

29/96

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE ELECTRIQUE

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET:

Commande Adaptative Decentralisée

Application en Robotique

Proposé par:
D. BOUKHETALA
M. S. BOUCHERIT

Etudié par:
M. S. NEDJARI
H. BOUKARI

Dirigé par:
D. BOUKHETALA
M. S. BOUCHERIT

PROMOTION: 1996

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE ELECTRIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET:

**Commande Adaptative Decentralisée
Application en Robotique**

Proposé par:
D.BOUKHETALA
M.S.BOUCHERIT

Etudié par:
M.S.NEDJARI
H.BOUKARI

Dirigé par:
D.BOUKHETALA
M.S.BOUCHERIT

PROMOTION: 1996

A la mémoire d'El Mezouar Missoum.

que tous ceux qui l'ont connu ne l'oublient pas dans leurs prières.

A mes très chers parents qui m'ont soutenu.

A Nabila et Kahina, Zalfia et Leila ainsi que leurs familles.

A Hakim et Djamel.

A la famille El Mezouar.

A tous ceux qui me sont chers.

HALIM

A ma mère et A mon père.

A mes deux frères: Khaled et Mohamed.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

SID ALI

Remerciements:

Nous tenons à remercier très sincèrement nos deux promoteurs M^R Boukhetala et M^R Boucherit qui ont bien voulu assumer la lourde responsabilité de nous encadrer, nos remerciements vont aussi à messieurs les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'en être membres.

Nous remercions M^R Ouegueni, M^R Hamrene et M^R Bouyoucef ainsi que tous le personnel du C.D.T.A. qui ont permis l'expérimentation de nos méthodes dans leur laboratoire et pour l'aide et l'attention constante qui nous ont apporté.

Notre sincère reconnaissance va à nos parents qui nous ont aidés et encouragés.

Nous remercions Yacine et Tarek Yahia chérif, Dilmi Sabri, Salim et Mohamed Imekhlaif, Rachid Hamadi, Amar et toute la famille Lalmas, Lyes Khris et la société Tiger Computer Service, Salah, Krimo et Karim de la bibliothèque centrale ainsi que tous ceux qui ont contribué par leur aide moral ou matériel à la réalisation de ce travail, qu'ils trouvent ici l'expression de notre sincère reconnaissance à la hauteur de leur dévouement et de leur disponibilité.

الخلاصة :

هذا المشروع يمثل في تطبيق التحكم المكيف اللامركزي في مجال الروبوتيك.

إن الفوائد الأساسية للقيادة اللامركزية تكمن في استغلال المعلومات الداخلية فقط أي المعلومات المتوفرة بالمنظومة الداخلية الجزئية.

أما عن القيادة المكيفة فميزتها الأساسية تكمن في حل مشاكل الأنظمة التي لها وسائلها غير معروفة أو متغيرة أو كلاهما.

إن المشكل المطروح يمثل في دراسة مميزات هذا النوع من التحكمات وكذا أصلها ومدى إمكانية تطبيقها في مجال الروبوتيك.

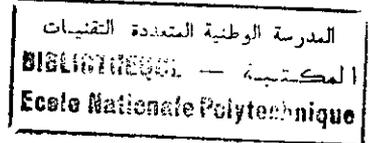
من أجل دراسة تقنيات التحكم اللامركزي قمنا بتصميم نموذج رياضي يمكننا من فهم هذه التقنيات بطريقة جديدة حساسة.

وفي الفقرة الثالثة قمنا بجمع كل النظريات الضرورية لدراسة هذه الدراسة وفي الفقرة الرابعة قدمنا طريقة التطبيق الفعلي لهذه النظريات في مجال التحكم المكيف.

أما عن الفقرة الخامسة فقد قمنا بتقديم بعض الأنواع من بين طرق التحكم المكيف اللامركزي وكذا التطبيق العددي عن طريق الإعلام الحلي.

وفي الفقرة الأخيرة ختمنا البحث بتوضيح الطرق التي ناسبتنا إليها كالتجارب وأعطت النتائج الملائمة.

Abstract:



This Project of the end of study deals with the Application of Decentralized Adaptive control in Robotics. The advantages of the Decentralized control schemes are situated at the level of the possibility to control each of the subsystems, independently from the others by using local information's.

Concerning the Adaptive control, it deals with the problem of unknown or variable parameters. The problem is to study the specifics and the robustness of these techniques.

In order to use the techniques of decentralized adaptive Control, we get a models for two types of robots: PUMA560 of Puma Unimation inc. and SCARA 3RP which is available at CDTA center.

For better understanding of the techniques used in this study, we have presented all the necessary theoretical tools in chapter III. The direct application of these theorems in adaptive control are treated in chapter IV.

Coming to the problem of the adaptive decentralized control, this later is presented and developed in chapter V. We have concluded by the techniques that gives good results.

Résumé

Ce projet de fin d'études concerne l'application de la Commande Adaptative Décentralisée en Robotique. Les avantages de la commande décentralisée consistent en la possibilité de contrôler chaque sous-système indépendamment des autres.

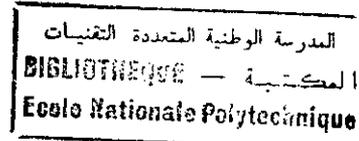
Quant à la Commande Adaptative, elle permet de résoudre les problèmes des systèmes où les paramètres sont inconnus ou variables dans le temps. Le problème posé est d'étudier les spécificités et la robustesse des techniques adaptatives dans le domaine de la Robotique.

Afin d'utiliser ces techniques, nous avons été conduits à mettre au point un modèle pur deux types de Robots: Le PUMA560 de Puma Unimation inc. et le SCARA 3RP disponible au CDTA.

Pour permettre une compréhension aisée de ces techniques utilisées, nous avons regroupé les outils théoriques nécessaires à cela dans le chapitre III. L'application directe des théories présentées précédemment dans le domaine de la commande adaptative est traitée dans le chapitre IV.

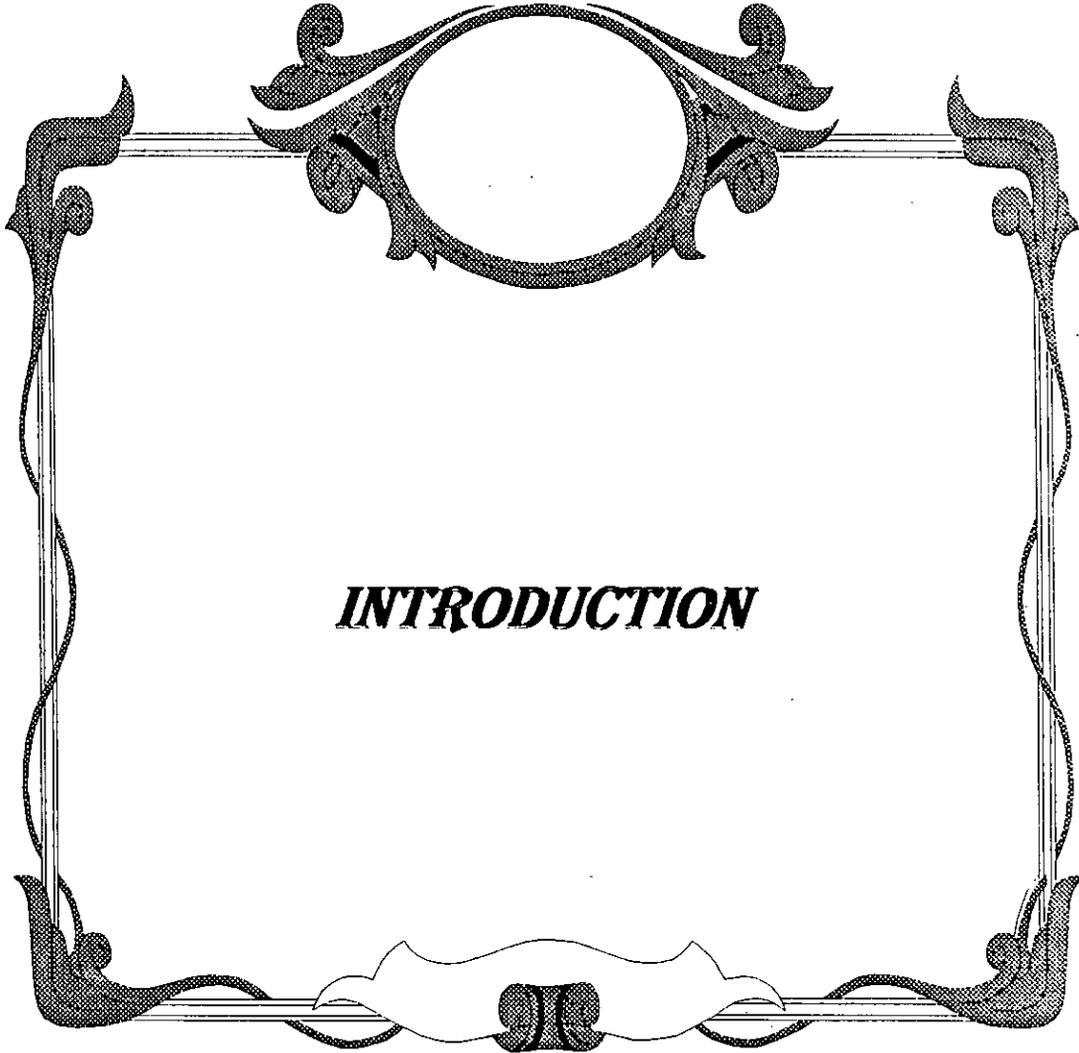
Le dernier chapitre consiste en la présentation puis la simulation ainsi que l'expérimentation de quelques techniques adaptatives décentralisées. Nous avons conclu en citant les techniques qui nous ont apportés les résultats les plus convenables.

Sommaire



1. INTRODUCTION	1
2. MODELISATION	3
2.1 Introduction	3
2.2 Modélisation	3
2.2.1 Modélisation cinématique	3
2.2.1.1 Problème cinématique direct	4
2.2.1.2 Problème cinématique inverse	10
2.2.2 Modélisation dynamique	13
2.2.2.1 Approche de Lagrange-Euler	14
2.2.2.2 Approche de Newton-Euler	20
2.2.3 Modèle dynamique du PUMA560	27
2.3 Conclusion	30
3. STABILITE NON LINEAIRE	31
3.1 Introduction	31
3.2 Notions de stabilité non linéaire	31
3.2.1 Stabilité au sens de Lyapunov	31
3.2.2 Théorie de l'hyperstabilité	38
3.3 Conclusion	42
4. COMMANDE ADAPTATIVE	44
4.1 Introduction	44
4.2 Introduction à la commande adaptative	44
4.3 Définitions usuelles en commande adaptative	46
4.4 Synthèse de commandes adaptatives par M.R.A.S.	48
4.5 Conclusion	54
5. COMMANDE ADAPTATIVE DECENTRALISEE	55
5.1 Introduction	55
5.2 Méthodes adaptatives décentralisées	55
5.2.1 Approche de D. Gavel et D. Siljak	55
5.2.2 Approche de Lin Shi et Sunil.K. Singh	60
5.2.3 Approche de H. Seraji	61
5.2.4 Approche de Li chen Fu	64
5.3 Simulation	67
5.4 Expérimentation	97
5.5 Conclusion	109
CONCLUSION	110

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



INTRODUCTION

1. INTRODUCTION:

L'application de la Commande Adaptative Décentralisée en Robotique constitue une combinaison de deux techniques de commande, en l'occurrence la commande décentralisée et la commande adaptative. Les fortes interconnexions non-linéaires entre les liaisons du bras manipulateur rendent le problème de commande plus difficile, d'où l'importance de synthétiser des commandes qui soient robustes par rapport à ces problèmes d'interconnexions, d'ailleurs cela fait actuellement l'objet de nombreuses recherches. Les difficultés citées plus haut s'additionnent à celles dues au niveau élevé des performances exigées en Robotique

Comprendre et expliquer les spécificités et les difficultés de la commande adaptative décentralisée, tel est le premier volet traité dans le cadre de notre travail.

Résoudre ou contourner ces difficultés pour assurer l'objectif de robustesse avec le niveau de performance requis constituent le second volet.

A cet effet, il a fallu rechercher et analyser différentes méthodes.

Par conséquent, c'est sur ces questions centrales et déterminantes que nous avons concentré nos efforts.

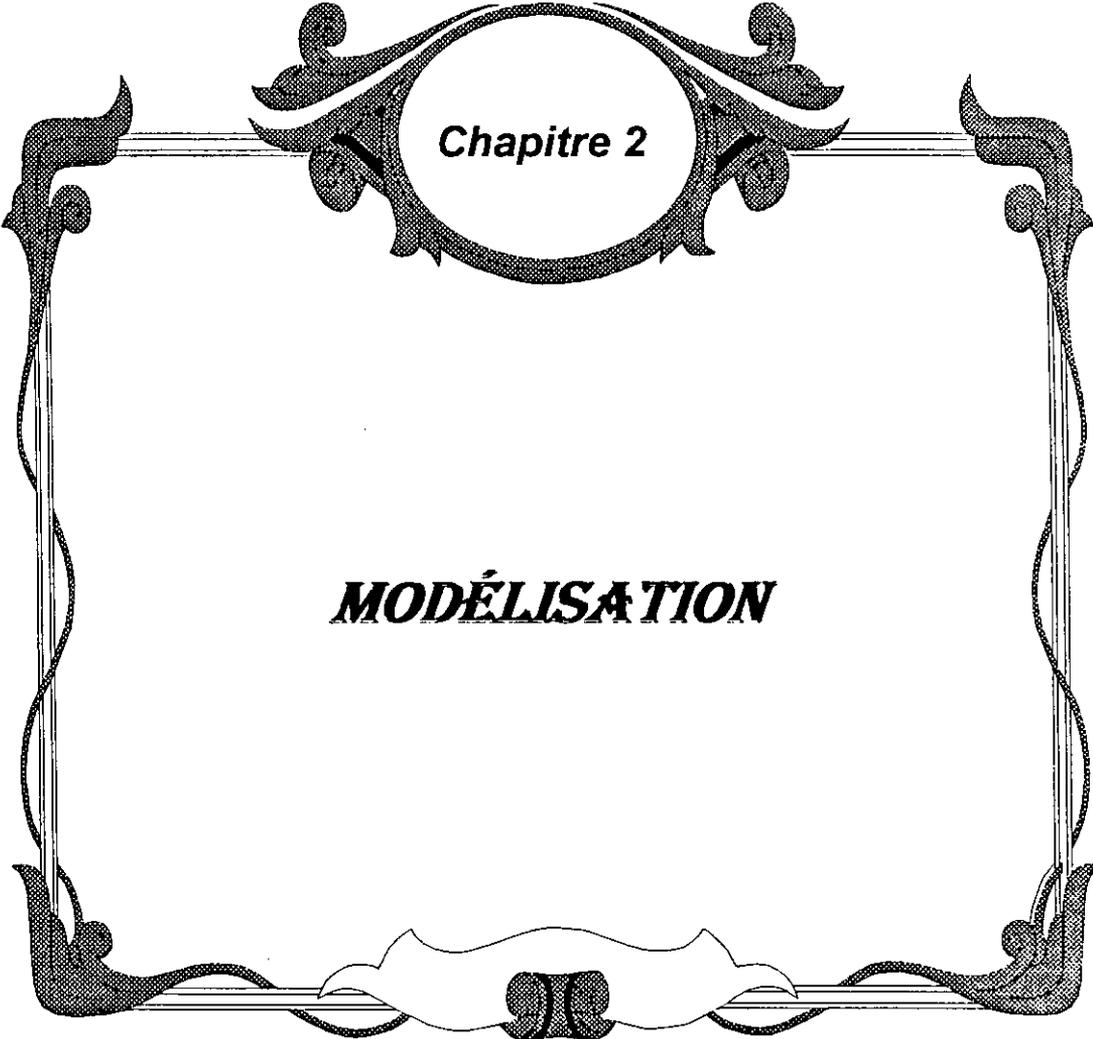
Afin d'utiliser les techniques de la commande adaptative décentralisée, nous avons été conduits à mettre au point un modèle pour le système à commander. Nous avons en fait modélisé deux types de bras manipulateurs à trois degrés de libertés, il s'agit du SCARA et du PUMA. Nous avons utilisé lors de la modélisation et afin de valider le modèle obtenu deux méthodes: une méthode directe basée sur le formalisme d'Euler-Lagrange et une méthode récursive basée sur le formalisme de Newton-Euler, cela a fait l'objet du second chapitre.

Pour permettre une compréhension aisée des techniques utilisées, nous avons regroupé les outils théoriques nécessaires à cela dans le troisième et quatrième chapitre. Ainsi nous retrouvons dans le troisième chapitre les théories de la stabilité utilisées dans la

synthèse des lois de commande adaptative à savoir la théorie de Lyapunov et celle de l'Hyperstabilité, malgré le fait que la seconde n'a pas été utilisée dans le cadre de ce travail, nous avons préféré l'inclure à titre bibliographique, car elle a été retrouvée dans des travaux de commande adaptative et notamment ceux appliqués en Robotique.

Dans le quatrième chapitre nous avons présentés sommairement les différentes techniques de la commande adaptative.

Nous avons consacré le dernier chapitre à la présentation de différentes méthodes de commande adaptative décentralisée, pour voir les limites de chaque méthode nous avons procédé par simulation à des tests sur la robustesse et le comportement de chaque schéma de commande lors de chaque trajectoire rapide, ainsi que l'effet de la période d'échantillonnage sur certaines de ces méthodes. A la fin de ce chapitre, nous présentons les résultats de l'implémentation pratique d'une des méthodes présentées, effectuée sur un bras manipulateur de type SCARA 3RP disponible au CDTA.



Chapitre 2

MODÉLISATION

2.1. INTRODUCTION :

Avec la demande de productivité de plus en plus croissante et de produits finis de qualité uniforme, l'industrie a fait appel à une automatisation basée sur une utilisation intensive de l'ordinateur. En ce moment, la majorité des tâches automatisées effectuées en usine sont prises en charge par des machines qui leur sont dédiées, il s'ensuit un manque flagrant de flexibilité et un coût assez élevé, d'où l'intérêt de l'utilisation de robots capables d'exécuter différentes tâches industrielles et à des prix moins élevés.

Le mot "robot" a pour origine le mot tchèque "robota" qui veut dire travail. Parmi les différentes définitions proposées dans la littérature on cite celle qui nous a paru la plus précise, c'est celle proposée par "the Robot Institute of America": *"Le robot est un manipulateur multi-fonctionnel, reprogrammable, conçu pour déplacer toutes sortes de matériels tels les outils ou autres dispositifs spéciaux, à travers des trajectoires préprogrammées en vue d'exécuter une variété de tâches"*.

Dans le cadre de nos travaux, nous avons considéré deux modèles de bras manipulateur, il s'agit du PUMA560 de Puma Unimation inc dont on a modélisé uniquement les trois premiers degrés de liberté et le SCARA de type 3RP disponible au Centre de Développement des Technologies Avancées (C.D.T.A.), le premier modèle est destiné pour la validation des différents algorithmes par simulation sur ordinateur et le second à une vérification de la faisabilité de certains algorithmes en pratique.

2.2. MODÉLISATION :

2.2.1. Modélisation cinématique :

Un manipulateur mécanique peut être schématisé par une chaîne articulée, ayant plusieurs liaisons rigides et connectées entre elles, par des articulations (charnières) à révolutions

(rotationnelles) ou prismatiques, une extrémité de cette chaîne est attachée à la base, tandis que l'autre extrémité est libre et reliée à l'outil terminal, en vue de manipuler des objets ou effectuer des tâches d'assemblages. Le mouvement relatif de chaque articulation entraîne celui des liaisons, ce qui permet de positionner l'extrémité libre et de donner à l'outil terminal l'orientation désirée.

En effet, dans la plupart des applications en robotique, on s'intéresse à la trajectoire de l'outil terminal par rapport à un référentiel fixe et arbitraire. La cinématique d'un robot se veut l'étude analytique de cette trajectoire sans celle des forces et moments qui causent le mouvement.

Dans ce qui suit nous considérerons un manipulateur dont les paramètres géométriques sont supposés connus et essayerons de répondre aux deux questions suivantes:

- a) pour un manipulateur dont les paramètres géométriques de chaque liaison, sont supposés connus, pour chaque vecteur des variables d'articulations $[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]'$, n étant le nombre de degrés de libertés du manipulateur, quelle est la position et l'orientation de l'outil terminal correspondante, par rapport au référentiel fixe et arbitraire?
- b) Soit une position et une orientation désirées de l'outil terminal, le manipulateur peut-il atteindre celles-ci? Et si oui, quelle sont les différentes configurations du manipulateur, c'est à dire l'ensemble des vecteurs q , qui peuvent nous le garantir?

La première de ces questions est appelée problème cinématique direct, et la seconde problème cinématique inverse.

2.2.1.1. Problème cinématique direct :

Comme chaque liaison du bras manipulateur est en rotation et / ou en translation par rapport au référentiel fixe, il serait judicieux de situer chaque point de chaque liaison, par rapport à un référentiel lié à son articulation, le problème cinématique direct, se réduira donc, à trouver une matrice de transformation entre ce dernier référentiel et celui de la base du manipulateur. Dans le cas où il n'existe que des rotations, on utilise une matrice de dimension 3×3 . Cependant, lorsque il existe des translations celle-ci devient insuffisante, on devra donc

utiliser des coordonnées dites homogènes, ainsi la dimension de la matrice se verra augmentée à 4x4 pour permettre des translations d'un référentiel à un autre.

-Coordonnées homogènes :

Comme une matrice de rotation de dimension 3x3 est inefficace dans le cas de translation d'un référentiel par rapport à un autre, on introduit une quatrième composante dans le vecteur position $p = [p_x \ p_y \ p_z]^T$, ce qui donne le vecteur $p' = [w.p_x \ w.p_y \ w.p_z \ w]^T$, on dit que p' est exprimé par ses coordonnées homogènes, nous remarquons que les coordonnées physiques sont reliées aux coordonnées homogènes du vecteur p' par simple division par w , celui-ci pourra donc être vu comme un "facteur d'échelle". Si $w=1$ (ce qui est le cas pour les applications en robotique) les coordonnées physiques et homogènes sont identiques.

-Matrice de transformation :

La matrice de transformation homogène de dimension 4x4, est celle qui relie le vecteur position exprimé par ses coordonnées homogènes d'un référentiel à un autre, elle peut être considérée comme constituée de 4 sous-matrices :

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $[n \ s \ a]$ a pour effet de faire tourner un référentiel par rapport à un autre, le vecteur position $p_{3 \times 1}$ a pour effet de translater le référentiel tournant par rapport au référentiel fixe. La matrice homogène de transformation est celle, qui relie les coordonnées homogènes du vecteur position par rapport à un référentiel en mouvement OUVW à ses coordonnées par rapport à un référentiel fixe OXYZ, ce qui s'exprime par $p'_{xyz} = T p'_{uvw}$.

En général, deux liaisons sont reliées entre-elles par des charnières d'articulations, leurs surfaces glissent par rapport à l'autre tout en demeurant en contact. Il existe plusieurs sortes

de ces charnières, cependant, seules les articulations rotatives ou prismatiques sont utilisées en robotique.

Nous convenons de numéroter les liaisons à partir de la base du manipulateur en allant vers son extrémité libre. Ainsi l'axe de l'articulation i aura deux normales, ceux sont les axes des liaisons adjacentes à la liaison i c'est à dire $i-1$ et $i+1$. La position relative du point d'intersection de ces deux normales sur l'axe de l'articulation i est appelée d_i ; l'angle que font ces deux normales est appelé θ_i ; la distance minimale entre les axes des deux articulations i et $i+1$ le long de la normale est appelée a_i ; enfin, l'angle que font les deux axes dans un plan perpendiculaire à a_i est appelé α_i .

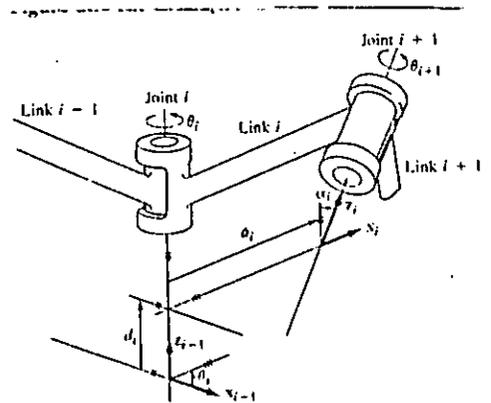


fig 2.1.1.

En résumé, quatre paramètres a_i , d_i , α_i , θ_i sont associées à chaque liaison et déterminent d'une manière unique, la configuration cinématique de celle-ci. On retrouvera ces paramètres dans la matrice homogène de transformation, qui relie le référentiel lié à l'articulation i et celui lié à l'articulation $i-1$, ce qui pourra se faire d'une manière systématique en utilisant la représentation dite de Denavit - Hartenberg.

-Représentation de Denavit-Hartenberg:

Denavit et Hartenberg [D-H] ont proposé une méthode systématique, afin de faire correspondre à chaque articulation, un système de coordonnées (référentiel), puis d'en déduire les différentes matrices homogènes de transformation qui relient chaque système de coordonnées aux systèmes de coordonnées précédents, ce qui permet à terme de transformer les coordonnées de l'outil terminal exprimées par rapport au référentiel de celui-ci, et de les exprimer par rapport au référentiel de la base du manipulateur. Les référentiels seront déterminés selon les règles suivantes :

- L'axe z_{i-1} est le long de l'axe de l'articulation i .

- L'axe x_i est normal à l'axe z_{i-1} .
- L'axe y_i est déterminé de telle manière à constituer un trièdre direct.

Il est à noter que le choix du référentiel de base est arbitraire, pour autant que l'axe z_0 soit le long de l'axe de mouvement de l'articulation 1, de même le référentiel de l'outil terminal pourra être placé n'importe où, tant que l'axe x_n est normal à z_{n-1} . Il est maintenant possible de redéfinir les paramètres cinématiques introduits dans la section précédente, de la manière suivante :

1. θ_i est l'angle de l'axe x_{i-1} vers l'axe x_i autour de l'axe z_{i-1} .
2. α_i est l'angle de l'axe z_{i-1} vers l'axe z_i autour de l'axe x_i .
3. a_i est la distance comprise entre l'intersection de l'axe z_{i-1} avec l'axe x_i et l'origine du référentiel i le long de l'axe x_i .
4. d_i est la distance comprise entre l'origine du référentiel $i-1$ et l'intersection de l'axe z_{i-1} avec l'axe x_i le long de l'axe z_{i-1} .

Enfin, nous présenterons dans ce qui suit l'algorithme qui permet de traiter n'importe quelle configuration de manipulateur de degré de libertés n :

1. Etablir le système de coordonnées lié à la base, en s'assurant que l'axe z_0 est bien selon l'axe de rotation de l'articulation 1, et qu'il pointe vers "l'épaule" du bras manipulateur.
2. Pour chaque articulation $i = 1, n-1$ faire les étapes 3 à 6.
3. Aligner l'axe z_i avec l'axe de l'articulation $i+1$.
4. Etablir l'origine de chaque système de coordonnées, celui-ci sera donné par l'intersection de l'axe z_{i-1} et z_i ou bien l'intersection de leurs normales communes avec l'axe z_i .
5. Etablir l'axe x_i , selon la règle suivante:

$$X_i = \pm (z_{i-1} \wedge z_i) / \|z_{i-1} \wedge z_i\| \text{ ou bien le long de la normale commune aux axes } z_i \text{ et } z_{i-1}.$$

6. Etablir l'axe y_i , selon la règle suivante :

$$Y_i = \pm (z_i \wedge x_i) / \|z_i \wedge x_i\| \text{ afin d'établir le trièdre direct } [x_i y_i z_i].$$

7. Etablir l'axe z_n selon la direction de l'axe z_{n-1} , et est sortant du corps du robot.
8. Déterminer les paramètres de chaque articulation: $i = 1, n-1$.

Une fois ces étapes effectuées, on détermine les matrices de transitions homogènes relatives à chaque articulation, elle sont données en fonction des paramètres décrits ci-dessus et en remarquant que le point r_i exprimé dans le référentiel i , peut être exprimé dans le référentiel $i+1$ en opérant les transformations successives suivantes :

1. Rotation autour de l'axe z_{i-1} d'un angle θ_i afin d'aligner l'axe x_{i-1} avec l'axe x_i .
2. Translation le long de l'axe z_{i-1} d'une distance d_i , afin de faire coïncider x_i et x_{i-1} .
3. Translation le long de l'axe x_i d'une distance a_i afin de faire coïncider les origines des axes x_i et x_{i-1} .
4. Rotation autour de l'axe x_i d'un angle α_i afin de faire coïncider les deux systèmes de coordonnées i et $i-1$.

Ce qui donne la matrice de transformation homogène suivante:

$$A_i^{i-1} = T_{z,d} \cdot R_{z,\theta} \cdot T_{x,a} \cdot R_{x,\alpha}$$

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

nous avons appliqué l'algorithme donné ci-dessus sur le PUMA560, le choix des différents repères a été fait suivant la méthode de Denavit-Hartenberg et est spécifié ci-dessous et illustré par la figure (2.1.2):

1. **Repère de base: $R_0(x_0, y_0, z_0)$:** l'origine est prise à l'intersection de l'axe de la liaison 1 qui passe par son centre d'inertie et l'axe de la première articulation. Z_0 est parallèle à l'axe de la première articulation, X_0 est parallèle à l'axe de la liaison 1 et son sens est sortant par rapport au plan de la feuille.
2. **Repère $R_1(x_1, y_1, z_1)$:** l'origine coïncide avec celle de R_0 , Z_1 est parallèle à l'axe de la seconde articulation, X_1 est suivant l'axe de la liaison 2.
3. **Repère $R_2(x_2, y_2, z_2)$:** l'origine est à l'intersection de l'axe de la liaison 3 et l'axe de la troisième articulation, X_2 est suivant l'axe de la liaison 3.
4. **Repère $R_3(x_3, y_3, z_3)$:** l'origine coïncide avec celle du centre d'inertie de l'effecteur.

Suivant le choix précédent des repères nous pouvons à présent, toujours en utilisant la méthode D-H, déterminer les paramètres cinématique de chaque liaison:

N ^o d'articulation	θ_i	a_i	d_i	α_i
1	θ_1	0	0	-90°
2	θ_2	l_2	d_2	0
3	θ_3	l_3	0	0

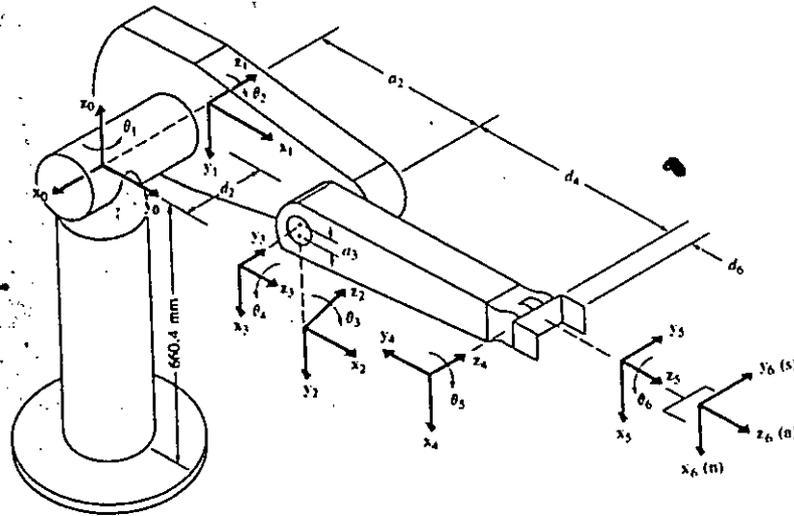


fig 2.1.2.

Ainsi en utilisant l'algorithme de la représentation de Denavit et Hartenberg nous aboutissons aux matrices de transformations homogènes suivantes:

$$A^0_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A^1_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A^2_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^0_2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 - d_2 s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & a_2 c_2 s_1 + d_2 c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & -a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^0_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - d_2 s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) + d_2 c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1.2)$$

en ce qui concerne le bras manipulateur de type SCARA 3RP ses repères, ses paramètres cinématiques et les matrices de transformation qui en résulte seront présentés dans la partie pratique (voir chapitre 5).

2.2.1.2. Problème cinématique inverse:

Les bras manipulateurs commandés par ordinateur, le sont généralement par les variables d'articulation, alors que les objets à manipuler sont eux exprimés par leurs coordonnées cartésiennes. Il s'ensuit pour donner à l'outil terminal une position et une orientation qui lui permettent de manipuler les objets en question, la solution cinématique inverse s'impose.

En général, le problème cinématique inverse peut être résolu par différentes méthodes, telle que la transformation inverse: Paul et al. 1981, approche géométrique: Lee and Ziegler 1984, méthode des matrices duales: Denavit 1956, quaternion dual: Yang and Freudenstein 1964.

Paul et al. 1981 présentèrent la méthode de la transformation inverse, en utilisant la matrice de transformation homogène dans la résolution, pour une classe particulière de simple manipulateurs, cependant, malgré que la solution est correcte, elle souffre néanmoins du fait qu'elle ne donne point d'indication claire sur la sélection d'une solution particulière, parmi les différentes possibles, et laisse le champ libre à l'intuition de l'utilisateur. Dans ce qui suivra et dans l'impossibilité de présenter toutes ces méthodes, nous ne nous intéresserons qu' à l'approche géométrique de Lee et Ziegler 1984.

-Approche géométrique:

Nous présenterons dans ce qui suit l'approche géométrique dans la résolution du problème cinématique inverse d'un bras manipulateur à six degrés de libertés, en l'occurrence le

PUMA560. En se basant sur la géométrie du bras humain, différentes configurations du PUMA peuvent être identifiées à l'aide de trois **indicateurs de configurations** qui sont: **arm, elbow, wrist**, les deux premiers sont associés aux trois premières articulations et le dernier aux trois dernières.

Pour le PUMA il existe quatre différentes solutions pour les trois premières articulations, et pour chacune de ces solutions, il existe deux solutions différentes pour les trois dernières. Les deux premiers indicateurs servent à choisir une solution parmi les quatre possibles, alors que le troisième indicateur servira à choisir une parmi les deux possibles. Ces indicateurs de configurations sont prespécifiés par l'utilisateur en vue de trouver la solution inverse.

Remarque: puisque nous ne considererons par la suite que les trois premières articulations, le troisième indicateur est introduit pour être plus exhaustif.

La solution sera calculée en deux étapes:

1. Determination du vecteur position $p = p_6 - l_3$.a pointant de l'épaule du bras manipulateur vers son poignet. (Voir figure 2.1.3)
2. Ce vecteur est utilisé dans le calcul des trois premières solutions pour les trois premières articulations $i=1,3$ par projections sur le plan (x_{i-1}, y_{i-1}) . Enfin, les trois dernières solutions seront calculées en utilisant les trois premières ainsi que les matrices ${}^{i-1}A_i$.

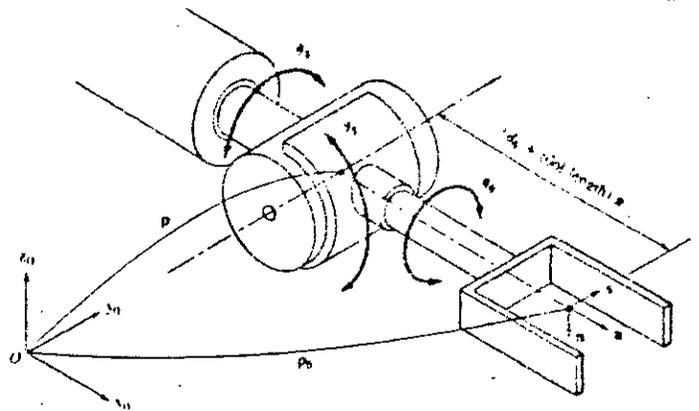


fig 2.1.3.

-Définition des indicateurs de configuration:

Afin de faciliter la compréhension des définition suivantes, le lecteur est prié de se reporter

à la figure (2.1.2.):

Right (shoulder) arm: θ_2 positif fait mouvoir le poignet du manipulateur dans le sens des Z_0 positifs, alors que la troisième articulation est inactive.

Left (shoulder) arm: θ_2 positif fait mouvoir le poignet du manipulateur dans le sens des Z_0 négatifs, alors que la troisième articulation est inactive.

Above arm (elbow au-dessus wrist): la position du poignet dans la configuration **right arm** (resp. **Left arm**) par rapport au référentiel de l'épaule a une coordonnée **négative** (resp. **Positive**) le long de l'axe y_2 .

Below arm (elbow au-dessous wrist): la position du poignet dans la configuration **right arm** (resp. **Left arm**) par rapport au référentiel de l'épaule a une coordonnée **positive** (resp. **Négative**) le long de l'axe y_2 .

Wrist down: le vecteur s (voir figure (2.1.3.)) et le vecteur y_5 ont un produit scalaire positif.

Wrist up: le vecteur s (voir figure (2.1.3.)) et le vecteur y_5 ont un produit scalaire négatif.

Remarque: les définitions données ci-dessus peuvent être légèrement modifiées pour un choix différent des référentiels. Comme il a été dit auparavant, les deux premiers peuvent être combinés pour donner une solution parmi les quatre différentes possibles pour les trois premières articulations, pour chacune de ces configurations le troisième indicateur peut être utilisé pour déterminer une solution parmi les deux possibles pour les trois dernières articulations, ces indicateurs sont définis comme suit:

Arm = +1 ou -1 respectivement pour une configuration **right arm** et **left arm**.

Elbow = +1 ou -1 respectivement pour une configuration **above arm** et **below arm**.

Wrist = +1 ou -1 respectivement pour une configuration **wrist down** et **wrist up**.

-Solutions pour les trois premières articulations:

A partir de la figure (2.1.3) nous définissons le vecteur position p qui pointe de l'origine du référentiel d'épaule (x_0, y_0, z_0) vers le point d'intersection des axes des trois dernières articulations, en fait celui-ci pourra s'obtenir sans calculs puisque il s'agit du vecteur de position de la matrice 0A_3 ainsi nous trouvons ce qui suit:

$$p = p_6 - l_3 \cdot a.$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cdot (l_2 \cdot \cos\theta_2 + l_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)) - d_2 \cdot \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 \cdot (l_2 \cdot \cos\theta_2 + l_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)) + d_2 \cdot \cos\theta_1 \\ -l_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) - l_2 \cdot \sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

Dans ce qui suit, nous nous ne détaillerons pas les calculs qui consistent en des projections sur les plans (x_{i-1}, y_{i-1}) des différentes articulations et en l'utilisation de règles trigonométriques fort simples, ainsi et dans le but de ne pas alourdir cette exposé plus qu'il n'en faut, nous avons préféré donner directement les expressions littérales des solutions tout en renvoyant le lecteur soucieux d'approfondir la question à la référence [K.S. Fu, R.C. Gonzalez, C.S.G. Lee 1987].

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{-\text{arm.} p_y \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x \cdot d_2}{-\text{arm.} p_x \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_y \cdot d_2} \right) \quad -\pi \leq \theta_1 \leq \pi$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \text{arm.} elbow \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \sin\beta - \text{arm.} elbow \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta} \right) \quad -\pi \leq \theta_2 \leq \pi$$

$$\cos\alpha = \frac{-\text{arm.} \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad \cos\beta = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2 + l_2^2 - l_3^2}{2 a_2 \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{-p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}$$

$$\theta_3 = \phi - \frac{\pi}{2} \quad -\pi \leq \theta_3 \leq \pi$$

$$\cos\phi = \frac{a_2^2 + l_3^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 + d_2^2}{2 l_2 l_3} \quad \sin\phi = \text{arm.} elbow \cdot \sqrt{1 - \cos\phi^2}$$

(2.1.4)

2.2.2. Modélisation dynamique:

Les équations dynamiques du mouvement d'un bras manipulateur, sont l'ensemble des équations mathématiques, décrivant le comportement dynamique du manipulateur, de telles équations sont utilisées pour la simulation par ordinateur, du mouvement du bras manipulateur, ainsi que pour la conception d'une commande, en vue de satisfaire les performances imposées.

Le modèle dynamique du bras manipulateur, peut être déterminé à partir des lois connues de la physique, telles les lois de Newton et de Lagrange; des approches conventionnelles comme l'approche de Lagrange-Euler [L-E] ou celle de Newton-Euler [N-E], peuvent ainsi être systématiquement appliquées, en vue de déterminer, le modèle dynamique du bras manipulateur, cependant, il est à noter qu'il existe plusieurs variantes de ces deux approches, telles que la "Uicker's-L.E", "Hollerbach's récursive Lagrange", la "Lee's generalized d'Alembert G.D."...etc. Ces approches, peuvent aboutir à des équations, dont la structure est différente, car elles ont été conçues pour différentes tâches , telle que, par exemple: la synthèse et l'analyse de loi de commande, ou bien la simulation par ordinateur, du mouvement du manipulateur. Dans ce qui suit, nous allons uniquement présenter les approches de Lagrange-Euler et Newton-Euler .

2.2.2.1. Approche de Lagrange-Euler :

Les équations générales du mouvement du bras manipulateur peuvent être convenablement, exprimées par l'application directe du formalisme de Lagrange-Euler, celui-ci, associé à la représentation de [D-H], peut constituer un algorithme, efficace et compacte afin d'aboutir aux équations décrivant le mouvement du bras manipulateur.

L'algorithme est exprime sous forme matricielle, ce qui facilite l'analyse et l'implémentation sur ordinateur, la détermination des équations dynamiques d'un bras manipulateur, à n degrés de libertés, est basée sur le fait que la matrice homogène de

transformation relie le référentiel de la liaison i et celui de la liaison $i-1$, par conséquent, tout point de la liaison i , donné par ses coordonnées homogènes par rapport au référentiel de celle-ci, peut être exprimé par ses coordonnées par rapport $i-1$.

L'équation de [L-E] est donné par :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial (dq_i/dt)} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = T_i \quad (2.2.1)$$

L: fonction de Lagrange = $E_c - E_p$.

E_c : énergie cinétique totale du bras manipulateur.

E_p : énergie potentielle totale du bras manipulateur.

q_i : coordonnée généralisée d'ordre i .

dq_i/dt : dérivée première par rapport au temps de q_i .

-Énergie cinétique d'une liaison:

Le formalisme de Lagrange-Euler exige la connaissance de l'énergie cinétique du système physique, qui à son tour exige la connaissance de la vitesse de chaque liaison. Soient ${}^i r_i$ les coordonnées homogènes d'un point fixe appartenant à la liaison i , par rapport au référentiel de la liaison i , ${}^0 r_i$ ses coordonnées par rapport au référentiel fixe de la base, nous aurons donc:

$${}^0 r_i = {}^0 A_i \cdot {}^i r_i.$$

$$\text{Avec: } {}^0 A_i = {}^0 A_1 \cdot {}^1 A_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1} A_i.$$

Puisque, il s'agit de liaison rigide, il s'ensuit que $d {}^i r_i / dt = 0$.

D'ou:

$${}^0 v_i = d {}^0 r_i / dt = d {}^0 A_i / dt \cdot {}^i r_i.$$

D'une manière générale, on trouve:

$$v_i^0 = \sum_{j=1}^i \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} \cdot r_i^i \quad (2.2.2)$$

En remarquant que la dérivée précédente de la matrice ${}^0 A_i$ peut être obtenue, aisément à l'aide de la matrice Q_i définie, pour une structure à articulations rotationnelles, comme suit :

$$U_{ij} = \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq i \\ A_{j-1}^0 Q_j A_i^{j-1} & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

D'ou en utilisant les notations précédentes, nous aurons :

$$v_i^0 = \sum_{j=1}^i U_{ij} \frac{dq_j}{dt} r_i^i \quad (2.2.4)$$

-Énergie cinétique du bras manipulateur:

Après l'obtention de la vitesse de l'articulation i , nous devons trouver son énergie cinétique, Soit E_{ci} l'énergie cinétique de l'articulation i et soit dE_{ci} l'énergie cinétique d'une particule de masse dm de l'articulation i , nous aurons par conséquent :

$$dKi = 1/2 \cdot ((dx_i/dt)^2 + (dy_i/dt)^2 + (dz_i/dt)^2)$$

$$dKi = 1/2 \cdot \text{trace}(V_i \cdot V_i') \cdot dm. \quad (2.2.5)$$

En substituant, l'équation (2.2.4) dans (2.2.5), on trouve:

$$dKi = 1/2 \cdot \text{trace} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \cdot ({}^i r_i^i \cdot r_i^i') \cdot U_{ir}' \cdot (dq_p/dt) \cdot (dq_r/dt) \right). \quad (2.2.6)$$

Les U_{ij} et les dq_i/dt étant indépendants de la distribution de masse de l'articulation i , en sommant toutes les énergies cinétiques élémentaires nous aurons pour l'articulation i :

$$Ki = 1/2 \cdot \text{trace} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \cdot ({}^i r_i^i \cdot r_i^i') \cdot U_{ir}' \cdot (dq_p/dt) \cdot (dq_r/dt) \right) \quad (2.2.7)$$

Tel que le terme sous le signe somme, représente l'inertie de l'articulation et peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int y_i x_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int z_i y_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Cette pseudo-matrice d'inertie peut être exprimée à l'aide des moments d'inertie de la liaison i par rapport aux principales axes du référentiel (x_i, y_i, z_i) :

$$\begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & \overline{m_i x_i} \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & \overline{m_i y_i} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & \overline{m_i z_i} \\ \overline{m_i x_i} & \overline{m_i y_i} & \overline{m_i z_i} & \overline{m_i} \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

avec $\overline{X_i}, \overline{Y_i}, \overline{Z_i}$ les coordonnées respectives du centre de masse de la liaison i .

