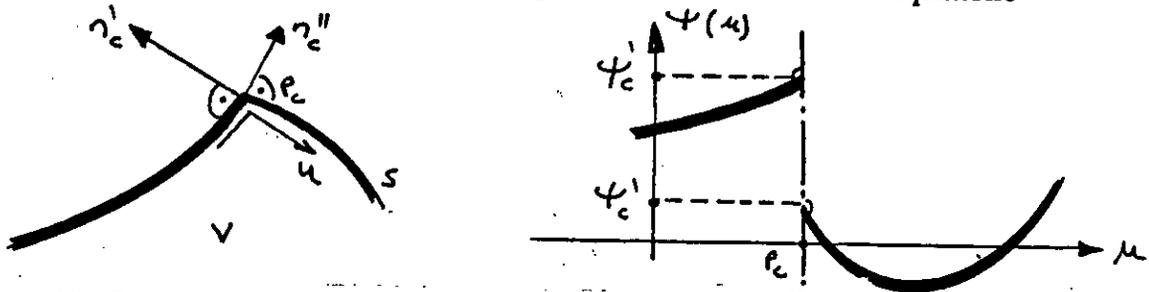
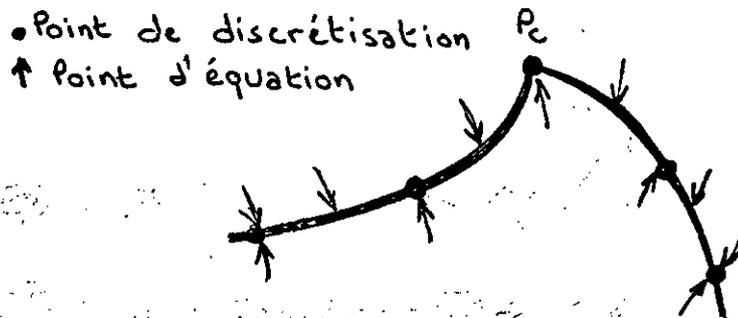


Figure 18 : Discontinuité de la dérivée normale du potentiel dans un angle.



Afin d'obtenir le meilleur conditionnement possible du système d'équations, nous répartissons régulièrement les équations nécessaires autour de l'angle.



**Figure 19 :** Ecriture d'une équation intégrale supplémentaire dans un angle.

### III-3-3- Calcul et rôle du facteur angulaire " C " [20] :

Le facteur angulaire "C" intervient dès l'écriture de l'identité de Green, il est proportionnel à l'angle (angle solide en bidimensionnel) sous lequel le point P, centre des noyaux de l'intégrale, voit la surface d'intégration S.

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si P est dans le volume correspondant} \\ 0 & \text{à l'extérieur} \\ 1/2 & \text{si P est un point régulier de s.} \end{cases}$$

Numériquement, C peut être évalué à partir de l'expression :

$$C = - \int_S \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

Sommant les coefficients du potentiel de l'équation intégrale (45) le calcul de C est intéressant pour les raisons suivantes :

- Lorsqu'une équation est écrite en un point singulier de la frontière, l'angle solide n'y est pas connu a priori.

- Aux points extrémités des éléments finis de frontières courbes, il apparaît en générale de " faux " points anguleux, jonctions de ces éléments, leur compensation par le calcul exacte du facteur C correspondant non pas à la frontière réelle, mais à sa représentation discrétisée, améliore les résultats de façon décisive.

### III - 3 - 4 - Exploitation des résultats :

La résolution du système d'équation intégrales de frontière fourni directement les valeurs du potentiel et du champ normal sur la frontière.



Le calcul du champ sur la surface est donc immédiat, ainsi que celui de toutes les grandeurs qui lui sont directement liées. Dans la majorité des cas, ce sont les grandeurs utiles.

Cependant, il s'avère parfois nécessaire de déterminer le potentiel ou le champ en dehors des frontières ayant servi à définir le problème.

Pour le calcul du potentiel, on utilise la formule (45). Le champ est évalué de la même manière à l'aide des gradients des noyaux.

$$-\text{grad } \phi|_p = \int_S \left[ \phi \text{ grad } \left( \frac{\partial G_p}{\partial n} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ grad } G_p \right] \cdot ds$$

En pratique, les deux calculs sont réalisés simultanément, ce qui rend leur coût acceptable. Les valeurs obtenues pour le champ sont d'une rare précision; elles ne résultent pas d'une approximation locale de la dérivée du potentiel, mais du calcul direct du champ créé par les sources surfaciques fictives de densité  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial n$ .

### III -4- Différences et comparaisons entre la M.E.F et la M.E.I.F [22 , 23 , 25] :

• **M.E.F** : Malgré sa souplesse et son immense champ d'application elle présente un grand nombre d'inconvénients surtout :

- quand le domaine est infini.
- quand apparaissent des singularités en des points ou certaines dérivées deviennent infinies.

• **M.E.I.F** : Elle présente beaucoup plus d'avantages, on peut citer :

- L'une des grandes différences entre la M.E.F et la M.E.I.F, est que la M.E.F discrétise le domaine en un nombre d'éléments pour déterminer les déplacements (densité électrique.....) dans tout le domaine. Tandis que la M.E.I.F discrétise seulement la frontière, et nous aurons en n'importe quel point de l'intérieur du domaine la solution cherchée. Nous pouvons conclure que le premier avantage est que la M.E.I.F engendre des matrices de petites dimensions faciles à résoudre.

- Un autre avantage de la M.E.I.F par rapport à la M.E.F est qu'elle s'adapte mieux pour les domaines infinis, tandis que la M.E.F peut résoudre les problèmes de matériaux complexes.

La M.E.I.F se prête mieux pour l'analyse du système de grandes dimensions.



- En utilisant dans la M.E.I.F uniquement la discrétisation de la frontière, nous aurons affaire à des matrices de petites dimensions, très peuplées et non symétriques, leur résolution est alors très lente.

Contrairement à la M.E.F qui engendre des matrices symétriques et non peuplées, que nous pouvons sauvegarder par ligne ou par colonne, leur résolution est plus rapide.

- La M.E.I.F analyse des problèmes avec une très grande concentration de contraintes par rapport à la M.E.F.

- La M.E.I.F; la dimension du problème étudié est réduite d'une unité. Pour un problème bidimensionnel, nous aurons une équation intégrale de frontière unidimensionnelle. Ceci vient du fait que les fonctions inconnues intervenant se trouvent sur la frontière est non à l'intérieur du domaine.

- L'équation intégrale de frontière est en elle même un exposé de la solution exacte du problème étudié. Les erreurs ne peuvent parvenir que de la manière avec laquelle la géométrie et les paramètres physiques sont approximés sur la frontière, d'une part, et des approximations numériques auxquelles nous aurons pour le calcul des intégrales, d'autre part.

- La réduction de la dimension du problème en M.E.I.F engendre une réduction des données, requises pour dérouler le problème par contre en M.E.F nous avons une très grande masse de données en entrée.

- L'inconvénient rencontré en utilisant la M.E.I.F est la singularité au niveau du calcul des intégrales.

#### **Notion de couplage :**

La M.E.I.F est l'une des méthodes les plus utilisées en E.statique en particulier dans la résolution des problèmes de matériaux non homogènes. Tandis que la M.E.F est un nouveau venu dans l'analyse numérique, mais elle a déjà fait preuve de résultats satisfaisants et promettants dans plusieurs domaines. Il est montré que la M.E.I.F est très avantageuse dans la résolution des problèmes de matériaux homogènes et linéaires dans un domaine infini.

Donc il est logique de coupler la M.E.F et la M.E.I.F pour en sortir une seule qui puisse profiter des avantages et remédier aux inconvénients de chacune et qu'elle puisse analyser les problèmes incluant les matrices non homogènes et complexes dans un domaine infini.

#### **Le cas le plus fréquent pour le couplage :**

Lorsque le domaine à étudier présente une ou des fissurations (c'est à dire des discontinuités dans le même matériau .....). Alors on procède avec la M.E.F dans l'extérieur de la fissure présente puisque elle s'adapte le mieux, et à l'intérieur, on utilise la M.E.I.F qui réduit la formulation uniquement sur les frontières de l'interface matériau - vide fissuré.



## IV. Méthode de simulation des charges.

### IV - 1 - Introduction :

Une autre méthode numérique devient largement et avec succès, utilisé actuellement pour calculer Les champs électriques à savoir: la méthode des charges équivalentes, bien que les fondamentaux de cette méthode peuvent être familiers à la majorité des ingénieurs électrotechniciens. Aussi, elle se base sur les méthodes de calcul des champs analytiques fréquemment utilisés, elle peut être utile pour passer en revue quelques fondamentaux des équations de Maxwell.

Cette méthode n'exige par la présence de contour fermé où le potentiel électrique doit être connu. Elle nécessite la connaissance des conditions aux limites des tensions, uniquement sur les électrodes. Elle s'applique donc particulièrement bien au calcul des champs électriques dans les installations extérieures.

### IV - 2 - Principes :

La méthode des charges équivalentes (fictives) dite aussi "méthode de simulation de charges", revient à remplacer les charges superficielles de chaque électrode par un ensemble discret de distributions des charges intérieures dont le type et la position sont choisis, mais dont la valeur est inconnue.

Le point important est que si l'on choisit certaines distributions de charges classiques. On dispose d'expressions analytiques explicites pour exprimer le champ et le potentiel dans le domaine  $\Omega$ . De plus, la nature discrète de cette méthode impose l'introduction d'un nombre assez élevé de charges fictives pour atteindre une précision raisonnable d'où la nécessité de l'utilisation de l'ordinateur.

### IV - 3 - Description de la méthode :

#### • Position du problème :

L'équation de Poisson peut être écrite, sous forme différentielle des équations de Maxwell [21] :

$$\text{div} (-\vec{\epsilon} \text{ grad } \phi) = \text{div } \vec{D} = \rho \quad \dots\dots\dots(46)$$

Cette équation peut être intégrée par le moyen d'un volume d'intégrale donnant :

$$\int_v \text{div } D \, dv = \oint_A D \, dA = \int_v \rho \, dv \quad \dots\dots\dots(47)$$



Ici le volume d'intégrale de la divergence est transformé sur une surface d'intégrale fermée  $A$  et ce volume d'intégrale appliqué à la densité de charge peut facilement être modifié avec la charge totale limitée par  $A$ .

L'équation (47) représente la loi de Gauss qui donne une solution exacte pour l'équation pour l'équation de Poisson, et plusieurs méthodes directes pour le calcul du champ se basent sur cette loi. Celle-ci est beaucoup plus facile à appliquer au moindre des cas où quelques symétries sur les conditions aux frontières sont apparues.

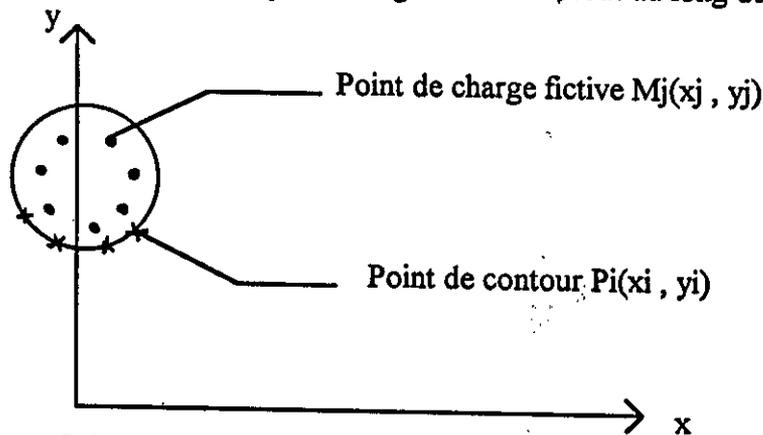
Cet avantage était utilisé en appliquant l'équation (47) pour calculer analytiquement quelques simples configurations du champ (domaine coaxial, cylindrique ou sphérique....) pour lesquels les intégrales de la partie gauche peuvent facilement être résolues convenablement aux symétries de conditions parvenant d'une concentration de distribution de charge linéique ou ponctuelles.

• **Quelques dispositions de charges fictives :**

Selon la nature du problème, on adopte pour chaque cas, des dispositions spatiales appropriées des charges fictives.

- **Champ bidimensionnel :**

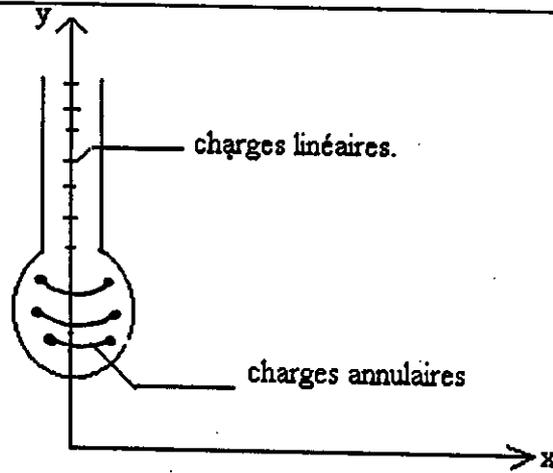
Choix de charges fictives linéique de longueur infinie tout au long du conducteur.



**Figure 20 - a :** Répartition des charges fictives dans un exemple de champ bidimensionnel.

- **Champ tridimensionnel à symétrie axiale :**

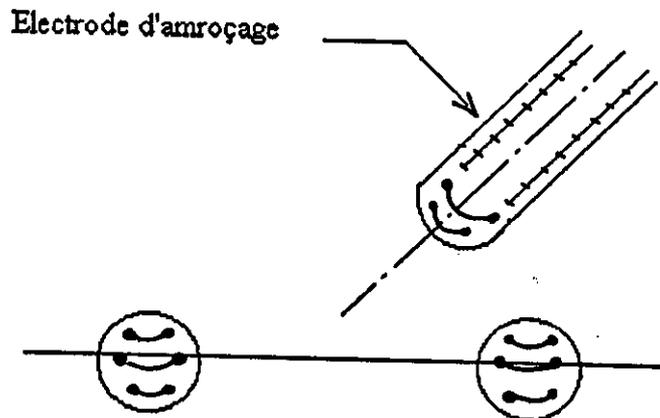
Choix de charges annulaires centrées sur l'axe de symétrie en plus de charges ponctuelles ou linéaires de longueur finie sur l'axe de symétrie.



**Figure 20 - b :** Répartition des charges fictives dans un exemple de champ tridimensionnel simple.

**- Champ tridimensionnel de forme arbitraire :**

Choix des charges annulaires de densité variable sur les contours en plus de charges linéaires de longueur finie parallèle aux axes de symétrie des électrodes.



**Figure 20 - c :** Répartition des charges fictives dans un exemple de champ tridimensionnel arbitraire.

**• Calcul du potentiel et du champ :**

Le principe de base de la M.C.S est très facile à formuler en utilisant le principe de superposition. Les fonction potentielles du champ de charges individuelles de n'importe quel type peuvent être trouvées par une sommation des potentiels scalaires résultant des charges individuelles.



Le potentiel et le champ sont donnés par :

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} q_j \quad \dots(48)$$

$$E_i = -\nabla \phi_i = -\sum_{j=1}^n [\nabla P_{ij}] q_j \quad \dots(49)$$

Où :  $q_j$  : la valeur inconnue de la charge individuelle se trouvant au point  $M_j(x_j, y_j)$ .

$P_{ij}$  : Le coefficient du potentiel qui ne dépend que de la distribution et de la position du point  $P_i(x_i, y_i)$ .

$n$  : Le nombre de charges introduites.

**Remarques :**

On traite uniquement le cas de la résolution de l'équation de Laplace, où on constate l'absence de charges d'espace.

Si  $n$  charges  $q_i$  sont assurées, on exige aussi au moins  $n$  potentiels connus pour résoudre l'équation (48) qui peut facilement être fait en identifiant les potentiels  $\phi_i$  avec  $n$  potentiels sur la surface des conducteurs (points de contour) qui sont adéquatement placés à une configuration d'électrodes donnée. On peut écrire  $\phi_i = \phi_o$  donc :

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} \cdot q_j = \phi_o \quad \dots\dots\dots(50)$$

Avec ces conditions aux limites, on obtient un système linéaire :

$$P \cdot q = \phi \quad \dots\dots\dots(51)$$

Sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix}$$

*Ce système sera résolu par une des méthodes classiques et les charges  $q_j$  sont ainsi calculées. Le potentiel et le champ en tout point du domaine y compris la surface des électrodes seront alors calculés par les expressions (48) et (49).*

Ou encore :  $[P_{ij}] \{q_j\} = \{\phi_i\}$



Avec :  $[P_{ij}]$  : matrice des coefficients potentiels.  
 $\{q_j\}$  : vecteur de charges fictives introduites.  
 $\{\phi_i\}$  : Vecteur potentiel connu sur la surface des électrodes.

• **Vérification des calculs et erreur :**

Après la résolution du système, on choisit  $n$  autres points de vérification  $P_{vi}$  situés sur le contour des électrodes tel que :

$$[\phi_{vi}] = [P_{ij}] [q_j]$$

Si les valeurs des potentiels de vérification  $\phi_{vi}$ , sont très différents des valeurs  $\phi_i$ , on change alors l'arrangement spatial de  $n$  charges fictives et on s'arrange pour que toutes les différences :

$$\Delta \phi_i = |\phi_{vi} - \phi_i| < \varepsilon$$

$\varepsilon$  : quantité fixée au départ et qui reflète la précision de l'optimisation de la M.S.C.

**Remarque :**

- Sides électrodes flottantes sont présentes, dont les potentiels sont uniformes et inconnus, le système linéaire (51) est modifié pour inclure la condition supplémentaire que somme des charges internes de chaque électrode flottante est nulle [25].

- Lorsque plusieurs diélectriques sont présents, des expressions différentes mais similaires aux équations (48) et (49) sont utilisées pour représenter le potentiel et le champ dans chacun des diélectriques (l'air étant considéré alors comme l'un des diélectriques). Par exemple si  $p$  (point) appartient à une région diélectrique  $D$ , les charges appartenant à  $D$  ne sont pas prises en compte :

$$\phi_i(p) = \sum_{q_j \notin D} P_{ij}(r) \cdot q_j$$

$$E_i(r) = \sum_{q_j \notin D} \nabla P_{ij}(r) \cdot q_j$$

Des conditions supplémentaires exprimant la continuité du potentiel et explicitant la discontinuité de la composante normale du champ, doivent être satisfaites sur toute interface entre deux diélectrique [1] si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux diélectriques adjacentes de permittivités scalaires  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , ces conditions conduisent à :

$$\sum_{q_j \in D_1} P_{ij} \cdot q_j = \sum_{q_j \in D_2} P_{ij} \cdot q_j$$

$$\varepsilon_1 \sum_{q_j \in D_1} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} P_{ij} \cdot q_j = \varepsilon_2 \sum_{q_j \in D_2} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} P_{ij} \cdot q_j \quad \text{pour tout point } p$$

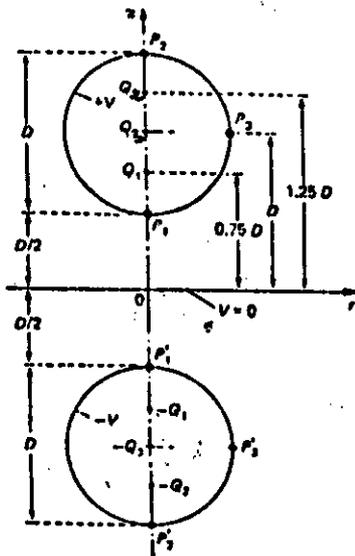


#### IV - 4 - La mise en oeuvre de la M.S.C :

- La description de la géométrie des électrodes et des interfaces diélectriques.
- La mise en place des charges équivalentes.
- La construction du système linéaire (51) et sa résolution numérique fournissant la valeur des charges.
- Le calcul des potentiels et champs désirés à l'aide des équations. (48) et (49).
- Le calcul des surfaces équipotentiels obtenues numériquement représentant les surfaces des électrodes et la comparaison avec les surfaces vraies afin de vérifier la précision de la solution.

#### IV - 5 - Exemple de calcul des coefficients $P_{ij}$ : [2]

On prend un système d'électrodes sphère - sphère symétrique et chargé à  $\pm V$ , cette condition implique le potentiel zéro pour le plan  $z = 0$  (espace diélectrique illimité).



**Figure 21 :** Arrangement sphère - sphère.

Ce simple exemple deviendra difficile à calculer avec la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies, comme l'espace est illimité.

On considère le cas de 2 charges ponctuelles  $\pm Q_1 \pm Q_2$  symétriquement placées le long des axes à  $r = 0$  :

$$z = \pm 0,75 / 1,25 D \text{ et seulement 2 points de contour } P1, P2 \text{ à } r = 0$$



On a :  $V = 0$  à  $Z = 0$

Pour faciliter les calculs on procède à la méthode des images correspondant à une géométrie sphère - plan .

La relation du potentiel à une charge ponctuelle  $Q$  distante de  $d$  est donnée par :

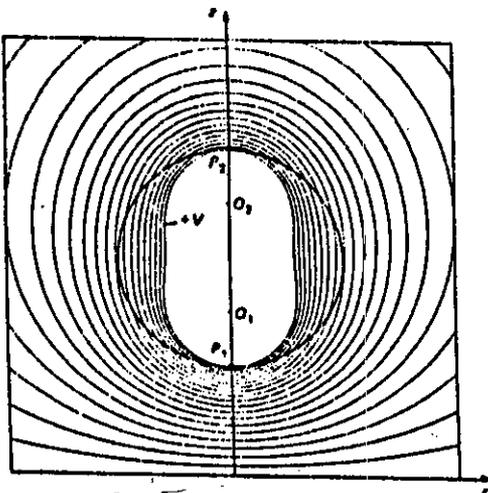
$$\phi = \frac{Q}{4 \pi \epsilon} \frac{1}{d} = P \cdot Q \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{4 \pi \epsilon d}$$

Ainsi, les coefficients potentiels  $P_{ij}$  dépendent de la distance  $d$  entre les charges  $Q_j$  et le contour  $P_i$ . Pour notre système de coordonnées  $(r - z)$  les coefficients peuvent être exprimés d'une simple considération géométrique par :

$$P = \frac{1}{4 \pi \epsilon \sqrt{r_i^2 + (Z_i - Z_j)^2}}$$

Les lignes équipotentiels sont montrés sur la figure 22 pour la partie positive d'axe des  $z$ .

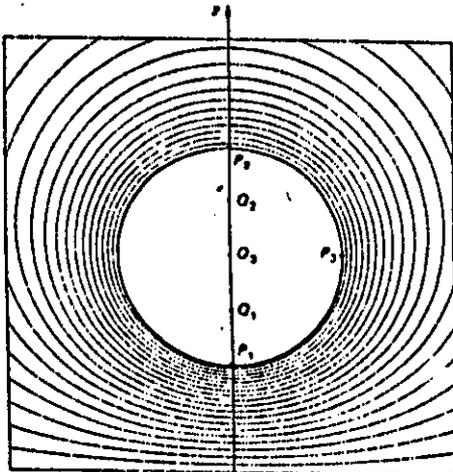
Le résultat peut apparaître décevant (trompé) , à partir de la ligne équipotentielle  $+ V_0$  il s'écarte grossièrement du cercle représentant la coupe transversale de la sphère.



**Figure 22 :** Lignes équipotentiels résultat de 2 charges ponctuelles et 2 points de contour.

Par conséquent, on peut additionner une 3ème charge ponctuelle  $Q_3$  et u point de contour  $P_3$  et refaire les calculs à nouveau.

Les nouveaux résultats sont montrés sur la figure 23.

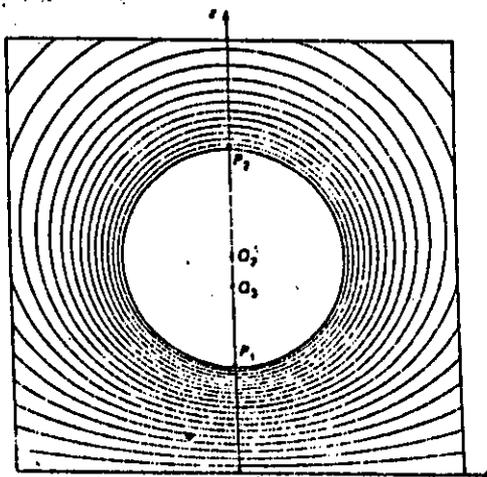


**Figure 23 :** Lignes équipotentiels résultant de 3 charges ponctuelles et de 3 points de contour .

L'écart entre le contour réel de l'électrode et la ligne équipotentielle calculée  $\phi = + V$  est maintenant très petit c'est une erreur difficile à remarquer.

