

50/82

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE ET D'ELECTROTECHNIQUE

1er

FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE.



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET : SIMULATION
D'UN FILTRE DE KALMAN.

PROPOSE PAR : Mr PEDIKITY
Chargé de cours à la post-graduation (ENPA)

REALISE PAR : A. TERCHI et K. JOGHMANE

JUIN 1982

708

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE POUR L'OBTENTION DU
GRADE D'INGENIEUR D'ETAT EN ELECTRONIQUE

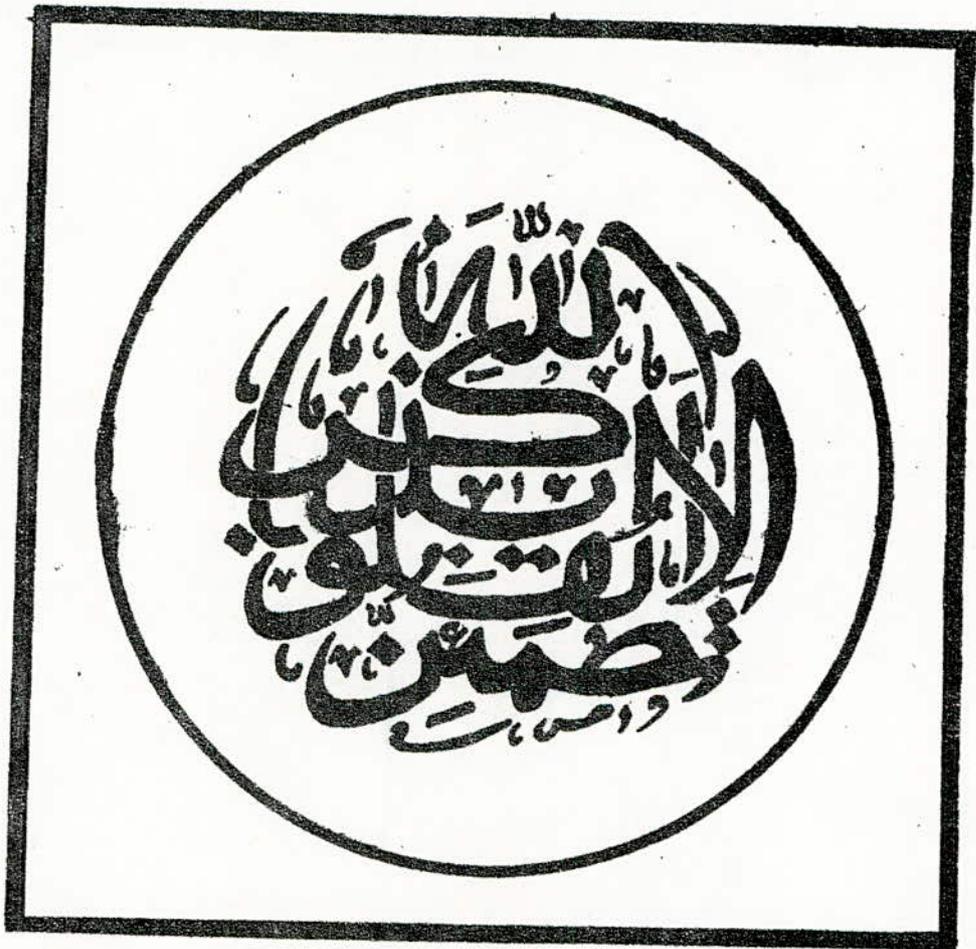
Sujet: SIMULATION D'UN FILTRE DE KALMAN

Proposé par: Mr PEDIKITY
Chargé de cours à la post-graduation ENPA

Etudié par: aA.TERCHI et K. DOGHMANE

PROMOTION JUIN 1982

Handwritten Arabic calligraphy in a highly stylized, cursive script. The text is arranged in a vertical column, reading from right to left. The main text consists of several large, bold characters, likely forming the words "الله أكبر" (Allahu Akbar). The calligraphy is surrounded by numerous smaller, decorative elements, including loops, flourishes, and small characters, which are characteristic of intricate Islamic calligraphic art. The style is reminiscent of the Maghrebi or Andalusí script, known for its fluidity and decorative complexity.



/// EDICACES.



Nous dédions ce modeste travail à :

- Toute personne qui témoigne qu'il n'y a point de dieu qu'Allah et que Mohammed est le messager de Allah.
- Anos parents qui ont beaucoup consenti pour nous.
- Anos trois grandes familles de:
 - * La mosquée des étudiants de l'ENPA.
 - * La mosquée des étudiants de l'INELEC.
 - * La mosquée de la ville de SI-MUSTAPHA.

Abdelaziz T

Khénis D

REMERCIEMENTS.

Nous saisissons cette occasion pour remercier vivement notre promoteur Mr PEDIKI TY qui a eu sollicitation de suivre ce travail et qui nous guidé par ses conseils tout le long du semestre ; qu'il veuille trouver ici tous nos sentiments de gratitude et de reconnaissance.

Nos remerciements s'adressent aussi à:

- A tous les professeurs ayant contribué à notre formation.
- A toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'elaboration de cette thèse.

et plus particulièrement à:

- Mr Noureddine S pour son aide en programmation.
- Mrs Gacem D, Ali K, Abdelkader A pour leur aide en documentation
- Mrs Mohamed D, Abdelkader B, Othar H, Yacine A pour leur gentillesse de s'être occupé de la frappe de cette thèse.

Enfin nous remercions le personnel du CNTI pour nous avoir facilité le passage du programme ; ainsi que tous les amis et collègues pour leur aide matérielle et leur soutien moral.

TABLE DES MATIERES./

RESUME

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE: APERÇU THEORIQUE

<u>CHAPITRE I/</u>	GENERALITES	1
1.1-	Influence des bruits sur les systèmes physiques et sur les mesures	1
1.2-	Le filtrage numérique	1
1.3-	Différents types de filtres	2
1.3.1-	Filtres linéaires, filtres non linéaires	2
1.3.2-	Filtres en temps réel, filtres en temps différé	2
1.3.3-	Filtres déterministes, filtres statistiques	2
<u>CHAPITRE II/</u>	SYSTEMES LINEAIRES	3
2.1-	Représentation d'état	3
2.2-	Discretisation d'un système	4
2.2.1-	Cas des systèmes stationnaires ou invariants	4
2.3.6	Calcul numérique de l'exponentielle d'une matrice	5
2.4-	Méthodes d'intégration numérique	5
2.4.1-	Méthode d'Euler	6
2.4.2-	Méthode de Runge-Kutta	6
<u>CHAPITRE III/</u>	LE FILTRAGE DE KALMAN DISCRET	7
3.1-	Présentation de la Méthode de Kalman	7
3.2-	Conditions d'application du filtre de Kalman discret	7
3.3.1-	Modèle mathématique adopté	7
3.3.2-	Discretisation du modèle mathématique	8
- a)	Discretisation de l'équation de transition	8
- b)	Discretisation de l'équation de mesure	9
3.3.3-	Entrées-sorties du filtre de Kalman discret	9
3.4-	Description et interprétation du filtre de Kalman discret	11
3.4.1-	Estimation d'un signal mixte	11
3.4.2-	Interprétation de la méthode d'estimation	11
3.5-	Formules du filtrage	13
a) 6	Passage de $P(k-1/k-1)$ à $P(k/k-1)$	15
b)	Passage de $P(k/k-1)$ à $P(k/k)$	15

c)- Détermination de $K(k)$	15
d)- Démarrage des calculs	16
<u>CHAPITRE IV</u> EXTENSIONS DE LA METHODE DE KALMAN	17
4.1- Systèmes continus	17
4.2- Systèmes continus à observations discrètes	18
4.3- Systèmes à bruits corrélés	19
4.4- Systèmes à bruits colorés	21
4.4.1- Bruits colorés de commande	21
4.4.2- Bruits de mesure colorés	24
4.5- Systèmes non linéaires	24
4.6- Estimation de paramètres inconnus	28
<u>DEUXIEME PARTIE: PROGRAMMATION.</u>	
Structure du programme	29
Organigrammes	32
Listings	50
Données	68
Résultats	69
Conclusion	70
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	

RESUME./

La méthode de Kalman donne une estimation optimale (la meilleure, ou à défaut la moins mauvaise) au sens de la minimisation de la covariance des erreurs d'estimation, du vecteur d'état d'un processus stochastique.

Dans ce travail nous présentons un programme de simulation d'un filtre de Kalman discret pour les systèmes stochastiques, continus, stationnaires, mono-entrée, mono-sortie.

INTRODUCTION.

La nécessité de s'informer est inséparable de la nature humaine ; aussi est ce de tout temps que l'homme s'est forcé d'obtenir une information toujours plus abondante, toujours plus précise, toujours plus rapide en ce qui concerne les processus qui l'entourent.

Qu'il s'agisse de processus simples ou complexes (pilotage automatique d'un navire ou d'un satellite, poursuite de cibles) le premier souci qu'on se fixe est d'avoir une description précise et fiable de leurs évolution ; en particulier, l'état du processus doit être très bien connu afin de pouvoir agir en conséquence.

Ainsi notre travail srait l'estimation de l'état d'un processus stochastique, linéaire, continu ; par simulation d'un filtre de Kalman.

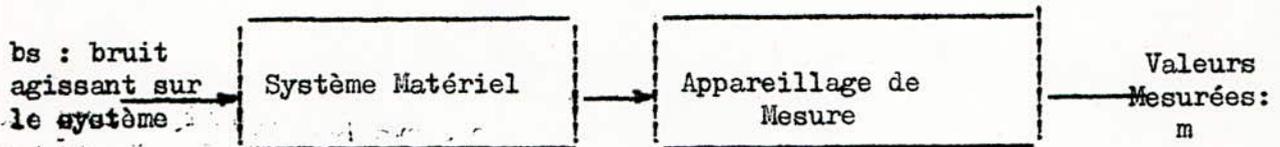
Dans une première partie nous exposerons un bref aperçu sur la méthode de Kalman, et quelque unes de ses extensions enfin en deuxième partie nous présenterons le programme de simulation du filtre de Kalman.

1.1. INFLUENCE DES BRUITS SUR LES SYSTEMES PHYSIQUES ET LES MESURES.

L'étude expérimentale des systèmes matériels est en générale gênée par l'influence des bruits (phénomènes aléatoires dont l'évolution ne peut être prévue exactement):

- D'une part dans le système étudié
- D'autre part dans les mesures effectuées pour l'étude du système.

Cette situation pourra être schématisée par la figure (1.1.)



On se trouve alors devant une situation où les signaux sont de la forme suivante :

$$m = x + b$$

où

- m : Valeur mesurée
- x : Signal utile
- b : Bruit affectant les mesures.

Les signaux utiles comprennent : une partie certaine (non aléatoire, déterministe) calculable à l'avance en fonction des conditions initiales, et d'une certaine loi d'évolution ; et une partie aléatoire due à l'influence du bruit bs agissant sur le système.

Le signal est donc décomposé de la manière suivante :

$$x = x_c + x_a$$

où

- x_a : partie aléatoire
- x_c : partie connue ou certaine

1.2 LE FILTRAGE NUMERIQUE

On appelle filtrage, l'opération qui consiste à extraire le signal utile x de la somme $m = x + b$, seule information disponible. Pour traiter les messages on opère de la façon suivante :

- Echantillonner m : obtenir la séquence des valeurs prises par m à des instants (t_0, t_1, \dots, t_n) , suffisamment rapprochés.

- Quantifier m : Exprimer cette séquence de valeurs, par des nombres arithmétiques.

- Traiter ces valeurs successives par une méthode appropriée. (par exemple à l'aide d'un ordinateur numérique).

Les filtres numériques en œuvre n'ont pas d'existence physique, mais ne sont simplement que des méthodes de calcul permettant une bonne exploitation des signaux traduits sous forme numérique.

Il permettent d'effectuer :

Les filtres ainsi mis en oeuvre n'ont pas d'existence physique, mais ne sont simplement que des méthodes de calcul permettant une bonne exploitation des signaux traduits sous forme numérique.

Ils permettent d'effectuer :

- Une estimation du signal utile x à chaque instant de mesure (opération de filtrage).
- Une estimation du signal entre les instants de mesure (opération de lissage ou interpolation).
- Une estimation du signal à un instant postérieur à la dernière mesure disponible (opération de prédiction ou d'extrapolation).

1.3. DIFFERENTS TYPES DE FILTRES

1.3.1. FILTRES LINEAIRES, FILTRES NON LINEAIRES

On appelle filtre linéaire, un filtre vérifiant les relations suivantes :

$$\overline{y_1 + y_2} = \overline{y_1} + \overline{y_2} \quad (1.1)$$
$$a \overline{y} = \overline{ay}$$

où \overline{y} représente " y filtrée", a est une constante.

Si les relations précédentes ne sont pas vérifiées, on parle de filtres non linéaires.

1.3.2. FILTRES EN TEMPS REELS, FILTRES EN TEMPS DIFFERE

Un filtre est dit en temps réel, lorsqu'il détermine une valeur filtrée $\overline{y}(t)$ en fonction d'informations $y(t')$, avec t' antérieur à t .

Un filtre est dit par contre en temps différé, lorsqu'il détermine une valeur filtrée $\overline{y}(t)$ en fonction d'informations antérieures et postérieures à t .

1.3.3. FILTRES DETERMINISTES, FILTRES STATISTIQUES

Un filtre est dit déterministe, lorsque son étude théorique ne fait pas intervenir la théorie des probabilités, et des statistiques. Dans le cas contraire il est dit statistique ou stochastique, c'est le cas par exemple des filtres de KALMAN et de WIENER.

- (C H A P I T R E - II -

SYSTEMES LINEAIRES

2.1. REPRESENTATION D'ETAT

l'Etat d'un système à un instant donné est défini par un ensemble de variables indépendantes choisies de manière à apporter toute l'information nécessaire pour que son fonctionnement puisse être décrit de manière complète quand on le sollicite par des signaux de commande différents.

Le système peut être décrit par deux équations : l'équation d'évolution, et l'équation d'observation qui constituent sa représentation d'état.

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t) + B(t) U(t) \quad (2.1)$$

$$Y(t) = C(t) X(t) \quad (2.2)$$

$X(t)$: Vecteur d'état de dimension $n \times 1$

$A(t)$: Matrice d'évolution de dimension $n \times n$

$B(t)$: Matrice de commande de dimension $n \times m$

$U(t)$: Vecteur de commande de dimension $m \times 1$

$Y(t)$: Vecteur de sortie de dimension $r \times 1$

$C(t)$: Matrice d'observation de dimension $r \times n$

La solution de l'équation (2.1) peut être mise sous la forme suivante.

$$X(t) = \phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, s) B(s) U(s) ds \quad 2.3$$

où $X(t_0)$ = Valeur initiale du vecteur d'état représentant l'état initial du système

$\phi(t, t_0)$: Est la matrice de transition vérifiant les propriétés suivantes.

- $\phi(t, t_0)$ est solution de l'équation homogène $\dot{X}(t) = A(t)X(t), X(t_0) = X_0$

- $\dot{\phi}(t) = A(t) \phi(t)$

- $\phi(t, t) = I$ (I = Matrice identité)

- $\phi(t_3, t_2) \cdot \phi(t_2, t_1) = \phi(t_3, t_1)$

- $\phi(t_2, t_1) = \phi^{-1}(t_1, t_2)$

Dans le cas de système invariants (A, B, C indépendantes du temps) les propriétés précédentes deviennent :

$$\phi(t, t_0) = \exp A(t-t_0) = \phi(t-t_0)$$

$$\exp At = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots + \frac{(At)^n}{n!} + \dots \quad n = 0, \infty$$

$$\exp 0 = I$$

$$\exp \Lambda(t+t') = \exp \Lambda t \cdot \exp \Lambda t'$$

$$\exp (\Lambda+B)t = \exp \Lambda t \cdot \exp Bt \text{ si et seulement si } \Lambda B = B\Lambda$$

$$(\exp \Lambda t)^{-1} = \exp -\Lambda t$$

$$\frac{d}{dt} \exp \Lambda t = \Lambda \cdot \exp \Lambda t = (\exp \Lambda t) \cdot \Lambda$$

2.2 DISCRETISATION D'UN SYSTEME

Supposons que l'entrée $\bar{u}(t)$ varie par morceaux; $U(t)$ est constante entre les instants t_k et t_{k-1} et elle est égale à $u(k)$. Cette situation confère au système précédent une représentation d'état discrète, déduite à partir de la représentation continue par discrétisation.

La discrétisation de l'équation d'observation donne.

$$Y(k) = H(k) X(k)$$

où

$$Y(k) = Y(t_k)$$

$$X(k) = X(t_k)$$

$$H(k) = C(t_k)$$

Par contre la discrétisation de l'équation d'évolution donne à partir de l'équation de l'équation (2.3)

$$X(k+1) = F(k) X(k) + G(k) U(k)$$

où

$$X(k+1) = X(t_{k+1})$$

$$U(k) = U(t_k)$$

$$F(k) = \phi(k+1, k) = \phi(t_{k+1}, t_k)$$

$$G(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, s) B(s) U(s) ds$$

Ainsi la représentation d'état discrète est :

$$X(k+1) = F(k) X(k) + G(k) U(k) \quad (2.4)$$

$$Y(k) = H(k) X(k) \quad (2.5)$$

2.2.1 CAS DES SYSTEMES STATIONNAIRES OU INVARIANTS

Dans les systèmes stationnaires les matrices Λ, B, C ne dépendent plus du temps, par conséquent les matrices $F(k), G(k), H(k)$ du système discret ne dépendent plus de k , et peuvent être calculées par les formules.

$$F = \exp \Lambda T$$

$$G = \int_0^T \exp \Lambda(T-s) ds \cdot B$$

$$H = C$$

où T : periode d'échantillonnage

* Si A est inversible :

$$F = \exp AT$$

$$G = A^{-1} (\exp (AT) - I).B$$

$$H = C$$

* Si A est singulière :

$$F = \exp AT$$

$$G = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \dots + \frac{A^n T^{n+1}}{n+1!} + \dots \quad n = 1,00$$

$$H = C$$

2.3 CALCUL NUMERIQUE DE L'EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE

Il existe de nombreux algorithmes numériques permettant le calcul de l'exponentielle d'une matrice A; mais les plus simples, et les plus immédiats sont ceux qui utilisent la définition de exp A, ou la diagonalisation de A.

En effet

$$\exp At = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots + \frac{(At)^n}{n!} + \dots$$

La serie étant convergente pour tout t et pour tout A. On arrête le calcul quand un terme $\frac{(At)^n}{n!}$ devient négligeable,

Une variante de cette méthode consiste à réécrire la série en l'arrêtant au terme A^{n-1} par utilisation du théorème de CAYLEY-HAMILTON

Un autre algorithme utilise l'expression

$$\exp At = P. \exp Bt. P^{-1}$$

où B:

B : Matrice diagonale contenant les valeurs propres de A.

P : Matrice de changement de base

Cette méthode suppose le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres et fait intervenir l'inversion de matrice.

Dans le cas où A possède des valeurs propres multiples, la matrice B prend une forme de JORDAN, et la formule précédente reste valable.

2.4. METHODES D'INTEGRATION NUMERIQUE.

Pour le passage d'une formulation continue à une formulation discrète on a recours dans certains cas (surtout pour les systèmes non stationnaires, ou non linéaires) à des méthodes d'intégration numérique des équations différentielles.

3.4.1. - METHODE D'EULER.

C'est une méthode très simple et approchée, basée sur l'approximation de $\dot{x}(t_k)$ par :

$$\dot{x}(t_k) = \frac{x(t_{k+T}) - x(t_k)}{T}$$

Cette approximation est satisfaisante lorsque T sera suffisamment petite

En effet l'équation discrète obtenue sera

$$X(t_{k+1}) = X(t_k + T) = (I + A(t_k) \cdot T) X(t_k) + B(t_k) \cdot T U(t_k)$$

Ou encore

$$X(k+1) = (I + A(k) \cdot T) X(k) + T \cdot B(k) \cdot U(k)$$

Dans le cas de systèmes stationnaires, cette discrétisation est équivalente au calcul de l'exponentielle en se limitant aux deux premiers termes.

3.4.2. - METHODE DE RUNGE -- KUTTA.