Il s'ensuit que l'énergie totale du bras manipulateur sera la suivante:

$$\begin{aligned} K_{\text{totale}} &= 1/2 \sum_{i=1}^n \text{trace} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \cdot (\int r_i^i \cdot r_i^i) U_{ir} (dq_p/dt) \cdot (dq_r/dt) \right) \\ K_{\text{totale}} &= 1/2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \text{trace} (U_{ip} J_i U_{ir}') (dq_p/dt) (dq_r/dt) \right) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Remarque: J_i dépend uniquement de la distribution de masse de l'articulation, et non pas de la position relative de celle-ci, elle ne sera donc calculée qu'une seule fois.

-Énergie Potentielle du bras manipulateur :

Soit P_i l'énergie potentielle de l'articulation i , elle sera donnée par :

$$P_i = -m_i g ({}^0A_i^i r_i). \quad (2.2.11)$$

L'énergie potentielle totale du bras manipulateur sera donc :

$$P = \sum_{i=1}^n -m_i g (A^0_i \cdot r^i_i) \quad (2.2.12)$$

Tel que g est évidemment le vecteur gravitation $g = (0,0,-|g|,0)$.

-Équations dynamiques du bras manipulateur :

La fonction de Lagrange sera donnée par :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \text{trace}(U_{jp} J_i U'_{ir}) (dq_p/dt) (dq_r/dt) \right) + \sum_{i=1}^n m_i g (A^0_i \cdot r^i_i) \quad (2.2.13)$$

En appliquant l'équation (2.2.1) à la fonction Lagrangienne précédente, on trouve:

$$T_i = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^i \text{tr}(U_{jk} \cdot J_j \cdot U'_{jk}) \cdot d^2q_k/dt^2 + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{tr}(U_{jkm} \cdot J_j \cdot U'_{ji}) \cdot dq_k/dt \cdot dq_m/dt - \sum_{j=i}^n m_j \cdot g \cdot U_{ji} \cdot r^j_j \quad (2.2.14)$$

tel que :

- $T = \{T_1, \dots, T_n\}'$ est le vecteur des couples généralisés.
- $q = [q_1, \dots, q_n]'$ est le vecteur des variables d'articulations.
- $Dq(t)/dt = [dq_1/dt, \dots, dq_n/dt]'$ est le vecteur des vitesses d'articulations.
- $D^2q(t) = [d^2q_1/dt^2, \dots, d^2q_n/dt^2]'$ est le vecteur des accélérations d'articulations.

$$\begin{aligned} D_{ik} &= \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{tr}(U_{jk} \cdot J_j \cdot U'_{ji}) \quad i, k = 1, n. \\ h_{ikm} &= \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{tr}(U_{jkm} \cdot J_j \cdot U'_{ji}) \quad i, k, m = 1, n. \\ h_i &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \cdot (dq_k/dt) \cdot (dq_m/dt). \quad i = 1, n. \\ c_i &= \sum_{j=i}^n -m_j \cdot g \cdot U_{ji} \cdot r^j_j \quad i = 1, n. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$\mathbf{D}(q)$: matrice d'inertie.

$\mathbf{h}(q, dq/dt) = [h_1, \dots, h_n]^T$: couple du à l'accélération de coriolis et centrifuge.

$\mathbf{c}(q) = [c_1, \dots, c_n]^T$: couple du à la gravitation.

Le modèle dynamique explicite du bras manipulateur sera donc:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}(q) \cdot d^2q/dt^2 + \mathbf{h}(q, dq/dt) + \mathbf{c}(q). \quad (2.2.16)$$

Remarque:

- Les coefficients D_{ik} , h_{ikm} , c_i dépendent de la position et de la vitesse angulaire de chaque articulation, ainsi que les paramètres d'inertie telle la masse et la longueur. A partir des équations données ci-dessus il est aisé de donner à chacun d'eux le sens physique correspondant.
- D_{ik} est l'inertie que présente l'articulation i , par rapport à l'articulation k et vice-versa, celle-ci dépend, en général, de la configuration cinématique du bras manipulateur, i.e. La position relative de l'articulation i et k . Elle est reliée au couple de réaction, induit par l'accélération de l'articulation k et exercé sur l'articulation i , on en déduit que: $D_{ik} = D_{ki}$ i.e. D est symétrique et définie positive.
- h_{ikm} est relié aux vitesses angulaires des articulations k et m , qui en se combinant induisent un couple de réaction exercé sur l'articulation i . En particulier, pour $k=m$ il s'agira de la force centrifuge générée par la vitesse angulaire $d\theta_k/dt$ et exercée sur l'articulation i , autrement, il s'agira de la force de Coriolis générée par les vitesses angulaires des articulations k et m . Enfin, le bon sens physique nous montre que: $h_{ikm} = h_{imk}$.
- c_i représente l'effet de la gravitation sur l'articulation i .

Comme il a été dit auparavant, la méthode de Lagrange-Euler est basée sur l'utilisation des matrices de transformations homogènes et aboutit à un système d'équations différentielle non-linéaires du second ordre, il s'ensuit que cette dernière méthode n'est pas adapté au calcul du couple de chaque articulation en temps réel, d'où tout l'intérêt d'une méthode de calcul itérative. D'autre part, cette méthode pourrait être utilisé afin de valider le modèle obtenu par la méthode de Lagrange Euler.

2.2.2.2. Approche de Newton-Euler:

Afin de saisir le bon sens de la formulation de Newton-Euler, nous avons jugé nécessaire d'introduire les notions de mécanique analytique utilisés dans cette méthode.

- Référentiels en mouvement:

Soit OXYZ, OX'Y'Z' deux référentiels, le premier est un référentiel d'inertie et le second est en rotation autour de celui-ci, soit M un point quelconque de l'espace tel que: $OM = r$.

Soit $[i, j, k]$ et $[i', j', k']$ des vecteurs unités suivant les principaux axes de respectivement, OXYZ et OX'Y'Z'.

Nous aurons donc:

$$R = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k.$$

Ou bien:

$$R = x' \cdot i' + y' \cdot j' + z' \cdot k'.$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx'}{dt} i' + \frac{dy'}{dt} j' + \frac{dz'}{dt} k' + x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt}$$

on note les dérivées de r par rapport au référentiel OX'Y'Z' par une apostrophe:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d'r}{dt} + x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt}$$

soit ω le vecteur vitesse angulaire de rotation du référentiel OX'Y'Z' par rapport à OXYZ:

nous aurons par conséquent:

$$\frac{ds}{dt} = \omega \times s \tag{2.2.17}$$

ce qui nous donne:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d'r}{dt} + \omega \times r \quad (2.2.18)$$

en dérivant une seconde fois, nous aboutissons à:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d'^2r}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d'r}{dt} + \omega \times (\omega \times r) + \frac{d\omega}{dt} \times r \quad (2.2.19)$$

Le premier terme est l'accélération relative par rapport au référentiel OXYZ, le second est appelé accélération de coriolis et le troisième est appelé accélération centripète. Dans le cas de translation du référentiel en mouvement, le vecteur position r sera égal à $r' + h$ tel que $h=OO'$.

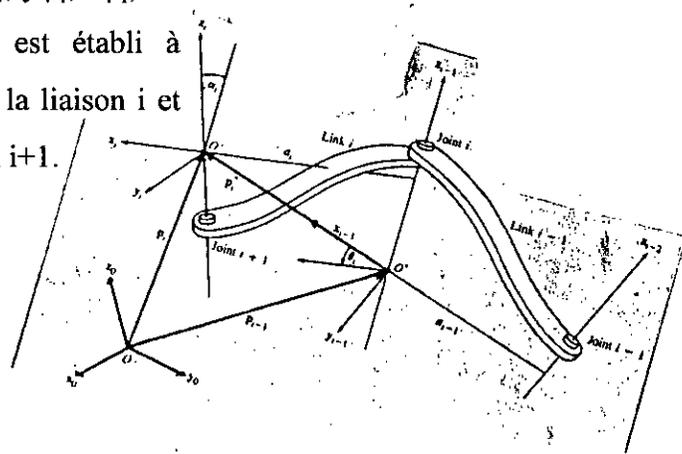
Par conséquent:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d'r'}{dt} + \omega \times r' + \frac{dh}{dt} \quad (2.2.20)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d'^2r'}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d'r'}{dt} + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \frac{d^2h}{dt^2} \quad (2.2.21)$$

- Cinématique d'une liaison:

Soit la chaîne articulée représentée dans la figure ci-contre, on rappelle que le référentiel $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ de la liaison $i-1$ et dont l'origine est O^* est établi à l'articulation i , le référentiel (x_i, y_i, z_i) de la liaison i et dont l'origine est O' est établi à l'articulation $i+1$.



Nous avons aussi :

$$OO' = p_i$$

$$OO^* = p_{i-1}$$

$$O^*O' = p_i^*$$

Soit v_{i-1} et ω_{i-1} respectivement la vitesse linéaire et angulaire du référentiel $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, par rapport au référentiel d'inertie. Soit ω_i et ω_i^* respectivement la vitesse angulaire de O' par

rapport au référentiels (x_0, y_0, z_0) et $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$. Enfin, v_i la vitesse linéaire de O' par rapport à (x_0, y_0, z_0) .

En utilisant (2.2.20) on trouve:

$$v_i = \frac{d' p_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times p_i^* + v_{i-1} \quad (2.2.22)$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_i^* \quad (2.2.23)$$

Où la notation $d'(\)/dt$ signifie la dérivée par rapport au référentiel $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$.

En utilisant l'équation(2.2.21) on trouve:

$$\frac{d^2 p_i}{dt^2} = \frac{d'^2 p_i^*}{dt^2} + 2\omega_{i-1} \times \frac{d' p_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times r') + \frac{d\omega_{i-1}}{dt} \times p_i^* + \frac{d v_{i-1}}{dt} \quad (2.2.24)$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d\omega_{i-1}}{dt} + \frac{d\omega_i^*}{dt} \quad (2.2.25)$$

D'ou en utilisant l'équation (2.2.18), on trouve que l'accélération angulaire de (x_i, y_i, z_i) par rapport à $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ est donné par:

$$\frac{d\omega_i^*}{dt} = \frac{d'\omega_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_i^* \quad (2.2.26)$$

Il s'ensuit que l'équation (2.2.25) pourra se réécrire sous la forme:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d\omega_{i-1}}{dt} + \frac{d'\omega_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_i^* \quad (2.2.27)$$

Pour des articulations rotationnelles, nous aurons ce qui suit:

$$\omega_i^* = Z_{i-1} \frac{dq_i}{dt}$$

$$\frac{d'\omega_i^*}{dt} = Z_{i-1} \frac{d^2 q_i}{dt^2}$$

Il s'ensuit pour les équations (2.2.23) et (2.2.27):

$${}^i v = \omega_{i-1} + Z_{i-1} \frac{d q_i}{dt} \quad (2.2.28)$$

$$\frac{d \omega_i}{dt} = \frac{d \omega_{i-1}}{dt} + Z_{i-1} \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \omega_{i-1} \times Z_{i-1} \frac{d q_i}{dt} \quad (2.2.29)$$

En utilisant l'équation (2.2.17) on peut déterminer la vitesse et l'accélération linéaires de la liaison i par rapport à la liaison $i-1$:

$$\frac{d' p_i^*}{dt} = \omega_i^* \times p_i^* \quad (2.2.30)$$

$$\frac{d'^2 p_i^*}{dt^2} = \frac{d' \omega_i^*}{dt} \times p_i^* + \omega_i^* \times (\omega_i^* \times p_i^*) \quad (2.2.31)$$

Enfin, on peut à présent donner l'expression de la vitesse et de l'accélération de la liaison i :

$$v_i = \omega_i \times p_i^* + v_{i-1} \quad (2.2.32)$$

$$\frac{d v_i}{dt} = \frac{d \omega_i}{dt} \times p_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times p_i^*) + \frac{d v_{i-1}}{dt} \quad (2.2.33)$$

-Équations récursives du mouvement:

A partir des informations cinématique de chaque liaison, nous pouvons à présent déduire les équations du mouvement du bras manipulateur, par application du principe de d'Alembert à chaque liaison. Celui-ci applique les conditions de l'équilibre statique aux problèmes dynamiques, en considérant et les forces extérieures et les forces de réactions des éléments mécaniques. Le principe de d'Alembert s'intitule comme suit: "*pour n'importe quel corps physique, la somme algébrique des forces extérieures et des forces s'opposant au mouvement de celui-ci, est nulle selon toutes les directions.*"

Supposons que l'origine O' est située au centre de masse de la liaison i en faisant correspondre les variables de la figure avec celles citées ci-dessus, il nous reste à définir les variables suivantes, par rapport au référentiel d'inertie.

M_i : masse totale de liaison i .

\underline{R}_i : position du centre de masse de la liaison i à partir de l'origine du référentiel d'inertie.

\underline{S}_i : position du centre de masse de la liaison i à partir de l'origine du référentiel (x_i, y_i, z_i) .

\underline{P}_i^* : l'origine du $i^{\text{ème}}$ référentiel par rapport au $(i-1)^{\text{ème}}$.

\underline{V}_i : vitesse linéaire du centre de masse de la liaison i .

\underline{A}_i : accélération linéaire du centre de masse de la liaison i .

\underline{F}_i : somme des forces extérieures exercées sur le centre de masse de la liaison i .

\underline{N}_i : somme des couples extérieurs exercés sur la liaison i , en son centre de masse.

\underline{I}_i : matrice d'inertie de la liaison i par rapport à son centre de masse et référée au référentiel d'inertie.

\underline{f}_i : force exercée sur la liaison i par la liaison $i-1$, par rapport au référentiel $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, afin de supporter la liaison i et les liaisons qui lui sont consécutives.

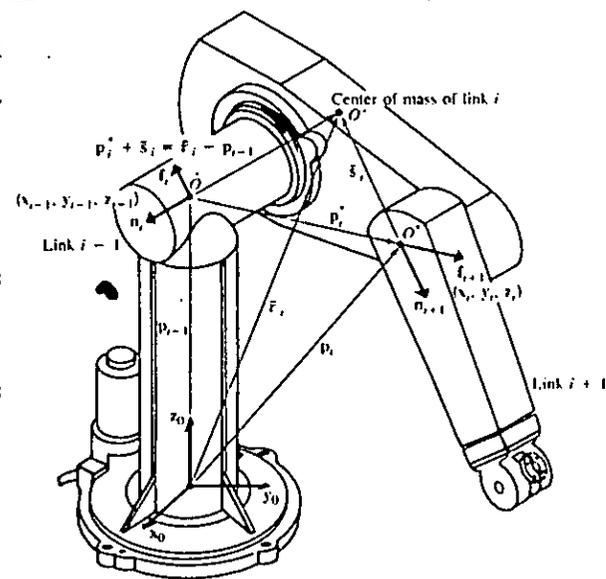
\underline{n}_i : couple exercé sur la liaison i par la liaison $i-1$, par rapport au référentiel $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$.

En négligeant les frottements visqueux de toutes les liaisons, et en appliquant le principe de d'Alembert énoncé ci-dessus à chaque liaison:

$$\begin{aligned} \underline{F}_i &= \frac{d(m_i \underline{v}_i)}{dt} = m_i \underline{a}_i \\ \underline{N}_i &= \underline{I}_i \frac{d\omega_i}{dt} + \omega_i \times (\underline{I}_i \omega_i) \\ \underline{R}_0^i \underline{N}_i &= (\underline{R}_0^i \underline{I}_i \underline{R}_0^0) \cdot (\underline{R}_0^i \frac{d\omega_i}{dt}) + (\underline{R}_0^i \omega_i) \times ((\underline{R}_0^i \underline{I}_i \underline{R}_0^0) \times (\underline{R}_0^i \omega_i)) \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

En utilisant les expressions de la vitesse et de l'accélération données par les équations (2.2.20) et (2.2.21), on trouve:

$$\underline{V}_i = \omega_i \times \underline{s}_i + \underline{v}_i \quad (2.2.35)$$



$$\underline{a}_i = \frac{d\omega_i}{dt} \times \underline{s}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \underline{s}_i) + \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad (2.2.36)$$

La force et le moment totale extérieure, respectivement \mathbf{F}_i et \mathbf{N}_i , exercés sur la liaison i sont ceux exercés sur celle-ci par la gravité et les liaisons adjacentes c'est à dire $i-1$ et $i+1$, il s'ensuit:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1}$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (\mathbf{p}_{i-1} - \underline{r}_i) \times \mathbf{f}_i + (\mathbf{p}_i - \underline{r}_i) \times \mathbf{f}_{i+1}$$

D'ou:

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (\mathbf{p}_{i-1} - \underline{r}_i) \times \mathbf{F}_i + \dot{\mathbf{p}}_i \times \mathbf{f}_{i+1}$$

On remarque que:

$$\underline{r}_i - \mathbf{p}_{i-1} = \dot{\mathbf{p}}_i + \underline{s}_i$$

Ainsi les équations précédentes pourront s'écrire sous forme récursive comme suit:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1} = m_i \underline{a}_i + \mathbf{f}_{i+1} \quad (2.2.37)$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_{i+1} + \dot{\mathbf{p}}_i \times \mathbf{f}_{i+1} + (\dot{\mathbf{p}}_i + \underline{s}_i) \times \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i \quad (2.2.38)$$

L'importance de ces équations réside dans leur récursivité, nous pouvons déduire les forces et moments de chaque liaison $(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)$, notons que \mathbf{f}_{n+1} et \mathbf{n}_{n+1} sont, respectivement, les forces et moments exercés par l'outil du bras manipulateur sur l'objet extérieur.

Le couple fourni au niveau de l'articulation i est la somme de la projection de \mathbf{n}_i sur l'axe z_{i-1} et le couple de frottement visqueux s'opposant au mouvement.

$$T_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{Z}_{i-1} + b_i dq_i/dt. \quad (2.2.39)$$

b_i : coefficient de frottement visqueux.

En supposant la base du bras manipulateur fixée dans la plate-forme, comme illustré ci-dessus, la liaison 0 sera donc immobile, d'ou: $\omega_0 = d\omega_0/dt = 0$ et $\mathbf{v}_0 = 0$ et pour introduire la gravité $d\mathbf{v}_0/dt = \mathbf{g}$.

En résumé, nous pouvons à présent dire que l'approche de **Newton-Euler** consiste en un ensemble d'équations récursives directes et rétrogrades, en ce qui concerne les équations directes il s'agit des équations (2.2.32) et (2.2.33), puisque les vitesses et les accélérations

linéaires et angulaires sont propagées de la base vers l'outil terminal du bras manipulateur, alors que les équations rétrogrades sont (2.2.37) et (2.2.38), puisque les forces et les couples exercés sur chaque liaison sont rétropropagés récursivement de l'outil terminal vers la base. On en conclut, que les équations directes propagent les informations cinématique (vitesse et accélérations) de la base vers l'outil terminal, alors que les équations rétrogrades s'occupent de rétropropager les informations dynamiques (forces et couples) de l'outil terminal vers la base du manipulateur.

-Équations récursives du mouvement d'une liaison par rapport à son référentiel:

Un des inconvénients de ces équations récursives données ci-dessus, réside dans le fait que toutes les matrices d'inertie I_i , ainsi que tout les paramètres géométrique physiques $\underline{r}_i, \underline{s}_i, \underline{p}_{i-1}$, sont par rapport au référentiel d'inertie, Ce qui veut dire qu'ils vont varier lorsque le bras manipulateur sera en mouvement. Luh et al. [1980] ont amélioré l'approche de N-E, en référençant toutes les vitesses, accélérations, matrices d'inertie, positions des centres de masse de chaque liaison, et autres forces et moments par rapport au référentiel propre à chaque liaison.

Cela a pour principale conséquence de simplifier le calcul des couples appliqués au niveau de chaque articulation, le temps mis pour cela étant proportionnel au nombre d'articulation et donc indépendant de la configuration du bras manipulateur.

Soit ${}^{i-1}R_i$ la sous-matrice supérieur gauche de la matrice ${}^{i-1}A_i$, définie dans [2.1.1] par:

$${}^{i-1}R_i = [n \ s \ a].$$

Au lieu de calculer $\omega_i, d\omega_i/dt, dv_i/dt, \underline{a}_i, \underline{p}_i, \underline{s}_i, F_i, N_i, f_i, n_i$ et T_i et sont qui référés au référentiel d'inertie, nous calculons ${}^iR_0, \omega_i, {}^iR_0, D\omega_i/dt, {}^iR_0, Dv_i/dt, \dots, {}^iR_0, T_i$ qui sont eux référés au référentiel propre à la liaison i (x_i, y_i, z_i).

Il s'ensuit que les équations (2.2.28),(2.2.29) et (2.2.33) et (2.2.35) à (2.2.39) pourront se réécrire sous la forme:

Forward Equations:

$${}^i R_0 \omega_i = {}^i R_{i-1} \cdot ({}^{i-1} R_0 \omega_{i-1} + Z_0 \frac{dq_i}{dt})$$

$${}^i R_0 \frac{d\omega_i}{dt} = {}^i R_{i-1} \cdot ({}^{i-1} R_0 \frac{d\omega_{i-1}}{dt} + Z_0 \frac{d^2 q_i}{dt^2} + ({}^{i-1} R_0 \omega_{i-1}) \times Z_0 \frac{dq_i}{dt})$$

$${}^i R_0 \frac{dv_i}{dt} = ({}^i R_0 \frac{d\omega_i}{dt}) \times ({}^i R_0 p_i^*) + ({}^i R_0 \omega_i) \times (({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 p_i^*)) + {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 \frac{dv_{i-1}}{dt})$$

$${}^i R_0 \underline{a}_i = ({}^i R_0 \frac{d\omega_i}{dt}) \times ({}^i R_0 \underline{s}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times (({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 \underline{s}_i)) + ({}^i R_0 \frac{dv_i}{dt})$$

Backward Equations:

$${}^i R_0 \cdot \underline{F}_i = m_i \cdot {}^i R_0 \cdot \underline{a}_i$$

$${}^i R_0 \underline{N}_i = ({}^i R_0 I_i {}^0 R_i) \cdot ({}^i R_0 \frac{d\omega_i}{dt}) + ({}^i R_0 \omega_i) \times (({}^i R_0 I_i {}^0 R_i) \times ({}^i R_0 \omega_i))$$

$${}^i R_0 \cdot \underline{f}_i = {}^i R_{i+1} \cdot ({}^{i+1} R_i \cdot \underline{f}_{i+1}) + {}^i R_0 \cdot \underline{F}_i$$

$${}^i R_0 \underline{n}_i = {}^i R_{i+1} ({}^{i+1} R_0 \underline{n}_{i+1} + ({}^{i+1} R_0 p_i^*) \times ({}^{i+1} R_0 \underline{f}_{i+1})) + ({}^i R_0 p_i^* + {}^i R_0 \underline{s}_i) \times ({}^i R_0 \underline{F}_i) + {}^i R_0 \underline{N}_i$$

$$T_i = ({}^i R_0 \underline{n}_i) \cdot ({}^i R_{i-1} Z_0) + b_i dq_i/dt.$$

Ou $Z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$, ${}^i R_0 \underline{s}_i$ est la position du centre de masse de la liaison i , par rapport au référentiel (x_i, y_i, z_i) et ${}^i R_0 p_i^*$ est la position du référentiel (x_i, y_i, z_i) à partir de l'origine du référentiel $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ par rapport au $i^{ème}$ référentiel. Enfin, ${}^i R_0 \cdot I_i \cdot {}^0 R_i$ est la matrice d'inertie de la liaison i par rapport à son centre de masse et référée au référentiel (x_i, y_i, z_i) .

2.3. Modèle dynamique du PUMA560:

Le calcul du modèle dynamique explicite a été effectué à l'aide des deux approches citées auparavant, celles-ci ont donné les mêmes résultats comme on peut s'en convaincre en consultant l'annexe A, ou sont également données les matrices U_{ij} et U_{ijk} des deux modèles de

manipulateurs que nous avons considéré, ainsi que les étapes de calcul par l'approche de de Newton-Euler, nous nous contenterons donc ici de donner uniquement l'expression littérale correspondant au modèle dynamique du PUMA560, celui du SCARA 3RP sera présenté dans la partie pratique (voir chapitre 5).

Avec les notations suivantes:

$$I_1^* = I_{yy1} + I_{xx2} + m_2 d_2 (d_2 + e) + m_3 d_2^2 + I_{xx3}.$$

$$I_2^* = I_{yy3} - I_{xx3}.$$

$$I_3^* = I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 l_2^2.$$

$$I_4^* = m_3 l_2 l_3.$$

$$I_5^* = 0.5 m_3 l_3 d_2.$$

$$I_6^* = 0.5 m_2 l_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 l_2.$$

$$I_7^* = I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 l_2^2.$$

$$I_8^* = I_{zz3}.$$

Le modèle dynamique du PUMA sera:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^* + I_2^* c_{23}^2 + I_3^* c_2^2 + I_4^* c_2 c_{23} & I_5^* s_{23} + I_6^* s_2 & I_5^* s_{23} \\ I_5^* s_{23} + I_6^* s_2 & I_7^* + I_4^* c_3 & I_8^* + 0.5 I_4^* c_3 \\ I_5^* s_{23} & I_8^* + 0.5 I_4^* c_3 & I_8^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^2 \theta_1 / dt^2 \\ d^2 \theta_2 / dt^2 \\ d^2 \theta_3 / dt^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-2 I_3^* s_2 c_2 - 2 I_2^* s_{23} c_{23} - I_4^* (c_2 s_{23} + s_2 c_{23})) (d\theta_1 / dt) (d\theta_2 / dt) + \\ (-2 I_2^* s_{23} c_{23} - I_4^* c_2 s_{23}) (d\theta_1 / dt) (d\theta_3 / dt) + (I_6^* c_2 + I_5^* c_{23}) (d\theta_2 / dt)^2 + \\ 2 I_5^* c_{23} (d\theta_2 / dt) (d\theta_3 / dt) \\ (I_3^* c_2 s_2 + I_2^* c_{23} s_{23} + 0.5 I_4^* (s_2 c_{23} + c_2 s_{23})) (d\theta_1 / dt)^2 - I_4^* s_3 d\theta_2 / dt \cdot d\theta_3 / dt \\ - 0.5 I_4^* s_3 (d\theta_3 / dt)^2 \\ (I_2^* s_{23} c_{23} + 0.5 I_4^* c_2 s_{23}) (d\theta_1 / dt)^2 + 0.5 I_4^* s_3 (d\theta_2 / dt)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_3 l_3 + 0.5 m_2 l_2) g \cdot c_2 - 0.5 m_3 l_3 \cdot g \cdot c_{23} \\ -0.5 m_3 l_3 \cdot g \cdot c_{23} \end{bmatrix}.$$

-Hypothèses de modélisation et choix des paramètres:

Les paramètres du bras manipulateur ne peuvent pas être choisis arbitrairement, car alors nous risquerions d'aboutir à des problèmes numériques lors de simulations sur ordinateur, ainsi et pour approcher le plus la réalité physique du problème, nous ne pouvons

trouver mieux que les paramètres réels du PUMA560 et qui sont disponibles dans la référence [Ussama 1986], ceux-ci sont donnés dans l'annexe B. Dans un deuxième temps, nous avons été amenés à inclure la masse de l'effecteur ainsi que ses moments d'inertie respectifs, ainsi qu'à considérer les moments d'inertie des moteurs. Pour ceci nous avons pris pour seule hypothèse simplificatrice le fait que le centre d'inertie de l'effecteur coïncide avec l'origine du repère 3.

L'inclusion de l'effet de l'effecteur modifiera sans nul doute la matrice d'inertie et induira un couple de Coriolis. Pour la modélisation de l'effecteur et pour éviter de refaire tous les calculs dans le cas de la méthode récursive, nous nous sommes contenté de la méthode directe pour le calcul de la nouvelle matrice d'inertie, cependant, pour le calcul du couple de Coriolis nous nous sommes basé sur la méthode proposé dans [Ussama 1986], ainsi les termes additifs à la matrice d'inertie seront:

$$\Delta D_{11} = \text{trace } U_{31} \cdot T_4 \cdot U_{31}' = (I_{zzt} + m_t \cdot d_2^2 + I_{m1}) + (I_{yyt} - I_{xxt} + m_t \cdot l_3^2) \cdot c_{23}^2 + m_t \cdot l_2^2 \cdot c_2^2 + 2m_t \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot c_2 \cdot c_{23}.$$

$$\Delta D_{22} = m_t \cdot l_3 \cdot d_2 \cdot s_{23} + m_t \cdot d_2 \cdot l_2 \cdot s_2.$$

$$\Delta D_{13} = m_t \cdot l_3 \cdot d_2 \cdot s_{23}.$$

$$\Delta D_{22} = I_{zzt} + m_t (l_2^2 + l_3^2) + I_{m2} + 2 \cdot m_t \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot c_3.$$

$$\Delta D_{23} = I_{zzt} + m_t \cdot l_2^2 + m_t \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot c_3.$$

$$\Delta D_{33} = I_{zzt} + m_t \cdot l_2^2 + I_{m3}.$$

Avec I_{mi} $i=1,3$ moments d'inertie des différents moteurs.

I_{xxt} , I_{yyt} , I_{zzt} : moments d'inertie totaux par rapport aux principaux axes de l'effecteur.

Remarque: les couples de Coriolis totaux se déduisent de l'ancienne expression juste en substituant les facteurs I_i^* par leur valeur augmentée des termes additifs dus à l'effet de l'effecteur.

-Effet de la masse de la charge:

Afin d'étudier et donc modéliser l'effet de la masse de la charge sur la dynamique du système, nous avons utilisé l'approche de la matrice Jacobienne. Ainsi le calcul du Jacobien se déduit du calcul du vecteur position de l'effecteur:

$${}^0 r_3 = {}^0 A_3 {}^3 r_3$$

$$\text{Tel que: } {}^3 r_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

Ainsi nous aurons:

$${}^0 r_3 = [c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 \quad s_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) + d_2 c_1 \quad -(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) \quad 1]^T$$

Il s'ensuit que:

$$J(i,j) = \partial {}^0 r_3 / \partial \theta_j$$

D'où l'expression de la matrice Jacobienne:

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} s_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 c_1 & -c_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -c_1(l_3 s_{23}) \\ c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - d_2 s_1 & -s_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) & -s_1(l_3 s_{23}) \\ 0 & -(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) & -(l_3 c_{23}) \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que le couple additif dû à l'effet de la masse sera donné par:

$$T_{\text{MASSE}} = m \cdot J^T (J \cdot d^2\theta/dt^2 + J_{-}(\theta, d\theta/dt) d\theta/dt + g)$$

Tel que:

- m est la masse de la charge.
- θ est le vecteur position angulaire.
- $d\theta/dt$ est le vecteur vitesse angulaire.
- J_{-} est la matrice Jacobienne dérivée obtenue à partir de J par simple différentiation par rapport au temps.
- g est le vecteur gravitation défini dans (2.2).

2.3. CONCLUSION :

Ce chapitre a permis d'obtenir le modèle dynamique du PUMA560, le modèle dynamique obtenu a été validé par les deux méthodes citées auparavant. Ce modèle a permis de mettre en évidence la difficultés de commander ce genre de bras manipulateurs, étant donné les fortes linéarités qui régissent le fonctionnement dynamique de celui-ci, et de la nécessité de synthétiser une commande robuste qui permettra d'affronter ces non linéarités.



CHAPITRE 3

*STABILITÉ NON
LINÉAIRE*

3.1. INTRODUCTION:

Les questions de stabilité revêtent une importance évidente, en matière de commande. Elles ne vont pas jusqu'à constituer l'essentiel du problème des asservissements, qui est un problème de performances et de précision. Néanmoins, la stabilité est une condition nécessaire, presque toujours impérative, pour le fonctionnement des systèmes de commande.

Ainsi dans ce qui suit nous allons évoquer quelques notions et conditions de stabilité des systèmes de commande, basé sur la théorie de Lyapunov et de l'hyperstabilité. La méthode de Lyapunov a été introduite car elle est communément utilisée dans la littérature dans la synthèse des lois de commande, par contre, la méthode de l'hyperstabilité de Popov bien qu'à notre avis elle est moins utilisée que la première, nous avons jugé bon de l'introduire car elle a été retrouvée dans quelques travaux de commande adaptative appliqués en robotique tel [Tarokh 1989].

3.2. NOTIONS DE STABILITÉ NON-LINÉAIRE :

3.2.1. Stabilité au sens de Lyapunov:

-Stabilité intuitive d'un régime permanent :

Physiquement, on dit qu'un système est stable si, en le déplaçant de sa position d'équilibre, il tend à y revenir; instable, s'il tend à s'en écarter davantage. Cependant, cette définition est trop générale pour être assez précise, ainsi les systèmes à la limite de la stabilité peuvent lui échapper, d'ou la nécessité d'une formulation mathématique rigoureuse du problème de la stabilité. Une telle définition a vu le jour dans les travaux du mathématicien russe A. Lyapunov (1892) dans l'ouvrage intitulé "Le problème général de la stabilité du mouvement. 1907". Cette théorie constitue de nos jours le fondement théorique principal dans la synthèse des lois de commande des systèmes non-linéaires.

-Définition de la stabilité d'un équilibre :

Soit un système ayant n variables $X=[x_1, \dots, x_n]'$ et $X=0$ comme point d'équilibre. Supposons le système écarté de sa position d'équilibre, et abandonné à lui-même au temps t_0 , avec les conditions initiales $X(0)=[x_1(0), \dots, x_n(0)]$, l'état subséquent du système sera une fonction du temps $X(t)=[x_1(t), \dots, x_n(t)]$. Dans ces conditions, on dit que la position d'équilibre du système est stable si, étant donné un nombre positif quelconque ϵ , il existe un nombre positif η tel que, si les conditions initiales vérifient:

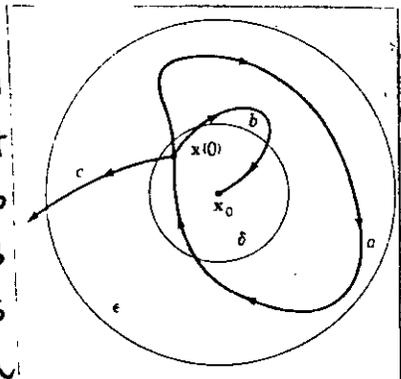
$$x_1(0)^2 + \dots + x_n(0)^2 < \eta$$

on soit certain qu'on aura après un certain temps (c'est à dire, pour toute valeur de $t > t_0$):

$$x_1(t)^2 + \dots + x_n(t)^2 < \epsilon.$$

Dans le cas contraire, c'est à dire s'il existe au moins un nombre positif ϵ , tel qu'on ne puisse pas trouver de nombre η correspondant qui satisfasse aux inégalités précédentes, on dit que le système est instable.

Notons que la stabilité, ne requiert point que $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tendent vers zéro, lorsque t augmente indéfiniment, ce qui permet l'existence d'oscillations continues autour du point d'équilibre, comme il est illustré ci-contre; la trajectoire dans l'espace d'état est un contour fermé appelé "cycle limite". Les performances requises, peuvent déterminer si ces oscillations sont acceptables, cela peut être influencée par l'amplitude et la fréquence de ces oscillations.



Remarque: on s'intéresse parfois, pour juger de la stabilité, non pas à l'état du système, mais, à une variable particulière, i.e. sa sortie, ou plus précisément, son signal d'erreur (éventuellement, avec la sortie d'un modèle de référence, s'il s'agit d'une commande, dite à modèle de référence). On parlera de stabilité si, le système étant écarté de son

équilibre $e=0$ de la quantité $e(0)=e_0$ il est possible, étant donné, un nombre positif quelconque ε , de trouver un nombre positif η tel que:

$$\text{si } |e_0| < \eta.$$

On soit certain d'avoir, après un certain temps t_0 : $|e(t)| < \varepsilon$.

Remarques:

- t_0 est un nombre positif quelconque. se donner t_0 différent de zéro, revient à ignorer délibérément, ce qui pourrait se passer avant cet instant t_0 , ou l'erreur s'éloignerait grossièrement de l'équilibre.

- En résumé, on dira que la stabilité est une garantie contre l'éventualité d'écarts importants, insuffisamment provoqués.

-Stabilité Asymptotique:

Si le système, écarté de sa position d'équilibre, finit par y revenir, i.e. si dans les conditions énoncées auparavant, $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \rightarrow 0$ on dit qu'il y a stabilité asymptotique.

Remarques:

- La stabilité asymptotique est plus restrictive que la stabilité simple. Tout équilibre asymptotiquement stable, est bien évidemment stable, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

- Il existe d'autres définitions de la stabilité que celle de Lyapunov, telle que celle proposée par H.Bode ou bien H.James, la première étant un cas particulier de celle de Lyapunov. Nous nous y arrêtons pas, car elles se laissent difficilement, ou pas du tout, généraliser aux systèmes non-linéaires.

-Stabilité locale et globale:

On parle de stabilité globale, lorsque le système est stable pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables, on parle alors, de stabilité illimitée. Au contraire, la stabilité locale est simplement la stabilité de la position d'équilibre, sans rien préjuger du système étudié, elle est une condition nécessaire, mais non suffisante de la stabilité globale.

Remarque: la stabilité globale n'est pas une propriété intrinsèque du système physique, mais seulement dans certaines conditions, il est vain de parler de stabilité globale, sans préciser à la fois le système et le domaine auquel appartiennent les variables.

-Stabilité globale asymptotique et domaine de stabilité:

L'étude de la stabilité d'un point singulier, consiste à déterminer la région de l'espace d'état à l'intérieur de laquelle, les conditions initiales donnent naissance, à des trajectoires troublées, tendant vers cet état d'équilibre, et celles se trouvant à l'extérieur de celle-ci à des trajectoires divergentes. Cette région de l'espace d'état est appelée domaine de stabilité. On la connaîtrait avec précision, si on connaissait la séparatrice qui en limite le contour.

Malheureusement, cela est impossible dans le cas général, on se contente fréquemment d'un domaine des variables à la forme simple, plus restreint que le domaine de stabilité, mais intérieur à ce dernier, ce qui explique le fait, que nous soyons dans la majorité des cas, conduits à des conditions suffisantes et non nécessaires.

-Approximation du premier degré de Lyapunov pour la stabilité locale:

Considérons le cas d'un système autonome (équations indépendantes du temps) :

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i \cdot x + b_i \cdot y + P_i(x, y). \quad i = 1, n.$$

D'après les travaux de Lyapunov, la stabilité de la position d'équilibre peut s'étudier sur le système "linearisé", c'est à dire celui obtenu en négligeant les termes $P_i(x,y)$ qui contiennent des puissances supérieures ou égales de x et de y .

- si le système linearisé est asymptotiquement stable, il y a stabilité asymptotique.
- si le système linearisé est asymptotiquement instable, il y a instabilité.
- si le système linearisé est asymptotiquement stable, sans l'être asymptotiquement, on est en présence d'un cas critique...

Remarque: si ces théorèmes constituent la justification théorique, de l'approximation du premier degré, néanmoins, il présente deux sortes de limites pratiques :

- La linéarisation de Lyapunov, ne permet d'étudier la stabilité, qu'autour des points singuliers, et donc ne peut fournir aucune information sur le domaine de stabilité.
- En un certain nombre de cas spéciaux, mais qui existent toutefois en pratique, il n'est pas possible d'aboutir à une approximation du premier degré, tel l'exemple d'un système avec zone morte, ce qui revient à dire que de très nombreux problèmes pratiques échappent à l'application directe de ces théorèmes.

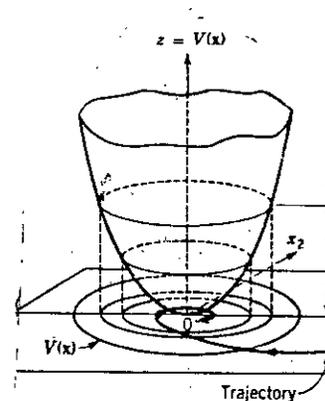
-Méthode directe de Lyapunov pour la stabilité globale :

Soit un système décrit par le système d'équations non-linéaires suivant :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, n.$$

dont l'origine est point d'équilibre .

supposons qu'il existe une famille de surfaces fermées $V(x_1, \dots, x_n)$ entourant l'origine, tel que par chaque point de l'espace d'état, passe une surface unique de la famille. Si dans toute une région entourant l'origine, le comportement est tel que la vitesse du point (x_1, \dots, x_n) , soit toujours dirigée vers l'intérieur de la surface passant par ce point, le point représentatif finira par arriver à l'origine et par conséquent, le système sera stable.



Inversement, on conçoit que si la vitesse, est dirigée vers l'extérieur, le système est instable.

Les étapes à suivre seront donc :

1. trouver une famille de surfaces fermées, représentée par une fonction V , dite fonction de Lyapunov candidate, tel que : $V(x_1, \dots, x_n) = C > 0$ et V est nulle à l'origine et que si $C_1 < C_2$, la surface définie par $V = C_1$ est entièrement contenue dans celle définie par $V = C_2$
2. si dV/dt est négative: la vitesse est dirigée vers les surfaces à C petit, i.e. vers l'intérieur .
3. si dV/dt est positive: la vitesse est dirigée vers les surfaces à C grand, i.e. vers l'extérieur .

Remarque: La méthode de Lyapunov donne des conditions suffisantes, mais non nécessaires, par conséquent, le fait qu'une fonction V ne puisse pas prouver la stabilité d'un système, ne permet pas de conclure, quoi que ce soit sur ce système.

-Définitions:

On dira d'une fonction qu'elle est définie positive (resp. négative), dans un domaine de l'espace d'état, si en tout point de ce domaine, elle reste positive (resp. négative), et ne s'annule qu'à l'origine. Une fonction sera dite semi-définie si elle conserve le même signe en tout point, mais s'annule aussi en d'autres points autres que l'origine. Enfin, elle sera dite indéfinie dans le domaine étudié, si elle prend des signes opposés, dans différents points de celui-ci.

Dans ce qui suit, on considèrera des fonctions positives vérifiant les conditions suivantes:

1. $V(0, \dots, 0) = 0$.
2. V est infinie pour t tendant vers l'infini : $V \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
3. V resta finie lorsque les variables sont finies.

-Théorème de Lyapunov sur la stabilité asymptotique:

-Théorème:

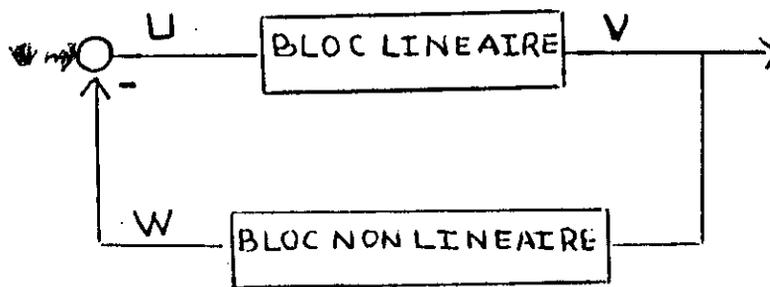
S'il est possible de trouver une fonction V de signe défini, dans un domaine comprenant la position d'équilibre, et dont la dérivée totale dV/dt par rapport au temps, soit définie et

-Théorème:

S'il est possible de trouver une fonction V dont la dérivée est de signe défini dans un domaine comprenant l'origine dV/dt soit : définie de même signe que V , ou de signe indéfini, alors l'équilibre est instable .

3.2.2. Théorie de l'Hyperstabilité:

Le problème de l'hyperstabilité a été introduit par Popov comme une généralisation du problème de la stabilité absolue. Le problème concerne les systèmes qui pourraient être représentés par un bloc (chaîne) directe linéaire et d'un bloc (chaîne) de retour non-linéaire.



Le problème dans l'étude de la stabilité absolue du système [fig .1] consiste à trouver les conditions que doit vérifier le bloc directe (linéaire) afin que ce système soit globalement et asymptotiquement stable pour n'importe quel bloc non-linéaire appartenant à la classe qui vérifie une inégalité de la forme:

$$v_i \cdot \omega_i \geq 0 \quad i = 1, m$$

ou plus généralement :

$$h_1^m \cdot v_i^2 \leq v_i \cdot \omega_i \leq h_1^M \cdot v_i^2 \quad i = 1, m. \quad (3.2.1)$$

$v_i \cdot \omega_i$ étant les composantes des vecteurs d'entrée et de sortie V et ω .

Popov a étudié la stabilité globale et asymptotique du système donné par la figure ci-dessus, mais pour une classe de blocs de retour plus générale, vérifiant l'inégalité:

$$\dot{\eta}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \omega' \cdot v dt \geq -\gamma^2 \quad \forall t_1 \geq t_0. \quad (3.2.2)$$

appelée inégalité intégrale de Popov.

Le système de la figure est dit hyperstable (asymptotiquement), si ce système est globalement stable (asymptotiquement) pour n'importe quel bloc de retour satisfaisant l'inégalité (3.2.2), puisque le bloc de retour non-linéaire est défini par l'inégalité (3.2.2), la propriété d'hyperstabilité dépendra uniquement du bloc linéaire de la chaîne directe. Le bloc directe qui assure l'hyperstabilité est appelé "bloc hypersable".

-Définitions: [Landau 1978]

Soit le système en boucle fermée de la figure ci-dessus, et dont le bloc de la chaîne directe admet comme représentation d'état :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A \cdot x + B \cdot U = A \cdot x - B \cdot \omega. \\ V &= C \cdot x + T \cdot U = C \cdot x - U \cdot \omega. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Et la chaîne de retour non-linéaire: $\omega = f(V, t)$.

x : vecteur d'état [$n \times 1$].

U et V : respectivement entrée et sortie du bloc linéaire de la chaîne directe [$m \times 1$].

A, B, C, T , sont des matrices de dimensions appropriées, la paire (A, B) est complètement contrôlable et la paire (A, C) est complètement observable.