On constate alors, que la simulation était largement améliorée et il est facile de voir que plus de charges fictives introduites (grand nombre) plus de précision qui modifie les calculs.

Nous pouvons , toutefois, trouver des résultats excellents en utilisant seulement 2 charges ponctuelles placées à leurs positions propres (figure 24) ; où de nouveau 2 charges et



**Figure 24 :** Lignes équipotentiels résultant de 2 charges simulées placées à leurs propres positions

2 points de contour étaient utilisés pour résoudre le problème , on remarque que l'écart est trop faible pour le potentiel  $\phi = V$  .



---

**Constatation :**

Ce simple exemple montre deux caractéristiques essentielles concernant une application effective de la M.S.C :

- La première reliée à la sélection propre des types de charges simulées.
- La seconde reliée à l'arrangement convenable des charges et points de contour.



## V - Méthode de "Monté Carlo" .

### V - 1 - Introduction et principe :

La méthode de "Monté Carlo" est une méthode numérique de base statistique, dite aussi " méthode du parcours aléatoires flottant " . Elle est très bien adaptée aux calculs de potentiels et de champs.

Pour estimer un potentiel Laplacien  $\phi(r_0)$  en tout point  $r_0$  du domaine  $\Omega$  satisfaisant aux conditions aux limites de 'Dirichlet' , on construit une série de parcours aléatoires suivant les règles ci dessous.

### V - 2 - Règles de construction des parcours aléatoires : [16]

- Chaque parcours commence à  $r_0$ .
- La longueur du pas suivant d'un parcours qui atteint un point  $r$  est égale à la distance  $d(r, \Gamma)$  entre  $r$  et le point le plus proche de la frontière  $\Gamma$ .
- La direction de chaque pas de chaque parcours est choisie au hasard.
- Chaque parcours  $j$  s'achève lorsqu'il atteint un point situé par rapport à la frontière  $\Gamma$  à une distance inférieure à une valeur  $\delta$  fixée à l'avance, le point de  $\Gamma$  le plus voisin étant alors noté  $r^*$ .

### V - 3 - Etapes de calcul de la méthode :

On peut montrer que la moyenne :

$$\hat{\phi}(r_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi(r_j^*) \quad \dots\dots\dots(52)$$

Est un estimateur statique du potentiel cherché  $\phi(r_0)$  qui converge vers la valeur vraie si le nombre  $n$  de parcours aléatoires augmente.

L'erreur quadratique moyenne d'échantillonnage de potentiels calculés pour l'équation (52) est estimée par :

$$\hat{\sigma}[\hat{\phi}(r_0)] = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \{\phi^2(r_j^*) - \hat{\phi}^2(r_0)\} / (n - 1)} \quad \dots\dots\dots(53)$$

**Remarque :**

La méthode de parcours aléatoire flottant est plus efficace que celle, mieux connue, de parcours aléatoire fixe pour laquelle le parcours va au hasard de noeud en noeud choisis sur un maillage rectangulaire, car la méthode du parcours aléatoire flottant nécessite moins de pas pour atteindre la frontière du domaine [16].

**Pondération des moyennes statistiques :**

Il est possible d'augmenter l'information provenant d'une série donnée de parcours aléatoires, et ainsi donc d'améliorer l'efficacité du calcul en généralisant la procédure des moyennes [52].

Un estimateur  $\hat{\phi}(r)$  du potentiel en un point  $r$  voisin du point de départ  $r_0$  du parcours aléatoire est donné par une moyenne convenablement pondérée :

$$\hat{\phi}(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_j(r) \cdot \phi(r_j^*) \quad \dots\dots(54)$$

Les poids  $w_j(r)$  sont des fonctions analytiques qui dépendent de  $r$ , de l'histoire du parcours aléatoire.

des estimateurs du champ sont obtenus par différentiation analytique directe de l'équation (54).

**L'expression du champ :**

$$\hat{E}(r) = -\nabla\hat{\phi}(r) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \nabla w_j(r) \cdot \phi(r_j^*) \quad \dots\dots(55)$$

Les expressions (54) et (55) sont fiables pour des points  $r$  distants du point d'origine  $r_0$  jusqu'à environ la moitié de la distance  $d(r_0, \Gamma^*)$  de  $r_0$  à la frontière  $\Gamma$ .

Dans la plupart des problèmes pratiques, il est nécessaires de générer des séries de parcours aléatoires à partir des points origines différents pour obtenir des résultats qui sont valides lorsque  $r$  varie sur toute la région intéressée [16].

**V - 4 - Amélioration de l'efficacité de la méthode :**

Une autre technique possible pour cet objectif est d'utiliser une approximation initiale Laplacienne  $\phi_A$ . La procédure des parcours aléatoires est alors utilisée plus pour améliorer l'approximation initiale que pour calculer  $\phi$  directement.

Les estimations du potentiel et du champ deviennent :

$$\hat{\phi}(r) = \phi_A(r) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_j(r) \cdot \{ \phi(r_j^*) - \phi_A(r_j^*) \} \quad \dots\dots(56)$$



$$\hat{E}(r) = -\nabla \hat{\phi}(r) = -\nabla \phi_A(r) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \nabla w_j(r) \cdot \{ \phi(r_j^*) - \phi_A(r_j^*) \} \quad \dots\dots(57)$$

Pour cet usage, une approximation même grossière est suffisante, une approximation  $\phi_A$  satisfait aux conditions aux limites sur  $\Gamma$  à 10% près va améliorer l'efficacité du calcul d'un facteur 100. Une valeur acceptable de  $\phi_A$  peut en général être obtenue par une méthode des charges fictives (MSC) très simplifiée et utilisant par exemple moins de dix charges équivalentes.

Des estimateurs de l'erreur statistique d'échantillonnage sur les estimateurs (56) et (57) peuvent être obtenus par analogie avec l'équation (53).

### **V - 5 - Conditions aux limites :**

Il est théoriquement possible d'étendre la méthode du parcours aléatoire flottant pour prendre en compte des conditions aux limites sur les dérivées correspondant aux conditions de 'Newmann' et également pour tenir compte de distributions de charges d'espace, d'électrodes flottantes et de matériaux diélectriques. Pour ce cas, les règles régissant les parcours aléatoires sont plus complexes [16].

### **V - 6 - Mise en oeuvre sur ordinateur :**

- La recherche d'une solution approximative  $\phi_A$  par une méthode des charges équivalente simplifiée.

- La construction d'une ou plusieurs séries de parcours aléatoires.

- Le calcul par l'intermédiaire des équations (56) et (57) des potentiels et champs obtenus, ainsi que des estimations des erreurs d'échantillonnage du calcul.

Le calcul est organisé autour de la construction pas par pas des parcours aléatoires. A chaque étape  $r$  de chaque parcours, la direction du pas suivant est choisie au hasard d'après une série de nombres aléatoires engendrés par le calculateur et sa longueur calculée comme étant la distance  $d(r, \Gamma)$  de  $r$  à la frontière  $\Gamma$ .

Dans ce but, la frontière est définie comme étant un assemblage de surfaces individuelles de forme élémentaire simple. Même les géométries les plus compliquées peuvent en général être représentées par dix ou vingt sphères, cônes, cylindres, rectangles, boîtes ...etc convenablement choisis par l'utilisateur dans une bibliothèque de formes de base.

Les distances  $d(r, \Gamma_a)$  de  $r$  à chaque surface élémentaire sont alors données par des formules analytiques et la longueur du pas  $d(r, \Gamma)$  qui est la plus petite des distances individuelles  $d(r, \Gamma_a)$  est ainsi obtenue très économiquement.



## VI - Comparaison des méthodes .

Nous récapitulons dans le tableau ci - dessous , les critères et les propriétés des différentes méthodes exposées. Ceci, nous permet d'avoir une comparaison qualitative pour le but de bien utiliser une méthode par rapport aux autres.

Méthodes Critères	M.D.F	M.E.F	M.E.I.F	M.S.C	M.M.C
Charges d'espace	oui	oui	oui	oui	non
Electrodes flottantes	oui	oui	oui	oui	non
Diélectrique	oui	oui	oui	oui	non
Taille du domaine	limitée	limitée	limitée	quelconque	quelconque
Frontières complexes	difficile	oui	oui	difficile	oui
Champ à la surface	oui	oui	oui	oui	difficile
Solution recherchée	tout le domaine	tout le domaine	tout le domaine	tout le domaine	région limitée
Volume des données	important	important	faible	faible	faible
Ressources en calcul nécessaires	importantes	importantes	importantes	importantes	faible

" L'esprit humain ne peut comprendre en une seule opération la complexité de son environnement et celle de ses propres créations "

(M.I.T - Boston - USA) R. Feynman.

" La nature de l'homme est un mystère impénétrable à l'homme même, quand il n'est éclairé que par la raison seule, et les plus grands génies [.....] ne parviennent que trop souvent à en savoir un peu moins que tout le reste des hommes. "

(Idées et sensations ) Jonathan Swift.

## Chapitre deux :

# Influence des barrières

## isolantes

" Une erreur est d'autant plus dangereuse qu'elle contient plus de vérité . "

(Une saison en enfer) Paul Veron.

"Les auteurs les plus originaux d'aujourd'hui ne sont pas ceux qui apportent du nouveau, mais ceux qui savent dire des choses connues comme si elles n'avaient jamais été dites avant eux ."



## Introduction.

Le développement industriel exige de plus en plus une grande consommation d'énergie. Pour faire transiter une puissance électrique élevée, il faudrait utiliser des distances d'isolement importantes, ce qui va engendrer des contraintes du point de vue pratique et économique.

Cette difficulté résulte de la caractéristique non linéaire 'tension disruptive - distance'. A partir d'une certaine limite, l'augmentation de la distance dans l'air influence très peu sur la tension disruptive.

Pour cela, l'un des moyens utilisés pour diminuer ces distances d'un côté, et pouvoir augmenter la tension de l'autre, était l'emploi de barrières isolantes entre les parties sous tension, la terre.

Mais l'utilisation de ces barrières isolantes doit être judicieuse. En effet, on doit tenir compte de plusieurs paramètres propres à la nature de l'écran isolant, à la géométrie du système et aux conditions d'exploitation. IL a été montré du point de vue rigidité diélectrique, que le système pointe plan est le moins rigide. Ce système est caractérisé par les tensions disruptives les plus basses. En plus, il correspond bien aux systèmes isolants réels. Sous une polarité positive, ce système se trouve beaucoup moins rigide. Cela traduit l'importance que revêt l'utilisation d'une telle configuration dans les études liées à la rigidité diélectrique de l'air.



## 2 - I.

### Rigidité diélectrique des intervalles d'air pointe-plan.

#### I - 1 - Généralités :

Le claquage électrique des diélectrique fait l'objet d'études très importantes. Actuellement, dans l'industrie, on constate souvent que le même matériau présente des rigidités très variables suivant le milieu environnant et les conditions d'exploitation. Cependant, même dans le cas où les conditions d'utilisation et les distributions du champ sont apparemment les mêmes, on s'aperçoit que le claquage se produit pour des tensions appliquées très variables. En outre, ce claquage intervient pour des intensités de champ beaucoup plus faibles que celles que l'on trouvait pour un matériau pur et dans les conditions de laboratoire.

#### I - 1 - 1 - L'air isolant :

On entend par matériau isolant, les matériaux qui présentent une très grande résistance au passage du courant électrique et dont la conductibilité est pratiquement nulle.

L'air est en général un bon isolant. Toutefois, mêmes si ses molécules sont neutres, elles peuvent être soumises incessamment à des agents ionisants extérieurs, tels que les radiations cosmiques, les rayons X ou la radioactivité naturelle.

Ainsi, on voit qu'il existe toujours une possibilité donnant naissance à un certain nombre de charges électriques libres dans le gaz. Ce fait explique que les gaz jouant le rôle d'isolants parfaits sont rares.

On peut néanmoins trouver des gaz dont la conductivité électrique est très réduite.

#### I - 1 - 2 - Rigidité :

En élevant la tension graduellement entre deux électrodes séparées par un matériau isolant, on provoque un éclatement entre les deux électrodes sous forme d'étincelle qui perce l'isolant.

La tension perforant un isolant par unité d'épaisseur et appelée "Rigidité diélectrique". On parle aussi de tension de perforation ou de tension disruptive et de claquage de l'isolant.

La rigidité diélectrique peut se définir comme étant le quotient de la tension de perforation par l'épaisseur de l'isolant. Elle est plus élevée pour des faibles épaisseurs. La



valeur de celle - ci peut être influencée par plusieurs paramètres dont l'épaisseur, la forme des électrodes et leurs polarités, ainsi que la forme et la durée d'application de la tension.

Les essais de rigidité diélectrique doivent se faire dans des conditions déterminées, définies par les normes.

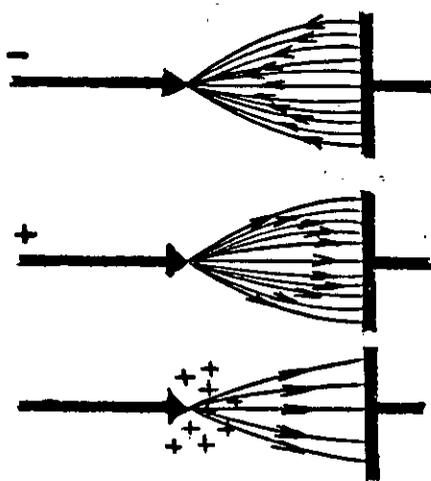
### I - 1 - 3 - Arrangement pointe - plan :

L'air est largement rencontré comme unique isolation entre électrodes dans la technique de haute - tension. Les électrodes peuvent être soit les parties métalliques sous tension de différents appareillages (transformateurs , disjoncteurs , .....), soit aussi des conducteurs de lignes aériennes ou des bornes à haute tension dans les laboratoires d'essais.

Le système pointe - plan se constitue de :

- L'électrode pointe : c'est l'électrode haute tension, sous forme de tube cylindrique en métal qui est terminé par une pointe conique.
- L'électrode plane : C'est une plaque métallique (circulaire généralement) mise à la terre

Ces deux électrodes sont séparées d'une distance "d" qui représente l'intervalle d'air .



Quand la pointe est négative, elle est le siège d'avalanche électrique, comme dans un champ homogène.

Quand la pointe est positive, la charge spatiale positive diminuera le champ avant la décharge à proximité de la pointe positive.

La présence de charges d'espace positives et due au fait que les ions positifs se déplacent moins vite que les électrons, leurs masses étant plus grandes .

**Figure 25 :** Influence de la charge d'espace.

### I - 1 - 4 - Types de tension :

Dans des conditions atmosphériques données, la disruption de l'air dépend largement de la forme des électrodes et du genre de tension appliquée.



En pratique, la rupture diélectrique de l'air se manifeste aux plus faibles tensions quand la pointe est positive. Le choix des distances d'isolement est en générale basé sur les résultats obtenus avec les intervalles d'air pointe - plan soumis à la contrainte de tension la plus défavorable. Cette contrainte est représentée pour les longs intervalles d'air, par les chocs positifs de manoeuvres à durée de front relativement longue.

En effet on distingue les trois types de tension suivants :

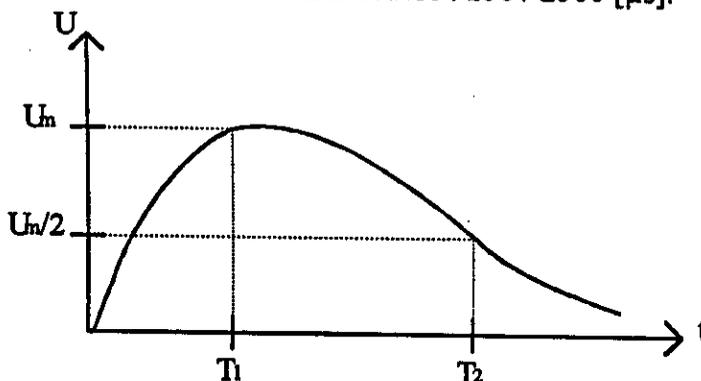
- Tension continue : application rare.
- Tension alternative : c'est une haute tension alternative à fréquence industrielle (50 Hz) fournie par un transformateur d'essais (généralement) de grande puissance.
- Tension impulsionnelle : c'est le type de tension le plus utilisé que ce soit en choc de foudre ou de manoeuvre.

On désigne sous le nom de tension de choc, ou impulsion, une tension transitoire unidirectionnelle de très courte durée qui , sans oscillations appréciables, croit rapidement jusqu'à une valeur maximale et décroît ensuite moins rapidement jusqu'à zéro. Elle est délivrée par un générateur de choc et correspond approximativement à la forme d'onde dont l'équation est :

$$U = K \cdot U_{\text{m}} (e^{-t/\tau_2} - e^{-t/\tau_1}).$$

Elle se caractérise par :

- Sa polarité.
- Sa valeur de crête (ou amplitude).
- La durée de front conventionnelle ( $T_1$ ).
- La durée conventionnelle de la mi - amplitude ( $T_2$ ). Conventionnellement, on les représente sous la forme abrégée :  $T_1 / T_2$  .
- La tension de choc de foudre : 1,2 / 50 [ $\mu\text{s}$ ].
- La tension de choc de manoeuvre : 250 / 2500 [ $\mu\text{s}$ ].



**Figure 26 :** Forme d'une onde impulsionnelle.



### I - 2 - Mécanisme de décharge dans l'air :

Aux basses pressions, les libres parcours moyens des électrons sont très longs et les probabilités de collisions sont faibles et cela d'autant plus que la pression est basse.

Sous vide, l'ionisation par choc est impossible, l'arrachement des électrons à partir des électrodes demande une valeur du champ très élevée .

Aux hautes pressions, les libres parcours moyens sont si courts que les électrons ne peuvent acquérir une grande énergie entre deux collisions successives et cela d'autant moins que la pression est élevée.

Aux pression moyennes la tension  $v_0 = f(d, p)$  passera par un minimum . Ceci résulte de la loi de 'Pasher ' [43] .

#### I - 2 - 1- Mécanisme de 'Tounsend ' :

En champ uniforme et aux faibles p.d, le phénomène de décharge est expliqué par la théorie de " Tounsend" [27]. Il explique que sous l'action du champ électrique appliqué, certains électrons libres présents dans le gaz acquièrent une énergie suffisante pour ioniser des molécules neutres. Au cours de leur déplacement, ils créent donc de nouveaux électrons susceptibles à leur tour d'ioniser le gaz.

Cette première phase d'ionisation est dite processus  $\alpha$  ; où  $\alpha$  est le premier coefficient de "Tounsend", qui est défini comme étant le nombre de chocs non élastiques sur un parcours de 1 [cm] dans la direction du champ, "Tounsend" a défini un second coefficient appelé  $\gamma$  qui représente le rapport du nombre d'électrons émis par la cathode au nombre d'ions positifs qui la bombardent.

Le maintien de la décharge se réalise une fois le critère suivant est rempli :

$$\gamma \cdot (e^{\alpha d} - 1) \geq 1; \text{ où } d \text{ est la distance inter - électrodes.}$$

La figure 27 représente la caractéristique 'courant - tension' décrivant ce mécanisme.

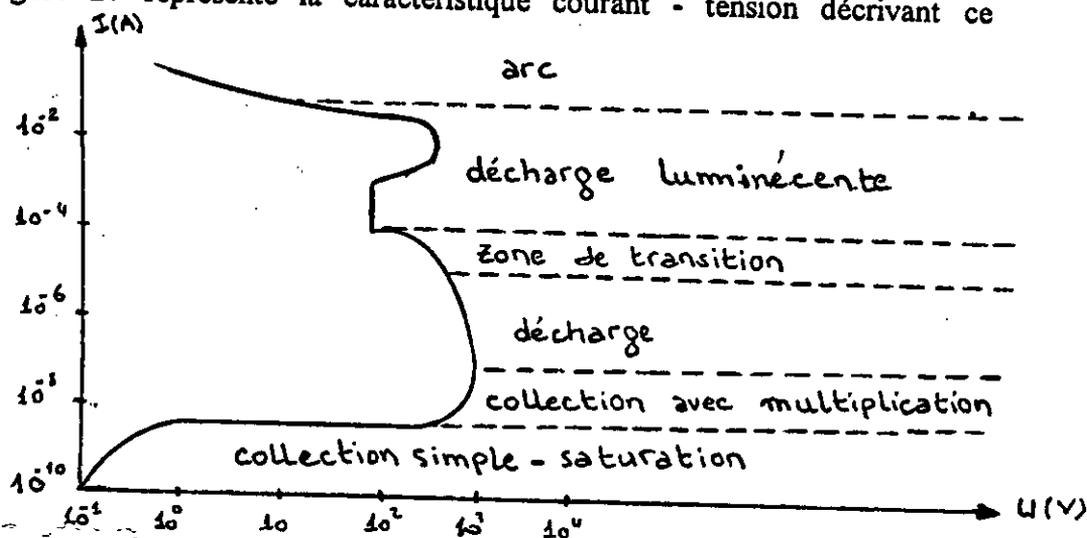


Figure 27 : Caractéristique schématique d'une décharge gazeuse [27].

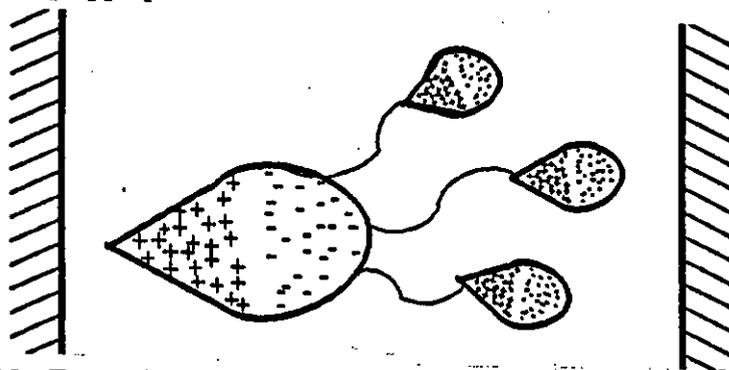


### I - 2 - 2 - Mécanisme des streamers :

Aux grandes p.d, le phénomène de décharge n'est plus celui proposé par 'Tounsend' . Selon les travaux de recherche de "Meek" , "Raether" et "loeb" [28 , 30 , 31], la décharge s'effectue selon la théorie des streamers.

Quand une avalanche présente une certaine taille critique, la combinaison du champ due aux charges d'espace et du champ électrique appliqué conduit à une ionisation intense et à une excitation des particules de gaz autour de la tête d'avalanche. Une émission des photons peut avoir lieu et conduit à la formation d'électrons libres par le processus de photo ionisation [40 , 42] .

Sous l'influence du champ électrique , ces électrons vont produire de la lumière, le processus conduit au développement rapide d'un canal de plasma à travers l'intervalle (fig 28). la condition qui assure le passage d'une avalanche au streamers est remplie lorsque l'intensité du champ électrique, due aux charges d'espace, est du même ordre de grandeur que le champ appliqué entre électrodes.



**Figure 28 :** Formation d'avalanches secondaires par photo - ionisation.

### I - 2 - 3 - Amorçage des petits intervalles d'air pointe - plan :

En champ non uniforme, les phénomènes apparaissent entre l'application de tension et l'amorçage sont beaucoup plus compliqués que dans le cas où le champ est uniforme.

Pour le système pointe - plan, le champ à la pointe aura pour effet la création des charges d'espace qui entraînent une forte modification de la répartition du champ.

Quand la pointe est positive, les charges d'espace positives diminuent le champ à proximité de la pointe et l'augmentent entre elles et le plan, d'où la facilité de formation d'un canal d'étincelle [62 , 65].

Les phénomènes de prédécharge pouvant exister sont difficiles à interpréter en détails. Ils sont caractérisés par des impulsions de courant ayant différentes fréquences



[44] et leur existence dépendra, pour une distance donnée, du rayon de courbure de la pointe, de la précision, la température et aussi de l'humidité quand la pointe est positive.