La méthode de RUNGE-KUTTA est basée sur le calcul de la dérivée à des instants voisins par la méthode d'EULER. Ainsi la formule d'intégration de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 s'écrit.

$$x(t_k + T) = X(t_k) + \frac{T}{6} (M_1 + 4M_2 + 2M_3 + M_4)$$

où

$$M_1 = A X(t_k) + B U(t_k)$$

$$M_2 = A X_2(t_k + \frac{T}{2}) + B U(t_k + \frac{T}{2})$$

$$M_3 = A X_3(t_k + \frac{T}{2}) + B U(t_k + \frac{T}{2})$$

$$M_4 = A X_4(t_k + T) + B U(t_k + T)$$

$$X_2(t_k + \frac{T}{2}) = X(t_k) + \frac{T}{2} M_1$$

$$X_3(t_k + \frac{T}{2}) = X(t_k) + \frac{T}{2} M_2$$

$$X_4(t_k + T) = X(t_k) + T M_4$$

Cette méthode permet de traiter les systèmes non linéaires, non stationnaires avec une grande souplesse d'utilisation.

Dans le cas des systèmes stationnaires, lorsque u(t) est constante entre les instants t_{k-1} et t_{k+1} , cette méthode donne :

$$F(k) = I + AT + \frac{(AT)^2}{2!} + \frac{(AT)^3}{3!} + \frac{(AT)^4}{4!}$$

$$G(k) = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2 T^3}{3!} + \frac{A^3 T^4}{4!} + \frac{A^4 T^5}{5!}$$

qui sont des approximations à l'ordre 4 des formules générales des calculs de F(k) et G(k).

CHAPITRE III LE FILTRAGE DE KALMAN DISCRET

3.1. PRESENTATION DE LA METHODE DE KALMAN

La méthode de KALMAN est une version moderne et probabiliste de la méthode des moindres carrés. Cette dernière consiste à minimaliser un critère quadratique représentant l'écart entre la solution obtenue et la solution idéale.

L'application de la méthode des moindres carrés, aux problèmes de filtrage peut être menée de la façon suivante :

- 1 - En admettant une forme analytique bien déterminée pour le signal et éventuellement pour le bruit ; ceci constitue le principe classique de cette méthode.
- 2 - En admettant à la fois certaines propriétés analytiques sur le signal et certaines propriétés statistiques sur le signal et sur le bruit ; ceci constitue le point de départ de la méthode de KALMAN.

3.2. CONDITIONS D'APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN DISCRET

L'application du filtre de KALMAN à l'étude d'un système physique suppose que l'on ait réussi à représenter ce dernier par un système d'équations différentielles linéaires (S). Par ailleurs le filtre lui-même est également constitué par système d'équations linéaires (F).

Les systèmes (S) et (F) peuvent présenter deux formes : continues, il s'agit alors d'équations différentielles ; discrètes, il s'agit alors d'équations aux différences.

Le choix entre les formes continues et discrètes est guidé par les circonstances suivantes :

- L'exploitation du filtre implique l'utilisation d'un ordinateur numérique, en raison de la complexité des opérations à effectuer et la précision requise pour chaque opération.
- La théorie des filtres est moins difficile à élaborer sous la forme discrète. Ceci incite au choix de la forme discrète du filtre de KALMAN, cependant il se trouve que dans de nombreux cas le modèle mathématique représentant le système linéaire à étudier est constitué d'un système d'équations différentielles, auquel normalement devrait être appliqué le filtre continu de KALMAN ; la solution habituellement adoptée consiste à discrétiser le modèle mathématique du système, c'est-à-dire le remplacer par un système d'équations aux différences équivalent, auquel peut commodément être appliqué le filtre de KALMAN discret.

3.3.1. MODELE MATHEMATIQUE ADOPTE.

L'état du système est représenté par un vecteur d'état $(n \times 1)$, $X(t)$ obéissant à une équation d'évolution de la forme :

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t) + F(t) + W(t) \quad (3.1)$$

$\Lambda(t)$: Matrice d'évolution du système (nxn)

$F(t)$: Matrice de commande (nxm)

$W(t)$: Bruit du système (bruit blanc) (mx1)

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$X(t) = \phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, s) F(s) ds + \int_{t_0}^t \phi(t, s) W(s) ds \quad (3.2)$$

Par ailleurs, l'application du filtre de KALMAN suppose que le système (S) est soumis à m mesures portant sur certaines combinaisons linéaires des variables d'état. Ces mesures sont les composantes d'un vecteur de mesure $Z(t)$ obéissant à la relation suivante :

$$Z(t) = H(t) X(t) + V(t)$$

$Z(t)$: Vecteur de mesure (mx1)

$H(t)$: Matrice d'observation ou de mesure (mxn)

$V(t)$: Bruit de mesure (mx1)

3.3.2 DISCRETISATION DU MODELE MATHEMATIQUE.

a) DISCRETISATION DE L'EQUATION DE TRANSITION.

Pour discrétiser l'équation de transition, on calcule $X(t)$ à l'instant d'échantillonnage t_k , avec $X(t_{k-1})$ comme condition initiale.

$$\text{Posons } X(t_k) = X(k)$$

$$\phi(t_k, t_{k-1}) = \phi(k, k-1)$$

Il en résulte alors une équation aux différences sous la forme suivantes :

$$X(k) = \phi(k, k-1) X(k-1) + F(k-1) + W(k-1) \quad (3.4)$$

$$\text{Avec } F(k-1) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi(t_k, s) F(s) ds$$

$$\text{et } W(k-1) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi(t_k, s) W(s) ds$$

Les $W(k)$ étant une suite de vecteurs aléatoires, respectant :

$$EW(k) = 0 \quad (\text{moyenne nulle})$$

$$EW(k)W(j)^T = Q_k \delta_{jk} \quad (W_k \text{ indépendants})$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

b) DISCRETISATION DE L'EQUATION DE MESURE

$$\begin{aligned} \text{Posons } X(t_k) &= X(k) \\ Z(t_k) &= Z(k) \\ V(t_k) &= V(k) \end{aligned}$$

Puisque l'état continu et l'état discret sont identiques aux instants d'échantillonnage, l'équation d'observation ou de mesure sera évidemment de la forme suivantes :

$$Z(k) = H(k)X(k) + V(k) \quad (3.5)$$

Les $V(k)$ étant une suite de vecteur aléatoire respectant :

$$\begin{aligned} E V(k) &= 0 \quad (\text{moyennes nulles}) \\ E V(k) V(j)^T &= R_k \delta_{jk} \quad (V(k) \text{ indépendants}) \end{aligned}$$

Le processus de discrétisation du modèle mathématique peut être résumé sur la figure (3.1).

3.3.3. ENTREES - SORTIES DU FILTRE DE KALMAN DISCRET.

Le but du filtre de KALMAN discret est d'obtenir une estimation du vecteur d'état $X(p) = X(t_p)$, compte tenu des informations disponibles à un instant t_q (suivant le cas on peut avoir $t_q < t_k$, $t_q = t_k$, $t_q > t_k$). Cette estimation est notée $\hat{X}(p/q)$.

Le filtre fournit de plus les matrices de covariances des erreurs d'estimation :

$$E(X(p) - \hat{X}(p/q))(X(p) - \hat{X}(p/q))^T = P(p/q) \quad (3.6)$$

Ces grandeurs sont calculées pas à pas en fonctions des données suivantes :

- Matrice de transition $\phi(k, k-1)$
- Matrice de mesure $H(k)$
- Estimation d'initiale du vecteur d'état notée $\hat{X}(0/0)$
- Covariance de l'erreur d'estimation initiale notée $P(0/0)$
- Propriétés statistiques des bruits
 - Valeurs moyennes nulles

$$E V(k) = 0$$

$$E W(k) = 0$$

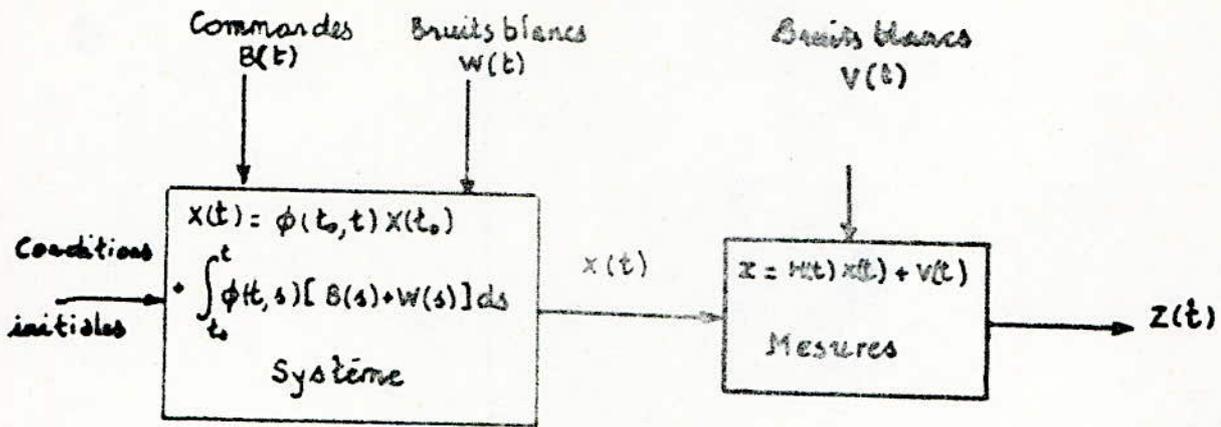
- Matrice de covariance

$$E W(j) W(k)^T = Q_k \delta_{jk}$$

$$E V(j) V(k)^T = R_k \delta_{jk}$$

- Indépendance des bruits du système et de mesure
 - $E W(j) V(k)^T = 0$
- Indépendance du bruit de mesure et de l'erreur initiale d'estimation

$$E V(k) (X(0) - \hat{X}(0/0))^T = 0$$



Discretisation

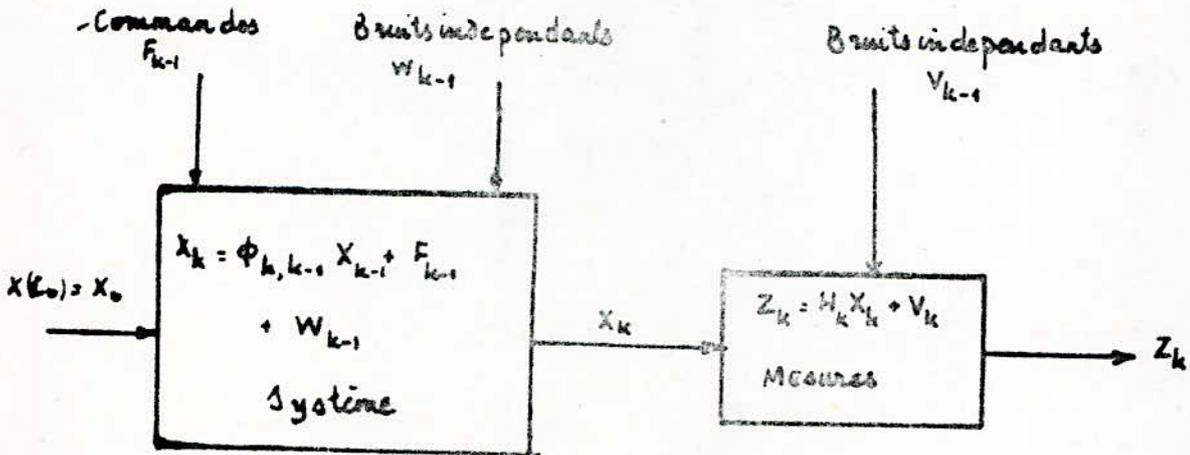


Fig (3.1)

Discretisation des Systeme

3.4. DESCRIPTION ET INTERPRETATION DU FILTRE DE KALMAN DISCRET

3.4.1. ESTIMATION D'UN SIGNAL MIXTE

Etant donné un vecteur d'état d'un système linéaire régi par des équations de la forme (3.4 et 3.5.) soumis à un bruit $W(k)$, et objet de mesures $Z(k)$. Supposons que nous disposons d'une estimation $\hat{X}(k-1/k-1)$ de X relative à l'instant d'échantillonnage t_{k-1} ; nous pouvons alors déduire à l'instant t_k deux informations.

1- Une estimation de $X(t_k)$, par application de l'équation de transition à l'estimation $\hat{X}(k-1/k-1)$; en admettant que l'opération d'estimation est linéaire.

$$\hat{X}(k/k-1) = \phi(k, k-1) \hat{X}(k-1/k-1) + F(k-1) \quad (3.7)$$

2- Une estimation des résultats de mesure que l'on doit obtenir à l'instant t_k :

$$\hat{Z}(k/k-1) = H(k) \hat{X}(k/k) \quad (3.8)$$

Le problème se pose maintenant d'améliorer l'estimation $\hat{X}(k/k-1)$, compte tenu du résultat de mesure $Z(k)$. Celle-ci est obtenue par une correction linéaire de la forme suivante ;

$$\begin{aligned} \hat{X}(k/k) &= \hat{X}(k/k-1) + K(k) (Z(k) - \hat{Z}(k/k-1)) \\ &= \hat{X}(k/k-1) + K(k) (Z(k) - H(k) \hat{X}(k-1/k-1)) \quad (3.9) \\ &= (I - K(k)H(k))(\phi(k, k-1)\hat{X}(k, k-1) + F(k-1)) + K(k)Z(k) \quad (3.10) \end{aligned}$$

$\hat{X}(k/k)$: nouvelle estimation de $X(k)$

$\hat{X}(k/k-1)$: ancienne estimation de $X(k)$

$H(k)\hat{X}(k-1/k-1) = \hat{Z}(k/k-1)$: résultat de mesure attendu.

$K(k) (Z(k) - \hat{Z}(k/k-1))$: terme correctif linéaire.

La matrice $K(k)$ est appelée matrice de correction ; elle doit être calculée indépendamment des résultats de mesure pour donner au filtre un caractère véritablement linéaire.

3.4.2. INTERPRETATION DE LA METHODE D'ESTIMATION.

Avant que toute mesure soit faite, les résultats de mesures (Z_1, \dots, Z_k) doivent être considérés comme aléatoires, il est en de même pour les estimations X , combinaisons linéaires des Z_1 .

Par conséquent si les estimations initiales sont sans biais, il en est de même pour les estimations suivantes $\hat{X}(k/k-1)$, $\hat{X}(k/k)$,

$$E \hat{X}(k/k-1) = E \hat{X}(k/k) = EX(k) \quad (3.11)$$

Dans ces conditions, les écarts $(X(k) - \hat{X}(k/k-1))$ et $(X(k) - \hat{X}(k/k))$ sont aléatoires, de valeurs moyennes nulles et leurs matrices de covariances (Matrices calculables indépendamment des résultats de mesure) sont données par :

$$P(k/k-1) = E(X(k) - \hat{X}(k/k-1))(X(k) - \hat{X}(k/k-1))^T \quad (3.12)$$

$$P(k/k) = E(X(k) - \hat{X}(k/k))(X(k) - \hat{X}(k/k))^T \quad (3.13)$$

La considération de $P(k/k)$ peut donner une idée d'appréciation de l'intérêt d'une méthode d'estimation. Il est en effet possible de traduire la valeur d'une telle méthode par la somme des variances des composantes de $(X(k) - \hat{X}(k/k))$; meilleure est la méthode, plus faible doit être cette somme qui pourra être mise sous la forme ;

$$\text{trace de } P(k/k) = E(X(k) - \hat{X}(k/k))^T (X(k) - \hat{X}(k/k)) \quad (3.14)$$

La méthode de KALMAN qui consiste justement à choisir une matrice de correction $K(k)$ de sorte à minimaliser la trace de la matrice de covariance des erreurs d'estimation, est donc optimale, en sens qu'elle conduit à une variance d'erreur minimale.

Le choix des matrices de correction $K(k)$ peut être considéré comme un compromis entre :

- La confiance portée à l'estimation précédente $\hat{X}(k/k-1)$, représentée par la trace de $P(k/k-1)$; plus cette confiance est grande (c'est-à-dire plus la trace de $P(k/k-1)$ est petite, moins on se laisse impressionner par un éventuel écart $(Z(k) - \hat{Z}(k/k-1))$; qui peut simplement être dû au bruit de mesure $V(k)$. Ainsi une confiance élevée en $\hat{X}(k/k-1)$, tend à faire choisir de faibles valeurs pour $K(k)$.

- L'intérêt porté aux mesures nouvelles, dû à ce que l'on veut tenir compte de :

a) De l'imperfection des estimations précédentes ; traduites par trace de $P(k/k-1)$.

b) De l'influence du bruit $V(k)$ agissant sur le système d'une manière imprévisible, entre les instants t_{k-1} . Ce point de vue tend à faire choisir de fortes valeurs pour $K(k)$.

Ainsi le choix explicite de $K(k)$ doit être fonction de :

- $P(k/k-1)$ traduisent la confiance de l'ancienne estimation

- $Q(k)$ traduisent l'influence du bruit sur le système

- $R(k)$ traduisent l'influence du bruit sur les mesures.

Ces grandeurs, et par suite $K(k)$ sont indépendants des résultats de mesure.

Calculons la matrice de covariance de l'écart $Z(k) - \hat{Z}(k/k-1)$:

$$V(k/k-1) = E(Z(k) - Z(k/k-1))(Z(k) - Z(k/k-1))^T \quad (3.14)$$

$$V(k/k-1) = H(k)P(k/k-1)H(k)^T + R(k) \quad (3.14)$$

On obtiendrait de même :

$$V(k/k) = E(Z(k) - \hat{Z}(k/k))(Z(k) - \hat{Z}(k/k))^T$$

$$V(k/k) = H(k)P(k/k)H(k)^T + R(k) \quad (3.15)$$

Ces résultats permettent d'envisager une situation critique vis-à-vis des modalités d'utilisation du filtre de KALMAN.

En effet, à chaque cycle de calcul, il est possible de comparer chaque composante :

$$\delta Z(k,i) = Z(k,i) - Z(k/k-1,i) \text{ de } Z(k) - Z(k/k-1)$$

à l'écart type $\sigma(\delta Z(k,i))$ déduit de la matrice $V(k/k-1)$. Tout écart Z supérieur à $n(\sigma Z)$ (n étant égal à 3, 4 ou 5) traduit l'apparition d'un résultat de mesure à priori très improbable ; ce dépassement constitue un signal d'alarme dont il convient d'en tenir compte ; il peut être dû :

- à une mesure aberrante, elle même imputable à la non transmission d'une donnée, à une panne dans un appareil de mesure, etc... Dans ce cas si le phénomène aberrant ne dure pas, ou interesse qu'une faible partie de mesures, le filtrage peut très bien continuer, à condition, bienentendu que l'on élimine les mesures incriminées. (Cette procédure, analogue à un crêtage électronique, fait perdre au filtre sa linéarité).

- à un manque d'exactitude du modèle mathématique utilisé pour représenter le fonctionnement du système étudié. Une telle situation peut se produire lors de l'adoption d'un modèle simplifié, afin de réduire la complexité des calculs de filtrage. L'écart entre les comportements du modèle et du système peut alors se creuser au fur et à mesure de l'écoulement du temps ; il en résulte l'apparition de plus en plus insistante de mesures aberrantes bien que la qualité des mesures effectuées soit conforme aux prévisions statistiques. On dit alors que le filtre diverge. Dans ce cas, un palliatif consiste à remplacer les matrices $P(k/k)$ par des matrices dont les éléments diagonaux (positifs) sont plus élevés, ou encore à reprendre périodiquement une nouvelle série d'estimations.

3.5 FORMULES DU FILTRAGE.

Les formules utilisées pour le calcul du filtrage de KALMAN discret sont du type récurrent ; à chaque cycle de calcul on part de :

$\hat{X}(k+1/k-1)$ et de $P(k-1/k-1)$, et l'on aboutit à $\hat{X}(k/k)$. L'organisation des calculs est représentée schématiquement par la figure (3.2).