-Définition: [Landau 1978]

Le système en boucle fermée décrit par le système d'équations (3.2.3) est **hyperstable** s'il existe une constante positive δ et une constante positive γ tel que, toute les solutions

$x(x(0), t)$ du système vérifient l'inégalité:

$$\|x(t)\| \leq \delta \cdot [\|x(0)\| + \gamma] \quad \forall t \geq 0.$$

Pour n'importe quelle chaîne de retour vérifiant l'inégalité (3.2.2).

-Définition: [Landau 1978]

Le système en boucle fermée décrit par le système d'équations (3.2.3) est **asymptotiquement hyperstable** si :

- Il est hyperstable.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ quelque soit le vecteur des fonctions f qui vérifie l'inégalité (3.2.2):

Remarque: Les définitions de l'hyperstabilité énoncées dans le cas des systèmes linéaires, invariables dans le temps et complètement contrôlables peuvent être étendues au cas des systèmes linéaires, discrets, variables dans le temps.

-Condition nécessaire et suffisante d'hyperstabilité: [Landau 1978]

La condition nécessaire et suffisante pour que le système en boucle fermée décrit par le système d'équations (3.2.3) et tel que le bloc de retour non-linéaire vérifie l'inégalité (3.2.2) soit **hyperstable** est comme suit:

- La matrice de transfert $H(s) = T + C.(s.I_n - A)^{-1}.B$ doit être une matrice réelle et positive.

-Condition nécessaire et suffisante d'hyperstabilité asymptotique: [Landau 1978]

La condition nécessaire et suffisante pour que le système en boucle fermée décrit par le système d'équations (3.2.3) et tel que le bloc de retour non-linéaire vérifie l'inégalité (3.2.2) soit **hyperstable asymptotiquement** est comme suit:

- La matrice de transfert $H(s) = T + C.(s.I_n - A)^{-1}.B$ doit être une matrice strictement réelle et positive.

-Propriétés de la combinaison de blocs hyperstables: [Landau 1978]

Lemme 1: n'importe quel bloc obtenu par la combinaison parallèle de deux blocs hyperstables est hyperstable.

Lemme 2: n'importe quel bloc obtenu par la mise en boucle fermée de deux blocs hyperstables est hyperstable.

-Positivité des systèmes dynamiques: [Landau 1978]

Le terme positivité dans le cas des systèmes dynamiques est l'extension mathématique de la notion de positivité.

-Definitions:

La fonction rationnelle $h(s)$ de variable complexe $s = \sigma + j\omega$ est **réelle positive** si :

- $h(s)$ est réelle pour s réel.
- $\text{Re}[h(s)] > 0$ pour $\text{Re}[s] > 0$.

-Definitions:

La fonction rationnelle $h(s)$ de variable complexe $s = \sigma + j\omega$ est **strictement réelle positive** :

- $h(s)$ est réelle pour s réel.
- $H(s)$ n'a pas de pôles dans le demi-plan fermé droit .i.e. $\text{Re}[s] \geq 0$.
- $\text{Re}[j\omega] > 0$ $-\infty < \omega < +\infty$.

-Propriétés des fonctions réelles positives:

Soit $h(s) = M(s) / N(s)$, $h(s)$ est réelle positive si:

- $M(s)$ et $N(s)$ ont des coefficients réels.
- $1/h(s)$ est réelle positive.

- $M(s)$ et $N(s)$ sont des polynômes Hurwitzien.
- l'ordre de $M(s)$ diffère de celui de $N(s)$ de ± 1 .

-Lemme de Kalman-Yacubovitch: [Landau 1978]

Soit le système linéaire invariant dans le temps suivant:

$$\dot{x} / dt = A.x + B.u.$$

$$y = C.x. \tag{3.2.4}$$

x : vecteur d'état de dimension $[n \times 1]$.

u et y : respectivement l'entrée et la sortie du système.

A, B, C : matrices de dimensions appropriées.

Nous supposons que la paire (A, B) est contrôlable et que la paire (A, C) est observable.

Lemme: [Landau 1978]

La fonction de transfert $G(s) = C.(s.I_n - A)^{-1}.B$ est réelle positive si et seulement si :

Il existe une matrice Q (L) semi-définie positive et une matrice P définie positive tel que:

$$A.P + P.A = -Q = -L.L' \tag{3.2.5}$$

$$B.P = C. \tag{3.2.6}$$

Lemme: [Landau 1978]

La fonction de transfert $G(s)$ du système décrit par les équations (3.2.4) est strictement réelle positive si et seulement si :

Il existe une matrice Q (L) définie positive et une matrice P définie positive tel que, les équations (3.2.5) soient vérifiées.

3.3. CONCLUSION:

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les principales notions de stabilité, ces notions et notamment celles de la théorie de Lyapunov auront une importance considérable

dans la compréhension des différentes lois de commande que nous présenterons dans le chapitre 5, où la stabilité est une condition impérative dans la synthèse des lois de commande.



CHAPITRE 4

COMMANDE ADAPTATIVE

4.1. INTRODUCTION

Il faut savoir que les méthodes adaptatives constituent actuellement l'un des plus grands thèmes de l'automatique. Ces méthodes sont appliquées dans tous les domaines, car elles permettent de résoudre les problèmes des systèmes à paramètres inconnus ou variables. Dans ce chapitre, nous étudierons les techniques de la commande adaptative, et le problème de robustesse de ces techniques.

4.2. INTRODUCTION A LA COMMANDE ADAPTATIVE:

Dans la vie courante "adapter" veut dire ajuster pour se conformer aux circonstances. On trouve dans la littérature plusieurs définitions de la commande adaptative. Celle donnée par Truxal est la suivante: "*Un système adaptatif est un système qui a été introduit dans un but d'adaptation*"[Åström 1989]. Par contre, Åström définit la commande adaptative d'une façon pragmatique: "*La commande adaptative est simplement un cas particulier de la commande non-linéaire, tel que les états du système puissent être décomposés en deux parties se distinguant l'une de l'autre par leur vitesse de changement. Les états qui changent lentement sont considérés comme étant des paramètres*"[Åström 1989].

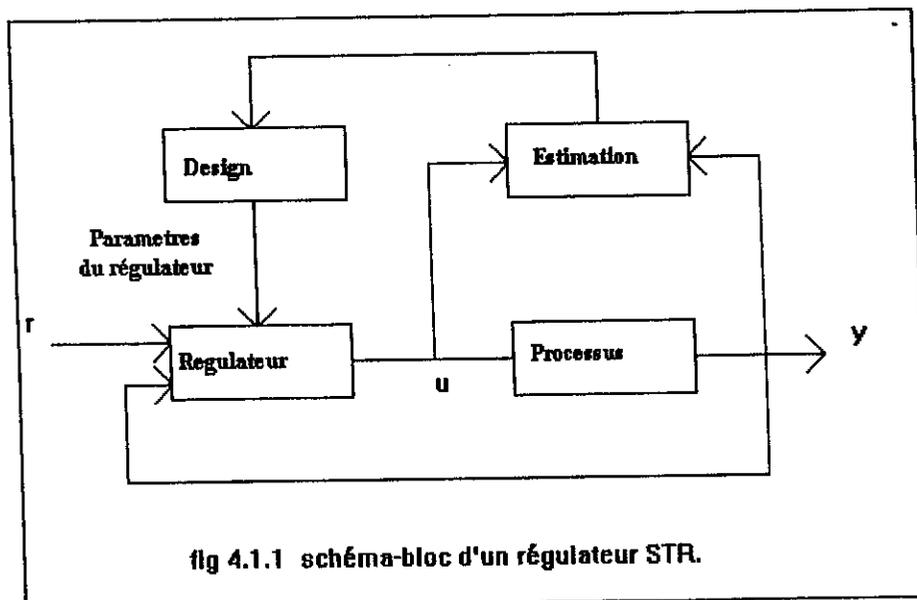
Selon Landau "*Un système de commande adaptative mesure un certain indice de performance(I.P) du système de commande et à partir de l'écart entre l'indice de performance désiré et l'indice de performance mesuré, le mécanisme d'adaptation modifie les paramètres de commande afin de maintenir l'indice de performance du système dans le voisinage des valeurs de l'indice de performance désiré*".[Landau 1978]

La recherche en commande adaptative a commencé dans les années 50 dans le but de concevoir des pilotes automatiques possédant de grandes performances. Mais le fondement théorique était inexistant et l'implémentation impossible. La commande adaptative a vite été oubliée et ce n'est que durant le début des années 70 que la commande adaptative fut redécouverte grâce aux développements théoriques solides qui furent apportés par les chercheurs et aux apports réalisés durant les années 60 dans le domaine de

l'identification. Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature, deux approches étaient et restent les plus intéressantes: La commande adaptative par modèle de référence (M.R.A.C) et les régulateurs auto-ajustables (S.T.R). Les deux approches sont considérées de nos jours comme des cas particuliers d'une philosophie de conception plus générale et ont un nombre important de points communs et dans certains cas, elles conduisent à des schémas identiques. Les deux approches sont relativement simples à mettre en oeuvre et sont les seules à être utilisées en pratique.[Landau Dugard 1985].

-Régulateurs auto-ajustables (S.T.R)

L'idée de base est due à Kalman (1958) et fut développée par Young (1965), Chang et Rissamen (1968) puis par Peterka. Le premier régulateur auto-ajustable (S.T.R) fut implanté en 1973 grâce à Åström et Wittnmark [Chalam 1987]. Åström considère le régulateur auto-ajustable comme un retour d'état avec des paramètres ajustés en temps réel [Åström 1989]. Les S.T.R sont basés sur l'idée de sélectionner une méthode de réglage d'un système à paramètres connus puis appliquer cette méthode à un système à paramètres inconnus en utilisant un algorithme d'identification récursif pour estimer les paramètres [Åström 1989]. Le schéma de la figure (4.1.1) ci-dessous permet d'illustrer le processus de régulation:



-Commande adaptative par Modèle de référence:

La commande adaptative par le modèle de référence (M.R.A.C) a été proposée par Whitney, Yammon et Kezer à l'institut M.I.T en 1958 et développée ensuite par Parks, Monopoli et Landau [CHALAM 1987]. Dans la commande adaptative par modèle de référence, un indice de performance est généré par un modèle dynamique qu'on appelle "modèle de référence", ce modèle est excité par le même signal de référence que le système ajustable. L'écart entre l'indice de performance désiré et l'indice de performance mesuré se fait directement en comparant les états ou les sorties du modèle de référence avec les états ou les sorties du système ajustable. Cet écart est utilisé par le mécanisme d'adaptation pour les changements de paramètres ou pour générer un signal auxiliaire afin de garder l'indice de performance du système ajustable au voisinage de l'indice de performance du modèle de référence. Le schéma de la figure montre une structure parallèle de M.R.A.C (la plus utilisée).

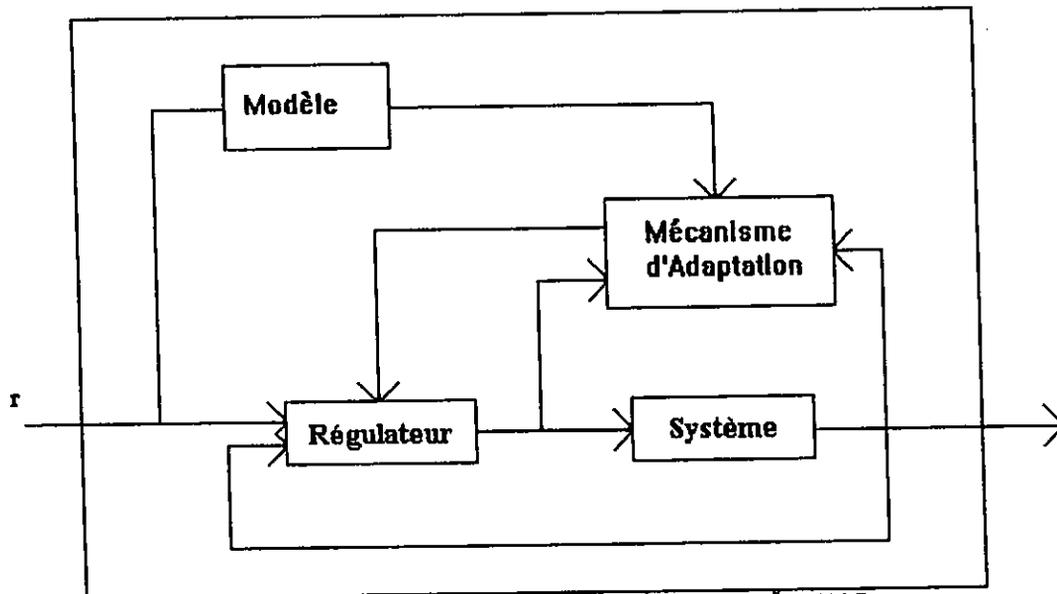


fig 4.1.2 schéma-bloc d'un régulateur à MRAS.

4.3. DEFINITIONS USUELLES EN COMMANDE ADAPTATIVE:

Pour permettre une lecture aisée de ce mémoire, il apparaît utile de donner la définition d'un certain nombre de termes fréquemment utilisés:

Système ajustable : C'est l'ensemble composé du procédé à adapter et du régulateur adaptatif. Soit le schéma de M.R.A.C représenté à la figure (4.1.2) et soit la représentation d'état du modèle de référence :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_m x + B_m U \\ Y_m &= C x\end{aligned}$$

Et soit la représentation d'état du système ajustable:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= A_s(t)y + B_s(t)U \\ Y_s &= C y\end{aligned}$$

Où x et y sont les vecteurs d'états de dimension $(n \times 1)$ respectivement du modèle de référence et du système ajustable.

U : est le vecteur d'entrée de dimension $(m \times 1)$.

A_m, B_m : sont des matrices constantes et invariables de dimension appropriées.

A_s et B_s : sont des matrices variables de dimensions appropriées.

Y_m, Y_s sont les vecteurs de sortie de dimension $(m \times 1)$.

Définition (1): [Landau 1978]

On appelle erreur généralisée le vecteur variable e qui représente l'écart entre le vecteur d'état du modèle de référence x et le vecteur du système ajustable y : $e = x - y$

Définition (2): [Landau 1978]

On appelle erreur de sortie généralisée le vecteur variable qui représente l'écart entre les sorties du modèle de référence et les sorties du système ajustable : $\varepsilon = Y_m - Y_s = C e$

Définition (3): [Landau 1978]

On appelle loi d'adaptation la relation qui existe entre l'erreur généralisée et la modification des paramètres ou de l'entrée du système ajustable.

Définition (4): [Landau 1978]

Ensemble de blocs d'interconnexions linéaire ou non linéaire variable ou invariable utilisé pour implanter la loi d'adaptation.

4.4. SYNTHÈSE DE COMMANDES ADAPTATIVES PAR M.R.A.C:

-Formulation du problème:

Le problème majeure dans la synthèse de M.R.A.C est de trouver des lois d'adaptations qui garantissent stabilité et performance. Cela pourra être vu de deux manières:

1. Chercher les lois d'adaptation qui réalisent "une adaptation parfaite" en un temps fini pour n'importe quel écart initial entre les paramètres du modèle de référence et celui du système ajustable et pour n'importe quel écart entre les états du modèle et celui du système ajustable.
2. Chercher aussi à minimiser le temps d'adaptation ou minimiser un indice de performance en un temps désiré.

Mais du point de vue de l'ingénierie, il est préférable de synthétiser des lois qui assurent le meilleur compromis entre simplicité et performance. Ainsi il est primordiale de ne pas considérer le problème de synthèse des M.R.A.C. comme un problème de commande en temps optimal, car celle-ci nécessite la résolution d'équations différentielles complexes ainsi que la connaissance des états initiaux et finaux du système. Il est alors judicieux de regarder le problème de synthèse des M.R.A.C comme un problème de régulation en un temps fini, pour le système déplacé de sa position d'équilibre, définit par:

$$x = y$$

$$A_m = A_S(t_0), B_m = B_S(t_0).$$

x et y : vecteurs d'états respectivement du modèle de référence et du système ajustable.

(A_m, B_m) , (A_S, B_S) respectivement les paramètres du modèle et du système ajustable.

Le problème de synthèse a été Grossièrement formulé comme suit [landau1978] :

Soit un écart initial à l'instant $t = t_0$ entre les paramètres du modèle de référence et le modèle ajustable: $A_m - A_S(t_0)$ et $B_m - B_S(t_0)$.

Soit $e(t_0) = x(t_0) - y(t_0)$, l'écart entre les états du système et les états du modèle de référence a l'instant t_0 :

Le problème de synthèse des M.R.A.C est de trouver des lois d'adaptations indépendantes des conditions initiales qui assurent une adaptation asymptotique parfaite définie par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_S(t) = A_m, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B_S(t) = B_m$$

Et éventuellement minimiser un certain critère quadratique [Landau 1978].

Ceci revient à décomposer le problème en deux étapes :

1. Sélectionner les structures qui assurent une parfaite adaptation asymptotique.
2. Sélectionner les paramètres de la structure qui minimise un certain critère quadratique.

-Méthodes de synthèse des M.R.A.C

Dans la littérature, plusieurs méthodes de synthèse de M.R.A.C ont été proposées. Les premières méthodes de synthèse des M.R.A.C étaient basées sur la théorie d'optimisation paramétrique. Le M.R.A.C proposé par Whitaker et ses collègues s'est basé sur la minimisation d'un certain critère quadratique [Åström 1989]. L'inconvénient majeur de ces méthodes est que la stabilité du système adaptative n'est pas garantie. Ce qui a incité les chercheurs à orienter leurs travaux vers des méthodes de synthèse basées sur la stabilité et donc à formuler le problème de synthèse de M.R.A.C comme un problème de stabilité en utilisant les théories de Lyapunov et l'hyperstabilité de Popov.

Butchart et Shkalov étaient les premiers à utiliser les fonctions quadratiques de Lyapunov pour la synthèse des M.R.A.C, quelque temps plus tard, Parks reprit les travaux de Whitaker en utilisant la théorie de Lyapunov [Chalam1987]. La synthèse par les fonctions de Lyapounov nécessite que les états du système soient tous mesurables. Le problème a été soulevé grâce à Narendra et Valvani [Narendra and Valvani 1978], Monopoli [Monopoli 1974] et Parks en utilisant la théorie de positivité (voir chapitre 3).

Landau [Landau1978] a utilisé une autre approche en se basant sur la théorie de l'hyperstabilité de Popov.

Notre but n'étant pas une étude exhaustive de toutes les méthodes citées, certaines d'entre elles seront donc seulement évoquées. Par contre, nous nous étendrons plus amplement sur les méthodes que nous avons utilisé.

-Méthodes basées sur d'optimisation paramétriques

Le principe de ces méthodes est la minimisation d'un critère quadratique qui exprime l'écart entre le modèle de référence et le système ajustable. Ce critère peut être vu dans la théorie de l'optimisation paramétrique comme des surfaces ($I_{pm} = cte$), ainsi au voisinage du point nominal nous aurons $\Delta I_{pm} = 0$.

Cette théorie (Gradient method; Stepest decent method) permet de synthétiser des Algorithmes pour l'ajustement des paramètres.

La synthèse par les méthodes d'optimisation paramétriques nécessite que:

- L'écart entre le modèle ajustable et le modèle de référence soit très petit.
- L'adaptation se fait d'une manière très lente pour pouvoir séparer la mesure de l'erreur généralisée et l'effet de l'ajustement des paramètres.

-Synthèse des M.R.A.C basé sur la stabilité

La stabilité est une caractéristique très importante que doit vérifier n'importe quel système automatique. Il apparaît donc nécessaire d'inclure l'analyse de la stabilité lors de la synthèse des M.R.A.C. Des expériences ont montré qu'il est difficile et parfois même impossible de garantir la stabilité globale des M.R.A.C. si les méthodes de la théorie de l'optimisation paramétrique sont utilisées pour la synthèse, notamment, pour des valeurs élevées des gains du contrôleur. Il convient donc de formuler le problème de synthèse des M.R.A.C comme un problème de stabilité.

Définition:[Landau1978] (adaptation parfaite et asymptotique dans l'espace e)

Soit $e(0) \neq 0$ vecteur de l'erreur généralisée, le problème consiste à trouver la loi d'adaptation (Algorithme) tel que: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \forall e(0) \in \mathbb{R}^n, (A_m - A_s(0)) \in \mathbb{R}^{m \times n}, (B_m - B_s(0)) \in \mathbb{R}^n$

$$- u(t) \in C^m, B(t) = 0$$

Avec C^m espace des entrées continues par morceaux, défini dans R^n . $R^{n \times n}$ et $R^{n \times m}$ sont respectivement l'espace d'état et l'espace des paramètres. $B(t)$ sont les perturbations qui ne sont pas reflétées sur le système.

La définition ainsi donnée est la définition de la stabilité globale et asymptotique. Mais en général, dans les cas pratiques, on formule le problème d'une manière moins restrictive où on vérifie seulement la stabilité globale.

Définition: [Landau1978]

Soit $e(0) \neq 0$. Le problème est de trouver la loi d'adaptation tel que:

$$\|e(t)\| \leq N, \forall t \geq t_0 + \tau, \forall e(0) \in R^n, A_m - A_s(0) \in R^{n \times m}, B_m - B_s(0) \in R^{n \times m}$$

$$u(t) \in C^m, B(t) \in W$$

où W est l'espace des perturbations.

-Synthèse par l'hyperstabilité

La synthèse du M.R.A.C par l'hyperstabilité est très intéressante car elle permet d'éviter le problème du choix des fonctions de Lyapunov. Cette approche est faite en suivant les étapes de synthèse suivantes: [Landau1978]

1. Transformer le M.R.A.C en un système équivalent composé de deux blocs, l'un dans la chaîne d'action et le deuxième dans la chaîne de réaction.
2. Déterminer les conditions sur la partie d'adaptation qui se trouve dans la chaîne de retour du système équivalent telle qu'elles vérifient l'inégalité de Popov .
3. Chercher les solutions pour la partie restante de la loi d'adaptation pour que le bloc directe soit un bloc hyperstable.
4. Retourner au M.R.A.C original pour donner les lois d'adaptation d'une manière explicite.

-Synthèse par la théorie de Lyapounov:

Le principe de ces méthodes est simple. Elle consiste à trouver une fonction de Lyapunov définie positive puis synthétiser les lois d'adaptations tel que la dérivée de cette fonction soit

négative. On trouve dans la littérature, plusieurs fonctions standards qui ont été proposées et qui permettent d'assurer la stabilité globale du système adaptatif.

-Synthèse des M.R.A.C par la théorie de positivité

La synthèse des M.R.A.C par des fonctions positives de Lyapunov nécessitent que les états du système soient tous mesurables. Afin d'éviter l'inconvénient de la synthèse par la théorie de Lyapounov, Narendra [Narendra 1978] a proposé un algorithme adaptatif en se basant sur la théorie de positivité, cette méthode est très intéressantes car la synthèse se fait d'une manière systématique. La stabilité du système globale est garantit en imposant seulement au modèle de référence d'être défini positive. Ioannou [Ioannou1986] a étendu cette approche pour le cas décentralisé en introduisant la "sigma-modification".

-Robustesse des systèmes de commande adaptative:

Les méthodes de synthèse des M.R.A.C et plus généralement des systèmes adaptatifs nécessitent pour prouver leurs stabilité des hypothèses tel que:

- Le modèle de référence doit être linéaire et invariant.
- Le modèle de référence et le système ajustable sont du même ordre.
- Il n'y a pas de perturbation qui agit sur le système.
- ...Etc.

Ces hypothèses sont appelées en commande adaptative: cas idéaux, car elles se prêtent bien à l'analyse et au traitement théorique du problème de synthèse des systèmes de commande adaptatives. Mais, dans les cas réels, ces hypothèses sont loin d'être vérifiées à cause des erreurs de modélisation et de mesures et à la présence de perturbations et de parasites. C'est pourquoi il est nécessaire d'étudier le problème de robustesse des algorithmes adaptatives. La notion de robustesse de n'importe quel schéma de commande, n'a a priori de sens que si l'on parle d'une propriété bien particulière de la commande (stabilité-performance) vis a vis d'un effet bien particulier (entrée perturbatrice, méconnaissance du système à commander, erreurs de mesures) [Landau-Dugard 1985].

Puisque le problème de synthèse de M.R.A.C a été formulé comme un problème de stabilité et puisque les grands systèmes interconnectés sont le siège de perturbations où les erreurs de modélisation ne peuvent être évitées, il apparaît clairement que nous allons étudier le problème de robustesse de la stabilité des algorithmes adaptatifs vis à vis des erreurs de modélisation et des perturbations.

Le problème de robustesse évoqué a été le centre de préoccupation de plusieurs chercheurs dans les années 80. Egardt, Rohrs, Ioannou et Peterson ont montré dans leurs thèses de doctorats les instabilités qui apparaissent dans les systèmes de commande adaptative quand les hypothèses des cas idéaux ne sont pas rencontrées et ont montré qu'il n'est pas possible de préserver la stabilité des algorithmes adaptatifs si ces algorithmes ne sont pas modifiés [Ioannou 1985.a]. Les problèmes de robustesse des systèmes de commande adaptative sont largement discutés dans la littérature [Ioannou 1984 a. b.], [Narendra 1987] et [Rohrs 1985]. Les instabilités causées ont été démontrées analytiquement en utilisant la théorie de Lyapunov, la linéarisation ...etc.

Nous ne développerons pas l'aspect théorique de ces problèmes, le but sera de mettre en évidence la différence qui existe entre les cas idéaux et les cas réels, et d'introduire d'une manière indirecte les problèmes qui se posent dans le cas décentralisé.

Problèmes de robustesse :

Un régulateur adaptatif comporte deux parties: Une partie de contrôle linéaire et une partie d'adaptation non-linéaire. C'est pourquoi il faut distinguer deux types de problèmes de robustesse:

1. Des problèmes de types linéaires tout à fait semblable a ceux que l'on pourrait avoir avec les commandes linéaires.
2. Les problèmes de types non linéaires dus à la non-linéarité introduite par le mécanisme d'adaptation.

Les instabilités non linéaires apparaissent dans les cas ou les valeurs des gains des contrôleurs

sont relativement élevés (High Gain Adaptation) ou lorsque la fréquence du signal de référence est très élevée (High Frequency) ou même lorsqu'on est en présence de perturbations bornées (drift parameters). Ces instabilités disparaissent dès qu'on arrête l'adaptation. Les instabilités non-linéaires évoquées sont généralement dues au caractère intégrateur des lois d'adaptations, cependant, ce problème a été résolu par [Ioannou 1984] et [Narendra 1986]. Ainsi Ioannou a résolu l'inconvénient de l'intégration pur en introduisant la " σ modification", celle-ci a pour but de stabiliser les gains du contrôleur et donc d'éviter une dérive éventuel de ceux-là, alors que Narendra a introduit la méthode de la zone morte (dead zone) ainsi que la « e_1 modification ».

4.5. CONCLUSION:

Le problème de synthèse des systèmes de commandes adaptatives est un problème de stabilité. Dans les cas réels, le problème de robustesse des algorithmes de commande adaptative doit être pris en compte et afin de garantir la stabilité du système, il est nécessaire de modifier d'une manière adéquate les lois d'adaptations.



CHAPITRE 5

**COMMANDE ADAPTATIVE
DÉCENTRALISÉE**

5.1. INTRODUCTION:

Il est bien connu que les difficultés qu'ont les bras manipulateurs à suivre fidèlement une certaine référence est due à la nature de leurs dynamiques très compliqué, c'est à dire les non-linéarités et les fortes interconnexions entre les différentes articulations. Dans un environnement réel l'inévitable incertitude sur le modèle, qui est due à l'ignorance de certaines dynamiques importantes du manipulateur tel que les frottements, et au changement de masse de la charge, mais aussi à la difficulté de mesure des paramètres du manipulateur, fait que les méthodes classiques basées sur le modèle du manipulateur tel que "the computed torque method" (voir Fu 1987) ont de sérieux problèmes à suivre les trajectoires de référence.

En vue d'améliorer les performances du manipulateur, on a pensé à concevoir des schémas de commande adaptative afin de pallier à l'effet de l'incertitude du modèle, on cite notamment les travaux de Craig et al, Slotine et al et Tarokh. D'autres travaux, ont été consacrés afin de trouver des schémas de commande décentralisées ou ce qu'on appelle l'"Independent Joint Control", on cite entre autres les travaux de Seraji, Lin Shi et Li chen Fu.

Ainsi l'approche décentralisée présente plusieurs avantages, la plus importante à notre avis, est qu'elle nécessite généralement peu de calculs ce qui facilite énormément la commande en temps réel. Étant donné que chaque articulation est commandée à l'aide d'informations locales, il n'y aura donc pas d'échange d'informations entre différentes articulations, d'où son intérêt pratique et notamment la possibilité d'implémentation aisée sur des calculateurs multi-processeurs ce qui améliorera sans aucun doute les performances de la commande.

5.2. MÉTHODES ADAPTATIVES DÉCENTRALISÉES:

5.2.1. Approche de D. Gavel et D. Siljak:[D.Gavel D.Siljak 1989]

-formulation du problème:

Soit un système constitué de N sous-systèmes pouvant chacun être décrit par les équations:

$$S_i : \frac{dx_i}{dt} = A_i x_i + b_i u_i + P_i v_i$$

$$y_i = c_i' x_i \quad i = 1, N.$$

$$w_i = Q_i x_i.$$

ou: $x_i(t) \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, $u_i(t) \subseteq \mathbb{R}$, $y_i(t) \subseteq \mathbb{R}$ sont respectivement le vecteur d'état du sous-système, l'entrée et la sortie de celui-ci.

$v_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ et $w_i \subseteq \mathbb{R}^{l_i}$ sont respectivement les vecteurs des entrées et des sorties d'interconnexions du sous-systèmes S_i $i = 1, N$ et qui sont reliés par la fonction non-linéaire suivante:

$$v_i = f_i(t, w), \quad i = 1, N.$$

$$\text{avec: } w = [w_1', w_2', \dots, w_n']'.$$

Le système global S constitué des N sous-systèmes interconnectés par [2] sera donné par:

$$S : \frac{dx}{dt} = A x + B.u + P.v$$

$$y = C'.x$$

$$w = Q.x.$$

$$v = f(t, w).$$

les vecteur $x \subseteq \mathbb{R}^n$, $u = [u_1, \dots, u_N]' \subseteq \mathbb{R}^N$, $y = [y_1, \dots, y_N]' \subseteq \mathbb{R}^N$, $v = [v_1, \dots, v_N]' \subseteq \mathbb{R}^l$, $w \subseteq \mathbb{R}^m$ ont la même signification qu'auparavant.

Avec:

$$n = \sum n_i, \quad l = \sum l_i, \quad m = \sum m_i \quad i = 1, N.$$

$$A = \text{diag} [A_1, \dots, A_N], \quad B = \text{diag} [b_1, \dots, b_N], \quad C = \text{diag} [c_1, \dots, c_N], \quad Q = \text{diag} [Q_1, \dots, Q_N].$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue, possède des arguments bornés et est suffisamment lisse telle que la solution $x(t, t_0, x_0)$ soit unique pour toutes condition initiales (t_0, x_0) et pour toute entrée continue u.

En particulier, nous supposons qu'il existe toujours des nombres positifs ξ_{ij} tel que:

$$\|f_i(t, x)\| \leq \sum \xi_{ij} \|w_j\| \quad j = 1, N \quad (5.2.1).$$

Nous supposons que les dynamiques des sous-systèmes sont inconnues, la seule supposition que nous ferons est que les paires de matrices (A_i, b_i) et (A_i, c_i) sont respectivement contrôlable et observable, ce qui signifie qu'avec le choix d'une base adéquate, elles pourront se mettre respectivement sous forme canonique de commande et d'observation.

En fait, l'incertitude au sujet des A_i , b_i et c_i vient s'ajouter à la principale incertitude qui réside dans notre ignorance des interconnexions. Une façon de compenser cette incertitude serait d'exploiter la structure particulière du système afin de rendre celui-ci "stabilisable de manière décentralisée". Notre principale tâche serait de montrer que cette propriété structurelle du système nous assure l'existence de lois d'adaptation décentralisées qui permettent de stabiliser le système en ajustant les gains locaux, en vue de compenser les fluctuations des interconnexions.

Le but de la commande est de soit réguler l'état $x(t)$ du système global S à zéro ou bien de contraindre celui-ci à poursuivre l'état d'un certain modèle de référence, ce dernier sera totalement déterminé en spécifiant pour chaque sous-système S_i modèle de référence de la forme, dans le cadre de notre exposé nous nous attellerons uniquement à la seconde tâche.

$$S_{Mi}: \frac{dx_{mi}}{dt} = A_{mi} x_{mi} + b_m r_i$$

$$y_{mi} = c_{mi}' \cdot x_{mi}$$

remarque: S_{Mi} a évidemment la même dimension que S_i et la dynamique que notre sous-système S_i devrait avoir.

Pour le système global S nous aurons un système de référence donné par:

$$S_M: dx_m/dt = A_m x_m + B_m \cdot r$$

$$y_m = C_m' x_m$$

ou : $r(t) \in \mathbb{R}^N$ est la référence du modèle de référence S_M

Comme décrit auparavant nous aurons :

$$A_m = \text{diag} [A_{m1}, \dots, A_{mN}], B_m = \text{diag} [b_{m1}, \dots, b_{mN}], C_m = \text{diag} [c_{m1}, \dots, c_{mN}].$$

Le triplet $(A_{mi}, b_{mi}, c_{mi}')$ doit être sous forme compagne de commande de telle façon qu'il existe certains vecteurs constants k_i^* et k_{0i}^* tel que :

$$A_{mi} = A_i + b_i k_i^{*'} \text{ et } b_{mi} = b_i k_{0i}^*. \quad (5.2.2)$$

Cependant, ceux-ci ne pourront pas être connus puisque nous ne connaissons pas la dynamique du sous-système, la seule supposition que nous ferons au sujet de ce dernier, sans perdre toutefois de généralité est que le signe de b_i est connu et que $k_{0i}^* > 0$.

Enfin, mentionnons au passage la possibilité d'utilisation de systèmes interconnectés comme modèles de référence, ceci a pour effet d'améliorer les performances dans le cas d'interconnexions connues a priori et moyennement différentes de zéro.

La seule supposition que nous ferons sur la structure du système, est que la matrice P_i pourra toujours se mettre sous la forme:

$$P_i = b_i p_i' \text{ tel que } p_i \in \mathbb{R}^{m_i}. \quad (5.2.3)$$

cette supposition sera par la suite déterminante pour assurer la stabilité de la loi d'adaptation décentralisée et donc du système global dont on ignore les grandeurs des interconnexions.

Nous choisirons la matrice A_{mi} stable de telle sorte que pour n'importe quel matrice symétrique et définie positive G_i , il existera une matrice unique, symétrique et définie positive H_i tel que:

$$A_{mi}' H_i + H_i A_{mi} = -G_i, i \in N. \quad (5.2.4)$$

Nous définirons l'erreur pour chaque sous-système par:

$$e_i(t) = x_i(t) - x_{mi}(t).$$

Il s'ensuit:

$$\frac{de_i}{dt} = A_i x_i + b_i u_i + b_i z_i(t, x) - A_{mi} x_{mi} - b_{mi} r_i \quad (5.2.5)$$

Notre loi d'adaptation aura pour but de trouver les paramètres k_i^* et k_{0i}^* , ainsi nous construirons la loi d'adaptation décentralisée :

$$u_i(t) = \lambda_i' \cdot v_i \quad i \subseteq N. \quad (5.2.6)$$

Où: $\lambda_i' = [k_i, k_{0i}]'$ est le vecteur des paramètres adaptés variant dans le temps.

v_i : un vecteur fonction de l'erreur et de la référence.

Avec : $v_i = [e_i', r_i]'$ ainsi nous aurons la loi d'adaptation suivante:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\Gamma_i \cdot (b_{mi}' \cdot P_i \cdot e_i) \cdot v_i - \sigma \cdot \Gamma_i \cdot \lambda_i \quad i \subseteq N. \quad (5.2.7)$$

la matrice Γ_i est définie positive et le terme σ est introduit pour améliorer la robustesse du système global, par conséquent, l'erreur du système en boucle fermée est donnée par :

$$\frac{de_i}{dt} = A_{mi} \cdot e_i + b_i \cdot (\phi_i' \cdot v_i - k_i^* \cdot x_{mi} + z_i(t, x_i)) \quad i \subseteq N. \quad (5.2.8)$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = -\sigma \cdot \Gamma_i \cdot (\phi_i + \lambda_i^*) - \Gamma_i \cdot (b_{mi}' \cdot P_i \cdot e_i) \cdot v_i \quad i \subseteq N. \quad (5.2.9)$$

Où ϕ_i est défini par :

$$\phi_i = \lambda_i - \lambda_i^* \quad i \subseteq N.$$

Il s'ensuit que les solutions $(e, \phi)(t, t_0, e_0, \phi_0)$ sont asymptotiquement bornées.

-Preuve de stabilité:

Soit la fonction candidate de Lyapunov suivante:

$$V(e, \phi) = \sum_{i=1}^N [k_{0i}^* \cdot e_i' \cdot P_i \cdot e_i + (\phi_i + \rho \lambda_i)' \cdot \Gamma_i^{-1} \cdot (\phi_i + \rho \lambda_i)] \quad (5.2.10)$$

on montre que: (pour détails voir référence [Gavel 1989])

$$\frac{dV}{dt} \leq -\xi \|e\|^2 - \sigma \|\phi + \rho \lambda\|^2 + \eta \leq -\mu \cdot V + \eta. \quad (5.2.11)$$

ou μ est un nombre positif vérifiant l'inégalité:

$$\mu \leq \min [\lambda_{\max}^{-1}(P) \cdot \xi, \lambda_{\max}(\Gamma) \cdot \sigma].$$

$$\Gamma = \text{diag} (\Gamma_1, \dots, \Gamma_N) \text{ et } P = \text{diag} (P_1, \dots, P_N).$$

$$\xi = \lambda_{\min}(Q) - \rho^{-1} \cdot \{ \max_{i,j \in N} [\xi_{ij}] \}^2.$$

$$\eta = \rho^{-1} \cdot \sup_t \{ \|x_m(t)\|^2 \} \cdot \{ \|K^*\| + \max_{i,j \in N} [\xi_{ij}] \}^2 + \sigma \cdot \|\lambda^* - \rho \cdot \lambda\|^2.$$

$$\text{Et ou: } K^* = \text{diag} \{ k_1^*, \dots, k_N^* \} \text{ et } Q = \text{diag} \{ Q_1, \dots, Q_N \}.$$

remarques:

- Si ρ est choisi suffisamment grand de telle manière à avoir : $\xi > 0$ les solutions $(e, \phi) (t, t_0, e_0, \phi_0)$ seront globalement bornées par $\mu^{-1} \cdot \eta$.
- En pratique, nous n'aurons pas à choisir de valeur pour ρ de telle façon que la condition précédente soit vérifiée, car les gains du contrôleur augmenteront jusqu'à un niveau qui assure la stabilité du système global.
- Il a été montré dans [Gavel 1989] que le fait de diminuer σ et d'augmenter Γ a pour effet de diminuer l'erreur de poursuite, cependant, en augmentant les gains un comportement oscillatoire, voire instable, est à craindre.

La rapidité de convergence de la dynamique de l'erreur peut être à l'aide du rapport $(dV/dt)/V$, ainsi il est évident que si on arrive à trouver une seconde fonction de Lyapunov avec un rapport inférieur au précédent, on peut en conclure que la dynamique de l'erreur issue de cette dernière fonction aura a fortiori de meilleures performances, ceci peut être le cas en introduisant un signal auxiliaire au système précédent.

5.2.2. Approche de Lin Shi et Sunil.K. Singh:[Lin Shi S.K.Singh 1990]

L.Shi et S.K.Singh ont proposé deux versions améliorées de deux algorithmes présentés dans le cadre des travaux de D.Gavel et D.Siljak, le premier étant destiné à la régulation et le second à la poursuite. Comme précisé auparavant, nous nous attellerons uniquement à la seconde tâche, en l'occurrence la poursuite. Ainsi nous ne considérerons que la version améliorée du second.

Nous nous proposons la loi de commande décentralisée suivante:

$$u_i(t) = \lambda_i' \cdot v_i + f_i(t), \quad i \in N. \quad (5.2.12)$$

Ou: v_i est défini comme auparavant.

Ainsi les lois d'adaptation du signal auxiliaire et des paramètres seront :

$$\frac{df_i}{dt} = -\frac{df_i^*}{dt} - \alpha_i \cdot (b_{mi}' \cdot P_i \cdot e_i) - \alpha_i \cdot \sigma \cdot (f_i - f_i^*), \quad i \in N. \quad (5.2.13)$$

$$f_i^* = -\pi_i \cdot (b_{mi}' \cdot P_i \cdot e_i), \quad i \in N. \quad (5.2.14)$$

$$\frac{de_i}{dt} = A_{mi} \cdot e_i + b_i \cdot (\phi_i' \cdot v_i - k_i^* \cdot x_{mi} + z_i(t, x_i) + f_i(t)), \quad i \in N. \quad (5.2.15)$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = -\sigma \cdot \Gamma_i \cdot (\phi_i + \lambda_i^*) - \Gamma_i \cdot (b_{mi}' \cdot P_i \cdot e_i) \cdot v_i, \quad i \in N. \quad (5.2.16)$$

Ou: α_i, π_i sont des constantes positives, σ, Γ_i et P_i ont été définis auparavant.

Il s'ensuit que les solutions $(e, \phi)(t, t_0, e_0, \phi_0)$ sont asymptotiquement bornées.

La réponse du système est plus rapide qu'en utilisant la méthode précédente, et l'erreur résiduelle est inférieure à celle de la précédente méthode.

Remarque: pour la preuve de stabilité elle ne diffère pas beaucoup de celle de la méthode précédente, puisque c'est la même fonction candidate de Lyapunov augmentée d'un terme qui est fonction du signal auxiliaire, nous avons donc préféré ne pas l'inclure (voir [L. Shi 1990]).

5.2.3. Approche de h.Seraji:[H.Seraji 1989]

-formulation du problème:

Soit un bras manipulateur à n degrés de libertés ayant une dynamique décrite par:

$$M(\theta) \frac{d^2\theta}{dt^2} + N(\theta, \frac{d\theta}{dt}) \frac{d\theta}{dt} + H(\frac{d\theta}{dt}) + G(\theta) = T \quad (5.2.17)$$

θ : vecteur position angulaire.

$d\theta/dt$: vecteur vitesse angulaire.

$M(\theta)$: matrice d'inertie de dimension $(n \times n)$.

$N(\theta, d\theta/dt)$: vecteur représentant le couple de centrifuge et de coriolis.

$H(d\theta/dt)$: vecteur des frottements visqueux.

$G(\theta)$: vecteur des couples du à la gravitation.

$T(t)$: vecteur des couples appliqués à chaque articulation.

le problème de la commande du bras manipulateur consiste à générer le couple adéquat $T(t)$ de telle manière à ce que le vecteur position $\theta(t)$ suive le vecteur position de référence $\theta_r(t)$.

Dans la synthèse de la commande décentralisée, on considère chaque articulation comme un sous-système du système global, relié aux autres sous-systèmes par des couples de couplage, on pourrait donc réécrire l'équation dynamique du manipulateur pour chaque liaison i sous la forme suivante:

$$m_{ii}(t) \frac{d^2\theta_i}{dt^2} + d_i(\theta, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d^2\theta}{dt^2}) = T_i(t) \quad \text{pour } i=1, n. \quad (5.2.18)$$

$$d_i(\theta, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d^2\theta}{dt^2}) = [\sum m_{ij}(t) \frac{d^2\theta_j}{dt^2}] + n_i(\theta, \frac{d\theta}{dt}) + g_i(\theta) + h_i(\frac{d\theta}{dt}) \quad \text{pour } j \neq i \text{ et } i=1, n. \quad (5.2.19)$$

le couple de couplage d_i est considéré comme une perturbation par rapport à l'articulation i .

La décentralisation de la commande consiste dans le fait que chaque contrôleur local, le schéma d'adaptation n'utilise que les informations locales de chaque articulation et il n'y a aucune sorte d'échange d'informations entre les articulations.

Il a été proposé pour la commande la structure suivante:

$$T_i(t) = f_i(t) + [k_{i0} e_i + k_{i1} \frac{de_i}{dt}] + [q_{i0}(t)\theta_r + q_{i1} \frac{d\theta_r}{dt} + q_{i2} \frac{d^2\theta_r}{dt^2}] \quad (5.2.20)$$

- Le terme $f_i(t)$ est un signal auxiliaire synthétisé en vue d'améliorer les performances et de compenser partiellement le couple de perturbation d_i .
- Le terme $[k_{i0}(t) e_i + k_{i1}(t) \frac{de_i}{dt}]$ est un régulateur de type P.D. à gains ajustables.
- Le terme $[q_{i0}(t)\theta_r + q_{i1} \frac{d\theta_r}{dt} + q_{i2} \frac{d^2\theta_r}{dt^2}]$ est un feedforward de type PD² à gains ajustables.

Théorème:[Seraji 1989]

soit un bras manipulateur défini par l'équation (5.2.18) et soit la loi de commande donnée par:

$$T_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=0}^1 k_{ij}(t) e_i^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^2 q_{ij}(t) \theta_{ri}^{(j)}. \quad (5.2.21)$$

et le signe (j) correspond à l'ordre de la dérivée par rapport au temps.