En général, dans les conditions normales, lorsque la tension atteint un certain niveau :  $U = U_0$ , on observe un effet couronne au niveau de la pointe, ensuite pour  $U > U_0$ , des décharges en aigrettes et finalement (à  $U = U_c$ ) l'étincelle à lieu lorsque les décharges précédentes auraient atteint le plan.

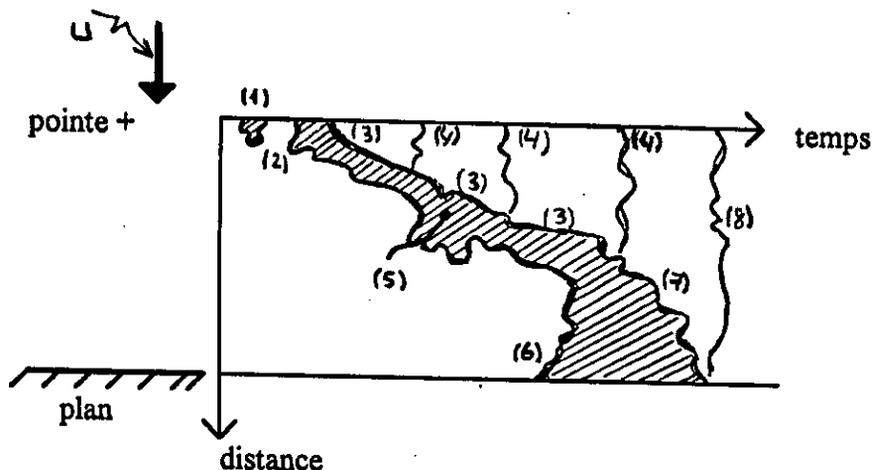
En pratique, c'est la tension à fréquence industrielle qui donne l'amorçage critique. L'étincelle dans ce cas a lieu quand la tension passe par son maximum (pour la polarité positive de la pointe) [65].

#### I - 2 - 4 - Amorçage des longs intervalles d'air pointe - plan :

Pour les grandes distances, les conditions les plus défavorables, concernant la tenue diélectrique de l'air, sont introduits par les ondes unidirectionnelles de polarité positive et de durée de front longue.

Le système pointe - plan reste toujours pris comme référence, vu qu' il donne la tension disruptive minimale dans le cas de la positive. Les phénomènes conduisant à l'amorçage dépendront, dans ce cas, fortement du rayon de courbure de la pointe, du niveau de la tension appliquée et des conditions d'ambiance (notamment l'humidité).

Nous présenterons les différentes étapes de la décharge à la figure (29).



**Figure 29 :** Développement du leader [43].

- 1 : Premier effet de couronne , 2 : zone sombre , 3 : Tête du leader ,  
 4 : Reillumination de leader , 5 : Canal du leader , 6 : Arrivée de streamers sur le plan  
 7 : Départ du sant final , 8 : Canal de décharge.

Nous observons en premier lieu pour  $U > U_{i0}$  (tension de seuil) un premier effet de couronne après lequel une charge d'espace positive en excès reste près de la pointe, engendrant une modification du champ électrostatique et empêchant toute ionisation



nouvelle durant un certain temps; période sombre. L'apparition de cette zone est liée à la divergence du champ électrique : plus la longueur de l'intervalle est grande ou bien le rayon de courbure de la pointe est faible, plus il est certain d'avoir une ou plusieurs zones sombres.

Après cette période sombre, un canal lumineux apparaît "leader", ayant un trajet irrégulier et se déplaçant de quelques centimètres par  $[\mu s]$ . Durant la propagation de ce leader. On peut observer aussi des reilluminations soudaines du canal du leader, liées à l'humidité absolue de l'air, et pouvant l'être aussi à la forme des électrodes et la pente de la tension appliquée .

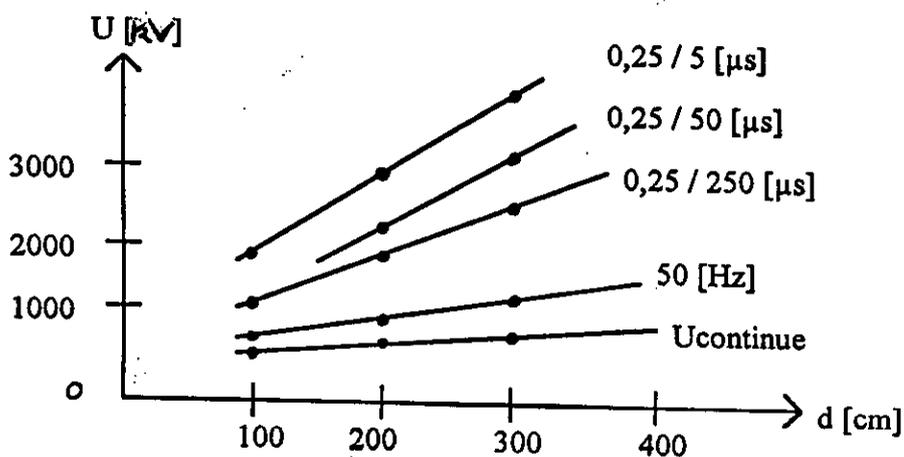
Enfin, au moment où les 'streamers' d'effet de couronne atteignent le plan, la vitesse de l'extrémité du leader s'accroît à peu près exponentiellement et la décharge conduit au claquage. Cette période où la décharge ne s'arrête pas d'elle même, correspond au saut final. A la fin apparaît un canal de décharge véhiculant le courant de court - circuit de la source de haute tension.

### I - 2 - 5 - Amorçage en champ non uniforme :

Le mécanisme de décharge dans l'air en champs non uniforme est le même que celui , décrit en (I - 2 - 2). C'est dans le système pointe - plan que la tension disruptive de l'air est la plus faible et que l'influence de la polarité de l'électrode pointue peut être observée.

Pour le système pointe - plan par exemple, du fait de l'intensité très élevée du champ au niveau de l'électrode pinte, la décharge est précédée d'un effet couronne apparaissant au voisinage de la pointe. Avant l'amorçage une certaine masse d'air est préalablement ionisée [27].

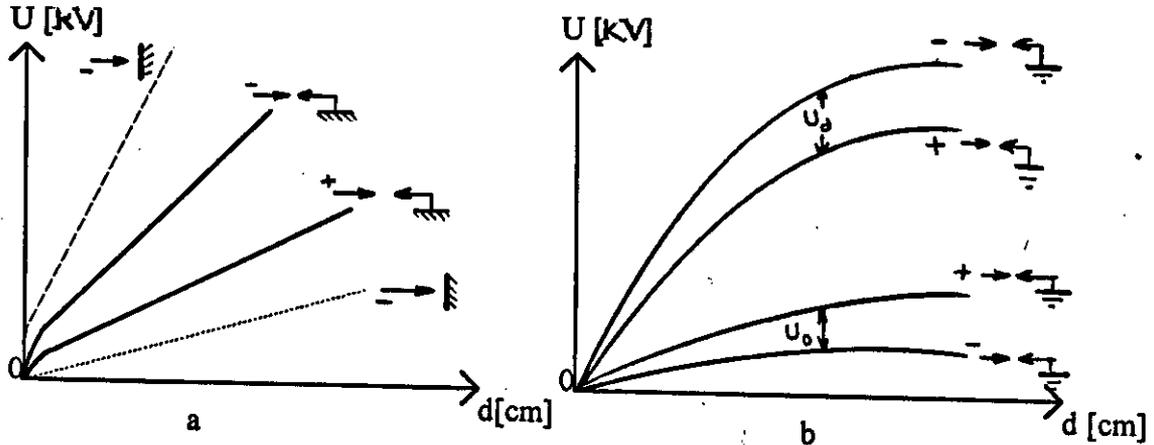
En champ divergeant, il se produit un retard à l'amorçage d'autant plus grand que le champ s'éloigne d'avantage de l'uniformité et pour un écartement donné des électrodes, la tension d'amorçage est plus grande pour une tension de choc que pour une tension continue ou alternative (50 [Hz] - figure 30).



**Figure 30 :** Tension minimale de l'étincelle pour des différentes formes d'onde  
- Polarité positive - [64]



Ainsi , des études qui ont été faites, ont montré l'influence de la polarité sur le processus de développement de la décharge (figure 31) . Ceci nous conduit à présenter les processus de décharges des deux cas [32].

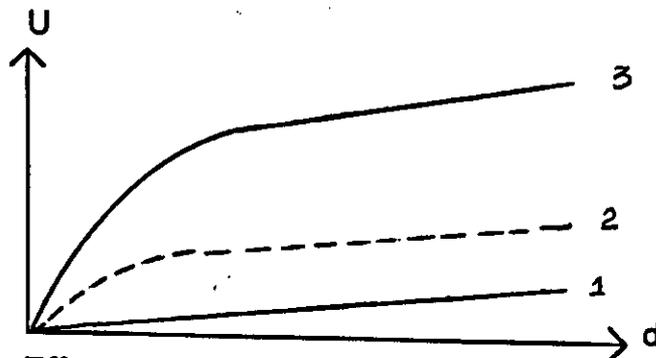


**Figure 31 :** Influence de la polarité sur l'apparition de l'effet couronne et la disruption.

**\* Cas où la pointe est positive :**

Il faut qu'une tension suffisante soit maintenue entre les électrodes pour qu'un premier électron se dirigeant vers la pointe, entre en collision non élastique avec des molécules neutres et par conséquent, active le processus. Une fois ces conditions remplies, on peut observer au voisinage de la pointe un effet de couronne ensuite des aigrettes et finalement, la décharge principale portant vers la cathode (figure 32).

La figure 33 représente la variation de l'intensité du champ dans l'intervalle entre les électrodes avec et sans charges d'espace. Avec charges d'espaces, au niveau de la pointe, le champ se trouve diminué et , au niveau du plan, au contraire, le champ est augmenté.



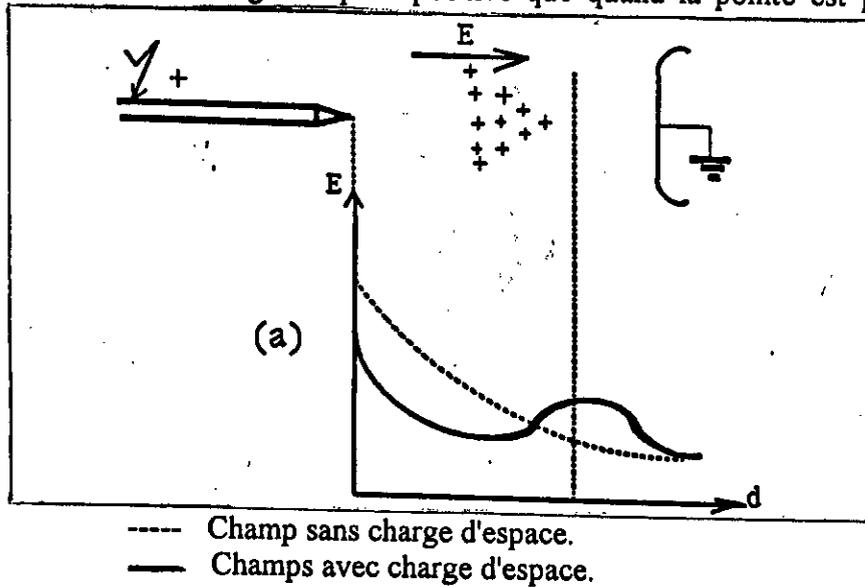
1 : Effet couronne. 2 : Aigrettes. 3 : Etincelle.

**Figure 32 :** Observation du processus de décharge dans un système pointe positive - plan



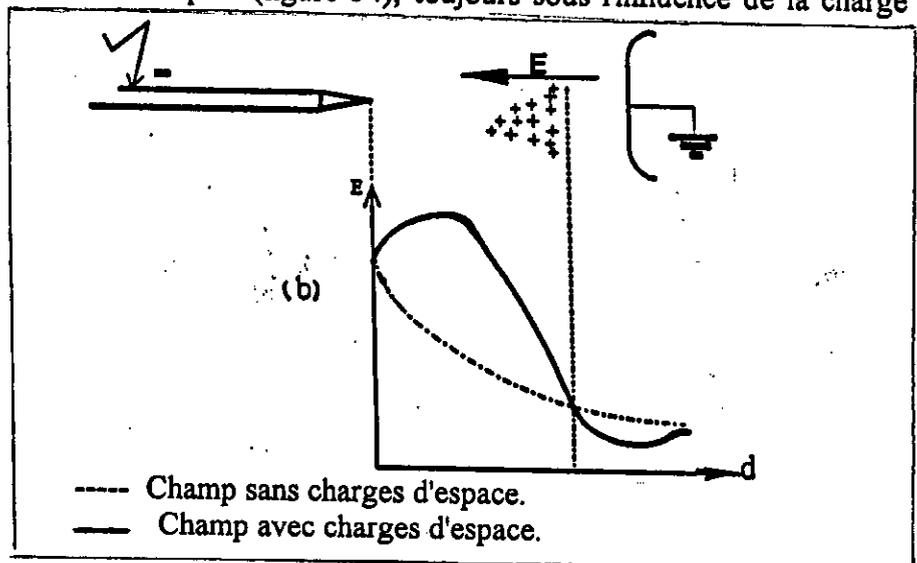
\* Cas où la pointe est négative :

Dans ce cas, sous l'impact d'ions positifs, l'émission d'électrons se fait à partir de la pointe et se trouve même favorisée . L'effet couronne apparaît pour une tension plus faible sous l'influence de la charge d'espace positive que quand la pointe est positive (figure 31).



**Figure 33 :** Variation du champ électrique avec et sans charges d'espace dans un intervalle pointe + - plan.

La tension d'amorçage avec une pointe négative est 2 à 3 fois plus élevée qu'avec une pointe positive (figure 31). Par contre, le champ est augmenté au niveau de la pointe et diminué au niveau du plan (figure 34), toujours sous l'influence de la charge d'espace positive.



**Figure 34 :** Variation du champ électrique avec et sans charges d'espacés dans un intervalle d'air pointe - - plan.



## 2 - II.

### Influence des barrières isolantes sur l'amorçage des intervalles d'air pointe - plan .

#### II - 1 - Historique :

Pour augmenter la tension disruptive des intervalles d'air, on a proposé l'emploi de barrières isolantes. Cet emploi doit tenir compte de la forme géométrique des électrodes et de la nature de la barrière, la pollution atmosphérique incluse. L'avantage fourni par les barrières est surtout l'augmentation appréciable de la tension disruptive des intervalles d'air pointe positive - plan . cette augmentation fut remarquée par plusieurs chercheurs (figure 35).

Pour les intervalles relativement petits (inférieurs à 30 [cm]), l'influence des barrières sur la rupture diélectrique de l'air fut déjà remarquée vers les années 1920 par C.P Steinmetz. Les principales recherches furent entreprises ensuite par E.Marx et H.Roser [33 , 34]. Ces auteurs ont étudié l'influence de différents types de barrières, dans différents intervalles d'air à champ non uniforme, aux tensions de chocs à front raide (types chocs foudre), à tension continue et à fréquence industrielle. L'amélioration de la tension disruptive de l'air fut notable seulement pour le système d'électrodes pointe positive - plan. Roser [34] considère que cette amélioration serait d'ue surtout à l'uniformisation du champ électrique dans l'espace barrière - plan, provoquée par la charge positive déposée sur la surface de la barrière en face de la pointe. Cette constatation fut vérifiée ensuite par N.F.Wolochchenko [35] et par M.P Verma [36] . les études qui suivirent, après celles de Marx et Roser, on été orientées surtout vers l'influence de la forme des électrodes, la distribution du champ électrique dans l'arrangement pointe - barrière - plan, l'existence des différentes phases de rupture (décharge pointe - barrière suivies par la décharge barrière - plan et le contournement de la barrière), la géométrie et la nature de la barrière, et l'influence des barrières polluées.



Pour les longs intervalles d'air, les recherches sont plutôt rares. les premières études de V.S Komelkov et A.M Lifchits [37], et de O.Salka et H.Norinder [48] vers les années 1950, concernaient surtout le mécanisme de décharge dans l'air. des recherches plus détaillées et concernant la rupture diélectrique de l'air furent réalisées en 1973 par R.Rinsterwalder [49]. Cet auteur étudia l'influence d'une barrière isolante sur la tension 100 % de décharge disruptive aux chocs de manoeuvres des intervalles d'air tige - sphère longs jusqu' à 1 [m] . Il a défini les variations de cette tension disruptive en fonction de la position de la barrière dans l'intervalle et du temps jusqu' à la crête des chocs de manoeuvres. la tension disruptive augmente quand la barrière s'approche de la pointe, tout en restant minimale pour les chocs ayant une durée de front comprise entre 100 et 200 [ $\mu$ s]. Pour les intervalles d'air pointe - plan longs de 3 [m] M.Darveniza et B.Holcombe [51 , 52] présentèrent au congrès mondial de l'électrotechnique de 1977 leurs travaux concernant l'influence d'une barrière isolante sur la rupture diélectrique de l'air aux chocs de manoeuvres et de foudre. Ils constatèrent que , aussi pour les longs intervalles, l'augmentation de la tension disruptive a lieu quand la pointe est positive. Cette augmentation a été obtenue aussi à l'aide d'une barrière métallique à bords arrondis pour les intervalles pointe - plan de 80 [cm] par A.Sevigny [53] et autres .

Dans le cas des intervalles d'air allant jusqu' à 2 mètres, A.Boubekeur [62] a montré que la barrière est à la fois un obstacle électrostatique et géométrique. Il a déterminé une équivalence diélectrique entre les système avec et sans barrière, et les conditions qui régissent cette équivalence aussi bien en tension alternative qu ' en tension de choc de foudre ou de manoeuvre . Certains travaux de recherche ont été effectués à l'E.N.P sur l'influence des dimensions de la barrière [63 , 64] et sur la modélisation mathématique (Analytique) [53 , 54] des intervalles avec barrières.

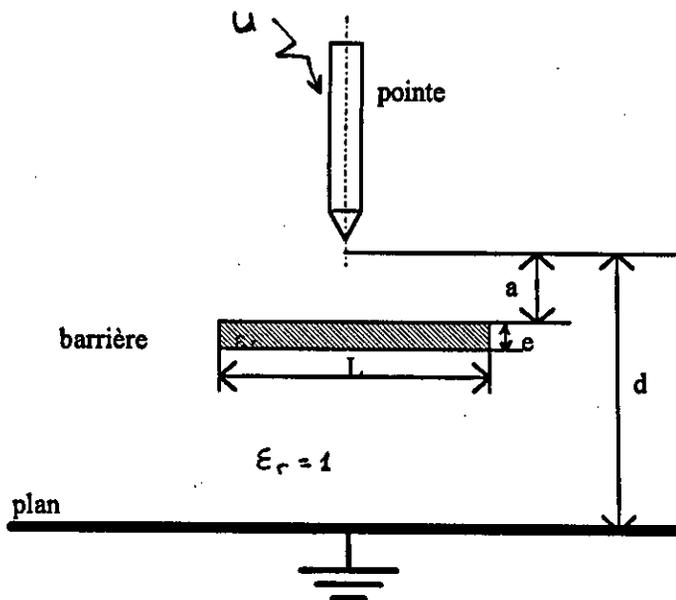


Figure 35 : Arrangement pointe - barrière - plan.

## II - 2 - Influence des paramètres définissant la nature de la barrière :

Les écrans isolants de natures différentes, n'ont pas tous les mêmes performances du point de vue de l'augmentation de la tension disruptive d'un système d'isolation. Cela est dû au fait que les paramètres définissant les propriétés isolantes d'un matériau varient d'un diélectrique à l'autre.

Parmi ces paramètres, les plus importants sont la résistivité transversale, la résistivité superficielle et la permittivité.

### II - 2 - 1- La résistivité transversale $\rho_T$ :

Elle détermine le courant de fuite à travers l'isolant, s'exprime en  $[\Omega.cm]$ , varie suivant le degré d'humidité de l'isolant et diminue fortement avec une élévation de la température.

### II - 2 - 2 - La résistivité superficielle $\rho_s$ :

Elle est définie comme étant la résistance de la surface de l'isolant, s'exprime en "ohm" par unité de surface. Elle est variable et difficile à préciser, dépend du degré d'humidité du milieu ambiant et de l'état de surface de l'isolant (formes des surfaces et pollution).



### II - 2 - 3 - La permittivité $\epsilon_r$ :

Elle est définie généralement comme étant le rapport de la capacité d'un condensateur ayant pour diélectrique, le matériau isolant, à la capacité du même condensateur ayant le vide comme diélectrique.

$$\epsilon_r = C / C_v$$

### II - 3 - Influence des décharges superficielles et des décharges partielles sur les diélectriques solides :

Les décharges superficielles se produisent à la surface du diélectrique solide. Du point de vue technique, elles sont très nuisibles au matériau, car la résistivité superficielle diminue. Pour certain niveau de tension, les canaux de décharge se produisent selon le mécanisme de Reather - Meek et glissent sur <sup>la surface</sup> ces différents canaux glissants sur la surface du diélectrique solide sont appelés : décharges glissantes [30].

Le claquage de l'isolant peut être aussi provoqué par les décharges partielles. ce dernier dépend de la présence de cavités dans le diélectrique. En effet, les décharges internes apparaissent quand il y a des impuretés ou des vacules gazeuses dans le diélectrique solide. Cela entraîne la dégradation progressive du diélectrique.

### II - 4 - Rupture ou claquage des diélectriques solides :

On appelle rupture, la perte subite de la propriété isolante d'un diélectrique soumis à un champ électrique. Parmi les mécanismes fondamentaux relatifs au claquage, on peut définir, le claquage électrique et le claquage thermique.

Le premier est de nature électronique. il est dû à la présence d'électrons capables de se déplacer dans le réseau cristallin du diélectrique.

Le second, résulte de la conductivité du diélectrique. Il survient quand la puissance fournie par le courant au diélectrique est supérieure à la puissance qui peut être dissipée. C'est à dire quand l'état de l'isolant devient instable.

La rupture du diélectrique peut être aussi provoquée par les décharges partielles directement liées à la présence de cavités dans le diélectrique. les décharges partielles peuvent être éliminées en améliorant la technologie relative à l'étude des diélectriques solides, ou en choisissant un matériau réputé résistant aux décharges.



#### II - 4 - 1 - Mécanisme de rupture électrique [66] :

La rupture diélectrique est provoquée par l'ionisation par collision. cependant, la connaissance du mécanisme de rupture électrique n'est pas encore épuisée. par ce fait, plusieurs théories ont été énoncées sur ce mode de claquage. celle de Rogowski 1926, fut la première concernant le claquage des diélectriques solides. Selon cet auteur, la rupture d'un diélectrique de structure cristalline donnée, consiste à la destruction mécanique de son réseau électrostatique, par des forces induites dues au champ extérieur.

Pour d'autres chercheurs, il existe deux formes de rupture électrique :

- Claquage électrique intrinsèque.
- Claquage électrique par avalanche.

Le premier est dû à l'intensité du champ pour laquelle apparaît une certaine instabilité du courant électronique dans le diélectrique. Le courant résulte l'ionisation par chocs d'électrons. Le second admet comme principe, le fait que le processus de multiplication électronique a atteint des propriétés admissibles. Par conséquent, le matériau cesse d'être un diélectrique et par contre, devient conducteur.

#### II - 4 - 2 - Mécanisme de rupture thermique [66] :

La rupture thermique est le résultat d'un déséquilibre thermique. ce déséquilibre est lié aux pertes d'énergie à la suite de mouvements de systèmes polaires et à la quantité limitée de charges.

Les pertes impliquent des dégagements de chaleur. Et l'existence de porteurs de charges dans un diélectrique entraîne celle d'un courant de conduction qui produit l'échauffement du matériau quand un champ est appliqué. Le principe de la rupture thermique est dû au fait que la chaleur produite dans le diélectrique est supérieur à la chaleur évacuée.

L'état de ce dernier est alors instable et quand la température augmente, la structure du diélectrique change du fait de la destruction de son réseau cristallin initial.