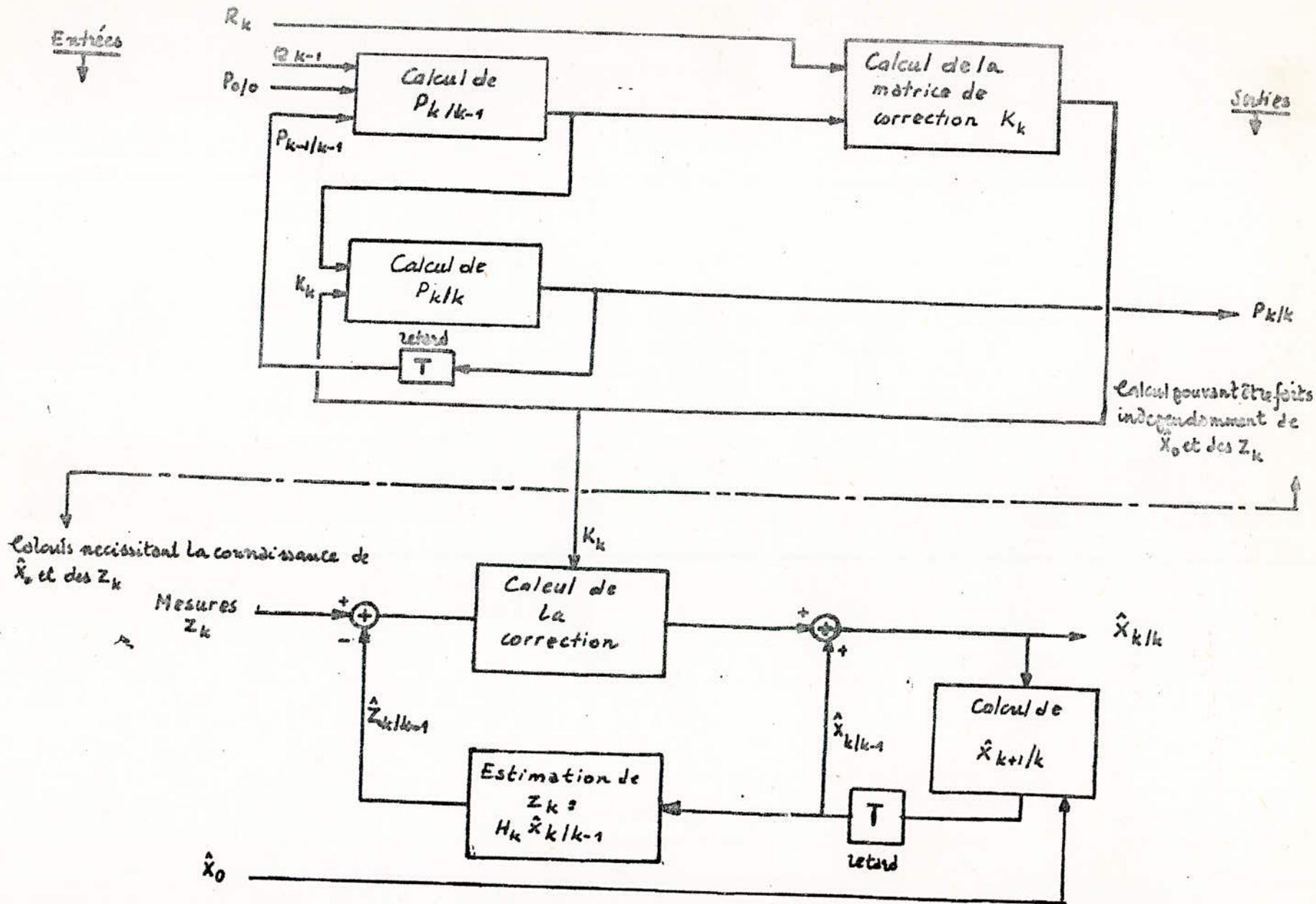


Fig 3.2 Organigramme des calculs.

a) PASSAGE DE $P(k+1/k-1)$ A $P(k/k-1)$

$$P(k/k-1) = E(X(k) - \hat{X}(k/k-1))(X(k) - \hat{X}(k/k-1))^T$$

En remplaçant $X(k)$ et $\hat{X}(k/k-1)$ par leurs valeurs données en (3.4) et (3.7) et en calculant l'espérance, $P(k/k-1)$ peut être mise sous la forme :

$$P(k/k-1) = \phi(k/k-1) P(k-1/k-1) \phi(k,k-1)^T + Q(k-1) \quad (3.16)$$

L'évolution de la matrice $P(k/k-1)$ depuis t_{k-1} à t_k est donc fonction :

- De la dynamique du système, représentée par $\phi(k,k-1)$
- Du bruit agissant sur le système, représenté par $Q(k-1)$

b) PASSAGE DE $P(k/k-1)$ A $P(k/k)$

D'après (3.5) et (3.9), nous avons :

$$\hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + K(k)(H(k)X(k) + V(k) - H(k)\hat{X}(k/k-1))$$

En soustrayant $X(k)$ de chaque membre de cette équation, nous obtenons (après mise en facteur du terme $\hat{X}(k/k-1) - X(k)$)

$$\hat{X}(k/k) - X(k) = (I - K(k)H(k))(\hat{X}(k/k-1) - X(k)) + K(k)V(k)$$

Par transposition on a :

$$(\hat{X}(k/k) - X(k))^T = (\hat{X}(k/k-1) - X(k))^T (I - K(k)H(k))^T + V(k)^T K(k)^T$$

En prenant la valeur moyenne du produit des deux expressions précédentes on obtient :

$$P(k/k) = (I - K(k)H(k))P(k/k-1)(I - K(k)H(k))^T + K(k)R(k)K(k)^T \quad (3.17)$$

c) DETERMINATION DE $K(k)$

On démontre que l'adoption du critère somme des variances minimal implique l'utilisation d'une matrice de correction ; solution d'une équation matricielle aux différences, résultant d'une équation différentielle matricielle de RICATTI ; de la forme suivante :

$$K(k) = P(k/k-1)H(k)^T (H(k)P(k/k-1)H(k)^T + R(k))^{-1} \quad (3.18)$$

Il en résulte que l'expression de (3.17) se réduit à

$$\begin{aligned} P(k/k) &= P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1) \\ &= P(I-K(k)H(k)P(k/k-1)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les formules (3.18) et (3.19) confirment la possibilité de calculer à l'avance les matrices $P(k/k-1)$, $P(k/k)$ et $K(k)$ indépendamment des résultats de mesure.

La formule (3.18) peut être écrite sous la forme :

$$K(k) = P(k/k)H(k)^T R(k)^{-1}$$

Enfin la formule (3.19) peut être écrite sous la forme :

$$P^{-1}(k/k) = P^{-1}(k/k-1) + H(k)^T R(k)^{-1} H(k)$$

a) DEMARRAGE DES CALCULS :

L'application des formules récurrentes précédentes nécessite le choix de valeurs initiales $\hat{X}(0/0)$ et $P(0/0)$. Habituellement $X(0)$ est considéré comme aléatoire, et l'on choisit :

$$\hat{X}(0/0) = E X(0) \quad P(0/0) = E(X(0) - \hat{X}(0/0))(X(0) - \hat{X}(0/0))^T$$

Les estimations ultérieures $\hat{X}(k/k-1)$ et $\hat{X}(k/k)$ sont alors sans biais.

Le fait de choisir des valeurs inexactes pour $P(0/0)$ fausse les évaluations des matrices $P(k/k-1)$ et $P(k/k)$; en effet, ces dernières ne peuvent être corrigées par les mesures, puisqu'elles sont indépendantes.

Par contre, l'influence d'un mauvais choix, en ce qui concerne l'estimation initiale $X(0)$, peut se trouver neutralisée par l'exploitation de mesures nouvelles $Z(k)$.

(C H A P I T R E IV

EXTENSIONS DE LA METHODE DE KALMAN.

4.1. SYSTEMES CONTINUS

Considérons un système continu décrit par les équations d'évolution et d'observations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{W}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{H}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t)\end{aligned}$$

Et possédons les propriétés statistiques des conditions initiales et des bruits suivantes :

$$\begin{aligned}E(\mathbf{X}(t_0)) &= \mathbf{m}_0 & \text{Cov}(\mathbf{X}(t_0)) &= \mathbf{P}_0 \\ E(\mathbf{V}(t)) &= \mathbf{0} & E(\mathbf{W}(t)) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{V}(t) \mathbf{V}^T(s)) &= \mathbf{Q}(t) \delta(t-s) \\ E(\mathbf{W}(t) \mathbf{W}^T(s)) &= \mathbf{R}(t) \delta(t-s) \\ E(\mathbf{W}(t) \mathbf{W}^T(s)) &= & E(\mathbf{v}(t) \mathbf{X}^T(t_0)) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{W}(t) \mathbf{X}^T(t_0)) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Les équations du filtre de KALMAN peuvent être obtenues par la recherche d'un filtre optimal linéaire, non biaisé, à variance d'erreur minimale.

Les équations sont données par.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) &= \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}(t) (\mathbf{z}(t) - \mathbf{H}(t) \hat{\mathbf{X}}(t)) \\ \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{P}(t) \\ &\quad + \mathbf{B}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ \mathbf{K}(t) &= \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}^{-1}(t)\end{aligned}$$

Avec comme conditions initiales

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}(t_0) &= \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{P}(t_0) &= \mathbf{P}_0\end{aligned}$$

$\mathbf{K}(t)$ étant la matrice de correction minimisant la variance d'erreur, et $\mathbf{P}(t)$ est solution de l'équation différentielle matricielle de RICATTI .

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{K}^T(t) \\ &\quad - \mathbf{B}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ \mathbf{P}(t_0) &= \mathbf{P}_0\end{aligned}$$

4.2. SYSTEMES CONTINUS A OBSERVATIONS DISCRETES.

Il se trouve parfois dans certains cas, les systèmes à soient continus du point de vue de leur évolution, et discrets du point de vue des sorties qu'ils délivrent à l'observateur (Les mesures ne sont accessibles qu'à des instants bien précis). L'application de la méthode de KALMAN à ce genre de processus, nécessite un filtre de KALMAN continu à observations discrètes.

Le système étant décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{W}(t) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{H}(k) \mathbf{X}(k) + \mathbf{V}(k)\end{aligned}$$

Les propriétés statistiques des bruits du système et de mesure, ainsi que celles de l'état initial sont

$$\begin{aligned}E(\mathbf{X}(t_0)) &= \mathbf{m}_0 & \text{Cov}(\mathbf{X}(t_0)) &= \mathbf{P}_0 \\ E(\mathbf{W}(t)) &= \mathbf{0} & E(\mathbf{W}(t) \mathbf{W}^T(s)) &= \mathbf{Q}(t) \delta(t-s) \\ E(\mathbf{X}(t_0) \mathbf{W}^T(s)) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Aux instants d'échantillonnage ou a :

$$\begin{aligned}E(\mathbf{V}(k)) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{V}(k) \mathbf{V}^T(j)) &= \mathbf{R}(k) \delta_{kj} \\ E(\mathbf{X}(t_0) \mathbf{V}^T(k)) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{V}(k) \mathbf{W}^T(k)) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

La détermination de l'estimé optimal $\hat{\mathbf{X}}(t) = E(\mathbf{X}(t) / \mathbf{Z}(k))$ s'effectue, comme pour le filtre discret, seule l'observation entre les instants change.

- Entre deux observations $t_{k-} < t < t_k$, le processus $\mathbf{x}(t)$ vérifie l'équation d'évolution dont la solution est donnée par

$$\mathbf{x}(t') = \phi(t'; t) + \int_t^{t'} \phi(t'; s) \mathbf{B}(s) \mathbf{w}(s) ds$$

Le meilleur estimé est obtenu en prenant la moyenne conditionnelle de l'équation précédente, et en tenant compte que $\mathbf{W}(t)$ est un bruit blanc indépendant des observations passées.

Alors $\hat{\mathbf{X}}(t')$ est solution de l'équation différentielle

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{X}}(t)$$

et la variance d'erreur $(\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t))$ vérifié l'équation différentielle matricielle.

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}^T(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{B}^T(t)$$

- A l'instant d'observation t_k , l'estimé optimal est donné par

$$\hat{\mathbf{X}}(k^+) = \hat{\mathbf{X}}(k^-) + \mathbf{K}(k) (\mathbf{z}(k) - \mathbf{H}(k) \hat{\mathbf{X}}(k^-))$$

Avec

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k^-) \mathbf{H}^T(k) (\mathbf{H}(k) \mathbf{P}(k^-) \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k))^{-1}$$

où $\hat{\mathbf{X}}(k^+)$ = estimé de $\mathbf{X}(k)$ en tenant compte de k mesures

$\hat{\mathbf{X}}(k^-)$ = estimé de $\mathbf{X}(k)$ en tenant compte de $k-1$ mesures

La variance d'erreur est donné par :

$$\begin{aligned} P(k^+) &= P(k^-) - K(k) H(k) P(k^-) \\ &= (I - K(k)H(k))P(k^-) (I - K(k)H(k))^T + K(k)R(k)K^T(k) \end{aligned}$$

En résumé les équations définitives du filtre sont :

1°) Pour $t = 0$

$$\hat{X}(t_0) = m_0$$

$$P(t_0) = P_0$$

2°) Pour $t_{k-1} < t < t_k$

$$\dot{\hat{X}}(t) = A \hat{X}(t)$$

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + B(t)Q(t)B^T(t)$$

3°) Pour $t = t_k$

$$\hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + K(k) (z(k) - H(k) \hat{X}(k/k-1))$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1)$$

$$K(k) = P(k/k-1) H^T(k) (H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k))^{-1}$$

4.3) SYSTEMES A FRUITS CORRELÉS

Considérons un système de la forme suivante :

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)W(t)$$

$$z(t) = H(t)X(t) + V(t)$$

avec les mêmes propriétés statistiques que précédemment sauf que dans ce cas le bruit de mesure, et le bruit du système présentent une **corrélation** caractérisée par une matrice $S(t)$

$$E(V(t)W^T(s)) = S(t) \delta(t-s)$$

Alors les équations du filtre seront les suivantes :

$$\dot{\hat{X}}(t) = A(t)\hat{X}(t) + K(t) (z(t) - H(t)\hat{X}(t))$$

$$K(t) = (P(t) H^T(t) + B(t) S(t)) R^{-1}(t)$$

où P est solution de l'équation différentielle matricielle de RICATTI suivante :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - (P(t)H^T(t) + B(t)S(t))(H(t)P(t) + S^T(t)B^T(t)) \\ & + B(t) Q(t) B^T(t) \end{aligned}$$

$$P(t_0) = P_0$$

Pour le cas discret on a :

$$X(k+1) = F(k)X(k) + G(k) W(k)$$

$$z(k) = H(k)X(k) + V(k)$$

La corrélation entre les bruits est représentée par :

$$E(W(k)V(i)) = S(k) \delta_{ki}$$

Les équations du filtre deviennent alors :

$$\hat{X}(k+1/k) = F(k)\hat{X}(k/k) + C(k)(z(k) - H(k)\hat{X}(k/k))$$

$$\hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + K(k)(z(k) - H(k)\hat{X}(k/k-1))$$

$$C(k) = G(k) S(k) R(k)^{-1}$$

$$K(k) = P(k/k-1) H^T(k) (H(k)P(k/k-1) H^T(k) + R(k))^{-1}$$

$$P(k+1/k) = (F(k) - C(k)H(k))P(k/k)(F(k) - C(k)H(k))^T + G(k)Q(k)G^T(k) - C(k)R(k)C^T(k)$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) - K(k) H(k) P(k/k-1)$$

Les équations de prédiction sont également données par :

$$\hat{X}(k+1/k) = F(k)\hat{X}(k/k) + C'(z(k) - H(k)\hat{X}(k/k-1))$$

$$C'(k) = B(k) S(k) (H(k) P(k/k) H^T(k) + R(k))^{-1}$$

$$P(k+1/k) = F(k)P(k/k)F^T(k) + B(k)Q(k)B^T(k) - F(k)K(k)S(k)B^T(k) - \\ - B(k)S(k)K^T(k)F^T(k) - D(k)S(k)(H(k)P(k/k-1)H^T(k)+R(k))^{-1}S^T(k)B^T(k)$$

Par rapport aux équations du filtre de KALMAN discret, seule la prédiction a été modifiée, ceci vient du fait, que les bruits $W(k)$ sont corrélés avec les mesures $z(k)$.

Par contre, si la forme du modèle adopté était la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X}(k+1) &= F(k)X(k) + G(k+1)W(k+1) \\ z(k) &= H(k)X(k) + V(k) \end{aligned}$$

Seule l'estimation serait modifiée, et les équations seraient :

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1/k) &= F(k)\hat{X}(k/k) && \text{Prédiction} \\ \hat{X}(k+1/k+1) &= \hat{X}(k+1/k) + K(k+1)(z(k+1) - H(k+1)\hat{X}(k+1/k)) \\ K(k+1) &= (P(k+1/k)H^T(k+1) + B(k+1)S(k+1))(H(k+1)P(k+1/k)H^T(k+1) + \\ &+ H(k+1)B(k+1)S(k+1) + S^T(k+1)B(k+1)H^T(k+1) + R(k+1))^{-1} \\ P(k+1/k) &= F(k+1)P(k/k)F^T(k+1) + B(k+1)Q(k+1)B^T(k+1) \\ P(k+1/k+1) &= P(k+1/k) - K(k+1)(H(k+1)P(k+1/k) + S^T(k+1)B^T(k+1)) \end{aligned}$$

4.4 SYSTEMES A FRUITS COLORES.

La théorie de KALMAN suppose des bruits blancs dans le cas continu, ou pseudo-blancs dans le cas discret. Il est cependant possible de traiter des problèmes d'estimation dans lesquels interviennent des bruits colorés, (qui ont une densité spectrale $S(f)$ qui varie en fonction de la fréquence) en adjoignant au système des filtres de mise en forme effectuant la transformation :

Bruit blanc
ou
Bruit pseudo-blanc —————→ Bruit coloré

Il en résulte un nouveau système, auquel est appliqué le filtre de KALMAN (fig.4.1)

L'application pratique de cet artifice peut augmenter considérablement la complexité des calculs de filtrage. En effet le nombre de variables d'état et le nombre d'équations d'état sont augmentés d'au moins une unité par composante de bruit coloré.

4.4.1 BRUITS COLORES DE COMMANDE

Considérons un système continu décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)X(t) + B(t)u(t) \\ z(t) &= H(t)X(t) + v(t) \end{aligned}$$

dans lequel $U(t)$ désigne un bruit gaussien non blanc.
Supposons que ce bruit coloré puisse être produit par un système linéaire d'équations :

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= A_1(t) X_1(t) + B_1(t)W(t) \\ U(t) &= H_1 X_1(t)\end{aligned}$$

Ce système est commandé par un bruit blanc $W(t)$, et sa sortie $U(t)$ commande à son tour le système initial. Nous sommes finalement en présence d'un système à état augmenté alimenté par un bruit blanc $W(t)$ (Fig.4.2) d'équations

$$\begin{aligned}\dot{X}_a(t) &= A_a(t) X_a(t) + B_a(t) W(t) \\ z(t) &= H_a(t) X_a(t) + v(t)\end{aligned}$$

où

$$A_a(t) = \left[\begin{array}{c|c} A(t) & B(t) H_1(t) \\ \hline 0 & A_1(t) \end{array} \right]$$

$$B_a(t) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline B_1(t) \end{array} \right]$$

$$H_a(t) = \left[\begin{array}{c} H(t) \quad | \quad 0 \end{array} \right]$$

$$X_a(t) = \left[\begin{array}{c} X(t) \\ \hline X_1(t) \end{array} \right]$$

auquel on peut facilement appliquer la méthode de KALMAN, on a :

$$\dot{\hat{X}}_a(t) = A \hat{X}_a(t) + K(t) \left[z(k) - H_a(t) \hat{X}_a(t) \right]$$

$$K(t) = P(t) H_a(t) R(t)^{-1}$$

$$\dot{P}(t) = A_a(t) P(t) + P(t) A_a^T(t) + K(t) R(t) K^T(t) + B_a(t) Q(t) B_a^T(t)$$

$$P(t_0) = P_0$$

Le système est décrit par :

$$X(k+1) = F(k) X(k) + G(k) U(k)$$

$$z(k) = H(k) X(k) + V(k)$$

Le processus générateur de bruit coloré $u(k)$ est décrit par :

$$X_1(k+1) = F_1(k) X_1(k) + G_1(k) W(k)$$

$$U(k) = H_1(k) X_1(k)$$

Le système final est décrit par :

$$X_a(k+1) = F_a(k) X_a(k) + G_a(k) W(k)$$

$$z(k) = H_a(k) X_a(k) + V(k)$$

Avec

$$X_a(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ \vdots \\ X_1(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(k) & G(k)H_1(k) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & F_1(k) \end{bmatrix}$$

$$G_a(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ G_1(k) \end{bmatrix}$$

$$H_a(k) = \begin{bmatrix} H(k) & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Les équations du filtre seront :

$$\hat{X}_a(k+1/k+1) = \hat{X}_a(k+1/k) + K(k+1)(z(k+1) - H_a(k+1)\hat{X}_a(k+1))$$

$$\hat{X}_a(k+1/k) = F_a(k) \hat{X}_a(k/k)$$

$$K(k+1) = P(k+1/k)H_a^T(k+1)(H_a(k+1)P(k+1/k)H_a^T(k+1) + R_a(k+1))^{-1}$$

$$P(k+1/k+1) = (I - K(k+1)H_a(k+1))P(k+1/k)$$

$$P(k+1/k) = F_a(k) P(k/k) F_a^T(k) + G_a(k) Q(k) G_a^T(k)$$

4.4.2 BRUITS DE MESURE COLORES

Considérons un système continu :

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t) + B(t) W(t)$$

$$z(t) = H(t) X(t) + U(t) + V(t)$$

Les bruits $V(t)$ et $W(t)$ sont supposés gaussiens, blancs, mais le bruit $U(t)$ est coloré ; de processus générateur :

$$\dot{X}_1(t) = A_1(t) X_1(t) + B_1(t) W_1(t)$$

$$U(t) = H_1(t) X_1(t)$$

où $W_1(t)$ est un bruit blanc gaussien.