En supposant que les termes m_{ii} et d_i varient d'une manière lente par rapport aux gains de la commande, la loi d'adaptation qui nous garantit une poursuite asymptotique de la trajectoire est basée sur le signal de l'erreur pondérée $r_i(t)$ comme suit:

$$r_i(t) = w_p e_i(t) + w_v \frac{de_i(t)}{dt} \quad (5.2.22)$$

le signal auxiliaire est donné par:

$$f_i(t) = f_i(0) + \delta_i \int_0^t r_i(\tau) d\tau + \rho_i r_i(t) \text{ pour } i=1, n \quad (5.2.23)$$

les gains de la partie feedback de type P.D:

$$k_{ij}(t) = k_{ij}(0) + \alpha_{ij}(t) \int_0^t r_i(\tau) e_i^{(j)}(\tau) d\tau + \beta_{ij}(t) e_i^{(j)}(\tau) \text{ pour } j=0, 1. \quad (5.2.24)$$

les gains de la partie feedforward de type P.D²:

$$q_{ij}(t) = q_{ij}(0) + \gamma_{ij}(t) \int_0^t r_i(\tau) \theta_{ri}^{(j)}(\tau) d\tau + \lambda_{ij}(t) \theta_{ri}^{(j)}(t) \quad (5.2.25)$$

et ou $\{\alpha_{ij}, \delta_{ij}, \gamma_{ij}\}$ sont les gains d'adaptation intégrales.

$\{\rho_{ij}, \beta_{ij}, \lambda_{ij}\}$ sont les gains d'adaptation proportionnels.

$\{w_{pi}, w_{vi}\}$ sont les facteurs de pondération de l'erreur en position et de l'erreur en vitesse.

Remarques:

- la preuve de la stabilité (voir [Seraji 1989] , a été en prenant comme hypothèse que les termes m_{ii} et d_i varient lentement par rapport aux gains de la commande ce qui revient à dire: $d(d_i)/dt \cong 0$ et $d(m_{ii})/dt \cong 0$, cependant, cette hypothèse est trop grossière pour être rigoureusement vérifiée, et elle est clairement violée en pratique, malgré cela le système reste stable, cela pourra s'expliquer par le fait qu'on aboutit à des conditions suffisantes et non nécessaires de stabilité (voir chapitre 3). Enfin, il faudra s'attendre à une détérioration significative des performances proportionnelle à la grossièreté de l'approximation.
- En injectant l'équation (5.2.23) dans (5.2.24) on trouve que:

$$f_i(t) = f_i(0) + [\delta_i w_{pi} + \rho_i w_{vi}] \int_0^t e_i(\tau) d\tau + [\rho_i w_{pi} + \delta_i w_{vi}] e_i(t) \quad (5.2.26)$$

on reconnaît la structure d'un régulateur de type PID à paramètres fixes.

Ainsi la commande pourra donc s'écrire sous forme d'un régulateur de type P.I.D. à gains ajustables, son expression est la suivante:

$$T_i(t) = T_i(0) + [k_{ip} + k_{il} \int_0^t dt + k_{iv} \frac{d}{dt}] e_i(t) + [q_{i0} + q_{i1} \frac{d}{dt} + q_{i2} \frac{d^2}{dt^2}] \theta_{ir} \quad (5.2.27)$$

$T_i(0)$ étant la commande à l'instant initiale.

k_{ip} , k_{iv} , k_{il} , q_{i0} , q_{i1} , q_{i2} sont des paramètres ajustables fonctions des gains d'adaptation et des différents gains donnés plus haut.

-discretisation des lois d'adaptation:

Les lois d'adaptation citées ci-dessus peuvent être discretisées à l'aide de la méthode d'intégration trapézoïdale ainsi l'équation différentielle générale:

$$\frac{dk}{dt} = \mu_1 [r(t)v(t)] + \mu_2 \frac{d}{dt} [r(t)v(t)]$$

s'écrira après intégration et application de la méthode du trapèze comme suit:

$$k(N) = k(N-1) + \mu_1 \frac{T}{2} [r(N)v(N) + r(N-1)v(N-1)] + \mu_2 [r(N)v(N) - r(N-1)v(N-1)]$$

N: correspondant à l'instant d'échantillonnage.

5.2.4. Approche de Li chen Fu: [L.Chen Fu 1992]

Contrairement aux méthodes étudiées précédemment, qui reposent principalement sur l'idée d'un feedback adaptative et d'un signal auxiliaire pour éliminer les perturbations et faire face aux changements de masse de la charge, une autre possibilité serait de générer une commande composée de deux parties:

- . un feedback à paramètres fixes (P.D.).
- . un compensateur dynamique.

C'est précisément l'idée proposée par Li chen Fu et que nous présentons dans ce qui suit:

-Présentation de la commande:

Soit le modèle dynamique d'un bras manipulateur à n degrés de libertés:

$$M(\theta) \frac{d^2\theta}{dt^2} + B(\theta, \frac{d\theta}{dt}) \frac{d\theta}{dt} + F \frac{d\theta}{dt} + G(\theta) = \tau + d$$

$M(\theta)$:matrice d'inertie de dimension (nxn).

$B(\theta, d\theta/dt)$:vecteur représentant le couple de centrifuge et de coriolis.

$F.d\theta/dt$:vecteur des frottements visqueux.

$G(\theta)$: vecteur des couples du à la gravitation.

d : vecteur des perturbations.

Nous supposons que les perturbations vérifieront l'inégalité:

$$|d_i(t, \theta, d\theta/dt)| \leq d_i^1 + d_i^2 \cdot |\theta_i| + d_i^3 \cdot |d\theta_i/dt| \quad (5.2.28)$$

Avec: d_i est la $i^{ème}$ composante du vecteur d .

Le couple de commande sera donné par:

$$\tau(t) = u(t) - K_p \cdot (\theta - \theta_d) - K_v \cdot ((d\theta/dt) - (d\theta_d/dt)) \quad (5.2.29)$$

$\theta_d(t)$ étant la trajectoire désirée à chaque instant t .

En remplaçant (2.3) dans (2.2) et en posant $e_i = \theta_i - \theta_{di}$ et $de_i/dt = (d\theta_i/dt) - (d\theta_{di}/dt)$, l'équation dynamique de l'erreur pourra s'écrire sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \frac{de_1}{dt} \\ \frac{de_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K_p & -M^{-1}(K_v + F + B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1} \end{bmatrix} [u - v - d] \quad (5.2.30)$$

avec: $v = v(t, x_1, x_2) = M(x_1) d^2\theta_d/dt^2 + B(x_1, x_2) d\theta_d/dt + F d\theta_d/dt + G(x_1)$ et: $x_1 = \theta, x_2 = d\theta/dt$.

en supposant que:

A₁- les matrices des gains K_p et K_v sont positives et diagonales.

A₂- θ_d est choisi de telle manière que: $\theta_d, d\theta_d/dt, d^2\theta_d/dt^2$ soient bornés.

A₃- Les bornes sur les paramètres sont connus, d_i vérifie l'inégalité (2.2) et la valeur maximale des perturbations est supposée connue.

En supposant aussi:

$\forall \theta \in R^n \exists k_1, k_2, k_3 > 0$ tel que:

$$||M(\theta)|| < k_1 \text{ et } ||G(\theta)|| < k_2 \quad (5.2.31)$$

$$||B(\theta, d\theta/dt)|| < \beta_1 + \beta_2 |d\theta/dt| = \beta' \cdot w(\theta, d\theta/dt) \quad (5.2.32)$$

Pour β_1 et β_2 constantes positives et: $\beta' = [\beta_1 \ \beta_2]$ et $w(\theta, d\theta/dt) = [1 \ d\theta/dt]'$.

-Expression de la commande:

L'expression de la commande qui permet de compenser les perturbations est choisie de la forme suivante:

$$u_i(t) = \begin{cases} \left[\overline{\beta}_i' w(x_d) + \overline{d}_i' \phi_i(x_1^i, x_2^i) \right] \frac{z^i(e)}{\varepsilon_i} \text{ si } |z^i(e)| \leq \frac{\varepsilon_i}{\left[\overline{\beta}_i' w + \overline{d}_i' \phi_i \right]} \\ \left[\overline{\beta}_i' w(x_d) + \overline{d}_i' \phi_i(x_1^i, x_2^i) \right] \frac{z^i(e)}{|z^i(e)|} \text{ si } |z^i(e)| > \frac{\varepsilon_i}{\left[\overline{\beta}_i' w + \overline{d}_i' \phi_i \right]} \end{cases} \quad (5.2.33)$$

nous convenons des notations suivantes:

1. $x_1 = \theta, x_2 = d\theta/dt, x_{d1} = \theta_d, x_{d2} = d\theta_d/dt, x = [x_1 \ x_2]'$, $x_d = [x_{d1} \ x_{d2}]'$.
2. x_j^i désigne le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur x_j .
3. Pour $i=1, n$ $\overline{\beta}_i$ représente l'estimée de β_i du vecteur $\beta = [\beta_1 \ \beta_2]$ pour le $i^{\text{ème}}$ axe.
4. $\phi_i(x_1^i, x_2^i) = (1 \ | \ x_1^i \ | \ x_2^i \ |)'$ pour $i=1, n$.
5. Pour $i=1, n$ \overline{d}_i chapeau représente les estimées du vecteur d_i .
6. $z^i(e) = e_i + \lambda_i (de_i/dt)$.
7. ε_i est un signal auxiliaire défini par:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = -g_i \varepsilon_i \quad \varepsilon_i(t_0) > 0 \text{ et } g_i > 0. \quad i=1, n.$$

Les $\overline{\beta}_i$ et \overline{d}_i sont adaptés par les lois d'adaptation suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\beta}_i}{dt} &= \Gamma_i \cdot |z^i(e)| \cdot w(x_d) \\ \frac{d\overline{d}_i}{dt} &= \overline{\Gamma}_i \cdot |z^i(e)| \cdot \phi_i(x_1^i, x_2^i) \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

-Théorème:

Soit le modèle dynamique de l'erreur donné par l'équation (5.2.30) et dont la loi de commande donnée par (5.2.33) et satisfait aux hypothèses (A_1 à A_3), soit h un nombre positif, l'erreur de poursuite $e(t)$, dont la valeur initiale est $e(t_0) \subseteq B_h$ convergera asymptotiquement vers zéro lorsque t tend vers l'infini pour $\lambda_{\min}(K_p)$ et λ_i suffisamment grand. (voir [Li shen fu 1992]).

5.3. SIMULATION:

Nous avons procédé à la vérification des schémas de commande présentés dans la section précédente par simulation sur des ordinateurs de type PC munis de processeurs INTEL 80386 DX 33 Mhz et 80486 DX2 66 Mhz, et en utilisant le langage de programmation MATLAB 4.0 sous l'environnement graphique Windows 3.1. Au cours de la simulation de ces algorithmes, nous avons utilisé pour la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles non linéaires, la méthode de Runge-Kutta du 4^{ème} ordre améliorée à pas variable, disponible dans la fonction utilisateur ODE45 du logiciel Matlab 4.0, pour l'implémentation des lois de commandes sous la forme continue, et la méthode de Runge-Kutta du 4^{ème} ordre classique à pas constant $\delta t=0.001$ seconde pour l'implémentation sous la forme discrète.

Notre but dans l'implémentation continue était de vérifier la stabilité des schémas de commande, ainsi que l'amélioration des performances à l'aide de certaines modifications sur les lois de commande, par la suite nous avons procédé à la discrétisation de certaines ces méthodes en utilisant la règle trapézoïdale, afin de voir l'effet de la période d'échantillonnage sur la stabilité et les performances des schémas de commande. Cependant, en ce qui concerne la méthode de Seraji (voir 5.2.3) elle a été directement présentée sous la forme discrète dans [Seraji 1989], nous avons donc utilisé cette même forme pour nos simulations.

L'ensemble des travaux de simulation présentés ci-après ont eu pour but de mettre en évidence certains aspects des différentes lois de commandes, ainsi le choix des différents gains d'adaptation et autres facteurs de pondération peut s'avérer non-optimal. Il faut noter qu'un choix optimal est rendu très difficile par le caractère non-linéaire du système à commander ainsi que l'ignorance totale des paramètres du système. Ainsi le but était plus qualitatif que quantitatif du point de vue des performances, le second serait d'ailleurs vain puisque on a négligé certaines dynamiques du bras manipulateur qui s'avèrent importantes en pratique, tels que les frottements visqueux et les dynamiques des capteurs et actionneurs.

Dans ce qui suit nous présentons les résultats des simulations des lois de commandes présentés dans la section précédente effectuées sur le PUMA560 (voir chapitre 2), ainsi et pour éviter des répétitions inutiles, nous définissons ci-après quelques termes que utiliserons par la suite d'une manière courante:

trajectoire cycloïde: elle est donnée par la fonction du temps suivante:

$$\theta(t) = \theta(0) + \frac{\Delta}{2\pi} [\omega t + \sin(\omega t)] \quad 0 \leq t \leq D.$$

$$\theta(t) = \theta(D). \quad t \geq D.$$

Avec: D: durée du mouvement, $\omega=2\pi/D$ et $\Delta=\theta(D)-\theta(0)$.

Trajectoire normale: trajectoire cycloïde au cours de laquelle les différentes articulations se déplacent respectivement de la position $[0^0 \ 0^0 \ 0^0]$ à la position $[60^0 \ -60^0 \ 60^0]$ en 3 secondes.

Trajectoire test: trajectoire cycloïde au cours de laquelle les différentes articulations se déplacent respectivement de la position $[-50^0 \ -135^0 \ 135^0]$ à la position $[45^0 \ -85^0 \ 30^0]$ en 1.5 secondes. Cette trajectoire a été proposée par Leahvy [Leahvy1990] comme trajectoire standard pour tester les performances de chaque schéma de commande, car celle-ci permet d'exciter toutes la dynamique du bras manipulateur.

-Interprétations:

Remarques:

- les paramètres dont on ne précisera pas explicitement les valeurs seront considérés identiques à ceux de la simulation précédente.
- Dans le cas des méthodes à modèle de référence, l'erreur présentée dans le cas continu est l'erreur avec le modèle, par contre, dans le cas discret, plus proche de la pratique, nous avons préféré présenter l'erreur de poursuite avec la référence.

-Approche de D. Gavel et D.Siljak:

cas continu:

paramètres du modèle de référence:

- pulsation propre $\omega_n = 10$ rad /sec.
- facteur d'amortissement $\xi = 1$.

sigma modification $\sigma = 0.01$.

-effet de masse de la charge: variation brusque de la masse de 2 kg à 0 kg à l'instant $t=1s$.

1. Trajectoire: normale, effet de masse, $B_{mi} P_i = [750 \ 410]$, $\Gamma_i = \text{diag}(150, 150, 0)$ sans feedforward $i=1,3$.

La fig 5.3.1 montre que l'erreur avec le modèle est borné, donc le système est stable malgré les pics importants de l'erreur. A noter également, la robustesse de la commande face à l'effet de masse de la charge.

2. $\Gamma_1 = \text{diag}(150, 150, 100)$ et $\Gamma_i = \text{diag}(150, 150, 10)$ $i=2,3$.

La fig 5.3.2 montre la diminution significative des pics de l'erreur à la suite de l'introduction du feedforward. Cependant, on remarque le comportement oscillatoire de la commande, ainsi un compromis est à faire (voir 5.2.1. page 60).

cas discret:

- période d'échantillonnage: $T_s = 1ms$.
 - pulsation propre: $\omega_n = 100 \text{ rad/sec}$.
3. $B_{m1} P_1 = [120 \ 20]$, $B_{m2} P_2 = [400 \ 200]$, $B_{m3} P_3 = [120 \ 40]$, $\Gamma_i = \text{diag}(100, 800, 100)$ $i=1,3$.

Malgré la discretisation de toutes les lois d'adaptation à l'aide de la règle trapézoïdale, la stabilité de l'algorithme est préservée (fig 5.3.4), ainsi l'erreur de poursuite cette fois, oscille autour de zéro. Ce comportement est du à l'introduction de la σ modification qui permet donc d'éviter la dérive des paramètres, mais induit en contrepartie un comportement oscillatoire du système. On constate la robustesse de la commande par rapport au changement de la masse de la charge. On en conclut donc que la méthode de Gavel est robuste par rapport au changement de masse, mais les performances sont loin d'être satisfaisantes.

-Approche de Lin Shi et S.K.Singh:

cas continu:

1. trajectoire normale, effet de masse, $\Gamma_1 = [1 \ 1 \ 10]$, $\alpha_i = 10$, $\pi_i = 0$, $\sigma_i = 0$.

La fig 5.3.4 nous permet de remarquer l'amélioration notable des performances, en l'occurrence la diminution des pics de l'erreur, l'accélération de la convergence comme prédit par la théorie (la fonction de Lyapunov convergeant plus rapidement vers l'état d'équilibre.), cependant, la commande reste oscillatoire.

2. $\pi_i = 10$.

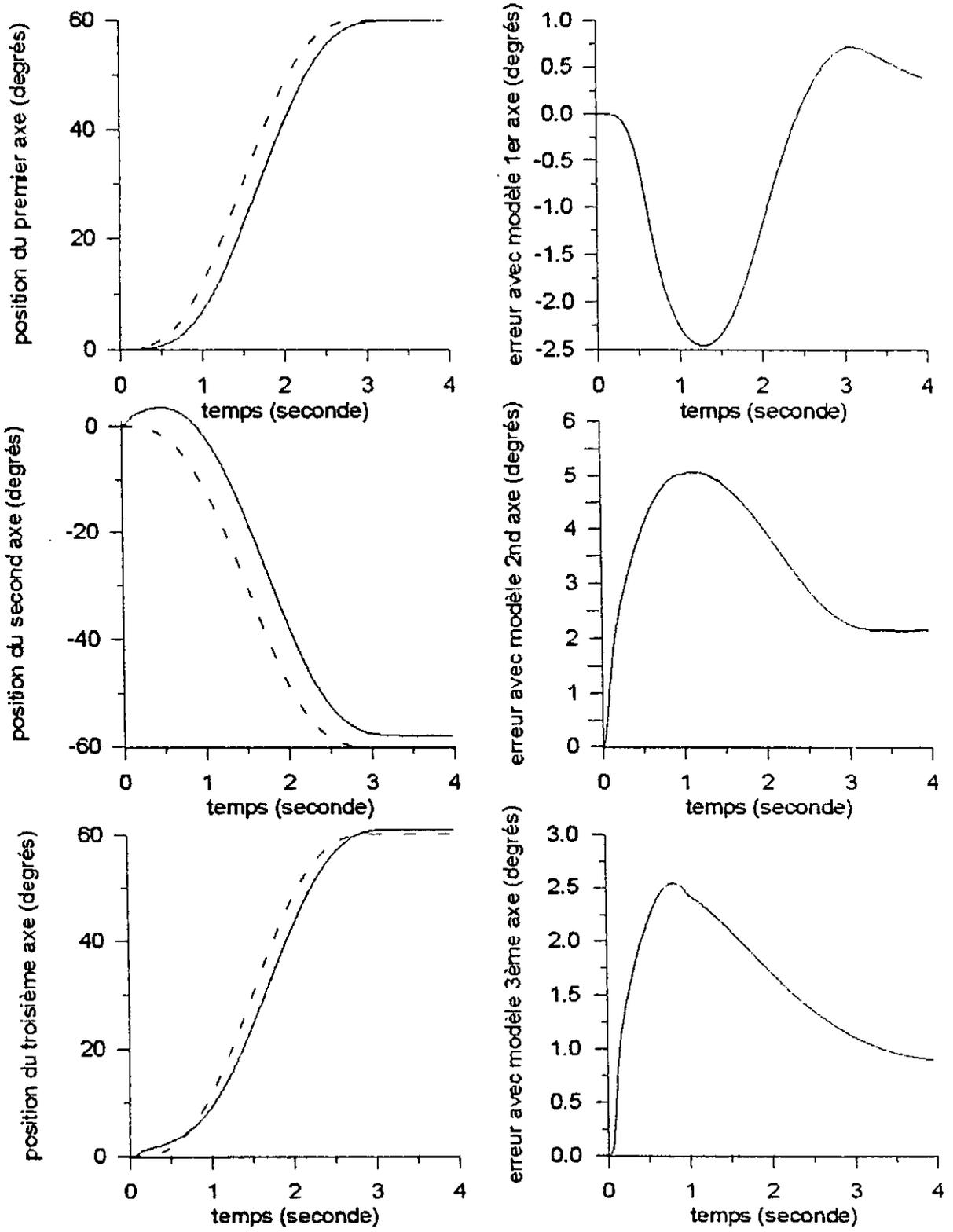


fig.5.3.1. a

--- position de référence — position réelle

Approche de D.Gavel et D.Dragoslavci: cas continu

essai sans feedback

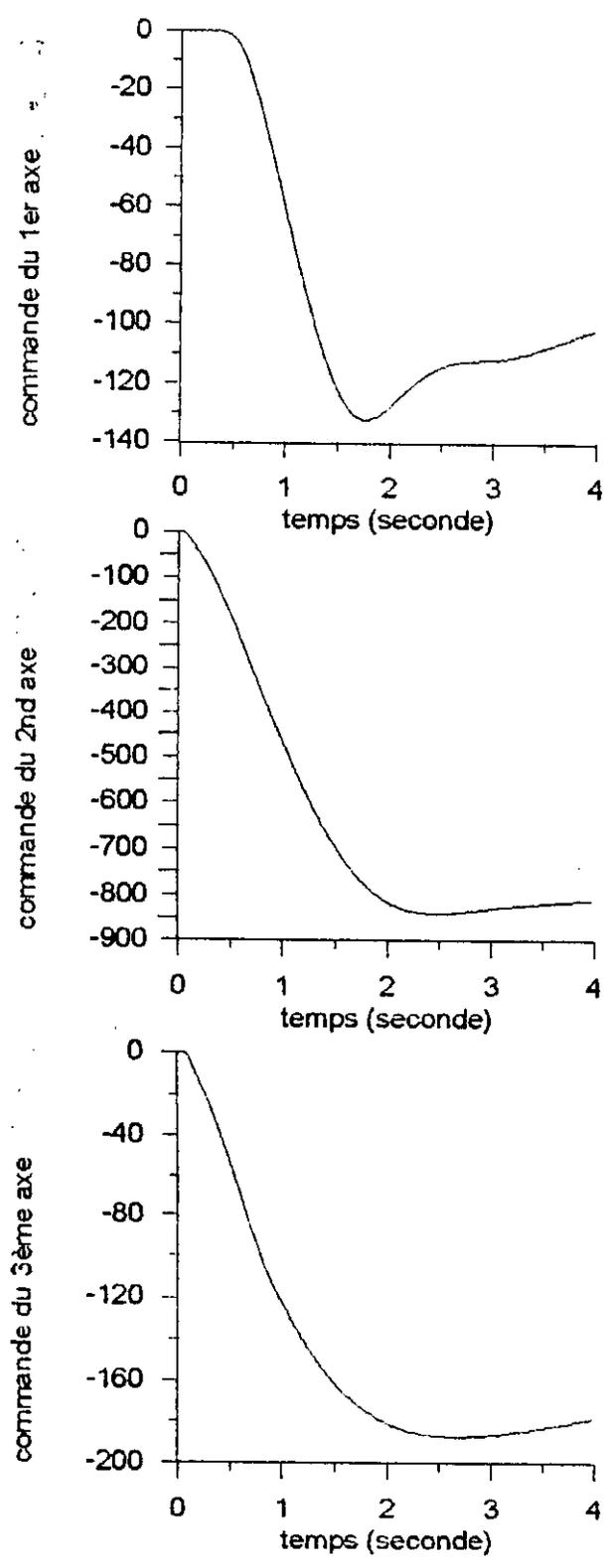


fig.5.3.1 b

Approche de D.Gavel et D.Dragoslavci cas continu
 essai sans feedback

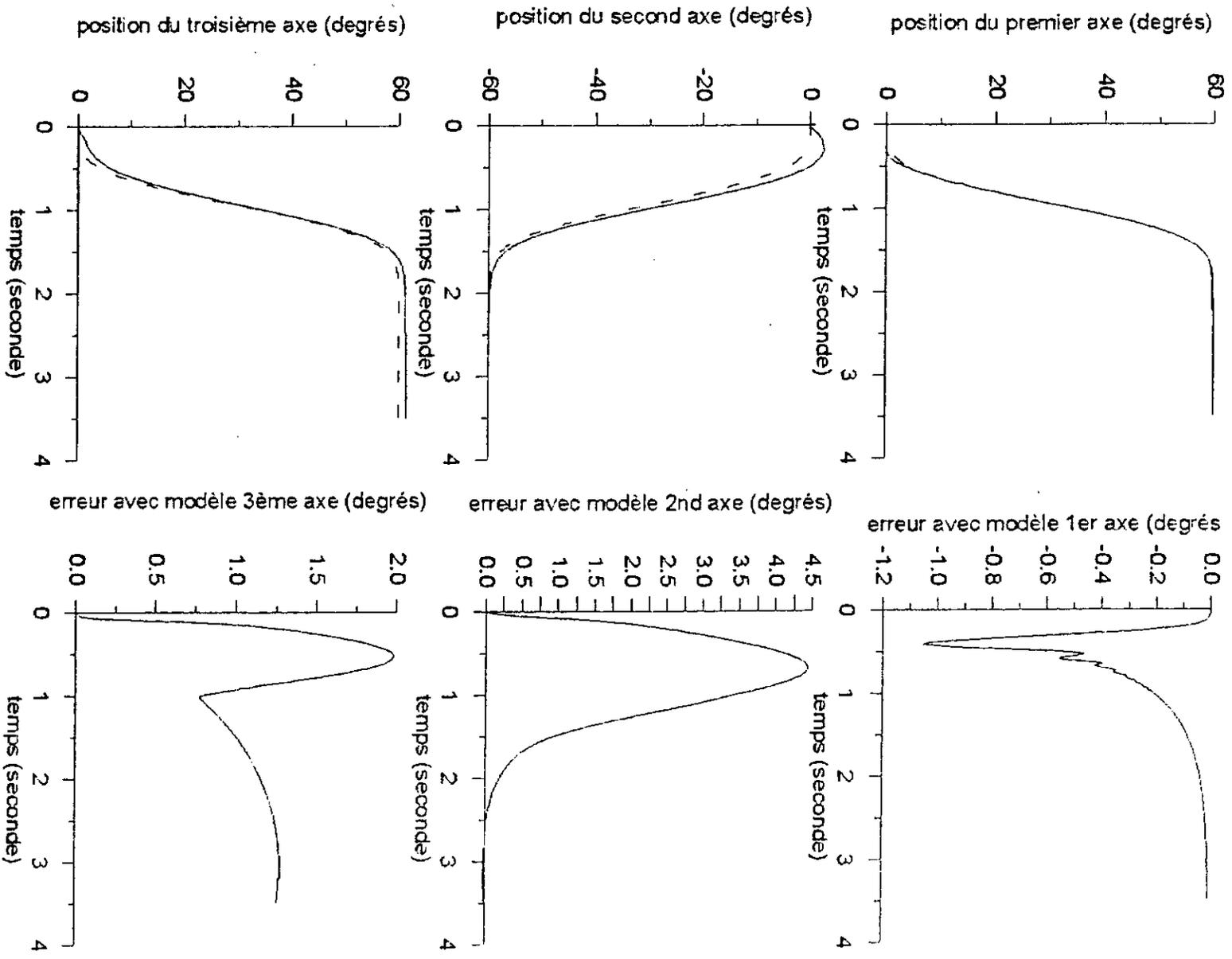


fig 5.3.2.a

--- position de reference ——— position réelle

Approuvée de D. Orvet et D. Dravoslavic cas soumis
 effet du feedback

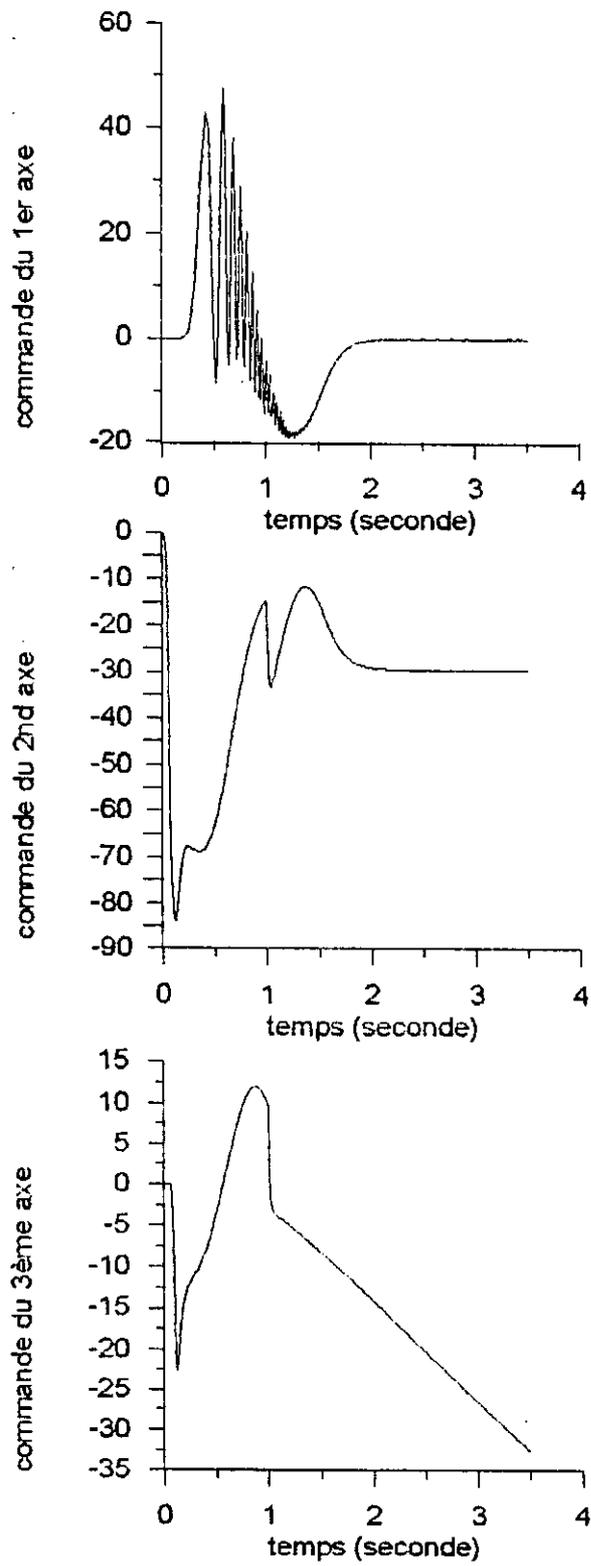


fig 5.3.2.b

Approche de D.Gavel et D.Dragoslav: cas continu

effet du feedforward

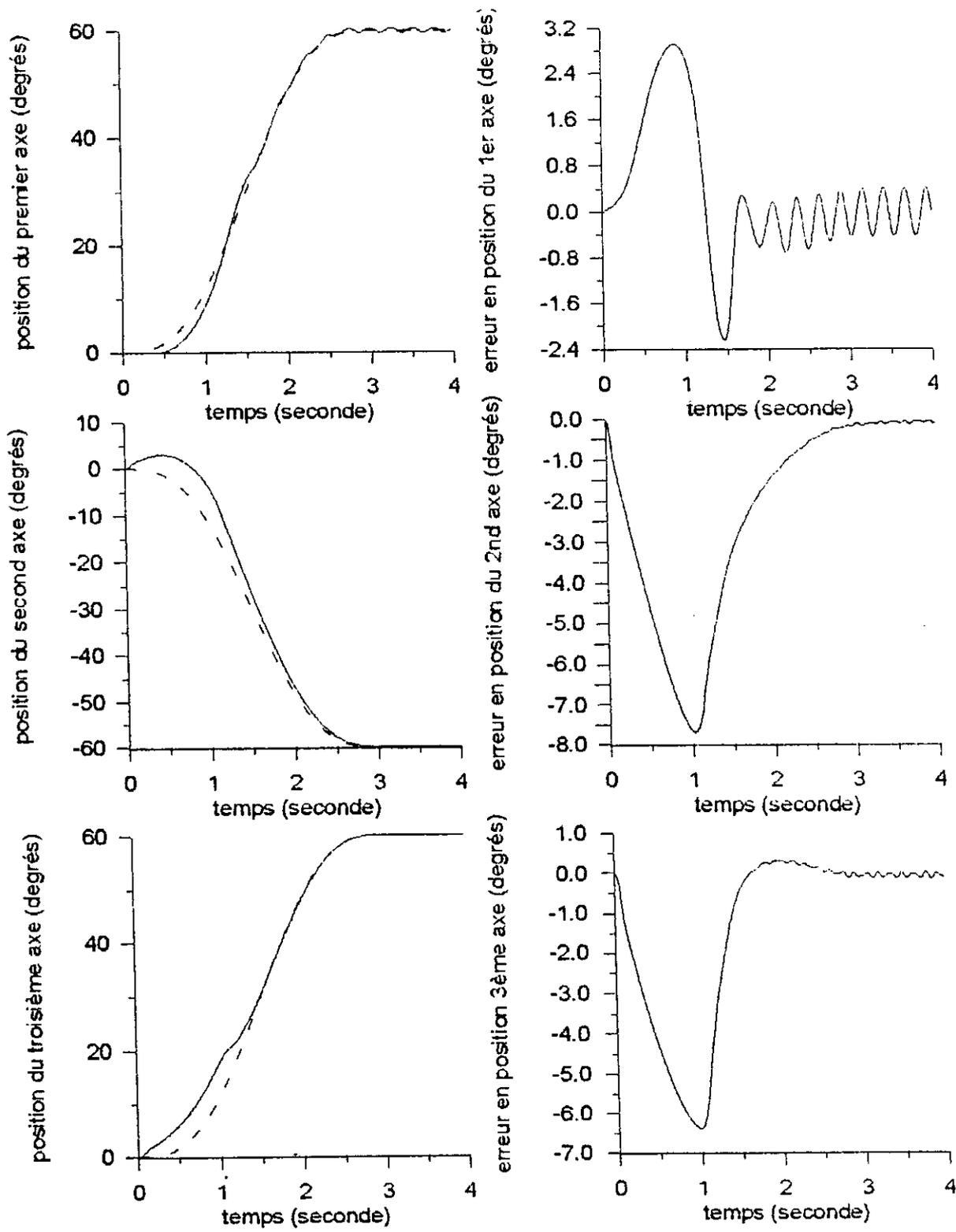


fig 5.3.3.a

--- position de référence — position réelle

Approche de D Gavel et D Dragesniav: cas discret.

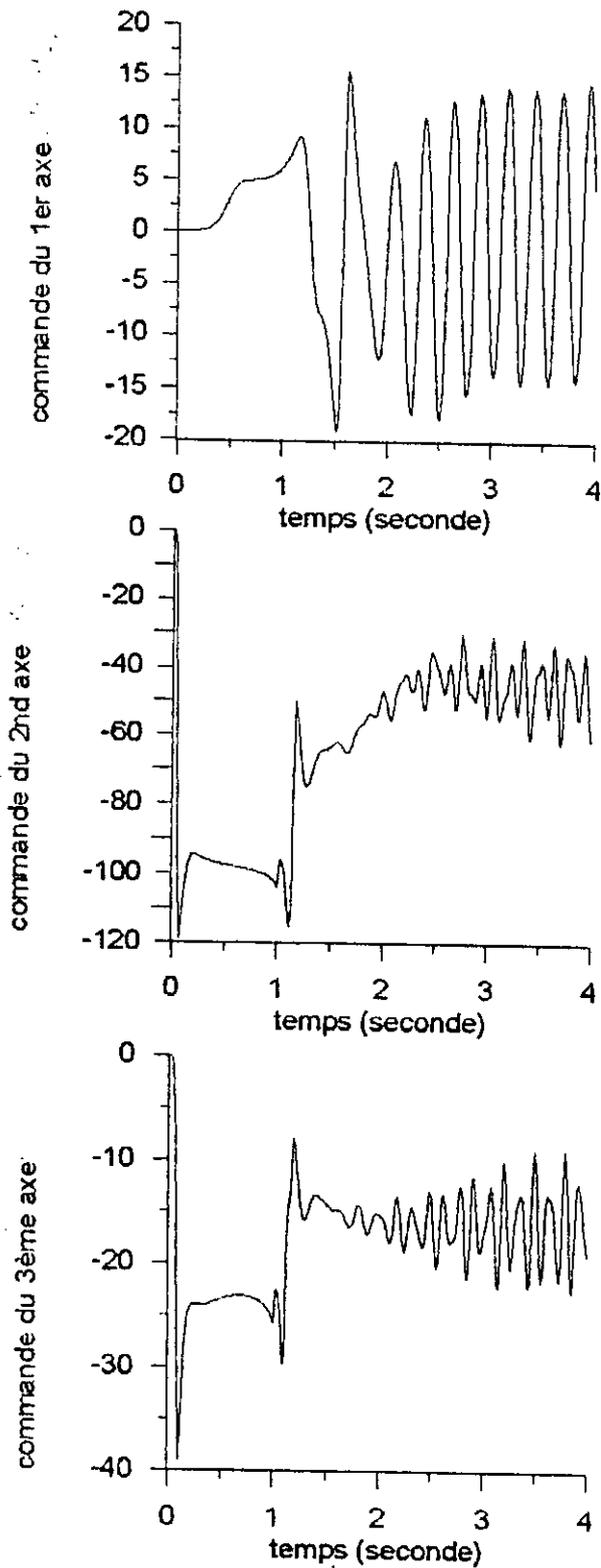


fig 5.3.3.b

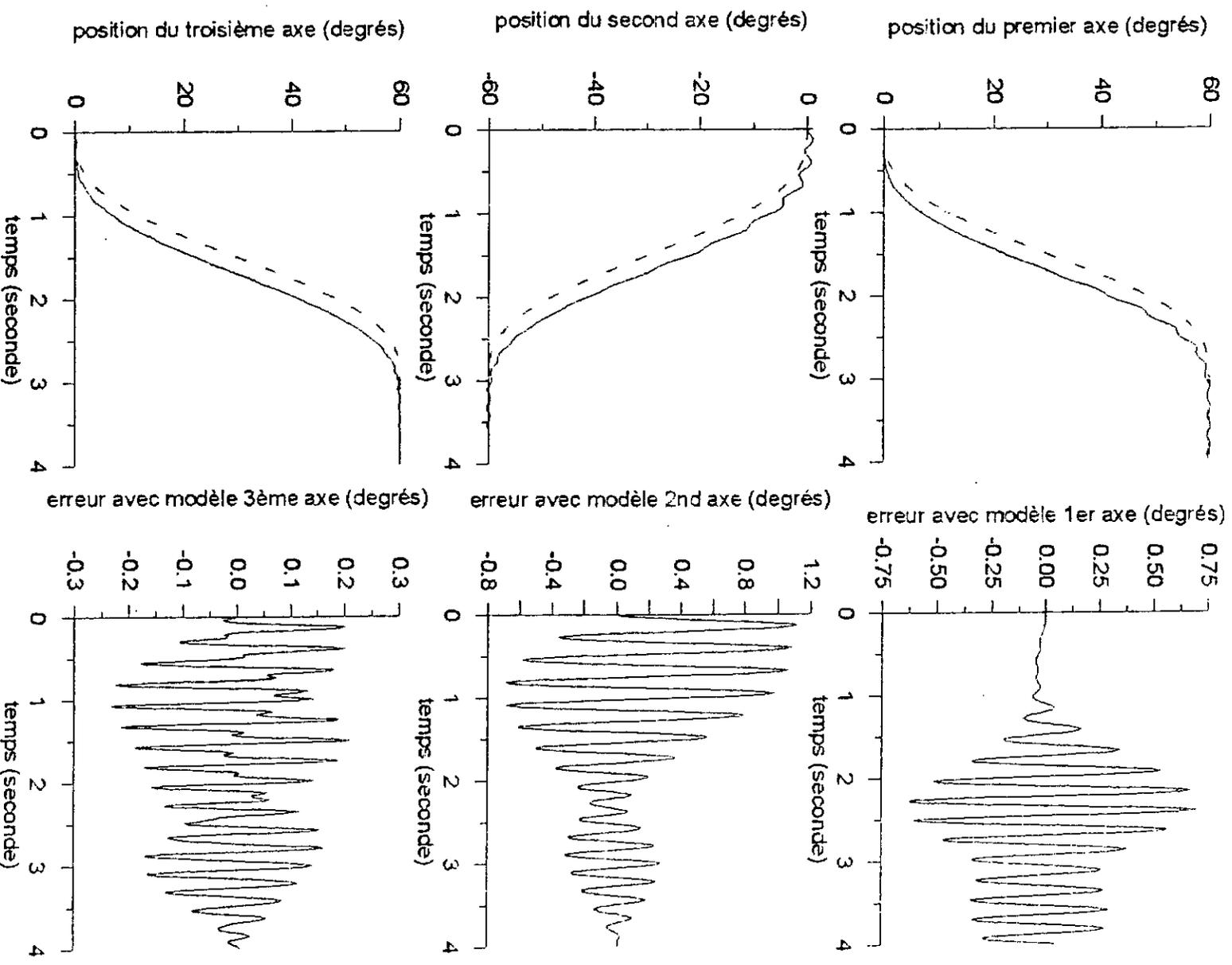


fig.5.3.4.a

----- position de référence ——— position réelle

Approche de Lin Shi et K. S. Singh: cas continu

effet du signal auxiliaire

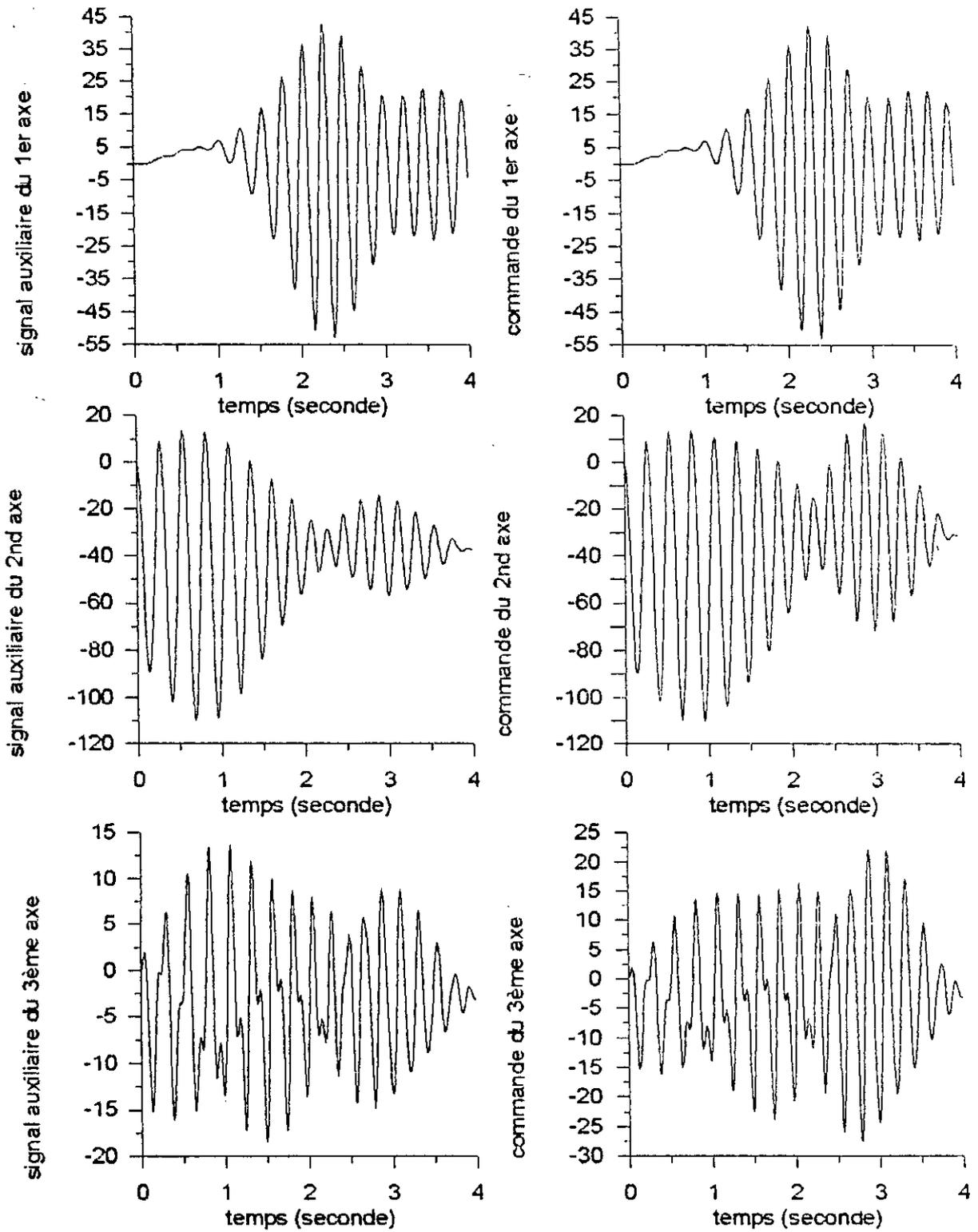


fig.5.3.4.b

Approche de Liu Shi et K.S. Singh, cas continu
 effet du signal auxiliaire

Nous constatons (fig 5.3.5) la disparition des oscillations de la commande. Le signal auxiliaire n'étant rien d'autre qu'un PID à paramètres fixes, l'introduction de l'action dérivée et l'augmentation de l'action proportionnelle du signal auxiliaire a permis de lisser la commande, et faire disparaître l'effet de l'action intégrale cause des oscillations précédentes.

3. trajectoire test, sans effet de masse.

La fig 5.3.6 permet d'illustrer la nette détérioration des performances, cela est dû au fait qu'en se donnant des trajectoires de plus en plus rapides, les interactions deviennent hautement non-linéaire et les ont de plus en plus de mal à vérifier l'inégalité (5.2.1), ainsi en diminuant la durée du mouvement, on arrivera sans doute à une instabilité du système.