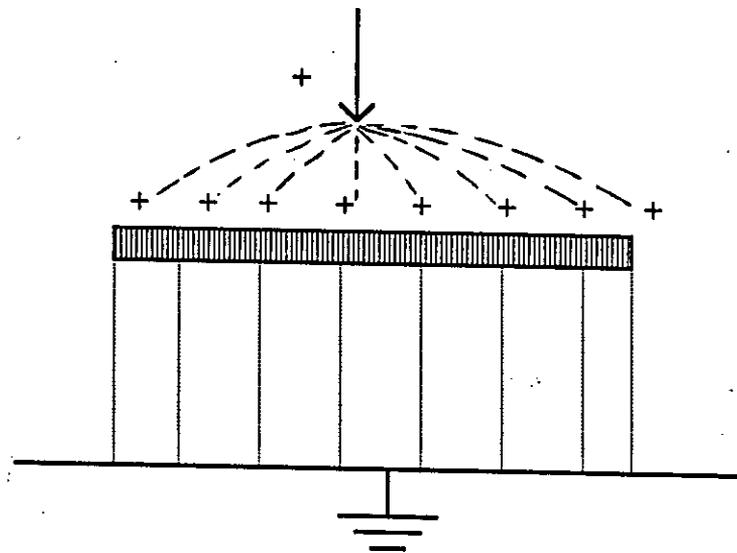


### Remarque :

Il est à remarquer qu'il est pratiquement difficile de déterminer l'apparition du claquage thermique. Ceci est principalement dû au fait que c'est un phénomène très lent.

### II - 5 - Influence des paramètres extérieurs à la nature de la barrière :

L'amélioration de la rigidité diélectrique d'un intervalle d'air pointe - plan en y plaçant correctement une barrière isolante peut être considérable. Toutefois, la présence d'un écran isolant entre les deux électrodes, transforme l'intervalle d'air initial en un système stratifié (air - barrière). Les ions positifs créant la charge spatiale sont alors freinés par la barrière et se répartissant sur sa surface (figure 36).



**Figure 36 :** Déformation du champ électrique en présence de la barrière .

La répartition du champ électrique subit une déformation en provoquant une augmentation importante de la tension disruptive du système et une amélioration notable quand l'écran est placé près de la pointe positive [34].

D'après des recherches expérimentales récentes [53 , 56], le fait de considérer la densité de charges superficielles comme fonction du temps, a permis de mettre en évidence sur la base d'un modèle mathématique, la dépendance du champ électrique du temps, de la tension, des épaisseurs diélectriques (air + barrière), des conductivités diélectriques et d'autres paramètres, dont on cite les plus importants :



### II - 5 - 1 - Influence du type de tension appliquée :

La rigidité diélectrique dépend de l'amplitude et de la forme de la tension appliquée aux électrodes. Beaucoup de recherches étaient limitées aux tensions de chocs de polarité positive de la pointe. Il fut vérifié que la contrainte de tension la plus défavorable est représentée pour les longs intervalles d'air par les chocs positifs de manoeuvres à durée de front relativement longues [62].

### II - 5 - 2 - Influence de la polarité de l'électrode pointe :

Comme il a été déjà mentionné, l'influence de la barrière était particulièrement remarquée pour une polarité positive ou dans le cas de la pointe sous tension alternative [54].

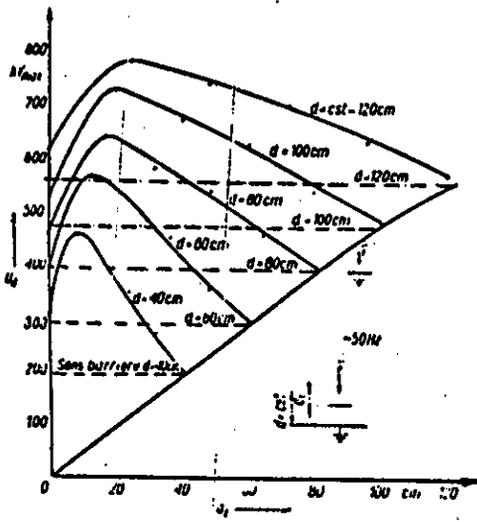
Avec la polarité négative, la décharge est en étapes pour toutes les positions de la barrière, et aucune augmentation de la tension disruptive n'a été obtenue.

Vu les recherches faites pour ce cas, les décharges apparaissent des deux côtés de la barrière isolante. L'étincelle a lieu quand les deux décharges de part et d'autre de l'écran, se rencontrent. Mais l'effet de la barrière est négligeable [57].

### II - 5 - 3 - Influence de la position de la barrière :

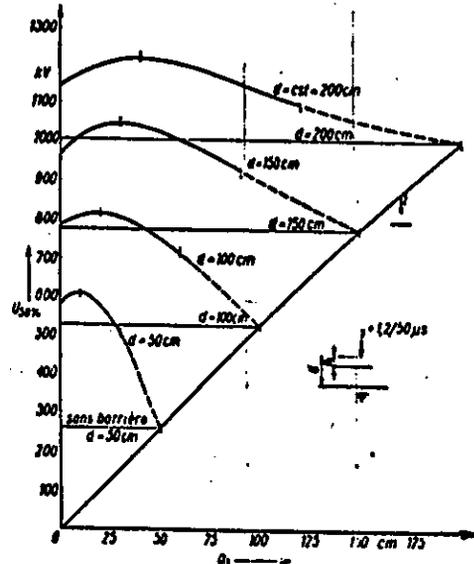
La tension disruptive des petits intervalles d'air allant jusqu'à 40 [cm] varie essentiellement en fonction de la position de la barrière. Cette tension passe par un maximum quand la barrière est près de la pointe. Certains travaux [63, 64], ont montré que pour des intervalles d'air de 15 à 30 [cm], le maximum de tension est obtenu en position  $a/d = 0\%$  pour des barrières dont les longueurs n'excèdent pas 50 [cm].

Une barrière isolante avec des surfaces propres d'un moyen intervalle d'air de 40 à 200 [cm] conduit à une augmentation considérable de la tension disruptive du système, quand elle est située particulièrement à 20% de l'intervalle à partir de la pointe [62]. Cette augmentation est due à l'allongement du canal de la décharge (figure 37).



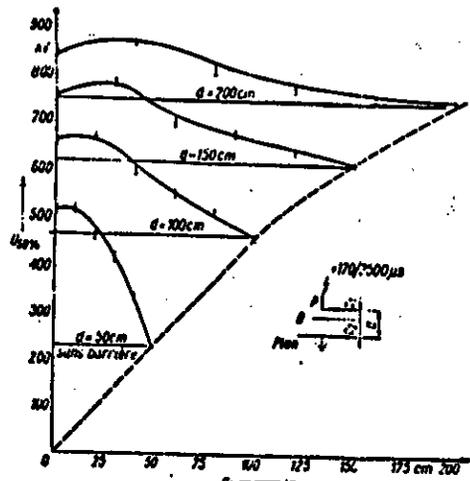
(a)

Tension disruptive à fréquence industrielle en fonction de la position de la barrière



(b)

Tension 50% de décharge disruptive de choc de foudre en fonctions de la position  $a_1$  de la barrière



(c)

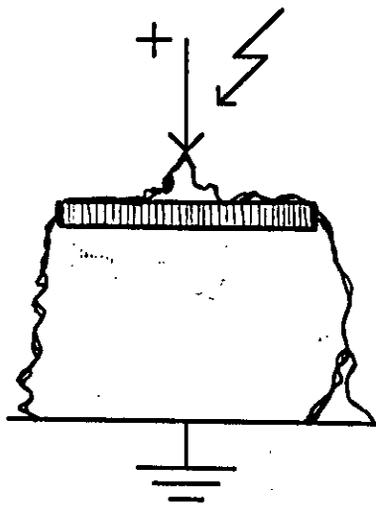
Tension 50% de décharge disruptive de choc de manœuvres en fonction de la position de la barrière

**Figure 37 :** Tension disruptive en fonction de la position de la barrière pour différents types de tension [62].

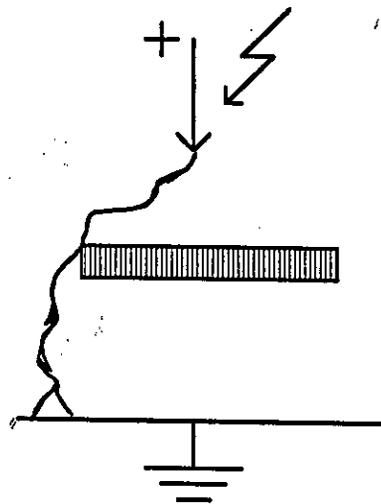


Au loin de deux électrodes, la position de la barrière permet d'avoir une étincelle qui contourne la barrière en la touchant dans un seul point [62]. Autrement dit, la décharge suit dans l'air le trajet pointe - bord de la barrière - plan. Elle est dite décharge directe (figure 38 - b).

Quand la barrière est très proche de l'une des électrodes, la décharge est composée de l'étincelle pointe - milieu de la barrière, de la décharge glissante sur la barrière et l'étincelle bord de la barrière - plan [62]. Cette décharge est dite par étapes (figure 38 - a).



a : Décharge par étape.

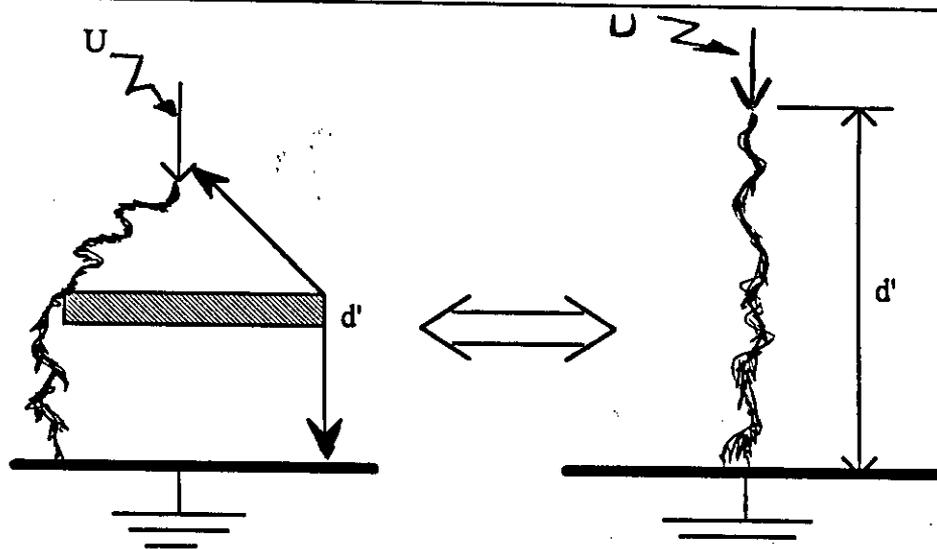


b : Décharge directe.

**Figure 38 :** Décharge disruptive dans un système pointe - barrière - plan.

#### Notion de la distance géométrique $d'$ :

L'amélioration de la rigidité diélectrique des moyens intervalles d'air pointe - plan est due surtout au fait que la barrière forme un obstacle géométrique à la décharge disruptive directe. La décharge se développe de la pointe vers le bord de la barrière et de ce bord vers le plan mis à la terre (figure 39). Sur cette figure, il est facile de voir que la longueur du canal de la décharge est en grandeur très proche de la distance  $d'$  pointe - bord - plan. Ceci était obtenu pour des différentes tensions (foudre , manoeuvre et à 50 [Hz]).



**Figure 39 :** Équivalence électro - géométrique des systèmes avec barrières et des systèmes sans barrière

A partir de l'analyse des résultats numériques de plusieurs auteurs [53 , 54], il fut établi que la tension disruptive correspondant à la longueur du canal de la décharge  $d'$  est approximativement égale à la tension disruptive de l'arrangement pointe - plan sans barrière ayant une distance entre électrodes égale à  $d'$ .

Autrement dit, un intervalle  $d$  pointe - barrière - plan est, du point de vue rigidité, équivalent à un intervalle  $d'$  pointe - plan sans barrière [62].

Le résultat est lié avec le rôle joué par la barrière (économiser les distance). les charges électriques déposées par les têtes des streamers sur sa surface du côté de la pointe, constituent l'obstacle électrostatique déviant la décharge principale vers les bords de la barrière.

#### II - 5 - 4 - Influence des charges spatiales :

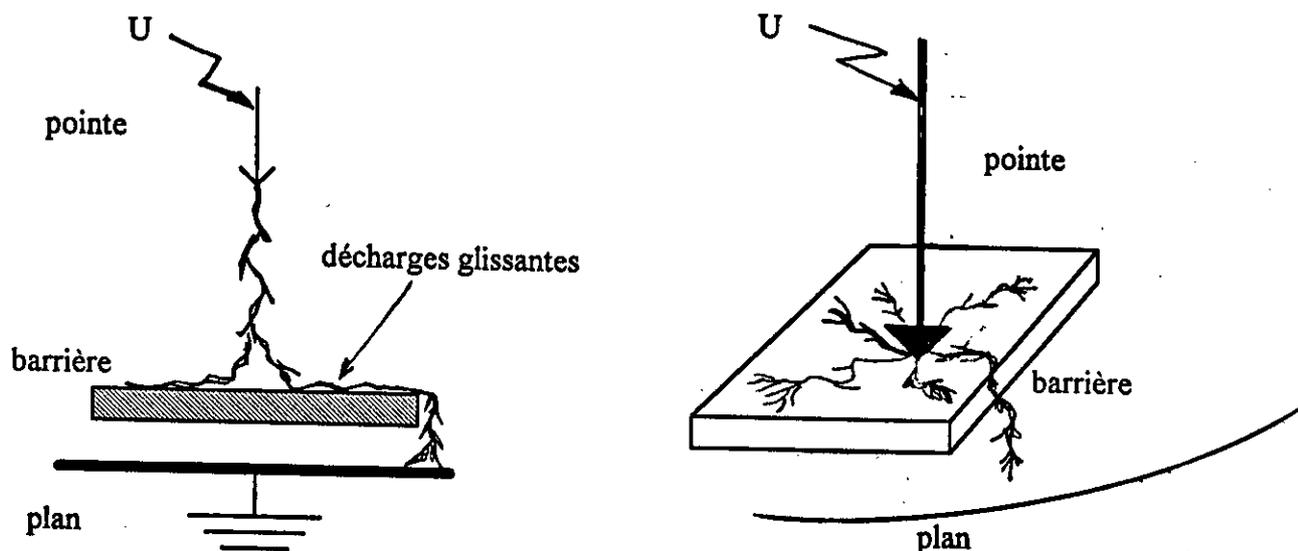
Le champ est uniforme entre la barrière et l'électrode plane. La figure 36 montre la répartition des lignes du champ, entre une pointe positive et un écran. L'augmentation de la tension disruptive est obtenue seulement lorsque la charge superficielle sur la barrière a la même polarité que la pointe. Ceci est toujours vérifié pour le cas de la pointe positive, et ne l'est pas pour la pointe négative que lorsque la barrière est loin du plan [66].



D'après Roser [34], quand la charge spatiale sur la barrière et la pointe ont différentes polarités., l'effet de l'écran est faible. Cette charge provoque la déviation de la décharge autour des bords de la barrière et apparaît quand les têtes des streamers touchent la barrière. Elle empêche ces derniers ainsi que le leader positif de se développer.

#### II - 5 - 5 - Décharges glissantes :

Quand la barrière est proche du plan, on a d'abord le développement de la décharge de façon directe de la pointe vers le milieu de la barrière, ensuite l'apparition de décharges glissantes contournant la surface en face de la pointe et finalement l'amorçage de l'intervalle d'air entre le bord et le plan entraînant la rupture totale (figure 40).



**Figure 40 :** Amorçage avec décharges glissantes [62] .

En présence de la barrière, les streamers n'arrivent plus au plan où l'intensité du champ électrique atteint sa valeur de crête et reste constante [48] .

En omettant les cas des ruptures en présence de décharges glissantes, l'augmentation de la tension disruptive est conséquente à la déviation du canal de la décharge vers le bord de la barrière. Cette décharge a lieu approximativement pour une même tension nécessaire à l'apparition d'une décharge de même longueur dans un intervalle pointe - plan sans barrière [62] . Quand le nombre des ions positifs augmente



jusqu' à une valeur critique, il facilite ainsi l'apparition des décharges glissantes qui favorisent à leur tour le développement du canal de plasma.

### II - 5 - 6 - Influence de l'épaisseur et de la permittivité :

Pilling [39] a constaté que l'épaisseur ( $e$ ) et la constante diélectrique ( $\epsilon_r$ ) de la barrière ont une influence sur la distribution des porteurs de charges positifs et sur la chute de tension sur la surface de la barrière.

Quand ces deux paramètres augmentent, le champ entre la barrière et le plan devient de plus en plus uniforme. Ainsi la ramification des streamers s'élargit de plus en plus. La densité de charge superficielle n'est pas uniforme, et diminue en se dirigeant vers les bords de la barrière. Une forte composante tangentielle du champ existe sur la barrière et favorise l'augmentation du courant d'ionisation. Ce courant n'est pas limité que par la largeur de l'écran et varie en fonction de la tension indépendamment de la constante diélectrique ( $\epsilon_r$ ) de l'écran. La largeur optimale est trois fois plus grande que la distance inter - électrodes [63] .

Pour les petits intervalles ( $d = 30$  [cm] ), l'augmentation la plus importante de la tension disruptive était pour une barrière en contact avec la pointe ( $a_1 = 0$ ). Ce résultat était vérifié pour chaque épaisseur [64] . En effet, avec une largeur donnée, l'épaisseur de la barrière influe sur la tension disruptive du système (figure 41).

On tire aussi une constatation majeure, c'est que l'influence de l'épaisseur est beaucoup moins importante par comparaison à l'effet de la largeur, et de la position de l'écran ainsi que la distance inter - électrodes.

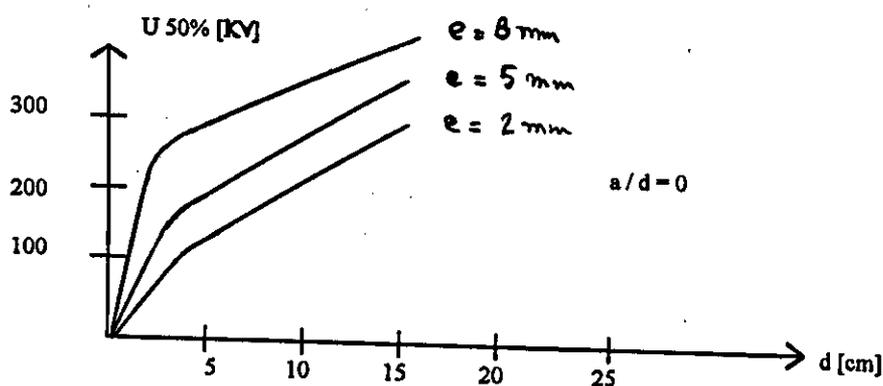


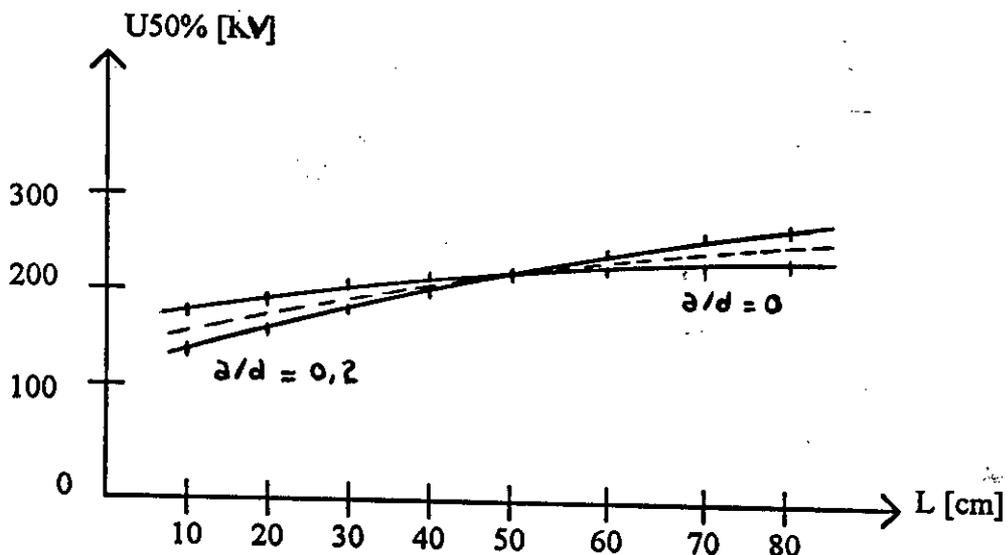
Figure 41 : Influence de l'épaisseur sur la tension  $U_{50\%}$  de décharges aux chocs de foudre [64].



### II - 5 - 7 - Influence de largeur :

Il a été observé, quand la largeur de la barrière n'est pas suffisamment large que la distance inter - électrodes, la rigidité diélectrique de l'arrangement pointe - barrière - plan dépend de la largeur du canal de décharge. Géométriquement, cette longueur est approximativement égale à la distance pointe - bord de la barrière - plan. L'augmentation maximale de la tension disruptive, dans ce cas, est obtenue quand la barrière touche l'électrode pointe [62] .

Les types de décharge dépendent essentiellement de la distance entre - électrodes et de la largeur de la barrière pour les longueurs inférieures à cinq (05) fois la distance pointe - plan; la décharge pourrait se faire de manière directe, par contre pour les longueurs supérieures à cette valeur, la décharge se fait par étapes [64] (figure 42).



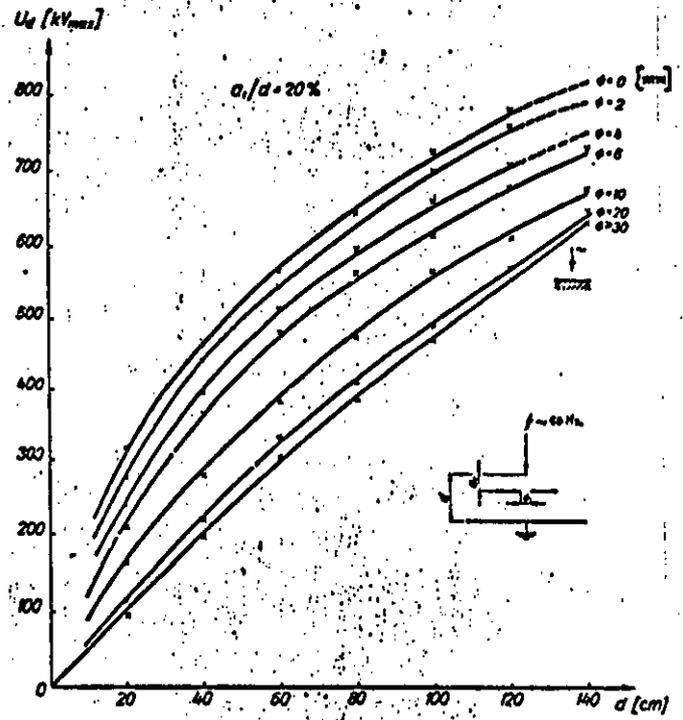
**Figure 42 :** Influence de la largeur de la barrière sur la tension  $U_{50\%}$  pour les chocs de foudre [64].

### II - 5 - 8 - Influence d'une barrière trouée :

Pour une barrière trouée au milieu, A. Boubakeur [62] a constaté que la tension disruptive de l'arrangement "pointe - barrière - plan" tend à diminuer quand le diamètre du trou augmente. A la limite, elle devient égale à celle de l'arrangement "pointe - plan" pour les trous de diamètre supérieur à 30 [mm] (figure 43).