Nous retrouvons alors le système à état augmenté d'équations (fig. 4.3)

$$X_a(t) = A_a(t) X_a(t) + B_a(t) W_a(t)$$

$$z(t) = H_a(t) X_a(t) + V(t)$$

Avec

$$X_a(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X_1(t) \end{bmatrix} \quad W_a(t) = \begin{bmatrix} W(t) \\ W_1(t) \end{bmatrix}$$

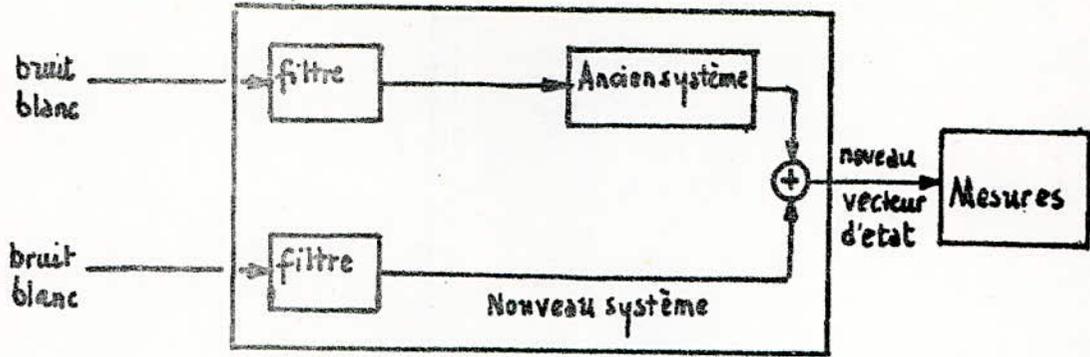
$$A_a(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & A_1(t) \end{bmatrix} \quad B_a(t) = \begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & B_1(t) \end{bmatrix}$$

$$H_a(t) = \begin{bmatrix} H(t) & H_1(t) \end{bmatrix}$$

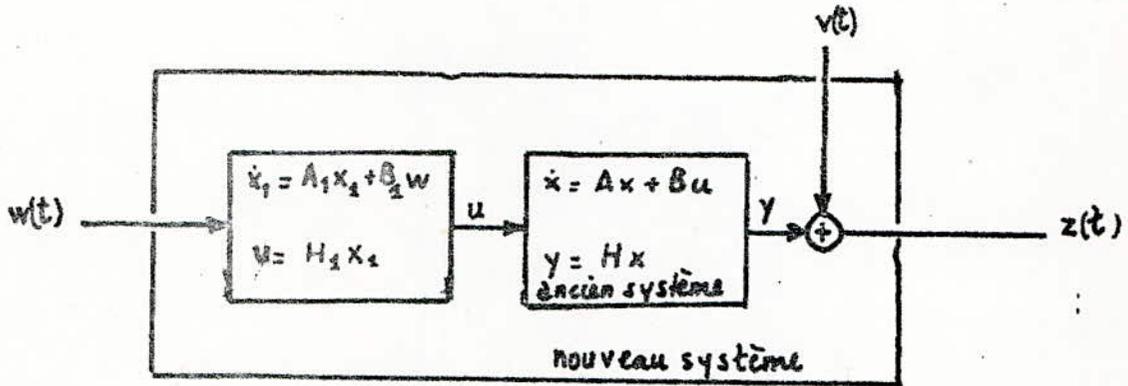
Auquel la méthode KALMAN pourra être appliquée. Les formules du filtrage sont exactement similaires à celle du paragraphe précédent, que ce soit pour le cas continu ou pour le cas discret.

4.5 SYSTEMES NON LINEAIRES

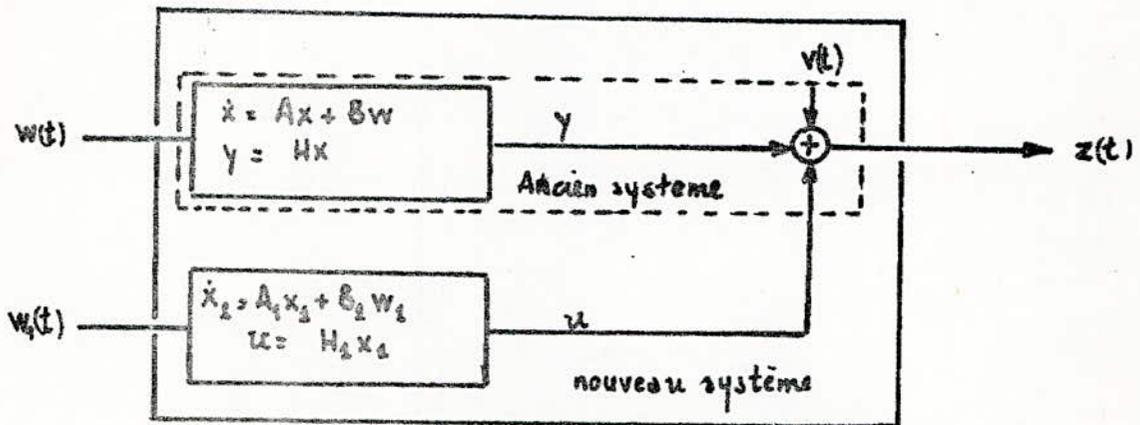
Le filtre de KALMAN est applicable à tout système dont l'évolution est décrite par des équations différentielles linéaires. Ceci lui confère une assez grande généralité d'emploi, car il n'existe pas de limitation théorique du nombre de variables d'état (mais par contre, le volume de calcul à effectuer croît très vite, en fonction de ce nombre et peut constituer une limitation pratique, même lorsque on utilise un calculateur numérique très puissant); de plus, les coefficients des équations peuvent varier en fonction du temps.



(Fig: 4.1)



(Fig: 4.2)



(Fig: 4.3)

Cependant, il arrive fréquemment que les système à étudier n'entrent pas dans ce cadre ; comme c'est le cas des systèmes non linéaires.

Il est néanmoins souvent possible d'appliquer le filtre de KALMAN à de tels systèmes, à condition toutefois d'en connaître une solution approchée, dite "nominale" ou de référence.

Considérons un système non linéaire régi par les équations :

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t) + g(X(t), t) W(t)$$

$$z(t) = h(X(t), t) + V(t)$$

Et supposons que l'on connaisse une solution $X^*(t)$ de l'équation :

$$\dot{X}^*(t) = f(X^*(t), t)$$

voisine de $X(t)$, on peut alors envisager une linéarisation du système autour de cette solution de référence.

En effet ,

$$X(t) = X^*(t) + \delta X(t)$$

$$\dot{X}(t) = \dot{X}^*(t) + \delta \dot{X}(t)$$

$$\hat{X}(t) = X^*(t) + \delta \hat{X}(t)$$

$$\hat{Z}(t) = Z^*(t) + \delta \hat{Z}(t)$$

Après linéarisation du système, on obtient des équations linéaires en $X(t)$, on a :

$$\delta \dot{X}(t) = F(t) \delta X(t) + G(t) W(t)$$

$$\delta z(t) = H(t) \delta X(t) + V(t)$$

Avec

$$F(t) = \frac{\partial}{\partial X^*} f(X^*(t), t)$$

$$G(t) = g(X^*(t), t)$$

$$H(t) = \frac{\partial}{\partial X^*} h(X^*(t), t)$$

auxquelles on peut appliquer le filtre de KALMAN, qui fournit l'estimé de

l'écart $\delta \hat{X}(t)$, et par suite :

$$\hat{Y}(t) = X^*(t) + \delta \hat{X}(t)$$

La principale difficulté réside dans le choix de la solution qui doit être voisine de $X(t)$, pour que la linéarisation soit possible.

Si la variance du bruit $W(t)$, et la variance des conditions initiales, sont faibles, une bonne approximation de $X(t)$ est donnée par :

$$\dot{X}^*(t) = f(X^*(t), t) \text{ avec } X^*(t) = E(X(t_0))$$

Au lieu de choisir une référence $X^*(t)$ à priori, la structure récursive du filtre permet de choisir une référence $X^*(t)$ qui est réajustée à chaque cycle de calcul.

Les équations du filtre sont alors :

$$\dot{\hat{X}}(t) = F(t) \hat{X}(t) + K(t) (\delta z(t) - H(t) \delta \hat{X}(t))$$

$$K(t) = P(t) H^T(t) R(t)^{-1}$$

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - K(t)R(t)K^T(t)$$

$$P(t_0) = P_0$$

Cas discret

Le système non linéaire étant décrit par :

$$X(k+1) = f(X(k), k) + g(X(k), k)W(k)$$

$$z(k) = h(X(k), k) + V(k)$$

Après linéarisation, autour des moyennes conditionnelles

$\hat{X}(k/k)$ et $\hat{X}(k/k-1)$, on obtient le nouveau système :

$$X(k+1) = F(k) X(k) + G(k) W(k) + U(k)$$

$$z(k) = H(k) X(k) + V(k) + y(k)$$

avec

$$F(k) = \left. \frac{\partial}{\partial X} f(X, k) \right|_{X = \hat{X}(k/k)}$$

$$G(k) = g(\hat{X}(k/k), k)$$

$$H(k) = \left. \frac{\partial}{\partial X} h(X, k) \right|_{X = \hat{X}(k/k)}$$

$$U(k) = f(\hat{X}(k/k), k) - F(k) \hat{X}(k/k)$$

$$y(k) = h(\hat{X}(k/k-1), k) - H(k) \hat{X}(k/k-1)$$

Les équations du filtre de KALMAN seront :

$$\hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + K(k) (z(k) - h(\hat{X}(k/k-1), k))$$

$$\hat{X}(k+1/k) = f(\hat{X}(k/k))$$

$$K(k) = P(k/k-1) H^T(k) (H(k) P(k/k-1) H^T(k) + R(k))^{-1}$$

$$P(k/k) = (I - K(k) H(k)) P(k/k-1)$$

$$P(k/k-1) = F(k) P(k/k) F^T(k) + G(k) Q(k) G^T(k)$$

4.6 ESTIMATIONS DE PARAMETRES INCONNUS

Il arrive souvent que certains paramètres constants p , du modèle à étudier soient mal connus. La méthode de KALMAN est applicable pour la détermination de ces paramètres, à condition de les considérer comme des variables aléatoires, de statistiques connues, solutions de l'équation dynamique :

$$\dot{p}(t) = 0 \text{ ou } p(k) = p(k-1)$$

Le système à paramètre incertain p

$$\dot{X}(t) = f(X, p, t) + g(X, p, t) W(t)$$

$$Z(t) = h(X, p, t) + V(t)$$

est remplacé par le système

$$\dot{X}(t) = f(X, p, t) + g(X, p, t) W(t)$$

$$\dot{p}(t) = 0$$

$$Z(t) = h(X, p, t) + V(t)$$

En considérant le vecteur d'état augmenté $X_a^T(t) = (X(t), p(t))^T$

le système devient :

$$\dot{X}_a(t) = F(X_a(t), t) + G(X_a(t), t) W(t)$$

$$Z(t) = H(t, X_a(t)) + V(t)$$

Suivant la forme du modèle, on peut alors appliquer le filtre de KALMAN (cas du modèle linéaire), ou le filtre de KALMAN étendu (cas du modèle non linéaire). L'estimation de paramètres s'avère assez délicate, car outre le fait qu'elle augmente le volume des calculs, elle nécessite la connaissance de la matrice de covariance de l'état augmenté, donc des paramètres.

---O--- / TRUCTURE DU PROGRAMME ---O---

La complexité, le volume des calculs (surtout lorsque l'ordre du système devient élevé), ainsi que la forme récurrente des équations du filtrage, sont des arguments rendant l'utilisation d'un ordinateur numérique pour l'exploitation d'un filtre de KALMAN presque impérative.

Ainsi, le programme en langage FORTRAN IV qu'on a élaboré était conçu justement, de façon à simuler un filtre de KALMAN discret, relatif aux systèmes linéaires, continus, stationnaires, mono-entrée, mono-sortie dont le modèle d'état pourrait être représenté par

$$\dot{X} = A X + B W$$

$$Z = C X + V$$

où

A : Matrice carrée de dimension $n \times n$

B : Matrice unicolonne de dimension $n \times 1$

C : Matrice uniligne de dimension $1 \times n$

W et V sont des bruits blancs, gaussiens, unidimensionnels agissant respectivement sur le système et sur les mesures.

L'appellation des principales variables intervenant dans le programme étant la suivante :

EVO : Matrice d'évolution du système continu, elle correspond à la matrice A

B : Matrice de commande du système continu

C : est utilisée pour représenter la matrice d'observation aussi bien pour le système continu que pour le système discrétisé.

P : Matrice d'évolution du système discrétisé.

Q : Matrice de commande du système discrétisé.

PT, QT, CT sont respectivement les transposées de P, , C

COV : Matrice de covariance des erreurs d'estimation

COR : Matrice de correction unicolonne

XEST: Estimation du vecteur d'état X

COVEM: Covariance des erreurs de mesure

TRACE: Trace de la matrice de covariance des erreurs d'estimation.

Enfin, la structure du programme pourrait être clarifiée par les étapes suivantes :

E 1 : Lecture et impression des données.

EVO (I,J) : Eléments de la matrice d'évolution du système continu.

B (I, 1) : Eléments de la matrice de commande du système continu.

C (1, J) : Eléments de la matrice d'observation du système continu.

COV(I,J) : Eléments de la matrice de covariance des erreurs d'estimation initiale.

X EST (I) = Eléments de l'estimation initiale du vecteur d'état.

YM : Mesures effectuées

T : Période d'échantillonnage

COV BS : Covariance du bruit du système W

COV BM : Covariance du bruit de mesure V

EP SA : Précision de calcul de l'exponentielle de AT

EP SB : Seuil au-dessous duquel un pivot est considéré comme nul, lors du calcul du déterminant.

N : Ordre du système

M : Nombre de mesures

E 2 : Calcul du déterminant de la matrice d'évolution

Le calcul est fait par l'appel des sous-programmes RANGE et DETERM.

E 3 : Test du déterminant

Si le déterminant est nul, (EVO singulière) aller à E 5

Si le déterminant est non nul, (EVO régulière) aller à E 4

E 4 : Discrétisation par une méthode "directe"

Le calcul est fait par l'appel des sous-programmes EXPMAT, INV MAT, PROD 1, PROD 2, PROD 3

$P = \exp AT$

$Q = A^{-1} \cdot (\exp AT - I) \cdot B$

$C = C$

E 5 : Discrétisation de la méthode d'Euler

Le calcul est fait en programme principal

$P = I + A \cdot T$

$Q = B \cdot T$

$C = C$

E 6 : TRANSPOSITION DES MATRICES P . Q . C .

Le Calcul est fait en programme principal.

$$PT (I, J) = P (J, I)$$

$$QT (1, J) = Q (I, 1)$$

$$CT (I, 1) = C (1, J)$$

E 7 : CALCUL DES GRANDEURS DE SORTIE POUR LA 1^e SEQUENCE DE
CALCUL (K = 1)

Le calcul est fait en programme principal exclusivement par l'appel des sous-programmes PROD 1, PROD 2, PROD 3,

COV : Déjà donnée

$$COR = COV \cdot CT / (C \cdot COV \cdot CT + COVEM)$$

$$XEST = (UNIT - COR \cdot C) P \cdot XEST + COR \cdot YM (K)$$

$$COVEM = C \cdot COV \cdot CT$$

TRACE : Somme des Eléments diagonaux de COV

E 8 : Calcul des grandeurs de sortie pour les autres séquences le

Calcul est fait presque de la même façon que E 7 .

$$COV = P \cdot (UNIT - COR \cdot C) COV \cdot PT + Q \cdot COVBS \cdot QT$$

$$COR = COV \cdot CT / (C \cdot COV \cdot CT + COVEM)$$

$$XEST = (UNIT - COR \cdot C) P \cdot XEST + COR \cdot YM (K)$$

$$COVEM = C \cdot COV \cdot CT$$

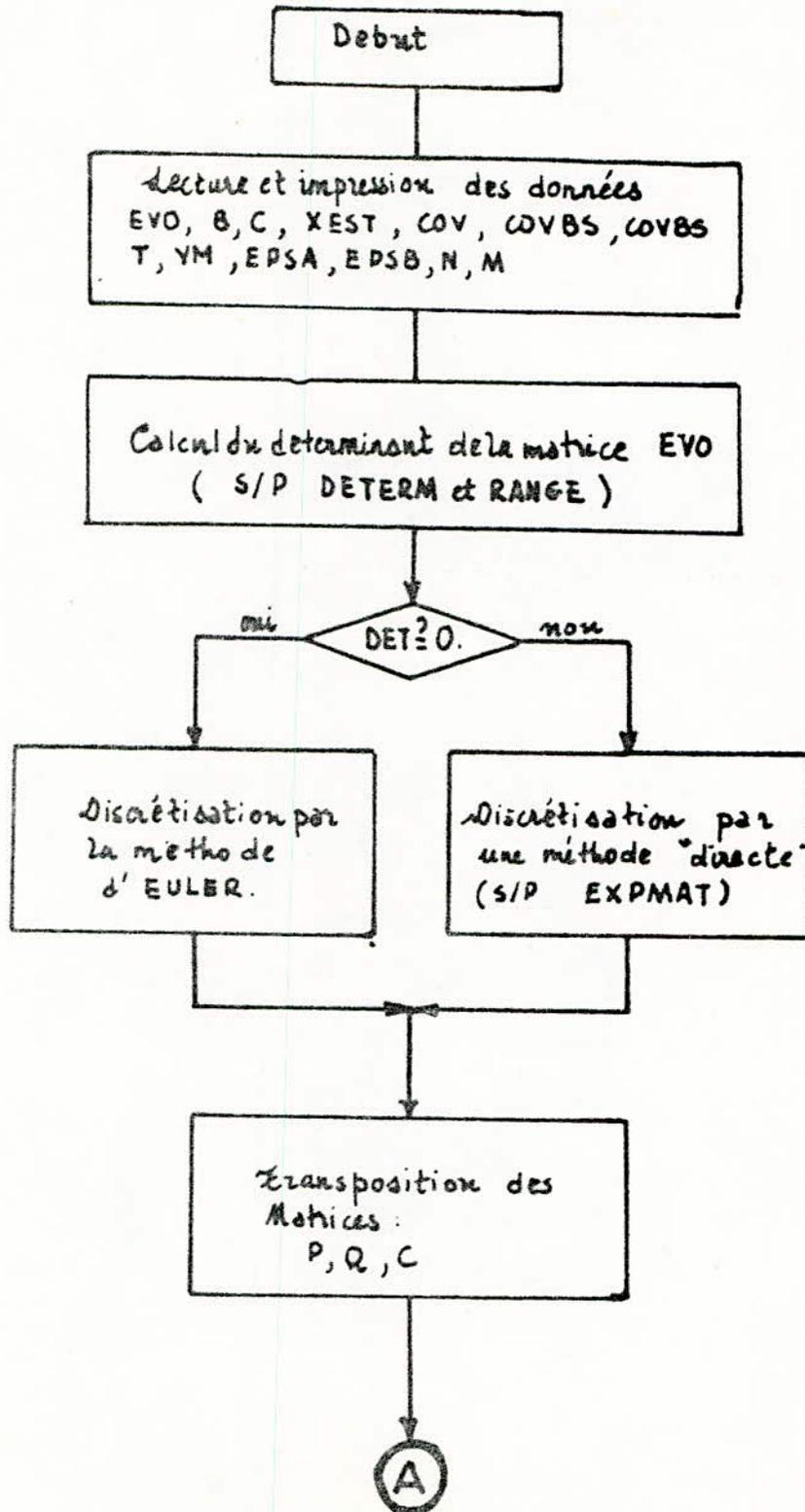
TRACE : Somme des Eléments diagonaux de COV