-cas discret:

4. trajectoire normale, effet de masse, mêmes gains d'adaptation et de pondération que ceux de Gavel (cas discret), même période d'échantillonnage, $\alpha_i = 50$, $\pi_i = 0$, $\sigma_i = 0$.

Amélioration de l'erreur de poursuite par rapport à la méthode de Gavel pour les mêmes gains d'adaptation (fig 5.3.7), cela est dû sans aucun doute à l'introduction du signal auxiliaire.

5. Période d'échantillonnage $T_s = 10\text{ms}$.

Malgré la période d'échantillonnage 10 fois plus grande, le système reste stable et robuste par rapport à l'effet de masse (fig 5.3.8), cependant, on remarque que les performances se sont détériorées à cause de la période d'échantillonnage.

-Approche de H.Seraji:

cas discret:

1. trajectoire normale, effet de masse, $[w_{p1} \ w_{v1}] = [120 \ 20]$, $[w_{p2} \ w_{v2}] = [400 \ 200]$,
 $[w_{p3} \ w_{v3}] = [120 \ 40]$, $\beta_{ij} = 0 \ i=1,3 \ j=0,1$, $[\alpha_{i1} \ \alpha_{i2} \ \alpha_{i3}] = [100 \ 800 \ 0] \ i=1,3$, $\delta_i = 50 \ i=1,3$,
 $\rho_i = 0 \ i=1,3$, période d'échantillonnage $T_s = 1\text{ms}$.

La fig 5.3.9 nous permet de constater la stabilité du système malgré le fait que les conditions imposées sur les variations des termes d'interconnexions et d'inertie, lors de

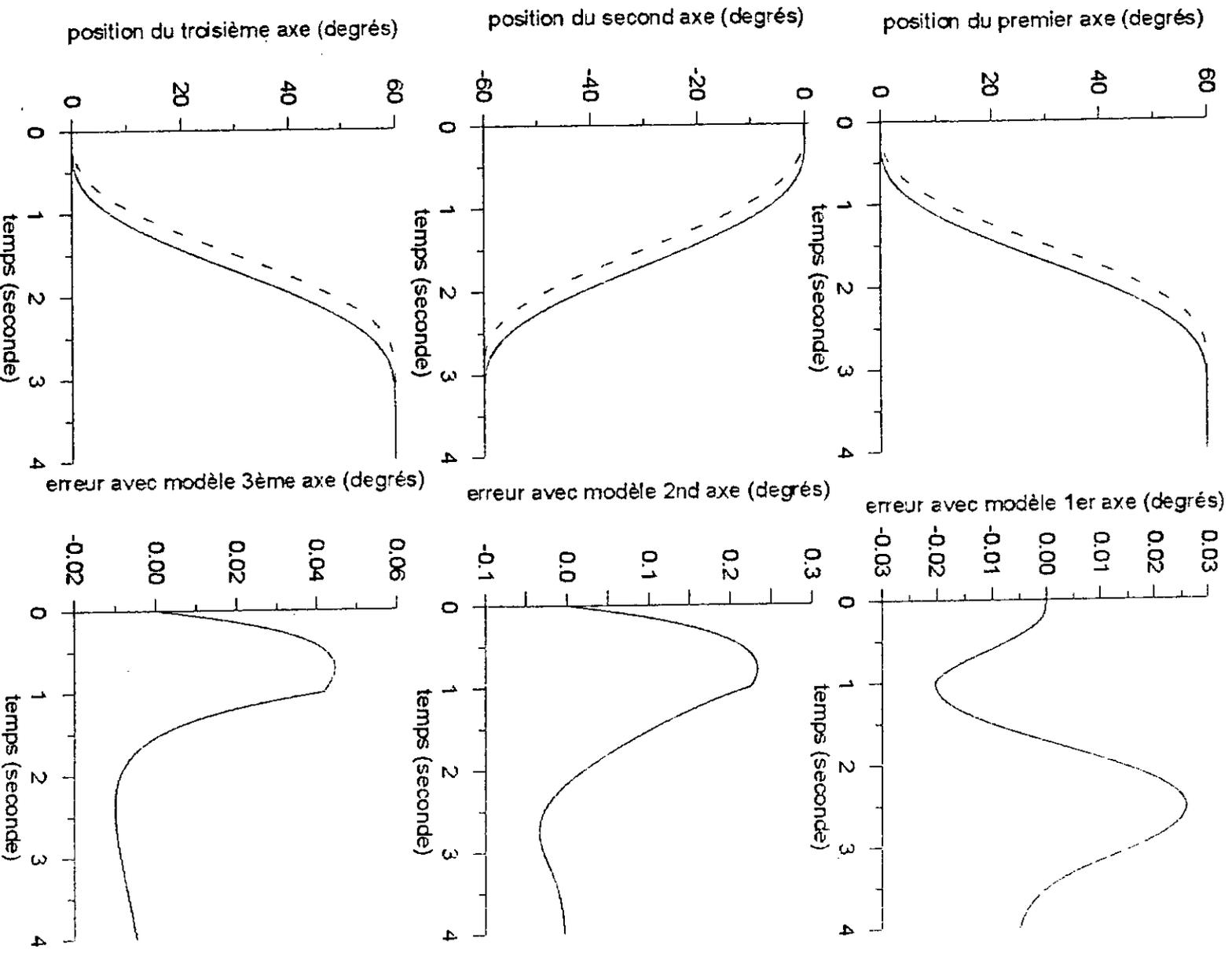


Fig.5.3.5.a

--- position de reference ——— position réelle
 Approche de Lin Sin et Tr.S. simplifié cas continu
 effet de l'action dérivée

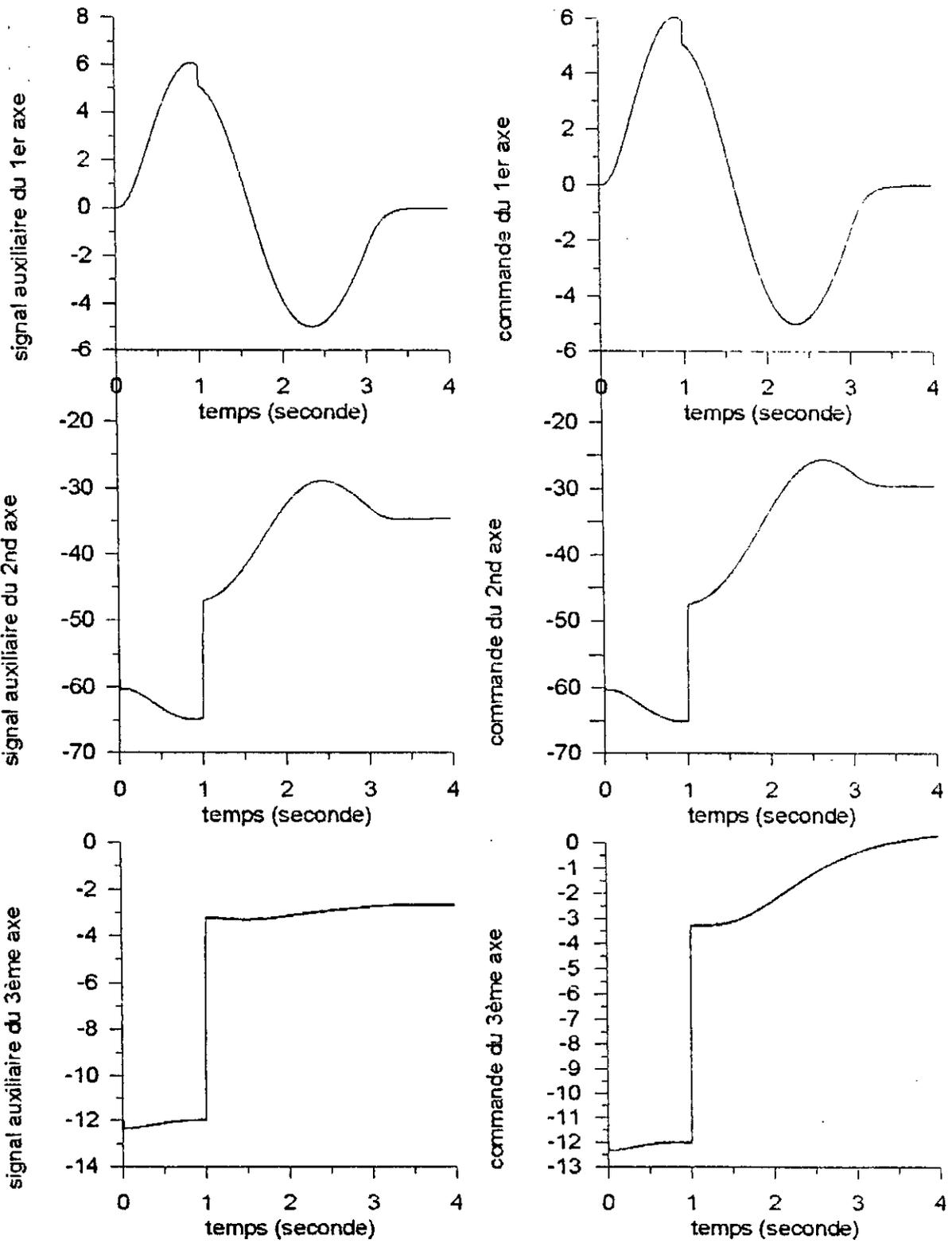


fig.5.3.5.b

Approche de Lin Shi et K.S. Singh: cas communi
 enet de raction derivee

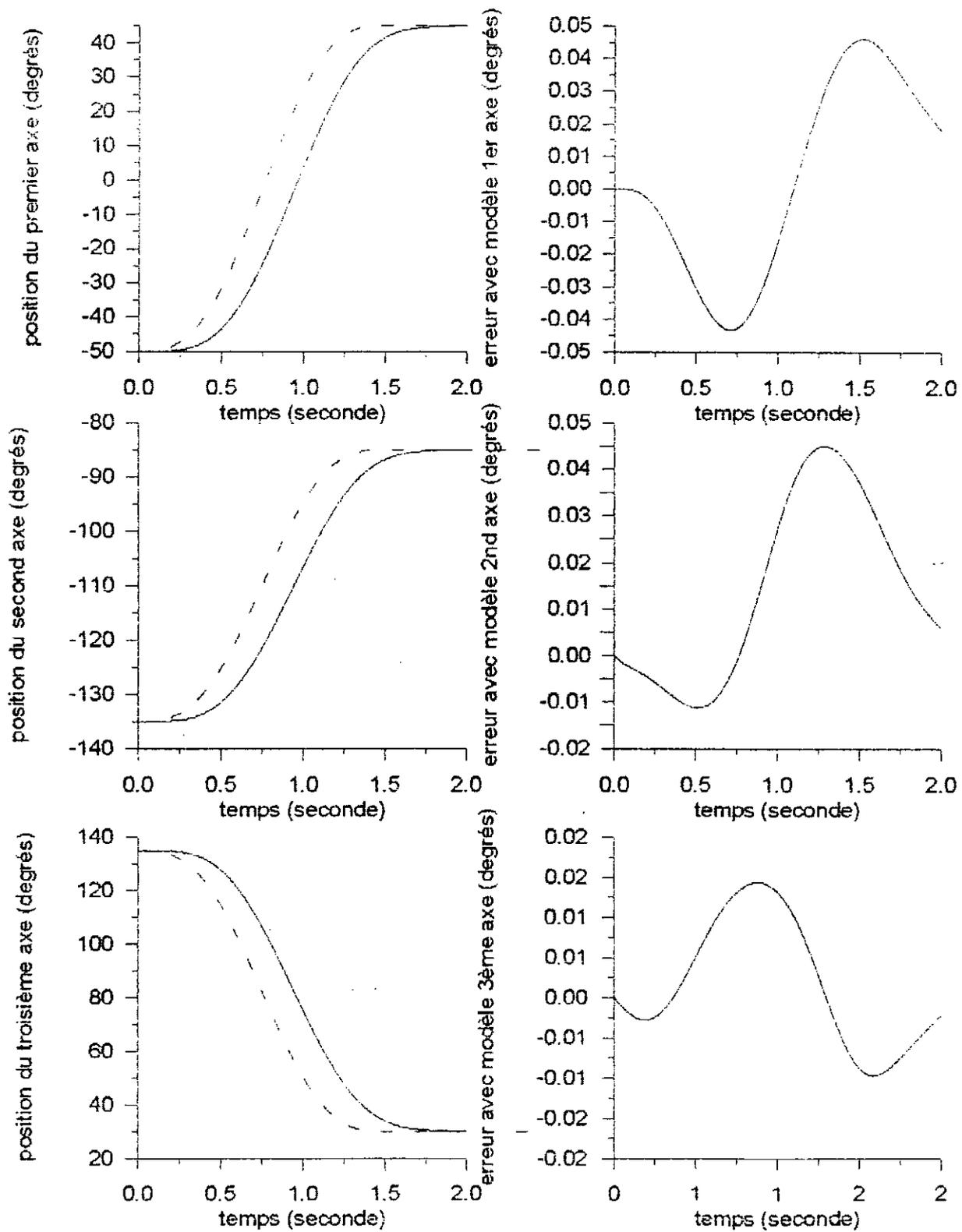


fig 5.3.6.a

Approche de Lin Nai et K.S. Singh: cas continu

injectoire test

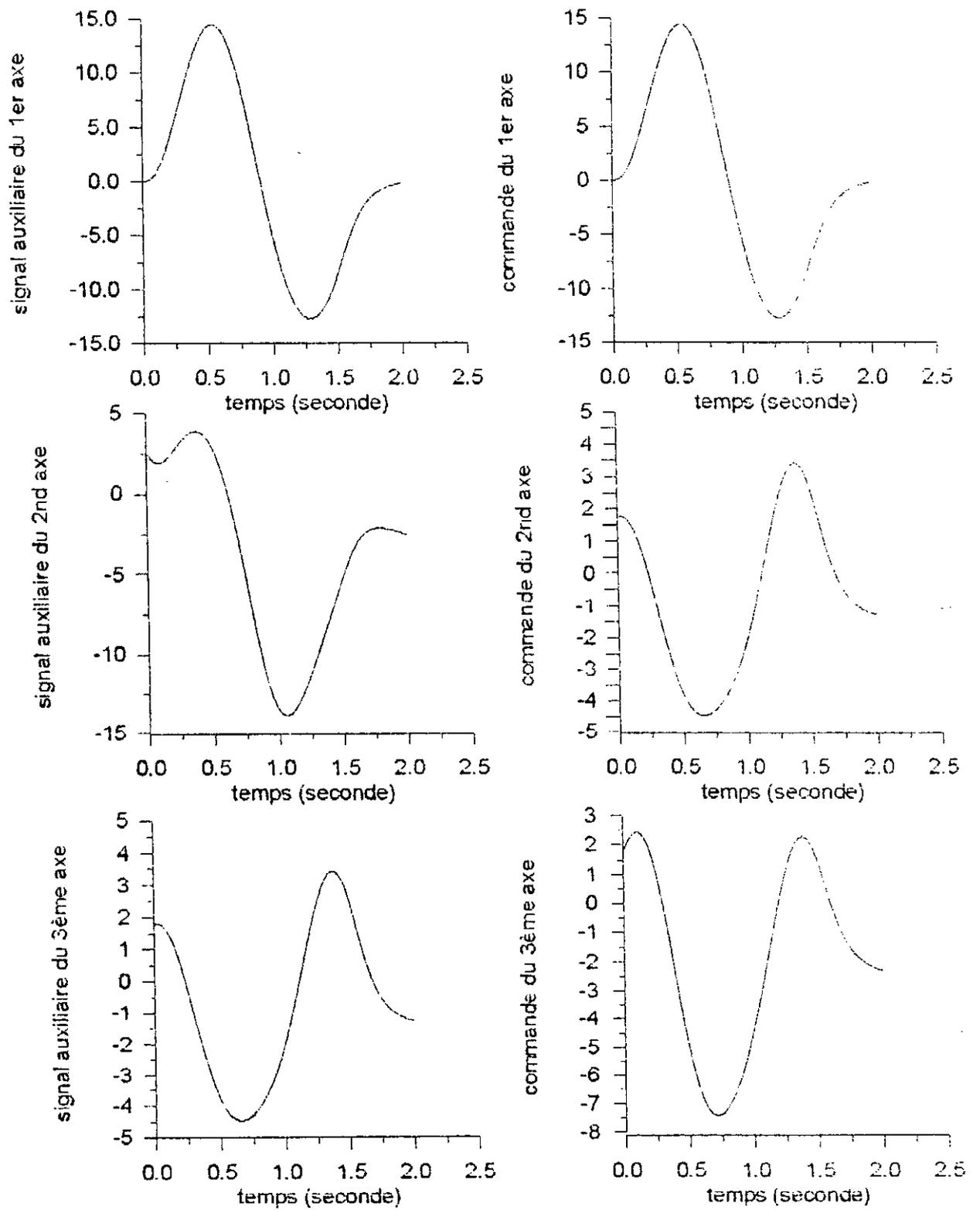


fig 5.3.6.b

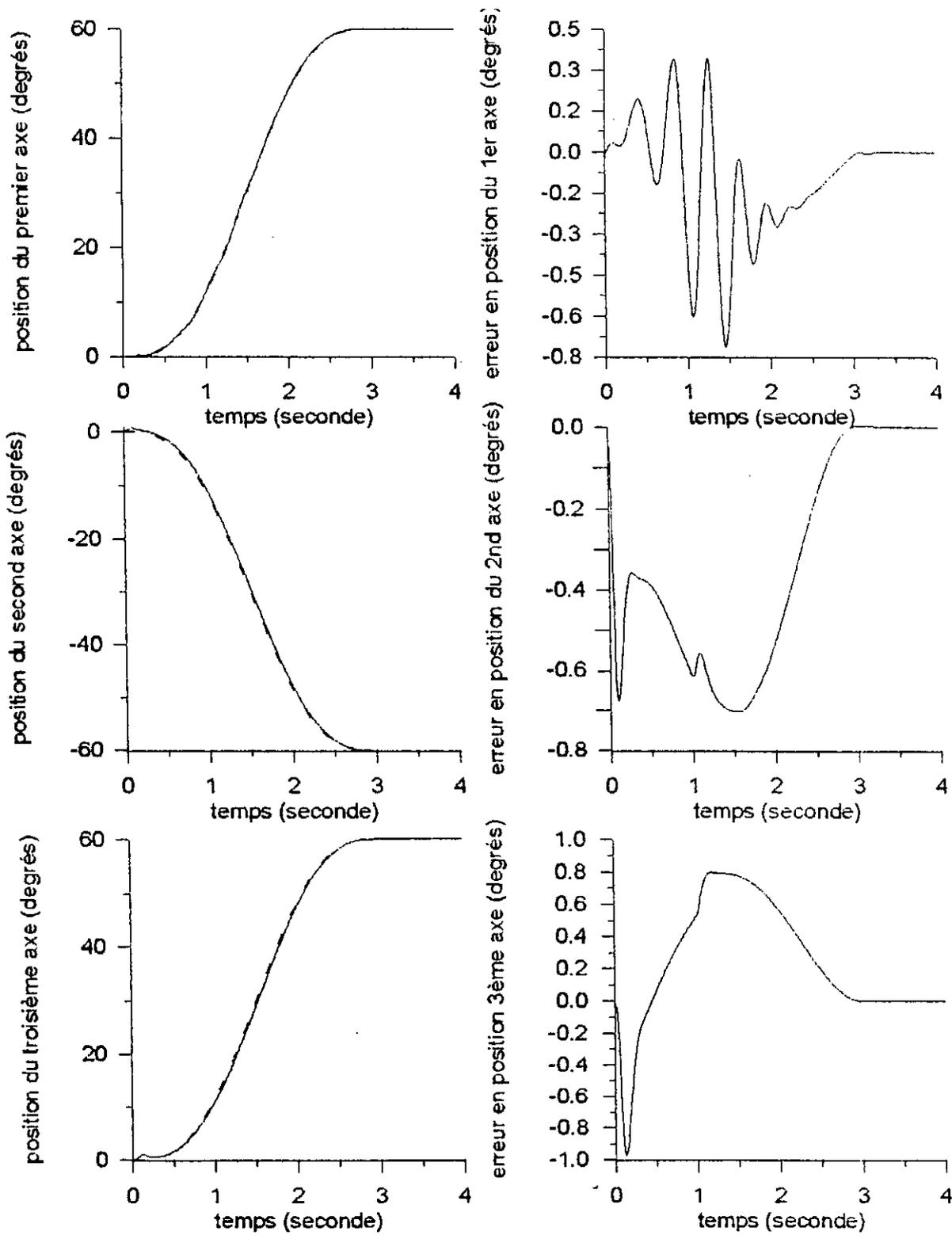


fig 5.3.7.a

--- position de référence — position réelle

Approche de Lin Sii et K. S. Singh: cas discret

periode d'échantillonnage d'1/10

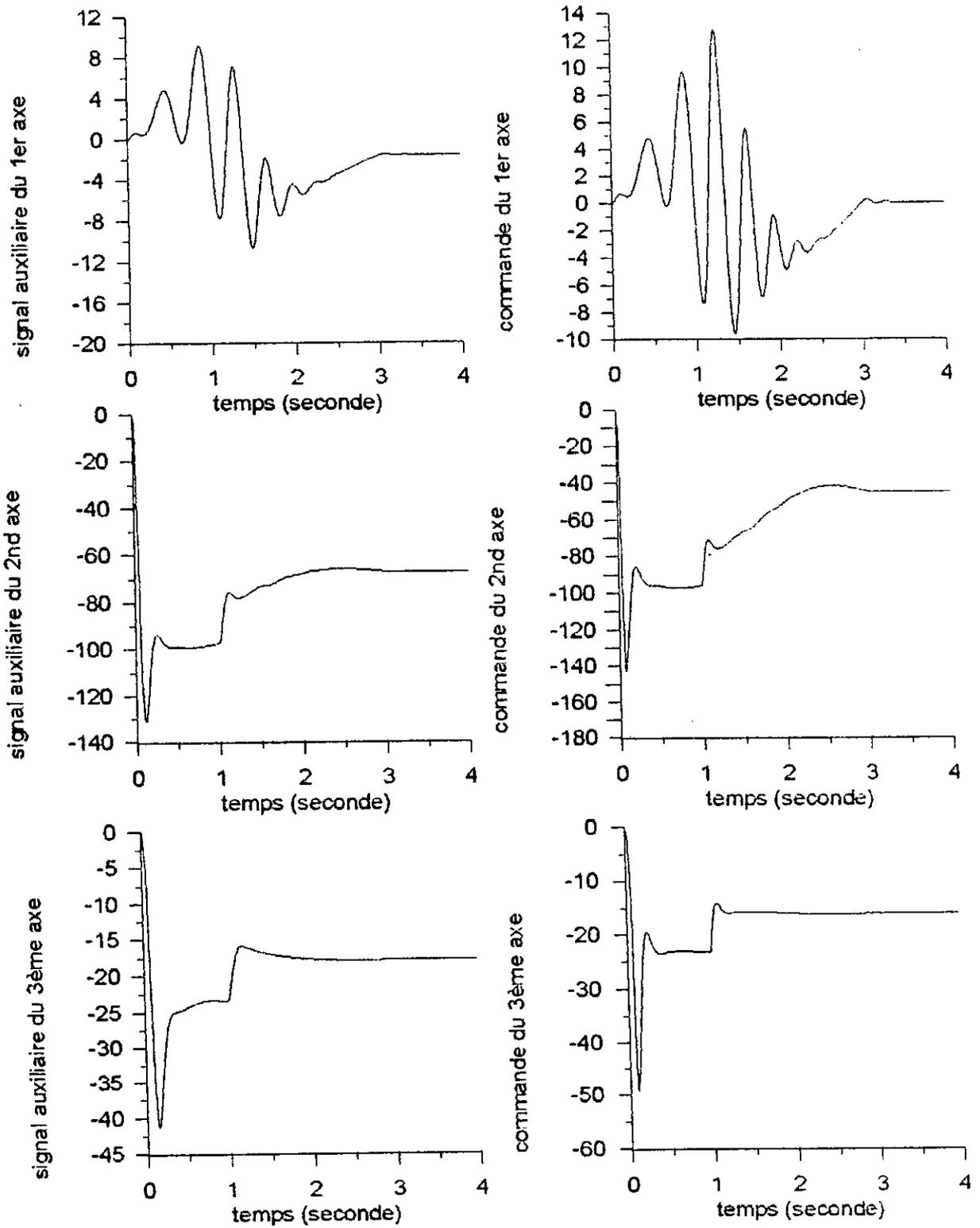


fig 5.3.7.b

Approche de Lin Shi et K.S. Singh: cas discret

periode d'echantillonnage d'1ms.

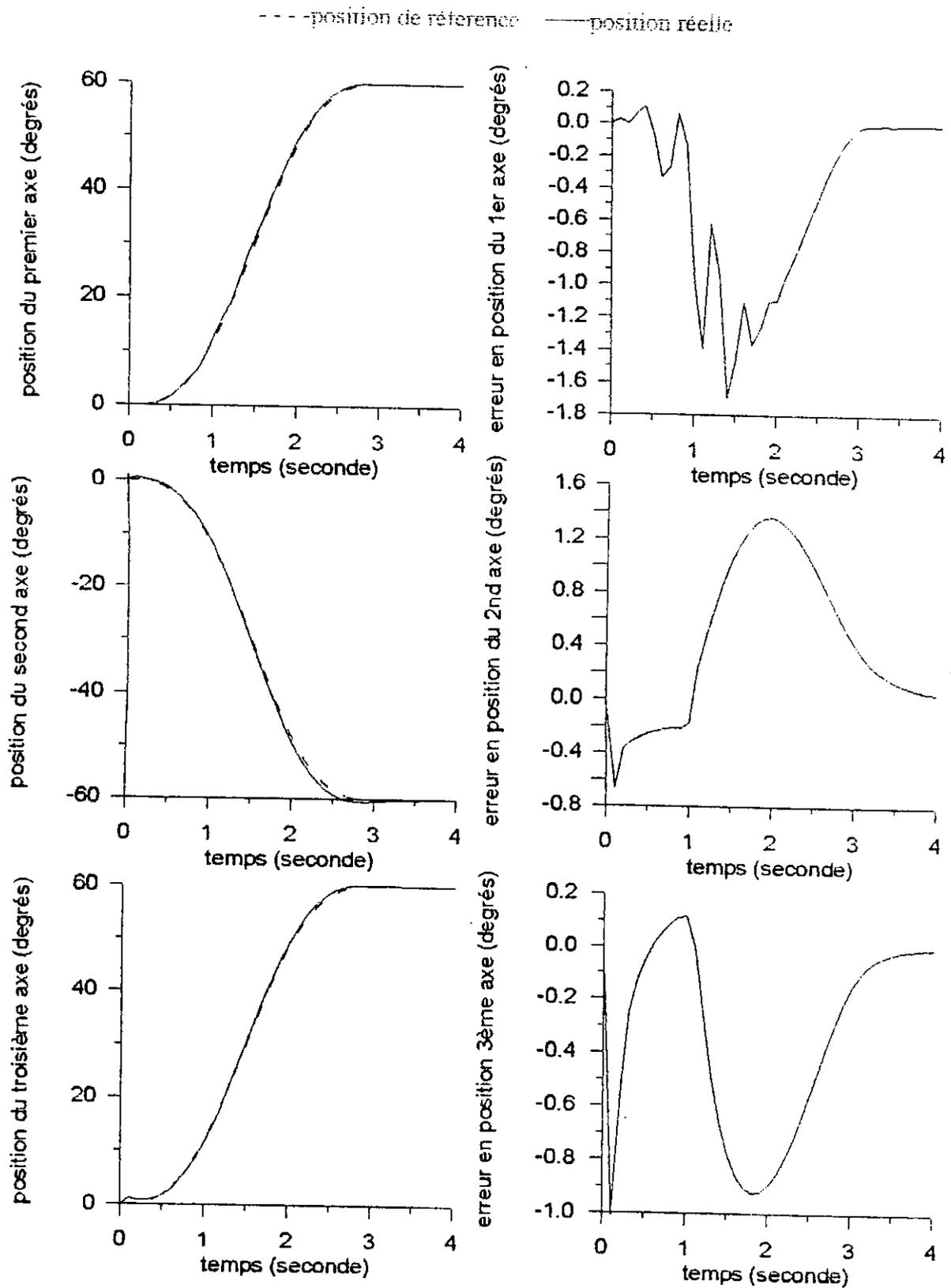


fig 5.3.8.a

Approche de Lin Shi et K.S. Singh: cas discret

periode d'échantillonnage de 10 ms.

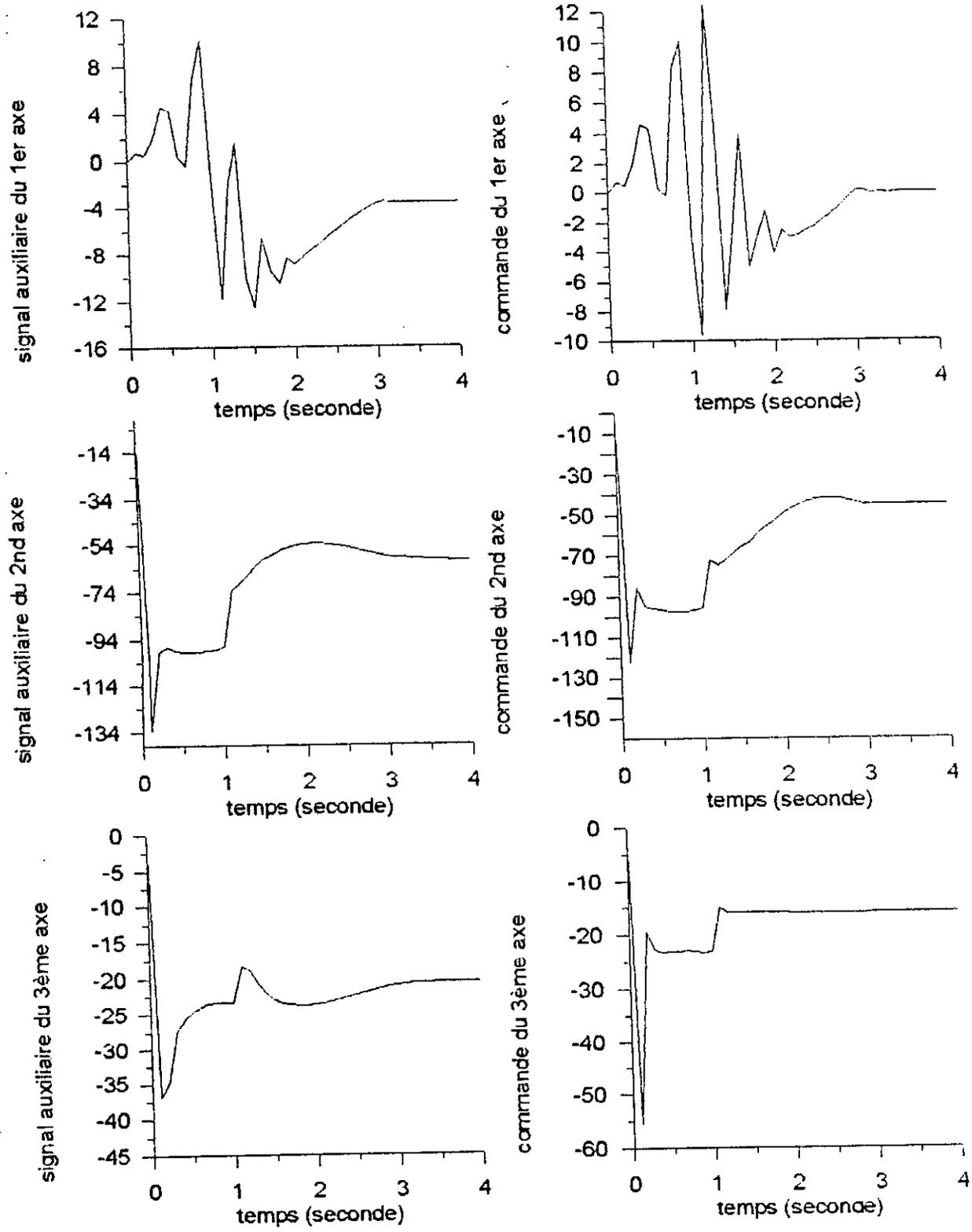


fig 5.3.8.b

Approche de Lin Shi et K. S. Singh : cas discret
 periode d'échantillonnage de 10 ms.

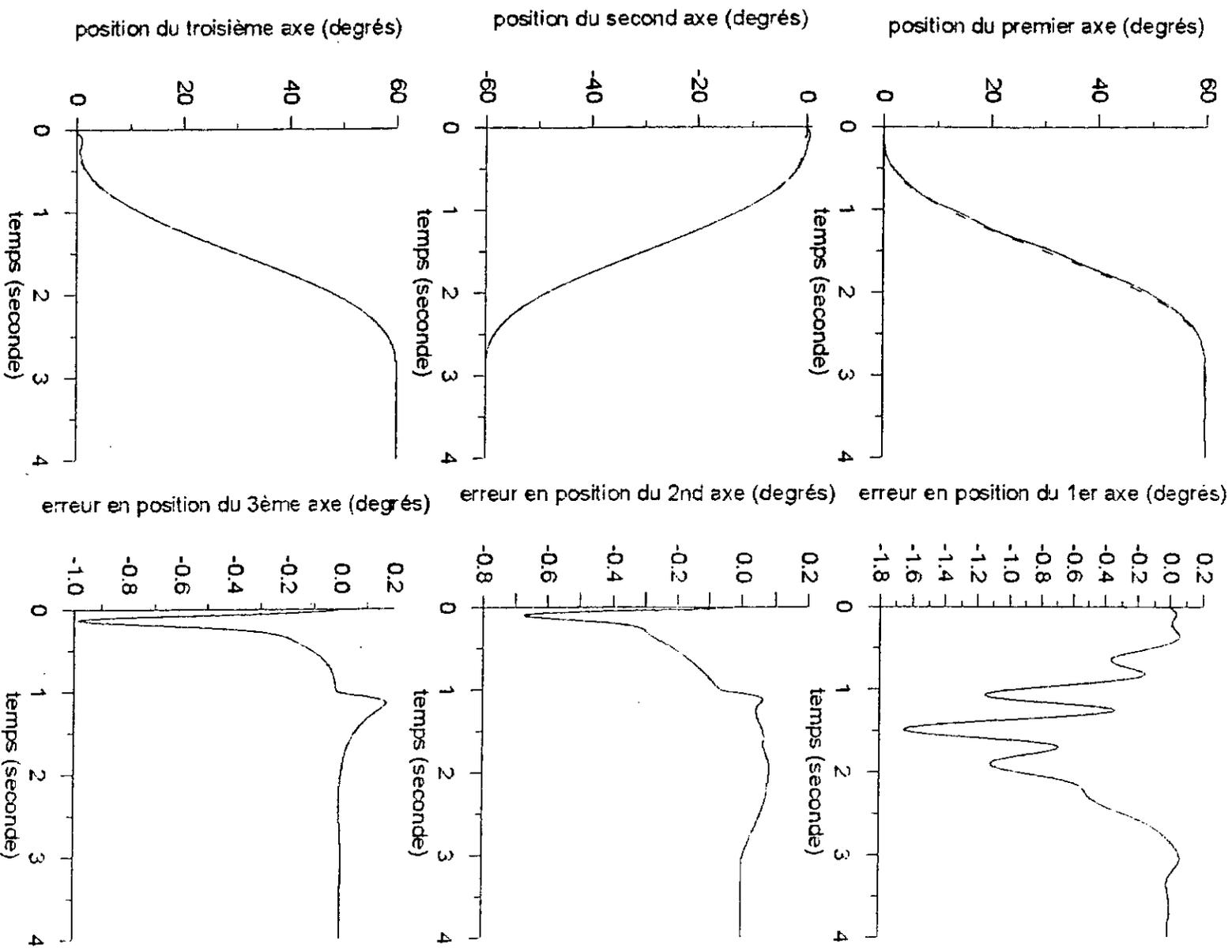


fig 5.3.9.a

--- position de reference - - - - - position réelle

Approche à Serviti

periode d'échantillonnage de 1 ms

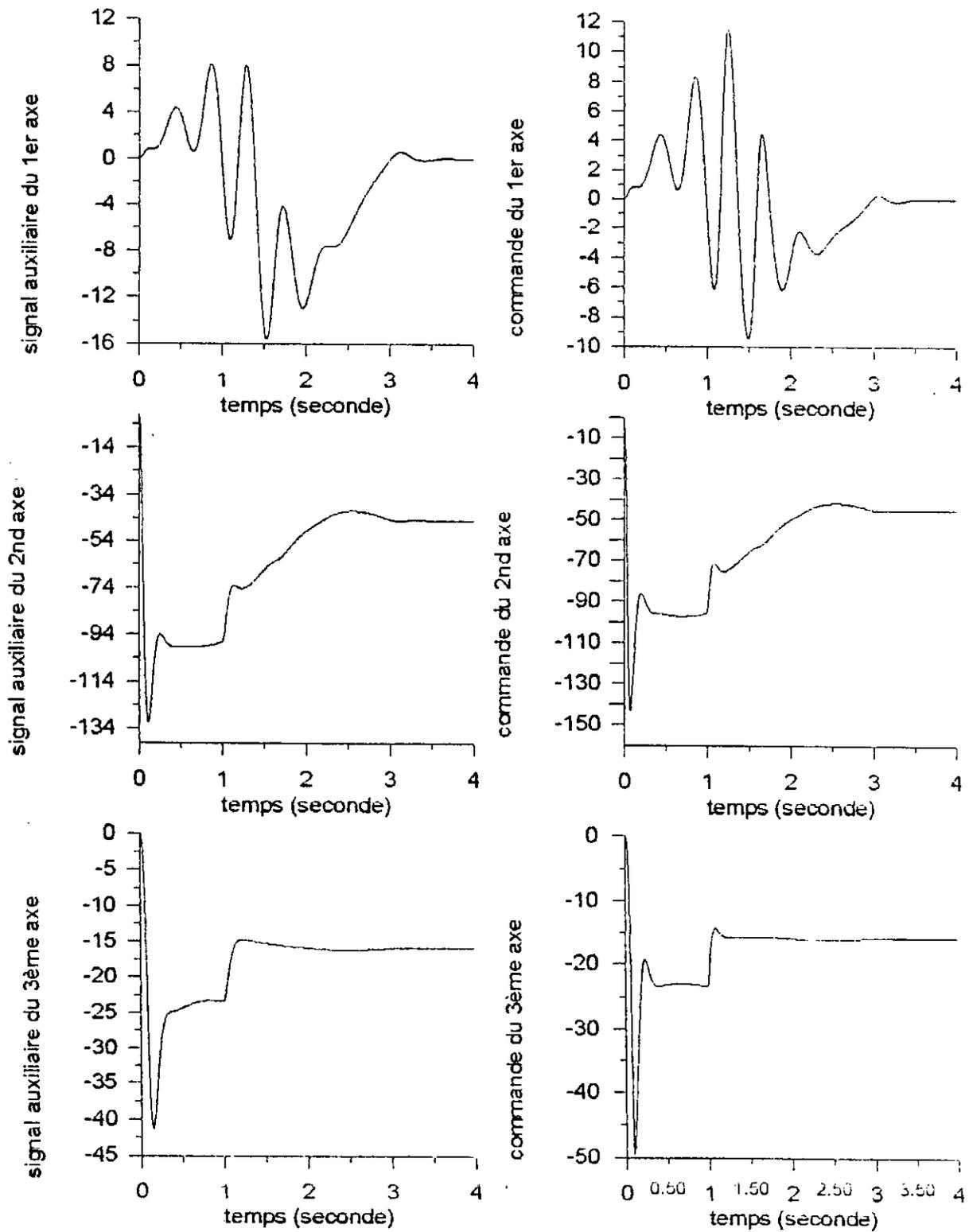


fig 5.3.9.b

Approche à 3 axes

période d'échantillonnage d'1 ms

la synthèse de la commande ne soient plus vérifiées ($d(d_i)/dt \cong 0$ et $d(m_{ii})/dt \cong 0$), étant donné la variation brusque de la masse de la charge. Cela pourrait s'expliquer par le fait que la théorie de Lyapunov nous permet d'avoir des conditions suffisantes et non nécessaires de stabilité.

Nous remarquons aussi l'allure du signal auxiliaire qui est semblable à celle de la commande, ce qui prouve que le signal auxiliaire est prépondérant dans le schéma de commande. Une Observation attentionnée permet de remarquer que le signal auxiliaire répond d'une manière efficace au changement de masse brusque de la charge, ce qui confirme son rôle de compensation des perturbations non-linéaires introduites par les couples de coriolis et de gravitation.

2. Période d'échantillonnage $T_s = 10$ ms.

Nous constatons la préservation de la stabilité et de la robustesse de la commande, malgré une période d'échantillonnage 10 fois plus grande, mais évidemment la dégradation des performances due à la période d'échantillonnage.

3. trajectoire test, période d'échantillonnage $T_s = 1$ ms, sans effet de masse (masse=0 kg).

Nous remarquons (fig 5.3.11) la détérioration des performances du système notamment des pics de l'erreur respectivement égaux à $[-3.3692 \ 0.2734 \ -0.6226]$, ces pics sont dus principalement à l'erreur en vitesse, puisque en prenant $\rho_i = 0$ nous avons privé le signal auxiliaire de toute information sur l'erreur en vitesse. Ainsi l'algorithme ne pourra correctement suivre la trajectoire de référence que lorsque le gain K_{v_i} aura une valeur suffisante à compenser cette erreur en vitesse. Par conséquent, il existe deux manières de compenser cette erreur en vitesse: donner une valeur non nulle soit au gain K_{v_i} , soit à ρ_i ; nous avons opté pour la seconde car la première nécessite la connaissance du modèle. L'introduction du feedforward permet aussi d'augmenter le couple fourni et donc d'améliorer les performances (voir [Leahvy 1990]).

4. $\rho_i = 50$.