(a) : Tension disruptive à fréquence industrielle en fonction de la distance pointe-plan d. -barrière trouée- /  $a_1/d=0,2$  /



(b) : Tension 50% de décharge disruptive de choc de manœuvres +170/2500µs, en fonction de la distance pointe-plan d. -barrière trouée- /  $a_1/d=0,2$  /

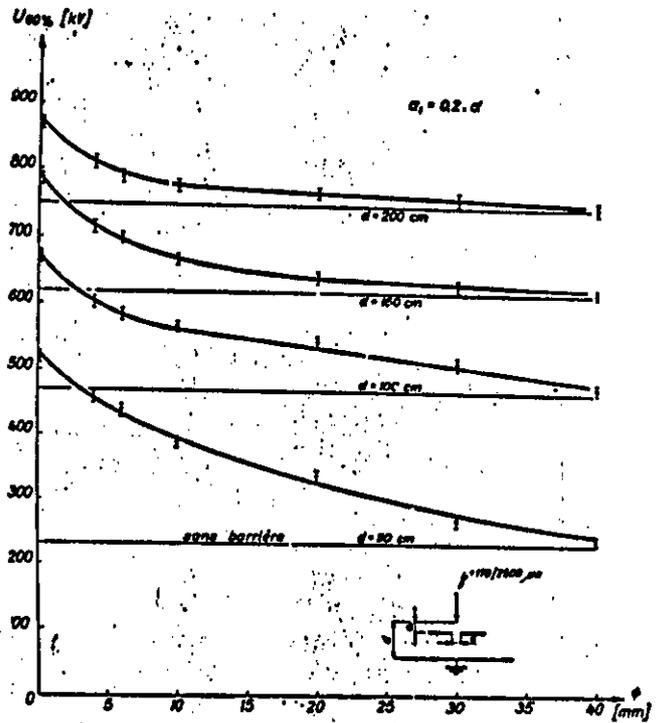


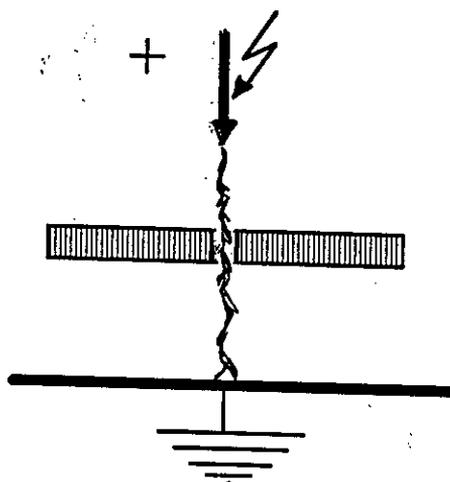
Figure 43 : Influence d'une barrière trouée [62].



De ce fait, l'hypothèse de l'obstacle géométrique mentionnée dans les paragraphes précédents cesse d'être valable pour les barrières percées. Ainsi, le choix de l'épaisseur de la barrière, suffisante pour empêcher la perforation par la décharge, devient important. (figure 44).

Avec un trou de 10 [mm] de diamètre, le chemin suivi par la décharge disruptive passe généralement par le bord de la barrière [62]. La décharge passe par le trou seulement quand le diamètre est supérieur à 10 [mm]. Ainsi, la charge d'espace créée au dessus de la barrière aurait un rôle physique important.

Quand la barrière est tout près de la pointe, pour être finalement au contact avec elle, le trou joue un rôle très important [62]. Dans ce cas la décharge passe toujours par le trou et aucune amélioration de la tension disruptive n'est obtenue.



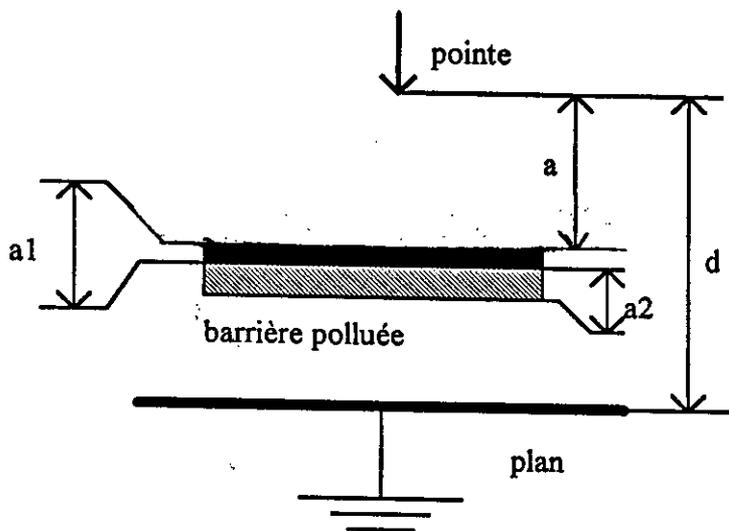
**Figure 44 :** Canal de décharge directe pour une barrière trouée.

#### II - 5 - 9 - Influence de la pollution :

On a vu que la barrière a un rôle important d'obstacle géométrique au développement direct de la décharge en ce qui concerne la longueur et que la charge positive sur la barrière a un rôle d'obstacle électrostatique en ce qui concerne les trous. La combinaison de ces deux effets /géométrique et électrique / permet une claire compréhension de l'influence de la barrière. Ceci concerne la barrière isolante à surfaces propres (figure 45).



Les couches semi - conductrices (pollution artificielle) sur la surface de la barrière correspondant au cas pratique de l'emploi de la barrière dans l'atmosphère polluée. Le cas extrême de la barrière polluée, c'est à dire recouverte d'une couche conductrice, est équivalente à une barrière métallique. Dans ce cas, l'étincelle est divisée en deux (2) parties : décharge "pointe - milieu de la barrière" et décharge "bord de la barrière plan". Étant donné que les bords de la barrières jouent le rôle de pointes. L'augmentation de la tension disruptive liée avec l'introduction de la barrière est dans ce cas petite ou même négative / diminution . [62] .



**Figure 45 :** Arrangement pointe - barrière polluée - plan .

Comme exemple des résultats obtenus [62] , nous donnons la figure 46 , relative à la couche semi - conductrice déposée sur la barrière du côté de la pointe. Un fait important est que la barrière polluée entraîne pratiquement les mêmes résultats que la barrières métallique, dès que la conductivité superficielle des couches semi - conductrices dépasse 1,6 [ $\mu S$ ] . Ceci est aussi nettement remarqué par la forme de la décharge disruptive (figure 47).

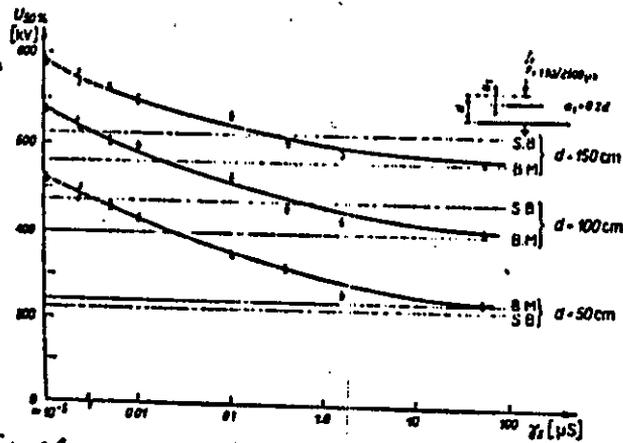


Fig. 46 Variation de la tension 50% de décharge disruptive en fonction de la conductivité superficielle de la barrière. Tension  $+170/2500 \mu s$ ; B. M. — barrière métallique, S. B. — sans barrière [ 62 ]

Dans le cas des couches à conductivité superficielle inférieure à  $0,4 [\mu S]$ , cette décharge est directe. Elle se développe de la même manière que dans le cas des barrières à surfaces propres, et le chemin suivi sera " pointe - bord de la barrière - plan " [62]

Avec une pollution artificielles, des essais de recherches [54 , 55] ont confirmé que la surface en face du plan n'aurait pas un rôle important en présence de pollution. En effet, avec ce dernier type de barrière, la tension disruptive reste supérieure à celle obtenue avec la barrière dont la surface en face de la pointe était recouverte d'une couche ayant une conductivité superficielle de  $0,1 [\mu S]$ .

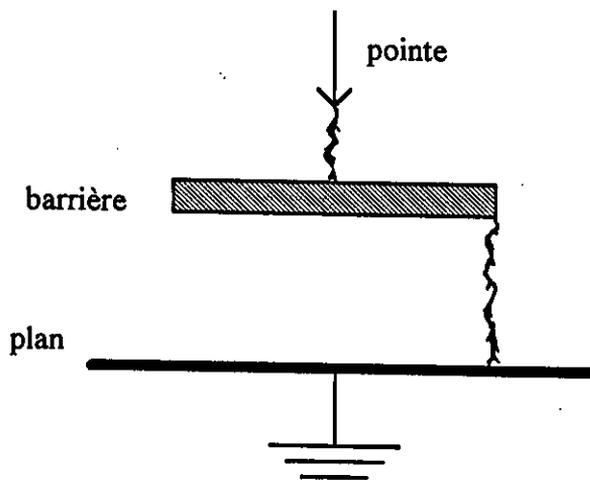


Figure 47 : Décharge disruptive avec barrière métallique.



## 2 - III - Conclusion :

En conclusion, une barrière isolante constitue principalement un obstacle aux porteurs de charge lors des mécanismes d'avalanche précédant la décharge. L'accumulation des charges à la surface de la barrière jouerait un rôle primordial.

Dans le cas des intervalles d'air pointe - plan la nature des charges dépendra de la polarité de la pointe. Dans le cas de la pointe positive, cette charge est composée surtout d'ions positifs qui vont s'accumuler à la surface de la barrière en face de la pointe. La répartition de cette charge fait encore l'objet d'investigations. Dans le cas d'une pointe négative, la barrière est beaucoup plus bombardée par les électrons des avalanches partant de la pointe et on aurait beaucoup plus tendance à avoir une accumulation des

charges positives en face du plan réduisant ainsi le champ global et par conséquent la rigidité du système sans barrière.

L'accumulation des charges superficielles et la distribution des charges spatiales pour un intervalle donné dépendront des principaux paramètres qui sont ; le type et le niveau de tension appliqué, l'épaisseur, la largeur, la permittivité et la conductivité superficielle de la barrière ainsi que la position de cette dernière dans l'intervalle pointe - plan.

Dans ce travail nous nous intéressons en premier lieu aux systèmes sans charges superficielles. Nous tenterons par la suite à étudier un cas simple de distribution.

" Faire aisément ce qui est difficile aux autres , voilà le talent; faire ce qui est impossible au talent, voilà le génie " .

(Les quatre jeudis) F . Etendhal.

" Un homme sérieux à peu d'idées, un homme d'idée n'est jamais sérieux et un homme compétent est un homme qui se trompe selon les règles . "

(Visages découverts ) Pierre Reverdy.

## Chapitre Trois :

# Programme de simulation et mode opératoire

" La vie est faite d'illusion, parmi ces illusions, certaines réussissent, ce sont celle qui constituent la réalité. "

(Ah ! Jeunesse) Duc de Levis.



### 3 - 1 - Généralité sur la structure du programme "PROC2D" :

Dans de nombreux aspects de son travail , il est souvent nécessaire à l'ingénieur électrotechnicien de connaître la répartition du champ électrique des différentes configurations qu'il rencontre quotidiennement. Pour cette raison a été conçu le programme "PROC2D". [26].

C'est un programme de résolution de l'équation de 'Poisson' sur un domaine plan par la formulation variationnelle de la M.E.F et avec les conditions aux limites de " Dirichlet " et de " Newman " .

Ce programme est divisé en trois modules (programmes) distincts figure (49) :

PREPROC	MEFPROC	POSTPROC
- Maillage. - Caractérisation.	- calcul par éléments finis	- Exploitation des résultats.

**Figure 49 :** Modules du programme "PROCD" .

- Le pré - processeur "PREPROC" où s'effectue le maillage du domaine. les éléments choisis sont triangulaires linéaires où les polynômes d'approximation sont du premier ordre (figure 50) .

Plan à mailler	Caractérisation et conditions aux limites	Maillage
- Pas du plan à mailler. - Détermination de fenêtres à pas fin	- Affectation des propriétés physiques . - Désignation des noeuds limites	- Maillage automatique. - Maillage manuel.

**Figure 50 :** Organisation du pré - processeur .

- Le processeur " MEFPROC " qui calcule la solution par éléments finis, du problème discrétisé dans le pré - processeur. (Figure 51).

SSP : Seme	SSP : Comat	SSP : Union	SSP : Premat	SSP : Solsym	SSP : Recolt
Lecture des données	Construction des matrices élémentaires	Assemblage des matrices élémentaires	Introduction des conditions aux limites	Résolution du système matriciel	Écriture des résultats

**Figure 51 :** Macro - organigramme du processeur.



- Le post-processeur "POSTPROC" qui sert à la visualisation du potentiel et du champ électrique calculés dans le processeur (figure 52).

Géométrie	Champ	Potentiel
- Visualisation des noeuds.	- Visualisation par motifs.	- Visualisation par motifs.
- Visualisation des éléments.	- Visualisation par couleurs.	- Visualisation par barres.
	- Visualisation par segments .	- Visualisation par lignes.

**Figure 52 :** Organisation du Post - processeur.

Ces trois modules permettent donc le traitement et la résolution d'un grand nombre de problèmes de géométrie plane.

- \* L'exécution correcte du programme, exige la présence des fichiers suivants :
  - Le fichier des éléments "FELEMENT . DAT" .
  - Le fichier des noeuds " FNOEUD . DAT " .
  - Le fichier des noeuds limites " CONDLIM . DAT " .
  - Le fichier des caractéristiques physiques " F.DAT" .
- \* Si les données sont cohérentes, le programme exécute les étapes suivantes :
  - Lecture des données.
  - Construction des matrices élémentaires.
  - Construction de la matrice globale.
  - Introduction des conditions limites et réduction du système à résoudre.
  - Résolution du système global.
  - Calcul du champ et stockage des résultats.

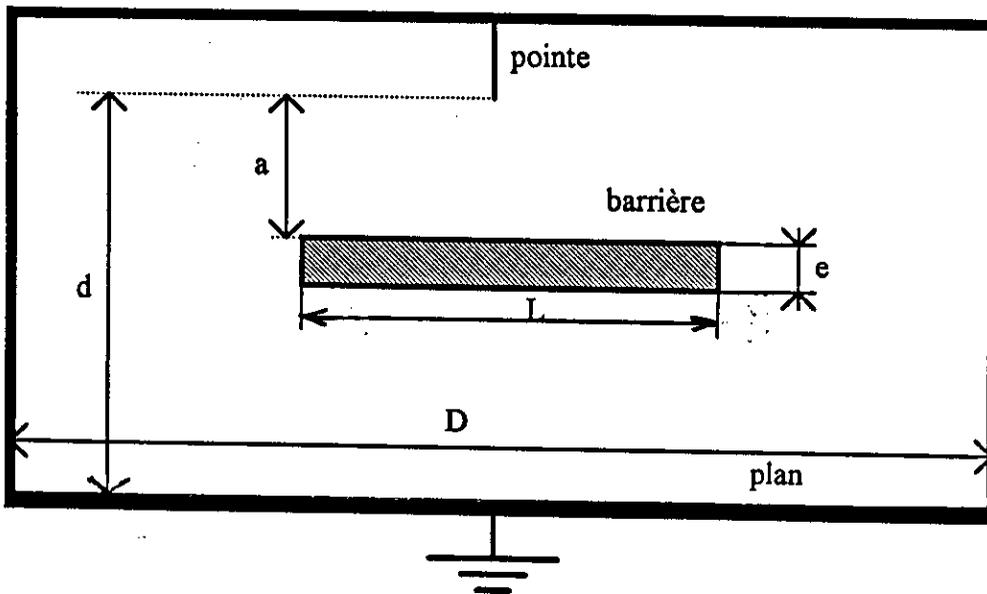
A la suite d'une exécution correcte, le processus " MFPROC " génère le fichier des résultats " RECOLT.DAT " qui servira comme données pour la visualisation sur le post-processeur " POSTPROC " .



### 3 - 2 - Présentation du modèle numérique :

Notre modèle s'appuie sur le calcul de la distribution du champ dans une configuration plane constituée d'une pointe assimilée à une tige verticale, du plan présenté par un conducteur horizontal et de la barrière isolante constituée par une zone rectangulaire prise entre l'électrode pointe et le plan.

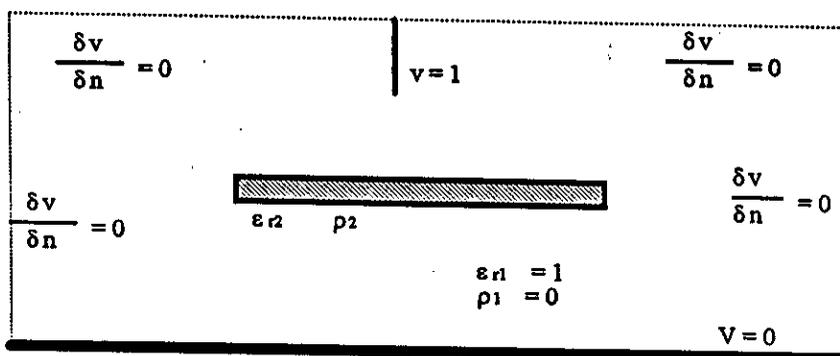
Cette configuration (figure 53) représente le modèle réel pour l'étude de la répartition du champ électrique.



**Figure 53 :** Modèle d'étude du champ dans le système " pointe - barrière - plan " .

Il s'agit de déterminer là où les points de la barrière et des électrodes, présentent des lieux particuliers du système, le champ électrique dont la valeur sera donnée par rapport au champ maximal situé sur la pointe.

Le modèle numérique est représenté par (la figure 54).



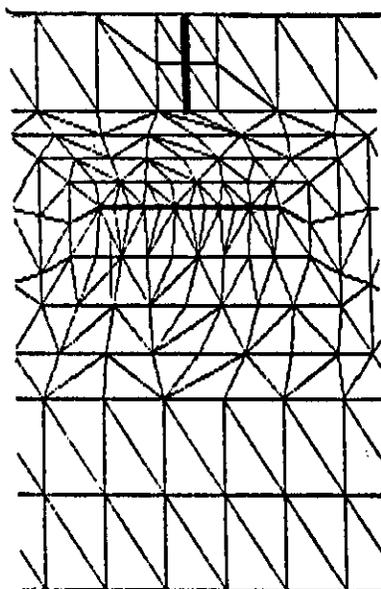
**Figure 54 :** Modèle numérique du champ dans le système 'Pointe - barrière - plan '



L'électrode pointe est simulée par un conducteur vertical maintenu au potentiel  $v = 1$ , l'électrode plane est portée au potentiel  $v = 0$ , la barrière est présentée par une zone rectangulaire dont la position, la largeur, l'épaisseur et les caractéristiques physiques sont variables. Son potentiel est inconnu. Sur les limites latérales et supérieure du domaine, on impose des conditions du type Newman,  $\partial v / \partial n = 0$  (figure 54). L'air est représenté par une première zone de caractéristique physique  $\epsilon_r = 1$  et  $\rho_1 = 0$  (pas de charges d'espace). Tandis que la barrière isolante est caractérisée par la densité de charges  $\rho_2$  et la permittivité  $\epsilon_{r2}$ .

### 3 - 2 - 1 - Mode opérative :

La configuration à étudier est introduite dans un "bain" à limite rectangulaire. La barrière représentant la partie intéressante de la géométrie est comprise dans une "petite fenêtre". La "grande fenêtre" à pas fin permet le passage graduel de la taille des éléments compatibles au sens de la M.E.F, où le petit pas sert pour le maillage raffiné (figure 55).



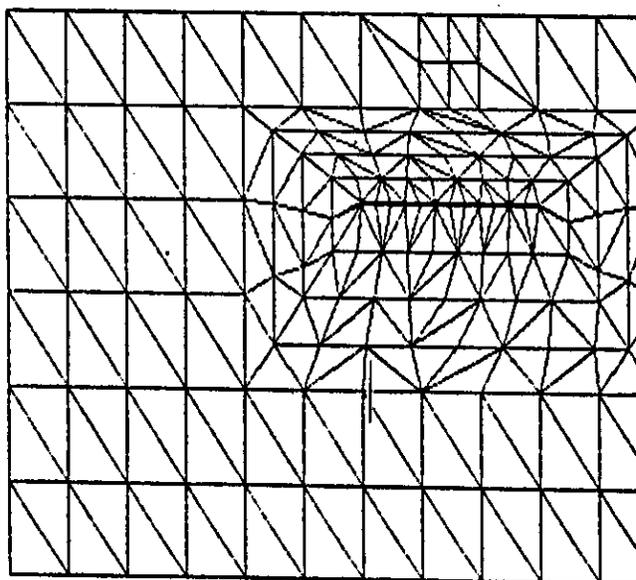
**Figure 55 :** Visualisation de l'option "Zoom" de la barrière.

Les éléments triangulaires du type linéaire (à 3 noeuds) constituent l'approximation géométrique du domaine. le maillage étant automatique, nous pouvons procéder par conséquent manuellement à des modifications locales, en créant d'autres éléments par la donnée graphique de leurs noeuds générateurs.



La discrétisation du domaine constitue une part importante de la méthode, dans la mesure où la précision en est tributaire. Il est en effet établi que l'incertitude du calcul par la M.E.F tend vers zéro lorsque la taille des éléments utilisés pour la discrétisation diminue [4]. Il s'avère cependant que l'utilisation d'éléments de taille réduite entraîne une augmentation positive du temps et de l'espace nécessaire au calcul par ordinateur, d'où la nécessité d'adaptation du maillage aux particularités géométriques et physiques du problème. Cette adaptation consiste ici à choisir des éléments de taille réduite dans les régions à gradient élevé (frontière de la barrière, pointe .....etc) et des éléments de taille relativement grande dans le reste du domaine, réduisant ainsi la taille du problème sans sacrifier l'exigence de précision [6].

L'étape de caractérisation du domaine consiste à effectuer aux éléments de la barrière leurs caractéristiques physiques. Ceci se fait par groupe d'éléments en quadrillant la barrière par une zone rectangulaire.



**Figure 56 :** Maillage de la configuration.

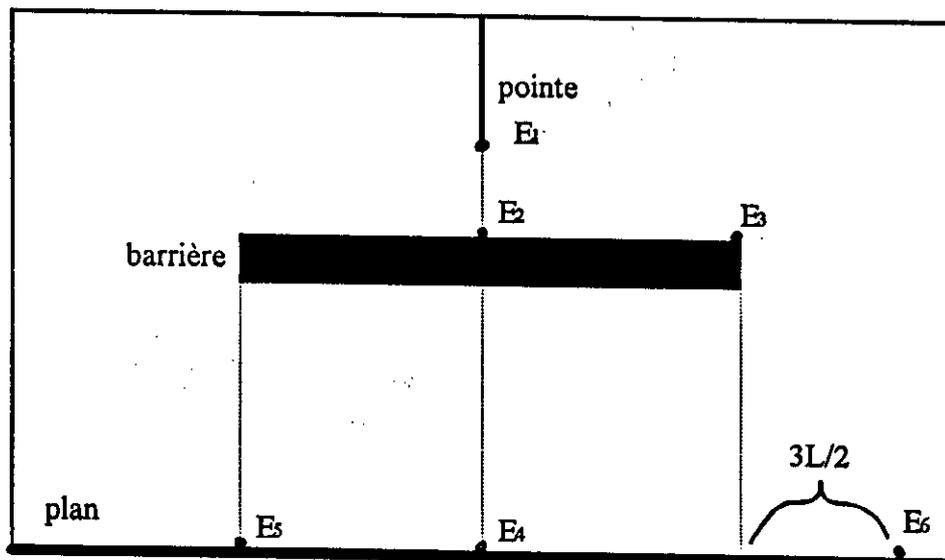
Nous opérons de même, pour la désignation des conditions aux limites de type "Dirichlet", en effectuant aux noeuds limites de l'électrode pointe et du plan les valeurs de leurs potentiels.



Pour une disposition, une largeur, une épaisseur, une permittivité et une densité de charges données pour la barrière, nous générons à l'aide de "PREPROC" le fichier des éléments, le fichier des noeuds, le fichier des conditions aux limites et le fichier de caractérisation physique correspondants aux différentes configurations. La variation de la permittivité et de la densité de charges est obtenue par la modification du fichier de la caractérisation physique.

Nous exécutons le programme "MEFPROC" pour différentes données d'une configuration, et nous recueillons pour chaque exécution la valeur du champ sur la pointe, le milieu de la barrière, l'extrémité de la barrière, le milieu de l'électrode plane, en dessous de l'extrémité de la barrière et juste sur le plan et enfin sur le plan à une distance  $2L$  de l'axe de symétrie de la configuration.