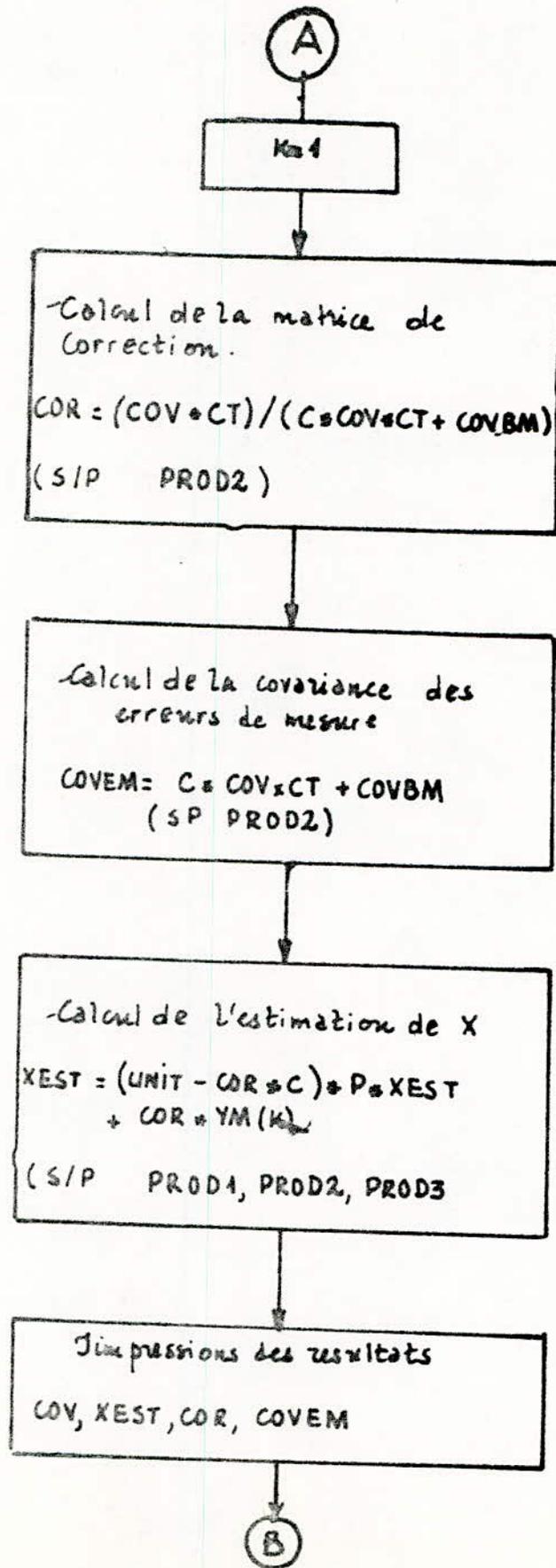
E 9 : TANT QUE K EST INFÉRIEUR A M, REVENIR A E 8

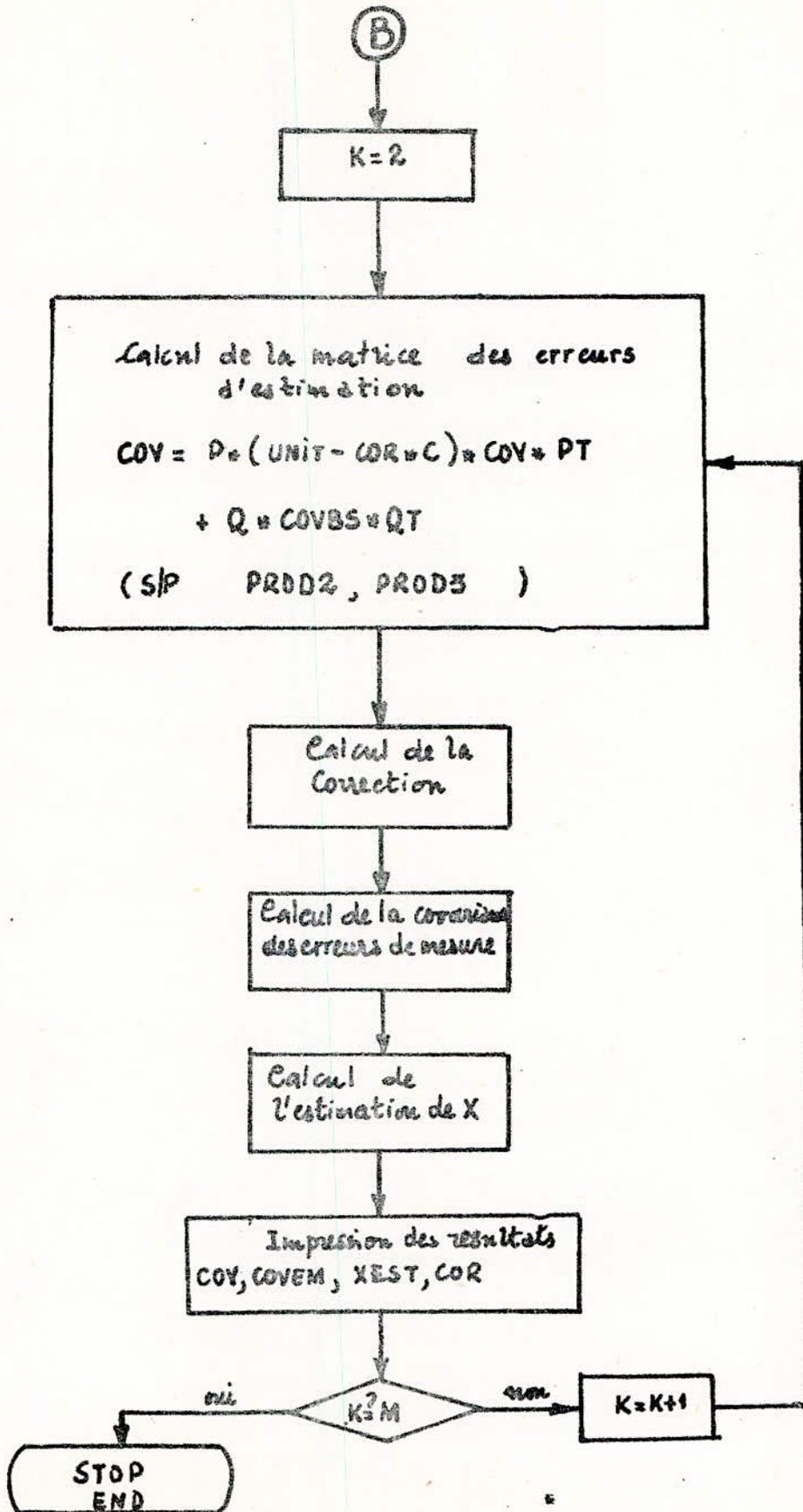
E 10 : FIN

A cet effet, nous présentons dans ce qui suit, les organigrammes du programme principal, des sous programmes, leurs listing correspondants ainsi que les données et résultats du système étudié particulièrement.

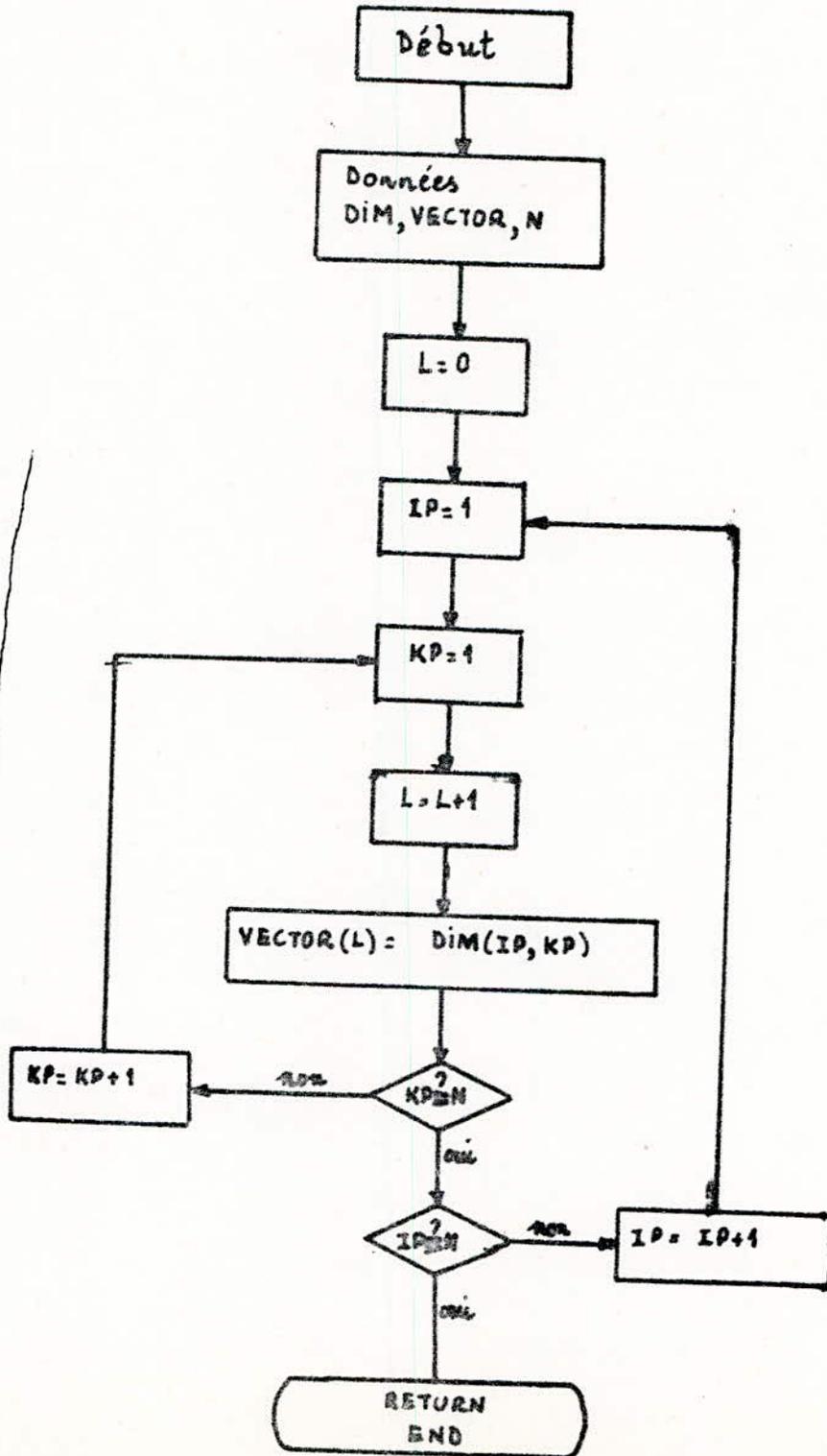
Organigramme du PROGRAMME PRINCIPAL.



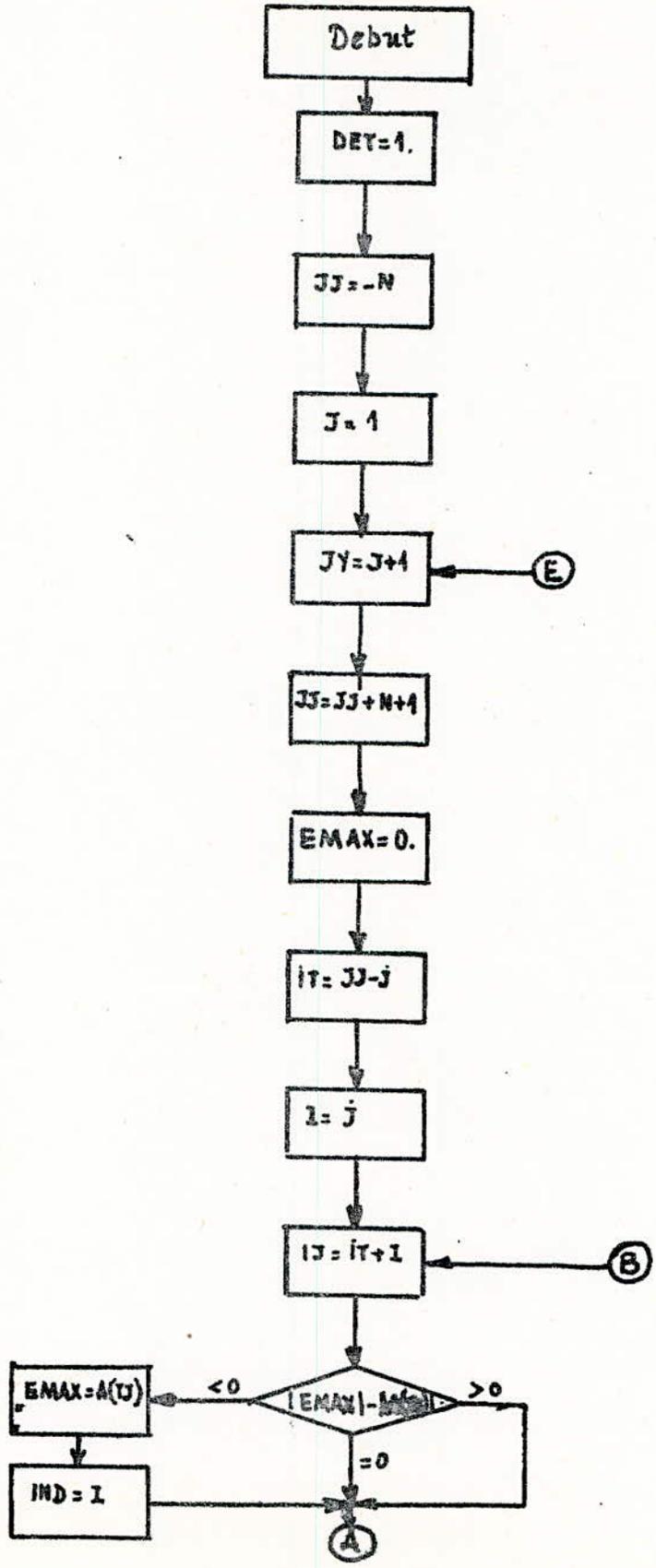


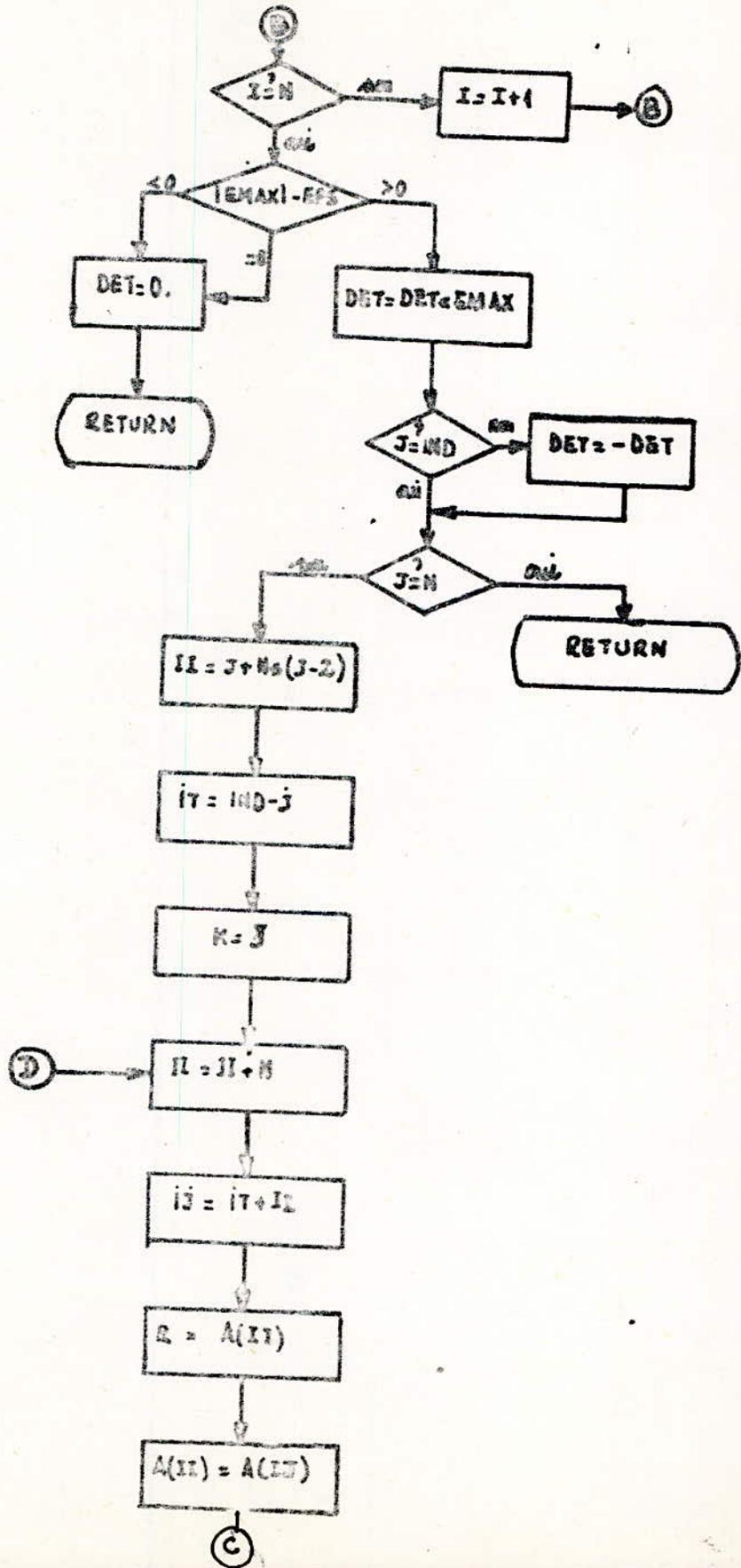


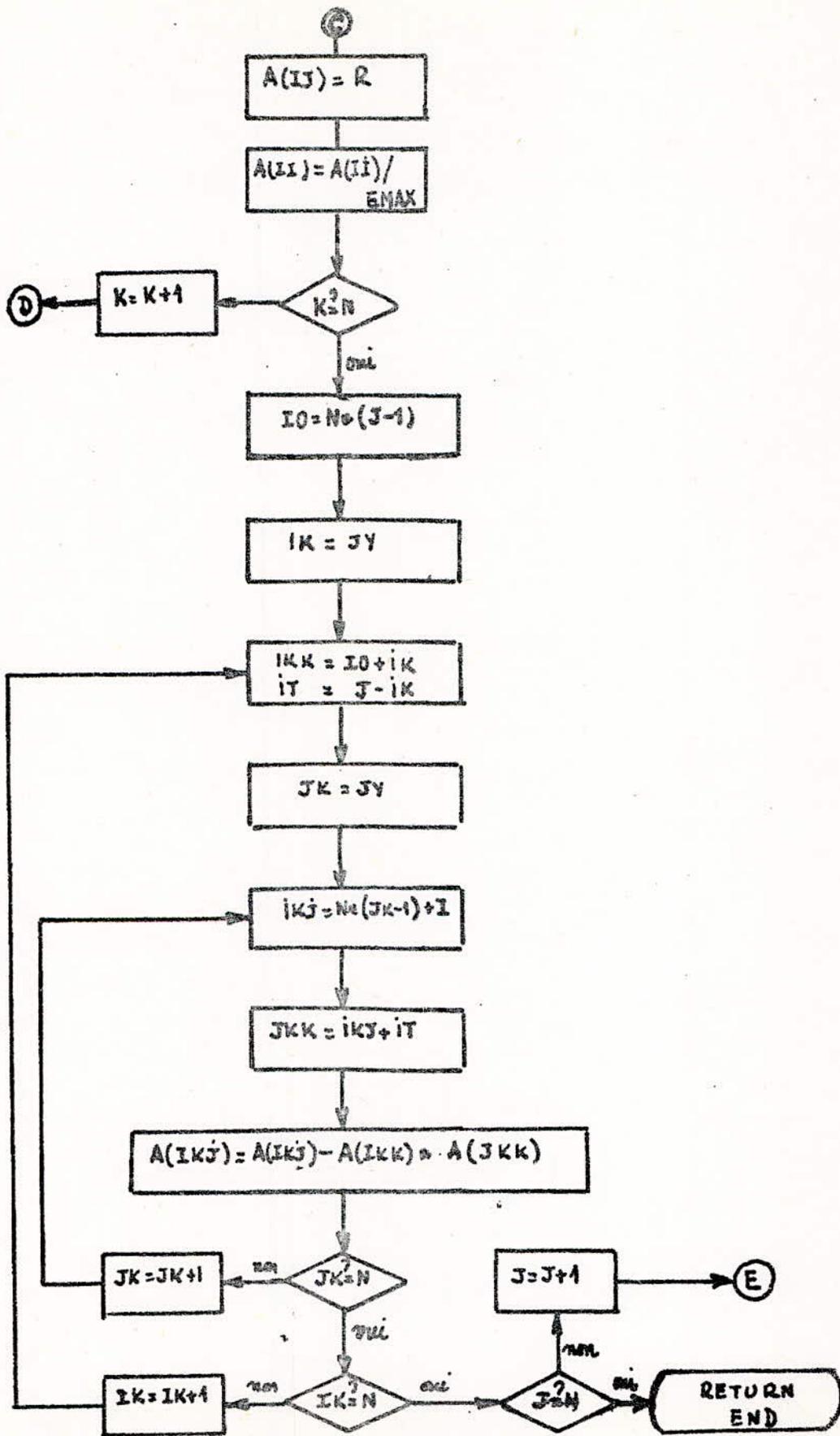
Organigramme du sous programme RANGE.