Comme prévu nous remarquons (fig 5.3.12) l'amélioration des performances traduite par une diminution des pics de l'erreur à $[-2.8229 \ -0.0155 \ -0.031]$, cependant, les performances du premier axe reste en dessous des exigences d'une poursuite précise de la

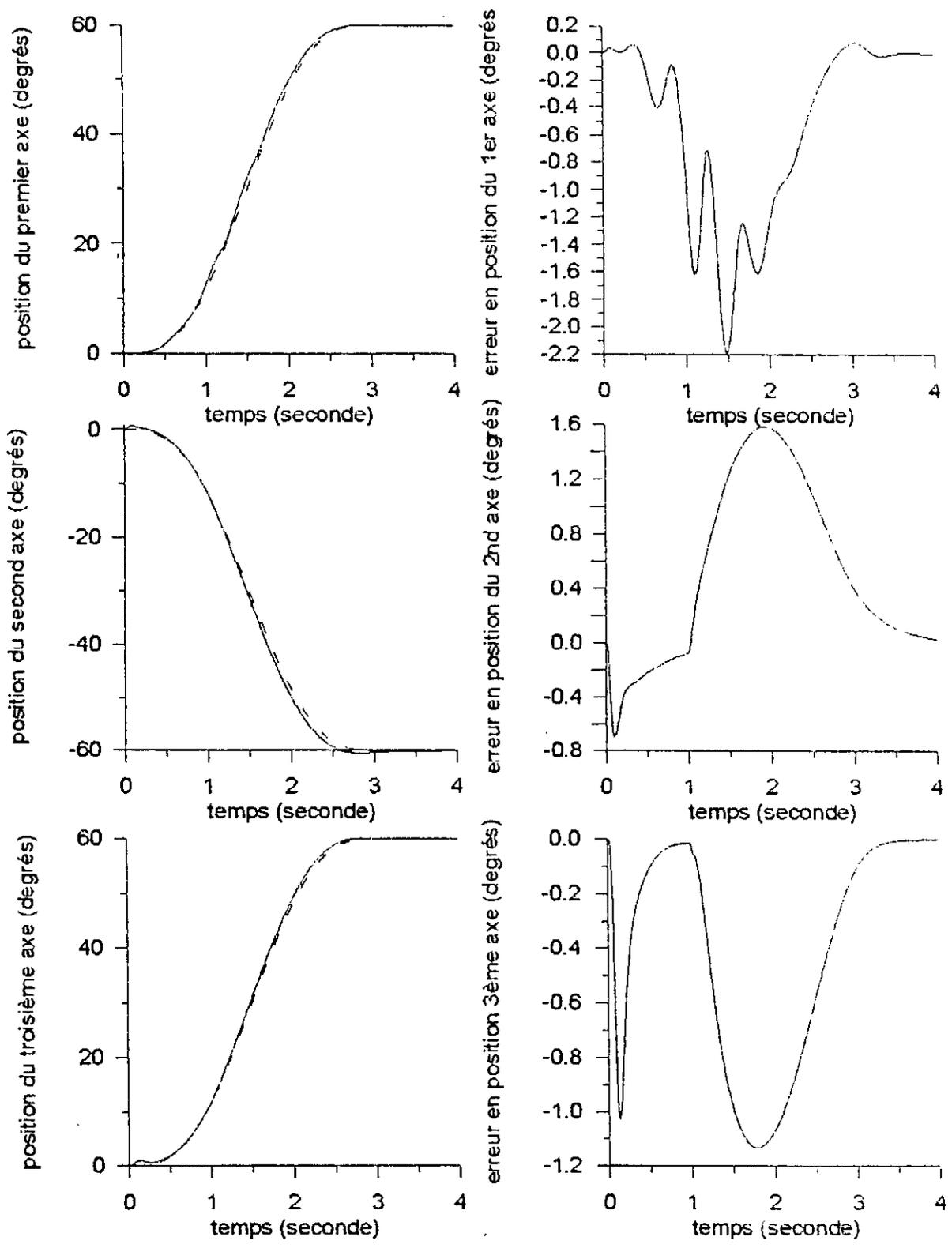


fig 5.3.10.a

--- position de référence — position réelle

Approche li. Serati

periode d'échantillonnage de 10 ms

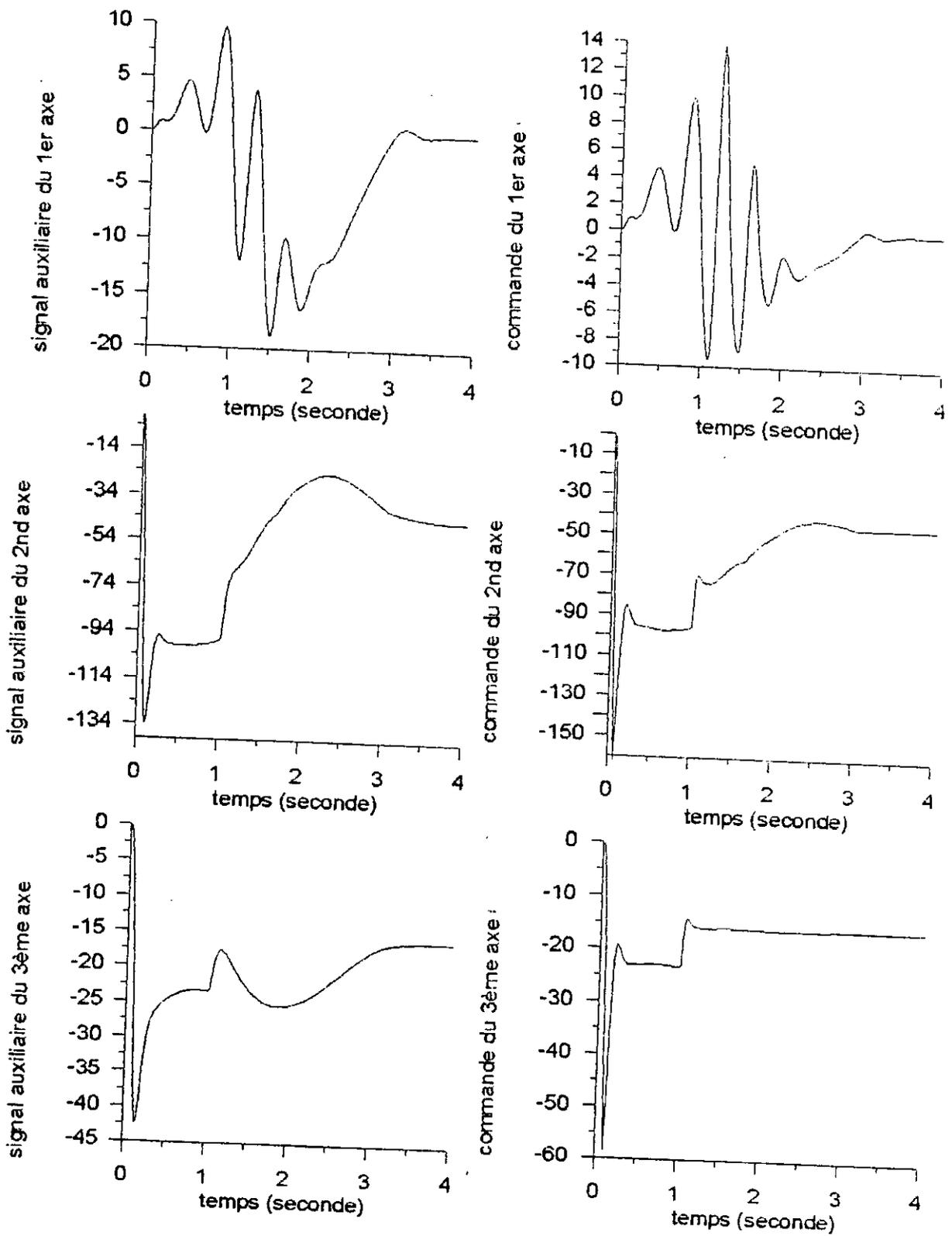


fig 5.3.10.b

Approche n.Serail

en site d'immobilisation de l'axe

--- position de référence — position réelle

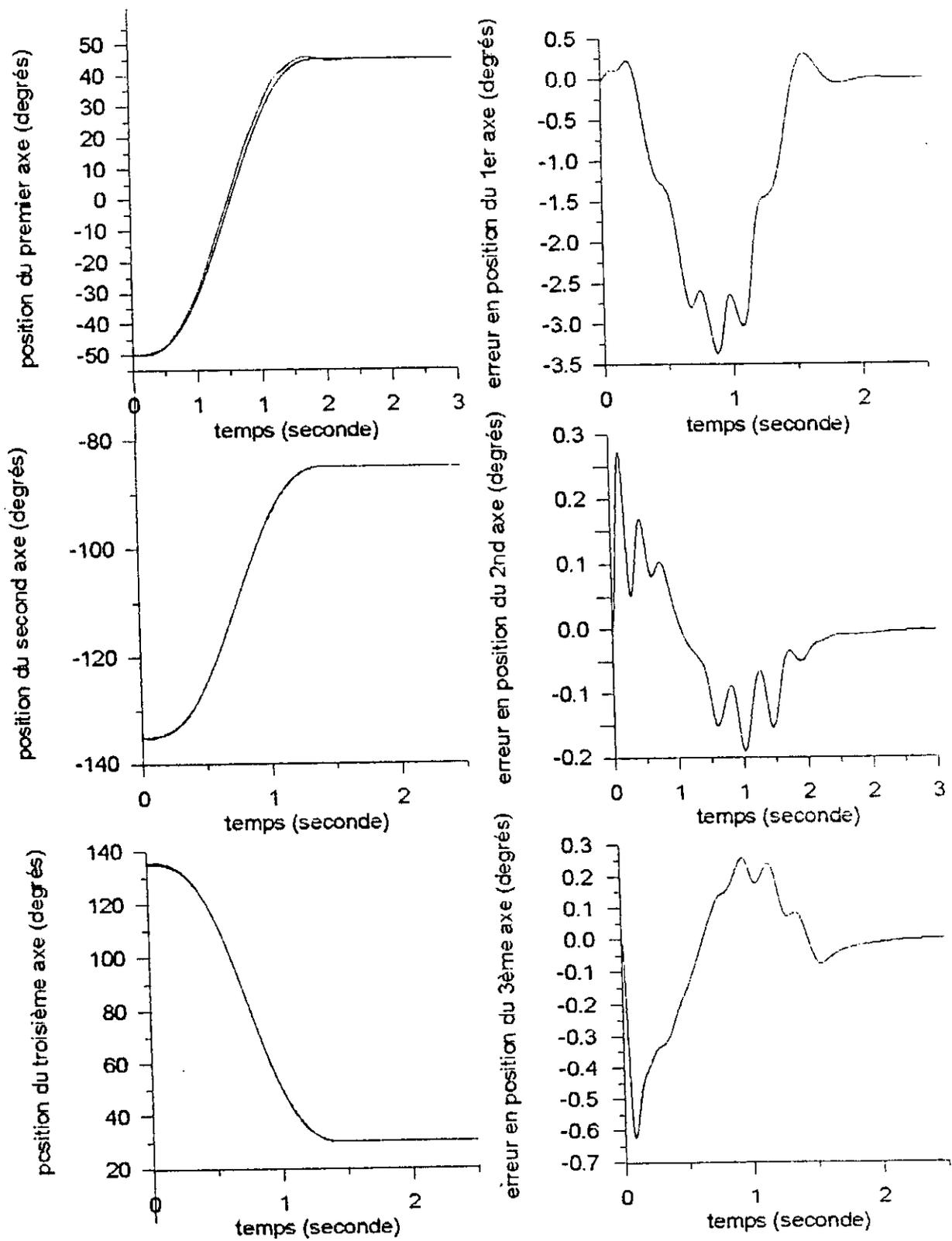


fig 5.3.11.a

Approche h.Serail

transferte test: deterioration des performances

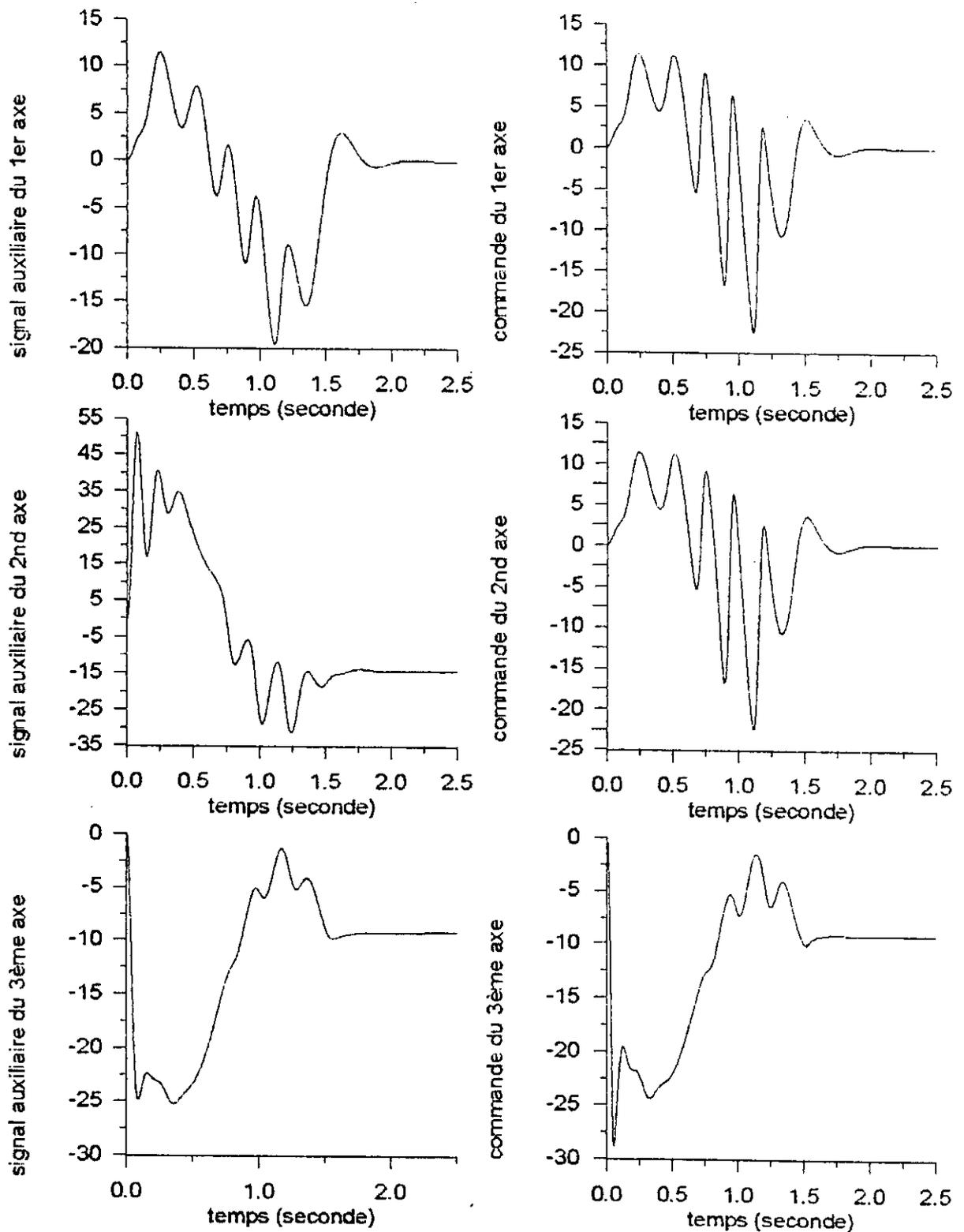


fig 5.3.11.b

Approche h.Serafi

trajectoire test: deterioration des performances

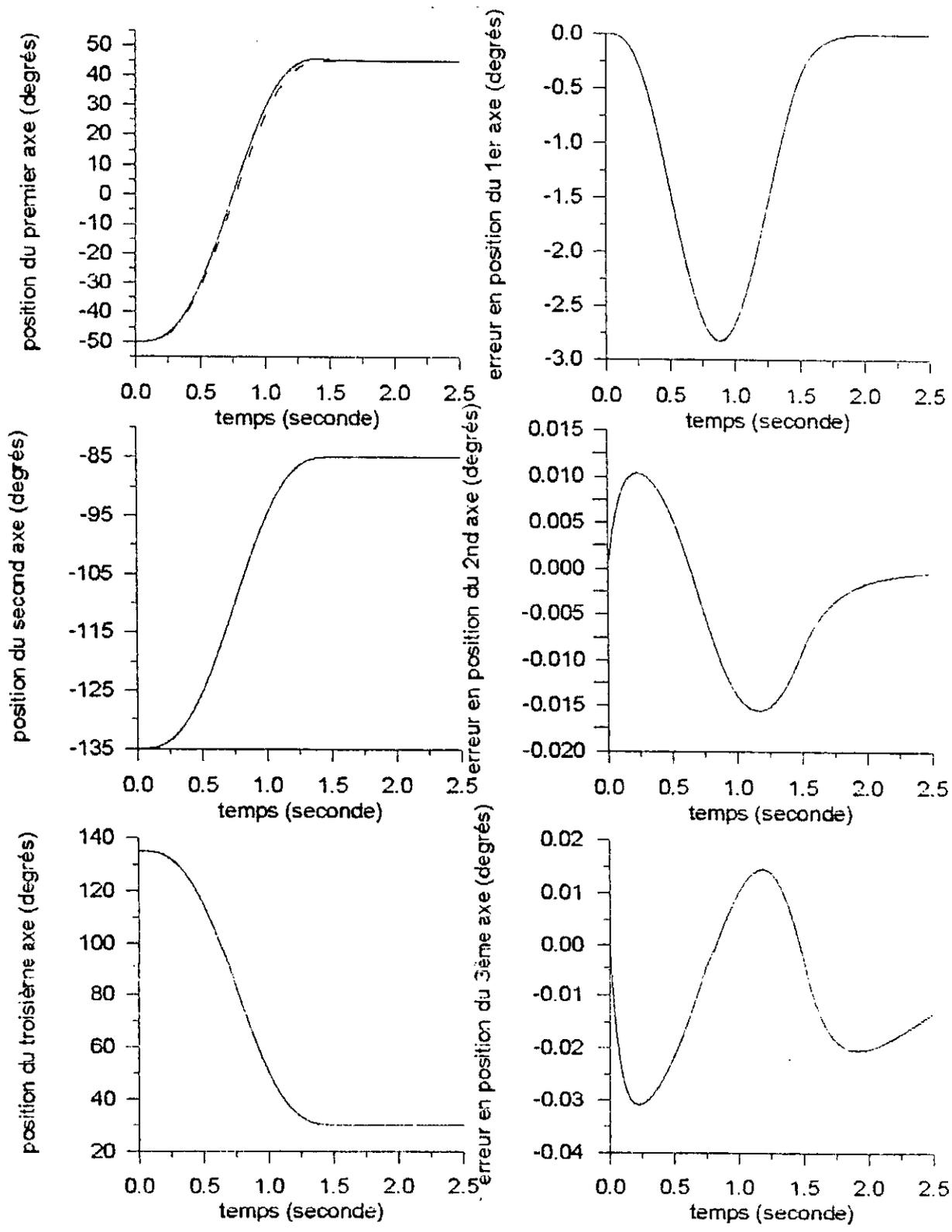


fig.5.3.12.a

--- position de référence — position réelle
 Approche à Setar
 effet de l'action dérivée

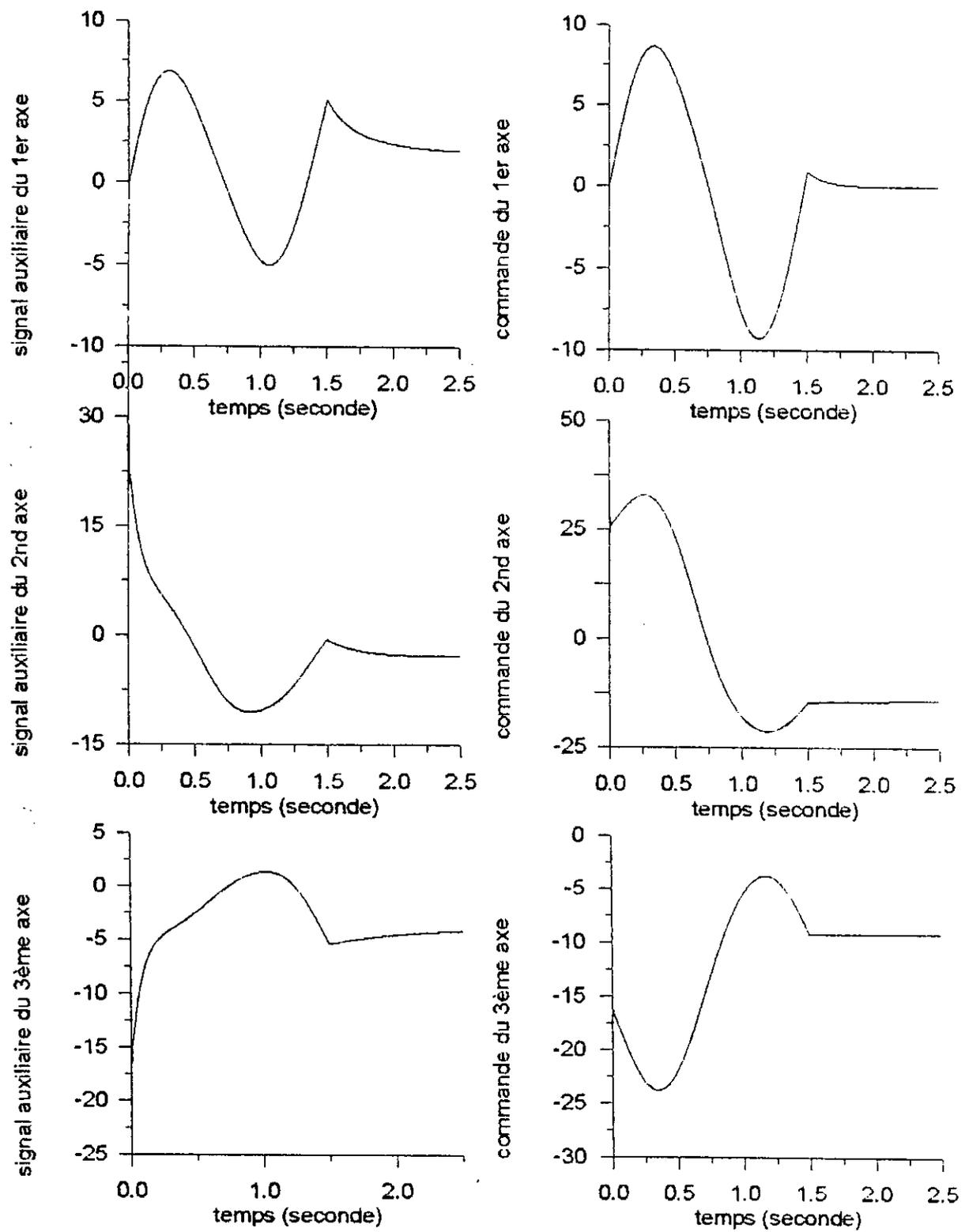


fig 5.3.12.b

Approche de h.Semii
 effet de l'action dérivée

trajectoire. Cela est dû à la grossièreté de l'approximation sur les termes d'interconnexions et notamment pour des trajectoires rapides.

Dans le cas discret nous avons intentionnellement pris les mêmes facteurs de pondération et des gains d'adaptation identiques afin de permettre une comparaison entre l'approche de Lin-Shi et celle de Seraji. Les deux méthodes présentent les mêmes propriétés de robustesse et de stabilité pour différentes périodes d'échantillonnages. Nous remarquons aussi que le signal auxiliaire a le même rôle de compensation des interconnexions, supposées comme perturbations. Cependant dans l'approche de Lin Shi, le système étant supposé suivre le modèle de référence et lui sert donc d'indice de performance, les pics de l'erreur sont inférieurs à ceux de Seraji (voir fig 5.3.7 et fig 5.3.9). Nous pensons que cela est dû au fait que le modèle de référence introduit un amortissement dans le comportement du système global et donc diminue l'erreur en vitesse qui est la cause des pics importants de l'erreur, alors que dans l'approche de Seraji on se contente de se fixer une dynamique pour l'erreur. A noter aussi, que la condition sur les interconnexions de Lin Shi est moins restrictive que celle de Seraji.

-Approche de Li Chen Fu:

-cas continu:

1. trajectoire normale.

les simulations de cette méthode permettent de constater la stabilité de cette méthode (voir fig 5.3.13 à 16) ainsi que sa robustesse par rapport au changement de masse, mais aussi la possibilité d'améliorer les performances en donnant des valeurs plus élevées aux gain de retour de position K_p , dans la fig 5.3.13 K_p vaut 550, dans 5.3.14 il vaut 5050.

2. trajectoire test.

La fig 5.3.15 montre que les performances du système restent bonnes même en se donnant une trajectoire aussi rapide, la fig 5.3.16 montre que l'introduction d'une erreur initiale sur le premier axe (éventuellement due à une erreur de lecture du capteur de position), n'influe pas d'une manière notable sur les performances du système, cela est du à la nature décentralisée de la commande.

Les performances de cette dernière approche réside dans le fait qu'elle n'impose guère de condition restrictive sur les termes d'interconnexions. Ainsi on pourra diminuer l'erreur autant que l'on voudra mais le revers de la médaille serait d'aboutir à des commandes trop oscillatoires.

5.4. EXPERIMENTATION:

-présentation du SCARA 3RP:

Il s'agit d'un bras manipulateur de type SCARA 3RP dont le schéma approximatif est donné par la fig 5.4.1 ci-dessous:

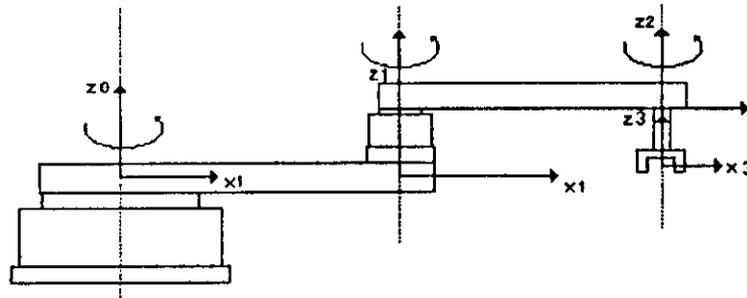


fig 5.4.1

Selon le choix des repères donnés par la figure 5.4.1 nous trouvons:

i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	θ_1	0	a_1	0
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	0	d_3

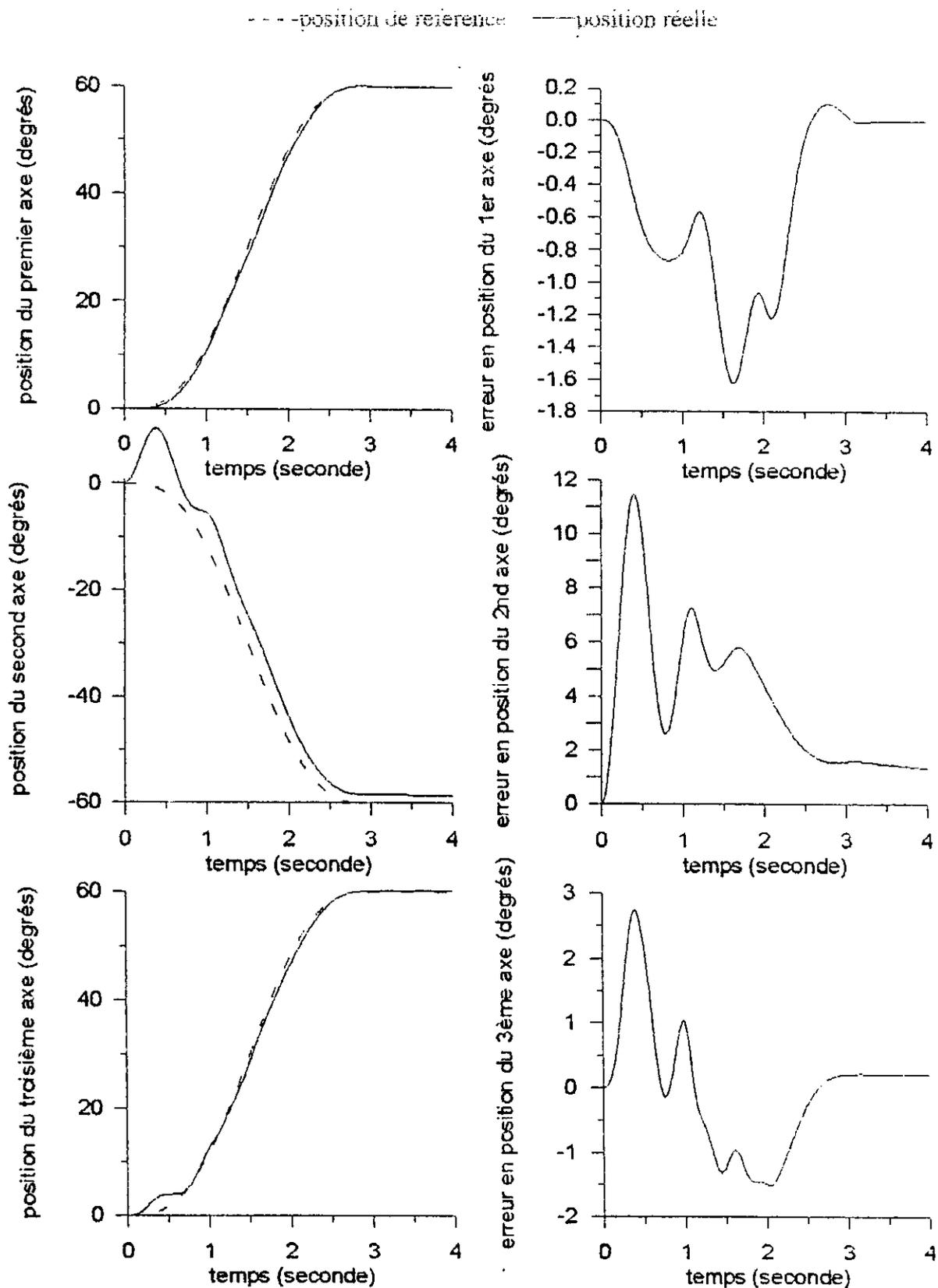


fig 5.3.13.a

Approche de Li Chen Fu

faible valeur de K_v

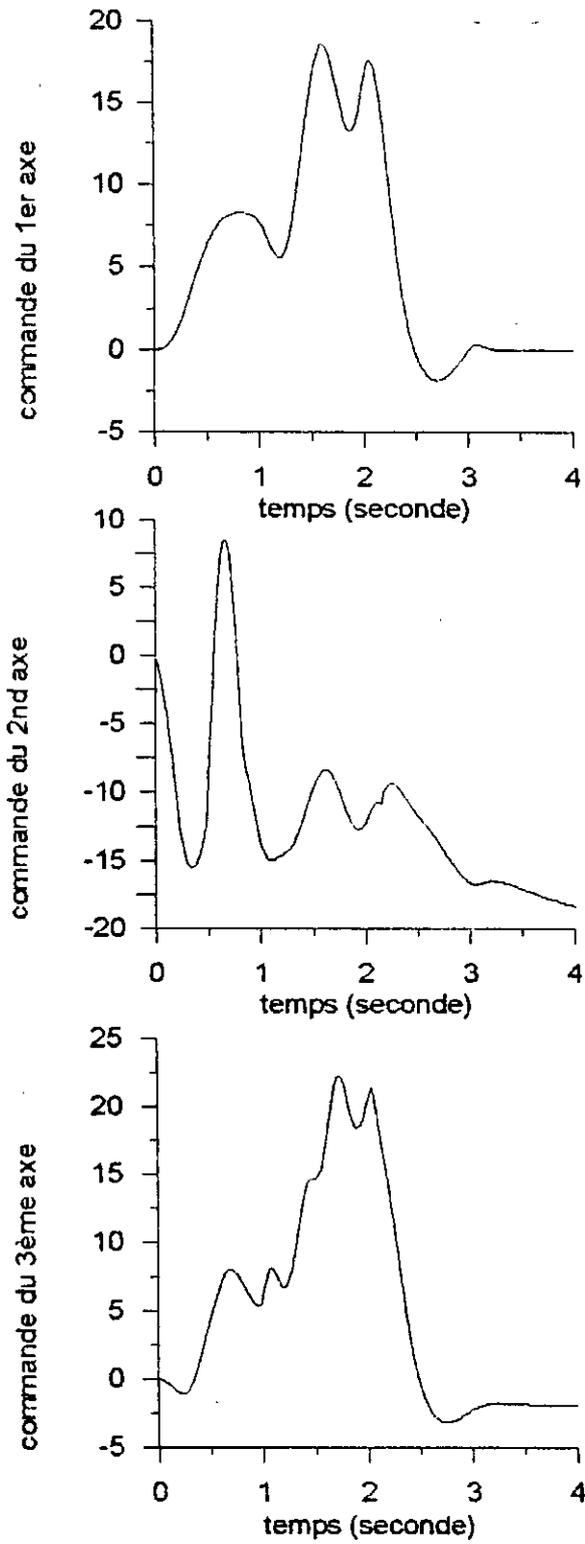


fig 5.3.13.b

Approche de Li Chen Lu
 faible valeur de K_v

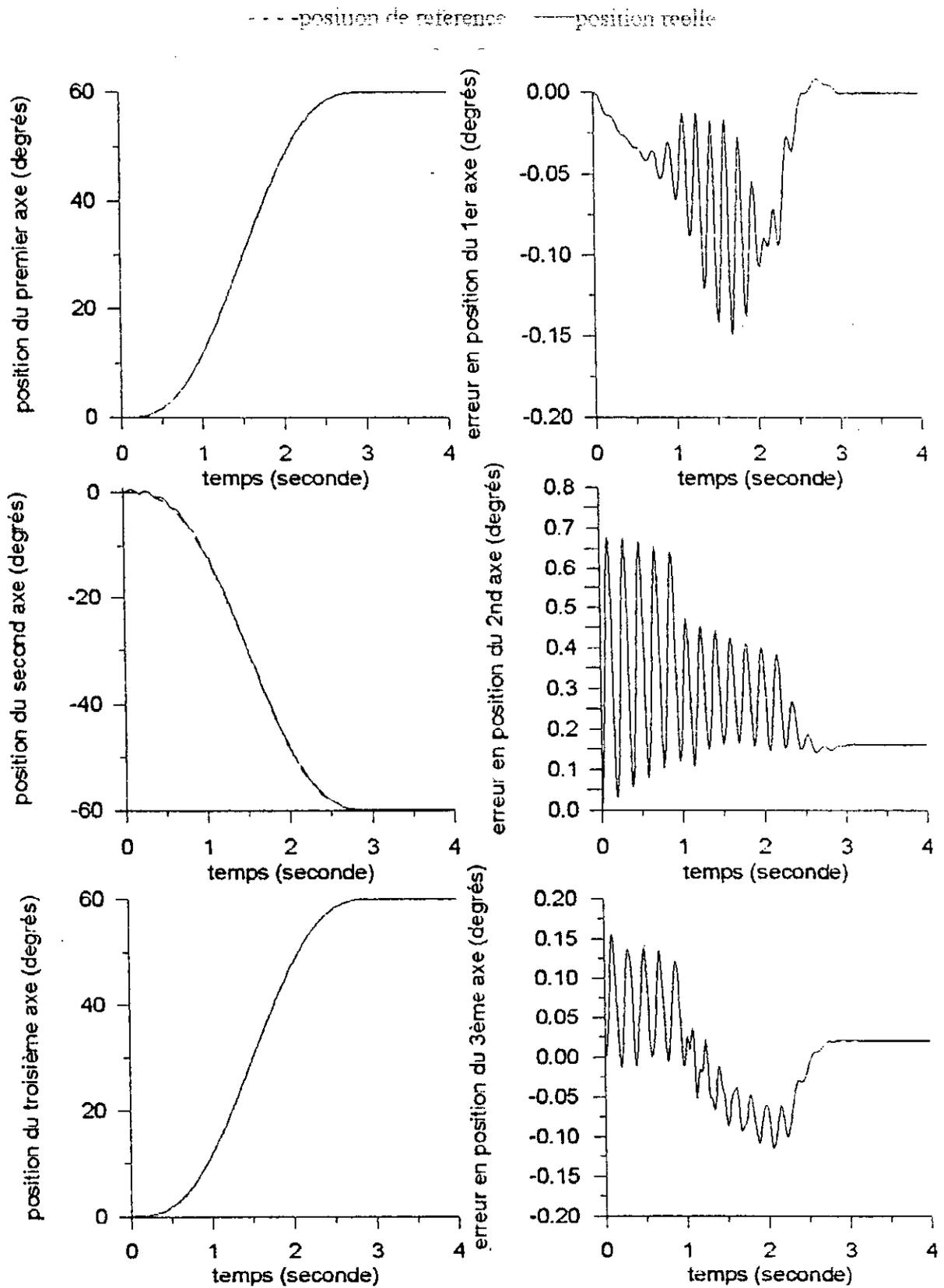


fig 5.3.14.a

Approche de Li Chen Fu
augmentation de la valeur de K_p

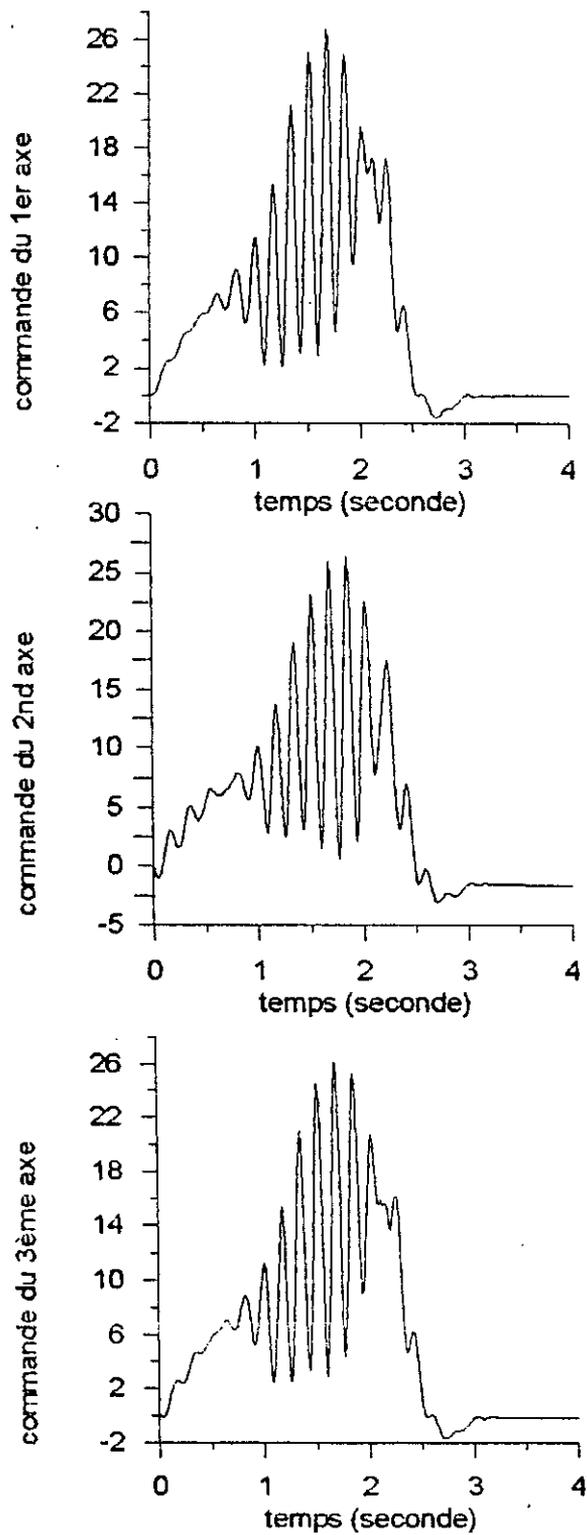


fig 5.3.14.b

Approche de Li Chen Fu
 augmentation de la valeur de K_p

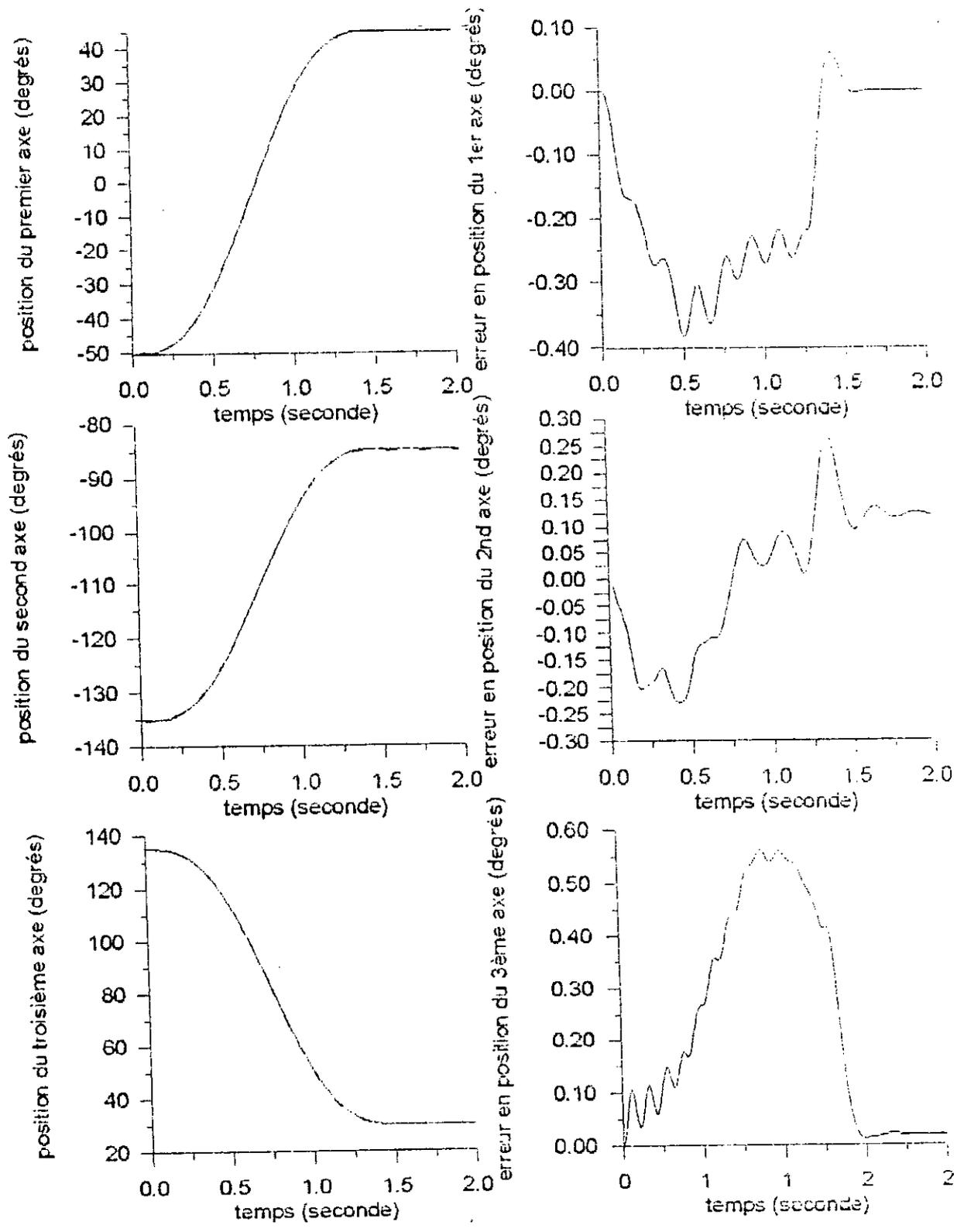


fig 5.3.15.a

--- position de référence ——— position réelle

Approche de Li Chen Fu

trajectoire test

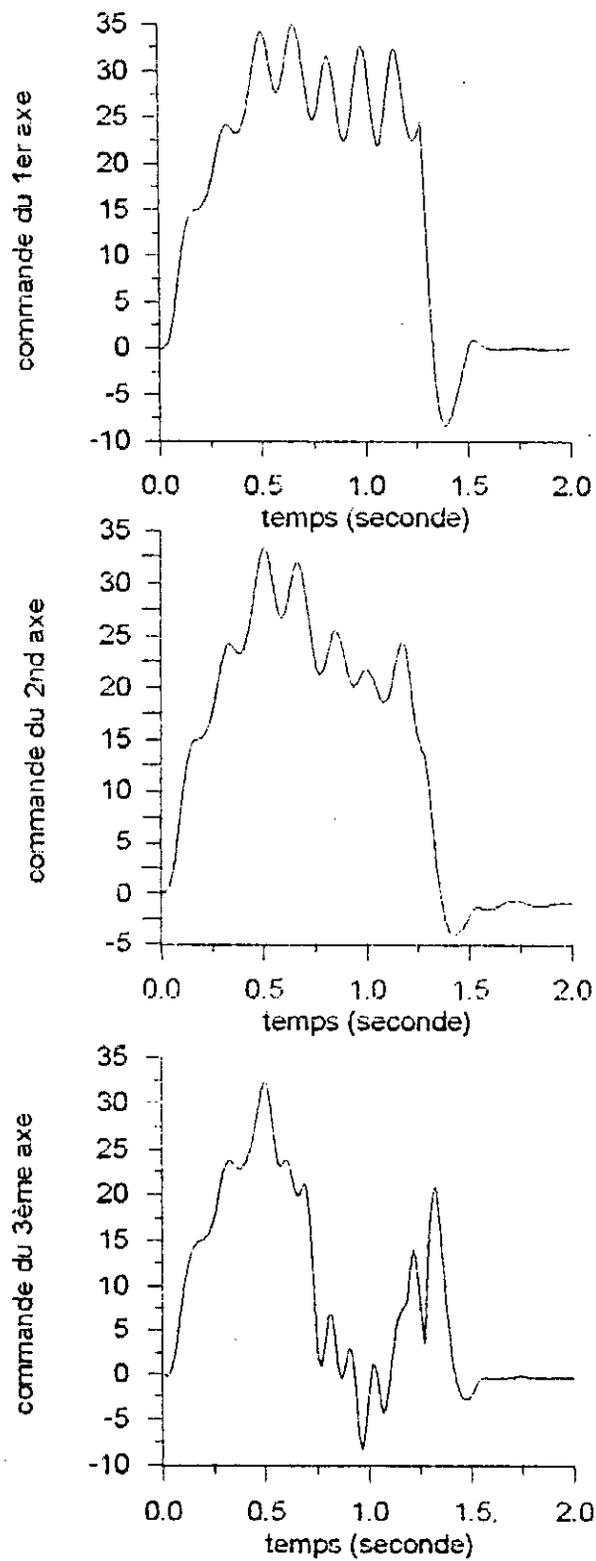


fig 5.3.15.b

Approche de Li Chen Fu

unrectoire test

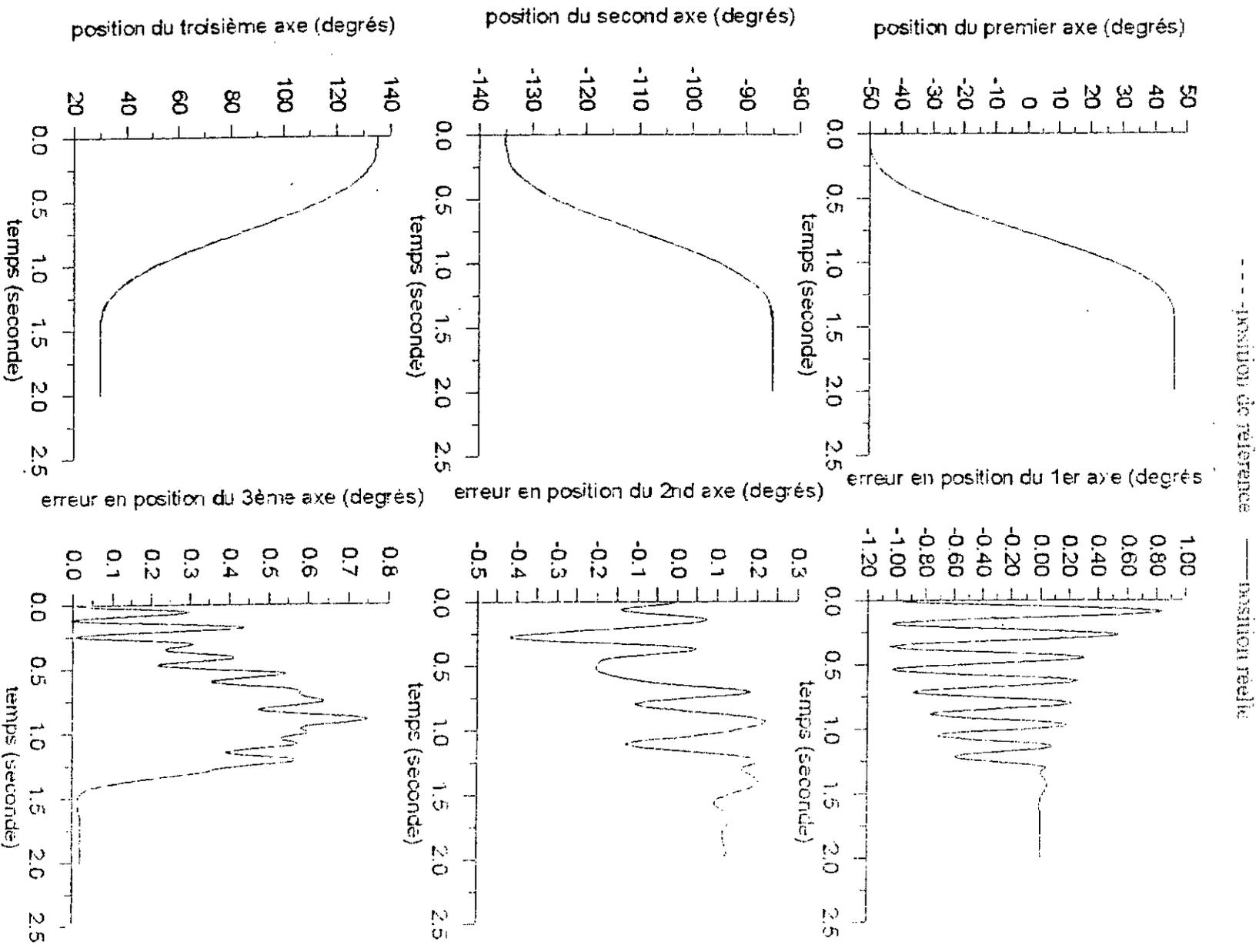


fig 5.3.16.a

Approche de Li Chen Fu

trajectoire test avec erreur de mesure initial

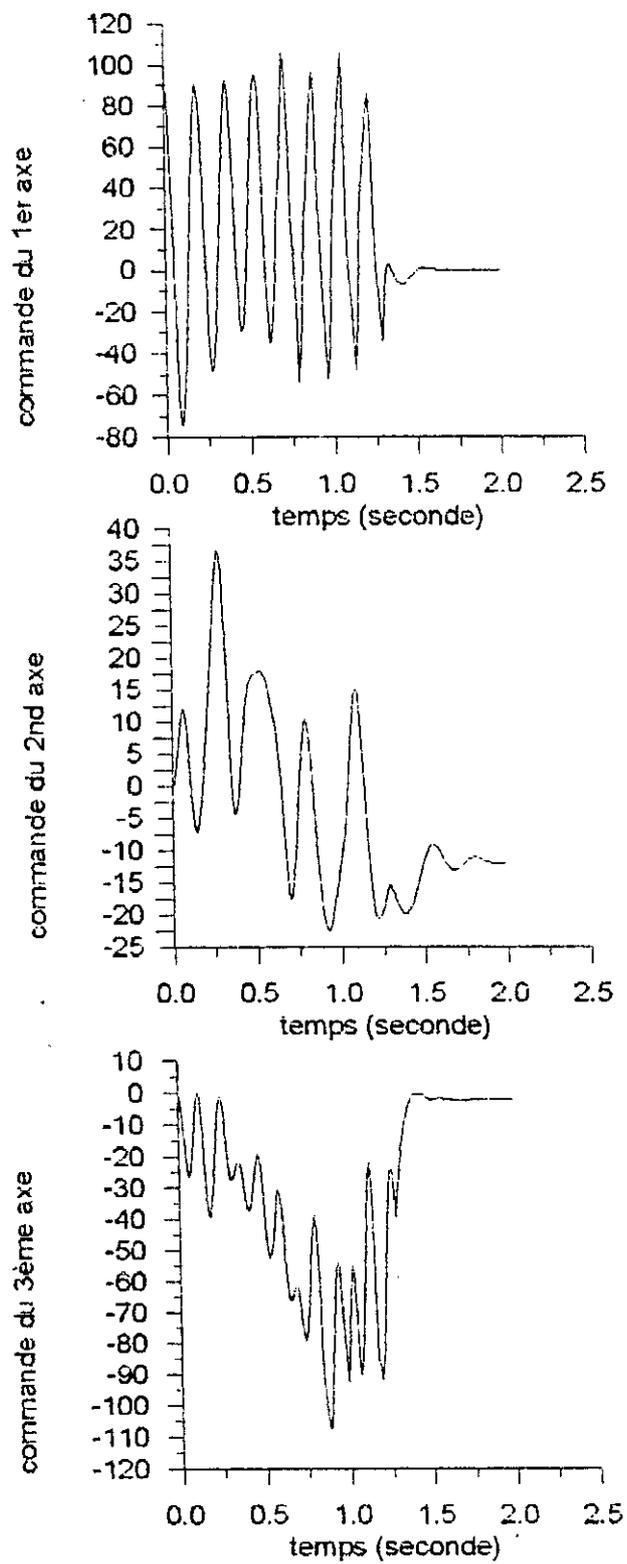


fig 5.3.16.b

Approche de Li Chen Fu

trajectoire test avec erreur de mesure initiale.