L'échelle de correspondance entre le système réel et la distance de l'écran sera déterminée la même pour toutes les configurations. Nous prenons la distance inter-électrodes  $d = 1$  [m] et le diamètre du plan qui représente la largeur du système  $D = 3 \times d = 3$  [m].



**Figure 57 :** Champ électrique à différents points.

### 3 - 3 - Contribution à l'amélioration du "PROC2D" :

Etant que nous proposons dès le début de la formulation, une approximation de l'inconnue "potentiel", la M.E.F reste une méthode approximative. Sa puissance est dans le fait qu'on a les moyens (par la formulation et le maillage) de réduire selon nos besoins l'erreur et d'améliorer ainsi la précision.

Notre manipulation du logiciel "PROC2D" nous a permis de localiser des manques (lacunes) concernant le déroulement et la mise en oeuvre de la méthode dès



éléments finis ainsi que quelques imperfections concernant la convergence et la qualité des résultats obtenus, de même pour la représentation graphique.

Nous citons les plus importantes de ces anomalies qui <sup>ont</sup> surgit pendant l'exploitation de notre modèle numérique et on envisage en parallèle quelques solutions pour parfaire ce programme utile.

### 3 - 3 - 1 - Manques au niveau du "PREPROC" :

#### a - Limitation de la taille du problème :

Le "PROC2D" traite des configuration pour un ensemble de noeuds situé aux alentours de 200 sur un PC. si la taille du problème dépasse cette limite, des erreurs peuvent être signalées par le programme.

Pour y remédier à cette lacune, on choisit soit :

- L'utilisation des éléments triangulaires linéaires de taille réduite ce qui revient à augmenter le nombre d'éléments et par la suite le nombre de noeuds. Ainsi, on évite quelques difficultés telles que la déviation et l'intégration numériques [11].
- L'utilisation des éléments triangulaires du type curviligne (voir chapitre 1).

Les

polynômes d'approximation de la fonction potentiel sont donc définis sur six (6) noeuds de chaque éléments.

#### b - Erreur de discrétisation :

Il est établi [4 , 5], que l'approximation faite par la méthode des éléments finis mène à la solution exacte quand la taille " h " des éléments tend ver zéro.

Cependant, la question capitale de la détermination pratique de l'erreur pour une discrétisation donnée n'est pas résolue, à part quelques comparaisons quand la solution exacte est connue [8].

Cette erreur joue un rôle important dans la précision des résultats. Pour la minimiser, il sera nécessaire ou tout au moins souhaitable de choisir des éléments compatibles avec la frontière du domaine (lieu de manifestation de l'erreur). Ce choix réside dans l'utilisation des éléments isoparamétriques (voir chapitre 1). Ce type d'éléments permet de modéliser une forme complexe avec un nombre réduit d'éléments standards. Il s'explique physiquement par le fait qu'aucun vide ou recouvrement n'apparaît entre les éléments une fois le maillage effectué.



c - Fonction entre la "grande" et la "petite fenêtre" et entre le "bain" et la "grande fenêtre" :

Le programme ne peut pas traiter les exemples, dont le modèle exige des frontières confondues entre la "petite" et la "grande fenêtre".

Exemple : un système pointe - plan avec une barrière située sur le plan ( $a / d = 1$ ) et de largeur égale à la largeur de "bain" ( $L / d = 3$ ).

Cette impossibilité est due à l'algorithme de définition des deux "fenêtres". Le problème se résout par l'adoption d'un maillage mixte d'éléments bidimensionnels et unidimensionnels à la fois. Tout en assurant la continuité des noeuds pour garantir un assemblage correct :

d - Elimination d'un élément :

Pour des instabilités imprévues, le "PREPROC" peut donner un maillage indésirable. Afin d'arranger les éléments, tous ceux de formes non correctes puis les redresser de façon conforme. *il est nécessaire d'éliminer*

e - Problème de sauvegarde :

Après l'obtention du fichier " RECOLT.DAT " et le lancement du "POSTPROC", on ne pourra plus les récupérer après le lancement du "PREPROC" pour une nouvelle configuration.

**3 - 3 - 2 - Manque au niveau du "MEFPROC" :**

La résolution est une opération numérique coûteuse surtout pour des systèmes de taille fastidieuse, elle représente l'étape la plus importante de l'analyse des systèmes par éléments finis . Il est dans ce cas indispensable d'adapter les méthodes de résolution de tels systèmes pour réduire au maximum le temps de calcul sans pour autant "toucher" à la précision des résultats numériques.

En profitant des propriétés de la matrice globale obtenue par la M.E.F (sprasite , présence d'agglomération, blocs et termes au voisinage de la diagonale, symétrie,.....), On procède pour éviter les divisions par zéro, réduire le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires et gagner une économie d'espace et de temps machine (gestion optimale de la mémoire) ceci en adoptant :

- Une méthode de stockage.
- Une méthode de résolution plus efficace.

Ce qui permet d'éviter la propagation d'erreur qui se manifeste au "POSTPROC".

**3 - 3 - 3 - Manques au niveau du post - processeur "POSTPROC" :**

Le post - processeur ne peut servir que pour la visualisation . Une fois la configuration est introduite dans le "PREPROC", la résolution est achevée dans le "MEFPROC" et le fichier "RECOLT.DAT" est obtenu, on ne peut plus intervenir



pour des changements de structure à moins pour changer la caractérisation, on agit directement sur les fichiers "F.DAT" et "GONDLIM.DAT" ensuite, on relance l'exécution du "MEFPROC".

a. Allures du champ et du potentiel électrostatiques :

Ce qu'on peut visualiser comme lignes de champ et équipotentielles sont représentées par des petits segments (vecteurs). Ceci peut ne pas être bien conforme aux allures théoriques connues. Surtout si la taille des éléments est considérable (figure 58).

D'où il est souhaitable de les tracer par des lignes pleines. De ce fait, on a la procédure d'interpolation ou de lissage qui permet de créer des lignes solides passant préalablement au voisinage des points de même, ou du même champ.

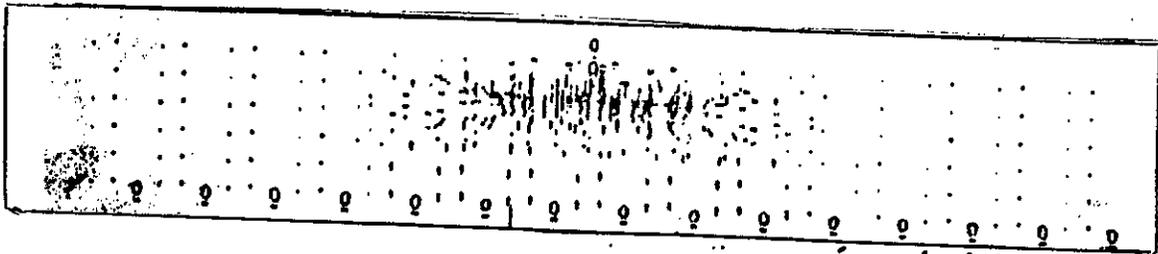
potentiel

Il existe donc plusieurs techniques d'interpolation, on cite par exemple :

- Interpolation par la méthode des moindres carrées.
- Interpolation par la méthode "SPLINE" qui existe pour des structures planes sous le nom "SPLINE TWO" et pour celles en tridimensionnel sous le nom "SPLINE CUBIQUE".

La seconde méthode et la plus récente et efficace, du fait qu'elle donne une solution unique et de grande convergence (Annexe F). Elle consiste à choisir une marge de points du milieu discret qui ont approximativement le même potentiel (ou champ).

La sélection de ces points se fait à partir du fichier des résultats "RECOLT.DAT" le programme trace de lui même suivant l'algorithme d'interpolation toutes les lignes désirées.



**Figure 58 :** Allure des lignes du champ électrique (représentation par segment).

### 3 - 4 - Conclusion :

Dans sa première implémentation, le programme "PROC2D" est limité, mais il intègre les principales étapes de la méthode des éléments finis et surtout, l'exigence de convivialité que requièrent les opérations du maillage et de visualisation des résultats de calcul.

L'amélioration des problèmes rencontrés pourra alors être entreprise : utilisation des éléments plus performants, étude de convergence, traitement numérique particulier aux régions proches de la barrière et de la pointe (raffinement), taille du problème



---

maximale, précision nécessaire, autres méthodes de résolution pour les très grands systèmes linéaires visualisations des résultats, etc.....

Pour améliorer la précision des résultats sur le plan programmation, il peut être possible de faire une comparaison avec les solutions analytiques quand elles existent.

" Appelons donc les hommes de génie ceux qui font vite ce que nous faisons lentement ".  
(Gens de qualité) Henti Chamfort.

" Il n' y a pour l'homme que trois événements, naître, vivre et mourir. Il ne se sent pas naître, il souffre à mourir, et il oublie de vivre"  
(Le métier de vivre) Goethe.

## Chapitre Quatre :

### Exploitation et discussion

### des résultats numériques



#### 4 - 1 - Généralités :

Après l'introduction du modèle numérique et pour toutes les configurations étudiées, nous comparons la valeur du champ électrique en différents points du système (figure 56) à celle du champ au niveau de la pointe. Nous aurons, ainsi pour chaque configuration cinq (05) courbes tracées dans le même repère avec comme variable, un des paramètres barrière.

Nous commençons par étudier le cas de la barrière à surfaces propres en absence de charges d'espace.

#### 4 - 2 - Influence de la position de la barrière :

La barrière isolante de largeur ' $L = 0,6 \cdot d$ ', d'épaisseur ' $e = 0,005 \cdot d$ ' et permittivité ' $\epsilon_r = 6$ ' est prise parallèle au plan.

Pour étudier l'influence de la position, nous choisissons six (06) distances de la barrière vis à vis de l'électrode pointe, des positions sont définies par le rapport " $a / d$ " et sont :

$$a / d = 0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8.$$

Nous supposons que l'épaisseur de la barrière est négligeable devant la distance inter - électrodes.

#### Discussions :

La figure (59) présente les variations du champ aux différents points du système en fonction des différentes positions de la barrière. Nous obtenons ainsi, un groupe de cinq (05) caractéristiques qui se rapprochent les unes des autres par leur allure.

La première remarque à faire est que le champ au milieu de la barrière représenté par ' $E_2 / E_1$ ' est prédominant par rapport aux champs aux autres points, le moins faible est celui du point situé sur le plan et est représenté par la valeur ' $E_6 / E_1$ '.

Nous avons donc, " $E_2 > E_3 > E_4 > E_5 > E_6$ " et le champ maximal " $E_1$ " se trouve sur la pointe.

En général, le champ électrique augmente quand la barrière s'approche de l'électrode haute tension. L'augmentation maximale est obtenue quand la barrière isolante touche la pointe ( $a / d = 0\%$ ). Dès que la barrière s'éloigne de la pointe ( $a / d > 0,1$ ) les champs à la surface de la barrière et du plan diminuent considérablement et restent pratiquement constants. Ainsi, l'effet de la barrière serait surtout géométrique et caractérisé par l'allongement de la décharge qui se fait dans l'air en contournant le bout de la barrière [62].

Cet allongement sera relativement réduit quand la barrière s'approche du plan et la rigidité du système sans barrière n'augmentera que très peu (ou pas du tout).

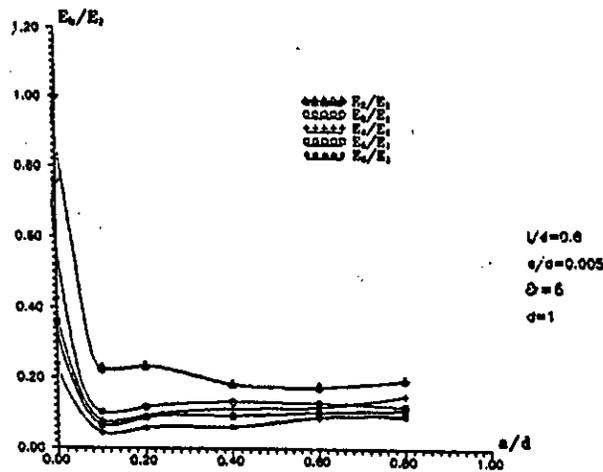


Figure 59 : Champ électrique en fonction de la position de la barrière.

#### 4 - 3 - Influence de la largeur de la barrière :

Pour étudier la variation du champ électrique en fonction de la largeur de la barrière, nous avons considéré six (06) valeurs " $L / d$ " variante de 0,2 à 1,5.

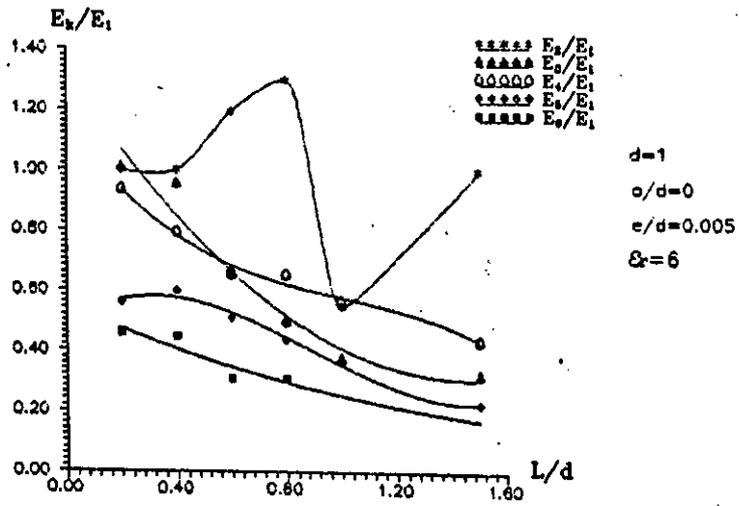
Dans un premier temps, nous déterminons l'influence de la largeur de la barrière pour une position " $a / d = 0\%$ " et dans un second temps pour la position " $a / d = 20\%$ ", l'épaisseur et la permittivité sont maintenues constantes. Les figures (60 - a) et (60 - b) présentent l'ensemble des résultats obtenus pour ces deux positions.

#### Discussions :

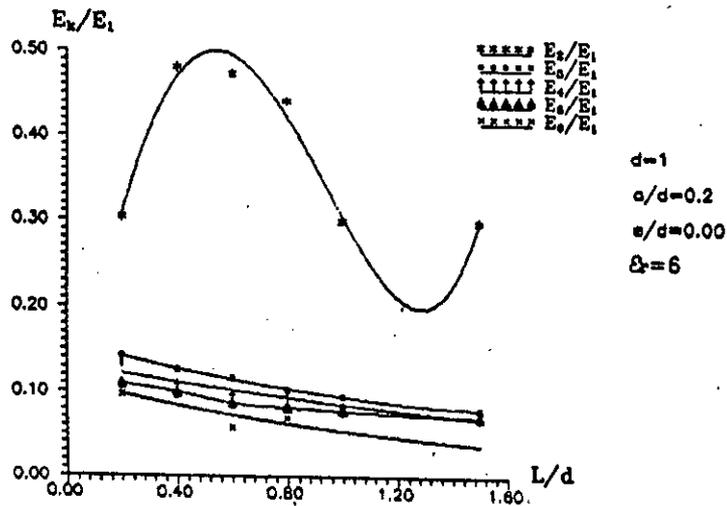
##### • Cas de position " $a / d = 0\%$ " :

A l'exception du champ au lieu de la barrière, le reste des champs relatifs ont une variation décroissante, en notant que cette fois-ci le champ à l'extrémité de la barrière se trouve relativement faible à celui du milieu du plan et ceci pour les largeurs supérieures à " $0,6 \cdot d$ ".

Pour la variation du champ au milieu de la barrière, nous remarquons une augmentation rapide à partir de " $L = 0,4 \cdot d$ " jusqu'à " $0,8 \cdot d$ " ensuite, une chute brusque correspondant à une diminution du champ ' $E_2 / E_1$ ' de 70% pour " $L = d$ " (par rapport à la valeur de crête obtenue).



**Figure 60 - a :** Le champ électrique en fonction de la largeur e la barrière.



**Figure 60 - b :** Le champ électrique en fonction de la largeur de la barrière

Au delà de ' $L = d$ ' l'influence de la largeur est plus faible.



Nous tenons à signaler pour cette configuration ( $a/d = 0\%$ ), le champ maximal est obtenu juste au dessous de la barrière (le milieu en face du plan), ce qui fait que le rapport  $E_2/E_1$  dépasse les 100%.

• Cas de position ' $a/d = 20\%$ ' :

Cette famille de courbes présente les mêmes variations que celles obtenues pour " $a/d = 0\%$ " mais pour des valeurs plus faibles de  $E_k/E_1$  (presque la moitié). Le classement de ces courbes est le même que pour les graphes donnant l'influence de la position de la barrière.

Nous notons aussi que la chute du champ relatif  $E_2/E_1$  s'est déplacée cette fois ci de " $L = d$ " à " $L = 10,3 \cdot d$ " (approximativement) et que la décroissance des autres courbes  $E_k/E_1$  est moins rapide que précédemment ( $a/d = 0$ ).

**Constatation :**

Les champs relatifs  $E_k/E_1$  diminuent aussi bien avec l'éloignement de la barrière vis à vis de la pointe qu'avec l'augmentation de sa longueur. Ceci est valable pour tous les points étudiés sauf le point ' $E_2$ ' situé au milieu de la barrière du côté de la pointe. Nous remarquons alors que la position de la barrière entre de nouveau en considération.

Dans les cas de configurations étudiées, l'influence de la largeur n'est pas considérable lorsque cette dernière est supérieure à la distance ' $d$ ' (pointe - plan).

Ainsi, la plus grande augmentation du champ est remarqué pour la valeur ' $L = 0,8 \cdot d$ ' en ce qui concerne le champ au milieu de la barrière.

Nous concluons, que les deux paramètres de la barrière, position et largeur, sont très liés l'un à l'autre. En effet, d'après les résultats obtenus, on peut affirmer que l'influence de la largeur est beaucoup plus intéressante pour la position de la barrière " $a/d = 0\%$ " et juste pour le champ relatif " $E_2/E_1$ ".

**4 - 4 - Influence de l'épaisseur de la barrière :**

Dans cette partie, il s'agit d'étudier l'influence de l'épaisseur de la barrière sur le champ électrique. Nous nous intéressons qu'aux deux configurations avec ' $a/d = 0\%$ ' et ' $a/d = 20\%$ ' qui représente l'intervalle où se manifeste l'amélioration optimale de la rigidité.

Pour une largeur et une permittivité maintenues constantes, nous calculons aux mêmes points ' $E_k$ ' le champ relatif par rapport à celui de la pointe pour différentes valeurs de l'épaisseur ' $e$ '.

Les figures (61 - a et b) présentent l'ensemble des résultats obtenus pour les deux positions de la barrière.

**Discussions :**



Nous remarquons en premier lieu que l'influence est surtout importante pour les faibles distances de la barrière ( $a/d = 0\%$ ) et ceci pour des épaisseurs ne dépassent pas  $e/d = 3 \cdot 10^{-2}$ .

Bien que nous avons utilisés des épaisseurs allant jusqu'à 15 [cm] (qui est un cas exagéré), il apparaît intéressant d'étudier l'influence des barrières très épaisses. Aussi, nous n'avons pas pu aller au dessous de  $5 \cdot 10^{-3}$  [m] du fait des possibilités limitées du programme "PROC2D"

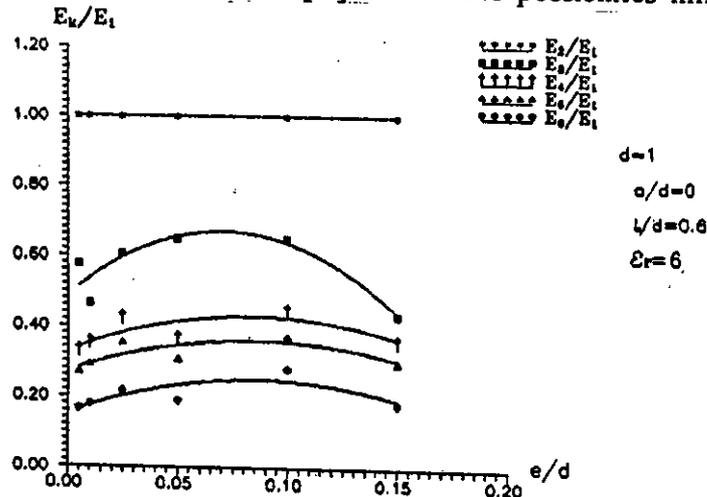


Figure 61 - a : Le champ électrique en fonction de l'épaisseur de la barrière.

Pour les deux positions de la barrière, le champs relatif suit toujours la même inégalité " $E_2 > E_3 > E_4 > E_5 > E_6$ ", ce qui nous pousse à étudier particulièrement le champ au milieu de la barrière.

Pour le champ relatif  $E_2/E_1$ , l'épaisseur n'a pratiquement aucune influence dans le cas de la position " $a/d = 0\%$ ". Tandis qu'elle joue un rôle considérable en cas de la position " $a/d = 20\%$ ".

Toutes les courbes pour les deux cas de position ont la même allure, une augmentation pour les petites épaisseurs ensuite une décroissance lente pour les grandes.

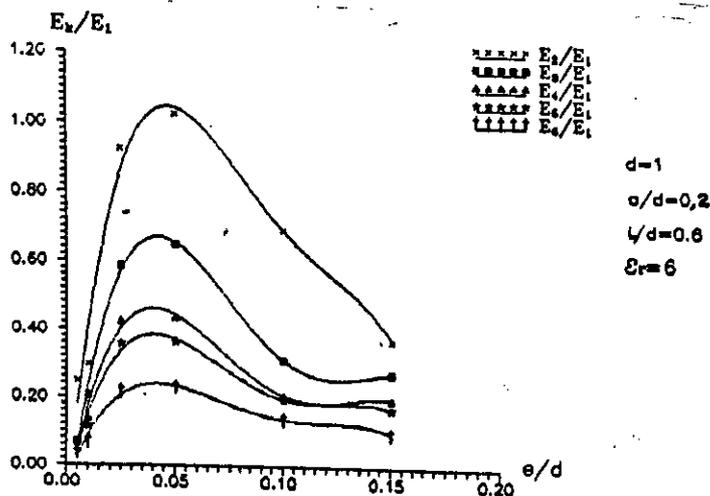


FIG 61.b : Le champ électrique en fonction de l'épaisseur de la barrière.



**Constatations :**

L'épaisseur de la barrière isolante joue un rôle considérable sur la rigidité de l'intervalle : pointe - plan relativement aux rôles de sa position et de sa largeur. Elle a une influence majeure pour les petites distances ' a / d'.

En ce qui concerne nos résultats, les barrières isolantes dont l'épaisseur relative et "e / d = 5 10<sup>-2</sup>" donnent la meilleure augmentation du champ électrique et pour les deux positions considérées.

**4 - 5 - Influence de la permittivité de la barrière :**

Pour observer l'influence de la permittivité du matériau isolant de la barrière sur le champ au différents points considérés, nous avons fait varier la permittivité relative de 2 à 10.

Dans ce cas d'étude, nous prenons les deux positions relatives de la barrière par rapport à la distance entre - électrodes et pour chacune d'elles, nous étudions deux valeurs différentes de la largeur ( L / d = 0,4 et L / d = 1).

L'épaisseur est prise constante et est égale à e / d = 5 10<sup>-3</sup>. Les figures (62-a et b) montrent l'évolution du champ aux points " E<sub>k</sub>" pour la position ' a / d = 0% '.

Les figures (62 - c et d) présentent , quand à elles les mêmes variations pour la position ' a / d = 20% ' .

**Discussions :**

- Cas de la position ' a / d = 0% ' :

Pour une largeur " L = d " , nous remarquons que le champ est légèrement influencé par la permittivité, du moins dans cette plage de variation, mis à part le cas de la petite largeur ' L / d = 0,4 ' où nous notons une augmentation du champ aux points sur le plan et celui à l'extrémité de la barrière.

Le champ relatif 'E<sub>2</sub> / E<sub>1</sub>' au milieu de la barrière est égale à 1 quelle que soit la permittivité, du fait que la pointe et le milieu de la barrière sont confondus.