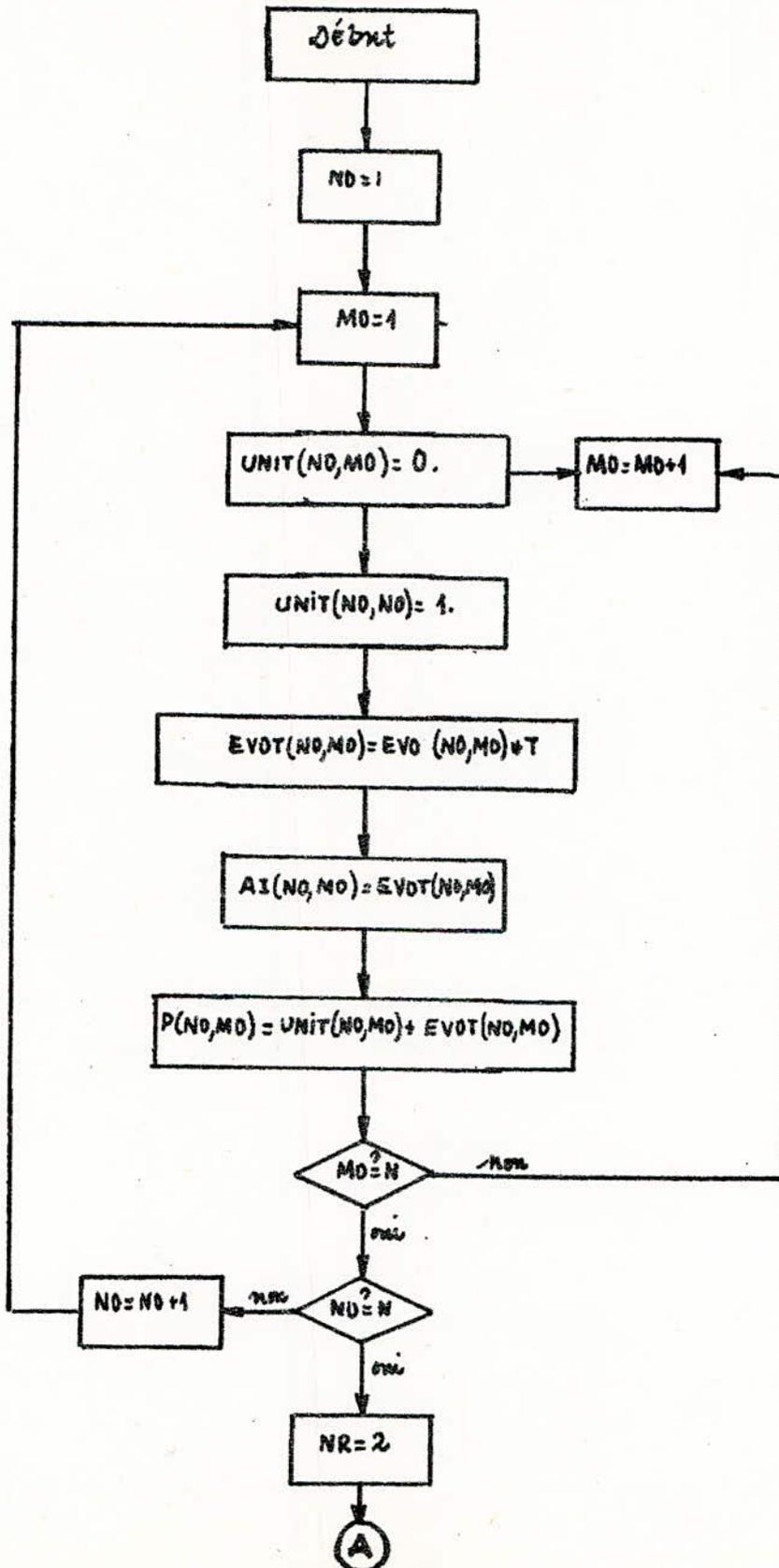
Organigramme du sous-programme DETERM.

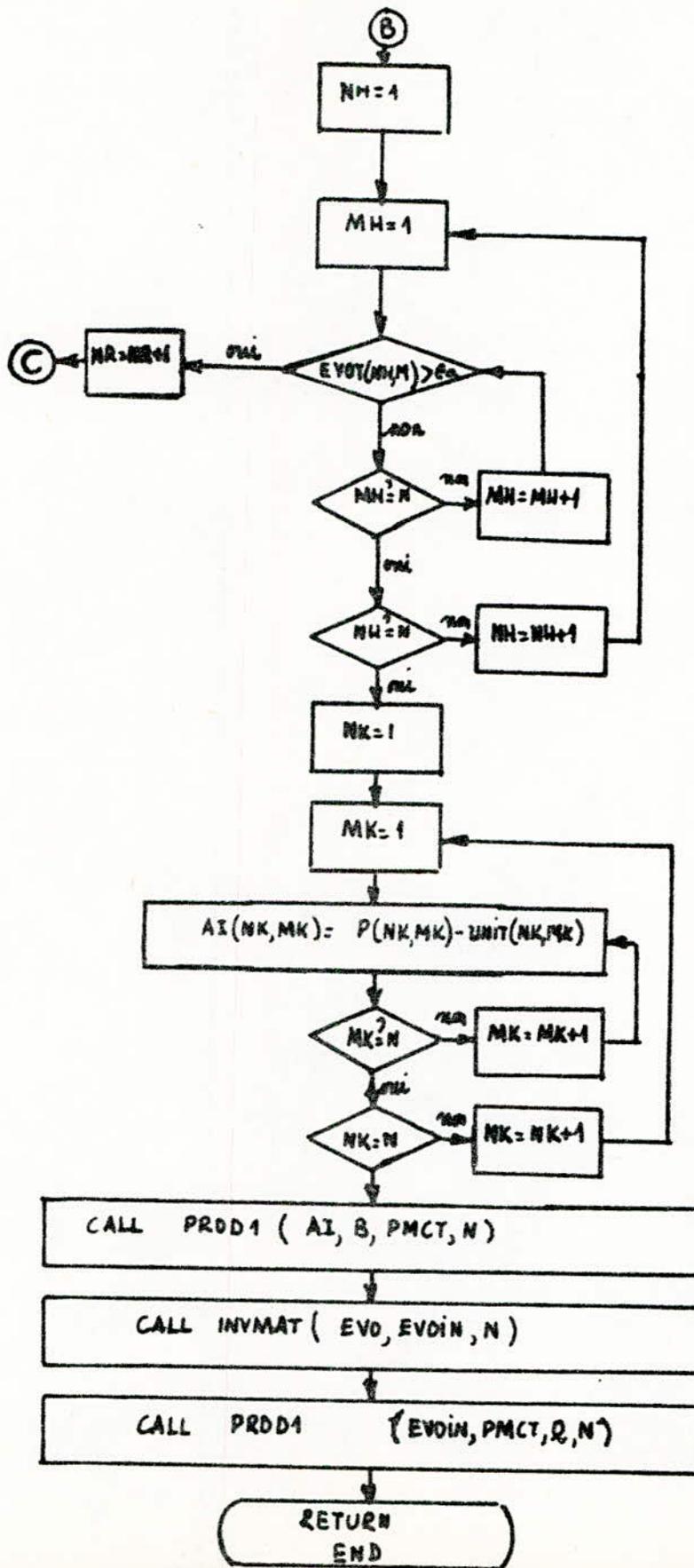




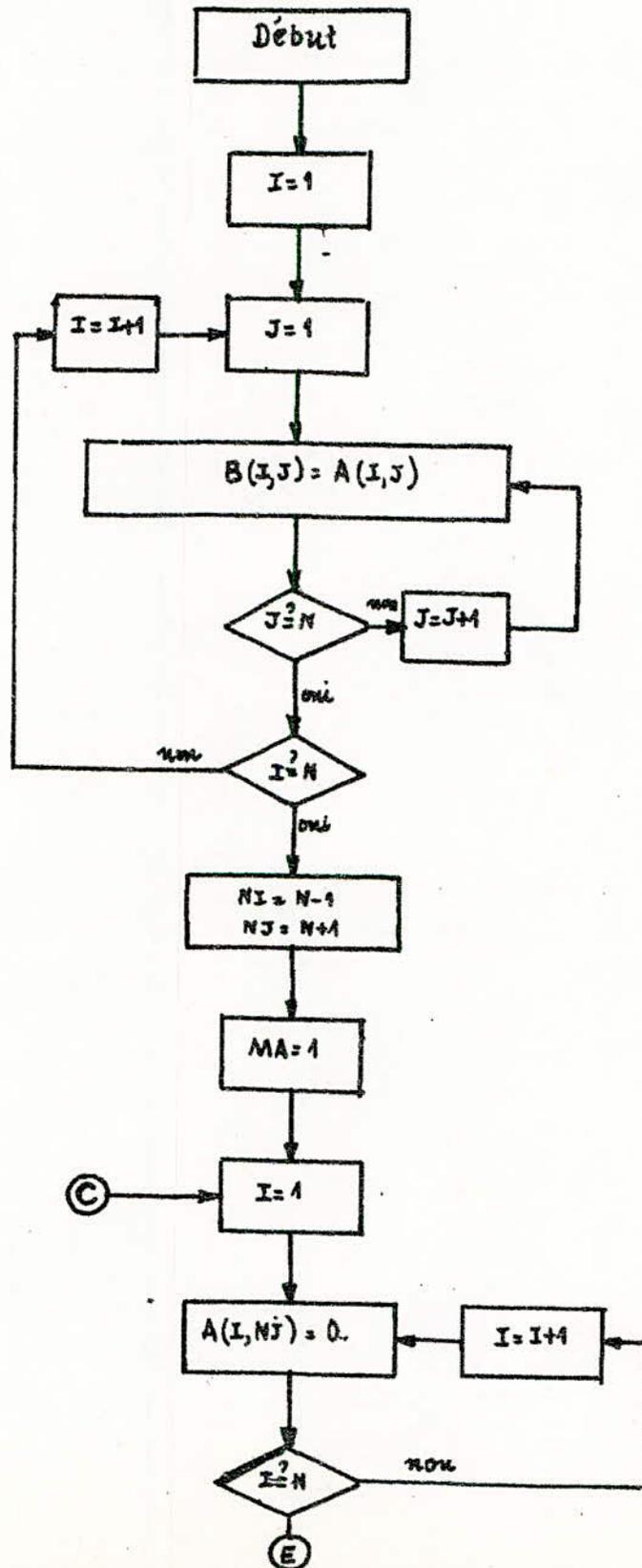


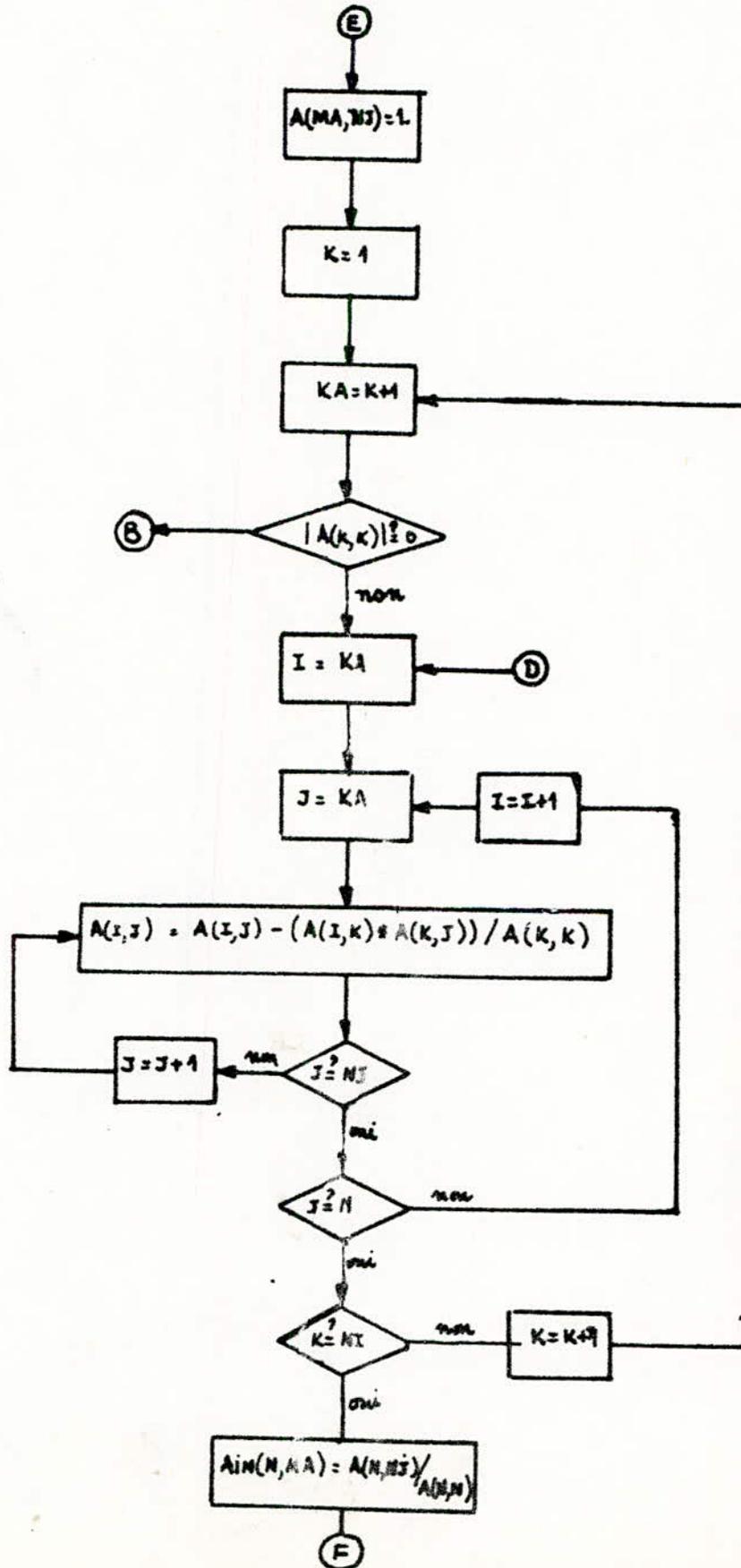
Organigramme du sous programme EXPMAT.