Les matrices de transformation homogènes de ce bras manipulateur sont données en annexe B, ainsi qu'une description brève de l'interface, nous ne donnerons ci-après que le modèle dynamique du SCARA 3RP:

$$T(\theta) = D(\theta) d^2\theta / dt^2 + h(d\theta/dt).$$

Avec:

θ : vecteur position angulaire.

$d\theta/dt$: vecteur vitesse angulaire.

$$D(1,1) = 1/3.(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) + (m_2 + m_3) a_1^2 + m_3 a_2^2 + (m_2 a_1 a_2 + 2m_3 a_1 a_2) \cos \theta_2.$$

$$D(1,2) = D(2,1) = 1/3.m_2 a_2^2 + m_3 a_2^2 + 1/2.m_2 a_1 a_2 \cos \theta_2.$$

$$D(1,3) = D(3,1) = D(2,3) = D(3,2) = D(3,3) = 1_{zz}.$$

$$D(2,2) = 1/3.m_2 a_2^2 + m_3 a_2^2.$$

et:

$$h_1 = -m_2 a_1 a_2 \sin \theta_2 d\theta_1/dt.d\theta_2/dt - 1/2.m_2 a_1 a_2 (d\theta_2/dt)^2.$$

$$h_2 = 1/2.m_2 a_1 a_2 \sin \theta_2 (d\theta_1/dt)^2.$$

$$h_3 = 0.$$

-Interprétations des résultats:

Nous avons procédé à l'expérimentation de la méthode de Scraji sur la structure présentée ci-dessus, la commande a été faite sur les deux premiers axes, en utilisant les paramètres suivants:

- trajectoire cycloïde allant de la position $[0^0 -90^0]$ à la position $[90^0 0^0]$.
- $[wp_1 \ wv_1] = [80 \ 80]$, $[wp_2 \ wv_2] = [80 \ 80]$, $\beta_{ij} = 0 \ i=1,2 \ j=0,1$, $[\alpha_{i1} \ \alpha_{i2}] = [100 \ 800] \ i=1,2$.
- $\delta_i = 2 \ i=1,2$, $\rho_i = 2 \ i=1,2$, $k_{0i}(0) = 30$, $k_{1i}(0) = 20$, période d'échantillonnage $T_s = 15ms$.

Comme l'illustre parfaitement la fig 5.4.2. nous avons une mauvaise poursuite de la trajectoire de référence ainsi qu'une mauvaise régulation, cela est à notre avis du à une trop grande erreur de vitesse, ainsi qu'à des défaillances mécaniques de la structure nous donnons ci-dessous et selon nous les raisons de ce comportement:

- Etant donné que nous utilisons comme capteurs de position des potentiomètres rotatifs, nous pouvons nous attendre à l'existence de bruits importants lors de la mesure, ainsi et puisque il n'existe pas de moyen de mesure direct de la vitesse (génératrice

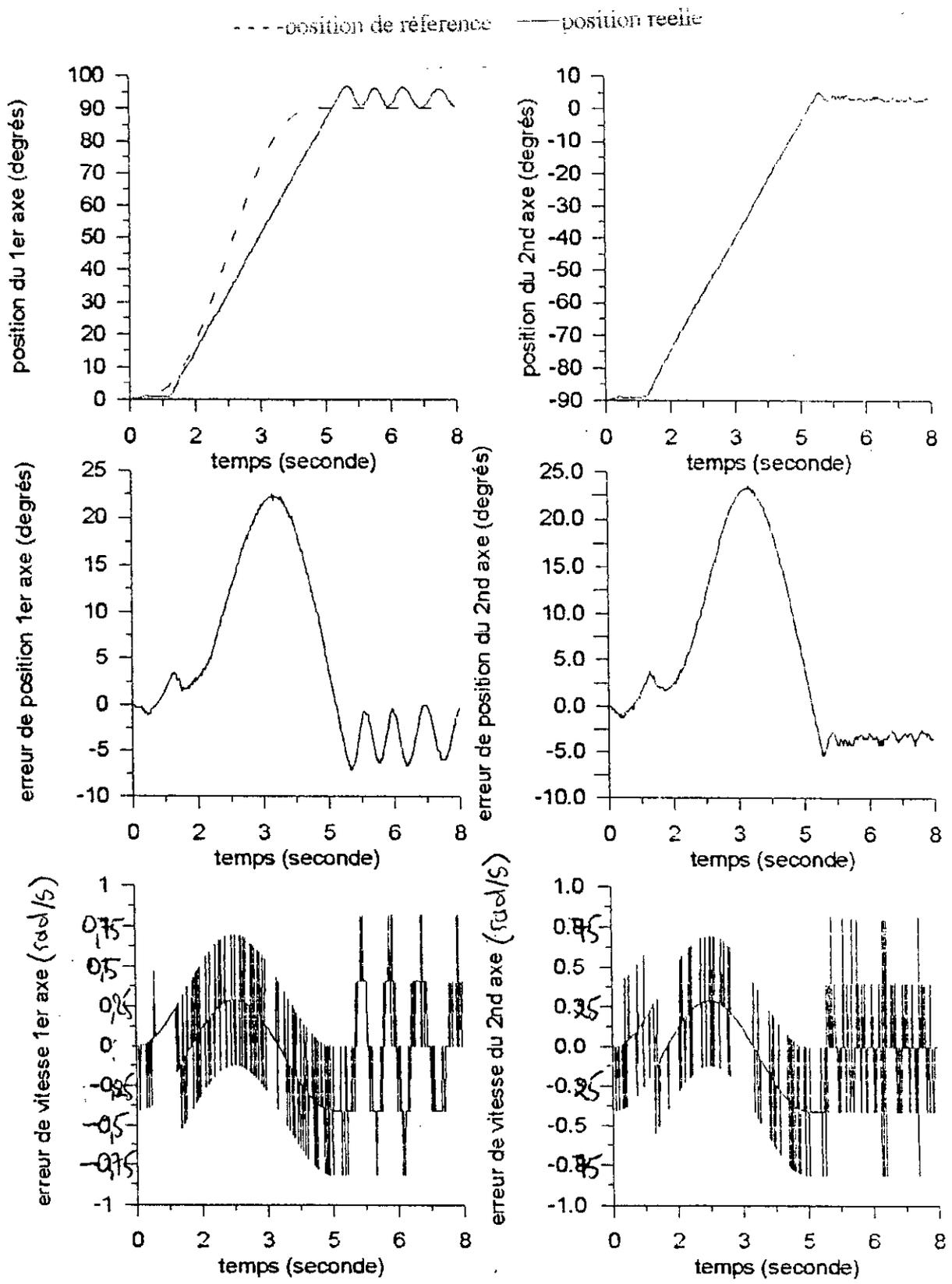


fig 5.4.2

test pratique

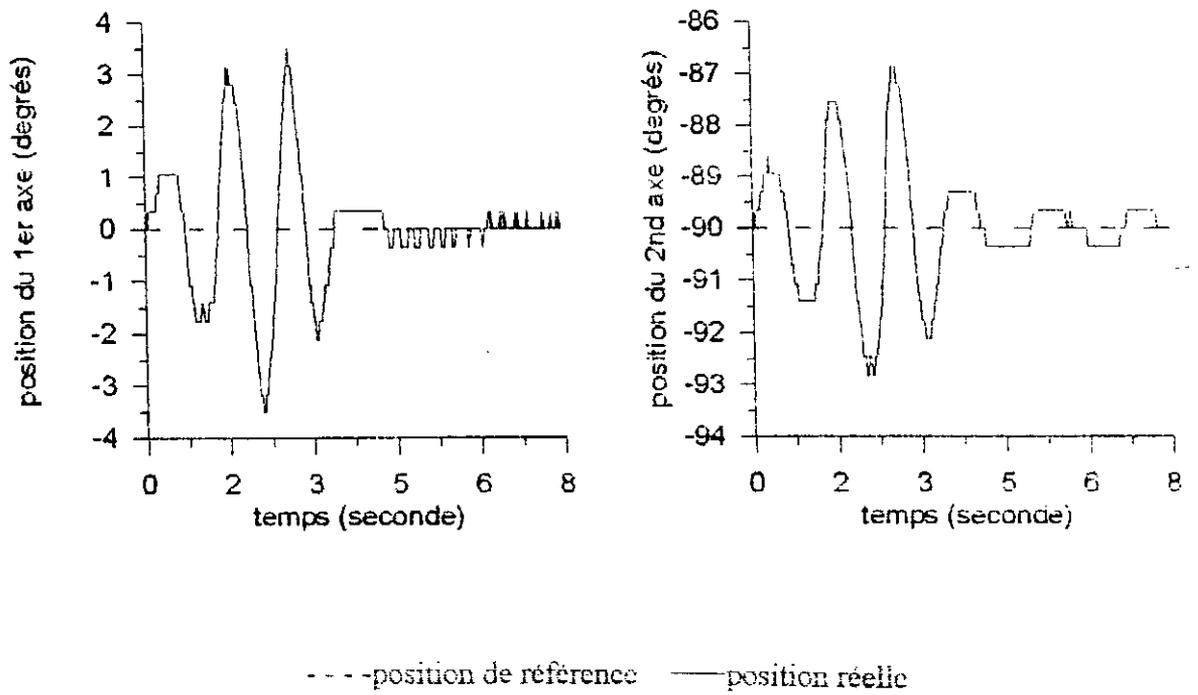


fig 5.4.3

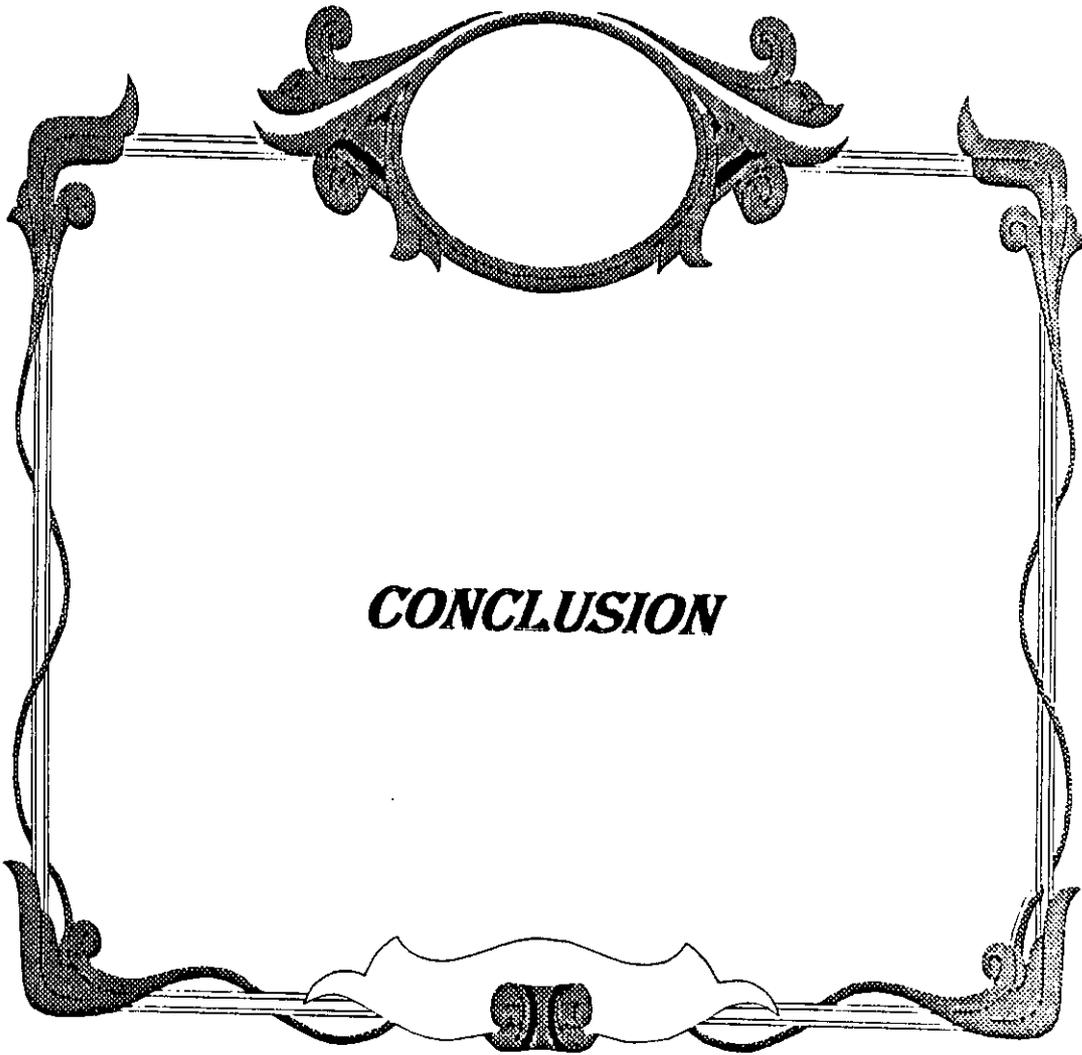
test pratique: rou mecanique

tachymétrique par exemple) nous avons été obligé pour calculer l'erreur en vitesse d'utiliser l'approximation suivante: $\text{erreur vitesse}(N) = (\text{erreur position}(N) - \text{erreur position}(N-1)) / T_s$. Puisque nous utilisons une période d'échantillonnage relativement grande toute l'information utile sera noyée dans le bruit, ainsi l'algorithme de commande aura accès à une erreur en vitesse totalement erronée et ne pourra donc jamais la compenser (voir fig 5.4.2). Un moyen de parer à ce désavantage présenté par le matériel serait de filtrer la mesure ou de suréchantillonner celle-ci, ce qui n'a pas pu se faire faute de temps.

Nous avons remarqué l'existence de jeu sur la structure mécanique et notamment sur le premier axe (voir fig 5.4.3), cela a été vérifié expérimentalement en donnant une tension à peine suffisante à vaincre les frottements statiques, nous remarquons le pic initial de l'erreur relativement important qui ne saurait s'expliquer que par la présence de jeu dans la structure mécanique. Cependant, nous pensons que cela n'est pas la cause la plus importante de ce comportement de la commande, mais bel et bien le fait qu'on ait accès à une information erronée de l'erreur en vitesse.

5.5. CONCLUSION:

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes de commande adaptative décentralisée et appliqué celles-ci sur le PUMA560. Les différentes simulations que nous avons pu faire ont mis en évidence les limites, mais aussi les performances, de chaque méthode. La dégradation des performances de chaque méthode est principalement due à la non validité de certaines hypothèses sur les interconnexions. Cependant, dans le cas de la dernière méthode nous constatons de meilleures performances, car cette méthode n'impose guère de conditions sur les interconnexions. Enfin, nous avons procédé à l'expérimentation de ces méthodes sur le SCARA 3RP disponible au CDTA, nous n'avons pas pu obtenir de résultats satisfaisants, et nous avons présenté les raisons objectives qui nous ont paru être la cause de ces résultats.



CONCLUSION

6. CONCLUSION:

Nous avons été amenés à étudier et tester les performances de nombreuses méthodes pour retenir celles qui s'adaptent le mieux au problème posé. En effet, les méthodes rencontrés dans la littérature sont valable dans des conditions bien définies et pour hypothèses, notamment sur les termes d'interconnexions, bien précises. Il nous a fallu les tester vis-à-vis des variations de masse de la charge, mais aussi la rapidité éventuelle de la trajectoire et l'effet de la période d'échantillonnage.

En ce qui concerne les méthodes que nous avons étudiées, nous avons établis leur robustesse par rapport au changement des paramètres et notamment une variation brusque de la masse de la charge. Mais il faut signaler que ces performances sont assurées à condition d'imposer des contraintes aux interconnexions, ceci limite en fait les domaines d'utilisation de ces méthodes. En effet, nous avons constaté lors de simulations effectuées, que lorsque les trajectoires que doit suivre le bras manipulateur deviennent rapides, les hypothèses faites sur les interconnexions n'étant pas vérifiées, une dégradation significative des performances de la commande. Enfin, il faut noter les bonnes performances de la dernière méthode traitée; cela est du au fait que dans cette méthode on s'est affranchi des contraintes imposées sur les interconnexions.

Malgré le fait que ces méthodes décentralisées présentent l'avantage de commandes dont le temps de calcul est assez petit, d'ou son intérêt pour l'implémentation pratique et notamment sur des architectures parallèles, nous avons rencontré le problème des choix des différents gains d'adaptation et facteurs de pondération optimales, afin d'arriver au niveau de performance escompté, car ce choix est rendu très difficile par la nature hautement non-linéaire du problème.

Ainsi vu l'amélioration des performances qu'introduit le signal auxiliaire, nous proposons pour améliorer les performances, de combiner celui-ci à un P.D. à gains constants et à un feedforward dynamique basé sur le modèle du bras manipulateur au lieu d'un feedforward adaptative. Ce feedforward pourrait être généré par un réseau neuronal dont la structure serait choisie d'une manière décentralisée et qui permettra en fait de compenser certaines dynamiques du bras manipulateur.



***ANNEXES ET
BIBLIOGRAPHIE***

BIBLIOGRAPHIE:

[**J.T. Åstrom and B.Wittenmark 1989**]: Adaptive control -Addison Wesley 1989.

[**Chalam 1987**]: Adaptive control system (technics and applications) -Marcel Dekker 1987.

[**Changyun Wen 1994**]: Decentralized adaptive regulation -IEEE transactions on automatic control vol. 39, October 1994.

[**K.S.Fu, A.C.Gonzalez and C.S.G.Lee 1987**]: Robotics control, Sensing, Vision and intelligence Mac Graw-Hill book company.

[**Donald.T. Gavel and Dragoslav D. Siljak 1989**]: Decentralized adaptive control: Structural condition on stability -IEEE transactions on automatic control.

[**J.C. Gille et P.Decaulne**]: Systèmes Asservis non-linéaires -Dunod 1988.

[**P. Ioannou and P.V. Kokotovic 1984 a**]: Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control -Automatica.

[**P. Ioannou and P.V. Kokotovic 1984 b**]: Robust redesign of adaptive control -IEEE transactions on automatic control.

[**P. Ioannou and P.V. Kokotovic 1985**]: Decentralized adaptive control of interconnected systems with reduced order models -Automatica.

[**D. Janecki 1985**]: On some generalizations of landau's theorem applicable to analysis of adaptive systems -IEEE transactions on automatic control.

[**I.D. Landau 1978**]: The model reference approach -Marcel Dekker 1978.

[**I.D. Landau et Dugard 1985**]: Commande Adaptative: Aspects Pratiques et Théoriques - Masson 1986.

[**M.B. Leahvy Jr 1990**]: Model Based Auxiliary Input Control:Development and Experimental Analysis -Proceedings of the 29th conference on decision and control Honolulu, Hawaii December 1990.

BIBLIOGRAPHIE:

[J.T. Åshtröm and B.Wittenmark 1989]: Adaptive control -Addison Wesley 1989.

[Chalam 1987]: Adaptive control system (technics and applications) -Marcel Dekker 1987.

[Changyun Wen 1994]: Decentralized adaptive regulation -IEEE transactions on automatic control vol. 39, October 1994.

[K.S.Fu, A.C.Gonzalez and C.S.G.Lee 1987]: Robotics control, Sensing, Vision and intelligence Mac Graw-Hill book company.

[Donald.T. Gavel and Dragoslav D. Siljak 1989]: Decentralized adaptive control: Structural condition on stability -IEEE transactions on automatic control.

[P. Ioannou and P.V. Kokotovic 1984 a]: Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control -Automatica.

[P. Ioannou and P.V. Kokotovic 1984 b]: Robust redesign of adaptive control -IEEE transactions on automatic control.

[P. Ioannou and P.V. Kokotovic 1985]: Decentralized adaptive control of interconnected systems with reduced order models -Automatica.

[D. Janecki 1985]: On some generalizations of landau's theorem applicable to analysis of adaptive systems -IEEE transactions on automatic control.

[I.D. Landau 1978]: The model reference approach -Marcel Dekker 1978.

[I.D. Landau et Dugard 1985]: Commande adaptative : aspects pratiques et théoriques .masson 1986

[I.D. Landau 1993]: Identification et commande des systèmes -Hermès, Paris, 1993.

[M.B. Leahvy Jr 1990]: Model Based Auxiliary Input Control: Development and Experimental Analysis -Proceedings of the 29th conference on decision and control Honolulu, Hawaii December 1990.

[G. Leblanc 1993]: Turbo/ Borland C++ -Eyrolles 1993.

[K.Y. Lim and M.Eslami 1985]: Adaptive Controller for Robot Manipulator Systems using Lyapunov Direct Method -IEEE Transactions on Automatic Control 1985.

[Lin Shi and S.K. Singh 1990]: On Lyapunov Function Based Decentralized Adaptive Controllers - Proceedings of the 29th conference on decision and control Honolulu, Hawaii December 1990.

[M. Liu and C.K. Cook 1990]: Robust Adaptive Control for Industrial Robots -A Decentralized system Method.-IEEE 1990.

[R.V. Monopoli 1974]: Model Reference Adaptive Control with an augmented error signal - IEEE Transactions on Automatic Control 1974.

[K.S. Narendra and L.S. Valavani 1978]: Stable adaptive Controller Design Direct Control-IEEE Transactions on Automatic Control 1978.

[K.S. Narendra and A.Annaswamy 1987]: A New Adaptive Law for Robust Adaptation without persistent excitation -IEEE Transactions on Automatic Control 1987.

[C.P. Neuman and V.Tourassis 1985]: Discrete Dynamic Robot Models -IEEE Transactions on Systems and Cybernetics 1985.

[S. Nicosia and P.Tomei 1984]: Model Reference Adaptive Control: Algorithms for Industrial Robot -Automatica 1984.

[K.A. Ossman 1986]: Indirect Adaptive Control of Interconnected systems -IEEE transactions on automatic control 1986.

[H. Seraji 1989]: Decentralized Adaptive Control of Manipulators: Theory, Simulation and Experimentation -IEEE Transactions on Automatic Control 1989.

[J.J.E. Slotine 1988]: Adaptive Manipulator Control: A Case Study -IEEE Transactions on Automatic Control.

[D. Stokic and M. Vukobratovic 1984 a]: Practical stabilization of Robots by Decentralized Control -Automatica 1984.

[D. Stokic and M. Vukobratovic 1984 b]: Suboptimal Synthesis for large-scale mechanical systems -Automatica 1984.

[K. Tarokh 1989]: A Discrete Time Adaptive Control scheme for Robot Manipulators - International Journal of Control.

[K. Ussama, B. Armstrong and J. Burdick 1986]: The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA560 arm -proceedings IEEE 1986.

[J.C. Gille 1988]: Systèmes asservis non-linéaires -Dunod 1988.

Modélisation du PUMA 560 par la méthode directe :

D'après la méthode de D.H, nous avons obtenu :

N° de l'articulation	θ_i	a_i	d_i	α_i
1	θ_1	0	0	-90°
2	θ_2	L_2	d_2	0
3	θ_3	L_3	0	0

On pose : $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $C_{ij} = \cos (\theta_i + \theta_j)$, $S_{ij} = \sin (\theta_i + \theta_j)$

Les matrices de transformation ${}^i A_j$ sont données par les expressions suivantes :

$${}^0 A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^1 A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0 A_1 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^1 A_2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & -S_1 & L_2 C_2 C_1 - d_2 S_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & C_1 & L_2 C_2 S_1 + d_2 C_1 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & -L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$${}^0 A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & -S_1 & C_1(L_2 C_2 + L_3 C_{23}) - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(L_2 C_2 + L_3 C_{23}) + d_2 C_1 \\ -S_{23} & -C_{23} & 0 & -(a_2 S_2 + a_3 S_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices U_{ij} sont données par les expressions suivantes :

$$U_{11} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad U_{12} = U_{13} = 0$$

$$U_{21} = \begin{bmatrix} -C_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & -(L_2 C_2 S_2 + d_2 C_1) \\ C_1 C_{23} & -C_1 S_2 & -S_1 & (L_2 C_2 C_1 + d_2 S_1) \\ 0 & 0 & 0 & -L_2 C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad U_{23} = 0$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} -C_1 S_2 & -C_1 C_2 & 0 & -L_2 C_1 S_2 \\ -S_1 S_2 & -S_1 C_2 & 0 & -L_2 S_2 S_1 \\ -C_2 & S_2 & 0 & -L_2 C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{31} = \begin{bmatrix} -S_1 C_{23} & S_1 S_{23} & C_1 & -(S_1(L_2 C_2 + L_3 C_{23}) + d_2 C_1) \\ C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1(L_2 C_2 + L_3 C_{23}) - d_2 S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{32} = \begin{bmatrix} -C_1 S_{23} & -C_1 C_{23} & 0 & -C_1(L_2 S_2 + L_3 S_{23}) \\ -S_1 S_{23} & -S_1 C_{23} & 0 & -S_1(L_2 S_2 + L_3 S_{23}) \\ -C_{23} & S_{23} & 0 & -(L_2 C_2 + L_3 C_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{33} = \begin{bmatrix} -C_1 S_{23} & -C_1 C_{23} & 0 & -C_1 L_3 S_{23} \\ -S_1 S_{23} & -S_1 C_{23} & 0 & -S_1 L_3 S_{23} \\ -C_{23} & S_{23} & 0 & -L_3 C_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

Les matrices qui nous permettent de calculer les couples de Coriolis s'expriment comme suit :

$$U_{111} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad U_{112} = 0 ; \quad U_{113} = 0$$

$$U_{211} = \begin{bmatrix} -C_1 C_2 & C_1 C_2 & S_1 & -(L_2 C_2 C_1 - d_2 S_1) \\ -S_1 C_2 & S_1 S_2 & -C_1 & -(L_2 C_2 C_1 + d_2 S_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{212} = \begin{bmatrix} S_1 S_2 & S_1 C_2 & 0 & L_2 S_2 S_1 \\ -C_1 S_2 & -C_1 C_2 & 0 & -L_2 C_2 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{222} = \begin{bmatrix} -C_1 C_2 & C_1 S_2 & 0 & -L_2 C_1 C_2 \\ -S_1 C_2 & S_1 S_2 & 0 & -L_2 S_1 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad U_{223} = 0$$

$$U_{311} = \begin{bmatrix} -C_1 C_{23} & C_1 S_{23} & -S_1 & -(C_1(L_2 C_2 + L_3 C_{23}) - d_2 S_1) \\ -S_1 C_{23} & S_1 S_{23} & C_1 & -(S_1(L_2 C_2 + L_3 C_{23}) + d_2 C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{312} = \begin{bmatrix} -S_1 S_{23} & -S_1 C_{23} & 0 & S_1 L_3 S_{23} \\ -S_1 S_{23} & -S_1 C_{23} & 0 & -C_1 L_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{321} = \begin{bmatrix} S_1 S_{23} & S_1 C_{23} & 0 & S_1 (L_2 S_2 + L_3 S_{23}) \\ -C_1 S_{23} & -C_1 C_{23} & 0 & -C_1 (L_2 S_2 + L_3 S_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{322} = \begin{bmatrix} -C_1 C_{23} & C_1 S_{23} & 0 & -C_1 (L_2 C_2 + L_3 C_{23}) \\ -S_1 C_{23} & S_1 S_{23} & 0 & -S_1 (L_2 C_2 + L_3 C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_2 S_2 + L_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{331} = \begin{bmatrix} S_1 S_{23} & S_1 C_{23} & 0 & L_3 S_1 S_{23} \\ -C_1 S_{23} & -C_1 C_{23} & 0 & -L_3 C_1 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{332} = \begin{bmatrix} -C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & 0 & -L_3 C_1 C_{23} \\ -S_1 C_{23} & S_1 S_{23} & 0 & -L_3 S_1 C_{23} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$U_{333} = U_{332} = U_{323}$$

Calcul de la matrice d'inertie :

Les éléments de la matrice d'inertie ont été calculés par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(U_{ij} \quad J_i \quad U_{ij}'^T \right) = & \alpha_i \left(a_{11} \cdot a'_{11} + a_{21} \cdot a'_{21} + a_{31} \cdot a'_{31} \right) \\ & + \beta_i \left(a_{12} \cdot a'_{12} + a_{22} \cdot a'_{22} + a_{32} \cdot a'_{32} \right) \\ & + \gamma_i \left(a_{13} \cdot a'_{13} + a_{23} \cdot a'_{23} \right) \\ & + z_i \left(a_{14} \cdot a'_{13} + a_{24} \cdot a'_{23} + a_{13} \cdot a'_{14} + a_{24} \cdot a'_{24} \right) \\ & + x_i \left(a_{11} \cdot a'_{14} + a_{14} \cdot a'_{11} + a_{24} \cdot a'_{21} + a_{21} \cdot a'_{24} + a_{34} \cdot a'_{31} + a_{31} \cdot a'_{34} \right) \\ & + m_i \left(a_{14} \cdot a'_{14} + a_{24} \cdot a'_{24} + a_{34} \cdot a'_{34} \right) \end{aligned}$$

Avec a_{ij} , a'_{ij} : éléments de la matrice U_{ij} et U_{ij}'

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & 0 & x_i \\ 0 & \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_i & z_i \\ x_i & 0 & z_i & m_i \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2, 3$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned} D_{11}(\theta) = & \alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + m_3 d_2^2 + m_2 d_2 (d_2 + e) + \alpha_2 C_2^2 + \beta_2 S_2^2 + \alpha_3 C_{23}^2 \\ & + m_3 L_2 L_3 C_2 C_{23} + m_3 L_2^2 C_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_{11}(\theta) = & \alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \beta_2 + \gamma_3 + \beta_3 + m_3 d_2^2 + m_2 d_2 (d_2 + e) + (\alpha_2 - \beta_2 + m_3 L_2^2) C_2^2 \\ & + (\alpha_3 - \beta_3) C_{23}^2 + m_3 L_2 L_3 C_2 C_{23} \end{aligned}$$

Elle peut être mise sous la forme :

$$D_{11}(\theta) = I_1^* + I_2^* C_{23}^2 + I_3^* C_2^2 + I_4^* C_2 C_{23}$$

Avec :

$$I_1^* = \alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \beta_2 + \gamma_3 + \beta_3 + m_3 d_2^2 + m_2 d_2 (d_2 + e)$$

I_i^* s'exprime en fonction des moments d'inertie par rapport aux axes (x_i, y_i, z_i) comme suit :

$$I_1^* = I_{yy1} + I_{xx2} + I_{xx3} + m_3 d_2^2 + m_2 d_2 (d_2 + e)$$

$$I_2^* = \alpha_3 - \beta_3 = I_{yy3} - I_{xx3} ;$$

$$I_3^* = \alpha_2 - \beta_2 + m_3 L_2^2 = I_{yy2} - I_{xx2} + m_3 L_2^2$$

$$I_4^* = m_3 L_2 L_3$$

De même :

$$D_{12}(\theta) = \frac{1}{2} m_3 L_3 d_2 S_{23} + \left(\frac{1}{2} m_2 L_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 L_2 \right) S_2$$

$$D_{12}(\theta) = I_5^* S_{23} + I_6^* S_2 \quad ; \quad D_{13}(\theta) = I_5^* S_{23}$$

Avec :

$$I_5^* = \frac{1}{2} m_3 L_3 d_2 \quad ; \quad I_6^* = \frac{1}{2} m_2 L_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 L_2$$

$$D_{22}(\theta) = \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 + m_3 L_2^2 + m_3 L_2 L_3 C_3$$

$$= I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 L_2^2 + m_3 L_2 L_3 C_3$$

$$= I_7^* + I_4^* C_3$$

$$I_7^* = I_{zz2} + I_{zz3} + m_3 L_2^2 ;$$

$$D_{23}(\theta) = I_{zz3} + 0,5 m_3 L_2 L_3 C_3 = I_8^* + 0,5 I_4^* C_3$$

$$D_{33}(\theta) = \alpha_3 + \beta_3 = I_{zz3} = I_8^*$$

Calcul des couples de coriolis :

$$h_{112} = (\beta_2 - \alpha_2) S_2 C_2 + (\beta_3 - \alpha_3) S_{23} C_{23} - \frac{m_3}{2} L_2 L_3 (C_2 S_{23} + S_2 C_{23})$$

$$- m_3 L_2^2 S_2 C_2$$

$$= -I_3^* S_2 C_2 - I_2^* S_{23} C_{23} - 0,5 I_4^* (C_2 S_{23} + S_2 C_{23})$$

$$h_{113} = (\beta_3 - \alpha_3) S_{23} C_{23} - 0,5 m_3 L_2 L_3 C_2 S_{23}$$

$$h_{113} = -I_2^* S_{23} C_{23} - 0,5 I_4^* C_2 S_{23}$$

$$\begin{aligned} h_{122} &= \left(\frac{1}{2} m_2 L_2 (d_2 + e) + m_3 d_2 L_2 \right) C_2 + 0,5 m_3 d_2 a_3 C_{23} \\ &= I_6^* C_2 + I_5^* C_{23} \end{aligned}$$

$$h_{123} = 0,5 m_3 L_3 d_2 C_{23} = 0,5 I_5^* C_{23}$$

$$h_{133} = h_{123}$$

$$h_{211} = I_3^* S_2 C_2 + I_2^* S_{23} C_{23} + 0,5 I_4^* (C_2 S_{23} + S_2 C_{23})$$

$$h_{212} = h_{213} = 0$$

$$h_{233} = h_{232} = 0,5 I_4^* S_3$$

$$h_{311} = I_2^* S_{23} C_{23} + 0,5 I_4^* C_2 S_{23}$$

$$h_{312} = h_{313} = 0 ;$$

$$h_{322} = 0,5 I_4^* S_3$$

Couple de gravitation :

En posant :

$$g = (0 \quad 0 \quad -|g| \quad 0)^T$$

$${}^1r_1 = \left(0 \quad 0 \quad \frac{-L_1}{2} \quad 1 \right)^T ; \quad {}^2r_2 = \left(\frac{L_2}{2} \quad 0 \quad d_2 \quad 1 \right)^T ; \quad {}^3r_3 = \left(\frac{-L_3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right)^T$$

On obtient :

$$G_1 = 0$$

$$G_2 = -m_2 L_2 g C_2 - m_3 g \frac{L_3}{2} C_{23} - m_1 g \frac{L_2}{2} C_2$$

$$G_3 = -m_3 g \frac{L_3}{2} C_{23}$$

Modélisation du PUMA 560 par la méthode de (N.E)

Les matrices ${}^{i-1}R_i$; sont déduites de celle de D.H par transposition et en éliminant la quatrième ligne et colonne.

$${}^1R_0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad {}^2R_1 = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad {}^3R_2 = \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1R_0 \omega_1 = [0 \quad -1 \quad 0]^T \theta_1' ; \quad {}^1R_0 \dot{\omega}_1 = [0 \quad -1 \quad 0] \theta_1'' ;$$

$${}^1R_0 \dot{P}_1^* = 0 ; \quad {}^1R_0 S_1 = \left[\frac{L_1}{2} \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

$$({}^1R_0 \omega_1) \wedge ({}^1R_0 P_1^*) = ({}^1R_0 \omega_1) \wedge ({}^1R_0 P_1^*) = 0$$

$${}^1R_0 \omega_1 \wedge ({}^1R_0 S_1) = \left(0, 0, \frac{L_1}{2} \theta_1'' \right)^T$$

$${}^1R_0 V_0 = [0 \quad -g \quad 0]^T ; \quad {}^1R_0 \omega_1 \wedge ({}^1R_0 \omega_1 \wedge {}^1R_0 S) = \left[\frac{-L_1}{2} \theta_1' \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

$${}^2R_0 \omega_2 = [-i_2 \quad -j_2 \quad \theta_2']^T$$

avec : $i_2 = S_2 \cdot \theta_1'$; $j_2 = C_2 \cdot \theta_1'$;

$${}^2R_0 \omega_2 = \left[-\alpha_2 \quad -\beta_2 \quad \ddot{\theta}_2 \right]^T$$

$$\alpha_2 = S_2 \theta_1'' + C_2 \theta_1' \theta_2'$$

où : $\beta_2 = C_2 \theta_1'' - S_2 \cdot \theta_1' \theta_2'$

$${}^2R_0 P_2^* = (L_2 \quad 0 \quad d_2)^T ; \quad {}^2R_0 S_2 = \left(\frac{-L_2}{2} \quad 0 \quad e \right)^T$$

$${}^2R_0 \omega_2 \wedge {}^2R_0 P_2^* = \left(-\beta_2 \cdot d_2 \quad \alpha_2 d_2 + L_2 \theta_2'' \quad L_2 \beta_2 \right)^T \quad (2.1.a)$$

$${}^2R_0 \omega_2 \wedge {}^2R_0 S_2 = \left(-\beta_2 e \quad \alpha_2 e - \frac{L_2}{2} \theta_2'' \quad \frac{-L_2}{2} \beta_2 \right)^T \quad (2.2.a)$$

$${}^2R_0 \omega_2 \wedge ({}^2R_0 \omega_2 \wedge {}^2R_0 P_2^*) = \begin{pmatrix} -(L_2 C_2^2 \theta_1'^2 + S_2 d_2 \theta_1' \theta_2' + L_2 \theta_2'^2) \\ L_2 S_2 C_2 \theta_1'^2 - d_2 C_2 \theta_1' \theta_2' \\ -(d_2 \theta_1'^2 + 2 L_2 S_2 \theta_1' \theta_2') \end{pmatrix} \quad (2.3.a)$$

$${}^2R_0 \omega_2 \wedge ({}^2R_0 \omega_2 \wedge {}^2R_0 S_2) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{-L_2}{2} C_2^2 \theta_1'^2 + S_2 e \theta_1' \theta_2' - \frac{L_2}{2} \theta_2'^2 \right) \\ \frac{-L_2}{2} S_2 C_2 \theta_1'^2 - e C_2 \theta_1' \theta_2' \\ -(e \theta_1'^2 - L_2 S_2 \theta_1' \theta_2') \end{pmatrix} \quad (2.4.a)$$

$${}^2R_1 ({}^1R_0 V_1) = (-S_2 g \quad -C_2 g \quad 0)^T \quad (2.5.a)$$

$${}^1R_2 V_2' = \begin{pmatrix} -(d_2 C_2 \theta_1'' + L_2 \theta_2'' + L_2 \theta_2'^2 + L_2 C_2^2 \theta_1'^2 + S_2 g) \\ d_2 C_2 \theta_1'' - L_2 S_2 C_2 \theta_1'^2 - C_2 g \\ L_2 C_2 \theta_1'' - d_2 \theta_1'^2 - 2 L_2 S_2 \theta_1' \theta_2' \end{pmatrix} \quad (2.6.a)$$

$${}^3R_2 ({}^2R_0 V_2') = \begin{pmatrix} -(d_2 C_{23} \theta_1'' - S_3 L_2 \theta_2'' + L_2 C_3 \theta_2'^2 + L_2 C_2 C_{23} \theta_1'^2 + S_{23} g) \\ d_2 S_{23} \theta_1'' + C_3 L_2 \theta_2'' + L_3 S_3 \theta_2'^2 + L_2 C_2 S_{23} \theta_1'^2 - C_{23} g \\ L_2 C_2 \theta_1'' - d_2 \theta_1'^2 - 2 L_2 S_2 \theta_1' \theta_2' \end{pmatrix} \quad (2.7.a)$$

$$(2.1.a) + (2.2.a) + (2.3.a) + (2.4.a) + (2.5.a) + (2.6.a) \Rightarrow$$

$${}^2R_0 a_2 = (-x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T$$

Avec :

$$x_2 = (d_2 + e) c_2 \theta_1'' + \frac{L_2}{2} \theta_2'^2 + \frac{L_2}{2} C_2^2 \theta_1'^2 + S_2 g$$

$$y_2 = (d_2 + e) S_2 \theta_1'' + \frac{L_2}{2} \theta_2'' + \frac{L_2}{2} C_2 S_2 \theta_1'^2 - C_2 g$$

$$z_2 = \frac{L_2}{2} c_2 \theta_1'' - (d_2 + e) \theta_1'^2 - L_2 S_2 \theta_1' \theta_2'$$

$${}^3R_0 p_3^* = (L_3 \quad 0 \quad 0)^T \quad ; \quad {}^3R_0 S_3 = \left(\frac{-L_3}{2} \quad 0 \quad 0 \right)^T$$

$${}^3R_0 \omega_3 = (-i_3 \quad -j_3 \quad \theta_2' + \theta_3')^T$$

Avec :

$$i_3 = -S_{23} \cdot \theta_1'$$

$$j_3 = -C_{23} \cdot \theta_1'$$

$${}^3R_0 \omega_3' = (-\alpha_3 \quad -\beta_3 \quad \theta_2'' + \theta_3'')^T$$