On note d'une autre part, que l'augmentation de la permittivité influe sur l'ordre de classement des champs aux différents points :

En effet nous remarquons que :

• Pour L = 0,4 . d : E<sub>4</sub> > E<sub>2</sub> > E<sub>5</sub> > E<sub>6</sub> > E<sub>3</sub> pour les permittivités ε<sub>r</sub> > 4 .

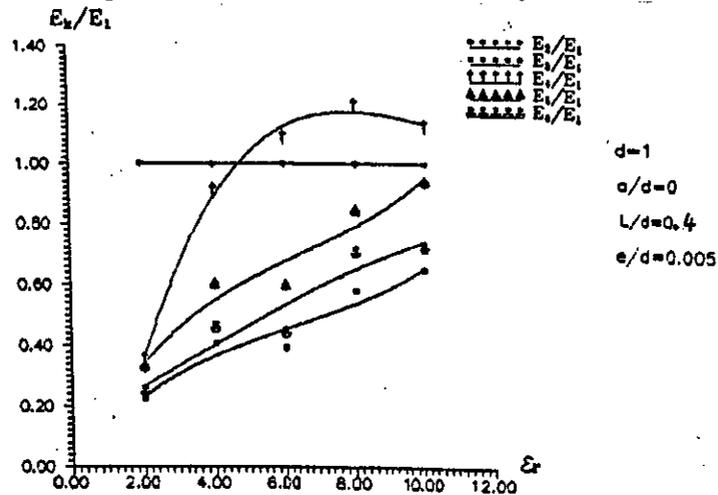
E<sub>2</sub> > E<sub>4</sub> > E<sub>5</sub> > E<sub>6</sub> > E<sub>3</sub> pour les permittivité ε<sub>r</sub> < 4 .

• Pour L = d : E<sub>2</sub> > E<sub>4</sub> > E<sub>3</sub> > E<sub>5</sub> quelle que soit la permittivité.

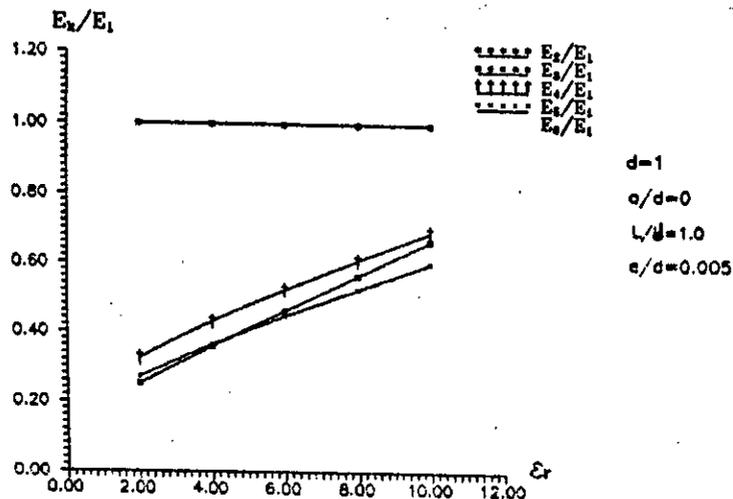


Nous notons l'inexistence du champ relatif  $E_6 / E_1$  en ce qui concerne le point sur le plan à la distance  $x = 2 \cdot L = 2 \cdot d$ .

Le champ " $E_4 / E_1$ " est remarqué supérieur au champ " $E_1$ " pour les permittivités supérieures à  $\epsilon_r = 4$ .



**Figure 62 - a :** Le champ électrique en fonction de la permittivité de la barrière.



**Figure 62 - b :** Le champ électrique en fonction de la permittivité de la barrière.

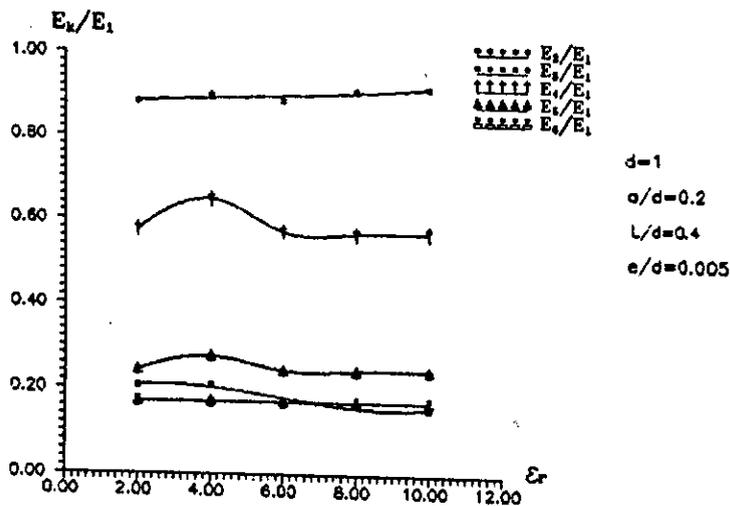


• Cas de la position "  $a / d = 20\%$  " :

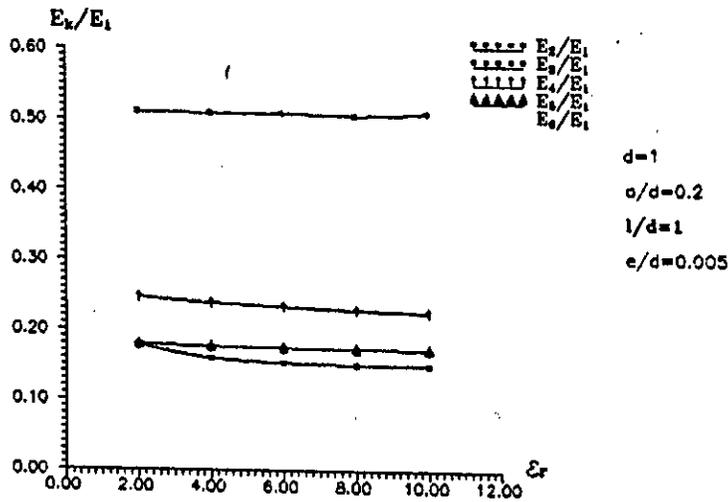
Pour la largeur '  $L = 0,4 \cdot d$  ' nous constatons une faible augmentation du champ aux différents points lorsque la permittivité passe de 2 à 4 ensuite les courbes diminuent et ont tendance à prendre des valeurs constantes quelle que soit la permittivité. Le champ relatif au milieu de la barrière prend une allure lentement croissante.

Pour la largeur "  $L = d$  " , l'influence est très faible et plus remarquée pour les petites valeurs que pour les grandes. le rapport des champs '  $E_k / E_1$  ' tend à se stabiliser avec l'augmentation de la permittivité.

La comparaison entre les deux largeurs de la barrière fait apparaître une allure presque similaire des courbes '  $E_k / E_1$  ' , mais des niveaux de champs plus importantes pour "  $L/d = 0,4$  ".



**Figure 62 - c :** Le champ électrique en fonction de la permittivité de la barrière.



**Figure 62 - d :** le champ électrique en fonction de la permittivité de la barrière.

Pour ce qui est des courbes ' $E_k / E_1$ ' en cas de la position " $a / d = 0\%$ ", nous constatons une grande influence de la permittivité est spécialement pour le champ ' $E_2$ ' au milieu de la barrière qui est toujours le prédominant.

A l'extrémité de cette dernière, le champ est plus faible comparé aux autres points étudiés.

L'influence de la permittivité devient faible aussi bien que la barrière s'éloigne de la pointe que la largeur diminue.

#### 4 - 6 - Influence barrière métallique :

Dans cette partie, nous prenons une seule configuration où la position, l'épaisseur, la largeur et la permittivité de la barrière sont constantes. Nous étudions la variation des champs relatifs en différents points en fonction de la densité de charges d'une barrière métallique.

Dans ce cas de figure, nous fixons la position relative de la barrière à 20 % à partir de la pointe, son épaisseur à ' $e / d = 5 \cdot 10^{-3}$ ', et sa longueur à 60% de la distance 'pointe - plan'. Sa permittivité est prise égale à l'unité ( $\epsilon_r = 1$ ) du fait qu'elle est conductrice et sa densité de charge relative prend des valeurs comprises entre 1 et 15 dans le plan de calcul et correspondent à une barrière conductrice.

La figure (63) montre la variation des champs relatifs ' $E_k / E_1$ ' en fonction des densités des charges.

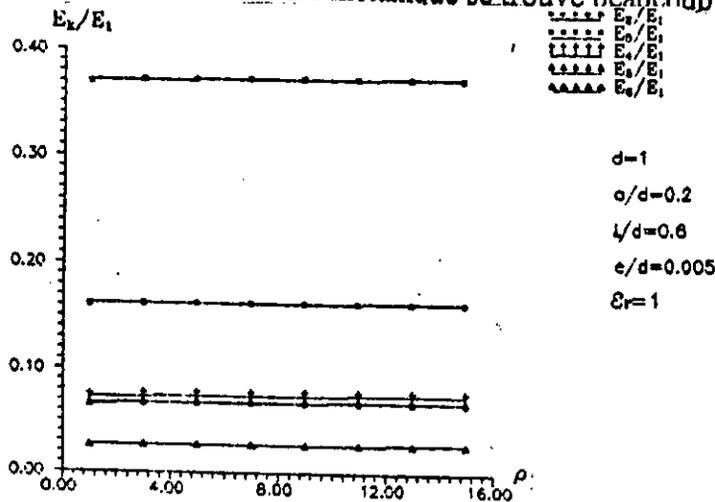


**Discussions :**

Les courbes ' $E_k / E_1$ ' sont pratiquement constantes quelle que soit la densité de charges relatives. le champ prédominant est celui du point situé au milieu de la barrière du fait qu'il soit le plus proche de la pointe où le champ maximal est ' $E_1$ '. En s'éloignant de la pointe et /ou du milieu de la barrière , le champ électrique devient de plus en plus faible.

**Constatations :**

Une barrière métallique rend le champ plus uniforme. Comparé aux champ pour les barrières isolantes celui de la barrière métallique se trouve beaucoup plus diminué.



**Figure 63 :** Le champ électrique en fonction de la densité de charge d'une barrière métallique.

**4 - 7 - Limites numériques du modèle :**

- Impossibilité de la réalisation de quelques configurations :

L'obstacle principal auquel nous étions confortés était celui du maillage qui doit être structuré si on veut effectuer du calcul assez rapide et avec une précision acceptable. Ce ci est noté particulièrement pour des configuration difficiles à simuler par le 'PROC2D' telles que :

- Une barrière positionnée à ' $a / d = 1$ ' (sur plan).
- Une barrière de largeur ' $L / d = 2$ '.
- Une barrière d'épaisseur inférieure à ' $e / d = 5 \cdot 10^{-3}$ ' (cas réels).
- Le marquage des caractéristiques physiques (conductivité superficielle, résistivité,...)

- Erreurs dues à la discrétisation :



La convergence par le programme est garantie, seule la question capitale et de pouvoir déterminer pratiquement l'erreur commise par un maillage donné. Ceci n'est pas résolu qu'à part quelques comparaisons quand la solution exacte est connue.

#### 4 - 8 - Conclusions :

Un ensemble de conclusions peut nous renseigner sur les différentes phases d'étude à entreprendre avant d'utiliser une barrière isolante dans la technique d'isolement.

Il se dégage alors trois paramètres importants parmi tant d'autres. En se basant sur la nature et la géométrie de la barrière, il est important de connaître :

-1- La distance pointe - plan ( $d$ ) pour connaître la position de la barrière qui donnerait la valeur optimale du champ électrique.

-2- La largeur (et éventuellement l'épaisseur) de la barrière pour connaître l'amélioration maximale du champ électrique qui en résulte pour une distance pointe - plan donnée.

-3- La permittivité de la barrière (distorsion du champ).

Selon la position choisie, on peut connaître à l'avance de combien peut - on rétrécir notre intervalle d'isolation, en utilisant une barrière dont les paramètres sont bien définis.

La simulation numérique n'est pas pour autant inutile dans la mesure où elle nous permet d'avoir une idée sur la contribution statique au phénomène globale. Une multiples limites de l'outil de calcul, est le fait qu'il résout des problèmes stationnaires, or que le problème auquel nous nous intéressant est dynamique. Cependant, en complétant notre travail par l'étude des systèmes avec charges d'espace on pourrait s'approcher du cas réel juste avant l'apparition des décharges préliminaires.

" Mille choses avancent, neuf cent quatre vingt dix neuf reculent ; c'est là le progrès ".  
(Tel quel) **Charles Monseigt.**

" L'homme raisonnable s'adapte lui même au monde, celui qui est déraisonnable persiste à vouloir adapter le monde à lui même. Aussi tout progrès dépend de l'homme déraisonnable"

(La question d'argent ) **Edouard Herriot.**

## **Conclusion générale.**

" L'homme s'ennuie du bien, cherche le mieux, trouve le mal, et s'y soumet, crainte du pire"

(Folies et sottises) **Louis Aragon.**

" On prouve tout ce qu'on veut et la vraie difficulté est de savoir ce qu'on veut prouver"

(La volonté de puissance) **Laure Conan.**



## Conclusion Générale.

Dans ce travail, nous avons abordé un problème encore traité comme sujet de recherche. Il est délicat dans la mesure où il lie la champ électrique à la présence d'une distribution quelconque de charges d'espace entre barrière et l'électrode pointe.

D'un point de vue théorique, nous espérons avoir apporté quelques clarifications sur la répartition du champ électrique dans un système 'pointe - plan' avec barrière, ainsi que sur l'influence des différents paramètres de la barrière sur la rigidité diélectrique du système.

Nous estimons avoir tiré grand bénéfice de cette expérience puisque 'entre autres, nous avons pris connaissance des méthodes numériques et de la formulation mathématique, très importantes dans les problèmes d'ingénieurs. Nous espérons avoir modestement offert au lecteur un point de vue original sur les méthodes et espérons l'avoir ainsi aidé à les comprendre.

Le modèle numérique que nous avons envisagé présente encore des insuffisances. L'une d'elles est de ne pas avoir fait intervenir les densités de charges qui nécessitent une connaissance physique plus détaillée. Nous espérons par la volonté de mieux connaître, de pouvoir aboutir à une simulation plus adéquate dans le futur.

Pour ce qui est de la qualité des résultats, cette étude a permis l'acquisition d'une convergence non négligeable dont nous sommes pleinement rassurés, du fait qu'ils sont en accord avec la théorie connue dans ce domaine. Nous espérons avoir montré que le fait que la solution analytique et/ou expérimentale concernant la distribution du champ ne soit pas bien connue pour une comparaison quantitative sérieuse n'est pas un handicap pour la compréhension qualitative du phénomène physique globale auquel nous nous sommes intéressés, et pour l'obtention de grandeurs approximatives qui peuvent y servir.



Cependant nous n'avons jusqu'ici traité que des petits problèmes (208 noeuds au maximum) car le programme exploité "PROC2D" est limité . Pour ce qui est des erreurs introduites surtout du fait de la discrétisation numérique, nous n'avons pas pu les estimer puisqu'elles nécessitent des capacités numériques plus performantes dépassant les possibilités actuelles du "PROC2D" .

En vue de compléter , je tiens à suggérer les positions suivantes pour une éventuelle continuation de l'étude :

- En premier lieu, nous pensons à l'amélioration de l'outil numérique "PROC2D" par la modification de ses capacités, tout en suivant les propositions citées dans le chapitre III.

- Il serait considérablement important de traiter par la suite les problèmes de petits intervalles d'air pointe - plan ( $d \leq 30$  [cm]) ainsi que les longs ( $d \geq 250$  [cm]), où les phénomènes de décharge sont complètement différents. Il serait ainsi intéressant de donner aux conditions limites une grande variété.

- Je recommande, d'un autre côté, une mise en oeuvre sur ordinateur des tests complets et des comparaisons systématiques des résultats obtenus par l'utilisation de véritables "boîtes noires " qui sont des logiciels d'éléments finis développés ailleurs, ou par d'autres méthodes numériques qui ont atteint un niveau de perfection certain.

Nous pensons enfin que notre objectif n'était pas l'énumération de ces variantes, mais la contribution au développement de la théorie en question et l'amélioration des techniques de calcul en général, en vue d'une utilisation particulière....

" On tourne une pensée comme un habit, pour s'en servir plusieurs fois ".  
(Le prisonnier) **Jean Monnet.**

" Mais tout n'est pas avantage chez le chercheur , plus il trouve moins il a du temps  
pour connaître sa nouvelle ignorance"

(Tentatives ) **Francis Hertel.**

## **Annexes.**

" S'il savaient où se trouve ce qu'ils cherchent, il ne chercheraient pas.  
(Les caractères) **Renée Vivien.**

"Il ne suffit pas , pour écrire , d'attirer l'attention et de la retenir, il faut encore la  
satisfaire"

(Promenades à Rome) **Vincent Tristan.**



## Annexe A .

### Transformation des formes integrales.

#### Intégration par parties :

Ca permet de transformer une forme intégrale de manière à diminuer les conditions imposées aux fonction  $\Phi$ .

#### Une dimension :

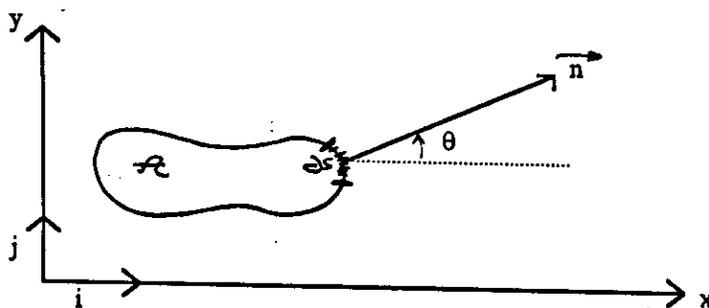
$$\bullet \int_{x_1}^{x_2} \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Phi dx + (\psi \cdot \Phi) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\bullet \int_{x_1}^{x_2} \psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \left( \psi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

#### Deux dimension :

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\Lambda} \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy &= - \int_{\Lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Phi dx dy + \oint_{\partial \Lambda} \psi \cdot \Phi dy \\ &= - \int_{\Lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Phi dx dy + \oint_{\partial \Lambda} \psi \cdot \Phi \cdot L \cdot ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\Lambda} \psi \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy &= - \int_{\Lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Phi dx dy + \oint_{\partial \Lambda} \psi \cdot \Phi dx \\ &= \int_{\Lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Phi dx dy + \oint_{\partial \Lambda} \psi \cdot \Phi \cdot m \cdot ds \end{aligned}$$



$\vec{n}$  : position vers l'extérieur.



$$l = \vec{n} \cdot \vec{i} = \cos \theta$$

$$m = \vec{n} \cdot \vec{j} = \sin \theta$$

$$\partial A = dx dy$$

$$\partial / \partial n = l (\partial / \partial x) + m (\partial / \partial y)$$

$$\partial x = -m \partial s$$

$$\partial y = l \partial s$$

$$\bullet \int_A \psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx dy = - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy + \oint_s \psi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot l \cdot ds$$

$$\bullet \int_A (\psi \cdot \Delta \Phi - \Phi \cdot \Delta \psi) dx dy = - \oint_s \left( \psi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds$$

$$\text{Où : } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



## Annexe B .

### Construction d'une fonctionnelle .

$\pi$  : fonctionnelle ;  $\pi = \pi (\Phi , \partial\Phi / \partial x)$  :

La première variation de  $\pi$  est définie par :

$$\delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial\Phi} \delta\Phi + \frac{\partial\pi}{\partial\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} \delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \dots$$

Où :  $\delta\Phi$  et  $\delta(\partial\Phi / \partial x)$  sont des variations virtuelles quelconques de  $\Phi$  et  $(\partial\Phi / \partial x)$ .

$(\partial\pi / \partial\Phi)$  : est obtenue par dérivation formelle de  $\pi$  par rapport à  $\Phi$ .

$(\partial\pi / \partial(\partial\Phi / \partial x))$  : est obtenue par dérivation formelle de  $\pi$  par rapport à  $(\partial\Phi / \partial x)$

L'opérateur  $\delta$  à les propriétés suivantes :

- $\delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial x}$
- $\delta(\delta\Phi) = 0$
- $\delta\left(\int_v \Phi dv\right) = \int_v \delta\Phi dv$
- $\delta(\Phi + v) = \delta\Phi + \delta v$
- $\delta(\Phi v) = \Phi \delta v + v \delta\Phi$
- $\delta(c\Phi) = c\delta\Phi$  (c : constante)

On peut construire une fonctionnelle  $\pi$  tel que :  $\delta\pi = G = 0$  (forme intégrale) en intégrant par parties si nécessaire :

$$G = \int_v (\delta\Phi) \left\{ \Delta(\Phi) + \frac{\rho}{\epsilon_0} \right\} dv = 0$$

Ceci est en particulier possible puisque :

-  $\Delta$  est linéaire et toutes les dérivées sont d'ordre pair.



-  $\rho / \epsilon_0$  est indépendant de  $\Phi$ .

Ces conditions sont suffisantes pour qu'une fonctionnelle existe, mais ne sont pas nécessaires.

$$\Delta\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

La forme intégrale G après une intégration par parties donne :

$$G = - \int_v \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \psi \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv + \int_\Gamma \psi \frac{\partial\Phi}{\partial n} ds = 0$$

Voir annexe A.

En choisissant comme fonction de pondération  $\psi = \delta\Phi$  on obtient :

$$G = \int_v \left( \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial x} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial y} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \delta\Phi \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv + \int_\Gamma \delta\Phi (f_s - \alpha u) ds = 0$$

Avec  $(\partial\Phi / \partial n) + \alpha\Phi = f_s$  : condition (u) de Neumann.