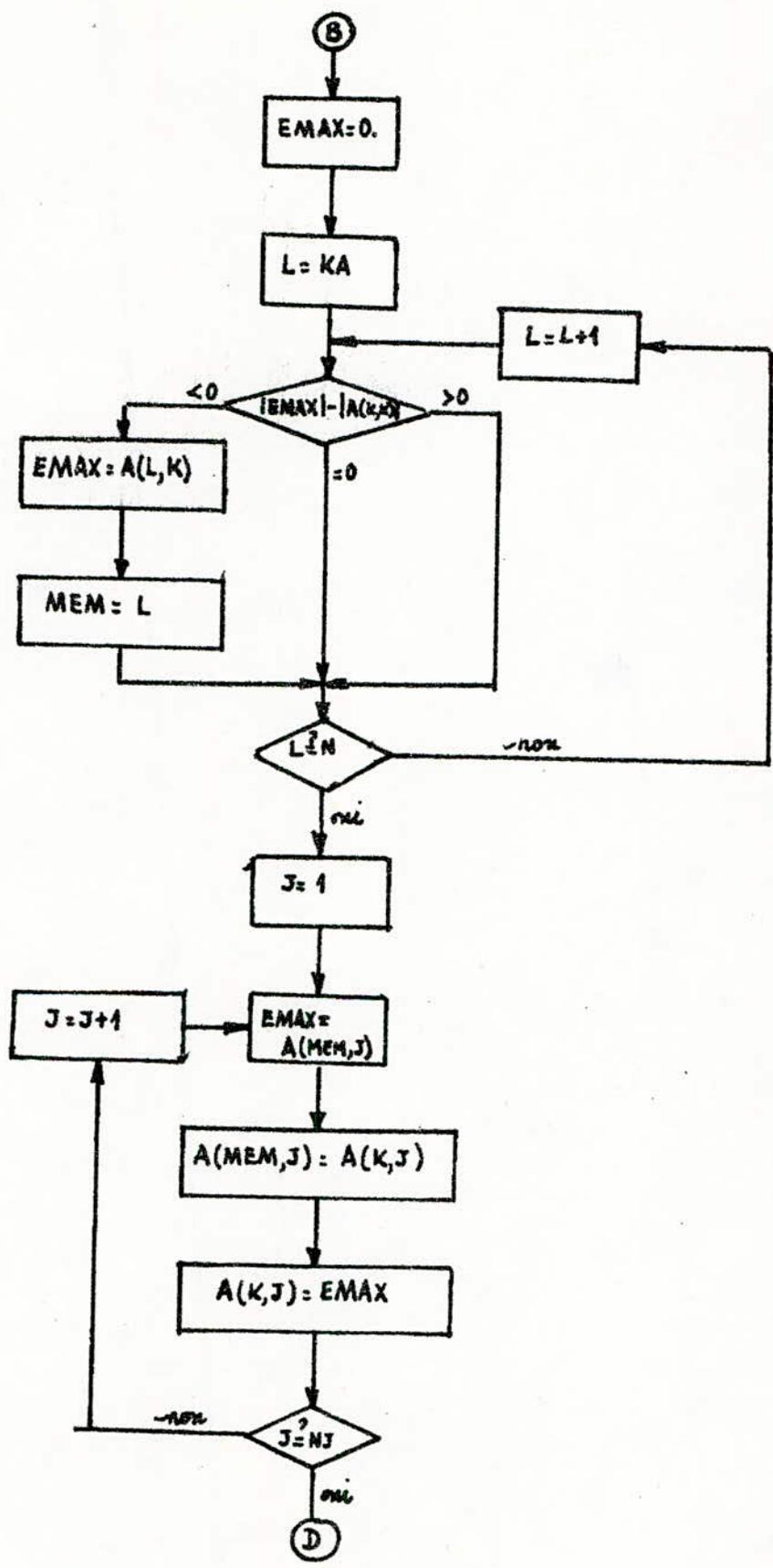


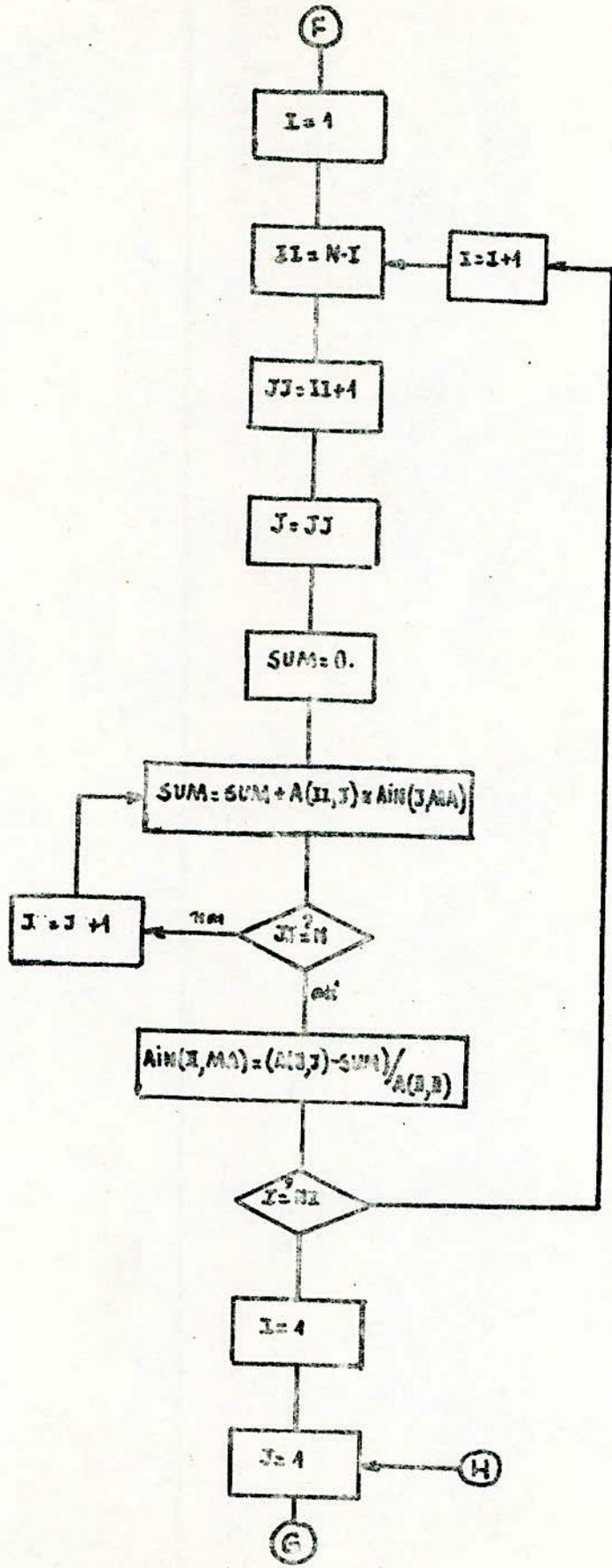


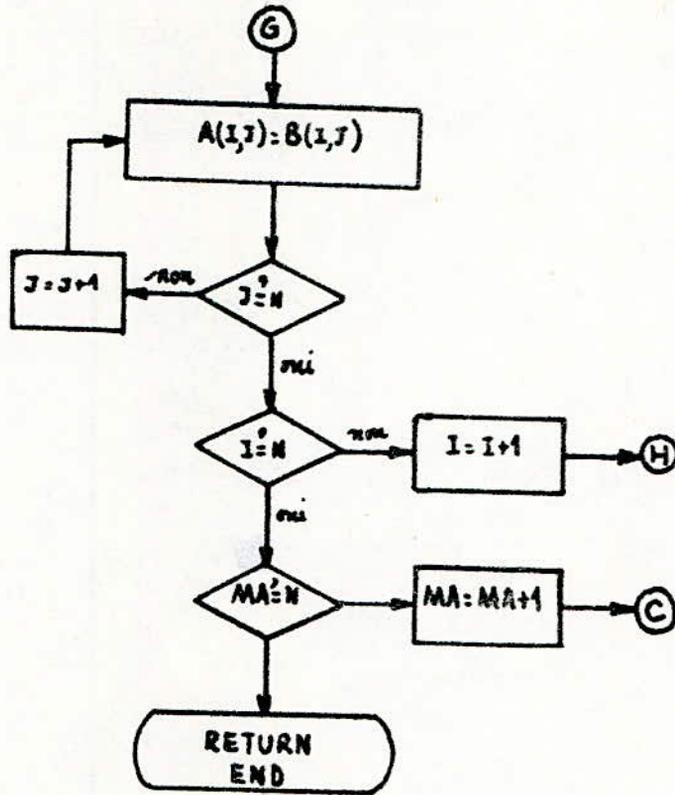
Organigramme du sous-programme INVMAT.



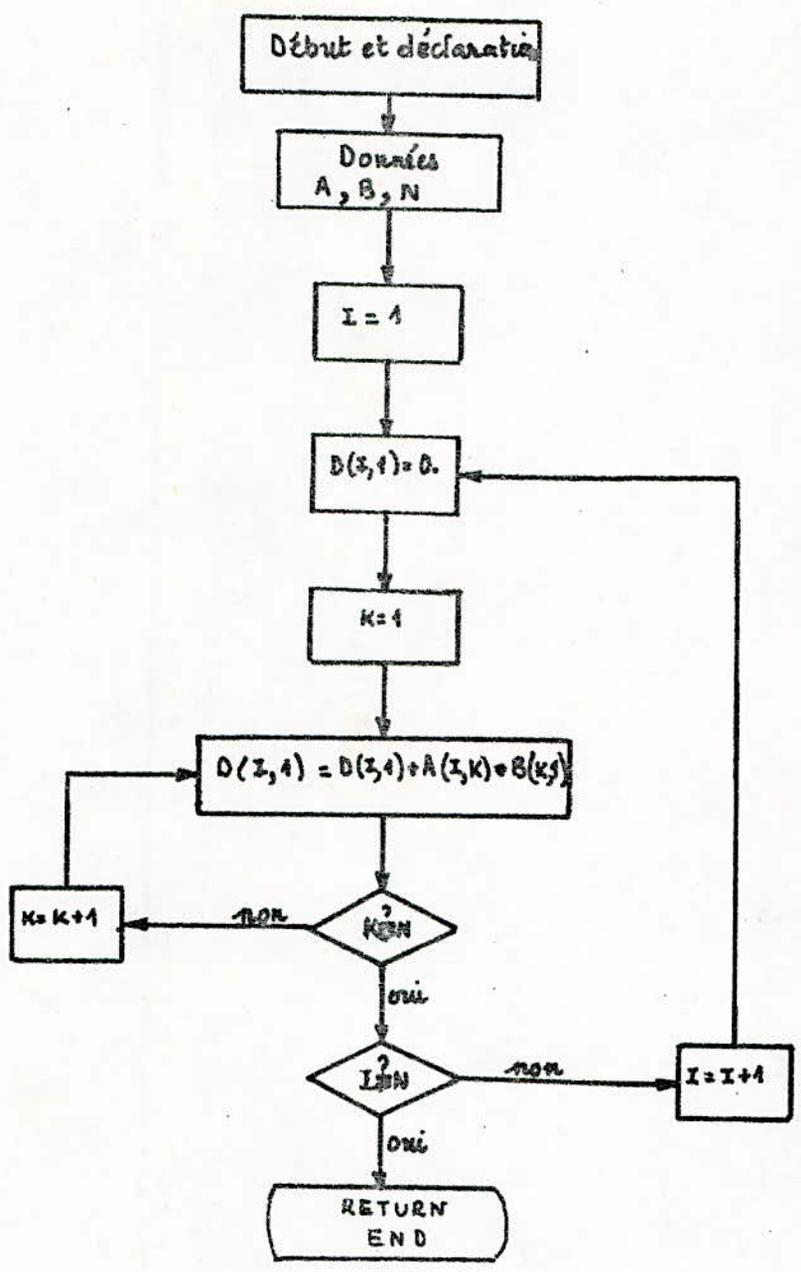




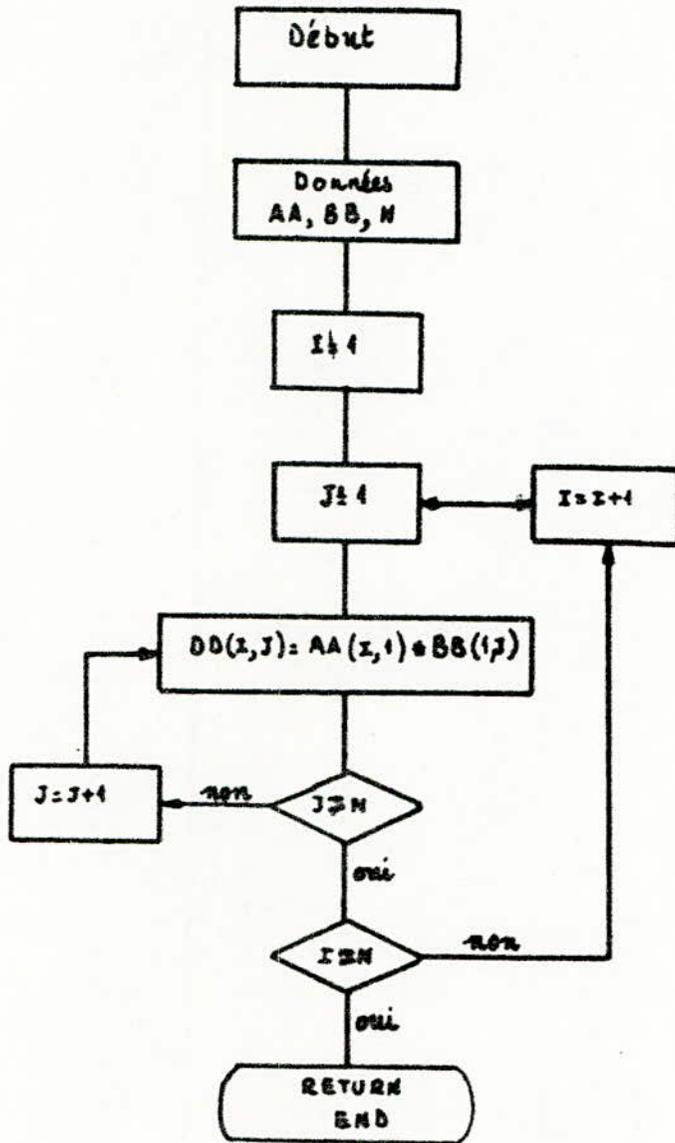




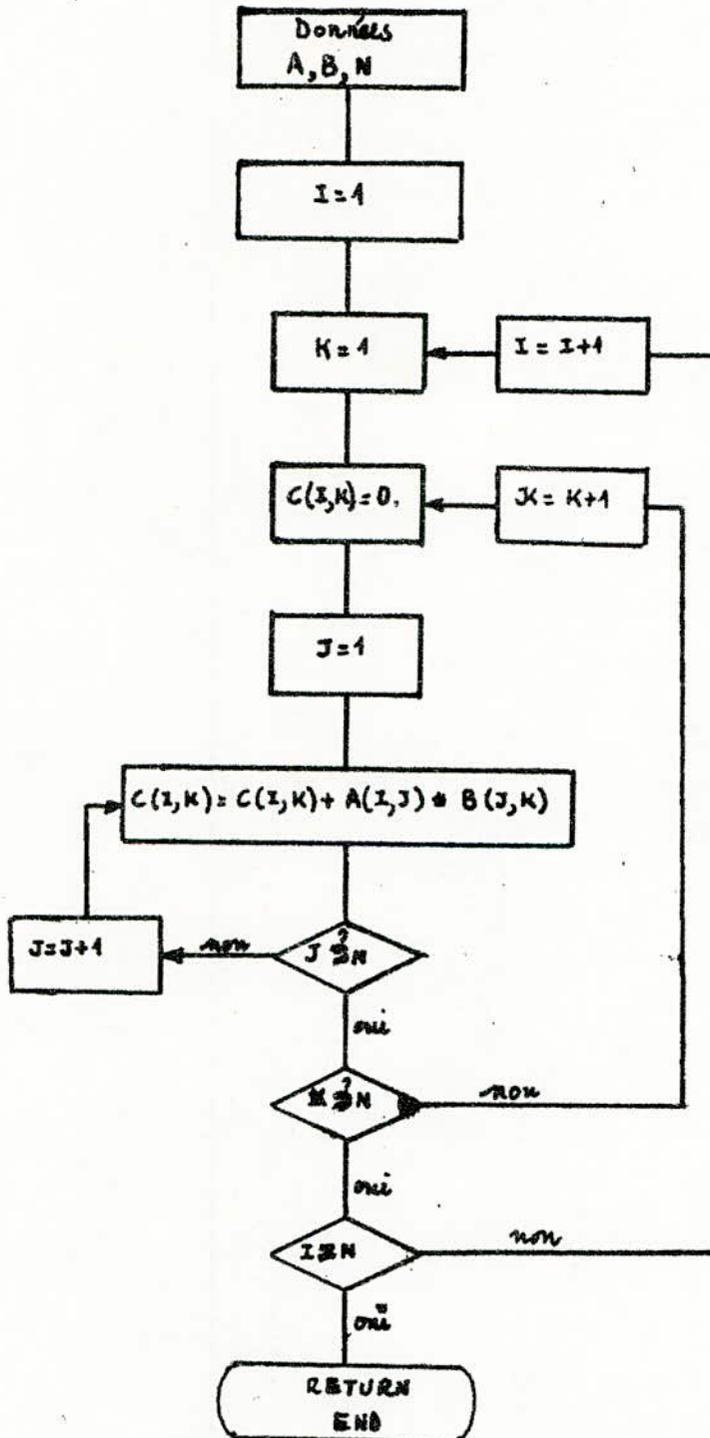
Organigramme du sous-programme PROD1.



Organigramme du sous-programme PROD2.



Organigramme du sous-programme PROD3.



PROGRAMME PRINCIPAL.

C *****
C
C PROGRAMME PRINCIPAL DONNANT
C L'ESTIMATION DU VECTEUR D'ETAT XEST
C LA MATRICE DE CORRECTION COR
C LA MATRICE DE COVARIANCE DES ERREURS D'ESTIMATION COV
C LA COVARIANCE DES ERREURS DE MESURE COVEM

C
C SIGNIFICATION DES SYMBOLES UTILISES
C EVO = MATRICE D'EVOLUTION DU SYSTEME CONTINU
C COVBS = COVARIANCE DU BRUIT DU SYSTEME
C COVBM = COVARIANCE DU BRUIT DE MESURE
C T = PERIODE D'ECHANTILLONNAGE
C YM = MESURES
C P = MATRICE D'EVOLUTION DU SYSTEME DISCRET
C O = MATRICE D'OBSERVATION
C EVOIN = INVERSE DE LA MATRICE D'EVOLUTION
C B = MATRICE DE COMMANDE DU SYSTEME CONTINU
C Q = MATRICE DE COMMANDE DU SYSTEME DISCRET
C N = ORDRE DU SYSTEME
C M = NOMBRES DE MESURES
C EPSA : PRECISION DU CALCUL DE L'EXPONENTIELLE DE LA MATRICE AT
C EPSB : SEUIL AU DESSOUS DUQUEL UN PIVOT EST CONSIDERE COMME NUL

C *****
C
C DIMENSION P (50,50), QT (1,50), COV (50,50), PMCT(50,1), COR(50,1)
C 1, UNIT(50,50), OT (50,1), XEST (50,1), YM (100), EVOT(50,50)?
C 2AI(50,50), EVOIN(50,50), B(50,1), EVO(50,50), VECTOR(2500), Q(50,1),
C 3PMAT(50,50)

C
C LECTURE ET IMPRESSION DES DONNEES
C
C COMMON LEC,IMP

```
LEC=5
IMP=6
PRINT 115
PRINT 1000
READ(LEC,1)N
WRITE(IMP,1100)N
READ(LEC,1)M
1  FORMAT(I3)
   WRITE(IMP,1200)M
   READ(LEC,2)((EVO(I,J),J=1,N),I=1,N),(B(I,1)I=1,N),(C(1,J),J=1,N)
2  FORMAT(8E10.3)
   DO 55 I=1,N
   WRITE(IMP,1400)(EVO(I,J),J=1,N
55  CONTINUE
   WRITE(IMP,1300)(B(I,1),I=1,N)
   WRITE(IMP,1400)(C(1,J),J=1,N)
   READ(LEC,4)((COV(I,J),J=1,N),I=1,N),(XEST(I,1),I=1,N)
4  FORMAT(6E10.3)
   DO 65 I=1,N
   WRITE(IMP,1500)(COV(I,J),J=1,N),XEST(I,1)
65  CONTINUE
   READ(LEC,5)(YM(K),K=1,M)
5  FORMAT(4E10.3)
   WRITE(IMP,1600)(YM(K),K=1,M)
   READ(LEC,3) T
   WRITE(IMP,1700) T
   READ(LEC,3) COVBS
   WRITE(IMP,1800) COVBS
   READ(LEC,3)COVBM
   WRITE(IMP,1900) COVBM
   READ(LEC,3) EPSA
   WRITE(IMP,2000) EPSA
   READ(LEC,3) EPSB
   WRITE(IMP,2100) EPSB
3  FORMAT(E10.3)
   PRINT 115
   PRINT 116
```

```
C
C   CALCUL DU DETERMINANT DE LA MARICE D'EVOLUTION
C
      CALL RANGE(EVO,N,VECTOR)
      CALL DETERM(VECTOR,N,COVEM,EPSB)
      WRITE(IMP,2200) COVEM
      IF(COVEM.EQ.0) GO TO 100
C
C   DISCRETISATION DU SYSTEME PAR LA METHODE DIRECTE
C
      CALL EXPMAT(EVO,B,P,Q,T,EPSA,N)
      GO TO 500
C
C   DISCRETISATION DU SYSTEME PAR LA METHODE D'EULER
C
      DO 60 NT=1,N
      Q(NT,1)=B(NT,1)*T
      DO 60 MT=1,N
      UNIT(NT,MT)=0.
      UNIT (NT,NT)=1.
      P(NT,MT)=UNIT(NT,MT)+EVO(NT,MT)*T
60   CONTINUE
500  PRINT 103
      DO 80NB=1,N
      PRINT 104,Q(NB,1)
80   CONTINUE
      PRINT 101
      DO 70 IC=1,N
      PRINT 102,(P(IC,IE),IE=1,N)
70   CONTINUE
C
C   TRANSPOSITION DES MATRICES P , Q , C.
C
      DO 90 I=1,N
      QT(1,I)=Q(I,1)
      CT(I,1)=C(1,I)
      DO 90 J=1,N
```

```
EVO(I,J)=P(J,I)
UNIT(I,J)=0.
UNIT(I,I)=1.
90  CONTINUE
    PRINT 105
    DO 290 JX=1,N
      PRINT 102,(EVO(JX,JR),JR=1,N)
      PRINT 106
      PRINT 102,(QT(1,NB),NB=1,N)
      PRINT 107
      DO 110 NE=1,N
        PRINT 104,CT(NE,1)
110  CONTINUE
C
C  CALCUL DE XEST, COR, COV, COVEM.
C
      CALL PROD1(COV,CT,PMCT,N)
      COVEM=0.
      TRACE=0.
      DO 120 K=1,N
        COVEM=COVEM+C(1,K)*PMCT(K,1)
        TRACE=TRACE+COV(K,K)
120  CONTINUE
      COVEM=COVEM+COBM
      DO 130 ID=1,N
        COR(ID,1)=PMCT(ID,1)/COVEM
130  CONTINUE
      CALL PROD2(COR,C,EVOIN,N)
      DO 140 LP=1,N
        DO 140 LT=1,N
          EVOIN(LP,LP)=UNIT(LP,LT)-EVOIN(LP,LT)
140  CONTINUE
      CALL PROD3(EVOIN,P,AI,N)
      CALL PROD1(AI,XEST,PMCT,N)
      K=1
      PRINT 3000
      PRINT 108,K
```

```
DO 160 LL=1,N
XEST(LL,1)=COR(LL,1)*YM(K)
XEST(LL,1)=XEST(LL,1)+PMCT(LL,1)
160 CONTINUE
PRINT 109
PRINT 3100
DO 170 MI=1,N
PRINT 102,(COV(MI,MI),MI=1;N)
1170 CONTINUE
PRINT 118
PRINT 3100
PRINT 117,TRACE
PRINT 111
PRINT 3200
PRINT 112,COR(1,1),XEST(NJ,1)
DO 180 NJ=2,N
PRINT 113,COR(NJ,1),XEST(NJ,1)
180 CONTINUE
DO 190 K=2,M
PRINT 3000
PRINT 108,K
CALL PROD2(COR,C,PMAT,N)
DO 210 NF=1,M
DO 210 MF=1,N
PMAT(NF,MF)=UNIT(NF,MF)-PMAT(NF,MF)
210 CONTINUE
CALL PROD3(P,PMAT,AI,N)
CALL PROD3(AI,COV,PMAT,N)
CALL PROD3(PMAT,EVO,AI,N)
CALL PROD2(Q,QT,PMAT,N)
DO 220 NA=1,N
DO 220 MA=1,N
PMAT(NA,MA)=PMAT(NA,MA)*COVBS
COV(NA,MA)=AI(NA,MA)+PMAT(NA,MA)
220 CONTINUE
CALL PROD1(COV,CT,PMCT,N)
```

```
TRACE=0.
COVEM=0.
DO 230 KC=1,N
COVEM=COVEM+C(1,KC)*PMCT(KC,1)
TRACE=TRACE+COV(KC,KC)
230 CONTINUE
COVEM=COVEM+COVBM
DO 240 LA=1,N
COR(LA,1)=PMCT(LA,1)/COVEM
240 CONTINUE
CALL PROD2(COR,C,EVOT,N)
DO 250 NC=1,N
DO 250 MC=1,N
EVOT(NC,MC)=UNIT(NC,MC)-EVOT(NC,MC)
250 CONTINUE
CALL PROD3(EVOT,P,AI,N)
CALL PROD1(AI,XEST,EMCT,N)
DO 260 ND=1,N
XEST(ND,1)=COR(ND,1)*YM(K)
XEST(ND,1)=XEST(ND,1)+PMCT(ND,1)
260 CONTINUE
PRINT 109
PRINT 3100
DO 270 NM=1,N
PRINT 102,(COV(NM,MM),MM=1,N)
270 CONTINUE
PRINT 118
PRINT 3100
PRINT 117,TRACE
PRINT 111
PRINT 3200
PRINT 112,COR(1,1),XEST(1,1),COVEM
DO 280 NN=2,N
PRINT 113,COR(NN,1),XEST(NN,1)
280 CONTINUE
190 CONTINUE
```