Avec :

$$\alpha_3 = S_{23} \theta_1'' + C_{23} \theta_1' (\theta_2' + \theta_3')$$

$$\beta_3 = C_{23} \theta_1'' - S_{23} \theta_1' (\theta_2' + \theta_3')$$

$${}^3R_0 \omega_3 \wedge ({}^3R_0 \omega_3 \wedge {}^3R_0 p_3^*) = \begin{pmatrix} -(L_3 C_{23}^2 \theta_1'^2 + L_3 (\theta_2' + \theta_3')^2) \\ L_3 S_{23} C_{23} \theta_1'^2 \\ -L_3 S_{23} (\theta_2' + \theta_3') \theta_1' \end{pmatrix} \quad (3.1.a)$$

$${}^3R_0 \omega_3 \wedge ({}^3R_0 \omega_3 \wedge {}^3R_0 S_3) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{-L_3}{2} C_{23}^2 \theta_1'^2 - \frac{L_3}{2} (\theta_2' + \theta_3')^2\right) \\ \frac{-L_3}{2} S_{23} C_{23} \theta_1'^2 \\ -\left(-\frac{L_3}{2} (\theta_2' + \theta_3') \theta_1' S_{23}\right) \end{pmatrix} \quad (3.2.a)$$

$${}^3R_0 \omega_3' \wedge ({}^3R_0 P_3^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ L_3 (\theta_2'' + \theta_3'') \\ L_3 (C_{23} \theta_1'' - S_{23} \theta_1' (\theta_2' + \theta_3')) \end{pmatrix} \quad (3.3.a)$$

$${}^3R_0 \omega_3' \wedge ({}^3R_0 S_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-L_3}{2} (\theta_2'' + \theta_3'') \\ \frac{-L_3}{2} (C_{23} \theta_1'' - S_{23} \theta_1' (\theta_2' + \theta_3')) \end{pmatrix} \quad (3.4.a)$$

$$(3.1.a) + (3.2.a) + (3.3.a) + (3.4.a) + (2.7.a) \Rightarrow {}^3R_0 a_3 = [-x_3 \quad y_3 \quad z_3]^T$$

Feed back :

$$i = 3$$

$f_4 = 0$; ${}^4R_0 N_4 = 0$; ceci en négligeant l'effet de masse de l'effecteur et en considérant le Robot non chargé.

$${}^3R_0 N_3 = {}^3R_0 N_3' + {}^3R_0 N_3''$$

Avec :

$${}^3R_0 N_3' = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_3 \\ \beta_3 \\ \theta_2'' + \theta_3'' \end{pmatrix} = \left(-a_3 \alpha_3 \quad -b_3 \beta_3 \quad I_3 (\theta_2'' + \theta_3'') \right)^T \quad (3.1.b)$$

$${}^3R_0 N_3'' = \begin{bmatrix} -C_{23} (\theta_2' + \theta_3') \theta_1' (I_3 - b_3) \\ S_{23} (\theta_2' + \theta_3') \theta_1' (I_3 - a_3) \\ C_{23} S_{23} (b_3 - a_3) \theta_1'^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.b)$$

Avec, a_i , b_i , I_i : moment d'inertie de la liaison i par rapport au centre d'inertie dans la base R_i .

$$\left({}^3R_0 P_3^* + {}^3R_0 S_3 \right) \wedge {}^3R_0 F_3 ;$$

Pour le calcul, on utilise une généralisation tel que :

$$\begin{aligned} & \left({}^iR_0 P_i^* + {}^iR_0 S_i \right) \wedge {}^iR_0 F_i \\ & = \left(-d_i m_i y_i \quad -\left(\frac{L_i}{2} m_i z_i + m_i d_i x_i \right) \quad \frac{L_i}{2} m_i y_i \right)^T \quad (I_i) \end{aligned}$$

$d_i = 0$ pour $i = 1$ et $i = 3$

d_2 : coordonné d_i de D.H

d'où :

$${}^3R_0 n_3 = \begin{bmatrix} a_3 \alpha_3 \\ -\frac{L_3}{2} m_3 z_3 - b_3 \beta_3 \\ \frac{L_3}{2} m_3 y_3 + I_3 (\theta_2'' + \theta_3'') \end{bmatrix} + {}^3R_0 N_3''$$

$$\tau_3 = I_3 \left(\theta_2'' + \theta_3'' \right) + \frac{L_3}{2} m_3 y_3 + S_{23} C_{23} (b_3 - a_3) \theta_1'^2 - I_3 -$$

i=2 :

$${}^2R_0 N_2' = (-a_2 \alpha_2 \quad -b_2 \beta_2 \quad I_2 \theta_2'')^T \quad (2.1.b)$$

$${}^2R_0 f_2 = {}^2R_3 ({}^3R_0 f_3) = [-m_3 (C_3 x_3 + S_3 y_3) \quad m_3 (C_3 y_3 - S_3 x_3) \quad m_3 z_3]^T \quad (2.2.b)$$

$$C_3 x_3 + S_3 y_3 = S_3 \frac{L_3}{2} (\theta_2'' + \theta_3'') + \frac{L_3}{2} C_2 C_{23} \theta_1'^2 + C_3 \frac{L_3}{2} (\theta_2' + \theta_3')^2 + d_2 C_2 \theta_1'' + L_2 \theta_2'^2 + L_2 C_2^2 \theta + S_2 g \quad (2.3.b)$$

$$C_3 y_3 - S_3 x_3 = C_3 \frac{L_3}{2} (\theta_2'' + \theta_3'') + \frac{L_3}{2} S_2 C_{23} \theta_1'^2 - S_3 \frac{L_3}{2} (\theta_2' + \theta_3')^2 + d_2 S_2 \theta_1'' + L_2 \theta_2'^2 + L_2 C_2 S_2 \theta_1'^2 - C_2 g \quad (2.4.b)$$

$${}^2R_0 N_2' = ({}^0R_0 \omega_2) \cdot ({}^2R_0 I_2 {}^0R_2) ({}^0R_2 \omega_2) = \begin{bmatrix} C_2 (I_2 - b_2) \theta_1' \theta_2' \\ S_2 (I_2 - a_2) \theta_1' \theta_2' \\ C_2 S_2 (b_2 - a_2) \theta_1'^2 \end{bmatrix} \quad (2.5.b)$$

$${}^2R_3 ({}^3R_0 n_3) = {}^2R_3 \cdot ({}^3R_0 N_3'') + \begin{bmatrix} -\left(a_3 \alpha_3 C_3 - S_3 b_3 \beta_3 - S_3 \frac{L_3}{2} m_3 z_3 \right) \\ -\left(a_3 \alpha_3 S_3 + C_3 b_3 \beta_3 + C_3 \frac{L_3}{2} m_3 z_3 \right) \\ \frac{L_3}{2} m_3 y_3 + I_3 (\theta_2'' + \theta_3'') \end{bmatrix} \quad (2.6.b)$$

$${}^2R_3 [{}^3R_0 p_2^* \wedge {}^3R_0 f_3] = m_3 \begin{bmatrix} -d_2 (C_3 y_3 - S_3 x_3) \\ -(z_3 L_2 + d_2 (z_3 S_3 + c_3 x_3)) \\ L_2 (C_3 y_3 - S_3 x_3) \end{bmatrix} \quad (2.7.b)$$

d'où τ_2 s'obtient de (2.7.b) + (2.b.b) + (2.5.b) + $I_2 \Rightarrow$

$$\tau_2 = \tau_3 + I_2 \theta_2'' + m_2 \frac{L_2}{2} y_2 + m_3 L_2 (C_3 y_3 - S_3 x_3) + S_2 C_2 (b_2 - a_2) \theta_1'^2 \quad (I_2)$$

Récapitulation :

$${}^2R_0 n_2 = {}^2R_3 [{}^3R_0 n_3 + {}^2R_0 p_2^* \wedge {}^3R_0 f_3] + ({}^2R_0 p_2^* + {}^2R_0 S_2) \wedge {}^2R_0 F_2 + {}^2R_0 N_2$$

$${}^1R_0 n_1 = {}^1R_2 [{}^2R_0 n_2 + ({}^2R_0 p_1^*) \wedge ({}^2R_0 f_2)] + ({}^2R_0 p_1^* + {}^2R_0 S_1) \wedge {}^1R_0 F_1 + {}^1R_0 N_1$$

On a : ${}^1R_0 p_1^* = 0$, d'où :

$${}^2R_0 N_2 = {}^2\dot{R}_0 N_2' + {}^2R_0 N_2''$$

$${}^1R_2 ({}^2R_0 N_2') = \begin{bmatrix} -(C_2 a_2 d_2 - S_2 b_2 \beta_2) \\ -(a_2 S_2^2 + b_2 C_2^2) \theta_2'' - (a_2 - b_2) S_2 C_2 \theta_1' \theta_2' \\ I_2 \theta_2'' \end{bmatrix} \quad (1.1.b)$$

$${}^1R_2 ({}^2R_0 N_2'') = \begin{bmatrix} -(I_2 - C_2^2 b_2 - S_2^2 a_2) \\ -(a_2 - b_2) S_2 C_2 \theta_1^2 \theta_2' \\ (b_2 - a_2) S_2 C_2 \theta_1'^2 \end{bmatrix} \quad (1.2.b)$$

On a aussi :

$${}^3R_0 n_3 = [{}^3R_0 N_3'' + {}^3R_0 N_3' + (I_3)^*]$$

$(I_3)^*$: C'est le contenu de l'équation (I₃)

$${}^1R_2({}^3R_0 N'_3 + I_3) = \begin{bmatrix} -\left(a_3 \alpha_3 C_{23} - S_{23} b_3 \beta_3 - S_{23} \frac{L_3}{2} m_3 z_3\right) \\ -\left((a_3 S_{23}^2 + b_3 C_{23}^2) \theta_1'' + (a_3 - b_3) S_{23} C_{23} \theta_1' (\theta_2' + \theta_3') + m_3 \frac{L_3}{2} C_3 z_3\right) \\ \frac{L_3}{2} m_3 y_3 + I_3 (\theta_2'' + \theta_3'') \end{bmatrix} \quad (1.3.b)$$

$${}^1R_2({}^3R_0 p_2^* \wedge {}^3R_0 f_3) = \begin{bmatrix} -\left(m_3 d_2 (C_{23} y_3 - S_{23} x_3) - m_3 z_3 L_2 S_2\right) \\ -\left(m_3 d_2 (S_{23} y_3 + C_{23} x_3) + m_3 z_3 L_2 C_2\right) \\ m_2 L_2 (C_3 y_3 - S_3 x_3) \end{bmatrix} \quad (1.4.b)$$

$${}^1R_2((I_2)^*) = \begin{bmatrix} -\left((d+e) m_2 (C_2 y_2 - S_2 x_2) - S_2 m_2 \frac{L_2}{2} z_2\right) \\ -\left((d_2+e) m_2 (S_2 y_2 + C_2 x_2) + \frac{m_2 L_2}{2} z_2 C_2\right) \\ m_2 \frac{L_2}{2} y_2 \end{bmatrix} \quad (1.5.b)$$

$${}^1R_2({}^3R_0 N_3'') = \begin{bmatrix} -\left(I_3 - C_{23}^2 b_3 - S_{23}^2 a_3\right) \theta_1' (\theta_2' + \theta_3') \\ (b_3 - a_3) C_{23} S_{23} \theta_1' (\theta_2' + \theta_3') \\ (b_3 - a_3) C_{23} S_{23} \theta_1'^2 \end{bmatrix} \quad (1.6.b)$$

$${}^1R_0 S_1 \wedge {}^1R_0 F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \frac{L_1}{2} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7.b)$$

$$C_{23} x_3 + S_{23} y_3 = \frac{L_2}{2} S_{23} (\theta_2'' + \theta_3'') + \frac{L_3}{2} C_{23} \theta_1'' + C_{23} \frac{L_3}{2} (\theta_2' + \theta_3')^2 + d_2 \theta_1' + S_2 L_2 \theta_2' + L_2 C_2 \theta_2'^2 \quad (1.8.b)$$

$$S_2 y_2 + C_2 x_2 = (d_2 + e) \theta_1'' + S_2 \frac{L_2}{2} \theta_2'' + C_2 \frac{L_2}{2} \theta_2'^2 + \frac{L_2}{2} C_2 \theta_1'^2 \quad (1.9.b)$$

D'où pour le calcul de τ_1 , on s'intéresse à la 2^{ème} ligne seulement.

$$\tau_1 = b_1 \theta_1'' + m_1 \frac{L_1}{2} z_1 - (1.1.b) - (1.2.b) - (1.3.b) - (1.4.b) - (1.5.b) - (1.6.b)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \tau_1 = & b_1 \theta_1'' + m_1 \frac{L_1}{2} z_1 + (a_2 S_{23}^2 + b_3 C_{23}^2) \theta_1' + (a_2 S_2^2 + b_2 C_2^2) \theta_1' + 2(a_3 - b_3) S_{23} C_{23} \theta_1 (\theta_2' + \theta_3') \\ & + 2(a_2 - b_2) S_2 C_2 \theta_1 \theta_2' + m_3 \frac{L_3}{2} z_3 C_{23} + m_2 \frac{L_2}{2} z_2 C_2 + m_2 (d_2 + e) (S_2 y_2 + C_2 y_2) \\ & + m_3 d_2 (C_{23} x_3 + S_{23} y_3) + m_3 z_3 L_2 C_2 \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Des expressions de τ_1 , τ_2 , τ_3 , on a :

$$\begin{aligned} D_{11} = & b_1 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 + m_2 (d_2 + e)^2 + m_3 d_2^2 + \left(b_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 \right) C_{23}^2 + a_3 S_{23}^2 \\ & + a_2 S_2^2 + \left[b_2 + m_2 \left(\frac{L_2}{2} \right)^2 \right] C_2^2 + m_3 L_2^2 C_2^2 + m_3 L_2 L_3 C_2 C_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11} = & b_1 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 + a_2 + m_2 (d_2 + e)^2 + m_3 d_2^2 + a_3 + \left(b_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 - a_3 \right) C_{23}^2 \\ & + \left[b_2 + m_2 \left(\frac{L_2}{2} \right)^2 + m_3 L_2^2 - a_2 \right] C_2^2 + m_3 L_2 L_3 C_2 C_{23} \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de « Huggens » : car les moments d'inertie sont donnés par rapport au centre d'inertie et les liaisons ne tournent pas par rapport à cette axe.

On obtient :

$$I_1^* = I_{yy_1} + I_{xx_2} + m_2 (d_2 + e) d_2 + m_3 d_2^2 + I_{xx_3}$$

$$I_2^* = I_{yy_3} - I_{xx_3}$$

$$I_3^* = I_{yy_2} - I_{xx_2} + m_3 L_2^2$$

$$I_4^* = m_3 L_3 L_2$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \left(I_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 + m_3 \frac{L_2 L_3}{2} C_3 \right) \theta_3'' \\
& + \left(I_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 + I_2 + m_2 \left(\frac{L_2}{2} \right)^2 + m_3 L_2^2 + m_3 L_3 L_2 C_3 \right) \theta_2'' \\
& + \left(\left(m_3 L_2 d_2 + m_2 \frac{L_2}{2} (d_2 + e) \right) S_2 + m_3 L_2 d_2 S_2 \right) \theta_1'' \\
& + \left(b_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 - a_3 \right) S_{23} C_{23} + m_3 \frac{L_2 L_3}{2} (C_2 S_{23} + S_2 C_{23}) \\
& + \left(b_2 - a_2 + m_2 \left(\frac{L_2}{2} \right)^2 C_2 S_2 \right) \theta_1'^2 \\
& - m_3 L_2 L_3 S_3 \theta_2' \theta_3' - m_3 \frac{L_2 L_3}{2} S_3 \theta_3'^2 \\
& - m_3 \frac{L_3}{2} C_{23} g - m_3 L_3 C_2 g - m_2 \frac{L_2}{2} C_2 g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \left[b_1 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 + m_2 (d_2 + e)^2 + m_3 d_2^2 + m_3 L_2 L_3 C_2 C_{23} + \left(b_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 \right) C_{23}^2 + a_3 S_{23}^2 \right. \\
& + a_2 S_2^2 + \left. \left(b_2 + m_2 \left(\frac{L_2}{2} \right)^2 + m_3 L_2^2 \right) C_2^2 + m_3 L_2 L_3 C_2 C_{23} \right] \theta_1'' \\
& + \left(\left(m_2 (d_2 + e) \frac{L_2}{2} + m_3 d_2 L_2 \right) S_2 + m_3 d_2 \frac{L_3}{2} S_{23} \right) \theta_1' \\
& + m_3 d_2 \frac{L_3}{2} S_{23} \theta_3'' \\
& + 2 \left[\left(a_3 - \left(b_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 \right) \right) S_{23} C_{23} + \left(a_2 - b_2 - m_2 \left(\frac{L_2}{2} \right)^2 - m_3 L_2^2 C_2 S_2 \right) \right. \\
& - m_3 \frac{L_2 L_3}{2} (C_2 S_{23} + C_2 C_{23}) \left. \right] \theta_1' \theta_2' \\
& + 2 \left[- \left(a_3 - b_3 - m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 \right) - m_3 L_2 L_3 C_2 S_{23} \right] \theta_1' \theta_3' \\
& + m_3 d_2 L_3 C_{23} \theta_2' \theta_3' + m_3 \frac{L_3}{2} d_2 C_{23} \theta_3'^2 \\
& + \left(\left(\frac{m_2}{2} (d_2 + e) L_2 + m_3 d_2 L_2 \right) C_2 + m_3 \frac{L_3}{2} d_2 C_{23} \right) \theta_2'^2
\end{aligned}$$

$$D_{23} = I_{zz3} + m_3 \frac{L_2 L_3}{2} C_3$$

$$D_{23} = I_8^* + 0,5 I_4^* C_3$$

$$D_{33} = I_{zz3} = I_8^*$$

$$h_{112} = \left[a_3 - b_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 \right] S_{23} C_{23} + \left(a_2 - \left(b_2 + m_2 \left(\frac{L_2}{2} \right)^2 - m_3 L_2^2 \right) C_2 S_2 \right) - m_3 \frac{L_2 L_3}{2} (C_2 S_{23} + C_2 S_{23})$$

$$h_{112} = - (I_{yy_3} - I_{xx_3}) S_{23} C_{23} - (I_{yy_2} - I_{xx_2} + m_3 L_2^2) C_2 S_2 - m_3 \frac{L_2 L_3}{2} (C_2 S_{23} + C_2 S_{23})$$

$$= -I_3^* S_2 C_2 - I_2^* S_{23} C_{23} - 0,5 I_4^* (C_2 S_{23} + S_2 C_{23})$$

$$h_{113} = - \left(a_3 - \left(b_3 + m_3 \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 \right) S_{23} C_{23} - m_3 L_2 L_3 C_2 S_2 \right)$$

$$h_{113} = -I_2^* S_{23} C_{23} - 0,5 I_4^* C_2 S_{23}$$

$$h_{123} = 0,5 m_3 L_3 d_2 C_{23} = 0,5 I_5^* C_{23}$$

$$h_{122} = I_6^* C_2 + I_5^* C_{23}$$

De même pour les autres termes h_{ijk} , on trouve qu'ils coïncident avec ceux de D.H.

Modélisation du SCARA 3 D-L :

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & l_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & l_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot i=1,3.$$

On définit U_{ij} [Fu 1986] de la manière suivante :

$$U_{ij} = \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq i \\ A_{j-1}^0 \cdot Q_j \cdot A_i^{j-1} & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

La matrice Q_j est définie :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On aura par conséquent :

$$U_{11} = \frac{\partial A_1^0}{\partial q_1} = Q_1 \cdot A_1^0$$

d'ou son expression, fonction des "variables angulaires" :

$$U_{11} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & -l_1 \cdot \sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_1 \cdot \cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et d'une manière semblable, nous obtenons :

$$U_{21} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_1 \cdot \sin \theta_1 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{31} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & -l_1 \cdot \sin \theta_1 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{32} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{33} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{111} = \frac{\partial U_{11}}{\partial \theta_1} = Q_1 \cdot Q_1 \cdot A_1^0 = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & -l_1 \cdot \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & -l_1 \cdot \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore U_{112} = U_{113} = 0.$$

$$U_{211} = \frac{\partial U_{21}}{\partial \theta_1} = Q_1 \cdot U_{21} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_1 \cdot \cos\theta_1 - l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_1 \cdot \sin\theta_1 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{212} = \frac{\partial U_{21}}{\partial \theta_1} = Q_1 \cdot A_1^0 \cdot Q_2 \cdot A_2^1 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{221} = \frac{\partial U_{22}}{\partial \theta_1} = Q_1 \cdot U_{22} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{222} = \frac{\partial U_{22}}{\partial \theta_2} = A_1^0 \cdot Q_1 \cdot Q_1 \cdot A_2^1 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons les égalités suivantes :

$$U_{213} = U_{223} = 0.$$

$$U_{221} = U_{222} = U_{212}.$$

D'une manière identique, on trouve :

$$U_{32} = \frac{\partial A_3^0}{\partial q_2} = A_1^0 \cdot Q_2 \cdot A_3^1$$

$$U_{311} = \frac{\partial U_{31}}{\partial q_1} = Q_1 \cdot U_{31} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & -(l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & -(l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{312} = \frac{\partial U_{31}}{\partial q_2} = Q_1 \cdot A_1^0 \cdot Q_2 \cdot A_3^1 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_2 + \theta_3) & 0 & -l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ -\sin(\theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & -l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{313} = \frac{\partial U_{31}}{\partial q_3} = Q_1 \cdot A_2^0 \cdot Q_3 \cdot A_3^2 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{321} = Q_1 \cdot U_{33} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & -l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On montre les égalités suivantes :

$$U_{222} = U_{321} ; U_{323} = U_{311} = U_{313} ; U_{332} = U_{331} ; U_{333} = U_{331} = U_{332}$$

Calcul des pseudo-matrices d'inertie :

On définit les pseudo-matrices d'inertie par la formule générale suivante :

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 \cdot dmi & \int x_i \cdot y_i \cdot dmi & \int z_i \cdot x_i \cdot dmi & \int x_i \cdot dmi \\ \int y_i \cdot x_i \cdot dmi & \int y_i^2 \cdot dmi & \int z_i \cdot y_i \cdot dmi & \int y_i \cdot dmi \\ \int x_i \cdot z_i \cdot dmi & \int y_i \cdot z_i \cdot dmi & \int z_i^2 \cdot dmi & \int z_i \cdot dmi \\ \int x_i \cdot dmi & \int y_i \cdot dmi & \int z_i \cdot dmi & m_i \end{bmatrix} \cdot i = 1, 3.$$

Nous convenons des notations suivantes, en accord avec les notations de la figure A-1-1-1 :

$i = 1, 2$

$$\int x_i^2 \cdot dmi = \frac{m_i \cdot l_i^2}{3} = \alpha_i \cdot \quad \int y_i^2 \cdot dmi = \frac{m_i \cdot l_i^2}{12} = \beta_i \cdot \quad \int z_i \cdot dmi = \frac{m_i \cdot a_i^2}{12}$$

$$\bar{x}_i = \frac{-l_i}{2} \quad \bar{y}_i = \bar{z}_i = 0.$$

D'où la pseudo-matrice d'inertie suivante :

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & 0 & -\frac{m_i \cdot l_i}{2} \\ 0 & \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_i & 0 \\ -\frac{m_i \cdot l_i}{2} & 0 & 0 & m_i \end{bmatrix} \cdot i = 1, 2.$$

$i = 3$

$$\bar{x}_3 = \bar{y}_3 = 0 \quad \bar{z}_3 = \frac{d_3}{2}.$$

ce qui donne pour pseudo-matrice d'inertie :

$$J_3 = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_i & \frac{m_3 \cdot d_3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{m_3 \cdot d_3}{2} & m_i \end{bmatrix}.$$

Calcul de la matrice d'inertie D(θ) :

$$D_{11} = \text{trace} (U_{11} \cdot J_1 \cdot U_{11}') + \text{trace} (U_{21} \cdot J_2 \cdot U_{21}') + \text{trace} (U_{31} \cdot J_3 \cdot U_{31}') \\ (1/3 \cdot m_1 \cdot l_1^2 + \beta_1) + (m_2 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 + \alpha_2 + \beta_2) \\ + (\alpha_3 + \beta_3 + m_3 \cdot (l_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot l_2 \cdot l_1 \cdot \cos \beta_2))$$

$$D_{22} = \text{trace} (U_{22} \cdot J_2 \cdot U_{22}') + \text{trace} (U_{32} \cdot J_3 \cdot U_{32}') \\ (\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_3 + \beta_3 + m_3 \cdot l_2^2).$$

$$D_{12} = D_{21} = \text{trace} (U_{22} \cdot J_2 \cdot U_{21}') + \text{trace} (U_{32} \cdot J_3 \cdot U_{31}') \\ (\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_3 + \beta_3 + m_3 \cdot l_2 \cdot l_1 \cdot \cos \theta_2 + m_3 \cdot l_2^2)$$

$$D_{13} = D_{31} = \alpha_3 + \beta_3$$

$$D_{32} = D_{23} = \text{trace} (U_{33} \cdot J_3 \cdot U_{32}') = \alpha_3 + \beta_3$$

$$D_{33} = \text{trace} (U_{33} \cdot J_3 \cdot U_{33}') = \alpha_3 + \beta_3$$

Calcul des couples centrifuge et de Coriolis:

$$h_{111} = 0$$

$$h_{112} = - (1/2) \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_2$$

$$h_{113} = \text{trace} (U_{313} \cdot J_3 \cdot U_{31}') = 0$$

$$h_{121} = h_{112}$$

$$h_{122} = \text{trace} (U_{222} \cdot J_2 \cdot U_{21}') + \text{trace} (U_{322} \cdot J_3 \cdot U_{31}') = - (1/2) \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_2$$

$$h_{122} = \text{trace} (U_{222} \cdot J_2 \cdot U_{21}') + \text{trace} (U_{322} \cdot J_3 \cdot U_{31}') = - (1/2) \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_2$$

$$h_{123} = \text{trace} (U_{333} \cdot J_3 \cdot U_{31}') = 0$$

$$h_{131} = h_{113}$$

$$h_{132} = h_{123}$$

$$h_{133} = \text{trace} (U_{333} \cdot J_3 \cdot U_{31}')$$

$$h_1 = - (m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_1 + \frac{m_2 \cdot l_2 \cdot l_1}{2} \cdot \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

$$h_2 = \frac{m_2 \cdot l_2 \cdot l_1}{2} \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$h_3 = 0$$

2. DESCRIPTION DE L'INTERFACE DU RP41

Le manipulateur du CDTA (RP41) est doté d'une carte d'acquisition et de restitution de données conçue au niveau du laboratoire robotique du C.D.T.A. Ce manipulateur est équipé de codeurs angulaires potentiométrique ARP82A et d'actionneurs à courant continu.

la carte d'entre/sorties est introduite sur un des slots libres du PC, et est gérée à travers les signaux du bus du PC/AT.

la figure (fig 1) représente le schéma synoptique de la carte d'acquisition et de restitution de données.

Le schéma (fig 1) montre la disposition des sous ensembles constitutifs de la carte interface qui permet la lecture par le micro-ordinateur à travers des ports d'entrée/sorties parallèles, de trois capteurs de position potentiométriques et de quatre capteurs de fin de course.

Cette carte d'acquisition permet aussi l'activation de trois moteurs à courant continu à travers des convertisseurs numériques/analogiques et de deux électrovannes à travers un des port d'entrée/sorties parallèle.

La communication entre la carte et le micro-ordinateur se fait par l'intermédiaire d'un tampon de bus. Toutes les lignes de données, d'adresses et de contrôle sont tamponnées pour garantir une isolation optimale entre le micro-ordinateur et la carte d'extension (d'interface).

Le décodeur d'adresses convertit les signaux véhicules par les lignes d'adresses et de contrôle en signaux destinés aux divers circuits intégrés d'entrées et de sorties et aux tampons de bus dont la carte est dotée.

On trouve sur la carte trois PPI (programmable peripheral interface PPI 8255 d'Intel), trois convertisseurs numérique/analogique de 12 bits, trois circuits de maintien de données appelés « latches » dont deux sont configurés en sorties et un en entrées et des optocoupleurs.

3.PARAMETRES DU PUMA560 (Ussama 1986)

-Paramètres géométriques:

$$d_2 = 149.09 \text{ mm}$$

$$l_2 = 431.09 \text{ mm}$$

$$l_3 = 433.07 \text{ mm}$$

-Masses des différentes liaisons

$$m_2 = 17.40 \text{ kg}$$

$$m_3 = 5.04 \text{ kg}$$

$$m_4 = 0.82 \text{ kg}$$

$$m_5 = 0.35 \text{ kg}$$

$$m_6 = 0.09 \text{ kg}$$

$$\text{d'où : } m_t = m_4 + m_5 + m_6 = 1.26 \text{ kg}$$

-Inerties des différentes liaisons

N° de la liaison	I_{xxi} (kg.m ²)	I_{yyi} (kg.m ²)	I_{zzi} (kg.m ²)	Inertie des moteurs I_{mi} (kg.m ²)
1	—	0.35	—	1.14
2	0.130	0.524	0.539	4.71
3	0.192	0.0154	0.212	0.83
4	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	—
5	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.30 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-3}$	—
6	$0.04 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	—
4 + 5 + 6	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	—

II.2/ DESCRIPTION DE LA CARTE D'INTERFACE:

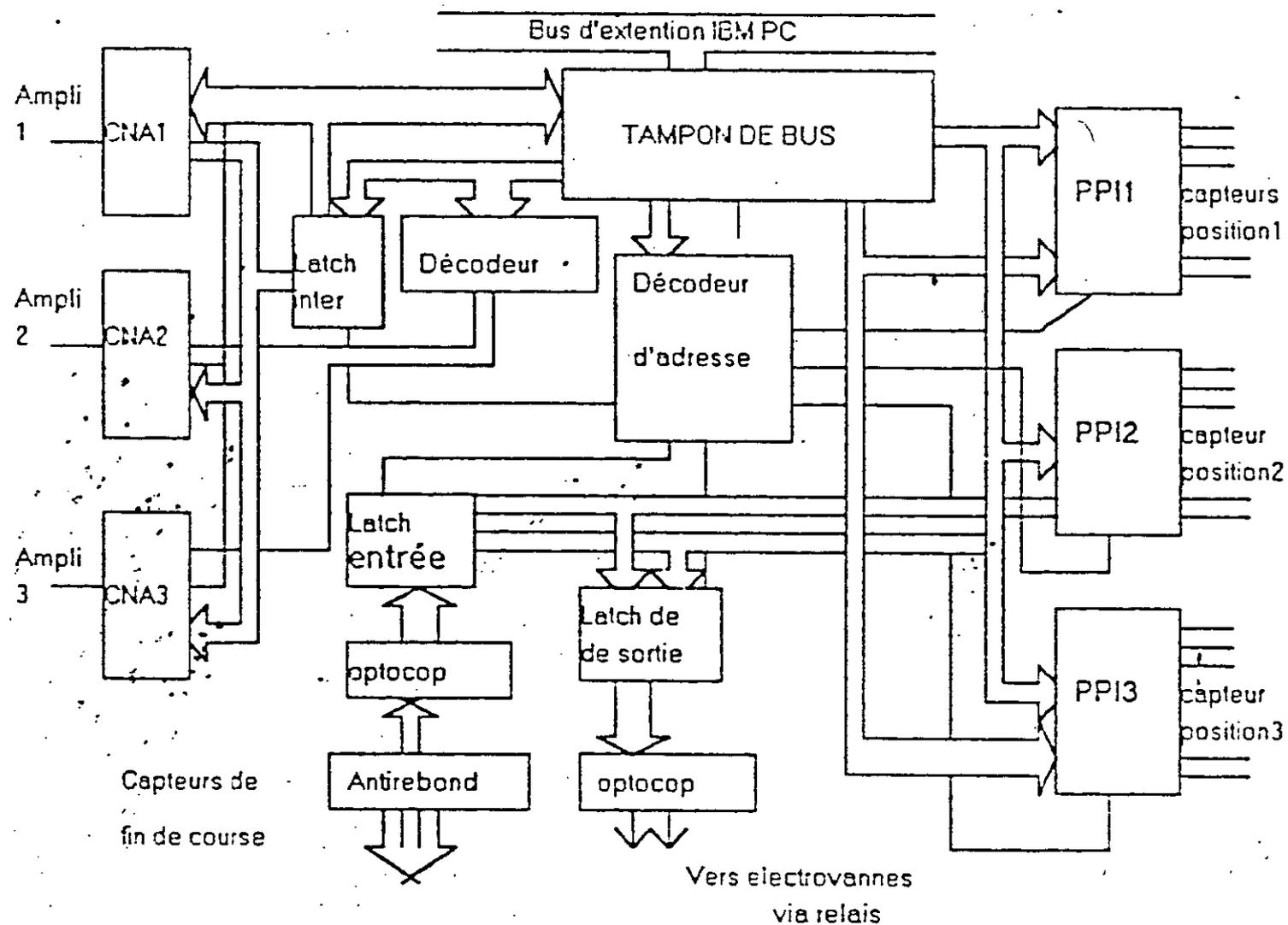


Fig1-Synoptique général de la carte de restitution et d'acquisition

```
/* nous présentons ci-dessous le programme en TURBO C de commande du SCARA*/
```

```
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <alloc.h>
#include <dos.h>
#include <bios.h>
```

```
#define port_A1 0x300
#define port_B1 0x301
#define port_C1 0x302
#define cwr1 0x303
#define port_A2 0x304
#define port_B2 0x305
#define port_C2 0x306
#define cwr2 0x307
#define port_A3 0x308
#define port_B3 0x309
#define port_C3 0x30a
#define cwr3 0x30b
#define cv1L 0x310
#define cv1M 0x311
#define cv2L 0x312
#define cv2M 0x313
#define cv3L 0x30c
#define cv3M 0x30d
#define lats 0x31c
#define late 0x318
#define pi 3.14159
#define ABORT 0
```

```
int ap, bp;
int ip, jp, m, mprime, vp, wp, U1, U2, tetames1, tetames2, i, j, k1, k2, memos
float E1=0, E2=0, E_1=0, E_2=0, Ep1=0, Ep2=0, mesinit1, mesinit2;
float Dt, Dr, T, Tprime, *ptref, *ptreal1, *ptreal2, pulse, omegar;
float R1, R2, Rp1, Rp2, Wp1, Wp2, Wv1, Wv2;
float delta1, delta2, rho1, rho2;
float alpha01, alpha02, alpha11, alpha12;
float *k01, *k11, *k02, *k12;
float *f1, *f2;
float *u1, *u2;
FILE *stream;
```

```
/* Debut du programme principal */
```

```
int c_break();
void init();
void control();
void main()
{
    init();
    getch();
    ctrlbrk(c_break);
    control();
    if((stream=fopen("buffer.dat", "w+b")) != NULL)
        for(j=0; j<m; j++)
        {
            fprintf(stream, "%f %f %f %f %f %f %f\n", ptref[j], ptreall[j], ptrea
        else
            printf("erreur d'ouverture de fichier!");
        fclose(stream);
    }
```

```
/*fin du programme principal*/
```

```

int c_break(void)
{
    /******fonction d'interruption*****/
    outportb (cv1L,0xe0); /* arret du premier moteur */
    outportb (cv1M,0x07);
    outportb (cv2L,0xe0); /* arret du second moteur */
    outportb (cv2M,0x07);
    printf("Control-Break pressed. Program aborting ... \n");
    return (ABORT);
}

```

```

void init()
{
    /****** Initialisation du moteur *****/
    outportb ( cwr1,0xb6 ); /* Initialisation du 1r 8255 */
    outportb ( cwr1,0x0c ); /* Mise 0 du bit 6 port_C1 */
    outportb ( cwr2,0xb6 ); /* Initialisation du 2d 8255 */
    outportb ( cwr2,0x0c ); /* Mise 0 du bit 6 port_C2 */
    outportb ( cwr3,0xb6 ); /* Initialisation du 3m 8255 */
    outportb ( cwr3,0x0c ); /* Mise 0 du bit 6 port_C3 */
    outportb ( cv1L,0xe0 ); /* Arrt moteur 1 epaule */
    outportb ( cv1M,0x07 );
    outportb ( cv2L,0xe0 ); /* Arrt moteur 2 coude */
    outportb ( cv2M,0x07 );
    outportb ( cv3L,0xe0 ); /* Arrt moteur 3 pince */
    outportb ( cv3M,0x07 );
    outportb ( lats,0x00 );
}

```

```

printf("Debut de test\n");
getch();
/*initialisation premier axe*/
outportb(cv1L,0xd0);outportb(cv1M,0x0f);
do
{
    outportb ( cwr1,0x0d ); /* Mise Á 1 du bit 6 port_C1 */
    for ( ip=10; ip>0; --ip); /* Boucle de temporisation */
    outportb ( cwr1,0x0c ); /* Mise Á 0 du bit 6 port_C1 */
    while ((inportb(port_C1) & 0x22) != 0x22 );
        ap = inportb (port_A1);
        bp = inportb (port_B1);
        bp = bp & 0x03;
        tetames1=(ap&0xff) | (bp<<8);
}
while(tetames1>0xa0);
outportb(cv1L,0xd0);outportb(cv1M,0x09);
do
{
    outportb ( cwr1,0x0d ); /* Mise 1 du bit 6 port_C1 */
    for (ip=10; ip>0; --ip);/* Boucle de temporisation */
    outportb ( cwr1,0x0c ); /* Mise 0 du bit 6 port_C1 */
    while ((inportb(port_C1) & 0x22) != 0x22 );
        ap = inportb (port_A1);
        bp = inportb (port_B1);
        bp = bp & 0x03;
        tetames1=(ap&0xff) | (bp<<8);
}
while(tetames1>0x97);
outportb(cv1L,0xe0);outportb(cv1M,0x07);/*arret du moteur*/
mesinit1=tetames1*0.006136; /*calcul de la position initiale*/
/*initialisation du second axe*/
outportb(cv2L,0xd0);outportb(cv2M,0x0f);

```

```

do
{
    outportb ( cwr2,0x0d ); /* Mise Á 2 du bit 6 port_C2 */
    for ( ip=10; ip>0; --ip); /* Boucle de temporisation */
    outportb ( cwr2,0x0c ); /* Mise Á 0 du bit 6 port_C2 */
    while ((inportb(port_C2) & 0x22) != 0x22 );
        ap = inportb (port_A2);
        bp = inportb (port_B2);
        bp = bp & 0x03;
        tetames2=(ap&0xff) | (bp<<8);
}
while(tetames2>0xa0);
outportb(cv2L,0xd0);outportb(cv2M,0x09);
do
{
    outportb ( cwr2,0x0d ); /* Mise 1 du bit 6 port_C2 */
    for (ip=10; ip>0; --ip);/* Boucle de temporisation */
    outportb ( cwr2,0x0c ); /* Mise 0 du bit 6 port_C2 */
    while ((inportb(port_C2) & 0x22) != 0x22 );
        ap = inportb (port_A2);
        bp = inportb (port_B2);
        bp = bp & 0x03;
        tetames2=(ap&0xff) | (bp<<8);
}
while(tetames2>0x97);
outportb(cv2L,0xe0);outportb(cv2M,0x07);/*arret du moteur*/
mesinit2=tetames2*0.006136;
}

void control() /****** Control *****/
{
    printf("periode d'echantillonnage en milli-seconde:");scanf("%f",&T);
    printf("duree de la poursuite:");scanf("%f",&Dt);
    printf("dure de la rgulation:");scanf("%f",&Dr);
    printf("deplacement angulaire relatif:");scanf("%f",&omegar);
    m=(1000*Dt)/T; mprime=(1000*Dr)/T; memosize=sizeof(float)*(2*m+mprime);
    printf("le nombre d'iterations est:%d", (2*m+mprime));
    printf("memoire disponible:%ld octets\n", (unsigned long) coreleft());
    if((ptref=(float *)malloc(memosize)) == NULL)
        printf("erreur d'allocation\n");
    else
    {
        omegar=omegar/360;pulse=(2*pi)/Dt;
        for(i=0;i<m;i++)
            ptref[i]=omegar*((pulse*T*i)/1000)-sin((pulse*T*i)/1000);
            printf("%f\n",ptref[i]);
        for(i=m;i<m+mprime;i++)
            ptref[i]=ptref[m-1];
            printf("%f\n",ptref[i]);
        j=mprime+1;
        for(i=(m+mprime);i<2*m+mprime;i++)
            {
                ptref[i]=ptref[i-j];j=j+2;
                printf("%f",ptref[i]);
            }
    }
    if((ptreal1=(float *)malloc(memosize))==NULL)
        printf("erreur d'allocation\n");
    if((ptreal2=(float *)malloc(memosize))==NULL)
        printf("erreur d'allocation");
    if((k01=(float *)malloc(memosize))==NULL)
        printf("erreur d'allocation");
    if((k11=(float *)malloc(memosize))==NULL)

```

```

printf("erreur d'allocation");
if((k02=(float *)malloc(memosize))==NULL)
printf("erreur d'allocation");
if((k12=(float *)malloc(memosize))==NULL)
printf("erreur d'allocation");
if((f1=(float *)malloc(m))==NULL)
printf("erreur d'allocation");
if((f2=(float *)malloc(m))==NULL)
printf("erreur d'allocation");
if((u1=(float *)malloc(m))==NULL)
printf("erreur d'allocation");
if((u2=(float *)malloc(m))==NULL)
printf("erreur d'allocation");
else

```

```

/*introduction des gains d'adaptation.*/
printf("les gains d'adaptation:\n");
printf("facteur de pondration de l'erreur en position");
printf("facteur de pondration de l'erreur en position");
printf("facteur de pondration de l'erreur en vitesse E");
printf("facteur de pondration de l'erreur en vitesse E");
printf("action intgrale du signal auxiliaire f1:"); sc
printf("action proportionnelle du signal auxi f1:"); sca
delta1=(rho1+(delta1*T)/2);rho1=delta1-(2*rho1);
printf("action integrale du signal auxiliaire f2:"); sc
printf("action proportionnelle du signal auxi f2:"); sca
delta2=(rho2+(delta2*T)/2);rho2=delta2-(2*rho2);
printf("valeur initiale de k01:");scanf("%f",&k01[0]);
printf("gain d'adaptation de k01:");scanf("%f",&alpha0);
printf("valeur initiale de k11:");scanf("%f",&k11[0]);
printf("gain d'adaptation de k11:");scanf("%f",&alpha1);
printf("valeur initiale de k02:");scanf("%f",&k02[0]);
printf("gain d'adaptation de k02:");scanf("%f",&alpha0);
printf("valeur initiale de k12:");scanf("%f",&k12[0]);
printf("gain d'adaptation de k12:");scanf("%f",&alpha1);
/*valeur initiale de la commande*/
printf("f1 initial:");scanf("%x",&f1[0]);f1[0]=2047-f1;
printf("f2 initial:");scanf("%x",&f2[0]);f2[0]=2047-f2;
Tprime=T-5; 2*m+m*prime
for (jp=1;jp<m;jp++)
{
delay(Tprime);
/*lecture de la position angulaire tetal*/
outportb (cwr1,0x0d); /* Mise 1 du bit 6 port_C1
for (ip=10;ip>0;--ip); /* Boucle de temporisation
outportb (cwr1,0x0c); /* Mise 0 du bit 6 port_C1
while ((inportb(port_C1) & 0x22) != 0x22 );
ap = inportb (port_A1);
bp = inportb (port_B1);
bp = bp&0x03;
tetames1=(ap&0xff) | (bp<<8);
/*lecture de la position angulaire teta2*/
outportb ( cwr2,0x0d ); /* Mise 1 du bit 6 port_C
for ( ip=10;ip>0;--ip); /* Boucle de temporisation
outportb ( cwr2,0x0c ); /* Mise 0 du bit 6 port_C
while ((inportb(port_C2) & 0x22) != 0x22 );
ap = inportb (port_A2);
bp = inportb (port_B2);
bp = bp&0x03;
tetames2=(ap&0xff) | (bp<<8);
if (tetames1<0x270)
{
ptreal1[jp]=tetames1*0.006136-mesinit1;
ptreal2[jp]=tetames2*0.006136-mesinit2;
}
}

```

```

E1=ptref[jp]-ptreal1[jp];
E2=ptref[jp]-ptreal2[jp];
/*calcul de l'erreur en vitesse*/
E_1=(E1-Ep1)/T;
E_2=(E2-Ep2)/T;
/*calcul de la commande*/
/*calcul de l'erreur pondre.*/
R1=Wp1*E1+Wv1*E_1;
R2=Wp2*E2+Wv2*E_2;
/*adaptation du signal auxiliaire*/
f1[jp]=f1[jp-1]+(delta1*R1)+(rho1*Rp1);
f2[jp]=f2[jp-1]+(delta2*R2)+(rho2*Rp2);
k01[jp]=k01[jp-1]+alpha01*(R1*E1+Rp1*Ep1);
k02[jp]=k02[jp-1]+alpha02*(R2*E2+Rp2*Ep2);
k11[jp]=k11[jp-1]+alpha11*(R1*E1+Rp1*Ep1);
k12[jp]=k12[jp-1]+alpha12*(R2*E2+Rp2*Ep2);
u1[jp]=f1[jp]+k01[jp]*E1+k11[jp]*E_1;
u2[jp]=f2[jp]+k02[jp]*E2+k12[jp]*E_2;
if (u1[jp]<-2047 )
    {u1[jp]= -2047 ;}
else
    if (u1[jp]>2047)
        {u1[jp]= 2047;}
if (u2[jp]<-2047 )
    {u2[jp]= -2047 ;}
else
    if (u2[jp]>2047)
        {u2[jp]= 2047;}
/*generation de lacommande pour teta1*/
U1=2047-u1[jp];
vp= U1&0xff;
wp= U1>>8 ;
wp= wp&0xff;
outportb(cv1L, vp);
outportb(cv1M, wp);
/*generation de la commande pour teta2*/
U2=2047-u2[jp];
vp= U2&0xff;
wp= U2>>8 ;
wp= wp&0xff;
outportb(cv2L, vp);
outportb(cv2M, wp);
Ep1=E1 ;Rp1=R1; Ep2=E2; Rp2=R2;
}
else
{
    outportb (cv1L, 0xe0); /* arret du moteur 1 */
    outportb (cv1M, 0x07);
    outportb (cv2L, 0xe0); /* arret du moteur 2 */
    outportb (cv2M, 0x07);
}
}
}
outportb ( cv1L, 0xe0 ); /* arret du moteur 1 */
outportb ( cv1M, 0x07 );
outportb ( cv2L, 0xe0 ); /* arret du moteur 2 */
outportb ( cv2M, 0x07 );

```