Si nous définissons une fonctionnelle F sous la forme :

$$F\left(\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \int_v \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 - \Phi f_v \right) dv + \int_v \left( \frac{1}{2} \alpha \Phi^2 - \Phi f_s \right) ds$$

Nous pouvons vérifier que :

$$\delta\pi = G = 0.$$



## Annexe C.

### Les fonctions de forme et leurs dérivées.

L'élément utilisé est un triangle à 6 noeuds dont les fonctions de forme et leurs dérivées sont données sur le tableau suivant :

Noeud	{N}	{ $\delta N / \delta \xi$ }	{ $\delta N / \delta \eta$ }	{ $\delta^2 N / \delta \xi^2$ }	{ $\delta^2 N / \delta \eta^2$ }	{ $\delta^2 N / \delta \eta \delta \xi$ }
1	$-1(1 - 2\lambda)$	$1 - 4\lambda$	$1 - 4\lambda$	4	4	4
2	$4\xi\lambda$	$4(\lambda - \xi)$	$-4\xi$	-8	0	-4
3	$-\xi(1 - 2\xi)$	$4\xi - 1$	0	4	0	0
4	$4\xi\eta$	$4\eta$	$4\xi$	0	0	4
5	$-\eta(1 - 2\eta)$	0	$4\eta - 1$	0	4	0
6	$4\eta\lambda$	$-4\eta$	$4(\lambda - \eta)$	0	-8	4

Avec :  $\lambda = 1 - \xi - \eta$



## Annexe D.

### Les différents termes de la transformation isoparamétrique.

On a une transformation de type éléments finis ainsi :

$$r(\xi, \eta) = \langle N \rangle (r_i) \quad (1)$$

$$z(\xi, \eta) = \langle N \rangle (z_i) \quad (2)$$

En remplaçant les valeurs des fonctions de forme (voir annexe B), on obtient :

$$r(\xi, \eta) = -\lambda(1-2\lambda)r_1 + 4\xi\lambda r_2 - \xi(1-2\xi)r_3 + 4\xi\eta r_4 - \eta(1-2\eta)r_5 + 4\eta\lambda r_6 \quad (3)$$

Sachant que :  $\lambda = 1 - \xi - \eta$

On a :

$$r(\xi, \eta) = -\lambda(\xi + \eta - 1)(2\xi + 2\eta - 1)r_1 + 4\xi(1 - \xi - \eta)r_2 - \xi(1 - 2\xi)r_3 + 4\xi\eta r_4 - \eta(1 - 2\eta)r_5 + 4\eta(1 - \xi - \eta)r_6 \quad (4)$$

D'où on obtient après réarrangement :

$$r(\xi, \eta) = -\lambda(2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta - 3\xi + 3\eta + 1)r_1 + (4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta)r_2 + (2\xi^2 - \xi)r_3 + 4\xi\eta r_4 - (\eta^2 - \eta)r_5 + (-4\eta^2 - \xi\eta + 4\eta)r_6 \quad (5)$$

De même pour la coordonnée  $z$  :

$$z(\xi, \eta) = -\lambda(2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta - 3\xi + 3\eta + 1)z_1 + (4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta)z_2 + (2\xi^2 - \xi)z_3 + 4\xi\eta z_4 - (\eta^2 - \eta)z_5 + (-4\eta^2 - \xi\eta + 4\eta)z_6 \quad (6)$$



Ainsi les dérivées partielles  $r$  et  $z$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial r / \partial \xi &= (4\xi + 4\eta - 3) r_1 + (4 - 8\xi - 4\eta) r_2 + (4\xi - 1) r_3 + 4\eta r_4 - 4\eta r_6 \\ \partial r / \partial \eta &= (4\xi + 4\eta - 3) r_1 - 4\xi r_2 + 4\xi r_4 - (4\eta - 1)r_5 - (4 - 8\eta - 4\xi) r_6 \end{aligned} \quad (7)$$

Et :

$$\begin{aligned} \partial z / \partial \xi &= (4\xi + 4\eta - 3) z_1 + (4 - 8\xi - 4\eta) z_2 + (4\xi - 1) z_3 + 4\eta z_4 - 4\eta z_6 \\ \partial z / \partial \eta &= (4\xi + 4\eta - 3) z_1 - 4\xi z_2 + 4\xi z_4 - (4\eta - 1)z_5 - (4 - 8\eta - 4\xi) z_6 \end{aligned} \quad (8)$$

D'où la matrice jacobienne  $[J]$  de la transformation isoparamétrique  $(z, r) \Rightarrow (\xi, \eta)$  :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

On a aussi la matrice jacobienne inverse  $[j]$  de la transformation isoparamétrique  $(x, h) \Rightarrow (z, r)$  :

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dont les éléments sont :

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{\det J} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{1}{\det J} \frac{\partial r}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = -\frac{1}{\det J} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{\det J} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

Avec :

$$\det J = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \quad (11)$$



Les dérivées secondes des coordonnées  $z, r$  sont :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} &= 4 r_1 - 8 r_2 + 4 r_3 \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} &= 4 z_1 - 8 z_2 + 4 z_3 \\
 \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} &= 4 r_1 + 4 r_5 - 8 r_6 \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} &= 4 r_1 + 4 r_5 - 8 r_6 \\
 \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial \xi} = 4 r_1 - 4 r_2 + 4 r_4 - 4 r_6 \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} = 4 z_1 - 4 z_2 + 4 z_4 - 4 z_6
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

### A - Expression des dérivées premières :

Pour toute variable  $\xi$  on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} (\xi) &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} (\xi) \\
 \frac{\partial}{\partial z} (\xi) &= \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} (\xi)
 \end{aligned} \quad (13)$$

Avec :

$\frac{\partial \xi}{\partial r}$  ;  $\frac{\partial \eta}{\partial r}$  ;  $\frac{\partial \xi}{\partial z}$  ;  $\frac{\partial \eta}{\partial z}$  ont été défini précédemment.

### B - Expression des dérivées secondes :

On a pour toute variable  $\xi$  :



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\xi) \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\xi) \\ \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (\xi) \end{pmatrix} = [T_1] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (\xi) \end{pmatrix} + [T_2] \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\xi) \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\xi) \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (\xi) \end{pmatrix} \quad (14)$$

La matrice [T2] est une matrice (3 × 2) dont les éléments sont construits à partir des éléments de la matrice [j] :

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2 j_{11} j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2 j_{21} j_{22} \\ j_{11} j_{21} & j_{12} j_{22} & (j_{11} j_{22} + j_{12} j_{21}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Avec :  $j_{ij}$  sont les termes de la matrice [j]

La matrice [T<sub>1</sub>] est définie par :

$$[T_1] = -[T_2] [C_1] [j] \quad (16)$$

Où :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial j_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial j_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial j_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial j_{22}}{\partial \eta} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial j_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial j_{21}}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial j_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial j_{22}}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Avec :  $J_{ij}$  sont les termes de la matrice jacobienne [J].

Enfin on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\xi) &= T_1^{11} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi) + T_1^{12} \frac{\partial}{\partial \eta} (\xi) + T_2^{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\xi) + T_2^{12} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\xi) + T_2^{13} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} (\xi) \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\xi) &= T_1^{21} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi) + T_1^{22} \frac{\partial}{\partial \eta} (\xi) + T_2^{21} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\xi) + T_2^{22} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\xi) + T_2^{23} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} (\xi) \end{aligned} \quad (18)$$



## Annexe E .

### Equivalence avec l'équation de Laplace, cas tridimensionnel :

Parmi les méthodes permettant d'annuler une grandeur  $R$  dans un volume  $v$ , celle qui consiste à annuler les intégrales :

$$I_i = \int_v R \cdot f_i \quad f_i \in F \quad \dots(E-1)$$

est appelée méthode projective. On aura l'équivalence :

$$I_i = 0 \quad , \quad f_i \in F \quad \rightarrow \quad R = 0 \quad \text{dans } v$$

Pour certains ensembles  $F$  de fonctions. L'équivalence montre que la méthode des é.i.f est une méthode projective , les fonctions de projection étant :

$$f_i = G_{pi}$$

Ces fonctions présentent l'intérêt de réduire les intégrales de volume à des intégrales de surface. Le choix de l'ensemble  $\Delta$  des fonctions  $f_i$  revient au choix de l'ensemble des points  $P_i$  où seront écrites les équations intégrales. Nous allons montrer qu'une surface  $S'$  entourant  $v$  est suffisante.

Lorsque les conditions aux limites sont posées correctement (problème de Dirichlet par exemple), le système :

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & P \in v \\ \text{CAL} \end{cases} \quad (E-2)$$

a une solution unique  $v_{sol}$ . Nous nous plaçons dans ce cas pour plus de clarté.



Nous cherchons donc un potentiel -  $v_{sol}$  - qui n'a pas de source dans  $v$ . Si on écrit l'é.i.f en tous les points d'une surface  $S$  entourant  $v$  on obtient une condition apparemment moins forte, on n'impose pas la nullité de la distribution  $\Delta v$  dans  $v$  mais seulement la nullité de sa contribution au potentiel sur  $S'$ .

Par exemple, toute distribution à "charge" totale nulle et symétrie sphérique annule son potentiel à l'extérieur d'elle - même (figure . E - 1 ); il y a donc dans le volume  $v$  une infinité de solutions  $v_{sol} + v_m$  à l'e.i.f écrite sur  $S'$ .

Mais  $v_m = 0$  sur  $S'$  est l'infini : il est donc identiquement nulle dans tout l'espace sauf peut être dans  $v$  où sont situées les sources  $m$  qui interdisent à appliquer le théorème de maximum.

On en déduit :

$$v_m = \partial v_m / \partial n \quad \text{sur } S \quad \dots\dots\dots(E - 3)$$

C'est à dire que toutes les solutions données par les é.i.f ont les mêmes valeurs aux limites sur  $S$  que la solution cherchée.

La solution  $v_m(p)$  en un point  $P$  intérieur à  $v$  est obtenue en écrivant :

$$v_m(p) = 0 \mapsto \int_v \Delta v_m \cdot G_p \cdot dv = 0 \quad \dots\dots\dots(E - 4)$$

C'est à dire en utilisant la formule intégrale de frontière décrite au 1er chapitre.

Ainsi l'équation de Laplace écrite en tout point de  $v$  est elle équivalente à l'é.i.f écrite en tout point de  $S'$  (l'intégration en faisant sur  $S$  et  $S'$  pouvant être confondue avec  $S$ ) et en tout point de  $v$ , cependant, le problème physique est résolu lorsque les valeurs limites de  $v_{sol}$  sur  $S$  sont déterminées, donc par l'écriture de l'é.i.f sur  $S'$  seule. La quadrature qui conduit à la solution dans  $v$  peut être considéré implicitement.



## Annexe F.

### Interpolation splines cubique.

Parmi les inconvénients des interpolations de Lagrange et d'Hermite on peut citer leur difficulté du point de vue calcul, elles sont imprécises si le nombre de points est grand; il y a discontinuité de la dérivée dans les points de jonction. Elles sont utiles pour dériver des méthodes numériques (résolution des équations différentielles ordinaires .....), mais les courbures qu'elles produisent sont en général non satisfaisantes.

On définit une courbe d'interpolation Splines par les critères suivants :

1 - La courbe est cubique, les coefficients du polynômes sont différents dans chaque intervalle  $(x_i, x_{i+1})$ .

2 - La courbe passe par les points donnés  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, n$ .

3 - Les premières et secondes dérivées sont continues aux points d'abscisses  $x_i$ . Le dernier point nécessite un traitement spécial qu'on présentera ci - dessous.

La seconde dérivée s'écrit en l'interpolant avec Lagrange d'ordre un pour chaque deux noeuds  $x_i, x_{i+1}$  :

$$f_i'(x) = f'(x_{i+1}) \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + f'(x_i) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad \dots (f - 1)$$

Par intégration deux fois en prenant les conditions aux limite suivantes :

$$f_i(x_i) = Y_i \quad ; \quad f_i(x_{i+1}) = Y_{i+1}$$

Après avoir effectué ces opérations on trouve :

$$f_i(x) = f'(x_{i+1}) \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6\Delta_i} + f'(x_i) \frac{(x - x_i)^3}{6\Delta_i} + \left[ \frac{Y_i}{\Delta_i} - \frac{\Delta_{i+1}}{6} f'(x_i) \right] (x_{i+1} - x) + \left[ \frac{Y_{i+1}}{\Delta_i} - \frac{\Delta_i}{6} f'(x_{i+1}) \right] (x - x_i) \quad \dots (F - 2)$$



$$\text{Avec : } \Delta_i = x_{i+1} - x_i$$

Si on peut trouver les dérivées secondes  $f''(x_i)$ , la formule serait complète. Nous avons satisfait toutes les conditions énumérées ci - dessus, exceptée la condition de la continuité de la première dérivée  $f'$ , nous devons donc l'utiliser pour trouver les  $f''(x_i)$ .

La continuité est établie par l'établissement des trois conditions suivantes :

1- Différencier  $f_i(x)$  et refaire  $x = x_i$ , et évaluer la dérivée de  $f$  côté gauche de l'intervalle  $i$ .

2 - Différencier  $f_{i+1}(x)$  et faire  $x = x_{i+1}$ , et évaluer la dérivée de  $f$  du côté droit de l'intervalle  $i+1$ .

3 - Egaliser les deux résultats obtenus.

Le résultat de ces opérations est l'équation suivante :

$$\frac{\Delta_{i-1}}{6} f''(x_{i-1}) + \frac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{6} f''(x_i) + \frac{\Delta_i}{6} f''(x_{i+1}) =$$

$$\frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta_i} - \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta_{i-1}} \quad \dots\dots\dots(F - 3)$$

C'est un système d'équations algébriques pour  $f''(x_i)$ , il est tridiagonal car la  $i$ ème équation regroupe seulement :  $f''(x_{i-1})$ ,  $f''(x_i)$  et  $f''(x_{i+1})$ , il est facilement résolvable.

Nous avons  $n$  inconnues et  $n-2$  équations, car pour  $i = 1$  et  $i = n$  ne peut pas appliquer la continuité de  $f'$ . Ceci demande quelques suppositions supplémentaires aux limites de l'intervalle d'étude. On pourrait supposer par exemple que la dérivée seconde s'annule aux bornes c'est à dire que la fonction devient localement parabolique.

" Les livres ont les mêmes ennemis que l'homme, le feu, les bêtes, l'humidité, le temps, et leur propre contenu " .

(A la croisé des chemins) Seneep.

" L'art de plaire est l'art de tromper"

(Le mot et la chose ) Paul Masson.

## Bibliographie .

" L'a vérité est en marche, rien ne peut plus l'arrêter . "

(Les caractères) Renée Vivien.

"Les auteurs les plus originaux d(aujourd'hui ne sont pas ceux qui apportent du nouveau, mais ceux qui savent dire des choses connues comme si elles n'avaient jamais été dites avant eux ."

(Lettre inédite) Gabriel Senac.

## Bibliographie

---

- [01] A.VONDER VORST.  
" Électromagnétisme, champ, forces et circuits "  
Edition CARAY, 1983.
- [02] E.KUFFEL & M.M.ABDULLAK.  
" High voltage engineering " VOL:2  
PERGAMON-PRESS, 1970.
- [03] G.DHATT & G.TOUZOT.  
" Une représentation de la méthode des éléments finis "  
MALOINE-S.A-EDITEUR, 1984.
- [04] O.C.ZIENKIEWICZ.  
" La méthode des éléments finis dans les sciences d'ingénieur "  
LONDRES, 1991.
- [05] A.J.DAVIES.  
" The finite element method, a first approach "  
OXFORD, 1982.
- [06] J.K.BATHE.  
" Numerical methods in finite element analysis "  
Pentice-HALL, 1982.
- [07] E.A.VOLKOV.  
" Numerical methods "  
Edition-MIR, MOSCOU, 1982.
- [08] H.KARDESTUNCER.  
" Finite element handbooks "  
Copyright-M.C.GRAW-HILL, NEW-YORK, 1987.
- [09] M.BOUMAH RAT & A.GOURDIN.  
" Méthodes numériques appliquées "  
O.P.U, ALGER, 1983.
- [10] H.SILVESTER.  
" Finite element for electrical engineers "  
INTER-EDITION, PARIS, 1985.
- [11] P.LASCAUX & R.THEODOR.  
" Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur "  
Edition;RALPH LEIGHTON, PARIS, 1989.
- [12] J.H.FERZIGER.  
" Numerical methods for engineering application"  
A.WILLEY-Interscience-Publication, 1981.
- [13] N.PISKOUNOV.  
" Analyse mathématique, Vol:1, calcul différentiel et développement limité "

## Bibliographie

---

- [14] R.FEYNMAN, Edition;MIR, MOSCOU, 1988.  
" Électromagnétisme,Vol:1 "  
INTER-EDITION, PARIS, 1979.
- [15] R.GAUDU & G.BACON,  
" Méthodes numériques; polycopés "  
I.N.P de TOULOUSE, 1984.
- [16] P.O.BALIBAR & C.GUTHMANN,  
" Calcul automatique du champ électrostatique "  
R.G.E, tome 88, n:1, Janvier, 1979.
- [17] F.BOUILLAUT,F.GOBY & A.ZAZEK,  
" les méthodes intégrales viennent aux secours  
de la méthode des éléments finis "  
R.G.E, N:9, Octobre, 1986.
- [18] J.P.CIONI,L.FEZOUÏ & H.STEVE,  
" Approximation des equations de MAXWELL par des  
schémas décentrés en éléments finis "  
I.N.R.I.A, n:1601, Février, 1992.
- [19] P.TROUE,  
" Analyse de quelques méthodes non conformes  
d'éléments finis pour l'approximation des  
problèmes de coques minces "  
THESE DE DOCTEUR D'UNIVERSITE EN  
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
Université "PIERRE et MARIE CURIE ", PARIS VI,  
1983.
- [20] M.L.KRÄHENBÜHL,  
" La méthode des equations intégrales aux  
frontières pour la résolution des problèmes en  
électrotechnique et sa formulation axisymétrique "  
THESE DE DOCTORAT, Academie de  
LYON, 1983.
- [21] K.NACEREDDINE & D.MECHANTEL,  
" Méthodes numériques de calcul du champ  
électrostatique "  
P.F.E, Dep-t:G.ELECTRIQUE, Ecole  
Nationale Polytechnique, ALGER, 1988.
- [22] M.HADDID & T.MANSOUR,  
" Investigation numérique du comportement des  
plaques raides par la M.E.F et la M.I.E.F "  
P.F.E, Dep-t:G.CIVIL, E.N.P, ALGER,1992.
- [23] K.MOUSSA & A.BENAZZOUC,  
" Détermination de l'état de contrainte et de  
déformation par la méthode des éléments finis "

## Bibliographie

---

- P.F.E, Dep-t:G.CIVIL, E.N.P, ALGER, 1991.
- [24] S.ABCHICHE & M.BELKHEIR.  
" Investigation numérique du phénomène d'interaction "  
P.F.E, Dep-t:G.CIVIL, E.N.P, ALGER, 1994.
- [25] Y.AIMENE & A.AOUAMEUR.  
" Investigation des comportements statique et  
dynamique par la M.E.F et la M.E.I.F "  
P.F.E, Dep-t:G.CIVIL, E.N.P, ALGER, 1993.
- [26] K.NACEREDDINE.  
" Protection contre la foudre sur un sol  
hétérogène - Simulation numérique "  
THESE DE MAGISTER, Dep-t:G ELECTRIQUE,  
E.N.P, ALGER, 1992.
- [27] J.S.TOWNSEND.  
" Electricity in gases "  
OXFORD, 1914.
- [28] J.M.MEEK.  
" Physique Review 57,1940.
- [29] J.M.MEEK & M.M.C.COLLING.  
" Measurement of field charges preceding  
impulse break down of rod-plane gaps "  
PROC OF THE 7-th INT CONF ON  
PHENOMENA IN IONIZED GASES,  
Vol 1, BEOGRAD, 1966.
- [30] H.RAETHER.  
" Electron avalanches and breakdown in gases "  
BUTTERWORTHS, LONDON, 1964.
- [31] L.B.LOEB & J.M.MEEK.  
" The mecanism of electric spark "  
STANFORD University-PRESS, 1940.
- [32] A.ROTH.  
" Hochspannungstechnik "  
BERLIN, 1927.
- [33] E.MARX.  
" Den durchschlog der luft im imhomogenen  
elektrischen feld bei verschirederren "  
ETZ, H33, 1930.
- [34] H.ROSER.  
" Schirm zur erhohung der durchsch lagspannung  
in left "  
ETZ, H17, BD 53, 1932.
- [35] N.F.WOLOCHTCHENKO.  
" Problèmes relatifs au mécanisme de l'effet  
de barriere (en russe) "  
Elektritchestwo, NR 6, 1947.

## Bibliographie

---

- [36] M.P.VERMA,  
" Durchschlagsspannung and durchschlagrorgang  
fur die anordnung spitze-platte mit schirm "  
Dissertation, T.U, DRESDEN, 1966.
- [37] V.S.KOMELKOV & A.M.LIFCHITS,  
" Influence of berrier on the developement of the  
electric discharge in long gaps "  
I.Z.V-Akad-Nank, URSS, Odtel T.N, Nr:10,  
MOSCOU, 1950.
- [38] N.TIKHODEEV,  
" Effect of an incomplet barrier in electrical  
discharge "  
SOVIET Physics, tech-phys, 2, 1957.
- [39] J.PILLING,  
" Isolier stoff barrier en zur erhohung der  
durchschlagwechsel spannung von inhomogenen left  
funkenstrecken "  
ELEKTRIC 23, H11, 1969.
- [40] L.L.ALSTON & D.J.TEDFORD,  
" High voltage technology "  
OXFORD-University-PRESS, 1968.
- [41] P.ROBERT,  
" Materiaux de l'électrotechnique, traite  
d'électricité, Vol:2 "  
Edition -GEORGIE, 1979.
- [42] E.BADAREU & J.POPESCU,  
" Gaz ionisés, Décharges électriques dans les gaz "  
Edition-DUNOD, PARIS, 1959.
- [43] G.LEROY CARY,  
" Les propriétés diélectriques de l'air "  
EYROLLES, 1984.
- [44] K.KUPFMULLER,  
" Electricité théorique et appliquée "  
Edition- DUNOD, PARIS, 1959.
- [45] M.J.SLOIAR,  
" Matériaux de l'électrotechnique - polycopes "  
Dép-t:G.Electrique, E.N.P d'ALGER,1966.
- [46] S.KALACHINKOV,  
" Electricité "  
Edition - MIR, MOSCOU, 1980.
- [47] S.WHITEHEAD.

## Bibliographie

---

- " Dielectric breakdown of solids "  
OXFORD, CLAREDON - Press, 1951.
- [48] O.SELKA & H.NORINDER.  
" Screens in long discharge gaps "  
ARKIV for Fysik, BO 6, Nr 17, 1952.
- [49] R.FINSTERWALDER.  
" Bolier shirm im spannungen unterschiedlichen  
antiogszeit "  
Dissertation, U, STUTTGARD, 1973.
- [50] M.DARVENIZA & B.HOLCOMBE,  
" The influence of a thin floating barrier on the  
switching impulse strength of a long gap with  
plastic sheet barrier "  
Proc - IEEE Letters, Vol 64, Nr 6, 1976.
- [51] M.DARVENIZA & B.HOLCOMBE,  
" The switching impulse strength of a long air gap  
with a plastic sheet barrier "  
Congrés Electrotechnique Mondial, Rap  
104, Section 2, MOSCOU, 1977.
- [52] A.SERVIGNY & I.B.JORDAN.  
" Floatting barrier influence upon point -to- plane  
breakdown "  
3 rd Int.Conf.on gas dicharge, IEE conf,  
Publication 118, LONDON, 1974.
- [53] A.BEROUEL & A.BOUBAKEUR.  
" Influence of barriers on the lighting and  
switching impulse strength of mean air gaps in  
point - plane arrangement "  
IEEE, Trans Elec Ins, Vol 26, Nr 6, 1991.
- [54] J.L.JAKUBOWSKI & A.BOUBAKEUR.  
" Rigidité des moyens intervalles d'air dans les  
systèmes isolants pointe - plan avec barrière "  
Bulletin de l'Academie Polonaise des sc., Vol  
28, Nr 9-10, 1980.
- [55] A.BOUBAKEUR.  
" Influence des barrières sur l'amorçage des moyens  
intervalles d'air pointe - plan "  
Rosprawy Elektrotechniczne (Academie  
Polonaise des sc.), Vol 27, Nr 3, VARSOVIE,  
1981.
- [56] A.BOUBAKEUR & M.BOUTLENDJ.  
" Screen size influence on the AC breakdown voltage  
of a point - barrier - plane arrangement "

## Bibliographie

---

- Journal of Technology, Nr 1, E.N.P, ALGER, 1986.
- [57] A. BOUBAKEUR,  
" Discharge phenomena in long air gaps with insulating screens "  
4 th Inter Symposium on high voltage engineering , paper 44 - 05, ATHENS, 1983.
- [58] T. HIRAMO,  
" Observations of the developement processes of the discharges in the air gaps with insulating barrier arrangements "  
National Defence Academy ( JAPANESE ), January 13, 1982.
- [59] B. T. HEROLN,  
" Gaz isolants "  
Techniques d'ingénieur, D 218, p:1,20.
- [60] R. G. E .  
" L'amorçage dans l'air aux grandes distances "  
Publi: 1974, t:83, Nr: 11.
- [61] A. AWAD, E. SHARKAWI, M. HEGAZI, H. SAID & F. FARID,  
" Modelling of multigaps using berrier arrangements "  
4 th I.S.H, ATHENS, GREECE, 8 - 9 September, 1983.
- [62] A. BOUBAKEUR,  
" Influence des barrières sur la tension disruptive des moyens intervalles d'air point - plan "  
THESE DE DOCTORAT, POLITECHNIKA VARSAWSKA, VARSOVIE, 1979.
- [63] M. BOUTLENDJ,  
" Influence des écrans isolants sur la tension de décharge disruptive à 50 Hz des intervalles d'air pointe - plan "  
P.F.E, Dept:G.Electrique, E.N.P, ALGER, 1984.
- [64] M. KAHLA & M. LABED,  
" Influence des barrières isolantes sur la tension d'amorçage aux tensions de chocs de foudre positives des intervalles d'air pointe - plan "  
P.F.E, Dept:G.Electrique, E.N.P, ALGER, 1985.
- [65] A. BENZINEB & H. ADJIM ,  
" Contribution à l'etude de l'influence des barrières isolantes sur la distribution des champs électriques et des charges superficielles en fonction du temps "  
P.F.E, Dept:G.Electrique, E.N.P, ALGER, 1982.
- [66] A. BOUBAKEUR,  
" Notes de cours de 4 eme année de haute tension "  
Dept:G.Electrique, E.N.P, ALGER.
-