PRINT 115
PRINT 114

C
C
C

FORMATS D'IMPRESSION

- 101 FORMAT(///,30X,38HMATRICE D'EVOLUTION DU SYSTEME DISCRET,//)
102 FORMAT(/,30X,2(E13.6,3X),/)
103 FORMAT(/,30X,38HMATRICE DE COMMANDE DU SYSTEME DISCRET,//)
104 FORMAT(/,53X,E13.6,/)
105 FORMAT(/,30X,15HTRANSPOSEE DE P,/)
106 FORMAT(/,30X,15HTRANSPOSEE DE Q,/)
107 FORMAT(/,30X,15HTRANSPOSEE DE C,/)
108 FORMAT(1H1,10X,3HK =,I3,/)
109 FORMAT(/,30X,47HMATRICE DE COVARIANCE DES ERREURS D'ESTIMATION.)
111 FORMAT(/,30X,21HMATRICE DE CORRECTION,11X,16HESTIMATION DE X,11X
1,32HCOVARIANCE DES ERREURS DE MESURE)
112 FORMAT(/,30X,E13.6,19X,E13.6,13X,E13.6,/)
113 FORMAT(/,30X,E13.6,19X,E13.6,/)
114 FORMAT(1H1,3C (/),50X,'END OF EXECUTABLE INSTRUCTIONS',/,50X,'END O
1F COMPUTATIONS',/,50X,'END OF JOB',/)
115 FORMAT(1H1,250(/),/)
116 FORMAT(1H1,20X,21H***** RESULTATS *****,///)
117 FORMAT(/,30X,E13.6,/)
118 FORMAT(/,30X,47HTRACE DE LA COVARIANCE DES ERREURS D'ESTIMATION)
1000 FORMAT(1H1,20X,76HDONNEES DANS L'ORDRE SUIVANT:N,M,EVO,B,C,COV,XES
1T,YM,COVBS,COVBM,EPSA,EPSB,/)
1100 FORMAT(/,50X,21HORDRE DU SYSTEME N = ,I2,/)
1200 FORMAT(/,50X,22HNOMBRE DE MESURES M = ,I3,/)
1300 FORMAT(/,50X,E10.3,/)
1400 FORMAT(/,30X,2(E10.3,5X),/)
1500 FORMAT(/,30X,2(E10.3,5X),10X,E10.3,/)
1600 FORMAT(/,30X,E10.3,/)
1700 FORMAT(/,30X,4HT = ,E10.3,/)
1800 FORMAT(/,30X,8HCOVBS = ,E10.3,/)
1900 FORMAT(/,30X,8HCOVBM = ,E10.3,/)
2000 FORMAT(/,30X,7HEPSA = ,E10.3,/)

- 57 -

```
2100 FORMAT(//,30X,7HEPSB = ,E10.3,/ )
2200 FORMAT(//,30X,8HDETER = ,E18.6,// )
3000 FORMAT(30X,100(1H-),//)
3100 FORMAT(30X,47(1H-),// )
3200 FORMAT(30X,21(1H-),11X,16(1H-),11X,32(1H-),/ )
STOP
END
```

- SUBROUTINE RANGE -

```
C *****
C S/P DE RANGEMENT DE LA MATRICE DANS UN VECTEUR POUR CALCULER
C LE DETERMINANT DE CETTE MATRICE
C DIM : MATRICE A RANGER DANS VECTEUR
C JJ : DIMENSION DU VECTEUR VECTOR
C VECTOR: VECTEUR COLONNE CONTENANT LA MATRICE DIM
C *****
SUBROUTINE RANGE ( DIM , JJ , VECTOR )
DIMENSION DIM ( 50 , 50 ) , VECTOR ( 2500 )
L = 0
DO 16 IP = 1 , JJ
DO 16 KP = 1 , JJ
L = L + 1
VECTOR ( L ) = DIM ( IP , KP )
16 CONTINUE
RETURN
END
```

- SUBROUTINE DETERM -

C *****

C CALCUL DU DETERMINANT D'UNE MATRICE QUELCONQUE

C A : MATRICE UNICOLONNE CONTENANT LA MATRICE CARREE

C DET : VALEUR DU DETERMINANT

C N : DIMENSION DE LA MATRICE CARREE

C EPS : SEUIL AU DESSOUS DUQUEL UN PIVOT EST CONSIDERE COMME NUL

C *****

SUBROUTINE DETERM (A,N,DET,EPS)

DIMENSION A (2500)

DET = 1.

JJ = N

DO 6 J=1,N

JY = J + 1

JJ = JJ + N + 1

EMAX = 0.

IT = JJ - J

DO 2 I = J , N

IJ = IT + I

IF (ABS (EMAX) - ABS (A (IJ))) 1 , 2 , 2

1 EMAX = A (IJ)

IND = I

2 CONTINUE

IF (ABS (EMAX) - EPS) 3, 3, 4

3 DET = 0.

RETURN

4 DET = DET * EMAX

IF (J.NE.IND) DET = - DET

IF (J.EQ.N) RETURN

II = J+N* (J - 2)

IT = IND - J

DO 5 K = J , N

II = II + N

IJ = II + IT

R = A (II)

A (II) = A (IJ)

A (IJ) = R

A(II) = A(IJ) / EMAX

```
5  CONTINUE
   IO = N * ( J - 1 )
   DO 6 IK = JY , N
     IKK = IO + IK
     IT = J - IK
     DO 6 JK = JY , N
       IKJ = N * ( JK - 1 ) + I
       JKK = IKJ + IT
       A ( IKJ ) = A ( IKJ ) - A ( IKK ) * A ( JKK )
6  CONTINUE
   RETURN
   END
```

SOUS - PROGRAMME INVMAT.

```
C *****
C
C SOUS PROGRAMME D'INVERSION D'UNE MATRICE CARREE
C A : MATRICE A INVERSER
C AIN: MATRICE INVERSE DE A
C N : DIMENSION DE LA MATRICE A
C
C *****
C
C SUBROUTINE INVMAT(A,AIN,N)
C DIMENSION A(50,51),B(50,50),AIN(50,50)
C DO 1 I=1,N
C DO 1 J=1,N
1 CONTINUE
C NI=N-1
C NJ=N+1
C DO 2 MA=1,N
C DO 3 I=1,N
C A(I,NJ)=0.
3 CONTINUE
C A(MA,NJ)=1.
C DO 5 K= 1,N
C KA =K+1
C IF(A(K,K).EQ.0) GO TO 6
4 DO 5 I=KA,N
C DO 5 J=KA,NJ
C A(I,J)=A(I,J)-(A(I,K)*A(K,K))/ A(K,K)
5 CONTINUE
C GO TO 10
6 EMAX=0.
C DO 8 L=KA,N
C IF(ABS(EMAX)-ABS(A(L,K))) 7,8,8
C )
```

```
7   EMAX=A(L,K)
    MEM=L
8   CONTINUE
    DO 9 J=1,NJ
      EMAX=A(MEM,J)
      A(MEM,J)=A(K,J)
      A(K,J)=EMAX
9   CONTINUE
    GO TO 4
10  AIN(N,MA)=A(NI,NJ)/A(N,N)
    DO 12 I=1,NI
      II=N-I
      JJ=II+1
      DO 11 J=JJ,N
        SUM=0.
        SUM=SUM+A(II,J)*AIN(J,MA)
11  CONTINUE
      AIN(II,MA)=(A(II,NJ)-SUM)/A(II,II)
12  CONTINUE
    DO 13 I=1,N
      DO 13 J=1,N
        A(I,J)=B(I,J)
13  CONTINUE
2   CONTINUE
    RETURN
    END
```

SOUS - PROGRAMME EXPMAT.

```
C *****
C
C S/P DE D'ISCRETISATION DU SYSTEME CONTINU EN UTILISANT
C L'EXPONENTIELLE ET L'INVERSE DE LA MATRICE D'EVOLUTION
C EVO : MATRICE D'EVOLUTION DU SYSTEME CONTINU
C B : MATRICE DE COMMANDE DU SYSTEME CONTINU
C P : MATRICE D'EVOLUTION DU SYSTEME DISCRET
C Q : MATRICE DE COMMANDE DU SYSTEME DISCRET
C T : PERIODE D'ECHANTILLONNAGE
C EPSA: PRECISION DE CALCUL DE L'EXPONENTIELLE
C N : ORDRE DU SYSTEME
C
C *****
C
C CALCUL DE LA MATRICE D'EVOLUTION DU SYSTEME DISCRET
C
SUBROUTINE EXPMAT(EVO,B,P,Q,T,EPSA,N)
DIMENSION EVO(50,50),B(50,1),P(50,50),Q(50,1),PMCT(50,1),EVOT(50,
150),EVOIN(50,50),AI(50,50),UNIT(50,50)
DO 10 NO=1,N
DO 10 MO=1,N
UNIT(NO,MO)=0.
UNIT(NO,NO)=1.
EVOT(NO,MO)=EVO(NO,MO)*T
AI(NO,MO)=EVOT(NO,MO)
P(NO,MO)=UNIT(NO,MO)+EVOT(NO,MO)
10 CONTINUE
NR=2
300 CALL PROD3(AI,EVOT,EVION,N)
DO 20 NP=1,N
DO 20 MP=1,N
```

```
P(NP,MP)=P(NP,MP)+EVOIN(NP,MP)/NR
20 CONTINUE
DO 30 NG=1,N
DO 30 MG=1,N
EVOT(NG,MG)=EVION(NG,MG)/NR
30 CONTINUE
DO 40 NH=1,N
DO 40 MH=1,N
IF(EVOT(NH,MH).GT.EPSA) GO TO 200
40 CONTINUE
GO TO 400
200 NR=NR+1
GO TO 300

C
C CALCUL DE LA MATRICE DE COMMANDE DU SYSTEME DISCRET
C
400 DO 50 NK=1,N
DO 50 MK=1,N
AI(NK,MK)=P(NK,MK)-UNIT(NK,MK)
50 CONTINUE
CALL PROD1(AI,B,PMCT,N)
CALL INVMAT(EVO,EVOIN,N)
CALL PROD1(EVOIN,PMCT,Q,N)
RETURN
END
```

- SOUS PROGRAMME PROD 1 -

SOUS PROGRAMME DE MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN
VECTEUR COLONNE

A : MATRICE CARREE

B : VECTEUR UNICOLONNE

D : VECTEUR PRODUIT DE A PAR B

N : DIMENSION DE A

SUBROUTINE PROD 1 (A , B , D , N)

DIMENSION A (50 , 50) , B (50 , 1) , D (50 , 1)

DO 10 I = 1 , N

D (I , 1) = 0

DO 10 K = 1 , N

D (I , 1) = D (I , 1) + A (I , K) * B (K , 1)

CONTINUE

RETURN

END

- SOUS PROGRAMME PROD 2 -

```
C *****
C SOUS PROGRAMME DE MULTIPLICATION D'UN VECTEUR COLONNE PAR
C UN VECTEUR LIGNE
C AA : MATRICE UNICOLONNE
C BB : MATRICE UNILIGNE
C DD : MATRICE CARREE PRODUIT DE AA PAR BB
C N : DIMENSION DES VECTEURS
C *****

SUBROUTINE PROD 2 ( AA, BB, DD, N )
DIMENSION AA ( 50,1 ), BB ( 1,50 ), DD ( 50 , 50 )
DO 11 I = 1 , N
DO 11 J = 1 , N
DD ( I , J ) = 0.
DD ( I , J ) = DD ( I,J ) + AA ( I , 1 ) * BB ( 1 , J )
11 CONTINUE
RETURN
END
```

- SUBROUTINE PROD 3 -

```
C *****
C   SOUS PROGRAMME DONNANT LE PRODUIT DE DEUX MATRICES
C   A : PREMIERE MATRICE
C   B : DEUXIEME MATRICE
C   C : MATRICE PRODUIT DE A PAR B
C *****
SUBROUTINE PROD 3 ( A , B , C , N )
DIMENSION A ( 50 , 50 ) , B ( 50 , 50 ) , C ( 50 , 50 )
DO 2 I = 1 , N
DO 2 K = 1 , N
C(I,K) = 0
DO 2 J = 1 , N
2  C(I,K) = C(I,K)+ A ( I , J ) * B ( J , K )
RETURN
END
```

ANNEXES

G R A N D E U R S	V A L E U R S
N : Ordre du système	002
M : Nombre de mesures	004
EVO : Matrice d'évolution	0.000 E+00 0.100E+01 0.000 E+00 0.000E+00
B : Matrice de Commande	0.000 E + 00 0.000 E + 00
C : Matrice d'Observation	0.100 E + 01 0.000E+00
T : Période d'Echantillonnage	0.100 E + 01
COV : Matrice de covariance des erreurs d'estimations initiale	0.300E+01 0.000E+00 0.000E+00 0.300E+01
XEST : Estimation initiale du vecteur d'Etat	0.000 E + 00 0.000 E + 00
COVBS : Covariance du bruit du système	0.000 E + 00
COVEM : Covariance du bruit de mesure	0.100 E + 00
EPSA : Precision du calcul de l'exponentielle	0.100 E - 11
EPSB : Seuil de nullité des pivots (Déterminant)	0.100 E - 11

RESULTS.

MATRICE P
 0.100000E+01 0.100000E+01

MATRICE Q
 0.000000E+00

MATRICE C
 0.100000E+01 0.000000E+00

0.000000E+00 0.100000E+01

0.000000E+00

MATRICE PT

MATRICE QT

MATRICE CT

0.100000E+01 0.000000E+00

0.000000E+00 0.000000E+00

0.100000E+01

0.100000E+01 0.100000E+01

0.000000E+00

K	1	2	3	4
COV	.100000E+01 .000000E+00	.309091E+01 .300000E+01	.464386E+00 .273503E+00	.226148E+00 .954061E-01
	.000000E+00 .300000E+01	.300000E+01 .300000E+01	.273503E+00 .179486E+00	.954061E-01 .469458E-01
COR	.909091E+00	.968661E+00	.822816E+00	.693391E+00
	.000000E+00	.940171E+00	.484603E+00	.292524E+00
XEST	.727273E-01	.198803E+01	.380833E+01	.589794E+01
	.000000E+00	.185897E+01	.183619E+01	.194310E+01
COVEM	.110000E+01	.319091E+01	.564386E+00	.326148E+00
TRACE	.400000E+01	.609091E+01	.643872E+00	.273094E+00

169

CONCLUSION.

La méthode de Kalman et le formalisme qui lui est associé présentent de nombreux avantages:

- La forme récurrente des équations à utiliser facilite une exploitation par ordinateur.
- La forme des équations de base se prête souvent à une exploitation satisfaisante des informations dont on dispose.
- Les optimisations effectuées ont une signification claire.
- La méthode fournit outre l'estimé du vecteur d'état, une estimation de la confiance que l'on peut accorder à cette estimation.

Par contre il faut reconnaître certaines difficultés pouvant être rencontrées lors de l'application pratique de cette méthode:

- 1°) Le volume des calculs à effectuer
- 2°) Le problème de divergence du filtre qui peut provenir soit d'une mauvaise connaissance du modèle mathématique, soit d'une mauvaise connaissance des propriétés statistiques des bruits.

Dans notre travail nous ne prétendons guère avoir résolu toutes ces difficultés, mais néanmoins cela nous a permis d'élaborer un programme de simulation d'un filtre de Kalman, et de mieux discerner les problèmes qui s'y rencontrent.

Notre travail pourrait être complété en amont par un travail de modélisation et de linéarisation du modèle, et en aval par une poussée vers une analyse plus globale et plus générale du problème.

En tout état de cause, une étude complète sur le filtrage de Kalman, nécessite un temps bien plus long qu'un semestre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES./

- (1) M. LABARRERE, J.P. KRIEF, B. GIMONDET Le filtrage et ses applications Ed. CEPADUES Toulouse 1978
- (2) J. LIFERMANN Les principes du traitement statistique du signal Ed. MASSON Paris 1981
- (3) J.C. RADIX Introduction au filtrage numerique Ed. EYROLLES Paris 1970
- (4) C. FOULARD, S. GENTIL, J.P. SANDRAZ Commande et regulation par calculateur numerique Ed. EYROLLES Paris 1979
- (5) P.de. LARMINAT, Y. THOMAS Automatique des systemes lineaires Ed. FLAMMARION-SCIENCES Paris 1976
- (6) Y. ESVELLY Systemes et asservissements echantillonnés Ed. DUNOD Paris 1969
- (7) M. DREYFUS Fortran IV Ed. DUNOD Paris 1970
- (8) J. VIGNES, M. LaPORTE Theorie et pratique de la programmation Fortran Ed. TECHNIP Paris 1972
- (9) H.L. VANTRESS Detection, Estimation, and Modulation Theory Ed. WILEY New York 1968
- (10) B.D.O. ANDERSON, J.B. MOORE Optimal filtering Ed. PRENTICE HALL, INC. Englewood Cliffs, New-Jersey 1979
- (11) A.P. SAGE Optimum Systems Control Ed. PRENTICE HALL INC. Englewood Cliffs, New Jersey 1968
- (12) R.W. HORNBECK Numerical Methods Ed. Quantum PUBLISHERS, INC. New-York 1975
- (13) R.L. LAFARA Computer Methods for Science and Engineering Ed. HAYDEN BOOK COMPANY, INC. New-Jersey 1973
- (14) D. PERRIOT & MATHONNA Le filtrage de Kalman adaptatif Revue technique THOMSON-CSF, Vol 12, N°1, Mars 1980 pp:143-181
- (15) B. DEMIDOVITCH, I. MARON Elements de calcul numerique Ed. MIR Moscou 1973
- (16) A.D. MYSKIS Advanced Mathematics for Engineers Ed. MIR PUBLISHERS Moscou 1975
- (17) Ph.de LARMINAT, C. BONCARLI Extension de la methode de Mehra pour la determination d'un filtre predicteur optimal Revue R.A.I./R.O n°Juillet 1973 J-2, pp. 57-62